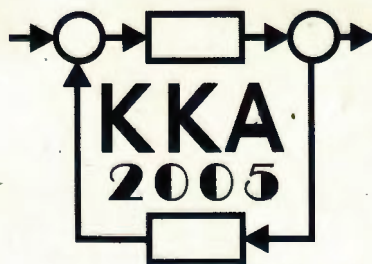


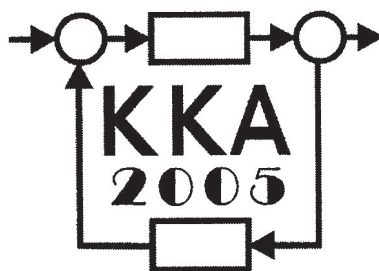
# **XV Krajowa Konferencja Automatyki**

## **Tom I**



**Redaktorzy:  
Zdzisław Bubnicki  
Roman Kulikowski  
Janusz Kacprzyk**

# XV Krajowa Konferencja Automatyki Tom I



Redaktorzy:  
Zdzisław BUBNICKI  
Roman KULIKOWSKI  
Janusz KACPRZYK

**ORGANIZATOR**

Komitet Automatyki i Robotyki Polskiej Akademii Nauk  
Instytut Badań Systemowych Polskiej Akademii Nauk

**WSPÓŁORGANIZATORZY**

Politechnika Warszawska

Przemysłowy Instytut Automatyki i Pomiarów

Polskie Stowarzyszenie Pomiarów, Automatyki i Robotyki

## **ORGANIZATOR**

Komitet Automatyki i Robotyki Polskiej Akademii Nauk  
Instytut Badań Systemowych Polskiej Akademii Nauk

## **WSPÓLORGANIZATORZY**

Politechnika Warszawska  
Przemysłowy Instytut Automatyki i Pomiarów  
Polskie Stowarzyszenie Pomiarów, Automatyki i Robotyki

## **KOMITET PROGRAMOWY**

Przewodniczący  
Zastępca Przewodniczącego

Zdzisław BUBNICKI  
Roman KULIKOWSKI

## **CZŁONKOWIE**

Stanisław BAŃKA  
Mikołaj BUSŁOWICZ  
Ryszard GESSING  
Jakub GUTENBAUM  
Stanisław KACZANOWSKI  
Janusz KACPRZYK  
Józef KORBICZ  
Krzysztof KOZŁOWSKI  
Krzysztof KUŹMIŃSKI  
Krzysztof MALINOWSKI  
Antoni NIEDERLIŃSKI  
Tadeusz PUCHAŁKA  
Stanisław SKOCZOWSKI  
Jerzy ŚWIĄTEK  
Ryszard TADEUSIEWICZ  
Krzysztof TCHOŃ  
Jan WĘGLARZ

Michał BIAŁKO  
Władysław FINDEISEN  
Henryk GÓRECKI  
Jerzy JÓZEFczyk  
Tadeusz KACZOREK  
Jerzy KLAMKA  
Zbigniew KOWALSKI  
Juliusz L. KULIKOWSKI  
Kazimierz MALANOWSKI  
Wojciech MITKOWSKI  
Władysław PEŁCZEWSKI  
Leszek RUTKOWSKI  
Roman SŁOWIŃSKI  
Andrzej ŚWIERNIAK  
Piotr TATJIEWSKI  
Leszek TRYBUS  
Andrzej P. WIERZBICKI

## **KOMITET ORGANIZACYJNY**

Przewodniczący  
Zastępcy Przewodniczącego

Roman KULIKOWSKI  
Janusz KACPRZYK  
Stanisław KACZANOWSKI  
Tadeusz KACZOREK  
Krzysztof MALINOWSKI  
Roman OSTROWSKI  
Tadeusz PUCHAŁKA  
Dariusz WAGNER  
Jan STUDZIŃSKI  
Jan W. OWSIŃSKI

Członkowie

Sekretarze naukowci

**ISBN 83-89475-00-6**

Copyright © Instytut Badań Systemowych Polskiej Akademii Nauk  
All rights reserved

Druk: ARGRAF, Warszawa

TEORIA STEROWANIA  
– TEORIA SYSTEMÓW

## FASCYNUJĄCE WŁASNOŚCI UKŁADU Z POCHODNYMI WYŻSZEGO RZĘDU W REGULATORZE

Ryszard GESSING

Politechnika Śląska, Instytut Automatyki, ul. Akademicka 16, 44-101 Gliwice,  
fax: +4832 2372127, email: gessing@ia.gliwice.edu.pl

**Streszczenie:** Rozpatrywana jest zmodyfikowana struktura układu ze sprzężeniem zwrotnym i regulatorem, w którym stosuje się przybliżenie pochodnych wyższego rzędu, aby układ był stabilny przy dużym wzmacnieniu. Dodatkowo wzmacnienie regulatora i jego "dynamika" są rozdzielone przez węzeł sumujący z wartością zadaną. Pokazuje się, że taka struktura realizuje sterowanie z modelem odniesienia określonym przez dynamikę regulatora. Okazuje się, że rozpatrywana struktura jest niewrażliwa na duże i szybkie zmiany parametrów, zarówno dla obiektów liniowych, nieliniowych, jak i niestacjonarnych, nawet wtedy gdy występują nasycenia sygnału sterującego. Rozpatruje się jej zastosowanie w układach wielowymiarowych, gdzie przy okazji sformułowano warunek realizowalności regulacji stałowartościowej, oraz rozpatrzono odsprzęganie układu dla stanów ustalonych i dla przebiegów szybkich (w tym ostatnim przypadku także przez dobór wartości nasycień sygnałów sterujących).

**Słowa kluczowe:** sprzężenie zwrotne, układy liniowe, układy nieliniowe, układy niestacjonarne, układy wielowymiarowe.

### WPROWADZENIE

Sprzężenie zwrotne jest rozwiązaniem powszechnie stosowanym w układach automatycznej regulacji. Własności układów ze sprzężeniem zwrotnym, takie jak: kompensacja wpływu zakłóceń, kształtowanie dynamiki, linearyzacja, odporność na zmiany parametrów są opisywane w książkach poświęconych sterowaniu [1, 2, 3]. Wiadomo, że jakość sterowania zależy od takich ograniczeń jak dynamika obiektu określona przez położenie biegunów i zer jego transmitancji, względny rząd tej ostatniej, istnienie nasycenia sygnału sterującego etc. Te ograniczenia mają wpływ na proces projektowania układu.

Wiadomo, że jeżeli transmitancja otwartego układu ma względny rząd równy jeden, wtedy układ zamknięty z regulatorem proporcjonalnym (P) może pracować dobrze przy dowolnie dużym wzmacnieniu. Ale przy względnym rzędzie większym od dwóch, nawet regulator PID z różniczkowaniem (D), przy dużym wzmacnieniu daje zazwyczaj niestabilny układ zamknięty.

W [4, 5] do sterowania obiektami nieliniowymi, niestacjonarnymi zastosowano regulator z pochodnymi wyższego rzędu. Jednak w środowisku automatyków takie podejście nie jest w zasadzie akceptowane, gdyż wyższe

pochodne wzmacniają szумы i powodują nagłe i "nerwowe" zmiany sygnału sterującego. Ale wydaje się że nadszedł czas na zrewidowanie tego poglądu, gdyż istnieją elementy wykonawcze pracujące dobrze przy "nerwowych" sygnałach sterujących, a układy z wyższymi pochodnymi w regulatorze mają bardzo dobre własności.

W porównaniu do [4, 5], gdzie rozpatrywany jest bardziej złożony przypadek obiektów nieliniowych, niestacjonarnych, w niniejszej pracy zastosowane jest proste podejście bazujące na teorii liniowej, uzasadniające zastosowanie pochodnych wyższego rzędu w regulatorze. Dzięki temu, w porównaniu do [4, 5], najwyższy rząd pochodnej w regulatorze jest przy naszym podejściu mniejszy o jeden.

W niniejszej pracy po pierwsze, dopuszczamy stosowanie odpowiednich przybliżeń pochodnych wyższego rzędu w regulatorze tak, że układ zamknięty może być stabilny przy dużym wzmacnieniu. Po drugie, oddzielamy wzmacnienie  $k$  regulatora od jego "dynamiki"  $Q(s)$  ( $Q(0) = 1$ ) i przesuwamy "dynamikę" przed węzeł sumujący z wartością zadaną. Okazuje się, że zmodyfikowana w ten sposób struktura układu ze sprzężeniem zwrotnym realizuje sterowanie z modelem odniesienia, które jest niewrażliwe na duże zmiany parametrów. Proponowana struktura może być z powodzeniem stosowana zarówno do obiektów liniowych, nieliniowych, niestacjonarnych a także w układach wielowymiarowych.

Dla układów wielowymiarowych sformułowano także warunek realizowalności regulacji stałowartościowej bez spełnienia którego w układach tych nie jest możliwa stabilizacja poszczególnych sygnałów wyjściowych na różnych poziomach określonych przez wartości zadane. Przy stosowaniu pochodnych w regulatorze w układach wielowymiarowych, nabiera istotnego znaczenia odsprzęganie poszczególnych pętli układu dla przebiegów szybkich. Rozpatrzono to zagadnienie modyfikując podejście zastosowane w [5]. Wskazano także na możliwość odsprzęgania przebiegów szybkich przez odpowiedni dobór wartości nasycień sygnałów sterujących. Rozpatrzono także zagadnienie odsprzęgania układów w stanach ustalonych.

Niniejsza praca powstała w wyniku wykonania symulacji dla wielu przykładów z których tylko niektóre są tutaj opisane. Programy takie jak SIMULINK stwarzają nowe możliwości badań. Na podstawie przebadanych przykła-



dów z uwzględnieniem nieliniowości i innych trudnych modeli, można sformułować hipotezę która tylko *zazwyczaj* jest prawdziwa, a której prawdziwość w przypadku ogólnym trudno jest udowodnić. Takie podejście rozszerza jednak klasę układów dla których możemy otrzymać interesujące wyniki. W przeciwieństwie do tego ściśle rozważania matematyczne doprowadzają do twierdzeń które przy poczynionych założeniach są *zawsze* prawdziwe. Ale założenia przy których możliwe jest ściśle udowodnienie twierdzeń są *zazwyczaj* bardzo ograniczające dla zastosowań. Dlatego wydaje się że hipotezy otrzymane z przeprowadzonych symulacji, chociaż są tylko *zazwyczaj* a nie *zawsze* prawdziwe mogą być bardziej interesujące z punktu widzenia zastosowań.

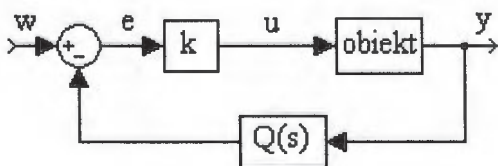
Oryginalnym wynikiem pracy jest zaproponowanie zmodyfikowanej struktury układu ze sprzężeniem zwrotnym, w której w regulatorze występują przybliżenia wyższych pochodnych, a wzmocnienie i "dynamika" regulatora są rozdzielone węzłem sumującym z wartością zadaną; zrealizowane w ten sposób sterowanie z modelem odniesienia jest niezależne od dużych zmian parametrów i może być stosowane zarówno do obiektów liniowych, nieliniowych, niestacjonarnych jak i wielowymiarowych.

## 1. ZMODYFIKOWANE SPRĘŻENIE ZWROTNE

Rozważmy układ ze sprzężeniem zwrotnym pokazany na rys. 1 i złożony z liniowego lub nieliniowego obiektu i liniowego regulatora opisanego przez transmitancję

$$R(s) = kQ(s) \quad (1)$$

gdzie  $k$  jest wzmocnieniem a  $Q(s)$  jest odpowiednią transmitancją, taką że  $Q(0) = 1$ . W porównaniu do *zazwyczaj* stosowanego układu ze sprzężeniem zwrotnym w rozpatrywanym układzie wzmocnienie  $k$  i "dynamika"  $Q(s)$  są rozdzielone w ten sposób, że  $k$  występuje za, a  $Q(s)$  przed węzłem sumującym.



Rys. 1. Układ ze zmodyfikowanym sprzężeniem zwrotnym.

Założmy, że jest możliwe znalezienie regulatora (1) z dostatecznie dużym wzmocnieniem  $k$  tak, że układ zamknięty jest stabilny z dostatecznie szybko zanikającymi stanami ustalonymi. Wybór  $Q(s)$  i  $k$  będzie przedmiotem dalszych rozważań. Z przyjętych założeń wynika, że dla ograniczonych wartości  $|w|$ , oraz dla dostatecznie dużego  $k$  prawie dla wszystkich czasów  $t$  jest

$$e \approx 0 \quad (2)$$

Uwzględniając, że

$$E(s) = W(s) - Q(s)Y(s) \quad (3)$$

gdzie  $E(s)$ ,  $W(s)$  i  $Y(s)$  są transformacjami Laplace'a wielkości  $e(t)$ ,  $w(t)$  i  $y(t)$ , z zależności (2) i (3) otrzymujemy

$$\frac{Y(s)}{W(s)} \approx \frac{1}{Q(s)} \quad (4)$$

Z (4) wynika, że transmitancja układu zamkniętego uzależniająca  $Y(s)$  od  $W(s)$  jest określona w sposób przybliżony przez "dynamikę"  $Q(s)$  regulatora. Ważne jest, że przy poczynionych założeniach zależność (4) obowiązuje zarówno dla liniowych jak i nieliniowych obiektów (również niestacjonarnych).

Można podać inną, bardziej ścisłą interpretację rozważanego układu ze zmodyfikowanym sprzężeniem zwrotnym. Oznaczmy przez  $Y_m(s)$  transformację Laplace'a wyjścia  $y_m(t)$ , dla którego uchyb  $E(s)$  jest równy zero. Wtedy mamy

$$\frac{Y_m(s)}{W(s)} = \frac{1}{Q(s)} \quad (5)$$

Tak więc wyjście  $y_m(t)$  może być interpretowane jako sygnał odniesienia, a zależność (5) określa tzw. model odniesienia. Widać więc, że układ ze zmodyfikowanym sprzężeniem zwrotnym realizuje tzw. sterowanie z modelem odniesienia, którego transmitancja jest równa odwrotności  $Q(s)$ . Ponieważ dla układu stabilnego z dostatecznie szybkim zanikaniem przebiegów nieustalonych uchyb  $y(t) - y_m(t)$  jest prawie *zawsze* bardzo mały dlatego zależność (4) określa także przybliżoną transmitancję wiążącą  $Y(s)$  z  $W(s)$ .

Teraz problem, który mamy rozwiązać polega na wyborze transmitancji  $Q(s)$ , dla której układ zamknięty jest stabilny dla dostatecznie dużego wzmocnienia  $k$  i ma dostatecznie szybko zanikające stany nieustalone. Oznacza to, że układ zamknięty, dla dostatecznie dużego  $k$  powinien mieć odpowiedni stopień stabilności  $\lambda = \text{Min}_i |s_i|$ , gdzie  $s_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$  są pierwiastkami równania charakterystycznego zamkniętego układu. Dodatkowo, transmitancja  $Q(s)$  powinna być realizowalna. Problem ten będzie rozpatrywany w następnych punktach pracy.

## 2. OBIEKTY LINIOWE

Rozważmy teraz obiekt liniowy opisany przez ściśle właściwą transmitancję

$$G(s) = \frac{L(s)}{M(s)} \quad (6)$$

gdzie  $L(s)$  i  $M(s)$  są wielomianami  $m$ -tego i  $n$ -tego rzędu,  $m < n$ . Niechaj  $z_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$  i  $p_j$ ,  $j = 1, 2, \dots, n$  są odpowiednio zerami i biegunami transmitancji  $G(s)$ . Zakładamy również, że zera  $z_i$  są minimalnofazowe.

Można zauważyć, że układ zamknięty może mieć pożądany stopień stabilności, przy dostatecznie dużym wzmocnieniu, jeżeli transmitancja  $kQ(s)G(s)$  układu otwartego ma względny rząd równy jeden. Dla stabilnego układu otwartego można to uzasadnić za pomocą

kryterium Nyquista. Rzeczywiście dla odpowiednio dobranego licznika transmitancji  $kQ(s)G(s)$  charakterystyka częstotliwościowa  $kQ(j\omega)G(j\omega)$  również dla dużego  $k$  leży w pierwszej i drugiej ujemnej i/lub dodatniej ćwiartce płaszczyzny zespolonej Nyquista nie zbliżając się do punktu krytycznego  $(-1, j0)$ . Wynika to z faktu, że przy porównywalnych co do rzędu biegunach i zerach transmitancji  $kQ(s)G(s)$  zmniejszenie fazy pochodzące od czynników mianownika określonych przez bieguny jest kompensowane przez przyrost fazy pochodzący od czynników licznika określonych przez zera.

Jest to widoczne wyraźnie dla przypadku, gdy  $m = 0$ , a obiekt (6) jest stabilny, przy czym założmy, że  $p_1$  jest rzeczywisty ujemny. Wtedy wybierając wielomian tak że zawiera on pierwiastki  $p_2, p_3, \dots, p_n$  i upraszczając takie same czynniki związane z tymi pierwiastkami w liczniku i w mianowniku otrzymujemy transmitancję otwartego układu w postaci elementu inercyjnego 1-go rzędu, którego charakterystyka częstotliwościowa leży w pierwszej ujemnej ćwiartce płaszczyzny Nyquista dla dowolnie dużego  $k$ .

W przypadku gdy  $m > 0$ , transmitancja  $Q(s)$  może mieć postać wielomianu  $(n - m - 1)$ -ego rzędu. Gdy jednak za pomocą takiego wielomianu nie można zapewnić odpowiedniego stopnia stabilności zamkniętego układu przy odpowiednio dużym  $k$ , wtedy można stosować transmitancję niewłaściwą  $Q(s)$ , np.  $(n - m - 1 + i)$ -ego rzędu w liczniku i  $i$ -tego rzędu w mianowniku  $i = 1, 2, \dots, m$ . Ostatni wielomian może zawierać na przykład zera transmitancji (6) aby zlikwidować "nieodpowiednie" zera transmitancji  $G(s)$ .

Tak więc przy prezentowanym podejściu, gdy  $m = 0$  wtedy model odniesienia (5) i przybliżony model (4) układu zamkniętego ma rząd o jedność mniejszy niż rząd obiektu. Gdy  $m > 0$ , wtedy model odniesienia (5) i model przybliżony (4) może mieć rząd mniejszy o  $(m + 1)$  od rzędu obiektu.

Ostatnim problemem do rozwiązania jest realizacja transmitancji  $Q(s)$  w postaci wielomianu

$$Q(s) = p_0 s^q + p_1 s^{q-1} + \dots + p_{q-1} s + 1 \quad (7)$$

W opisanych niżej symulacjach używamy następującego przybliżenia

$$s \approx \frac{ds}{s + d} \quad (8)$$

gdzie  $d = 100, 200$ , lub  $300$ . Okazuje się, że wielomiany  $Q(s)$  z aproksymacją (8) dają zupełnie dobre wyniki.

Jeżeli dla  $m > 0$  chcemy zrealizować transmitancję

$$Q(s) = P(0) \frac{q_0 s^{n-1} + q_1 s^{n-2} + \dots + q_{n-2} s + 1}{P(s)} \quad (9)$$

gdzie  $P(s)$  jest wielomianem  $m$ -tego rzędu, wtedy przedstawiamy transmitancję (9) w postaci

$$Q(s) = P(0) \frac{Q^*(s)}{P(s)} \times (\bar{q}_0 s^{n-m-1} + \dots + \bar{q}_{n-m-2} s + 1) \quad (10)$$

gdzie  $Q^*(s)$  jest odpowiednim wielomianem  $m$ -tego rzędu. Transmitancja  $\bar{Q}(s) = P(0)Q^*(s)/P(s)$  ma ten

sam rząd licznika i mianownika i może być zrealizowana, natomiast wielomian  $(n - m - 1)$ -ego rzędu występujący w (10) w nawiasach  $(\cdot)$  może być zrealizowany za pomocą przybliżenia (8).

**Przykład 1.** Rozważmy obiekt opisany transmitancją

$$G(s) = \frac{13}{s^3 + 5s^2 + 8.5s + 13} \quad (11)$$

Można sprawdzić, że dla obiektu (11) mamy dużą swobodę w wyborze wielomianu  $Q(s)$  2-go rzędu, tak że układ zamknięty ma odpowiedni stopień stabilności przy dostatecznie dużym wzmocnieniu.

Na rys. 2 przedstawiono wyniki symulacji otrzymane przy wykorzystaniu programu SIMULINK dla

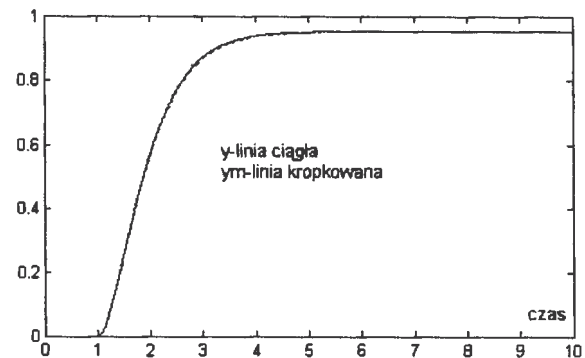
$$Q(s) = (0.5s + 1)^2 = 0.25s^2 + s + 1, \quad k = 20 \quad (12)$$

oraz  $w(t) = 1(t - 1)$ ,  $(1(t - 1) = 0$  dla  $t < 1$  i  $1(t - 1) = 1$  dla  $t \geq 1$ ). Wielomian  $Q(s)$  (12) zrealizowano przy wykorzystaniu przybliżenia (8) z  $d = 100$ . Zastosowano nie za duże wzmocnienie ( $k = 20$ ) aby pokazać, że nawet wtedy przybliżenie (4) jest w sposób satysfakcjonujący spełnione. Warto zauważyć, że nawet dla  $k = 100$  układ działa dobrze a przybliżenie (4) jest jeszcze lepiej spełnione.

Ponieważ wzmocnienie  $k$  jest nie za duże więc wyjście obiektu  $y_{st}$  w stanie ustalonym w układzie zamkniętym przyjmuje wartość  $k/(k + 1)$  (ponieważ  $Q(0) = 1$  i  $G(0) = 1$ ). Dlatego można przypuszczać, że odpowiedź skokowa  $y(t)$  układu zamkniętego jest bliższa do odpowiedzi skokowej następującego skorygowanego modelu odniesienia

$$\frac{Y_m(s)}{W(s)} = \frac{k}{1 + k} \frac{1}{Q(s)} \quad (13)$$

niż do odpowiedzi modelu odniesienia (5). Wyniki symulacji potwierdzają to przypuszczenie. Na rys. 2 odpowiedź skokowa  $y(t)$  zamkniętego układu (11), (12) jest porównana z odpowiedzią skokową  $y_m(t)$  skorygowanego modelu odniesienia (13) dla  $k = 20$ . Widać, że obie odpowiedzi skokowe są prawie nierozróżnialne.



Rys. 2. Odpowiedzi skokowe  $y$  i  $y_m$  dla przykładu 1.

Następnie symulacje były powtórzone dla różnych parametrów obiektu i niezmiennego regulatora. Obiekt (11) ma mianownik transmitancji  $M(s) = s^3 + 5s^2 + 8.5s + 13$  o biegunach



$p_1 = -3.6467$ ,  $p_{23} = -0.6767 \pm 1.7627$ . Symulacje były również wykonane dla obiektów dla których  
 $M(s) = s^3 + 3s^2 + 8.5s + 13$ ,  $p_1 = -2$ ,  
 $p_{23} = -0.5 \pm j2.5$ ,  
 $M(s) = s^3 + 5s^2 + 10s + 13$ ,  $p_1 = -3.1325$ ,  
 $p_{23} = -0.9338 \pm j1.8106$ ,  
 $M(s) = 3s^3 + 5s^2 + 8.5s + 13$ ,  $p_1 = -1.5943$ ,  
 $p_{23} = -0.0362 \pm j1.6482$ ,  
 $M(s) = s^3 + 5s^2 + 13$ ,  $p_1 = -2.4117$ ,  
 $p_{23} = 0.3725 \pm j1.2876$ ,  
 $M(s) = 15s^3 - 10s^2 + 13$ ,  $p_1 = -0.7753$ ,  
 $p_{23} = 0.7210 \pm j0.7734$

W dwóch ostatnich przypadkach obiekt był nawet niestabilny. We wszystkich przypadkach odpowiedź skokowa  $y(t)$  była prawie taka sama jak na rys. 2. (tylko w ostatnim przypadku różnica pomiędzy  $y$  i  $y_m$  była wyraźnie widoczna ale akceptowalna). Tak więc układ jest bardzo odporny na zmiany parametrów obiektu. Możliwe zmiany parametrów obiektu, które nie wywołują zauważalnych zmian odpowiedzi skokowej zamkniętego układu są znacznie większe co wynika z innych wykonanych symulacji.

### 3. OBIEKTY NIELINIOWE

Duża odporność zaproponowanej struktury na zmiany parametrów obiektu liniowego pozwala przypuszczać że struktura ta powinna zachować swoje własności również w przypadku obiektu nieliniowego. Punktem wyjścia będzie ustalenie rzędu względnego obiektu nieliniowego.

Rozważmy więc obiekt nieliniowy opisany równaniem stanu i wyjścia

$$\dot{x} = f(x, u), \quad y = g(x) \quad (14)$$

gdzie  $x$  jest  $n$ -wymiarowym wektorem stanu a  $u$  i  $y$  są skalarnymi sygnałami wejścia i wyjścia obiektu;  $f(\cdot, \cdot)$ ,  $g(\cdot)$  są odpowiednimi danymi funkcjami. Załóżmy, że

$$\begin{aligned} \dot{y} &= \frac{\partial g}{\partial x} f(x, u) = g_1(x) \\ \ddot{y} &= \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} f(x, u) = g_2(x) \\ &\dots \\ y^{(l-1)} &= \frac{\partial^{l-1} g}{\partial x^{l-1}} f(x, u) = g_{l-1}(x) \\ y^{(l)} &= \frac{\partial^l g}{\partial x^l} f(x, u) = g_l(x, u) \end{aligned} \quad (15)$$

to znaczy, że  $g_i(x)$  dla  $i = 1, 2, \dots, l-1$  są niezależne bezpośrednio od  $u$  a  $g_l(x, u)$  zależy bezpośrednio od  $u$ . Obiekt nieliniowy spełniający założenie (15) odpowiada obiektowi liniowemu (6) z  $m = n - l$ . Liczba  $l$  określa więc rząd względnego obiektu. Dlatego też w rozpatrywanym przypadku możemy podjąć próbę wyboru  $Q(s)$  w postaci wielomianu  $(l-1)$ -go rzędu. Jeżeli próba nie daje pozytywnego rezultatu wtedy podobnie jak dla obiektu liniowego z  $m > 0$  możemy próbować wyboru  $Q(s)$  w postaci transmitancji niewłaściwej zawierającej w liczniku wielomian  $(l-1+i)$ -ego rzędu a w mianowniku wielomian  $i$ -tego rzędu,  $i = 1, 2, \dots, n-l$ . Ta sugestia wynika z podobieństwa do przypadku liniowego i może być częściowo uzasadniona przy wykorzystaniu

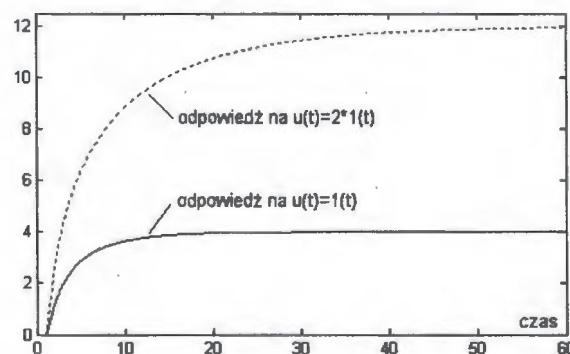
metody funkcji opisującej. Ta ostatnia może być traktowana jako przybliżone zastosowanie metody bazującej na charakterystykach częstotliwościowych do układów nieliniowych.

**Przykład 2.** Rozważmy obiekt nieliniowy drugiego rzędu opisany następującymi równaniami stanu i wyjścia

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -2x_1 + 4(1 + |u|)u, \\ \dot{x}_2 &= (x_1 - x_2) \frac{1}{1 + |x_2|}, \quad y = x_2 \end{aligned} \quad (16)$$

Model obiektu można interpretować jako szeregowe połączenie dwóch elementów inercyjnych 1-go rzędu, z których pierwszy ma "wzmocnienie"  $2(1 + |u|)$  zależne od  $u$  a drugi - "stałą czasową"  $(1 + |x_2|)$  zależną od  $x_2$ .

Na rys. 3 pokazane są dwie odpowiedzi czasowe  $y(t)$  obiektu dla  $u(t) = u_0 1(t-1)$ ,  $u_0 = 1$  i  $u_0 = 2$ . Widać z nich, że zarówno "wzmocnienie" jak i "stała czasowa" rośnie gdy  $u_0$  rośnie.

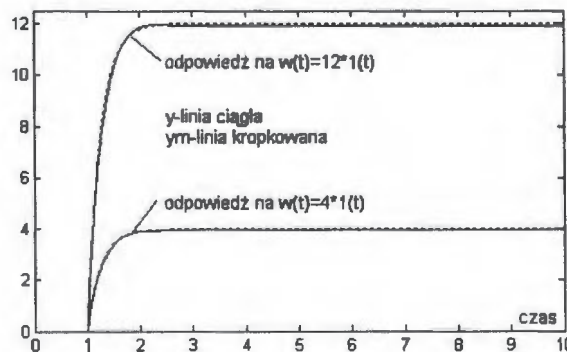


Rys. 3. Odpowiedzi czasowe obiektu z przykładu 2.

Sprawdzając warunki (16) można pokazać, że  $l = 2$ . Dlatego wybieramy wielomian  $Q(s)$  pierwszego rzędu w postaci

$$Q(s) = 0.25s + 1, \quad k = 20 \quad (17)$$

Można i teraz zauważyć, że przy prawidłowym wyborze rzędu wielomianu  $Q(s)$  jego wybór jest dosyć dowolny.



Rys. 4. Odpowiedzi czasowe układu zamkniętego z przykładu 2.

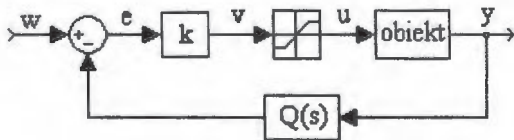
W symulacjach wykonanych za pomocą programu SIMULINK wielomian (17) był przybliżony za pomocą wzoru (8) z  $d = 100$ . Na rys. 4 odpowiedzi czasowe  $y(t)$



układu zamkniętego (16), (17) na zmianę wartości zadanej w postaci  $w(t) = 4 \cdot 1(t-1)$  i  $w(t) = 12 \cdot 1(t-1)$  są porównane z odpowiedziami  $y_m(t)$  modelu odniesienia (5), (17) na te same zmiany wartości zadanej. Widać, że w obu przypadkach obie odpowiedzi są bardzo bliskie sobie. Wartości zadane 4 i 12 zostały wybrane aby umożliwić porównanie odpowiedzi układu zamkniętego z odpowiedziami samego obiektu przedstawionymi na rys. 3, które mają te same wartości ustalone sygnału wyjściowego. Z porównania skali czasu na rys. 3 i 4 widać, że układ zamknięty jest liniowy z odpowiedzią zbliżoną do układu 1-go rzędu ze stałą czasową równą 0.25 i jest wyraźnie szybszy.

#### 4. UWZGLĘDNIENIE NASYCENIA STEROWANIA

Jak już wspominaliśmy przy nagłej zmianie sygnału  $w$  w rozpatrywanym układzie pojawiają się bardzo duże wartości sygnału sterującego  $u$ , które praktycznie mogą nie być możliwe do zrealizowania. Dlatego ważne jest uwzględnienie wpływu nasycenia sygnału sterującego na działanie układu.



Rys. 5. Uwzględnienie nasycenia sygnału sterującego  $u$ .

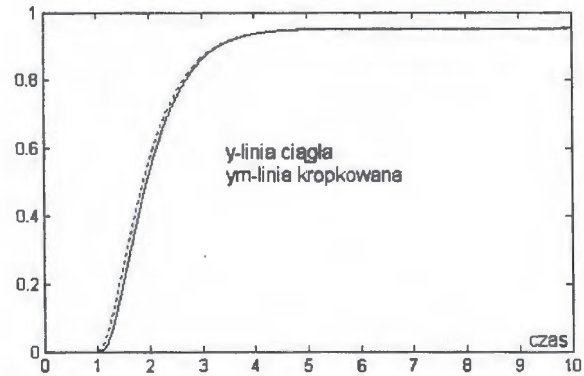
Aby uwzględnić nasycenie sterowania w układzie na rys. 5 został wprowadzony element z nasyceniem opisany zależnościami

$$u = \begin{cases} u_{max} & \text{dla } v \geq u_{max} \\ v & \text{dla } u_{min} \leq v \leq u_{max} \\ u_{min} & \text{dla } v \leq u_{min} \end{cases} \quad (18)$$

Wydaje się, że występowanie nasycenia sterowania nie powinno wpłynąć w sposób istotny na własności badanego układu. Rzeczywiście jeżeli układ jest stabilny wtedy uchyb, który nie jest bliski zero może występować krótko po raptownej zmianie wartości zadanej i tylko wtedy sterowanie  $u$  może osiągnąć nasycenie. Zaraz potem  $|e|$  maleje i spełnia (2) dając (4). Sprawdźmy nasze przypuszczenie na kolejnym przykładzie.

**Przykład 3.** Rozważmy układ pokazany na rys. 5, w którym transmitancje  $G(s)$   $Q(s)$ , jak i wzmacnienie  $k$  oraz przybliżenie wielomianu  $Q(s)$  jest takie same jak w przykładzie 1. Element z nasyceniem jest opisany przez zależności (19), w których  $u_{max} = 2$ ,  $u_{min} = -2$ .

Na rys. 6 odpowiedź skokowa  $y(t)$  układu zamkniętego na  $w(t) = 1(t-1)$  jest porównana z odpowiedzią skokową  $y_m(t)$  skorygowanego modelu odniesienia  $c/Q_2(s)$ ,  $c = (20/21)$  (na ten sam sygnał  $w(t)$ ). Widać, że odpowiedź  $y(t)$  układu jest tylko nieznacznie opóźniona względem  $y_m(t)$ . Symulacje były również przeprowadzone dla nasycenia  $u_{max} = 5$ ,  $u_{min} = -5$  oraz  $u_{max} = 10$ ,  $u_{min} = -10$ . Dla większych co do



Rys. 6. Odpowiedzi skokowe dla układu zamkniętego z przykładu 3.

modułu wartości nasycenia (począwszy od  $u_{max} = 5$ ) i  $u_{min} = -5$ ) odpowiedzi  $y(t)$  wizualnie nie różnią się od odpowiedzi  $y_m(t)$  skorygowanego modelu odniesienia.

Przy wzmacnieniu  $k = 100$ , w sygnale  $u$  pojawiają się wysokoczęstotliwościowe oscylacje które nie mają jednak widocznego wpływu na przebieg  $y$ . Oscylacje te można zlikwidować stosując w przybliżeniu (8) wartość  $d = 300$ .

#### 5. OBIEKTY NIESTACJONARNE

w przypadku gdy parametry obiektu zmieniają się w czasie mamy do czynienia z obiektami niestacjonarnymi. Na podstawie wyników otrzymanych dla obiektów liniowych i nieliniowych można przypuszczać że rozpatrywana struktura *zawyczaj* zachowa swoje własności również w przypadku obiektów niestacjonarnych. To przypuszczenie zostało potwierdzone w przeprowadzonych badaniach symulacyjnych.

**Przykład 4.** Rozważmy obiekt trzeciego rzędu opisany następującymi równaniami

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -2x_1 + k_0 u, & \dot{x}_2 &= x_3, \\ \dot{x}_3 &= -\omega_n^2 x_2 - 2\delta\omega_n x_3 + \omega_n^2 x_1, & y &= x_2 \end{aligned} \quad (19)$$

gdzie  $\omega_n$  i  $\delta$  są parametrami (interpretowanymi jako odpowiednio częstotliwość drgań nietłumionych i tłumienie względne), które razem ze współczynnikiem wzmacnienia  $k_0$  zmieniają się w sposób określony przez następujące funkcje

$$\begin{aligned} \omega_n &= 4 - 4 \sin(2\pi \cdot 2.5t) \\ \delta &= 4 - 8 \sin(2\pi \cdot 1 \cdot t) \\ k_0 &= 4 - 2 \text{square}(2\pi \cdot 0.4t) \end{aligned} \quad (20)$$

gdzie funkcja  $\text{square}(\cdot)$  jest określona w następujący sposób

$$\text{square}(\omega t) = \begin{cases} -1 & \text{for } 0 < t < \frac{\pi}{\omega} \\ 1 & \text{for } \frac{\pi}{\omega} < t < \frac{2\pi}{\omega} \end{cases} \quad (21)$$

$$\text{square}[\omega(t + \frac{2\pi}{\omega})] = \text{square}(\omega t)$$

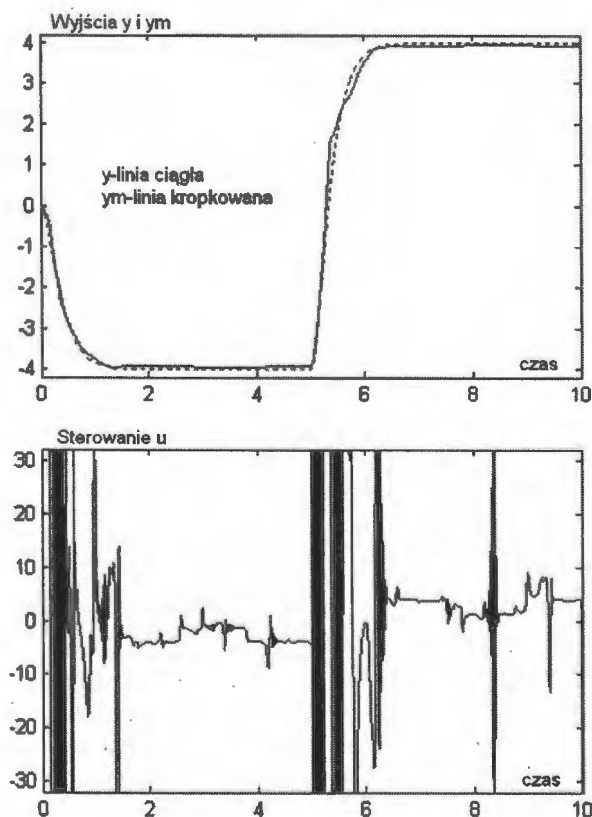
Zatem parametry  $\omega_n$ ,  $\delta$  i  $k_0$  zmieniają się w szerokich granicach od  $\omega_{nmin} = 0$ ,  $\delta_{min} = -4$ ,  $k_{0min} = 2$  do

$\omega_{nmz} = 8, \delta_{mz} = 12, k_{0mz} = 6$ , odpowiednio z częstotliwościami  $2.5Hz, 1Hz$  i  $0.4Hz$

Przeprowadzono symulacje dla układu zamkniętego przedstawionego na rys. 1 w którym

$$Q(s) = 0.04s^2 + 0.4s + 1 = (0.2s + 1)^2, \quad k = 50 \quad (22)$$

a  $Q(s)$  przybliżono za pomocą wzoru (8) z wartością  $d = 300$ , podczas gdy wartość zadana była określona przez  $w = \text{square}(\pi t/5)$ .



Rys. 7. Odpowiedzi czasowe  $y, y_m$  i  $u$  dla Przykładu 4.

Na rys. 7a odpowiedź czasowa  $y$  porównana jest z odpowiedzią  $y_m$  modelu odniesienia  $1/(0.04s^2 + 0.4s + 1)$  dla tej samej wartości zadanej  $w$ . Widać że obie odpowiedzi są bardzo bliskie sobie, co oznacza że duże i względnie szybkie zmiany parametrów określone przez (20) są dobrze kompensowane. Na rys. 7b pokazany jest sygnał  $u$  i jego silne oddziaływanie regulujące. W okolicy  $t = 0$  i  $t = 5$ , podczas dużych zmian  $y$  pojawiają się duże wartości sterowania (odpowiednio około  $\pm 11000$  i  $+1400$ ) i pojawiają się wysokoczęstotliwościowe oscylacje. Okazuje się że przy  $d = 500$  te oscylacje znikają a duże wartości sterowania  $u$  zmniejszają się odpowiednio do wartości  $= +600$  i  $+1200$ , podczas gdy odpowiedź  $y$  pozostaje prawie nie zmieniona. Oczywiście w praktyce, zastosowanie tak dużych wartości sterowań  $u$  nie jest możliwe. Dlatego w następnym przykładzie rozpatrzony zostanie wpływ nasycenia sterowania.

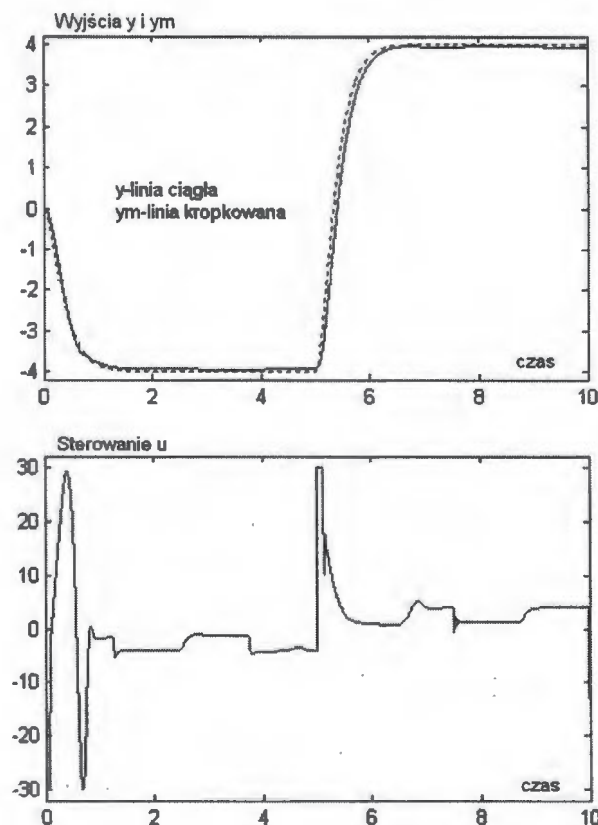
**Przykład 5.** Rozpatrzmy teraz układ z rys. 5 z obiektem (19) jak w przykładzie 4. Zmieniające się parametry są

teraz opisane przez funkcje

$$\begin{aligned} \omega_n &= 3 - 2 \sin(2\pi \cdot 0.5t) \\ \delta &= 2 - 4 \sin(2\pi \cdot 0.3t) \\ k_0 &= 4 - 2 \text{square}(2\pi \cdot 0.4t) \end{aligned} \quad (23)$$

Tak więc parametry  $\omega_n$  i  $\delta$  zmieniają się w nieco mniejszych granicach od  $\omega_{nmin} = 1, \delta_{min} = -2$  do  $\omega_{nmz} = 5, \delta_{mz} = 6$ , z nieco mniejszymi częstotliwościami odpowiednio  $0.5Hz$  i  $0.3Hz$ , podczas gdy  $k_0$  jest takie same jak w przykładzie 4. Spowodowane to jest przez fakt że teraz sygnał sterujący posiada nasycenia  $u_{min} = -30$  i  $u_{mz} = 30$  co nieco zmniejsza możliwości regulacyjne sterowania.

Funkcja  $Q(s)$ , wzmacnienie  $k$  i wartość zadana  $w$  są takie same jak w przykładzie 4.



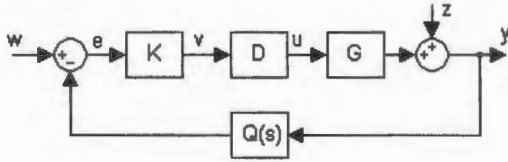
Rys. 8. Odpowiedzi czasowe  $y, y_m$  i  $u$  dla Przykładu 5.

Na rys. 8a odpowiedź  $y$  układu zamkniętego porównana jest z odpowiedzią  $y_m$  modelu odniesienia. Widać że obie odpowiedzi są nawet bliższe sobie niż w przykładzie 4 (ponieważ teraz zmiany parametrów są nieco wolniejsze i mniejsze). Na rys. 8b pokazane jest oddziaływanie sterowania  $u$ . Widać że teraz znikają wysokoczęstotliwościowe oscylacje. Chociaż zdolność kompensacji zmieniających się parametrów jest teraz nieco mniejsza to jednak nadal kompensowane są względnie duże i szybkie zmiany parametrów.

## 6. UKŁADY WIELOWYMIAROWE

Rozpatrzmy teraz układ wielowymiarowy, którego schemat blokowy przedstawiony jest na rys. 9.





Rys. 9. Schemat blokowy układu wielowymiarowego

Obiekt liniowy  $G(s)$  opisany jest zależnością

$$Y(s) = G(s)U(s) \quad (24)$$

gdzie  $Y(s) = [Y_1(s), \dots, Y_r(s)]'$ ,  $U(s) = [U_1(s), \dots, U_r(s)]'$  wektory wyjścia i wejścia obiektu, które podobnie jak  $e$ ,  $v$  i  $w$  są  $r$ -wymiarowe;  $G(s)$  jest  $r \times r$ -wymiarową macierzą transmitancji o elementach

$$G(s) = [G_{ij}(s)] \quad i, j = 1, 2, \dots, r \quad (25)$$

gdzie  $G_{ij}(s)$  jest transmitancją pomiędzy wejściem  $U_j(s)$  a wyjściem  $Y_i(s)$ . Załóżmy że

$$G_{ij}(s) = \frac{b_0^{ij} s^{m_{ij}} + b_1^{ij} s^{m_{ij}-1} + \dots + b_{m_{ij}}^{ij}}{a_0^{ij} s^{n_{ij}} + a_1^{ij} s^{n_{ij}-1} + \dots + a_{n_{ij}}^{ij}} \quad (26)$$

$$i, j = 1, 2, \dots, r$$

gdzie  $m_{ij}$ ,  $n_{ij}$  są stopniami wielomianów licznika i mianownika transmitancji  $G_{ij}(s)$ , przy czym  $m_{ij} < n_{ij}$ .

Bloki  $Q(s)$  i  $K$  reprezentują odpowiednio "dynamikę" i wzmocnienie regulatora i są zapisane w postaci  $r \times r$ -wymiarowych diagonalnych macierzy

$$Q(s) = \text{diag}[Q_1(s), Q_2(s), \dots, Q_r(s)]$$

$$K = \text{diag}[k_1, k_2, \dots, k_r] \quad (27)$$

gdzie transmitancja  $Q_i$  (zazwyczaj wielomian) jest dobie-rana do transmitancji  $G_{ii}(s)$  w sposób taki sam jak w przypadku jednowymiarowym, omówionym w poprzed-nich punktach pracy. Taki dobór transmitancji  $Q_i(s)$ , w przypadkach niezbyt skomplikowanych daje zazwyczaj dobre wyniki.

Blok  $D$  będzie wykorzystywany w dalszych punktach pracy do częściowego odsprzęgnięcia układu. Teraz zakładamy że  $D$  jest  $r \times r$ -wymiarową macierzą jednostkową w postaci

$$D = \text{diag}[1, 1, \dots, 1] \quad (28)$$

a zatem  $u = v$  (czyli  $D$  nie występuje).

### 6.1. Warunek realizowalności regulacji stałowartościowej

Warunkiem koniecznym pracy układu wielowymiarowego jest jego stabilność. Jest to warunek powszechnie znany i często analizowany przy rozpatrywaniu układów wielowymiarowych. Natomiast według informacji posiadanej przez autora niniejszej pracy nie jest znany warunek dla którego proponujemy niniejszym nazwę warunek realizowalności regulacji stałowartościowej.

**Definicja.** Mówimy że regulacja stałowartościowa dla obiektu o wielu wejściach i wielu wyjściach jest realizowalna, jeżeli można wybrać takie stałe wartości wejść  $u_j$ ,  $j = 1, 2, \dots, r$ , dla których wyjścia  $y_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, p$ , przyjmują dowolne, pożądane, stałe wartości.

**Lemat 1.** Załóżmy że obiekt  $G(s)$  jest statyczny, tzn. mamy  $k_{ij} = G_{ij}(0) = b_{m_{ij}}/a_{n_{ij}} < \infty$ ,  $i, j = 1, 2, \dots, r$ . Wtedy warunkiem koniecznym realizowalności regulacji stałowartościowej dla obiektu (1) jest

$$\det G(0) \neq 0 \quad (29)$$

**Dowód.** Łatwo zauważyć, że przy niespełnieniu warunku (29), (nawet wtedy gdy układ jest stabilny) niemożliwa jest realizacja regulacji stałowartościowej dla różnych wartości zadanych  $w_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, r$ , gdyż wtedy wiersze macierzy  $G(0)$  są liniowo zależne i nie można dobrać takich stałych wartości wejść  $u_j$ ,  $j = 1, 2, \dots, r$ , które zapewniłyby z pożądaną dokładnością różne wartości wyjść  $y_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, r$ . □

Podobny warunek musi być spełniony w przypadku gdy niektóre elementy  $G_{ij}(s)$  macierzy  $G(s)$  posiadają element całkujący tzn. dla pewnego  $ij$   $b_{m_{ij}} \neq 0$ ,  $a_{n_{ij}} = 0$  i  $a_{n_{ij}-1} \neq 0$ . Różnica polega tylko na sposobie tworzenia macierzy wzmocnień obiektu. Rozważymy teraz ten przypadek.

**Lemat 2.** Załóżmy, że w każdym wierszu macierzy  $G(s)$  znajduje się conajwyżej jeden element całkujący. Oznaczmy przez

$$G^* = [k_{ij}], \quad i, j = 1, 2, \dots, r \quad (30)$$

macierz wzmocnień obiektu wyznaczoną w ten sposób że

$$k_{ij} = \frac{b_{m_{ij}}}{a_{n_{ij}-1}}, \quad \text{gdy } a_{n_{ij}} = 0; \quad (31)$$

$$k_{ij} = 0, \quad \text{gdy } a_{n_{ij}} \neq 0 \text{ i w } j \text{ - tej kolumnie}$$

występuje conajmniej jeden element całkujący; (32)

$$k_{ij} = \frac{b_{m_{ij}}}{a_{n_{ij}}}, \quad \text{gdy } a_{n_{ij}} \neq 0 \text{ i w } j \text{ - tej kolumnie}$$

nie występuje ani jeden element całkujący. (33)

Wtedy warunkiem koniecznym realizowalności regulacji stałowartościowej jest

$$\det G^* \neq 0 \quad (34)$$

**Dowód.** Jeżeli  $a_{n_{ij}} = 0$  oznacza to że w stanie ustalonym  $u_j = 0$ , co uzasadnia podstawienie (32). Przy niespełnieniu warunku (34) wiersze macierzy  $G^*$  są liniowo zależne, co oznacza że nie można znaleźć wejść  $u_j$  i  $\int u_j$  (pierwsze dla tych kolumn  $j$ , które nie zawierają – a drugie dla tych kolumn  $j$ , które zawierają conajmniej jeden element całkujący), takich, że w stanie ustalonym wyjścia  $y_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, r$  przyjmują z założoną dokładnością dowolne pożądane wartości. □



Podobną postać do (34) przyjmuje warunek realizowalności regulacji stałowartościowej w przypadku gdy element całkujący występuje we wszystkich elementach co najmniej jednego wiersza macierzy  $G(s)$ . Wzmocnienia macierzy  $G^*$  przyjmują wtedy postać określoną przez (31) i (33) (w tym ostatnim przypadku bez komentarza dotyczącego występowania elementu całkującego w poszczególnych kolumnach).

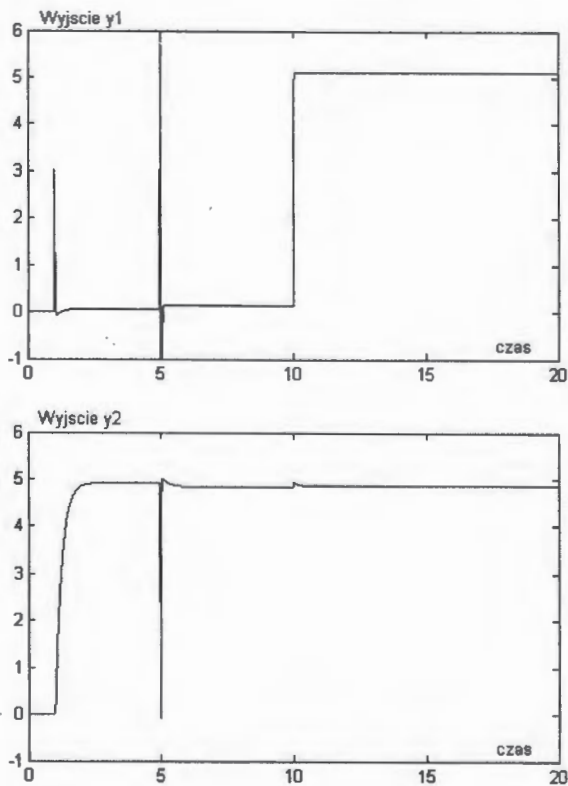
Należy zauważyć że w przypadku gdy wyznacznik  $\det G(0)$  (lub  $\det G^*$ ) jest zbliżony do zera uchyby regulacji w stanie ustalonym znacznie się zwiększają. Zatem zerowa wartość tego wyznacznika uniemożliwia realizację regulacji stałowartościowej, ale również wartość tego wyznacznika zbliżona do zera daje znaczne pogorszenie dokładności regulacji.

**Przykład 6.** Rozważmy układ przedstawiony na rys. 9, w którym elementy transmitancji macierzowej obiektu opisane są następującymi transmitancjami

$$\begin{aligned} G_{11} &= \frac{b_0^{11}}{2s+1}, & G_{12} &= \frac{b_0^{12}}{2s+1} \\ G_{21} &= \frac{b_0^{21}}{s^2+2s+4}, & G_{22} &= \frac{b_0^{22}}{s^2+2s+4} \end{aligned} \quad (35)$$

Zakładamy że  $D = \text{diag}[1, 1]$ , tzn. że  $u = v$ , oraz  $b_0^{11} = 5$ ,  $b_0^{12} = 4$ ,  $b_0^{21} = 3.5$ ,  $b_0^{22} = 4$ .

Uwzględniając postać transmitancji  $G_{11}$  i  $G_{22}$ , zgodnie z poprzednimi rozważaniami przyjmujemy  $Q(s) = \text{diag}[1, 0.25s + 1]$  i  $K = \text{diag}[200, 200]$ .



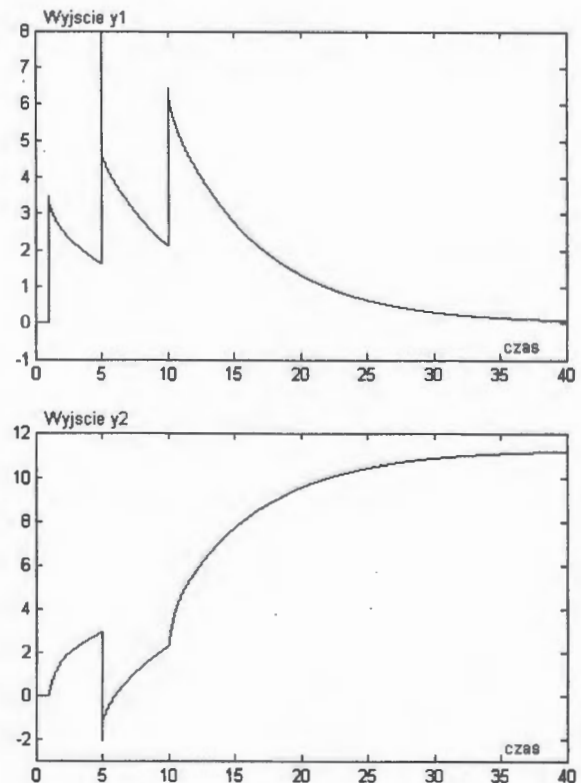
Rys. 10. Odpowiedzi czasowe  $y_1$  i  $y_2$  dla przykładu 6.

Na rys. 10 przedstawione są przebiegi czasowe dla następujących wartości zadanych  $w = [5 \cdot 1(t-10), 5 \cdot 1(t-1)]'$  i zakłócenia  $z = [0, -5 \cdot 1(t-5)]$ . Widać że przebiegi nieustalone w obu pętach regulacji pochodzące od

zmian wartości zadanych dla tych pętli są bardzo dobre. Natomiast widoczne jest silne oddziaływanie sprzęgające pętli drugiej na pętlę pierwszą, wyrażające się dużymi pikami występującymi w pętli pierwszej po wystąpieniu wymuszeń w pętli drugiej. Na przykład w polizu  $t = 5$  wyskok w pętli pierwszej, pochodzący od pochodnej w wielomianie  $Q_2(s)$  wynosi około 130 (czego oczywiście nie widać na rys. 10). Równocześnie pojawiają się bardzo duże (nierealizowalne w praktyce) wartości sterowań w obu pętlach (rzędu kilkudziesięciu tysięcy).

Pomimo tego że w obu pętlach zastosowano duże wzmocnienia regulatora równe 200, nawet na wykresach widoczne są znaczne uchyby obu pętli w stanie ustalonym. Wynika to z faktu że  $\det G(0)/(k^1 k^2) = 0.0717$ , a więc macież wzmocnień  $G(0)$  obiektu jest słabo uwarunkowana (tutaj wielkości  $k^1$  i  $k^2$  są długościami wektorów odpowiednio pierwszej i drugiej kolumny macierzy  $G(0)$ ).

Na rys. 11 pokazane są przebiegi czasowe dla tego samego przykładu w przypadku gdy wartości współczynników  $b_0^{21}, b_0^{22}$  zostały zmienione tak że  $b_0^{21} = 2.5, b_0^{22} = 2$ . Mamy więc teraz  $\det G(0) = 0$ , a więc warunek (29) nie jest spełniony. Widać że wartości ustalone wyjść  $y_i, i = 1, 2$  nie są związane z wartościami ustalonymi wartości zadanych  $w_i, i = 1, 2$ , chociaż układ jest stabilny. Z symulacji wynika że  $y_1 \rightarrow 0$ , dla różnych stałych wartości  $w_1$ . Wynika to z niespełnienia warunku koniecznego realizowalności regulacji stałowartościowej (29).



Rys. 11. Odpowiedzi czasowe  $y_1$  i  $y_2$  dla Przykładu 6 w przypadku gdy  $\det G(0) = 0$

## 7. CZĘŚCIOWE ODSPRZĘGANIE UKŁADU

Z rozpatrzonego przykładu 6 wynika że celowe by było przynajmniej częściowe odsprzęgnięcie układu zarówno dla przebiegów szybkich jak i dla przebiegów ustalonych. Rozpatrzmy teraz to zagadnienie.

### 7.1. Odsprzęgnięcie przebiegów szybkich

Zastosujemy tutaj podejście podobne jak w pracy [5], chociaż nieco je zmodyfikujemy. Oznaczmy przez

$$G_s = \begin{bmatrix} b_0^{ij} \\ a_0^{ij} \end{bmatrix} \quad (36)$$

$r \times r$ - wymiarową macierz wzmocnień dla przebiegów szybkich, której elementy  $ij$  zdefiniowane są w nawiasie kwadratowym wzoru (36).

Można przypuszczać że aby uzyskać odsprzęgnięcie układu dla szybkich zmian należy blok  $D$  w schemacie blokowym przedstawionym na rys. 9 opisać za pomocą macierzy

$$D_s = G_s^{-1} \quad (37)$$

Wtedy szybkie zmiany (np. skoki) zachodzą w ramach każdej pętli z osobna gdyż  $G_s D_s = I_r$ , gdzie  $I_r$  jest  $r \times r$ -wymiarową macierzą jednostkową.

**Przykład 7.** Dla danych z przykładu 6 mamy

$$G_s = \begin{bmatrix} 2.5 & 2 \\ 3.5 & 4 \end{bmatrix} \quad (38)$$

A zatem korzystając z (37) mamy

$$D_s = \begin{bmatrix} 1.3333 & -0.6667 \\ -1.1667 & 0.8333 \end{bmatrix} \quad (39)$$

Rzeczywiście okazuje się że po zastosowaniu takiego odsprzęgnięcia dla przykładu 6 znikają na wykresach przedstawionych na rys. 10 piki wynikające ze sprzężenia.

### 7.2. Odsprzęgnięcie stanów ustalonych

Podobnie rozumując można uzyskać odsprzęgnięcie w stanach ustalonych [2]. W tym celu blok  $D$  w schemacie blokowym przedstawionym na rys. 9 powinien być opisany za pomocą macierzy

$$D_u = [G(0)]^{-1} \quad (40)$$

gdzie  $G(0)$  jest macierzą wzmocnień obiektu dla stanów ustalonych.

**Przykład 8.** Dla danych z przykładu 6 mamy

$$G(0) = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 0.875 & 1 \end{bmatrix} \quad (41)$$

A zatem zgodnie z (40) mamy

$$D_u = \begin{bmatrix} 0.6667 & -2.667 \\ -0.5833 & 3.3333 \end{bmatrix} \quad (42)$$

Zauważmy że dla układu bez odsprzęgnięcia uchyb  $e$  pochodzący od wartości zadanych  $w$  w stanie ustalonym (przy  $z = 0$ ) jest określony przez

$$e = (I_2 + 200G(0))^{-1} = \begin{bmatrix} 0.0033 & -0.0131 \\ -0.0029 & 0.0164 \end{bmatrix} w \quad (43)$$

natomiast dla układu z odsprzęgnięciem  $D_u$  uchyb w stanie ustalonym spełnia zależność

$$e = \begin{bmatrix} 0.0050 & 0 \\ 0 & 0.0050 \end{bmatrix} w \quad (44)$$

Widać że po zastosowaniu odsprzęgnięcia znikają sprzężenia pętli, a  $e_i/w_i = 1/201 \approx 0.005$ ,  $i = 1, 2$ . Natomiast bez odsprzęgnięcia istnieje znaczne wzajemne oddziaływanie pętli i ponad 3-krotnie większy uchyb  $e_2$  pochodzący od  $w_2$ .

### 7.3. Uwzględnienie nasycenia sterowania

Jak już wspominaliśmy występowanie bardzo dużych wartości sterowania bezpośrednio po nagłej zmianie wymuszenia może uniemożliwić w praktyce realizację takiego sterowania. Dlatego rozpatrzmy jeszcze przypadek gdy składowe wektora sterującego  $u$  posiadają nasycenia (co nie jest wyraźnie zaznaczone na rys. 9).

Z przeprowadzonych badań symulacyjnych wynika że nasycenia sterowań mogą niwelować odsprzęgnięcia dla szybkich zmian, w rezultacie w przebiegu podobnym do przedstawionego na rys. 10 pojawiają się piki (choćby znacznie niższe i mniej ostre).

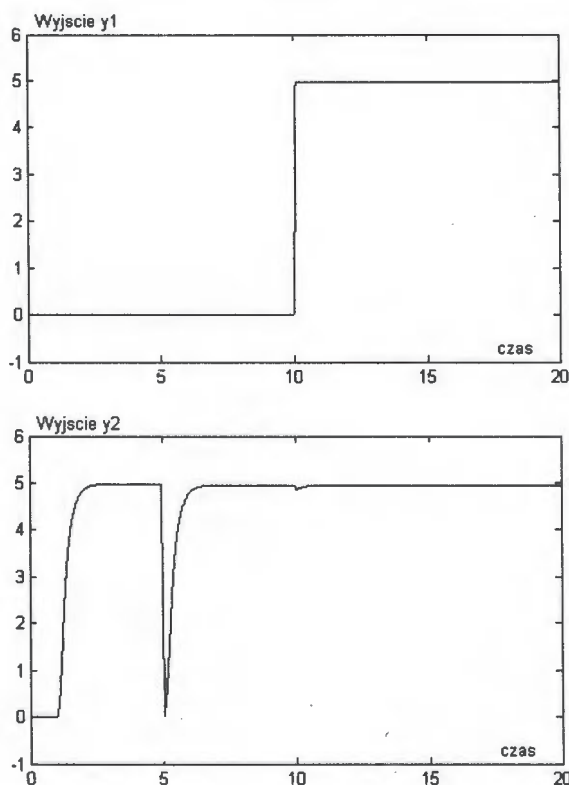
Ale okazuje się że przez odpowiedni dobór wartości nasycień można także w pewnych przypadkach likwidować sprzężenia, nawet wtedy gdy zamiast odsprzęgnięcia  $D_s$  dla przebiegów szybkich stosujemy odsprzęgnięcie  $D_u$  dla stanów ustalonych. Pokażemy to na następnym przykładzie.

**Przykład 9.** Rozpatrzmy teraz układ z przykładu 6, w którym zastosujemy odsprzęgnięcie  $D_u$  dla stanów ustalonych i dodatkowo wprowadzimy odpowiednie nasycenia składowych wektora  $u$ . Ponieważ główne sprzężenie w przykładzie 6 wynikało z oddziaływania sterowania  $u_2$  na wyjście  $y_1$  (które likwidowałaby druga kolumna macierzy  $D_s$ , gdyby była zastosowana), więc działanie drugiej kolumny macierzy  $D_s$  zastąpimy odpowiednio dobranymi wartościami nasycień dla sterowań  $u_1$  i  $u_2$ . Będzie to miało miejsce wtedy gdy wartości nasycień  $u_{1mx}$  i  $u_{2mx}$  będą proporcjonalne odpowiednio do wartości bezwzględnych pierwszej i drugiej składowej wektora—drugiej kolumny macierzy  $D_s$  czyli  $u_{2mx}/u_{1mx} = 0.8333/0.6667 = 1.25$ , oraz  $u_{1min} = -u_{1mx}$  i  $u_{2min} = -u_{2mx}$ . Ponieważ dla zadanych w przykładzie wymuszeń wartość  $u_2$  w stanie ustalonym wynosi około 30, więc wybieramy  $u_{2mx} = 60$  i  $u_{1mx} = 60/1.25 = 48$ , oraz  $u_{1min} = -48$  i  $u_{2min} = -60$ .

Na rys. 12 pokazane są przebiegi czasowe dla takich samych jak w przykładzie 6 wymuszeń. Widać że dzięki zastosowaniu tak dobranych nasycień obu sterowań, oraz macierzy odsprzęgającej  $D_u$  uzyskano odsprzęgnięcie zarówno dla przebiegów szybkich jak i dla stanów ustalonych.



nych. Należy zauważyć że wybór nasycień jest dosyć dowolny. Nawet dla  $u_{1mx} = 32$  i dla  $u_{2mx} = 40$  uzyskujemy odsprężenie dla przebiegów szybkich. Wystarczy tylko że  $u_{2mx}/u_{1mx} = 40/32 = 1.25$ . Równocześnie widać że powrót wielkości  $y_2$  do wartości ustalonej, po wystąpieniu skokowego zakłócenia  $z$  w chwili  $t = 5$ , jest wolniejszy niż w przykładzie 6. Wynika to oczywiście z występowania nasycenia sygnałów sterujących.



Rys. 12. Odpowiedzi czasowe  $y_1$  i  $y_2$  dla Przykładu 8.

## 8. WNIOSKI KOŃCOWE

Proponowana struktura polega na zastosowaniu wyższych pochodnych w regulatorze i rozdzieleniu jego wzmocnienia  $k$  i "dynamiki"  $Q(s)$  tak że  $k$  występuje za  $Q(s)$  przed węzłem sumującym z wartością zadaną. Dzięki temu proponowana struktura realizuje sterowanie z modelem odniesienia określonym przez  $1/Q(s)$ .

Proponowana struktura jest niewrażliwa na stosunkowo duże zmiany parametrów obiektu. Może być stosowana zarówno do obiektów liniowych jak i nieliniowych. Daje przybliżony model układu zamkniętego w postaci  $1/Q(s)$ , może być więc wykorzystana do linearyzacji. Własności układu zostają w zasadzie zachowane przy występowaniu nasycenia sygnału sterującego.

Ponieważ struktura jest bardzo odporna więc można ją stosować również do obiektów niestacjonarnych liniowych i nieliniowych. Uwzględniając to że możliwe zmiany parametrów obiektu mogą być duże i szybkie, można przypuszczać że tak zmodyfikowane sprzężenie zwrotne może zastąpić niektóre układy adaptacyjne.

Obliczenia potrzebne do realizacji przybliżonych po-

chodnych występujących w  $Q(s)$  mogą być wykonywane na mikroprocesorach. Dlatego też regulatory realizowane na mikroprocesorach stwarzają możliwość stosowania zaproponowanego rozwiązania.

Przybliżenia pochodnych występujące w  $Q(s)$  wzmocniają szумы pomiarowe i powodują nagłe i nerwowe zmiany sygnału  $u$ . Dlatego też proponowane rozwiązanie może być stosowane w układach, w których takie zmiany są akceptowane.

Rozpatrzono zastosowanie proponowanego podejścia do układów wielowymiarowych. Przy okazji sformułowano warunek realizowalności regulacji stałowartościowej bez którego układy wielowymiarowe nie mogą działać poprawnie, oraz wskazano na możliwości częściowego odsprężania układu, w tym również za pomocą odpowiedniego doboru nasycień sterowania.

## PODZIĘKOWANIE

Praca została wykonana w latach 2004/2005 i stanowi jedno z zaplanowanych zadań grantu Nr. 3 T11A 029 28, przyznanego ostatnio przez Komitet Badań Naukowych.

## FASCINATING PROPERTIES OF THE SYSTEM WITH HIGHER ORDER DERIVATIVES IN REGULATOR

**Abstract:** The modified feedback structure is proposed, in which the regulator uses some approximations of higher order derivatives to assure stability under high gain. Additionally the high gain and "dynamics" of the regulator are separated by means of the summing junction with set point signal placed between them. It is shown that this structure implements the model reference control with the reference model transfer function equal to the inverse of that of the regulator "dynamics". It becomes that the proposed structure is insensitive to large plant parameter changes and works well both with linear, nonlinear and nonstationary plants. The proposed approach is also applied to multivariable systems, where the condition of implementability of regulation on different output levels is formulated and the problems of decoupling for steady state and for fast transients are considered (in the latter case also by an appropriate choice of control saturations).

## Literatura

- [1] Franklin G. F., J. D. Powell and A. Emami Naeini: *Feedback Control of Dynamic Systems* Addison Wesley, N.Y. 1994.
- [2] Goodwin G. C., S. F. Graebe and M. E. Salgado: *Control Systems Design*. Prentice Hall, N. J., 2001.
- [3] Phillips, C.L. and R.D. Harbor: *Feedback Control Systems*, Prentice Hall, N. J., 1996.
- [4] Vostrikov, A. S. *Synteza układów nieliniowych za pomocą metody lokalizacji*. Nowosybirski Insytut Elektrotechniczny, Nowosybirsk, 1991 (w j. rosyjskim).
- [5] Yurkevich, V. D. Decoupling of Uncertain Continuous Systems: Dynamic Contraction Method. *Proceedings of the 34-th Conference on Decision and Control*. New Orleans, LA-December, 1995.





**Instytut Badań Systemowych  
Polskiej Akademii Nauk**

**ISBN 83-89475-02-2**