POLSKA AKADEMIA NAUK
Instytut Badań Systemowych

Franciszek GRABSKI

SEMI-MARKOWSKIE MODELE NIEZAWODNOŚCI I EKSPLOATACJI

Wprowadzenie

Procesy semi-markowskie, wprowadzone niezależnie i prawie jednocześnie w latach 1954-55 przez P. Levy'ego, W. L. Smitha, L. Takacsa, są istotnym uogólnieniem procesów Markowa, dzięki czemu dają możliwość konstruowania szerszej klasy losowych modeli, w tym modeli niezawodności. Przykłady zastosowań procesów semimarkowskich w teorii niezawodności można znaleźć w wielu publikacjach, np. w pracach [7], [9], [11], [17], [22], [23], [27],[30], [34], [38], [43], [50]. Teoria procesów semi-markowskich rozwija się nadal intensywnie, a jej aplikacje pozwalają rozwiązać niektóre problemy w teorii niezawodności. Celem tej książki jest przedstawienie wybranych elementów teorii procesów semi-markowskich, oraz przedstawianie przykładów semi-markowskich modeli niezawodności i eksploatacji.

Praca składa się z 11 rozdziałów.

Wstępny rozdział 1 zawiera elementy teorii jednorodnych łańcuchów Markowa o dyskretnym zbiorze stanów. W rozdziale tym zostały przedstawione najistotniejsze pojęcia i twierdzenia, które były niezbędne do przedstawienia elementów teorii procesów semi-Markowa (SM).

W rozdziale 2 została przedstawiona definicja i podstawowe własności procesu semi-markowskiego o co najwyżej przeliczalnym zbiorze stanów. Podane zostały różne sposoby konstrukcyjnego określania procesu semi-markowskiego. Przedstawiony związek procesu semi-Markowa z procesem Markowa. Zostały podane przykłady procesów semi-markowskich.

W rozdziale 3 zostały omówione charakterystyki procesu semi-markowskiego takie jak: chwila pierwszego osiągnięcia podzbioru stanów, prawdopodobieństwa przejścia, prawdopodobieństwa graniczne, sumaryczny czas przebywania w podzbiorach stanów, proces odnowy generowany przez czasy powrotu. Zostały przedstawione różnego rodzaju zaburzone procesy semi-markowskie oraz procesy kumulacji.

W rozdziale 4 został podany sposób komputerowej symulacji procesu SM o skończonym zbiorze stanów.

W rozdziale 5 przedstawiono SM model odnawialnego systemu o strukturze szeregowej przyjmując założenie, że czasy zdatności są zmiennymi losowymi o rozkładach wykładniczych, natomiast czasy obsług maja rozkład dowolny. W oparciu o zbudowany model wyznaczono kilka charakterystyk niezawodnościowe systemu.

Rozdział 6 zawiera SM model funkcjonowania obiektu realizującego różne zadania. Do obliczenia przybliżonej funkcji niezawodności systemu wykorzystano pojęcie i własności zaburzonego procesu SM.

W rozdziale 7 przedstawiono 3-stanowy SM model procesu eksploatacji obiektu uwzględniający obsługi profilaktyczne. Sformułowano zagadnienie optymalizacji czasu użytkowania do chwili rozpoczęcia obsługi profilaktycznej. Podano i udowodniono twierdzenie o istnieniu i jednoznaczności rozwiązania tego zadania.

W rozdziale 8 przedstawiono SM model odnawialnego systemu z zimną rezerwą i wyznaczono pewne charakterystyki i parametry niezawodności tego systemu.

Rozdział 9 zawiera SM model intensywności użytkowania. Omówiono sposób estymacji parametrów modelu oraz sposób matematycznej analizy intensywności użytkowania.

W rozdziale 10 została podana definicja funkcji niezawodności obiektu przy założeniu, że intensywność uszkodzeń jest procesem stochastycznym o określonych własnościach. Badano przypadek semi-markowskiej intensywność uszkodzeń. Otrzymano interesujący wynik dla procesu Poissona jako intensywności uszkodzeń. Badano również przypadek losowej intensywności uszkodzeń jako liniowej funkcji procesu obciążeń.

W rozdziale 11 przedstawiono modele systemów wielostanowych, przyjmując założenie że modelami niezawodnościowymi stanów elementów są szczególne procesy semi-markowskie. Rozpatrzono niezawodność wielostanowego systemu nieodnawialnego oraz systemu odnawialnego.

Rozdział 10

Losowa intensywność uszkodzeń

Często obiekty techniczne (np. środki transportu) użytkowane są ze zmieniającą się losowo intensywnością. Ponieważ w wielu przypadkach intensywność użytkowania wpływa na intensywność uszkodzeń, możemy przyjąć, że intensywność uszkodzeń $\{\lambda(t) : t \geqslant 0\}$ jest procesem losowym. Losową intensywność użytkowania jak w poprzednim rozdziale oznaczać będziemy symbolem $\{\boldsymbol{u}(t) : t \geqslant 0\}$. Zakładamy, że trajektorie obu procesów są nieujemnymi, prawostronnie ciągłymi funkcjami, dla których istnieją granice lewostronne.

10.1. Funkcja niezawodności o losowej intensywności uszkodzeń

W pracy I.Kopocińskiej i B.Kopocińskiego [34] została zdefiniowana funkcja niezawodności oraz zostały zbadane jej własności, przy założeniu, że intensywność uszkodzeń jest szczególnym procesem semi-markowskim o skończonym zbiorze stanów. W pracy tej rozważano również jako model intensywność uszkodzeń proces przedziałami markowski. W pracy [27] zostały przedstawione pewne uogólnienia niektórych wyników zawartych w artykule [34].

DEFINICJA 44 [34],[27]. *Niech $\{\lambda(t) : t \geqslant 0\}$ będzie procesem losowym o nieujemnych, prawostronnie ciągłych realizacjach, dla których istnieją granice lewostronne. Funkcję niezawodności obiektu o losowej intensywności uszkodzeń $\{\boldsymbol{\lambda}(t) : t \geqslant 0\}$ definiujemy wzorem*

$$R(t) = E\left[\exp\left(-\int_0^t \lambda(x)dx\right)\right] . \tag{10.1}$$

Funkcja ta ma wszystkie własności klasycznej funkcji niezawodności.

WNIOSEK 22. *Jeżeli*

$$\int_0^t E\left[\lambda(x)\right]dx < \infty ,$$

to

$$R(t) \geqslant exp\left[-\int_0^t E[\lambda(x)]dx\right] . \tag{10.2}$$

D o w ó d: Dowód wynika z twierdzenia Fubiniego i nierówności Jensena. □

Z tej nierówności wynika, że niezawodność obiektu o losowej intensywności $\{\boldsymbol{\lambda}(t) : t \geqslant 0$ jest większa lub równa od niezawodności obiektu z deterministyczną intensywnością uszkodzeń równą $\overline{\lambda}(t) = E\left[\boldsymbol{\lambda}(t)\right]$.

10.2. Proces semi-markowski jako intensywność uszkodzeń

Przyjmujemy, że $\{\boldsymbol{u}(t) : t \geqslant 0\}$ jest procesem semi-Markowa zdefiniowanym na dyskretnej przestrzeni stanów $U = \{u_j : j \in J\}$, gdzie $J = \{1, 2, \ldots\}$, albo $J = \{1, 2, \ldots, m\}$ oraz $u_i \in R$, $0 \leqslant u_1 < u_2 < \ldots$. Zakładamy, że ten proces zdefiniowany jest przez rozkład początkowy

$$\boldsymbol{p}_0 = [P\{u(0) = u_i\} : i \in J] \tag{10.3}$$

oraz jądro

$$\boldsymbol{Q}(t) = [Q_{ij}(t) : i, j \in J], \tag{10.4}$$

gdzie

$$Q_{ij}(t) = P\{\tau_{n+1} - \tau_n \leqslant t, u(\tau_{n+1}) = u_j \,|\, u(\tau_n) = u_i\}\,.$$

Zauważmy, że dla monotonicznej funkcji g, $\{\boldsymbol{\lambda}(t) = g(u(t)) : t \geqslant 0\}$ jest procesem semi-Markowa o zbiorze stanów $\Lambda = g(U)$ i identycznym jądrze. Przyjmujemy teraz, że g jest funkcją rosnącą. Zbiór stanów Λ składa się z liczb rzeczywistych $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2 \ldots$, takich, że $0 \leqslant \lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \ldots$.

Definiujemy warunkową funkcję niezawodności [34]

$$R_i(t) = E\left[\exp\left(-\int_0^t \lambda(x)dx\right) \,|\, \lambda(0) = \lambda_i\right]. \tag{10.5}$$

Zauważmy, że

$$R(t) = \sum_{j\in J} P\{\lambda(0) = \lambda_i\} R_i(t)\,. \tag{10.6}$$

Twierdzenie 47. *Jeśli intensywność uszkodzeń $\{\boldsymbol{\lambda}(t) : t \geqslant 0\}$ jest regularnym procesem semi-markowskim z jądrem $\boldsymbol{Q}(t) = [Q_{ij}(t) : i, j \in J]$, to warunkowa funkcja niezawodności $R_i(t), i \in J$ jest rozwiązaniem układu równań*

$$R_i(t) = e^{-\lambda_i t}(1 - G_i(t)) + \int_0^t e^{-\lambda_i x} \sum_{j\in J} R_j(t-x)dQ_{ij}(x), \quad i \in J, \tag{10.7}$$

gdzie

$$G_i(t) = \sum_{j\in J} Q_{ij}(t).$$

Rozwiązanie powyższego układu równań jest jednoznaczne w klasie funkcji mierzalnych, jednostajnie ograniczonych.

D o w ó d: Niech τ_1 będzie momentem pierwszej zmiany stanu procesu $\{\boldsymbol{\lambda}(t) : t \geqslant 0\}$. Niech

$$I(\tau_1 > t) = \begin{cases} 1 & \text{gdy} \quad \tau_1 > t \\ 0 & \text{gdy} \quad 0 < \tau_1 \leqslant t \end{cases}, \quad I(\tau_1 \leqslant t) = 1 - I(\tau_1 > t)\,.$$

Zauważmy, że

$$R_i(t) = E\left[e^{-\int_0^t \lambda(y)dy} I(\tau_1 > t) \,|\, \lambda(0) = \lambda_i\right] +$$
$$+E\left[e^{-\int_0^t \lambda(y)dy} I(\tau_1 \leqslant t) \,|\, \lambda(0) = \lambda_i\right], \quad i \in J.$$

Jeżeli $\tau_1 > t$, to

$$
\begin{aligned}
& E\left[e^{-\int_0^t \lambda(y)dy} I(\tau_1 > t) \mid \lambda(0) = \lambda_i\right] = \\
&= E\left[e^{-\int_0^t \lambda_i dy} I(\tau_1 > t) \mid \lambda(0) = \lambda_i\right] = \\
&= e^{-\lambda_i t} P\{\tau_1 > t \mid \lambda(0) = \lambda_i\} = e^{-\lambda_i t}[1 - G_i(t)].
\end{aligned}
$$

Jeżeli $\tau_1 \leqslant t$, to z własności procesów semi-markowskich

$$
\begin{aligned}
& E\left[e^{-\int_0^t \lambda(y)dy} I(\tau_1 \leqslant t) \mid \lambda(0) = \lambda_i\right] = \\
&= E\left[e^{-\int_0^{\tau_1} \lambda(y)dy} e^{-\int_{\tau_1}^t \lambda(y)dy} I(\tau_1 \leqslant t) \mid \lambda(0) = \lambda_i\right] = \\
&= E\left[e^{-\lambda_i \tau_1} e^{-\int_{\tau_1}^t \lambda(y)dy} I(\tau_1 \leqslant t) \mid \lambda(0) = \lambda_i\right] = \\
&= \sum_{j\in J} \int_0^t e^{-\lambda_i x} R_j(t-x) P\{\lambda(\tau_1) = \lambda_j,\ \tau_1 \in dx \mid \lambda(0) = \lambda_i\} = \\
&= \sum_{j\in J} \int_0^t e^{-\lambda_i x} R_j(t-x) dQ_{ij}(x), \quad i \in J.
\end{aligned}
$$

Zatem

$$
R_i(t) = e^{-\lambda_i t}(1 - G_i(t)) + \int_0^t e^{-\lambda_i x} \sum_{j\in J} R_j(t-x) dQ_{ij}(x), \quad i \in J.
$$

Zamierzamy pokazać, że rozwiązanie tego układu równań jest jednoznaczne w klasie funkcji mierzalnych, jednostajnie ograniczonych. Przyjmijmy, że istnieje inna funkcja $\hat{R}_j(t)$ będąca rozwiązaniem równania (10.7). Stąd wynika następujący układ równań

$$
w_i(t) = \sum_{j\in J} \int_0^T e^{-\lambda_i x} w_j(t-x) dQ_{ij}(x), \quad i \in J,
$$

gdzie

$$
w_i(t) = R_i(t) - \hat{R}_i(t)\,.
$$

Następujące nierówności są spełnione dla wszystkich $i \in J$ i wszystkich $t \geqslant 0$:

$$
\begin{aligned}
& | w_i(t) | \leqslant \sum_{j\in J} \int_0^t | w_j(t-x) | \, dQ_{ij}(x) = \\
&= \sum_{j\in J} | w_j * Q_{ij}(t) | \leqslant \sum_{j\in J} \sum_{r_1\in J} \ldots \sum_{r_n\in J} c \cdot Q_{ir_1} * \ldots Q_{r_{n-1}j}(t) = \\
&= cP\{\tau_n \leqslant t \mid \lambda(0) = \lambda_i\}\,.
\end{aligned}
$$

Z regularności procesu $\{\lambda(t) : t \geqslant 0\}$ wynika, że

$$
\lim_{n\to\infty} P\{\tau_n \leqslant t \mid \lambda(0) = \lambda_i\} = 0\,.
$$

Stąd dla wszystkich $j \in J$ oraz dla każdego $t \geqslant 0$ mamy $w_i(t) = 0$ i w związku z tym $R_i(t) = \hat{R}_i(\bar{t})$. $\square$

Układ równań (10.7) poddany transformacji Laplace'a przyjmuje postać układu równań liniowych dla transformat

$$\tilde{R}_i(s) = \frac{1}{s+\lambda_i} - \tilde{G}_i(s+\lambda_i) + \sum_{j\in J} \tilde{R}_j(s)\tilde{q}_{ij}(s+\lambda_i), \quad i \in J \tag{10.8}$$

gdzie

$$\tilde{R}_i(s) = \int_0^\infty e^{-st} R_i(t)dt, \quad \tilde{G}_i(s) = \int_0^\infty e^{-st} G_i(t)dt, \quad \tilde{q}_{ij}(s) = \int_0^\infty e^{-st} dQ_{ij}(t)dt\,.$$

Ten układ równań jest równoważny układowi równań liniowych

$$\sum_{j\in J} (\delta_{ij} - \tilde{q}_{ij}(s+\lambda_i))\, \tilde{R}_j(s) = \frac{1}{s+\lambda_i} - \tilde{G}_i(s+\lambda_i), \quad i \in J, \tag{10.9}$$

który w zapisie macierzowym przyjmuje postać

$$(\boldsymbol{I} - \tilde{\boldsymbol{q}}_\lambda(s))\tilde{\boldsymbol{R}}(s) = \tilde{\boldsymbol{H}}(s)\,, \tag{10.10}$$

gdzie

$$\tilde{\boldsymbol{q}}_\lambda(s) = [\tilde{q}_{ij}(s+\lambda_i) : i, j \in J]\,,$$

jest macierzą kwadratową, natomiast

$$\tilde{\boldsymbol{R}}(s) = [\tilde{R}_i(s) : i \in J]', \quad \tilde{\boldsymbol{H}}(s) = [\frac{1}{s+\lambda_i} - \tilde{G}_i(s+\lambda_i) : i \in J]'$$

są macierzami jednokolumnowymi.

Niech

$$\tilde{R}_i(0^+) = \lim_{p\to 0^+} \tilde{R}_i(p), \quad p \in (0,\infty).$$

Jeżeli, granica ta istnieje, to

$$\tilde{R}_i(0^+) = \int_0^\infty R_i(t)dt = \bar{\mu}_i$$

jest ona wartością oczekiwaną czasu zdatności obiektu o losowej intensywności uszkodzeń, z wartością początkową λ_i. Wykorzystując ten fakt do układu równań (10.10), otrzymujemy układ równań liniowych dla oczekiwanych czasów zdatności, który w zapisie macierzowym ma postać

$$(\boldsymbol{I} - \tilde{\boldsymbol{q}}_\lambda(0^+))\bar{\boldsymbol{\mu}} = \tilde{\boldsymbol{H}}(0^+)\,, \tag{10.11}$$

gdzie

$$\tilde{q}_\lambda(0^+) = [\lim_{p\to 0^+} \tilde{q}_{ij}(p+\lambda_i)\,,: \; i, j \in J] \tag{10.12}$$

jest macierzą kwadratową, natomiast

$$\boldsymbol{\mu} = \tilde{\boldsymbol{R}}(0^+) = [\mu_i : \ i \in J]' , \quad \tilde{\boldsymbol{H}}(0^+) = \lim_{p \to 0^+} \tilde{\boldsymbol{H}}(p)$$

są odpowiednimi macierzami jednokolumnowymi.

Jeżeli istnieje drugi skończony moment czasu zdatności obiektu, to można go obliczyć wykorzystując równość

$$\bar{\mu_i^2} = -\tilde{R}_i'(0^+) = -\int_0^\infty tR(t)dt .$$

Różniczkując względem s układ równań (10.9) otrzymujemy

$$\sum_{j \in J} [\, -\tilde{q}_{ij}'(\lambda_i + s)\tilde{R}_j(s) + (\delta_{ij} - \tilde{q}_{ij}(\lambda_i + s))\tilde{R}_j'(s)\,] =$$

$$= -\frac{1 + (\lambda_i + s)^2 \tilde{G}_i'(\lambda_i + s)}{(\lambda_i + s)^2} , \quad i \in J .$$

Stąd

$$\sum_{j \in J} (\delta_{ij} - \tilde{q}_{ij}(\lambda_i + s))\tilde{R}_j'(s) =$$

$$-\frac{1 + (\lambda_i + s)^2 \tilde{G}_i'(\lambda_i + s)}{(\lambda_i + s)^2} + \sum_{j \in J} \tilde{q}_{ij}'(\lambda_i + s)\tilde{R}_j(s) , \quad i \in J .$$

Podstawiając $s = p \in (0, \infty)$ i przechodząc do granicy przy $p \to 0^+$ w ostatnim równaniu, otrzymujemy

$$(\boldsymbol{I} - \tilde{\boldsymbol{q}}_\Lambda(0^+))\bar{\boldsymbol{\mu}^2} = \tilde{\boldsymbol{K}}(0^+), \quad \text{gdzie} \quad \bar{\boldsymbol{\mu}^2} = -\lim_{p \to 0^+} \tilde{\boldsymbol{R}}'(p) = [\bar{\mu^2}_i : \ i \in J]' \qquad (10.13)$$

oraz

$$\tilde{\boldsymbol{K}}(0^+) = \lim_{p \to 0^+} \left[\frac{1 + (\lambda_i + p)^2 \tilde{G}_i'(\lambda_i + p)}{(\lambda_i + p)^2} - \sum_{j \in J} \tilde{q}_{ij}'(\lambda_i + p)\bar{\mu}_j : \quad i \in J \right]'$$

są macierzami jednokolumnowymi.

10.2.1. Proces alternujący jako intensywność uszkodzeń

Proces alternujący jako intensywność uszkodzeń był rozpatrywany w artykule Kopocińskiej [35]. W naszych rozważaniach proces ten stanowi szczególny przypadek rozpatrywanego tu modelu.

Niech $\{\boldsymbol{\lambda}(t) : \ t \geqslant 0\}$ będzie procesem semi-markowskim o zbiorze stanów $S = \{\lambda_0, \lambda_1\}$ i jądrze

$$\boldsymbol{Q}(t) = \begin{bmatrix} 0 & G_0(t) \\ G_1(t) & 0 \end{bmatrix} , \qquad (10.14)$$

gdzie funkcje $G_0(t), G_1(t)$, $t \geqslant 0$ są dystrybuantami rozkładów prawdopodobieństwa skoncentrowanych w $\mathbb{R}_+$. Tak określony proces semi-markowski jak wiemy jest procesem alternującym. Przyjmujemy, że co najmniej jeden z tych rozkładów ma gęstość. Oznacza to, że jądro jest typu ciągłego. Niech wektor $\boldsymbol{p} = [p_1, p_2]$ będzie rozkładem początkowym tego procesu. Macierze występujące w równaniu (10.10) mają teraz postać

$$(\boldsymbol{I} - \tilde{\boldsymbol{q}}_\lambda(s) = \begin{bmatrix} 1 & -\tilde{g}_0(s+\lambda_0) \\ -\tilde{g}_1(s+\lambda_1) & 1 \end{bmatrix}, \tag{10.15}$$

gdzie

$$\tilde{g}_0(s) = \tilde{q}_{01}(s) = \int_0^\infty e^{-st} dG_0(0), \quad \tilde{g}_1(s) = \tilde{q}_{10}(s) = \int_0^\infty e^{-st} dG_1(0), \tag{10.16}$$

$$\tilde{\boldsymbol{R}}(s) = \begin{bmatrix} \tilde{R}_0(s) \\ \tilde{R}_1(s) \end{bmatrix}, \quad \tilde{\boldsymbol{H}}(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{s+\lambda_0} - \tilde{G}_0(s+\lambda_0) \\ \frac{1}{s+\lambda_1} - \tilde{G}_1(s+\lambda_1) \end{bmatrix}. \tag{10.17}$$

Rozwiązanie tego układu równań ma postać

$$\tilde{R}_0(s) = \frac{\frac{1}{s+\lambda_0} - \tilde{G}_0(s+\lambda_0) + \tilde{g}_0(s+\lambda_0)\left[\frac{1}{s+\lambda_1} - \tilde{G}_1(s+\lambda_1)\right]}{1 - \tilde{g}_0(s+\lambda_0)\,\tilde{g}_1(s+\lambda_1)}, \tag{10.18}$$

$$\tilde{R}_1(s) = \frac{\frac{1}{s+\lambda_1} - \tilde{G}_1(s+\lambda_1) + \tilde{g}_1(s+\lambda_1)\left[\frac{1}{s+\lambda_0} - \tilde{G}_0(s+\lambda_0)\right]}{1 - \tilde{g}_0(s+\lambda_0)\,\tilde{g}_1(s+\lambda_1)}. \tag{10.19}$$

Bezwarunkowa funkcja niezawodności ma postać

$$\tilde{R}(s) = p_1\tilde{R}_1(s) + p_2\tilde{R}_2(s)\,. \tag{10.20}$$

Jako przykład, będziemy analizować proces semi-markowski określony za pomocą rozkładu początkowego $\boldsymbol{p} = [p_0, p_1]$ i jądra

$$\boldsymbol{Q}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1-(1+\beta t)e^{-\beta t} \\ 1-e^{-\alpha t} & 0 \end{bmatrix}, \quad \text{gdzie} \quad \alpha,\ \beta,\ t \geqslant 0\,.$$

W tym przypadku

$$G_0(t) = 1-(1+\beta t)e^{-\beta t}, \quad G_1(t) = 1-e^{-\alpha t}, t \geqslant 0\,.$$

Odpowiednie transformaty Laplace'a wyrażają się wzorami

$$\tilde{G}_0(s) = \frac{\beta^2}{s(\beta+s)^2}, \quad \tilde{G}_1(s) = \frac{\alpha}{s(\alpha+s)},$$

$$\tilde{g}_0(s) = \frac{\beta^2}{(\beta+s)^2}, \quad \tilde{g}_1(s) = \frac{\alpha}{\alpha+s}.$$

Znajdziemy warunkowe funkcje niezawodności dla konkretnych liczbowych wartości parametrów. Przyjmujemy

$$\lambda_0 = 0, \quad \lambda_1 = 0.2, \quad \alpha = 0.01, \quad \beta = 0.1, \quad p_0 = 0, \quad p_1 = 1.$$

Zatem

$$\tilde{G}_0(s) = \frac{0.01}{s(0.1+s)^2}, \quad \tilde{G}_0(s+\lambda_0) = \frac{0.01}{s(0.1+s)^2},$$
$$\tilde{G}_1(s) = \frac{0.01}{s(0.01+s)}, \quad \tilde{G}_1(s+\lambda_1) = \frac{0.01}{(0.2+s)(0.21+s)},$$
$$\tilde{g}_0(s) = \frac{0.01}{(0.1+s)^2}, \quad \tilde{g}_0(s+\lambda_0) = \frac{0.01}{(0.1+s)^2},$$
$$\tilde{g}_1(s) = \frac{0.01}{0.01+s}, \quad \tilde{g}_1(s+\lambda_1) = \frac{0.01}{0.21+s}.$$

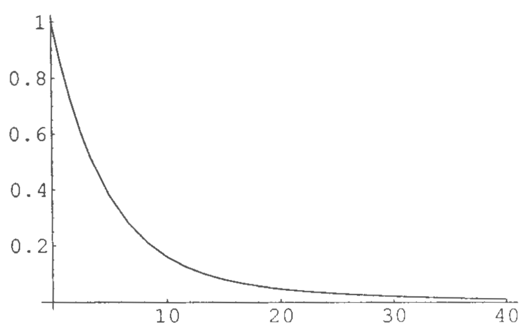
Na podstawie wzoru (10.19) mamy

$$\tilde{R}_1(s) = \frac{\frac{1}{s+0.2} - \frac{0.01}{(s+0.2)(s+0.21)} + \frac{0.01}{s+0.21}\left[\frac{1}{s} - \frac{0.01}{s(s+0.1)^2}\right]}{1 - \frac{0.0001}{(s+0.1)^2(s+0.21)}}.$$

Korzystając z programu MATHEMATICA otrzymujemy transformatę odwrotną

$$R_1(t) = 1.25e^{-0.2} - 0.495913e^{-0.137016t} + 0.245913e^{-0.0729844t}.$$

Funkcja ta jest równa bezwarunkowej funkcji niezawodności $R(t)$. Wykres tej funkcji niezawodności przedstawiony jest na rysunku 10.22.



Rys. 10.22. Wykres funkcji niezawodności $R(t) = R_1(t)$

10.2.2. Proces Poissona jako intensywność uszkodzeń

Przyjmujemy teraz, że proces $\{\lambda(t) : t \geqslant 0\}$ opisujący intensywność uszkodzeń jest procesem Poissona z parametrem λ.

TWIERDZENIE 48. *Jeśli intensywność uszkodzeń* $\{\boldsymbol{\lambda}(t) : t \geqslant 0\}$ *jest procesem Poissona z parametrem* λ, *to funkcja niezawodności*

$$R(t) = E \exp[-\int_0^t \lambda(x)dx]$$

wyraża się wzorem

$$R(t) = e^{-[\lambda(t-1+e^{-t})]} \ . \tag{10.21}$$

D o w ó d: Process Poissona z parametrem λ, jest procesem semi-markowskim o zbiorze stanów $S = \{0, 1, 2, \ldots\}$, rozkładzie początkowym $\boldsymbol{p}(0) = [1, 0, 0, \ldots]$ i jądrze

$$\boldsymbol{Q}(t) = \begin{bmatrix} 0 & G_0(t) & 0 & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & 0 & G_1(t) & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & G_2(t) & 0 & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G_3(t) & 0 \\ \multicolumn{6}{c}{\dots\dots\dots\dots\dots\dots} \end{bmatrix},$$

gdzie $G_i(t) = 1 - e^{-\lambda t}$, $t \geqslant 0$, $i \in \mathbb{N}_0$. Odpowiadająca temu jądru macierz transformat Laplace'a-Stjeltiesa ma postać

$$\tilde{\boldsymbol{q}}(s) = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\lambda}{s+\lambda} & 0 & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & 0 & \frac{\lambda}{s+\lambda} & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\lambda}{s+\lambda} & 0 & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\lambda}{s+\lambda} & 0 \\ \multicolumn{6}{c}{\dots\dots\dots\dots\dots\dots} \end{bmatrix}.$$

Równanie (10.10) przyjmuje teraz postać

$$\begin{bmatrix} 1 & -\frac{\lambda}{s+\lambda} & 0 & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & 1 & -\frac{\lambda}{s+\lambda+1} & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{\lambda}{s+\lambda+2} & 0 & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{\lambda}{s+\lambda+3} & 0 \\ \multicolumn{6}{c}{\dots\dots\dots\dots\dots\dots} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{R}_0(s) \\ \tilde{R}_1(s) \\ \tilde{R}_2(s) \\ \tilde{R}_3(s) \\ \ldots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{s+\lambda} \\ \frac{1}{s+\lambda+1} \\ \frac{1}{s+\lambda+2} \\ \frac{1}{s+\lambda+3} \\ \ldots \end{bmatrix}.$$

Równanie to jest równoważne nieskończonemu układowi równań

$$\begin{aligned} \tilde{R}_0(s) - \frac{\lambda}{s+\lambda}\tilde{R}_1(s) &= \frac{1}{s+\lambda} \\ \tilde{R}_1(s) - \frac{\lambda}{s+\lambda+1}\tilde{R}_2(s) &= \frac{1}{s+\lambda+1} \\ \tilde{R}_2(s) - \frac{\lambda}{s+\lambda+2}\tilde{R}_3(s) &= \frac{1}{s+\lambda+2} \\ \tilde{R}_3(s) - \frac{\lambda}{s+\lambda+3}\tilde{R}_4(s) &= \frac{1}{s+\lambda+3} \\ \dots\dots\dots\dots & \dots\dots\dots \end{aligned}$$

Stąd

$$\tilde{R}_0(s) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\lambda^k}{\prod\limits_{i=0}^{k}(s+\lambda+i)} + \frac{\lambda^{n+1}}{\prod\limits_{i=0}^{n}(s+\lambda+i)}\tilde{R}_{n+1}(s)\,.$$

Przechodząc z $n \to \infty$ otrzymujemy

$$\tilde{R}_0(s) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{\prod\limits_{i=0}^{k}(s+\lambda+i)}\,. \tag{10.22}$$

Skorzystamy z następujących własności przekształcenia Laplace'a

$$L[(1-e^{-t})^k] = \frac{k!}{s(s+1)(s+2)\ldots(s+k)},$$
$$L[e^{-\lambda t}f(t)] = \tilde{f}(s+\lambda).$$

Zauważmy, że

$$L[\frac{\lambda^k(1-e^{-t})^k e^{-\lambda t}}{k!}] = \frac{\lambda^k}{(s+\lambda)(s+\lambda+1)(s+\lambda+2)\ldots(s+\lambda+k)}\,.$$

Obliczamy transformatę odwrotną.

$$R_0(t) = L^{-1}[\tilde{R}_0(s)] = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k e^{-\lambda t}(1-e^{-t})^k}{k!} =$$
$$= e^{-\lambda t}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k(1-e^{-t})^k}{k!} = e^{-\lambda t}e^{\lambda(1-e^{-t})} = e^{-[\lambda(t-1+e^{-t})]}\,.$$

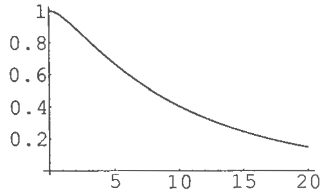
Ponieważ

$$R(t) = R_0(t),$$

więc funkcja niezawodności ma postać

$$R(t) = e^{-[\lambda(t-1+e^{-t})]}\,. \quad \square$$

Funkcja niezawodności określona wzorem (10.21) z parametrem $\lambda = 0.1$ jest przedstawiona na rysunku 10.23.



Rys. 10.23. Funkcja niezawodności z poissonowską intensywnością uszkodzeń

Przypomnijmy, że jeśli $\{\boldsymbol{\lambda}(t) : t \geqslant 0\}$ jest procesem Poissona z parametrem $\lambda > 0$, to

$$E\left[\boldsymbol{\lambda}(t)\right] = \lambda t, \quad t \geqslant 0.$$

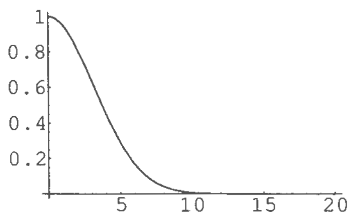
Korzystając z nierówności (10.2) otrzymujemy

$$R(t) \geqslant \exp\left(-\frac{\lambda}{2}t^2\right).$$

Niech

$$\hat{R}(t) = \exp\left(-\frac{\lambda}{2}t^2\right).$$

Dla porównania wykres funkcji $\hat{R}(t)$ z parametrem$\lambda = 0.1$ został przedstawiony na rysunku 10.24.

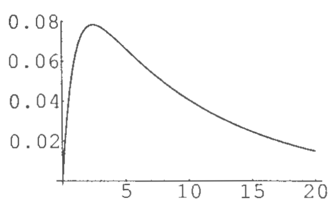


Rys. 10.24. Funkcja niezawodności $\hat{R}(t)$

WNIOSEK 23. *Gęstość rozkładu czasu zdatności z poissonowską intensywnością uszkodzeń ma postać*

$$f(t) = \lambda e^{-\left[\lambda\left(t-1+e^{-t}\right)\right]}\left(1-e^{-t}\right). \tag{10.23}$$

Wykres tej funkcji dla $\lambda = 0.1$ jest przedstawiony na rysunku 10.25.



Rys. 10.25. Gęstości rozkładu czasu zdatności z poissonowską intensywnością uszkodzeń

WNIOSEK 24. *Jeśli intensywność uszkodzeń obiektu $\{\boldsymbol{\lambda}(t) : t \geqslant 0\}$ jest procesem Poissona z parametrem λ to oczekiwany czas zdatności tego obiektu $E(T)$ wyraża się wzorem*

$$E(T) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{\prod\limits_{i=0}^{k}(\lambda + i)}. \tag{10.24}$$

10.3. Intensywności uszkodzeń zależna od losowego procesu obciążeń

TWIERDZENIE 49. *Niech intensywność użytkowania obiektu* $\{u(t) : t \geqslant 0\}$ *będzie procesem losowym z ergodyczną wartością oczekiwaną*

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T u(x)dx = E\left[u(t)\right] = \overline{\mu} \ \ z\ pr.1\ .$$

Jeżeli

$$\lambda(t) = \varepsilon u(t)\ ,\ \ \varepsilon > 0\,, \tag{10.25}$$

to

$$\lim_{\varepsilon\to 0} R\left(\frac{t}{\varepsilon}\right) = \exp(-\overline{u}t). \tag{10.26}$$

D o w ó d: Twierdzenie to udowodnimy naśladując dowód twierdzenia zamieszczonego w pracy [34]. Niech $T = \frac{t}{\varepsilon}$. Z ciągłości funkcji wykładniczej mamy

$$\lim_{\varepsilon\to 0} R\left(\frac{t}{\varepsilon}\right) = \lim_{\varepsilon\to 0} E\left[\exp(-\int\limits_0^{\frac{t}{\varepsilon}} \varepsilon u(x)dx)\right] =$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0} E\left[\exp(t\frac{\varepsilon}{t}\int\limits_0^{\frac{t}{\varepsilon}} u(x)dx\right] =$$

$$= \lim_{T\to\infty} E\left[-t\frac{1}{T}\int_0^T u(x)dx\right] = \exp[-\overline{u}t]\ . \qquad \square$$

Dla małych ε otrzymujemy przybliżenie

$$R(x) \approx \exp(-\varepsilon\overline{\mu}x) \tag{10.27}$$

Dla semi-markowskiej intensywności uszkodzeń można sformułować odpowiednik twierdzenia 49.

TWIERDZENIE 50. *Jeśli intensywność użytkowania obiektu* $\{u(t) : t \geqslant 0\}$ *jest procesem semi-Markowa o jądrze* $\boldsymbol{Q}(t) = [Q_{ij}(t)\ :\ i,j \in J]$, *spełniającym założenia twierdzenia granicznego* 34 *oraz*

$$\lambda(t) = \varepsilon u(t),\quad \varepsilon > 0\ , \tag{10.28}$$

to

$$\lim_{\varepsilon\to 0} R\left(\frac{t}{\varepsilon}\right) = \exp(-\overline{u}t), \tag{10.29}$$

gdzie

$$\overline{u} = \frac{\sum\limits_{i\in J} u_i m_i \pi_i}{\sum\limits_{i\in S} m_i \pi_i}\ , \tag{10.30}$$

przy czym

$$m_i = \int_0^\infty [1 - G_i(t)]dt = \int_0^\infty [1 - \sum_{j \in J} Q_{ij}(t)]dt$$

jest wartością oczekiwaną czasu trwania stanu $u_i \in \mathcal{U}$*, natomiast prawdopodobieństwa* π_i*,* $i \in J$ *stanowią rozkład stacjonarny włożonego łańcucha Markowa* $\{u(\tau_n) : n \in \mathbb{N}_0\}$ *o macierzy prawdopodobieństw przejść*

$$\boldsymbol{P} = [p_{ij} : i, j \in J], \quad p_{ij} = Q_{ij}(\infty) .$$

D o w ó d: Z twierdzenia podanego w pracy [2] wynika, że z prawdopodobieństwem 1

$$\lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_0^T u(x)dx = \frac{\sum_{i \in J} u_i m_i \pi_i}{\sum_{i \in S} m_i \pi_i} = \overline{u} .$$

Zatem powtarzając dowód poprzedniego twierdzenia otrzymujemy

$$\lim_{\varepsilon \to 0} R\left(\frac{t}{\varepsilon}\right) = \exp(-\overline{u}t) .$$

Dla małych ε otrzymujemy przybliżenie

$$R(x) \approx \exp(-\varepsilon \overline{u} x) . \quad \square \tag{10.31}$$

Bibliografia

[1] Анисимов В.В.: Предельные теоремы для полумарковских процессов. *Теория вероятностей и математическая статистика,* Изд-во Киевского Университета, Киев 1970, вып. 3, с. 3-15.

[2] Анисимов В.В.: Многомерные предельные теоремы для полумарковских процессов со счетным числом состояний. *Теория вероятностей и математическая статистика,* Изд-во Киевского Университета, Киев 1970, вып. 2, с. 3-21.

[3] Asmussen, S.: *Applied Probability and Queues.* Wiley, Chichester 1987.

[4] Aven T.: Relibility evaluation of multistate systems with multistate components. *IEEE Transac tions on Reliability*, 34(2), 1985, p. 463-472.

[5] Barlow R.E., Proshan F.: *Mathematical theory of reliability.* Wiley, New York, London, Sydney 1965.

[6] Billingsley P.: *Prawdopodobobieństwo i miara.* PWN, Warszawa 1987.

[7] Броди С.М., Погосян И.А.: *Вложенные стохастические процессы в теории массового обслуживания.* Наукова Думка, Киев 1977.

[8] Bobrowski D.: *Modele i metody matematyczne teorii niezawodności.* WN-T, Warszawa 1985.

[9] Cinlar E.: Markov renewal theory. *Adv. Appl. Probab.* 1969, 1, No 2, p. 123-187.

[10] Cinlar E.: Markov renewal theory: a survey.

[11] Csenki, A.(1994). *Dependability for Systems with a Partitioned State Space Markov and Semi-Markov Theory and Computatinal Implemantation.* Springer-Verlang, New York, Inc. 1994.

[12] Domsta J., Grabski F.: Rozkład losowej chwili pierwszego opuszczenia podzbioru stanów jednorodnego procesu semimarkowskiego. *Zeszyty Naukowe Akademii Marynarki Wojennej*, Gdynia, nr. 1/104, 1990, s. 113-125.

[13] DOMSTA J., GRABSKI F.: The first exit of almost strongly recurrent semi-Markov processes. *Applicationes Mathematicae*, 23, No 3 (1995), p. 285-304.

[14] DOMSTA J., GRABSKI F.: Semimarkowskie modele i algorytmy niezawodności odnawialnych systemów z rezerwą. *Preprint*, Uniwersytet Gdański, Instytut Matematyki, 1996, 23 str.

[15] FELLER W.: On semi-Markov prcesses. *Proc.Nat.Acad.Sci. USA*, 1964, 51, No 4, p. 653-659.

[16] FELLER W.: *Wstęp do rachunku prawdopodobieństwa*, Tom I. PWN, Warszawa 1980.

[17] ГЕРЦБАХ И.Б.: Модели профилактики. Советское Радио, Москва 1969.

[18] GERTSBAKH I.B.: Asymptotic methods in reliability theory: a review. *Adv. Appl. Prob.*, 16, 1984, p. 147-175.

[19] GICHMAN I.I., SKOROCHOD A.W.: *Wstęp do teorii procesów stochastycznych.* PWN, Warszawa 1968.

[20] GNIEDENKO B.W., BIELAJEW J.K., SOŁOWIEW A.D.: *Metody matematyczne w teorii niezawodności.* WN-T, Warszawa 1968.

[21] GRABSKI F.: Analiza losowej intensywności użytkowania w oparciu o procesy semi-Markowa. *Zagadnienia Eksplostacji Maszyn*, Zeszyt 3-4 (47-48), 1981, s. 294-305.

[22] GRABSKI F.: Teoria semi-markowskich procesów eksploatacji obiektów technicznych. *Zeszyty Naukowe Wyższej Szkoły Marynarki Wojennej*, 75A, Gdynia 1982, 253 str.

[23] GRABSKI F.: O pewnym zagadnieniu optymalizacji obsług profilaktycznych. *Zagadnienia Eksplostacji Maszyn*, Zeszyt 2 (62), 1985, s. 397-407.

[24] GRABSKI F.: Czas pierwszego przejścia procesu semimarkowskiego o dyskretnym zbiorze stanów. *Preprint Katedry Matematyki nr 1*, Akademia Marynarki Wojennej, Gdynia 1988, 19 str.

[25] GRABSKI F, KOŁOWROCKI K.: Asymptotic reliability of multistate systems with semi-Markov states of components. *Safety and Reliability*, A.A. Balakema, Roterdam 1999, p. 317-322.

[26] GRABSKI F., ZAŁĘSKA-FORNAL A.: Wielostanowe systemy niezawodnościowe z niezależnymi elementami. *KONBiN'2002, ITWL*, Warszawa 2001, s. 143-151.

[27] GRABSKI F.: The reliability of the object with semi-Markov failure rate. *Applied Mathematics and Computation*, Elsevier 2001 (praca w druku).

[28] HOWARD R.: *Dynamic propabilistic system. Vol. II: Semi-Markow and decision processes.* Wiley, New York, London, Sydney, Toronto 1971.

[29] IOSIFESCU M.: *Skończone procesy Markowa i ich zastosowania.* PWN, Warszawa 1988.

[30] JAŹWIŃSKI J., BORGOŃ J.: *Niezawodność eksploatacyjna i bezpieczeństwo lotów.* WKŁ, Warszawa 1989.

[31] KEILSON, J.: A limit theorem for passage times in ergodic regenerative processes. *Ann. Math. Statist.*, 37 (1966), p. 866–870.

[32] KOŁOWROCKI K.: Asymptotyczne podejście do analizy niezawodnosci stystemów. *Instytut Badań Systemowych PAN*, Seria: Badania Systemowe, tom 27, Warszawa 2001.

[33] KOPOCIŃSKI B.: *Zarys teorii odnowy i niezawodności.* PWN, Warszawa 1973.

[34] KOPOCIŃKA I., KOPOCIŃSKI B.: On system reliability under random load of elements. *Zastosowania Matematyki* (*Aplicationes Mathematicae*), XVI, 1 (1980), p. 5-14.

[35] KOPOCIŃSKA I. The reliability of an element with alternating failure rate. *Zastosowania Matematki*(*Aplicationes Mathematicae*), XVIII, 2 (1984), p. 187-194.

[36] KOPOCIŃSKI B.: List do F.Grabskiego, 1987.

[37] KORCZAK E.: Reliability analysis of non-repaired multistate systems. *Advances in Safety and Reliability*, Lisbon, Portugal 1997, p. 2213-2220.

[38] КОРОЛЮК В.С., ТУРБИН А.Ф.: *Полумарковские процессы и их приложения*, Наукова Думка, Киев 1976.

[39] KOŹNIEWSKA I., WŁODARCZYK M: *Modele odnowy, niezawodności i masowej obsługi.* PWN, Warszawa 1978.

[40] LEE T.C., JUDGE G.G., ZELLNER A.: *Estimating the parameters of the Markov Probability Model from Aggregate Time Series Data.* Amsterdam-London, NHPC 1970.

[41] LIMNIOS N., OPRISAN G.: A unified approach for reliability and performability evaluation of semi-Markov systems. *Applied Stochastic Models in business and industry*, 15 (1999), p. 353-368.

[42] LIMNIOS N., OPRISAN G.: A The invariance principle for an additive functional of semi-Markov process. *Romanian Journal of Pure and Applied Mathematics*, T. XLIV, No 1, 1999, p. 75-83.

[43] LIMNIOS N., OPRISAN G.: *Semi-Markov Processes and Reliability*. Boston, Birkhauser 2001.

[44] OLEARCZUK E: *Zarys teorii użytkowania urządzeń technicznych*. WN-T, Warszawa 1972.

[45] PIASECKI S.: *Optymalziacja systemów obsługi technicznej*. WN-T, Warszawa 1972.

[46] PIASECKI S.: *Elementy teorii miezawodności i eksploatacji urządzeń*. WAT, Warszawa 1974.

[47] PIASECKI S.: *Elementy teorii miezawodności i eksploatacji obiektów o elementach wielostanowych*. IBS PAN, Warszawa 1995.

[48] SENETA, E.: Regularly Varying Functions. *Lecture Notes in Math.*, **508** (1976), Springer, Berlin-Heidelberg-New York.

[49] SHIRYAYEV A. N.: *Probability*. Springer-Verlag, New York, Berlin, Heidelberg, Tokyo 1984.

[50] СИЛЬВЕСТРОВ Д.С.: *Полумарковские процессы с дискретным множеством состояний*. Советское Радио, Москва 1969.

[51] SOLOVYEV A.D.: Asymptotic behavior of the time of the first occurence of a rare event. *Engineering Cybernetics*, **9**, 6 (1971), p. 1038–1048.

[52] SOLOVYEV, A.D.: *Analityczne Metody Teorii Niezawodności*. WN-T, Warszawa 1979.

[53] ШПАК В.Д.: Об одном предельном соотношении для расчета надежности сложных систем. *Кибернетика*, 10, 1971, с. 68-73.

Franciszek Grabski

SEMI-MARKOWSKIE MODELE NIEZAWODNOŚCI I EKSPLOATACJI

Procesy semi-markowskie, wprowadzone niezależnie i prawie jednocześnie w latach 1954-55 przez P. Levy'ego, W. L. Smitha, L. Takacsa, są istotnym uogólnieniem procesów Markowa, dzięki czemu dają możliwość konstruowania szerszej klasy losowych modeli, w tym modeli niezawodności. Teoria procesów semi-markowskich rozwija się nadal intensywnie, a jej aplikacje pozwalają rozwiązać niektóre problemy w teorii niezawodności.

W książce zostały przedstawione elementy teorii procesów semi-markowskich o co najwyżej przeliczalnych zbiorach stanów oraz zostały podane przykłady zastosowań tych procesów w problemach niezawodności i eksploatacji.

Zostały omówione charakterystyki procesu semi-markowskiego takie jak: chwila pierwszego osiągnięcia podzbioru stanów, prawdopodobieństwa przejścia, prawdopodobieństwa graniczne, sumaryczny czas przebywania w podzbiorach stanów, proces odnowy generowany przez czasy powrotu. Zostały przedstawione różnego rodzaju zaburzone procesy semi-markowskie oraz procesy kumulacji.

Przedstawiono model odnawialnego systemu o stukturze szeregowej, model funkcjonowania obiektu realizującego różne zadania, model procesu eksploatacji obiektu uwzględniający obsługi profilaktyczne, model odnawialnego systemu z zimną rezerwą oraz model intensywności użytkowania.

Została podana definicja funkcji niezawodności obiektu przy założeniu, że intensywność uszkodzeń jest procesem stochastycznym o określonych własnościach. Badano przypadek semi-markowskiej intensywności uszkodzeń.

Przedstawiono modele systemów wielostanowych, przyjmując założenie, że modelami niezawodnościowymi stanów elementów są szczególne procesy semi-markowskie.

ISSN 0208-8029
ISBN 83-85847-72-3