

XV Krajowa Konferencja Automatyki

Tom I



**Redaktorzy:
Zdzisław Bubnicki
Roman Kulikowski
Janusz Kacprzyk**

XV Krajowa Konferencja Automatyki Tom I



Redaktorzy:
Zdzisław BUBNICKI
Roman KULIKOWSKI
Janusz KACPRZYK

ORGANIZATOR

Komitet Automatyki i Robotyki Polskiej Akademii Nauk
Instytut Badań Systemowych Polskiej Akademii Nauk

WSPÓŁORGANIZATORZY

Politechnika Warszawska

Przemysłowy Instytut Automatyki i Pomiarów

Polskie Stowarzyszenie Pomiarów, Automatyki i Robotyki

ORGANIZATOR

Komitet Automatyki i Robotyki Polskiej Akademii Nauk
Instytut Badań Systemowych Polskiej Akademii Nauk

WSPÓLORGANIZATORZY

Politechnika Warszawska
Przemysłowy Instytut Automatyki i Pomiarów
Polskie Stowarzyszenie Pomiarów, Automatyki i Robotyki

KOMITET PROGRAMOWY

Przewodniczący
Zastępca Przewodniczącego

Zdzisław BUBNICKI
Roman KULIKOWSKI

CZŁONKOWIE

Stanisław BAŃKA
Mikołaj BUSŁOWICZ
Ryszard GESSING
Jakub GUTENBAUM
Stanisław KACZANOWSKI
Janusz KACPRZYK
Józef KORBICZ
Krzysztof KOZŁOWSKI
Krzysztof KUŹMIŃSKI
Krzysztof MALINOWSKI
Antoni NIEDERLIŃSKI
Tadeusz PUCHAŁKA
Stanisław SKOCZOWSKI
Jerzy ŚWIĄTEK
Ryszard TADEUSIEWICZ
Krzysztof TCHOŃ
Jan WĘGLARZ

Michał BIAŁKO
Władysław FINDEISEN
Henryk GÓRECKI
Jerzy JÓZEFczyk
Tadeusz KACZOREK
Jerzy KLAMKA
Zbigniew KOWALSKI
Juliusz L. KULIKOWSKI
Kazimierz MALANOWSKI
Wojciech MITKOWSKI
Władysław PEŁCZEWSKI
Leszek RUTKOWSKI
Roman SŁOWIŃSKI
Andrzej ŚWIERNIAK
Piotr TATJIEWSKI
Leszek TRYBUS
Andrzej P. WIERZBICKI

KOMITET ORGANIZACYJNY

Przewodniczący
Zastępcy Przewodniczącego

Roman KULIKOWSKI
Janusz KACPRZYK
Stanisław KACZANOWSKI
Tadeusz KACZOREK
Krzysztof MALINOWSKI
Roman OSTROWSKI
Tadeusz PUCHAŁKA
Dariusz WAGNER
Jan STUDZIŃSKI
Jan W. OWSIŃSKI

Członkowie

Sekretarze naukowci

ISBN 83-89475-00-6

Copyright © Instytut Badań Systemowych Polskiej Akademii Nauk
All rights reserved

Druk: ARGRAF, Warszawa

STABILNOŚĆ, STEROWALNOŚĆ,
OBSERWOWALNOŚĆ

OBSZARY D-STABILNOŚCI UKŁADÓW REGULACJI Z OBIEKTEM PIERWSZEGO RZĘDU Z OPÓŹNIENIEM[†]

Andrzej RUSZEWSKI

Politechnika Białostocka, Wydział Elektryczny
ul. Wiejska 45D, 15-351 Białystok, e-mail: andrusz@pb.bialystok.pl

Streszczenie: W pracy rozpatrzono problem D -stabilności układu regulacji automatycznej z regulatorem PI i liniowym obiektem pierwszego rzędu z opóźnieniem. Podano komputerowe metody, które pozwalają na bezpośrednie wyznaczenie obszaru D -stabilności rozpatrywanego układu na płaszczyznach parametrów regulatora i obiektu. Proponowane metody bazują na klasycznej metodzie podziału D przestrzeni współczynników quasi-wielomianów charakterystycznych.

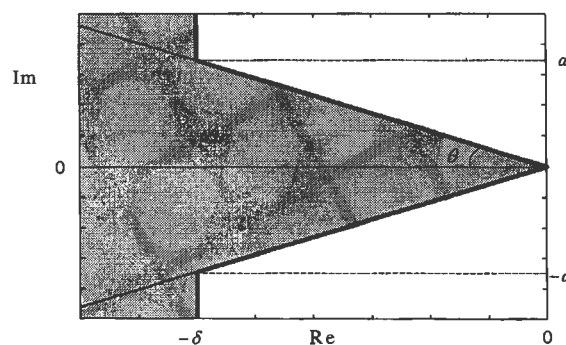
Słowa kluczowe: D -stabilność, układ z opóźnieniem, regulator PI.

1. WSTĘP

Model obiektu regulacji w postaci członu pierwszego rzędu z opóźnieniem czasowym jest bardzo często wykorzystywany do doboru nastaw regulatorów typu PID lub PI. Istnieje wiele różnych metod strojenia regulatora dla tego typu obiektu [10]. Problem doboru nastaw regulatora może być także rozwiązany poprzez wyznaczenie obszarów D -stabilności w przestrzeni parametrów regulatora, tzn. zbiorów parametrów regulatora, dla których układ regulacji jest D -stabilny. Mówimy, że układ regulacji jest D -stabilny, jeżeli wszystkie jego bieguny (zera quasi-wielomianu charakterystycznego) leżą w obszarze D na płaszczyźnie zespolonej. W pracy [11] rozpatrzono ten problem w przypadku, w którym obszar D jest przesuniętą otwartą półpłaszczyzną.

W niniejszej pracy zostanie przeanalizowany problem D -stabilności układów regulacji z opóźnieniem dla obszaru D przedstawionego na rys. 1 (brzeg obszaru zaznaczono linią ciągłą pogrubioną). W przypadku ogólnym quasi-wielomian ma nieskończenie wiele zer. Części rzeczywiste zer o dużych wartościach bezwzględnych (zer asymptotycznych) dążą do minus nieskończoności przy wartościach bezwzględnych tych zer dążących do nieskończoności. Z tego względu nie istnieje otwarty sektor o kącie $\theta < \pi/2$, w którym leżą wszystkie zera quasi-wielomianu charakterystycznego. Z tego powodu brzeg rozpatrywanego obszaru D dla $\text{Re } s < -\delta$, $\delta > 0$ i $\text{Im } s > |a|$ przyjęto w postaci linii prostej równoległej do osi urojonej.

W pracy zostaną podane komputerowe metody wyznaczenia obszarów D -stabilności na płaszczyznach parametrów regulatorów typu PI, P, I oraz rozpatrywanych obiektów z opóźnieniem. Proponowane metody oparte są na klasycznej metodzie podziału D przestrzeni współczynników quasi-wielomianów charakterystycznych układów regulacji.



Rys. 1. Rozpatrywany obszar D

2. UKŁAD REGULACJI Z OBIEKTEM INERCYJNYM Z OPÓŹNIENIEM

2.1. Regulator PI

Dany jest układ dynamiczny liniowy stacjonarny opisany transmitancją operatorową

$$G(s) = \frac{Ke^{-sh}}{1+sT}, \quad h \geq 0, K > 0. \quad (1)$$

Jeżeli $T > 0$, to obiekt (1) jest asymptotycznie stabilny. W dalszych rozważaniach, podobnie jak w literaturze (np. [4, 8]), dla obiektów niestabilnych będziemy przyjmować $T < 0$. Weźmy pod uwagę układ zamknięty złożony z obiektu (1) i szeregowego regulatora typu PI, objętych pętlą ujemnego sprzężenia zwrotnego, pokazany na rys. 2.

[†]Pracę wykonano w ramach pracy własnej finansowanej przez Komitet Badań Naukowych.

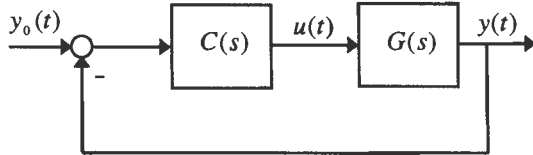
Transmitancja operatorowa regulatora ma postać

$$C(s) = k_p + \frac{k_i}{s} \quad (2)$$

Rozpatrywany układ zamknięty jest asymptotycznie stabilny, jeżeli quasi-wielomian charakterystyczny

$$w(s, \exp(-sh)) = (k_p s + k_i)K \exp(-sh) + s(1 + sT) \quad (3)$$

jest asymptotycznie stabilny, tzn. wszystkie jego zera mają ujemne części rzeczywiste.



Rys. 2. Układ regulacji automatycznej.

Quasi-wielomian (3) będziemy nazywać quasi-wielomianem D -stabilnym, jeżeli wszystkie jego zera leżą w zadanym obszarze D na płaszczyźnie zmiennej zespolonej (obszar D jak na rys.1). Zera dominujące quasi-wielomianu (3) leżące w pobliżu osi urojonej mają zasadniczy wpływ na proces przejściowy i kryteria jakości z nim związane. Z tego powodu będziemy poszukiwać obszarów D -stabilności w przestrzeni parametrów regulatora i obiektu, dla których zera dominujące quasi-wielomianu (3) leżą w otwartym sektorze, którego brzeg ma opis parametryczny

$$s = -\omega \operatorname{sign}(\omega) + j\omega \tan(\theta), \quad \omega \in \Omega, \quad (5)$$

gdzie θ jest kątem pomiędzy ujemną półosią rzeczywistą a brzegiem obszaru, przy czym $\theta \in (0, \pi/2)$. Ze względu na to, że zespolone zera quasi-wielomianu (4) są parami sprzężone możemy przyjąć $\omega \geq 0$.

Mnożąc quasi-wielomian (3) przez $\exp(sh)$ otrzymamy nowy quasi-wielomian o postaci

$$w(s, \exp(sh)) = (k_p s + k_i)K + s(1 + sT)\exp(sh). \quad (4)$$

który ma te same zera co quasi-wielomian (3). Stosując w quasi-wielomianie (4) podstawienie $z = sh$ po przekształceniach otrzymamy quasi-wielomian

$$w(z, \exp(z)) = zX + Y + (pz^2 + z)\exp(z), \quad (6)$$

gdzie $X = Kk_p$, $Y = Kk_i h$, $p = T/h$.

Problem asymptotycznej stabilności quasi-wielomianu (6) analizowany był w pracy [3]. W dalszych rozważaniach przyjmujemy unormowany względem h opis krzywej (5), o postaci

$$z = -\tilde{\omega} + j\tilde{\omega} \tan(\theta), \quad \tilde{\omega} \in \Omega, \quad (7)$$

gdzie $\tilde{\omega} = \omega h$.

Będziemy poszukiwać obszaru D -stabilności rozpatrywanego układu (quasi-wielomianu (6)) na płaszczyźnie (X, Y) , traktując $p = T/h$ oraz θ jako parametry. Stosując metodę podziału D płaszczyznę (X, Y) dzie-

limy granicami podziału D na skończoną liczbę obszarów $D(k)$, $k = 0, 1, \dots$. Dowolny punkt w $D(k)$ odpowiada takim wartościom X i Y , dla których quasi-wielomian (6) ma dokładnie k zer poza obszarem ograniczonym krzywą (7), czyli quasi-wielomian (3) ma dokładnie k zer poza obszarem ograniczonym krzywą (5). Interesujący nas obszar $D(0)$, o ile istnieje, jest obszarem D -stabilności quasi-wielomianu (6).

W celu sprawdzenia, czy dany obszar jest obszarem D -stabilności, należy określić wartości X i Y , odpowiadające dowolnemu punktowi z danego obszaru i sprawdzić położenie zer quasi-wielomianu (6) w pobliżu osi urojonej przy tych wartościach X i Y . Zera quasi-wielomianu można wyznaczyć np. stosując metodę numeryczną podaną w pracy [2]. W dalszych rozważaniach ograniczymy się tylko do podania metody wyznaczania obszaru D -stabilności. Pominiemy etap wykazywania, że wyznaczony obszar jest obszarem D -stabilności.

Wyznaczając na płaszczyźnie (X, Y) obszar D -stabilności quasi-wielomianu (6) rozpatrzmy dwa przypadki

- dodatnie wartości parametru $p = T/h$ (obiekt (1) asymptotycznie stabilny),
- ujemne wartości parametru $p = T/h$ (obiekt (1) niestabilny). W takim przypadku podobnie jak w pracach [3,4] będziemy przyjmować $|p| = |T/h| > 1$, czyli $p < -1$.

Granice podziału D dzielimy na granice zer rzeczywistych oraz granice zer zespolonych [2]. Dowolnemu punktowi na granicy zer rzeczywistych odpowiada quasi-wielomian (6), który ma zero $z = 0$. Łatwo zauważyć, że na płaszczyźnie (X, Y) granicą zer rzeczywistych quasi-wielomianu (6) jest linia prosta $Y = 0$. Granica zer zespolonych odpowiada takim wartościom X i Y , dla których quasi-wielomian (6) ma zera zespolone sprzężone na brzegu obszaru. Granicę zer zespolonych wyznacza się rozwiązując równanie

$$w(-\tilde{\omega} + j\tilde{\omega} \tan(\theta), \exp(-\tilde{\omega} + j\tilde{\omega} \tan(\theta))) = 0 \quad (8)$$

względem X i Y . Otrzymuje się je przyrównując do zera quasi-wielomian (6) przy $z = -\tilde{\omega} + j\tilde{\omega} \tan(\theta)$. Równanie zespolone (8) można napisać w postaci układu dwóch równań rzeczywistych

$$\operatorname{Re}(w(-\tilde{\omega} + j\tilde{\omega} \tan(\theta), \exp(-\tilde{\omega} + j\tilde{\omega} \tan(\theta)))) = 0, \quad (9)$$

$$\operatorname{Im}(w(-\tilde{\omega} + j\tilde{\omega} \tan(\theta), \exp(-\tilde{\omega} + j\tilde{\omega} \tan(\theta)))) = 0. \quad (9a)$$

Rozwiązując równania (9) i (9a) względem X i Y odpowiednio otrzymamy

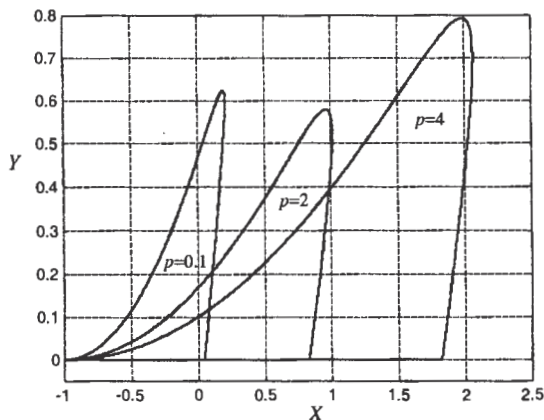
$$X = \left((p\omega(1/(\sin(\theta)\cos(\theta)) - 2\cot(\theta)) + \cot(\theta))\sin(\omega \tan(\theta)) + (2p\omega - 1)\cos(\omega \tan(\theta)) \right) \exp(-\omega), \quad (10)$$

$$Y = \left(\frac{\omega(1-p\omega)}{\sin(\theta)\cos(\theta)}\sin(\omega \tan(\theta)) + \frac{\omega^2 p}{\cos(\theta)^2}\cos(\omega \tan(\theta)) \right) \exp(-\omega). \quad (10a)$$

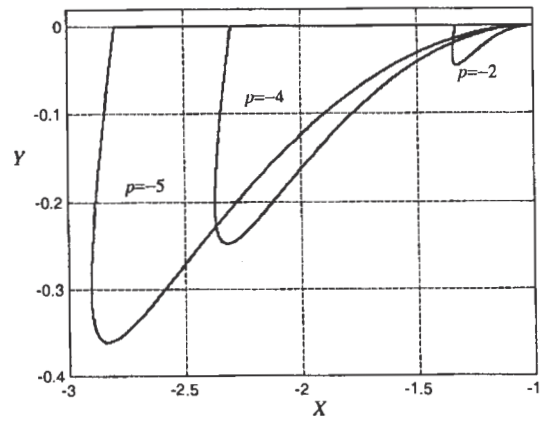
Linia krzywa o opisie parametrycznym (10), (10a) przy zadanych wartościach parametrów p i θ wyznacza na płaszczyźnie (X, Y) granicę zer zespolonych quasi-wielomianu (6). Linia prosta $Y = 0$ oraz linie krzywe (10) i (10a), wykreślone w funkcji parametru $\omega \geq 0$, dzielą płaszczyznę (X, Y) na obszary $D(k)$. Obszar $D(0)$ leży pomiędzy granicą zer zespolonych i granicą zer rzeczywistych. Obszary D -stabilności quasi-wielomianu (6) wyznaczone dla $\theta = \pi/4$ i dla kilku wartości parametru $p > 0$ oraz dla kilku wartości $p < -1$ są pokazane na rys. 3 i 4, odpowiednio. Obszary D -stabilności dla $p > 0$ leżą w półpłaszczyźnie $Y > 0$, zaś dla $p < 0$ są położone w półpłaszczyźnie $Y < 0$. Rys. 5 i 6 przedstawiają obszary D -stabilności wyznaczone dla kilku wartości parametru θ przy określonej wartości $p = 4$ i $p = -4$, odpowiednio. Na tych rysunkach linią przerywaną zaznaczono granice zer rzeczywistych i zer zespolonych stabilności asymptotycznej quasi-wielomianu (6). Z rysunków wynika, że przy zadanym p zmniejszenie wartości parametru θ powoduje mniejsze zakresy wartości X, Y (tj. k_p, k_i).

Przykład 1. Należy wyznaczyć wartości parametrów regulatora PI, dla których rozpatrywany układ regulacji automatycznej z obiektem (1) przy $K = 1, h = 0.5, T = 2, \theta = \pi/4$ jest D -stabilny.

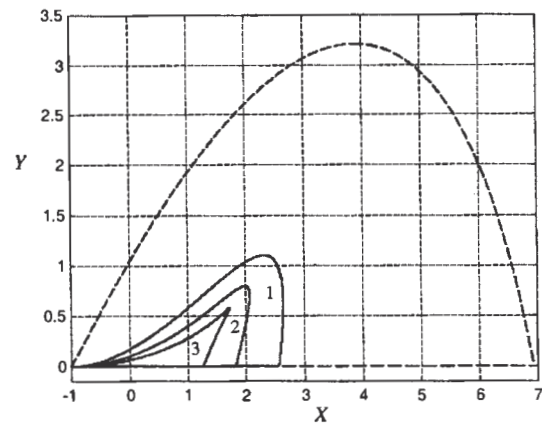
Obszar D -stabilności rozpatrywanego układu jest ograniczony odcinkiem linii prostej $Y = 0$ oraz odcinkiem pokazanej na rys. 3 linii krzywej, odpowiadającej $p = T/h = 4$. Wybierając dowolny punkt leżący wewnątrz tego obszaru, np. o współrzędnych $X = 1.5, Y = 0.4$, otrzymamy $Kk_p = 1.5, Kk_i h = 0.4$. Obliczając z powyższych zależności wartości parametrów regulatora PI otrzymamy $k_p = 1.5, k_i = 0.8$, dla których zera dominujące quasi-wielomianu (6) leżą w obszarze ograniczonym krzywą (7), czyli zera dominujące quasi-wielomianu (3) są położone na płaszczyźnie zmiennej zespolonej w obszarze ograniczonym krzywą (5).



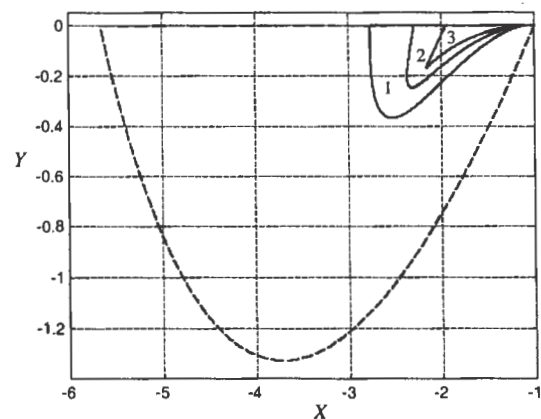
Rys. 3. Obszary D -stabilności quasi-wielomianu (6) wyznaczone dla $\theta = \pi/4$ i kilku wartości parametru $p = T/h > 0$.



Rys. 4. Obszary D -stabilności quasi-wielomianu (6) wyznaczone dla $\theta = \pi/4$ i kilku wartości parametru $p = T/h < -1$.



Rys. 5. Obszary D -stabilności quasi-wielomianu (6) wyznaczone dla $p = T/h = 4$ i kilku wartości parametru θ : obszar 1 - $\theta = \pi/3$, obszar 2 - $\theta = \pi/4$, obszar 3 - $\theta = \pi/9$.



Rys. 6. Obszary D -stabilności quasi-wielomianu (6) wyznaczone dla $p = T/h = -4$ i kilku wartości parametru θ : obszar 1 - $\theta = \pi/3$, obszar 2 - $\theta = \pi/4$, obszar 3 - $\theta = \pi/9$.

Przykład 2. Należy wyznaczyć wartości parametrów regulatora PI, dla których rozpatrywany układ regulacji automatycznej z niestabilnym obiektem (1) przy $K = 1$, $h = 0.5$, $T = -2$, $\theta = \pi/4$ jest D -stabilny.

Obszar D -stabilności rozpatrywanego układu jest ograniczony odcinkiem linii prostej $Y = 0$ oraz odcinkiem pokazanej na rys. 4 linii krzywej, odpowiadającej $p = T/h = -4$. Wybierając dowolny punkt leżący wewnątrz tego obszaru, np. o współrzędnych $X = -2$, $Y = -0.1$, otrzymamy $Kk_p = -2$, $Kk_i h = -0.1$. Obliczając z powyższych zależności wartości parametrów regulatora PI otrzymamy $k_p = -2$, $k_i = -0.2$, dla których zera quasi-wielomianu (3) leżą w zadanym obszarze D .

2.2. Regulator P

Quasi-wielomian charakterystyczny rozpatrywanego układu regulacji automatycznej z regulatorem typu P, o transmitancji operatorowej $C(s) = k_p$, ma postać

$$w(s, \exp(sh)) = k_p K + (1 + sT) \exp(sh). \quad (11)$$

Postępując podobnie jak w przypadku quasi-wielomianu (4), quasi-wielomian (11) można napisać w postaci

$$w(z, \exp(z)) = a_1 + (a_0 + z) \exp(z), \quad (12)$$

gdzie $a_0 = h/T$, $a_1 = Kk_p h/T$.

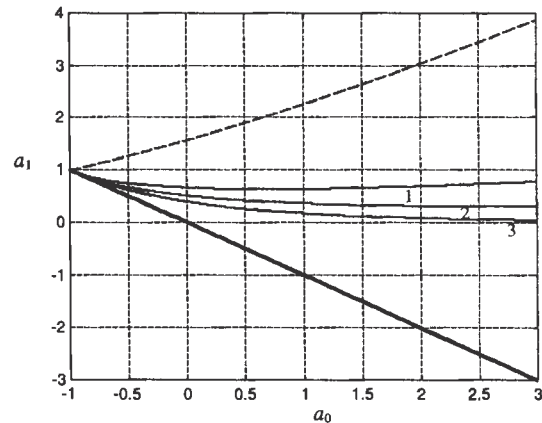
Na płaszczyźnie (a_0, a_1) granicą zer rzeczywistych quasi-wielomianu (12) jest linia prosta $a_0 + a_1 = 0$. Aby wyznaczyć granicę zer zespolonych, należy rozwiązać równanie $w(-\tilde{\omega} + j\tilde{\omega} \tan(\theta), \exp(-\tilde{\omega} + j\tilde{\omega} \tan(\theta))) = 0$ względem a_0 i a_1 . Równanie zespolone można napisać w postaci układu dwóch równań rzeczywistych. Następnie rozwiązując je względem a_0 i a_1 odpowiednio otrzymamy

$$a_0 = \frac{\tilde{\omega} \sin(\tilde{\omega} \tan(\theta) - \theta)}{\sin(\tilde{\omega} \tan(\theta)) \cos(\theta)}, \quad (13)$$

$$a_1 = \frac{\tilde{\omega} \exp(-\tilde{\omega}) \tan(\theta)}{\sin(\tilde{\omega} \tan(\theta))}. \quad (13a)$$

Na płaszczyźnie (a_0, a_1) granice podziału D tworzy granica zer rzeczywistych $a_0 + a_1 = 0$ oraz granica zer zespolonych o opisie parametrycznym (13), którą wyznacza się w funkcji parametru $\tilde{\omega} \geq 0$ przy zadanym θ . Granice obszarów D -stabilności oraz asymptotycznej stabilności rozpatrywanego układu regulacji automatycznej z obiektem (1) i regulatorem P wyznaczone dla kilku wartości parametru θ są pokazane na rys. 7. Obszar D -stabilności leży pomiędzy granicą zer zespolonych i granicą zer rzeczywistych. Obszar asymptotycznej stabilności pokazany na rys. 7 ograniczony jest granicą zer rzeczywistych (linia ciągła pogrubiona) i granicą zer zespolonych (linia przerywana). Granica zer rzeczywistych jest taka sam w przypadku stabilności

asymptotycznej i D -stabilności. Otrzymane obszary stabilności są otwarte (a_0 i a_1 dążą do nieskończoności przy $\tilde{\omega} \rightarrow \pi$). Z rys. 7 wynika, że przy określonym a_0 wraz ze zmniejszaniem wartości parametru θ maleje przedział wartości a_1 (tj. k_p).



Rys. 7. Granice obszarów D -stabilności quasi-wielomianu (12) wyznaczone dla kilku wartości θ : krzywa 1 - $\theta = \pi/3$, krzywa 2 - $\theta = \pi/4$, krzywa 3 - $\theta = \pi/9$.

Przykład 3. Należy wyznaczyć wartości parametru k_p regulatora P, dla których rozpatrywany układ regulacji automatycznej z niestabilnym obiektem (1) przy $K = 1$, $h = 0.5$, $T = -1$, $\theta = \pi/9$ jest D -stabilny.

Obliczając wartość współczynnika $a_0 = h/T$ otrzymamy $a_0 = -0.5$. Z rys. 7 przy $a_0 = -0.5$ wynika, że $0.5 < a_1 < 0.616$, przy czym wartość 0.616 została odczytana z ekranu monitora z dokładnością do trzech miejsc po przecinku. Ponieważ $a_1 = -0.5k_p$, rozpatrywany układ regulacji automatycznej z regulatorem typu P o transmitancji operatorowej $C(s) = k_p$ jest D -stabilny dla dowolnego $k_p \in (-1.232, -1)$, przy $\theta = \pi/9$.

2.3. Regulator I

W przypadku stosowania regulatora typu I, o transmitancji operatorowej $C(s) = k_i/s$, quasi-wielomian charakterystyczny rozpatrywanego układu regulacji automatycznej można napisać w postaci

$$w(s, \exp(sh)) = k_i K + s(1 + sT) \exp(sh). \quad (14)$$

Zauważmy, że rozpatrywany układ regulacji automatycznej bez opóźnienia (tj. przy $h = 0$) jest niestabilny przy $T < 0$. Dlatego też w dalszych rozważaniach będziemy przyjmować $T > 0$.

Stosując w (14) podstawienie $z = sh$ po przekształceniach otrzymamy

$$w(z, \exp(z)) = a_0 + (a_2 z^2 + z) \exp(z), \quad (15)$$

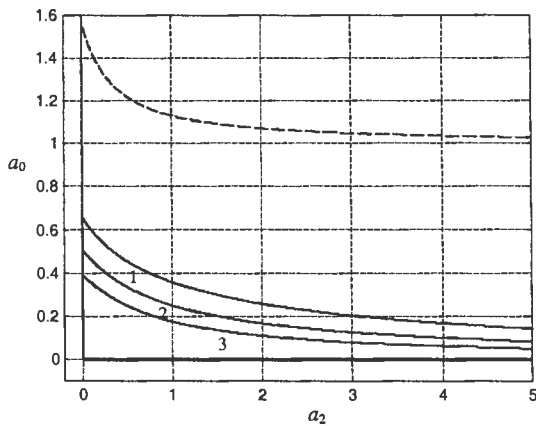
gdzie $a_2 = T/h$, $a_0 = Kk_i h$.

Na płaszczyźnie (a_2, a_0) granicą zer rzeczywistych quasi-wielomianu (15) jest linia prosta $a_0 = 0$. Aby wyznaczyć granicę zer zespolonych, należy rozwiązać równanie $w(-\tilde{\omega} + j\tilde{\omega}\tan(\theta), \exp(-\tilde{\omega} + j\tilde{\omega}\tan(\theta))) = 0$ względem a_0 i a_2 . Równanie zespolone można napisać w postaci układu dwóch równań rzeczywistych. Następnie rozwiązując je względem a_2 i a_0 odpowiednio otrzymamy

$$a_2 = \frac{\cos(\theta)\sin(\theta - \tilde{\omega}\tan(\theta))}{\tilde{\omega}(2\cos(\theta)\sin(\theta - \tilde{\omega}\tan(\theta)) + \sin(\tilde{\omega}\tan(\theta)))}, \quad (16)$$

$$a_0 = \frac{\tilde{\omega}\exp(-\tilde{\omega})\tan(\theta)}{2\cos(\theta)\sin(\theta - \tilde{\omega}\tan(\theta)) + \sin(\tilde{\omega}\tan(\theta))}. \quad (16a)$$

Na płaszczyźnie (a_2, a_0) granice podziału D tworzy granica zer rzeczywistych $a_0 = 0$ oraz granica zer zespolonych o opisie parametrycznym (16), którą wyznacza się w funkcji parametru $\tilde{\omega} \geq 0$ przy zadanym θ . Obszary D-stabilności oraz asymptotycznej stabilności quasi-wielomianu (15) wyznaczone dla kilku wartości parametru θ są pokazane na rys. 8. Obszar D-stabilności leży pomiędzy granicą zer zespolonych i granicą zer rzeczywistych. Granice zer zespolonych stabilności asymptotycznej oznaczono na rysunku linią przerywaną.



Rys. 8. Granice obszarów D-stabilności quasi-wielomianu (15) wyznaczone dla kilku wartości θ : krzywa 1 - $\theta = \pi/3$, krzywa 2 - $\theta = \pi/4$, krzywa 3 - $\theta = \pi/9$.

3. UKŁAD REGULACJI Z OBIEKTEM CAŁKUJĄCYM Z OPÓŹNIENIEM

3.1. Regulator PI

Weźmy pod uwagę układ regulacji automatycznej o schemacie blokowym pokazanym na rys. 2, złożony z obiektu o transmitancji operatorowej

$$G(s) = \frac{Ke^{-sh}}{s}, \quad h \geq 0, \quad K > 0 \quad (17)$$

i szeregowego regulatora typu PI o transmitancji operatorowej (2). Quasi-wielomian charakterystyczny rozpatrywanego układu ma postać

$$w(s, \exp(-sh)) = (k_p s + k_i)K \exp(-sh) + s^2. \quad (18)$$

Obliczając $\exp(sh)w(s, \exp(-sh))$ otrzymamy

$$w(s, \exp(sh)) = (k_p s + k_i)K + s^2 \exp(sh). \quad (19)$$

Postępując podobnie jak w przypadku quasi-wielomianu (4), quasi-wielomian (19) można przekształcić do postaci

$$w(z, \exp(z)) = a_0 + za_1 + z^2 \exp(z), \quad (20)$$

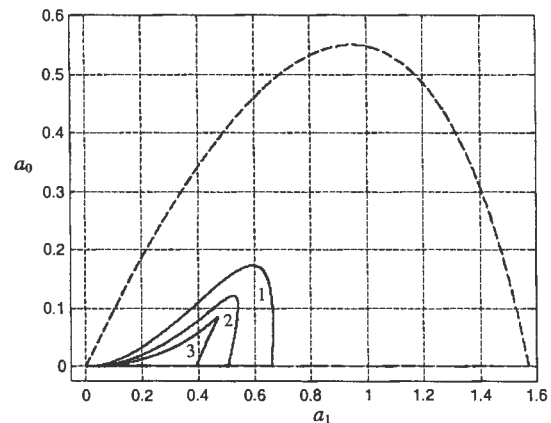
gdzie $a_1 = Kk_p h$, $a_0 = Kk_i h^2$.

Na płaszczyźnie (a_1, a_0) granicą zer rzeczywistych jest prosta $a_0 = 0$. Natomiast granica zer zespolonych quasi-wielomianu (19) ma opis parametryczny

$$a_1 = \frac{\tilde{\omega}\exp(-\tilde{\omega})(2\cos(\theta)\sin(\theta - \tilde{\omega}\tan(\theta)) + \sin(\tilde{\omega}\tan(\theta)))}{\sin(\theta)\cos(\theta)}, \quad (21)$$

$$a_0 = \frac{\tilde{\omega}^2 \exp(-\tilde{\omega})\sin(\theta - \tilde{\omega}\tan(\theta))}{\sin(\theta)\cos^2(\theta)}. \quad (21a)$$

Granica zer rzeczywistych $a_0 = 0$ oraz granica zer zespolonych o opisie parametrycznym (21), którą wyznacza się w funkcji parametru $\tilde{\omega}$, określają na płaszczyźnie (a_1, a_0) , przy zadanym θ , obszary D-stabilności quasi-wielomianu (20). Są one pokazane na rys. 9. Brzeg obszaru stabilności asymptotycznej zaznaczono linią przerywaną.



Rys. 9. Obszary D-stabilności quasi-wielomianu (20) wyznaczone dla kilku wartości parametru θ : obszar 1 - $\theta = \pi/3$, obszar 2 - $\theta = \pi/4$, obszar 3 - $\theta = \pi/9$.

Przykład 4. Należy wyznaczyć wartości parametrów regulatora PI, dla których rozpatrywany układ regulacji automatycznej z obiektem (17) przy $K = 1$, $h = 0.5$, $\theta = \pi/9$ jest D-stabilny.

Obszar D -stabilności rozpatrywanego układu jest pokazany na rys. 9 (obszar 3), przy czym $a_1 = Kk_p h = 0.5k_p$, $a_0 = Kk_i h^2 = 0.25k_i$. Dowolny punkt leżący wewnątrz tego obszaru określa parametry regulatora PI, zapewniające D -stabilność układu regulacji automatycznej. Przyjmijmy np. $a_1 = 0.5k_p = 0.4$, wtedy $k_p = 0.8$. Z rys. 9 przy $a_1 = 0.4$ wynika, że $0.01 < a_0 < 0.057$, przy czym wartości te została odczytane z ekranu monitora z dokładnością do trzech miejsc po przecinku. Ponieważ $a_0 = 0.25k_i$, rozpatrywany układ regulacji automatycznej jest D -stabilny dla $k_p = 0.8$ i dla dowolnego $k_i \in (0.04, 0.228)$, przy $\theta = \pi/9$.

4. UWAGI KOŃCOWE

Praca jest poświęcona problemowi D -stabilności układu regulacji automatycznej z regulatorami typu PI, P oraz I i liniowymi obiektami pierwszego rzędu z opóźnieniem. Rozpatrzono ogólniejszy rodzaj stabilności niż stabilność asymptotyczna, a mianowicie tzw. D -stabilność, gdzie obszar D przyjęto jak na rys. 1. Wykorzystując metodę podziału D podano komputerowe metody wyznaczania obszarów D -stabilności na płaszczyznach parametrów rozpatrywanych regulatorów oraz obiektu. Do wyznaczenia obszarów D -stabilności rozpatrywanych układów regulacji automatycznej wykorzystano programy komputerowe opracowane w środowisku systemu MATLAB i MATHCAD. Rozważania zilustrowano przykładami liczbowymi.

D-STABILITY REGIONS OF CONTROL SYSTEMS WITH FIRST ORDER PLANT WITH DELAY

Abstract: The paper considers the D -stability problem of a first-order plant with time delay using the PI, P and I controllers. Using the classical D partition method, simple and efficient computational methods for determining the D -stability regions in the parameter space are given. The considerations are illustrated by examples.

Literatura

- [1] Busłowicz M. (1994) Computation of robust first order compensators stabilizing interval plants. *Archives of Control Sciences*, 34, 95-103.
- [2] Busłowicz M. (2000) *Odporna stabilność układów dynamicznych liniowych stacjonarnych z opóźnieniami*. Seria: Mon. Komitetu Automatyki i Robotyki PAN, Tom1, Dział Wydawnictw i Poligrafii Politechniki Białostockiej, Warszawa-Białystok.
- [3] Busłowicz M., Ruszewski A. (2002). Stabilizacja za pomocą regulatorów PI liniowych układów pierwszego rzędu z opóźnieniem. *Materiały konferencyjne XIV KKA, Zielona Góra*, 1, 89-94.
- [4] Datta A., Ho M.T., Bhattacharyya S.P. (2000) *Structure and Synthesis of PID Controllers*. Springer-Verlag, Londyn.
- [5] Górecki H. (1971) *Analiza i synteza układów regulacji z opóźnieniem*. WNT, Warszawa.
- [6] Górecki H., Fuksa S., Grabowski P. (1989). *Analysis and Synthesis of Time Delay Systems*. PWN, J. Wiley, Warszawa, Chichester.
- [7] Guillermo J.S., Datta A., Bhattacharyya S.P. (2000) Stabilization of time delay systems. *Proc. American Control Conference, Chicago*, 963-970.
- [8] Guillermo J.S., Datta A., Bhattacharyya S.P. (2001) Stabilization of first-order systems with time delay using PID controllers. *Proc. American Control Conference, Arlington*, 4650-4655.
- [9] Guillermo J.S., Datta A., Bhattacharyya S.P. (2001) PI stabilization of first-order systems with time delay. *Automatica*, 37, 2025-2031.
- [10] O'Dwyer A. (2000). PI and PID controller tuning rules for time delay processes: a summary. Technical Report AOD-00-01, Edition 1.
- [11] Ruszewski A. (2003). Stabilność układu regulacji automatycznej z regulatorami PI i liniowymi obiektami pierwszego rzędu z opóźnieniem. *Materiały konferencyjne V OWD, Istebna*, 320-325.
- [12] Ruszewski A. (2005). D -stabilizacja układów regulacji automatycznej z opóźnieniem. *Materiały konferencyjne Automation 2005, Warszawa*, 314-323.



**Instytut Badań Systemowych
Polskiej Akademii Nauk**

ISBN 83-89475-02-2