XV Krajowa Konferencja Automatyki

Tom I

KKA 2005

Redaktorzy:
Zdzisław Bubnicki
Roman Kulikowski
Janusz Kacprzyk

XV Krajowa Konferencja Automatyki
Tom I

KKA
2005

Redaktorzy:
Zdzisław BUBNICKI
Roman KULIKOWSKI
Janusz KACPRZYK

ORGANIZATOR
Komitet Automatyki i Robotyki Polskiej Akademii Nauk
Instytut Badań Systemowych Polskiej Akademii Nauk
WSPÓŁORGANIZATORZY
Politechnika Warszawska
Przemysłowy Instytut Automatyki i Pomiarów
Polskie Stowarzyszenie Pomiarów, Automatyki i Robotyki

ORGANIZATOR

Komitet Automatyki i Robotyki Polskiej Akademii Nauk
Instytut Badań Systemowych Polskiej Akademii Nauk

WSPÓŁORGANIZATORZY

Politechnika Warszawska
Przemysłowy Instytut Automatyki i Pomiarów
Polskie Stowarzyszenie Pomiarów, Automatyki i Robotyki

KOMITET PROGRAMOWY

Przewodniczący	Zdzisław BUBNICKI
Zastępca Przewodniczącego	Roman KULIKOWSKI

CZŁONKOWIE

Stanisław BAŃKA
Mikołaj BUSŁOWICZ
Ryszard GESSING
Jakub GUTENBAUM
Stanisław KACZANOWSKI
Janusz KACPRZYK
Józef KORBICZ
Krzysztof KOZŁOWSKI
Krzysztof KUŹMIŃSKI
Krzysztof MALINOWSKI
Antoni NIEDERLIŃSKI
Tadeusz PUCHAŁKA
Stanisław SKOCZOWSKI
Jerzy ŚWIĄTEK
Ryszard TADEUSIEWICZ
Krzysztof TCHOŃ
Jan WĘGLARZ
Michał BIAŁKO
Władysław FINDEISEN
Henryk GÓRECKI
Jerzy JÓZEFCZYK
Tadeusz KACZOREK
Jerzy KLAMKA
Zbigniew KOWALSKI
Juliusz L. KULIKOWSKI
Kazimierz MALANOWSKI
Wojciech MITKOWSKI
Władysław PEŁCZEWSKI
Leszek RUTKOWSKI
Roman SŁOWIŃSKI
Andrzej ŚWIERNIAK
Piotr TATJEWSKI
Leszek TRYBUS
Andrzej P. WIERZBICKI

KOMITET ORGANIZACYJNY

Przewodniczący	Roman KULIKOWSKI
Zastępcy Przewodniczącego	Janusz KACPRZYK
	Stanisław KACZANOWSKI
	Tadeusz KACZOREK
	Krzysztof MALINOWSKI
Członkowie	Roman OSTROWSKI
	Tadeusz PUCHAŁKA
	Dariusz WAGNER
Sekretarze naukowi	Jan STUDZIŃSKI
	Jan W. OWSIŃSKI

ISBN 83-89475-00-6

Druk: ARGRAF, Warszawa

STABILNOŚĆ, STEROWALNOŚĆ, OBSERWOWALNOŚĆ

STEROWALNOŚĆ UKŁADÓW DYSKRETNYCH TYPU 2-D

Jerzy KLAMKA

Instytut Automatyki, Politechnika Śląska
ul. Akademicka 16, 44-100 Gliwice, e-mail: jklamka@ia.polsl.gliwice.pl

Streszczenie: W artykule przedstawiono przegląd rezultatów dotyczących sterowalności dyskretnych nieskończenie wymiarowych układów dynamicznych o dwóch zmiennych niezależnych, tak zwanych układów dynamicznych typu 2-D. Rozpatrzono liniowe dyskretne układy dynamiczne typu 2-D ze stałymi współczynnikami określone w nieskończenie wymiarowej przestrzeni Hilberta. Przytoczono podstawowe definicje różnych rodzajów sterowalności. W oparciu o metody analizy funkcjonalnej i algebry liniowej macierzy, sformułowano szereg warunków sterowalności dla różnych modeli matematycznych układów dynamicznych typu 2-D. Przedyskutowano wzajemne związki zachodzące pomiędzy różnymi rodzajami sterowalności. Ponadto zamieszczono liczne uwagi oraz komentarze dotyczące bibliografii.

Słowa kluczowe. Układy liniowe. Układy dyskretne. Układy dynamiczne typu 2-D. Układy nieskończenie wymiarowe Sterowalność.

1. WPROWADZENIE

Sterowalność podobnie jak obserwowalność oraz stabilność należy do podstawowych pojęć nowoczesnej matematycznej teorii sterowania. Ogólnie mówiąc, sterowalność oznacza, że w rozpatrywanym układzie dynamicznym możliwe jest osiągniecie zadanego stanu końcowego przy użyciu odpowiednio dobranego sterowania dopuszczalnego należącego do zadanego zbioru sterowan dopuszczalnych.

W literaturze z dziedziny teorii sterowania można spotkać wiele różnych definicji sterowalności, które w istotny sposób zależą od modelu matematycznego rozpatrywanego układu dynamicznego oraz przyjetej przestrzeni stanów. Obszerne wykazy publikacji dotyczących zagadnień szeroko rozumianej sterowalności dla różnych rodzajów układów dynamicznych podane są między innymi w monografiach [1], [2], [3], [4], [5] oraz w przeglądowym artykule [6].

W ostatnim okresie znacznie wzrosło zainteresowanie dyskretnymi układami dynamicznymi o wielu zmiennych niezależnych, tak zwanymi układami dynamicznymi typu M-D [1], [2], [3], [4]. Szczególnym przypadkiem takich układów dynamicznych są dyskretne układy dynamiczne o dwóch zmiennych niezależnych, tak zwane układy dynamiczne typu 2-D szeroko omawiane w monografii [1].

W okresie ostatnich dwudziestu lat dyskretne układy dynamiczne typu 2-D są szeroko omawiane w wielu specjalistycznych monografiach oraz artykułach naukowych. Tym niemniej nalezy wyraznie podkreslic, ze pierwsza w skali swiatowej monografia z dziedziny układów dynamicznych typu 2-D byla niewatpliwie ksiazka [1].

Zasadniczym celem niniejszej pracy jest przedstawienie w skrótowej formie zasadniczych rezultatów dotyczących zagadnień sterowalności dyskretnych liniowych układów dynamicznych typu 2-D, w szczególności układów o stałych współczynnikach.

Artykuł podzielony jest na kilka rozdziałów. Rozdział 2 zawiera matematyczny opis liniowych dyskretnych układów dynamicznych typu 2-D oraz podstawowe definicje oraz rezultaty dotyczące sterowalności w zadanym prostokącie dla liniowych nieskończenie wymiarowych dyskretnych układów dynamicznych typu 2-D o stałych współczynnikach określonych w przestrzeniach Hilberta. Rozpatrzono również przypadek skończenie wymiarowych układów dynamicznych typu 2-D.

Należy podkreślić, że dla różnych klas dyskretnych układów dynamicznych o wielu zmiennych niezależnych wprowadza się różne definicje sterowalności. Przykładowo, dla dyskretnych układów dynamicznych określonych w nieskończenie wymiarowych przestrzeniach liniowych na przykład w przestrzeniach Banacha lub przestrzeniach Hilberta należy wprowadzić dwie podstawowe zasadniczo różne definicje sterowalności, a mianowicie przybliżoną (aproksymacyjną, słabą) sterowalność oraz dokładną (silną) sterowalność [5], [6]. Wynika to bezpośrednio ze znanego faktu, że w liniowych przestrzeniach nieskończenie-wymiarowych, w przeciwieństwie do przestrzeni liniowych skończenie-wymiarowych, istnieją podprzestrzenie liniowe, które nie są domknięte.

Kolejny 3 rozdział pracy poświęcony jest w całości zagadnieniom sterowalności dyskretnych układów dynamicznych typu 2-D przy dodatkowych ograniczeniach nałożonych na wartości sterowań. Zasadnicze rezultaty tego rozdziału dotyczą przypadku stożkowych ograniczeń nałożonych na zmienne sterujące.

W rozdziale 4 przedyskutowano problematykę sterowalności dla singularnych liniowych skończenie wymiarowych układów dynamicznych typu 2-D o stałych współczynnikach.

Ostatni 5 rozdział pracy zawiera krótkie podsumowanie przedstawionych rezultatów oraz podaje możliwości pewnych uogólnień na szersze klasy liniowych oraz nieliniowych układów dyskretnych o wielu zmiennych niezależnych.

2. STEROWALNOŚĆ BEZ OGRANICZEŃ

W teorii liniowych dyskretnych układów dynamicznych typu 2-D rozpatruje się wiele różnych modeli matematycznych [1], [2], [3], [4], [5]. Najbardziej popularne a zatem najczęściej stosowane są dwa modele Fornasiniego-Marchesiniego [1], model Roessera [1]. W pierwszej kolejności rozpatrzymy model Fornasiniego Marchesiniego liniowych dyskretnych układów dynamicznych typu 2-D o stałych współczynnikach. Modelem tym jest liniowe równanie różnicowe o dwóch zmiennych niezależnych postaci następującej [1].

$$x(i+1,j+1)=A_0x(i,j)+A_1x(i+1,j)+A_2x(i,j+1)+Bu(i,j), \quad (1)$$

gdzie $i,j \in Z_+ = \{0,1,2,3,\ldots\}$-zbiór nieujemnych liczb całkowitych,

$x(i,j) \in X$ jest lokalnym stanem układu,

$u(i,j) \in U \subset V$ jest sterowaniem dopuszczalnym,

X- przestrzeń Hilberta,

V- przestrzeń Hilberta,

U jest danym zbiorem,

A_0, A_1, A_2, oraz B są ograniczonymi operatorami liniowymi działającymi w odpowiednich przestrzeniach Hilberta.

W przypadku układów dynamicznych typu 2-D skończenie-wymiarowych: $X=R^n$, $V=R^m$ oraz A_0, A_1, A_2, i B są macierzami o stałych współczynnikach i odpowiednich wymiarach.

Równanie (1) jest liniowym równaniem różnicowym pierwszego rzędu o dwóch zmiennych niezależnych bedących liczbami naturalnymi. Zatem w celu wyznaczenia jego rozwiązania należy znać odpowiednio zdefiniowane warunki brzegowe na brzegach obszaru określoności równania.

Warunki brzegowe dla równania (1) są postaci następującej

$$x(i,0) = x_{i0} \in X, \quad \text{dla } i \in Z_+$$

$$x(0,j) = x_{0j} \in V, \quad \text{dla } j \in Z_+ \qquad (2)$$

W celu przedstawienia rozwiązania równania różnicowego (1) w zwartej czytelnej postaci wprowadza się tak zwany operator tranzycji stanu $A^{i,j}$ układu dynamicznego typu 2-D, zdefiniowany w sposób następujący [4].

(i) $A^{0,0} = I$ - operator identycznościowy,

(ii) $A^{-i,j} = A^{i,-j} = A^{-i,-j} = 0$ dla $i,j > 0$,

(iii) $A^{i,j} = A_0A^{i-1,j-1} + A_1A^{i,j-1} + A_2A^{i-1,j} =$

$$= A^{i-1,j-1}A_0 + A^{i,j-1}A_1 + A^{i-1,j}A_2 \quad \text{dla } i,j>0 \qquad (3)$$

Z powyższych równości wynika, że operator tranzycji stanu jest operatorem liniowym i ograniczonym, działającym z przestrzeni X do przestrzeni X.

W przypadku układu skończenie-wymiarowego operator tranzycji stanu jest nxn-wymiarową macierzą tranzycji stanu.

Wiadomo, [1], [4], że dla dyskretnych układów dynamicznych typu 2-D można zdefiniować wiele różnych rodzajów sterowalności, w zależności od przyjetej przestrzeni stanów układu dynamicznego. Przykładowo, można rozpatrywać zarówno lokalną jak i globalną sterowalność w zadanym prostokacie dyskretnych układów dynamicznych typu 2-D [1], [2], [3], [4], lub tak zwaną sterowalność do zadanej linii układów dynamicznych typu 2-D [1], [2], [3].

Ponadto jak już wspomniano we wprowadzeniu, dla nieskończenie-wymiarowych układów dynamicznych zdefiniowanych w przestrzeniach Hilberta wprowadza się rozróżnienie pomiędzy dokładna a przybliżoną sterowalnością [4].

Obecnie przedstawimy najbardziej popularną i najczęściej stosowaną podstawową definicję sterowalności bez ograniczeń w zadanym prostokącie $[(0,0),(r,s)]$ dla liniowych dyskretnych układów dynamicznych typu 2-D ze stałymi współczynnikami [1], [2], [3], [4].

Definicja. [4] Układ dynamiczny (1) z warunkami brzegowymi (2) nazywa się dokładnie sterowalnym w danym prostokącie $[(0,0),(r,s)]$, jeżeli dla dowolnych warunków brzegowych (2) oraz dowolnego stanu końcowego $x_{rs} \in X$, istnieje sekwencja sterowań dopuszczalnych $u(i,j) \in V$, $(0,0) \leq (i,j) < (r,s)$ taka, że $x(r,s)=x_{rs}$.

W przypadku gdy stan końcowy x_{rs} można osiągnąć jedynie z dowolną dokładnością, wówczas mówimy o przybliżonej sterowalności w zadanym prostokącie. Oczywiście dokładna sterowalność w zadanym prostokacie implikuje przybliżoną sterowalność w tym samym prostokącie, natomiast implikacja odwrotna na ogół nie jest prawdziwa. W przypadku układów skończenie-wymiarowych, dokładna sterowalność w zadanym prostokącie jest równoważna przybliżonej sterowalności i wówczas w skrócie używa się terminu sterowalność.

Wykorzystując zdefiniowany uprzednio operator tranzycji stanu $A^{i,j}$ oraz liniowość układu dynamicznego typu 2-D, można dla danych zerowych warunków brzegowych

$$x(i,0)=x_{i0}=x(0,j)=x_{0j}=0, \text{ dla } i,j \in Z_+,$$

rozwiązanie $x(i,j)$ liniowego równania różnicowego (1) przedstawić w następującej zwartej postaci:

$$x(i,j) = W_{ij}u_{ij}$$

gdzie

$$W_{ij} = [A^{i-1,j-1}B, A^{i-2,j-1}B, \dots, A^{0,j-1}B, \dots, A^{1,0}B, B],$$

jest liniowym, ograniczonym operatorem,

$$W_{ij}: V \times V \times \dots \times V \to X$$

W przypadku skończenie-wymiarowym W_{ij} jest ($n \times ij$)-wymiarową macierzą o stałych współczynnikach.

Natomiast sekwencja sterowań dopuszczalnych u_{ij} jest postaci

$$u_{ij} = [u^T(0,0)\ ,\ u^T(1,0)\ ,\dots,\ u^T(i-1,0)\ ,\ u^T(0,1)\ ,\dots$$

$$\dots,\ u^T(i-2,j-1)\ ,\ u^T(i-1,j-1)]^T$$

Wykorzystujac znane z literatury metody analizy funkcjonalnej i algebry liniowej oraz wprowadzone uprzednio definicje i oznaczenia dowodzi się następującego warunku koniecznego i wystarczającego dokładnej sterowalności układu dynamicznego typu 2-D przy braku ograniczeń na sterowanie.

Twierdzenie. [4] Układ dynamiczny (1) jest dokładnie sterowalny w zadanym prostokącie [(0,0),(r,s)] z nieograniczonymi sterowaniami dpuszczalnymi wtedy i tylko wtedy gdy obraz operatora W_{rs} jest całą przestrzenią X.

Twierdzenie to można również przedstawić w postaci następującego wniosku.

Wniosek. [4] Układ dynamiczny (1) jest dokładnie sterowalny w zadanym prostokącie [(0,0),(r,s)] wtedy i tylko wtedy gdy samosprzężony operator $W_{rs}W^T_{rs}: X \to X$ posiada ograniczony operator odwrotny.

Warunki konieczne i wystarczające przybliżonej sterowalności w zadanym prostokącie podaje poniższe twierdzenie.

Twierdzenie. [4] Układ dynamiczny (1) jest przybliżenie sterowalny w zadanym prostokącie [(0,0),(r,s)] z nieograniczonymi sterowaniami dopuszczalnymi wtedy i tylko wtedy gdy domkniecie obrazu operatora W_{rs} jest całą przestrzenią X, lub równoważnie, gdy obraz operatora W_{rs} jest gęsty w przestrzeni X.

Twierdzenie to można również przedstawić w postaci następującego wniosku.

Wniosek. [1] Układ dynamiczny (1) jest przybliżenie sterowalny w zadanym prostokącie [(0,0),(r,s)] wtedy i tylko wtedy, gdy samosprzężony operator $W_{rs}W^T_{rs}: X \to X$ posiada operator odwrotny, który może być operatorem nieograniczonym.
W przypadku układów skończenie-wymiarowych na podstawie powyższych twierdzeń można sformułować następujące warunki konieczne i wystarczające sterowalności w zadanym prostokącie.

Twierdzenie. [1] Układ dynamiczny (1) jest sterowalny w zadanym prostokącie [(0,0),(r,s)] z nieograniczonymi sterowaniami dpuszczalnymi wtedy i tylko wtedy gdy

$$\text{rząd } W_{rs} = n$$

Wniosek. [1] Układ dynamiczny (1) jest sterowalny w zadanym prostokącie [(0,0),(r,s)] wtedy i tylko wtedy gdy $n \times n$-wymiarowa macierz symetryczna $W_{rs}W^T_{rs}$ jest nieosobliwa.

Obecnie rozpatrzymy model Roessera liniowego układu dynamicznego typu 2-D o stałych współczynnikach dany w postaci układu dwóch liniowych równań różnicowych [1], [2], [4]

$$\begin{bmatrix} x^h(i+1,j) \\ x^v(i,j+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^h(i,j) \\ x^v(i,j) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} u(i,j) \tag{4}$$

gdzie $x^h(i,j) \in X_1$ jest horyzontalnym wektorem stanu,
$x^v(i,j) \in X_2$ jest wertykalnym wektorem stanu,
A_{11}, A_{12}, A_{21}, A_{22}, B_1, B_2 są stałymi operatorami liniowymi i ograniczonymi.

W szczególnym przypadku układów skończenie-wymiarowych mamy
$x^h(i,j) \in R^{n_1}$ jest horyzontalnym wektorem stanu,
$x^v(i,j) \in R^{n_2}$ jest wertykalnym wektorem stanu,
A_{11}, A_{12}, A_{21}, A_{22}, B_1, B_2 są stałymi macierzami o odpowiednich wymiarach.

Warunki brzegowe dla liniowego układu równań (4) są postaci

$$x^h(0,j) = x^h_{0j} \in X_1 \quad j \in Z_+$$

$$x^v(i,0) = x^v_{i0} \in X \quad i \in Z_+$$

Definiujemy wektor stanu $x' \in X_1 \times X_2$, oraz liniowe ograniczone operatory A' i B' w sposób następujący

$$x' = \begin{bmatrix} x^h(i,j) \\ x^v(i,j) \end{bmatrix}$$

$$A' = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$$

$$B' = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}$$

W przypadku układów skończenie-wymiarowych niech $n = n_1 + n_2$ oraz zdefiniujmy n-wymiarowy wektor $x' \in R^n$, $n \times n$-wymiarową macierz A' i $n \times m$-wymiarową macierz B' w sposób identyczny jak zdefiniowane powyżej operatory.

Podobnie jak w przypadku modelu Fornasiniego Marchesiniego również dla modelu Roessera układu dynamicznego typu 2-D wprowadza się operator tranzycji stanu.

Operator tranzycji stanu $A^{,i,j}$ dla modelu Roessera układu dynamicznego typu 2-D definiuje się następująco [1], [2], [3].

(i) $A^{,0,0} = I$, operator identycznościowy

(ii) $$A^{'1,0} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$A^{'0,1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$$

(iii) $A^{,i,j} = A^{,1,0}A^{,i-1,j} + A^{,0,1}A^{,i,j-1}$ dla $i,j=1,2,3,\dots$ $i,j > 0$

(iv) $A^{,i,j} = 0$ dla $i<0$ lub/oraz $j<0$.

Wykorzystując znane z literatury metody analizy funkcjonalnej i algebry liniowej oraz operator tranzycji stanu $A^{,i,j}$ można wyrazić rozwiązanie modelu Roessera (4) w zwartej czytelnej postaci [1], [2], [3].

Podobnie jak dla modelu Fornasiniego Marchesiniego również dla modelu Roessera układu dynamicznego typu 2-D definiuje się pojęcie dokładnej oraz przyblizonej sterowalności w zadanym prostokącie[(0,0),(r,s)].

Definicja. [4] Model Roessera układu dynamicznego typu 2-D postaci (4) nazywa się dokładnie sterowalnym w zadanym prostokącie [(0,0),(r,s)], jeżeli dla dowolnych warunków brzegowych (5) oraz dowolnego wektora $x'_{rs} \in R^n$, istnieje sekwencja sterowań dopuszczalnych $u(i,j) \in R^m$, $(0,0) \le (i,j) < (r,s)$ taka, że $x'(r,s) = x'_{rs}$.

W przypadku gdy stan końcowy x'_{rs} można osiągnąć jedynie z dowolną dokładnością, wówczas mówimy o przybliżonej sterowalności w zadanym prostokącie. Oczywiście dokładna sterowalność implikuje przybliżoną sterowalność, natomiast implikacja odwrotna na ogół nie jest prawdziwa. W przypadku układów skończeniewymiarowych, dokładna sterowalność jest równoważna przybliżonej sterowalności i wówczas w skrócie używa się terminu sterowalność.

Wykorzystując macierz operator tranzycji stanu $A^{,i,j}$ oraz postać rozwiązania równania różnicowego (4) można sformułować warunek konieczny i wystarczający dokładnej sterowalności w zadanym prostokącie [(0,0),(r,s)] dla modelu Roessera (4).

Twierdzenie. [4]. Model Roessera (4) jest dokładnie sterowalny w zadanym prostokącie [(0,0),(r,s)] wtedy i tylko wtedy gdy gdy obraz operatora W'_{rs} jest całą przestrzenią X, gdzie liniowy ograniczony operator

$$W'_{rs} = [M'(0,1), M'(1,0),\dots, M'(i,j),\dots, M'(r,s)]$$

oraz liniowe ograniczone operatory M'(i,j) są zdefiniowane w sposób następujący

$$M'(i,j) = A^{,i-1,j}B^{,1,0} + A^{,i,j-1}B^{,0,1}$$

Twierdzenie to można również przedstawić w postaci następującego wniosku.

Wniosek. [4] Układ dynamiczny (1) jest dokładnie sterowalny w zadanym prostokącie [(0,0),(r,s)] wtedy i tylko wtedy gdy samosprzężony operator $W'_{rs}W'^{T}_{rs}: X \to X$ posiada ograniczony operator odwrotny.

Warunki konieczne i wystarczające przybliżonej sterowalności w zadanym prostokącie podaje poniższe twierdzenie.

Twierdzenie. [4] Układ dynamiczny (1) jest przybliżenie sterowalny w zadanym prostokącie [(0,0),(r,s)] z nieograniczonymi sterowaniami dopuszczalnymi wtedy i tylko wtedy gdy domkniecie obrazu operatora W'_{rs} jest całą przestrzenią X, lub równoważnie, gdy obraz operatora W'_{rs} jest gęsty w przestrzeni X.

Twierdzenie to można również przedstawić w postaci następującego wniosku.

Wniosek 2. [4] Układ dynamiczny (1) jest przybliżenie sterowalny w zadanym prostokącie [(0,0),(r,s)] wtedy i tylko wtedy, gdy samosprzężony operator $W'_{rs}W'^{T}_{rs}: X \to X$ posiada operator odwrotny, który może być operatorem nieograniczonym.

W przypadku układów skończenie wymiarowych na podstawie powyższych twierdzeń uzyskuje się następujące warunki konieczne i wystarczające sterowalności w zadanym prostokącie.

Twierdzenie 2. [1], [2], [3], [4]. Model Roessera (4) jest sterowalny w zadanym prostokącie [(0,0),(r,s)] wtedy i tylko wtedy gdy

$$\text{rząd} W'_{rs} = n$$

gdzie macierz

$$W'_{rs} = [M'(0,1), M'(1,0),\dots, M'(i,j),\dots, M'(r,s)]$$

oraz n×m-wymiarowe macierze M'(i,j) są zdefiniowane w sposób następujący

$$M'(i,j) = A^{,i-1,j}B^{,1,0} + A^{,i,j-1}B^{,0,1}$$

Twierdzenie. [1], [2], [3], [4]. Model Roessera (4) jest sterowalny w zadanym prostokącie [(0,0),(r,s)] wtedy i tylko wtedy gdy

$$\text{rząd} W'_{rs} = n$$

gdzie macierz

$$W'_{rs} = [M'(0,1), M'(1,0),..., M'(i,j),..., M'(r,s)]$$

oraz n×m-wymiarowe macierze M'(i,j) są zdefiniowane w sposób następujący

$$M'(i,j) = A'^{i-1,j}B'^{1,0} + A'^{i,j-1}B'^{0,1}$$

W oparciu o powyższe twierdzenie formułuje się następujący wniosek.

Wniosek. [1], [2], [3], [4]. Model Roessera (4) jest sterowalny w zadanym prostokącie [(0,0),(r,s)] wtedy i tylko wtedy gdy n×n-wymiarowa macierz symetryczna $W'_{rs}W'^{T}_{rs}$ jest nieosobliwa.

Należy zaznaczyć, że w literaturze spotyka się bardziej ogólne definicje sterowalności układów dynamicznych typu 2-D. Przykładowo rozpatruje sie warunki sterowalności do wzdłuż zadanej linii. Ponadto, wykorzystując definicję zbioru osiągalnego wprowadza się pojęcie osiągalności dla układów dynamicznych typu 2-D oraz dyskutuje wzajemne relacje pomiędzy sterowalnością a osiągalnością układu dynamicznego typu 2-D.

3. STEROWALNOŚĆ Z OGRANICZONYMI STEROWANIAMI

W okresie ostatnich kilku lat pojawiło się wiele publikacji dotyczących sterowalności układów dynamicznych typu 2-D. Jednak większość tych prac dotyczy w zasadzie zagadnień sterowalności przy nieograniczonych sterowaniach. Natomiast jedynie w nielicznych publikacjach rozpatruje się zagadnienia sterowalności ukladów dynamicznych typu 2-D przy założeniu ograniczoności wartości sterowań dopuszczalnych [6].

W niniejszym rozdziale zostaną przedstawione warunki konieczne i wystarczające sterowalności liniowych układów dynamicznych typu 2-D postaci (1) z ograniczonymi sterowaniami przy założeniu, że przestrzeń wartości sterowań sa skończenie wymiarowe to znaczy, że przestrzeń $V = R^m$.

Niech $U \subset R^m$ będzie danym zbiorem w przestrzeni wartości sterowań R^m. Sekwencję sterowań $u=\{u(i,j); (0,0)\leq(i,j), u(i,j)\in U\}$ nazywa się sekwencją sterowań dopuszczalnych. Zbiór wszystkich sekwencji sterowań dopuszczalnych nazywa się zbiorem sterowań dopuszczalnych.

W dalszych rozdziałach niniejszego artykułu wykorzystywane będą również następujące oznaczenia: $\Omega^0 \subset R^m$ otoczenie zera, $U^c \subset R^m$ domknięty wypukły stożek o wierzchołku w zerze, oraz $U^{c0}=U^c \cap \Omega^0$.

Niech $R_+=[0,\infty)$ będzie zbiorem liczb nieujemnych. Symbolem R^m_+ oznacza się zbiór m-wymiarowych wektorów o nieujemnych współczynnikach, to znaczy: $R_+^m = \{x\in R^m : x_k \geq 0, \text{ dla } k=1,2,...,m\}$[3], [4].

Niech sekwencja sterowań dopuszczalnych będzie postaci

$$u_{ij} = [u^T(0,0)\ ,\ u^T(1,0)\ ,...,\ u^T(i-1,0)\ ,\ u^T(0,1)\ ,...$$

$$...,\ u^T(i-2,j-1)\ ,\ u^T(i-1,j-1)]^T \in U_{ij}$$

gdzie symbol T oznacza transpozycję oraz

$$U_{ij} = U\times U\times ...\times U$$

jest ij-krotnym iloczynem kartezjańskim zbioru U.

Rozpatrzmy przypadek szczególny, a mianowicie gdy zbiór $U=R_+^m$ jest domkniętym oraz wypukłym stożkiem m-wymiarowych wektorów o nieujemnych współczynnikach oraz [3], [4]

$$U_{ij}^+=R_+^m\times R_+^m\times ...\times R_+^m.$$

Ponadto niech $V_{rs}\in X$ oznacza stożek osiągalny w punkcie (r,s) przy zerowych warunkach brzegowych oraz nieujemnych sterowaniach.

Zatem stożek V_{rs} jest obrazem stożka U_{rs}^+ poprzez liniowe odwzorowanie reprezentowane liniowym ograniczonym operatorem W_{rs}. Stąd,

$$V_{rs} = \{x_{rs}\in X : x(r,s) = W_{rs}u_{rs}\ ,\quad u_{rs}\in U_{rs}\}$$

V_{rs} jest domkniętym, wypukłym stożkiem o wierzchołku w zerze, generowanym przez operator W_{rs}.

Zatem, można zdefiniować tak zwany stożek polarny (sprzężony) $V_{rs}{}^*$ następująco:

$$V_{rs}^* = \{x^*\in X : \langle x^*,x\rangle \leq 0\ \ ,\ \text{for all } x\in V_{rs}\}$$

Należy również podkreślić, że stożek V_{rs} jest zawarty w stożku V_{hk} dla wszystkich $(h,k)\geq(r,s)$.

Wprowadzenie różnego rodzaju ograniczeń nałożonych na wartosci sterowań w istotny sposób komplikuje badanie sterowalności dyskretnych układów dynamicznych typu 2-D.

W przypadku liniowych dyskretnych układów dynamicznych typu 2-D dla ograniczeń stożkowych nałożonych na wartości sterowań wprowadza się następująca definicję sterowalności w zadanym prostokącie [(0,0),(r,s,)].

Definicja 3. Układ dynamiczny (1) nazywa się R_+^m-sterowalnym w zadanym prostokącie [(0,0),(r,s,)], jeżeli dla każdego wektora $x_{rs}\in R^n$, istnieje sekwencja nieujemnych sterowań dopuszczalnych u_{rs} taka, że $x(r,s) = x_{rs}$ lub równoważnie, $V_{rs} = R^n$.

Należy zaznaczyć, że podobna definicja jest również stosowana w odniesieniu do U^c-sterowalności liniowych dyskretnych układów dynamicznych typu 2-D, gdzie U^c

jest dowolnym stożkiem w przestrzeni R^m oraz ogólnie dla U-sterowalności gdy U jest dowolnym zbiorem w rzestrzeni R^m.

Analizujac postać rozwiązania układu dynamicznego typu 2-D oraz korzystajac z metod analizy funkcjonalnej dowodzi się następującego warunku koniecznego i wystarczającego sterowalności w zadanym prostokącie [(0,0),(r,s,)] z ograniczonymi sterowaniami.

Twierdzenie. Układ dynamiczny typu 2-D postaci (1) jest przybliżenie R_+^m-sterowalny w zadanym prostokącie [(0,0),(r,s)] wtedy i tylko wtedy gdy

(i) zbiór wartości liniowego operatora W_{rs} jest gesty w przestrzeni X,

(ii) $V_{rs}^* = \{0\}$

Należy podkreślić, że równość występująca w warunku (i) jest znanym warunkiem koniecznym i wystarczającym przybliżonej sterowalności układu dynamicznego typu 2-D postaci (1) przy nieograniczonych sterowaniach [1].

W przypadku układów skończenie wymiarowych uzyskuje się następujący warunek R_+^m-sterowalności w zadanym prostokącie.

Twierdzenie. Układ dynamiczny typu 2-D postaci (1) jest R_+^m-sterowalny w zadanym prostokącie [(0,0),(r,s)] wtedy i tylko wtedy gdy

(i) rząd $W_{rs} = n$

(ii) $V_{rs}^* = \{0\}$

gdzie V_{rs}^* oznacza stożek polarny.

Należy podkreślić, że równość występująca w warunku (i) jest znanym warunkiem koniecznym i wystarczającym sterowalności układu dynamicznego typu 2-D postaci (1) przy nieograniczonych sterowaniach [1].

Zatem ograniczona R_+^m-sterowalność układu dynamicznego typu 2-D w zadanym prostokacie [(0,0),(r,s,)] zawsze implikuje sterowalność bez ograniczeń w tym samym prostokącie [(0,0),(r,s,)].

4. SINGULARNE UKŁADY TYPU 2-D

W ostatnim okresie rezultaty dotyczące standardowych, nieosobliwych układów dynamicznych typu 2-D uogólniane są na przypadek tak zwanych singularnych, osobliwych dyskretnych układów dynamicznych typu 2-D o stałych współczynnikach [2]. Motywacja takiego postępowania wynika między innymi z wielu przykładów oraz możliwości zastosowań singularnych dyskretnych układów dynamicznych typu 2-D w elektronice, inżynierii chemicznej, robotyce oraz ekonomii. Singularne układy dynamiczne typu 2-D w przeciwieństwie do standardowych regularnych układów dynamicznych typu 2-D nie wymagają założenia przyczynowości układu dynamicznego, lecz jedynie znacznie słabszych założeń dotyczących istnienia i jednoznaczności rozwiązania przy odpowiednio zdefiniowanych warunkach brzegowych. Zatem, singularne układy dynamiczne typu 2-D nadają się bardzo dobrze do opisu, analizy i przetwarzania obrazów.

W literaturze spotyka się również singularne układy dynamiczne typu 2-D z opóźnieniami [2] oraz singulane układy dynamiczne typu 2-D określone w nieskończenie wymiarowych przestrzeniach liniowych. Przegląd rezultatów dotyczących sterowalności singularnych układów dynamicznych typu 2-D przedstawiony jest między innymi w obszernej monografii [2].

W niniejszym rozdziale rozpatrzymy jedynie skończenie wymiarowe liniowe układy singularne typu 2-D o stałych współczynnikach.

Niech będzie dany liniowy singularny dyskretny układ dynamiczny typu 2-D o stałych współczynnikach opisany równaniem różnicowym pierwszego rzędu postaci [2]:

$$Ex(i+1,j+1)=A_0x(i,j)+A_1x(i+1,j)+A_2x(i,j+1)+Bu(i,j) \quad (6)$$

gdzie A_0, A_1, A_2 są takimi samymi stałymi macierzami jak w równaniu (1)
E jest stałą n×n-wymiarową macierzą osobliwą.

Wiadomo, że singularne układy typu 2-D posiadają jednoznaczne rozwiązanie jedynie dla tak zwanych dopuszczalnych warunków brzegowych [2]. Podprzestrzeń liniowa dopuszczalnych warunków brzegowych zależy w istotny sposób od postaci macierzy E, A_0, A_1, A_2 oraz również od wejściowej sekwencji sterowań.

Poniższy lemat podaje warunek konieczny i wystarczający dopuszczalności warunków brzegowych dla singularnych dyskretnych układów dynamicznych typu 2-D.

Lemat. Warunek brzegowy jest dopuszczalny wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\text{rząd}[z_1z_2E - A_0 - z_1A_1 - z_2A_2] =$$

$$\text{rząd}[z_1z_2E, A_0, z_1A_1, z_2A_2, B] \quad \text{dla } z_1,z_2 \in C \quad (7)$$

Wykorzystując znane z literatury metody algebry liniowej oraz postać rozwiązania można sformułować następujący warunek konieczny i wystarczający sterowalności w zadanym prostokącie [(0,0),(r,s)] dla liniowego singularnego dyskretnego układu dynamicznego typu 2-D.

Twierdzenie. [2] Liniowy układ singularny typu 2-D postaci (6) jest sterowalny w zadanym prostokącie wtedy i tylko wtedy gdy

$$\text{rząd } M_{rs} = n$$

gdzie

M_{rs}=[M(0,0),M(1,0),...,M(r,0),M(0,1),...,M(0,s),M(1,1),

...,M(r-1,s),M(r,1),...,M(r,s-1)]

oraz n×m-wymiarowe stałe macierze M(i,j) są definiowane następująco

$M(i,j) = A^{r-i-1,s-j-1}B$ dla i=1,2,3,...,r, j=1,2,3,...,s

Z powyższego twierdzenia wynika nastepujacy wniosek bedacy równiez warunekiem koniecznym i wystarczającym sterowalności w zadanym prostokacie [(0,0),(r,s)] dla liniowego singularnego dyskretnego układu dynamicznego typu 2-D.

Wniosek. [2] Liniowy układ singularny postaci (6) jest sterowalny w zadanym prostokącie [(0,0),(r,s)] wtedy i tylko wtedy gdy n×n-wymiarowa macierz symetryczna $M_{rs}M^T_{rs}$ jest nieosobliwa.

Podobny warunek konieczny i wystarczający sterowalności w zadanym prostokącie [(0,0),(r,s)] mozna sformulowac dla singularnego modelu Roessera typu 2-D.

Należy również zaznaczyć, że ogólniejszy singularny liniowy układ dynamiczny typu 2-D ze stałymi współczynnikami oraz z prostokątną macierzą E rozpatrywany jest w monografii [2].

5. PODSUMOWANIE

Artykuł zawiera podstawowe definicje oraz twierdzenia dotyczące problematyki sterowalności dla różnych rodzajów liniowych oraz nieliniowych układów dynamicznych typu 2-D ze stałymi współczynnikami.

Problematyka sterowalnosci dyskretnych ukladów dynamicznych jest omawiana w wielu publikacjach. W literaturze przedstawione są między innymi liczne rezultaty dotyczące sterowalności ogólniejszych postaci dyskretnych układów dynamicznych typu 2-D, w tym także układów dyskretnych o wielu zmiennych niezależnych oraz układów dyskretnych o zmiennych współczynnikach.

Przykładowo, w ostatnich latach w literaturze szeroko rozpatrywana była problematyka sterowalności następujących rodzajów dyskretnych układów dynamicznych:

- liniowych układów dynamicznych typu 2-D ze zmiennymi współczynnikami,
- liniowych układów dynamicznych typu 2-D z opóźnieniami,
- liniowych układów dynamicznych typu M-D to znaczy dyskretnych układów dynamicznych o M zmiennych niezależnych,
- nieliniowych układów dynamicznych typu 2-D ze zmiennymi współczynnikami,
- liniowych ciągło-dyskretnych układów dynamicznych typu 2-D, opisanych układem równań różniczkowo-różnicowych.

Pojęcie sterowalności w przypadku liniowych układów dynamicznych jest silnie związane z zagadnieniem sterowania z minimalną energią [2], [3], [4], [5], [6]. Sterowalność liniowego układu dynamicznego umożliwia w oparciu o macierz sterowalności efektywne wyznaczenie sterowania minimalno-energetycznego [2], [3], [4], [5], [6].

Należy podkreślić, że zagadnienie sterowania minimalno-energetycznego dla różnych klas liniowych dyskretnych układów dynamicznych typu 2-D bez ograniczeń nałożonych na wartości sterowań rozpatrywane jest w oparciu o podstawowe twierdzenia i własności przestrzeni liniowych i nie wymaga stosowania zaawansowanych metod sterowania optymalnego [2], [3], [4], [5].

Ponadto, podobnie jak w przypadku ciągłych liniowych układów dynamicznych, także w przypadku dyskretnych liniowych układach dynamicznych istnieje silny związek pomiędzy sterowalnością dyskretnego układu dynamicznego a zagadnieniem lokowania biegunów dyskretnej transmitancji operatorowej. Zatem sterowalność dyskretnego układu dynamicznego decyduje o możliwości jego stabilizacji.

Literatura

[1] Kaczorek T. (1985) *Two-dimensional Linear Systems.* Springer-Verlag, Berlin.

[2] Kaczorek T. (1993) *Linear Control Systems.* Research Studies Press and John Wiley, New York.

[3] Kaczorek T. (2001) *Positive 1-D and 2-D systems.* Springer-Verlag, Berlin.

[4] Klamka J. (1991) *Controllability of Dynamical Systems.* Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.

[5] Klamka J, (1993) Controllability of dynamical systems - a survey. *Archives of Control Sciences*, 2, 281-307.

[6] Klamka J. (2002) Controllability of 2D systems, *Proceedings of the 8 International Conference on "Methods and Models in Automation and Robotics", MMAR-IEEE-2002*, 1, 27-30, Szczecin.

Instytut Badań Systemowych
Polskiej Akademii Nauk

ISBN 83-89475-02-2