

XV Krajowa Konferencja Automatyki

Tom I



**Redaktorzy:
Zdzisław Bubnicki
Roman Kulikowski
Janusz Kacprzyk**

XV Krajowa Konferencja Automatyki Tom I



Redaktorzy:
Zdzisław BUBNICKI
Roman KULIKOWSKI
Janusz KACPRZYK

ORGANIZATOR

Komitet Automatyki i Robotyki Polskiej Akademii Nauk
Instytut Badań Systemowych Polskiej Akademii Nauk

WSPÓŁORGANIZATORZY

Politechnika Warszawska

Przemysłowy Instytut Automatyki i Pomiarów

Polskie Stowarzyszenie Pomiarów, Automatyki i Robotyki

ORGANIZATOR

Komitet Automatyki i Robotyki Polskiej Akademii Nauk
Instytut Badań Systemowych Polskiej Akademii Nauk

WSPÓLORGANIZATORZY

Politechnika Warszawska
Przemysłowy Instytut Automatyki i Pomiarów
Polskie Stowarzyszenie Pomiarów, Automatyki i Robotyki

KOMITET PROGRAMOWY

Przewodniczący
Zastępca Przewodniczącego

Zdzisław BUBNICKI
Roman KULIKOWSKI

CZŁONKOWIE

Stanisław BAŃKA
Mikołaj BUSŁOWICZ
Ryszard GESSING
Jakub GUTENBAUM
Stanisław KACZANOWSKI
Janusz KACPRZYK
Józef KORBICZ
Krzysztof KOZŁOWSKI
Krzysztof KUŹMIŃSKI
Krzysztof MALINOWSKI
Antoni NIEDERLIŃSKI
Tadeusz PUCHAŁKA
Stanisław SKOCZOWSKI
Jerzy ŚWIĄTEK
Ryszard TADEUSIEWICZ
Krzysztof TCHOŃ
Jan WĘGLARZ

Michał BIAŁKO
Władysław FINDEISEN
Henryk GÓRECKI
Jerzy JÓZEFczyk
Tadeusz KACZOREK
Jerzy KLAMKA
Zbigniew KOWALSKI
Juliusz L. KULIKOWSKI
Kazimierz MALANOWSKI
Wojciech MITKOWSKI
Władysław PEŁCZEWSKI
Leszek RUTKOWSKI
Roman SŁOWIŃSKI
Andrzej ŚWIERNIAK
Piotr TATJIEWSKI
Leszek TRYBUS
Andrzej P. WIERZBICKI

KOMITET ORGANIZACYJNY

Przewodniczący
Zastępcy Przewodniczącego

Roman KULIKOWSKI
Janusz KACPRZYK
Stanisław KACZANOWSKI
Tadeusz KACZOREK
Krzysztof MALINOWSKI
Roman OSTROWSKI
Tadeusz PUCHAŁKA
Dariusz WAGNER
Jan STUDZIŃSKI
Jan W. OWSIŃSKI

Członkowie

Sekretarze naukowi

ISBN 83-89475-00-6

Copyright © Instytut Badań Systemowych Polskiej Akademii Nauk
All rights reserved

Druk: ARGRAF, Warszawa

STABILNOŚĆ, STEROWALNOŚĆ,
OBSERWOWALNOŚĆ

STABILIZACJA LINIOWEGO NIESKOŃCZENIE WYMIAROWEGO SYSTEMU OSCYLACYJNEGO ZA POMOCĄ LINIOWEGO SPRZEŻENIA ZWROTNEGO OD POŁOŻENIA

Paweł SKRUCH

Akademia Górniczo-Hutnicza, Wydział Elektrotechniki, Automatyki, Informatyki i Elektroniki
Al. Mickiewicza 30/B1, 30-059 Kraków, e-mail: pskruch@poczta.onet.pl

Streszczenie: W pracy zostało rozważone zagadnienie stabilizacji liniowych nieskończenie wymiarowych układów oscylacyjnych bez tłumienia. Pokazano, że liniowe sprzężenie zwrotne współpracujące z układem kompensatora dynamicznego asymptotycznie stabilizuje system. Co więcej, zerowe rozwiązanie układu zamkniętego jest globalnie asymptotycznie stabilnym punktem równowagi. Przy dowodzie wykorzystano zasadę La Salle'a dla układów nieskończenie wymiarowych.

Słowa kluczowe: stabilizacja, system oscylacyjny nieskończenie wymiarowy, zasada La Salle'a, kompensator dynamiczny.

1. WSTĘP

Przy stabilizacji układów oscylacyjnych często spotykaną praktyką jest wykorzystywanie prędkościowego sprzężenia zwrotnego. Okazuje się jednak, że nie zawsze taka konstrukcja jest możliwa. Prędkościowe sprzężenie zwrotne wymaga bowiem różniczkowania wektora stanu lub zbudowania obserwatora do estymacji pochodnej wektora stanu na podstawie pomiaru wektora odpowiedzi. To z kolei wiąże się z rozbudową układu pomiarowego. Dlatego też na szczególną uwagę zasługują liniowe dynamiczne sprzężenia zwrotne, które nie będą wymagały obliczania pochodnej stanu.

Problem stabilizacji układów liniowych drugiego rzędu w skończenie wymiarowej przestrzeni stanów został omówiony w pracach [12, 17, 18, 19, 21]. Do stabilizacji układu zastosowano liniowe sprzężenie zwrotne od położenia współpracujące z układem kompensatora dynamicznego. Dowód globalnej asymptotycznej stabilności układu zamkniętego bazował na twierdzeniu La Salle'a [14].

W niniejszej pracy zostanie rozważone zagadnienie stabilizacji pewnej klasy układów nieskończenie wymiarowych. Klasa ta obejmuje operatorowe układy drugiego rzędu opisane w rzeczywistej przestrzeni Hilberta z ograniczonymi operatorami wejścia i wyjścia. Analizą układów drugiego rzędu o parametrach rozłożonych zajmowało się wielu autorów. W szczególności prace [23, 24] rozważają problem stabilizacji równania falowego przy obserwacji brzegowej i sterowaniu brzegowym; prace [9, 11, 13] dotyczą stabilizacji układów oscylacyjnych z

nieograniczonymi operatorami wejścia i wyjścia; prace [8, 32] rozważają zagadnienie sterowalności i obserwowalności układów nieskończenie wymiarowych z ograniczonymi operatorami wejścia i wyjścia.

2. SYSTEM OSCYLACYJNY

Rozważmy otwarty i ograniczony zbiór $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ z gładkim brzegiem $\partial\Omega$. Niech X będzie rzeczywistą przestrzenią Hilberta funkcji całkowalnych z kwadratem na zbiorze Ω z następującym iloczynem skalarnym

$$\langle f, g \rangle_X = \int_{\Omega} f(\xi)g(\xi)d\xi. \quad (1)$$

Normę w przestrzeni X będziemy oznaczać symbolem $\|\cdot\|_X$. W takim przypadku $\|\cdot\|_X^2 = \langle \cdot, \cdot \rangle_X$. Przez

$$L^2(\Omega) = \left\{ f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n : \int_{\Omega} |f(\xi)|^2 d\xi < \infty \right\}, \quad (2)$$

$$H^k(\Omega) = \left\{ f \in L^2(\Omega) : f, f', \dots, f^{(k)} \in L^2(\Omega) \right\} \quad (3)$$

będziemy rozumieć przestrzenie funkcji całkowalnych z kwadratem nad zbiorze Ω .

Dynamika nietłumionych drgań w nieskończenie wymiarowej przestrzeni stanów może być opisana przez liniowe abstrakcyjne równanie różniczkowe

$$\ddot{x}(t) + Ax(t) = Bu(t), \quad t > 0, \quad (4)$$

z warunkami początkowymi

$$x(0) = x^0 \in D(A), \quad \dot{x}(0) = x^1 \in X, \quad (5)$$

przy czym $x(t) \in X = L^2(\Omega)$, $A : (D(A) \subset X) \rightarrow X$ jest liniowym (w ogólnym przypadku nieograniczonym) operatorem z dziedziną $D(A)$ gęstą w X . Operator sterowania $B \in L(\mathbb{R}^r, X)$ jest zdefiniowany następująco:

$$Bu(t) = \sum_{i=1}^r b_i u_i(t), \quad (6)$$

przy czym $B = [b_1 \ b_2 \ \dots \ b_r]$, $b_i \in X$, $u(t) = [u_1(t) \ u_2(t) \ \dots \ u_r(t)]^T$, $u_i(\cdot) \in L^2([0, \infty), \mathbb{R})$, $i = 1, 2, \dots, r$. Równanie wyjścia dla systemu (4) jest

określone przez liniowy i ograniczony operator $C \in L(X, \mathbb{R}^m)$ w sposób następujący:

$$y(t) = Cx(t), \quad (7)$$

przy czym

$$Cx(t) = [\langle c_1, x \rangle_X \quad \langle c_2, x \rangle_X \quad \cdots \quad \langle c_m, x \rangle_X]^T, \quad (8)$$

funkcje $c_i \in X, i = 1, 2, \dots, m$ reprezentują charakterystyki czujników pomiarowych.

W dalszych rozważaniach będziemy zakładać, że operator A jest operatorem samosprzężonym, dodatnio określonym oraz że rezolwenta $R(\lambda, A)$ jest operatorem zwartym dla wszystkich λ należących do zbioru rezolwenty $\rho(A)$. Wobec tego będą zachodzić następujące zależności [4, 22, 30]:

- (i) $0 \in \rho(A)$, czyli A^{-1} istnieje i jest operatorem zwartym i ograniczonym,
- (ii) A jest operatorem domkniętym,
- (iii) Operator A posiada widmo dyskretne złożone z rzeczywistych wartości własnych λ_i o skończonych krotnościach $r_i < \infty$, przy czym $0 < \lambda_1 < \dots < \lambda_i < \dots, \lim_{i \rightarrow \infty} \lambda_i = \infty$,
- (iv) Z każdą wartością własną λ_i jest związanych r_i wektorów własnych $v_{ik}, Av_{ik} = \lambda_i v_{ik}$, przy czym $i = 1, 2, \dots, k = 1, 2, \dots, r_i$,
- (v) Ciąg wektorów własnych $v_{ik}, i = 1, 2, \dots, k = 1, 2, \dots, r_i$, stanowi bazę ortonormalną w przestrzeni X .

W bazie wektorów własnych operator A posiada następującą reprezentację spektralną:

$$Ax = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i \sum_{k=1}^{r_i} \langle x, v_{ik} \rangle_X v_{ik}, \quad x \in D(A), \quad (9)$$

przy czym

$$D(A) = \left\{ x \in X : \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i^2 \sum_{k=1}^{r_i} \langle x, v_{ik} \rangle_X^2 < \infty \right\}. \quad (10)$$

Ponadto, dla każdego $x \in X$ zachodzi

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{r_i} \langle x, v_{ik} \rangle_X v_{ik}. \quad (11)$$

Dla dowolnej chwili czasu $T > 0$ istnieje jednoznaczne rozwiązanie $x(t) \in X, t \in [0, T]$ układu (4) o następujących własnościach:

- (i) $x \in C^2([0, T], X)$,
- (ii) $x(t), t \in [0, T]$ spełnia równanie (4) z warunkami początkowymi (5),
- (iii) $x(t) \in D(A)$ dla $t \geq 0, Ax \in C^0([0, T], X)$.

3. STABILIZACJA SYSTEMU

Rozważmy nietłumiony układ drgający opisany przez równania (4), (5), (6) i (7). Dziedzinę $D(A)$ operatora A będziemy określać w oparciu o warunki brzegowe (np. Dirichleta, Neumanna) nałożone na układ (4):

$$D(A) = \{x \in H^2(\Omega) : B_{\partial\Omega}(x) = 0\}. \quad (12)$$

Założmy ponadto, że operator wyjścia C jest sprzężony z operatorem sterowania B , tzn. $C = B^*$ i $r = m$. Równanie wyjścia przyjmie zatem postać:

$$y(t) = B^*x(t). \quad (13)$$

Niech system opisany przez równanie stanu (4) i równanie wyjścia (13) będzie obserwowalny. Oznacza to możliwość jednoznacznego wyznaczenia warunku początkowego $\text{col}(x^0, x^1)$ na podstawie znajomości wyjścia $y(t)$ w skończonym przedziale czasu $[0, T], T > 0$. Warunkiem koniecznym i wystarczającym obserwowalności układu (4), (13) jest, aby dla każdego zespolonego s jedynym rozwiązaniem układu

$$\begin{bmatrix} \tilde{A} - sI \\ \tilde{C} \end{bmatrix} \tilde{x} = 0, \quad (14)$$

był wektor zerowy [10], przy czym $\tilde{A} = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -A & 0 \end{bmatrix}$, $\tilde{C} = [B^* \quad 0]$ oraz $\tilde{x} = \text{col}(x_1, x_2)$. Badanie obserwowalności układu można także sprowadzić do badania aproksymacyjnej sterowalności [2], co w naszym przypadku oznacza, że spełniony jest następujący warunek [8, 32]:

$$\text{rank } B_i = r_i, \quad (15)$$

przy czym

$$B_i = \begin{bmatrix} \langle b_1, v_{i1} \rangle_X & \langle b_2, v_{i1} \rangle_X & \cdots & \langle b_m, v_{i1} \rangle_X \\ \langle b_1, v_{i2} \rangle_X & \langle b_2, v_{i2} \rangle_X & \cdots & \langle b_m, v_{i2} \rangle_X \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle b_1, v_{ir_i} \rangle_X & \langle b_2, v_{ir_i} \rangle_X & \cdots & \langle b_m, v_{ir_i} \rangle_X \end{bmatrix}, \quad (16)$$

v_{ik} jest wektorem własnym operatora A odpowiadającym wartości własnej λ_i o krotności $r_i, i = 1, 2, \dots, k = 1, 2, \dots, r_i$.

Rozważmy dynamiczne sprzężenie zwrotne o postaci

$$u(t) = -K[w(t) + y(t)], \quad (17)$$

$$\dot{w}(t) + A_w w(t) = B_w u(t), \quad w(0) = w^0, \quad (18)$$

przy czym $w(t) \in \mathbb{R}^m, A_w = \text{diag}[\alpha_i], B_w = \text{diag}[\beta_i], \alpha_i, \beta_i \in \mathbb{R}, \alpha_i > 0, \beta_i > 0, i = 1, 2, \dots, m, K = K^T > 0$ jest macierzą rzeczywistą dodatnio określoną (zob. np. [17, 31]).

Równania opisujące system zamknięty zapiszemy w nowej przestrzeni $Z = H^1(\Omega) \times L^2(\Omega) \times \mathbb{R}^m$ z następującym iloczynem skalarnym:

$$\langle z, \tilde{z} \rangle_Z = \langle Az_1, \tilde{z}_1 \rangle_X + \langle z_2, \tilde{z}_2 \rangle_X + z_3^T Q \tilde{z}_3 + (B^* z_1 + z_3) K (B^* \tilde{z}_1 + \tilde{z}_3), \quad (19)$$

gdzie $z = \text{col}(z_1, z_2, z_3)$, $\tilde{z} = \text{col}(\tilde{z}_1, \tilde{z}_2, \tilde{z}_3)$, $Q = \text{diag}[\frac{\alpha_i}{\beta_i}] = A_w B_w^{-1}$. Łatwo wykazać, że tak zdefiniowana przestrzeń Z jest przestrzenią Hilberta. System (4) z wyjściem (13), współpracujący z regulatorem (17), (18) możemy teraz opisać następującym równaniem:

$$\dot{z}(t) = Lz(t), \quad (20)$$

przy czym $z(t) = \text{col}(x(t), \dot{x}(t), w(t))$, $L : (D(L) \subset Z) \rightarrow Z$ jest liniowym operatorem takim, że

$$L = \begin{bmatrix} 0 & I & 0 \\ -A - BKB^* & 0 & -BK \\ -B_wKB^* & 0 & -A_w - B_wK \end{bmatrix} \quad (21)$$

oraz

$$D(L) = \{ \text{col}(x, \dot{x}, w) \in Z : x \in H^2(\Omega), \dot{x} \in H^1(\Omega), w \in \mathbb{R}^m, B_{\partial\Omega}(x) = 0 \}. \quad (22)$$

Warunek początkowy dla systemu (20) określa wektor $z(0) = \text{col}(x^0, \dot{x}^1, w^0)$.

Twierdzenie 1. *Operator L jest operatorem dysypatywnym, czyli rozpraszającym energię.*

Dowód. Zob. także [13]. Wiadomo [25], że warunkiem koniecznym i wystarczającym dysypatywności operatora L jest, aby nierówność

$$\|(\lambda I - L)z\|_Z \geq \lambda \|z\|_Z \quad (23)$$

zachodziła dla wszystkich $z \in D(L)$ oraz $\lambda > 0$. Łatwo sprawdzić, że w rzeczywistej przestrzeni Hilberta Z , warunek (23) jest tożsamy z warunkiem:

$$\|Lz\|_Z^2 - 2\langle Lz, z \rangle_Z \geq 0, \quad \forall z \in D(L), \lambda > 0. \quad (24)$$

Wobec (19) oraz (21) dostajemy

$$\begin{aligned} \langle Lz, z \rangle_Z &= \langle Az_2, z_1 \rangle_X + \\ &+ \langle -(A + BKB^*)z_1 - BKz_3, z_2 \rangle_X + \\ &+ \langle [-B_wKB^*z_1 - (A_w + B_wK)z_3]^T Q z_3 + \\ &+ [B^*z_2 - B_wKB^*z_1]^T K(B^*z_1 + z_3) + \\ &+ \langle -(A_w + B_wK)z_3 \rangle^T K(B^*z_1 + z_3), \end{aligned} \quad (25)$$

przy czym $z = \text{col}(z_1, z_2, z_3) \in D(L)$, $\lambda > 0$. Po niezbyt skomplikowanych obliczeniach otrzymamy

$$\langle Lz, z \rangle_Z = -\tilde{z}^T B_w \tilde{z} \leq 0. \quad (26)$$

przy czym

$$\tilde{z} = KB^*z_1 + (Q + K)z_3. \quad (27)$$

Oznacza to, że nierówność (24) jest spełniona, zatem operator L jest operatorem dysypatywnym. \square

Twierdzenie 2. $\text{Ran}(\lambda_0 I - L) = Z$ dla pewnego $\lambda_0 > 0$.

Dowód. Zob. także [13]. Niech $\tilde{z} = \text{col}(\tilde{z}_1, \tilde{z}_2, \tilde{z}_3) \in Z$ będzie dowolnym wektorem z przestrzeni Hilberta Z . Należy pokazać, że istnieje element $z = \text{col}(z_1, z_2, z_3) \in D(L)$ taki, że

$$(\lambda_0 I - L)z = \tilde{z}. \quad (28)$$

Na podstawie (21) równość (28) można przedstawić w postaci układu trzech równań:

$$\lambda_0 z_1 - z_2 = \tilde{z}_1, \quad (29)$$

$$(A + BKB^*)z_1 + \lambda_0 z_2 + BKz_3 = \tilde{z}_2, \quad (30)$$

$$B_wKB^*z_1 + (\lambda_0 I + A_w + B_wK)z_3 = \tilde{z}_3. \quad (31)$$

Z równości (29) i (31) można wyliczyć z_2 i z_3 :

$$z_2 = \lambda_0 z_1 - \tilde{z}_1, \quad (32)$$

$$z_3 = (\lambda_0 I + A_w + B_wK)^{-1}(\tilde{z}_3 - B_wKB^*z_1). \quad (33)$$

Operacja taka jest możliwa, gdyż macierz $\lambda_0 I + A_w + B_wK$ jest odwracalna (zob. lemat 1). Wstawiając (32) i (33) do równania (30) otrzymamy:

$$\begin{aligned} \{ \lambda_0^2 + A + B[K^{-1} + (\lambda_0 B_w^{-1} + Q)^{-1}]^{-1} B^* \} z_1 \\ = \lambda_0 \tilde{z}_1 + \tilde{z}_2 - BK(\lambda_0 I + A_w + B_wK)^{-1} \tilde{z}_3. \end{aligned} \quad (34)$$

Niech

$$\Gamma(\lambda_0) = \lambda_0^2 + A + B[K^{-1} + (\lambda_0 B_w^{-1} + Q)^{-1}]^{-1} B^*. \quad (35)$$

Wiadomo, że $Q = Q^T > 0$, ponadto $\lambda_0 B_w^{-1} = \text{diag}[\lambda_0 \beta_i^{-1}]$. Ponieważ macierz odwrotna do macierzy symetrycznej rzeczywistej i dodatnio określonej jest także macierzą symetryczną i dodatnio określoną [31], zatem istnieje symetryczna i dodatnio określona macierz $[K^{-1} + (\lambda_0 B_w^{-1} + Q)^{-1}]^{-1}$. Oznacza to, że operator $\Gamma(\lambda_0)$ będzie operatorem domkniętym, samosprzężonym, z dziedziną $D(\Gamma) = D(A)$ gęstą w X . Ponadto

$$\langle \Gamma z_1, z_1 \rangle_X \geq (\lambda_0^2 + \delta) \|z_1\|_X, \quad (36)$$

przy czym stałą $\delta > 0$ można wyznaczyć korzystając z lematów 2 i 3. Wobec tego istnieje operator odwrotny $\Gamma(\lambda_0)^{-1}$, a równanie (34) ma jednoznaczne rozwiązanie $z_1 \in D(A)$. Z równań (32) i (33) wyznaczamy $z_2 \in H^1(\Omega)$ oraz $z_3 \in \mathbb{R}^m$. Ostatecznie $\text{Ran}(\lambda_0 I - L) = Z$. \square

Uwaga 1. $\text{Ran}(\lambda I - L) = Z$ dla każdego $\lambda > 0$ (zob. [25]). Ponadto $\text{Ran}(\lambda I - L) = Z$ dla $\lambda = 0$.

Uwaga 2. Przestrzeń Hilberta Z jest przestrzenią refleksywną, operator L jest dysypatywny oraz $\text{Ran}(I - L) = Z$, zatem $D(L)^{\text{cl}} = Z$ (zob. [25]).

Uwaga 3. Własność rozpraszania energii (dysypatywności) operatora L oraz fakt, że $D(L)^{\text{cl}} = Z$ implikują, że operator L jest domykalny [25].

Lemat 1. *Macierz $\lambda_0 I + A_w + B_wK$ jest odwracalna.*

Dowód. Zauważmy, że $\lambda_0 I + A_w + B_w K = \tilde{A}_w + B_w K$, przy czym $\tilde{A}_w = \text{diag} [\lambda_0 + \alpha_i]$, $i = 1, 2, \dots, m$. Ponieważ $B_w = \text{diag} [\beta_i]$, zatem istnieje $B_w^{-1} = \text{diag} [\beta_i^{-1}]$. Wobec tego $\tilde{A}_w + B_w K = B_w (B_w^{-1} \tilde{A}_w + K)$, gdzie $B_w^{-1} \tilde{A}_w = \text{diag} [\beta_i^{-1} (\lambda_0 + \alpha_i)]$. Macierz $B_w^{-1} \tilde{A}_w + K$ jest zatem macierzą symetryczną i dodatnio określoną co oznacza, że istnieje macierz odwrotna $(B_w^{-1} \tilde{A}_w + K)^{-1}$. Teza lematu wynika z faktu, że iloczyn macierzy odwracalnych jest także odwracalny (np. [31]). \square

Lemat 2. Dla operatora A zachodzi następująca zależność:

$$\langle Ax, x \rangle_X \geq \lambda_{\min} \|x\|_X, \quad (37)$$

gdzie $\lambda_{\min} = \min \{ \lambda_n : \lambda_n \in \sigma(A), n = 1, 2, \dots \}$.

Lemat 3. Dla dowolnej rzeczywistej i dodatnio określonej macierzy $\tilde{K} = \tilde{K}^T > 0$ istnieje takie $\delta > 0$, że

$$\begin{aligned} \langle (A + B\tilde{K}B^*)x, x \rangle_X &= \langle Ax, x \rangle_X + \\ &+ (B^*x)^T \tilde{K} (B^*x) \geq \delta \|x\|_X^2. \end{aligned} \quad (38)$$

Nierówności (37) oraz (38) dowodzi się wykorzystując bezpośrednio zależności (9) i (11).

Twierdzenie 3. Operator L jest generatorem silnie ciągłej półgrupy operatorów $T_L(t) \in L(Z)$, $t \geq 0$, takich, że

$$\|T_L(t)\|_Z \leq 1, \quad (39)$$

czyli jest on generatorem półgrupy kontrakcji (półgrupy zwężającej).

Dowód. Operator L jest operatorem dysypatywnym (tw. 1) z dziedziną $D(L)$ gęstą w Z (uwaga 2), ponadto istnieje $\lambda_0 > 0$ takie, że $\text{Ran} (\lambda_0 I - L) = Z$ (tw. 2). Na podstawie twierdzenia Lumer-Phillipsa [5, 15, 16, 25], operator L jest infinitesimalnym generatorem silnie ciągłej półgrupy kontrakcji (zwężającej). \square

System zamknięty (20) można także przedstawić za pomocą następujących równań [19]:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{\dot{x}}(t) \\ \dot{w}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & I & 0 \\ -A & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -A_w \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ \dot{x}(t) \\ w(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ B \\ B_w \end{bmatrix} u(t), \quad (40)$$

$$s(t) = [C_1 B^* \quad 0 \quad C_2] \begin{bmatrix} x(t) \\ \dot{x}(t) \\ w(t) \end{bmatrix}, \quad (41)$$

$$u(t) = -Ks(t), \quad (42)$$

przy czym w naszym przypadku macierze $C_1 = I_m$, $C_2 = I_m$.

Twierdzenie 4. Niech C_1 i C_2 będą rzeczywistymi nieosobliwymi macierzami o stałych współczynnikach. Wówczas układ (40) z wyjściem (41) jest obserwowalny.

Dowód. Warunkiem koniecznym i wystarczającym obserwowalności systemu (40), (41) jest, aby dla każdego zespolonego s jedynym rozwiązaniem układu

$$\begin{cases} sx_1 - x_2 = 0, \\ Ax_1 + sx_2 = 0, \\ (A_w + sI)x_3 = 0, \\ C_1 B^* x_1 + C_2 x_3 = 0 \end{cases} \quad (43)$$

był wektor zerowy [10].

Gdy $s \neq -\alpha_i$ dla każdego $i = 1, 2, \dots, m$ układ (43) sprowadza się do układu

$$\begin{cases} sx_1 - x_2 = 0, \\ Ax_1 + sx_2 = 0, \\ C_1 B^* x_1 = 0. \end{cases} \quad (44)$$

Ponieważ macierz C_1 jest nieosobliwa, system (4), (13) jest obserwowalny, zatem jedynym rozwiązaniem układu (44) jest wektor zerowy.

Gdy $s = -\alpha_i$ dla pewnego $i = 1, 2, \dots, m$, z układu (43) otrzymujemy:

$$Ax_1 = -\alpha_i^2 x_1. \quad (45)$$

Zauważmy, że w takim przypadku

$$\langle Ax_1, x_1 \rangle_X = \langle -\alpha_i^2 x_1, x_1 \rangle_X = -\alpha_i^2 \|x_1\|_X^2 \leq 0, \quad (46)$$

co wobec lematu 2 oznacza, że $x_1 = 0$. Zatem także $x_2 = 0$, $x_3 = 0$. \square

Twierdzenie 5. System zamknięty (20) jest globalnie asymptotycznie stabilny.

Dowód. Rozważmy następujący funkcjonał Lapunowa (zob. także [21, 27]):

$$\begin{aligned} V(x(t), \dot{x}(t), w(t)) &= \frac{1}{2} \langle \dot{x}(t), \dot{x}(t) \rangle_X + \\ &+ \frac{1}{2} \langle Ax(t), x(t) \rangle_X + \frac{1}{2} w(t)^T Q w(t) + \\ &+ \frac{1}{2} [w(t) + B^* x(t)]^T K [w(t) + B^* x(t)], \end{aligned} \quad (47)$$

przy czym $Q = \text{diag} [\frac{\alpha_i}{\beta_i}] = A_w B_w^{-1}$. Z (47) wynika, że $V(x, \dot{x}, w) = 0$ wtedy i tylko wtedy gdy $\text{col} (x, \dot{x}, w) = 0$, w przeciwnym przypadku $V(x, \dot{x}, w) > 0$.

Pochodna czasowa funkcjonału V wyraża się wzorem

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} V(x(t), \dot{x}(t), w(t)) &= \langle \ddot{x}(t), \dot{x}(t) \rangle_X + \\ &+ \langle Ax(t), \dot{x}(t) \rangle_X + w(t)^T Q \dot{w}(t) + \\ &+ [w(t) + B^* x(t)]^T K [\dot{w}(t) + B^* \dot{x}(t)]. \end{aligned} \quad (48)$$

Na trajektorii systemu (20) pochodna (48) sprowadza się do wyrażenia

$$\frac{d}{dt} V(x(t), \dot{x}(t), w(t)) = -s(t)^T B_w s(t) \leq 0. \quad (49)$$

przy czym $s(t) = KB^* x(t) + (Q + K)w(t)$. Na podstawie twierdzenia La Salle'a [14] dla układów nieskończenie wymiarowych [6, 7, 16, 28] rozwiązania układu (20) będą dążyć asymptotycznie do maksymalnego inwariantnego zbioru zawartego w S

$$S = \{ (x, \dot{x}, w) : \dot{V} = 0 \}, \quad (50)$$

pod warunkiem, że trajektorie układu zamkniętego są relatywnie zwarte w przestrzeni Z .

Warunek $\dot{V} = 0$ zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $s(t) = 0$ (zob. (41) dla $C_1 = K, C_2 = Q + K$). Ponieważ system (40), (41) jest obserwowalny, zatem $x = 0, \dot{x} = 0$ i $w = 0$, czyli $S = \{0\}$.

Trajektorie układu zamkniętego będą relatywnie zwarte, jeżeli zbiór

$$\gamma(z^0) = \bigcup_{t \geq 0} T_L(t)z^0, \quad z^0 = z(0) \in D(L), \quad (51)$$

będzie relatywnie zwarty w przestrzeni Z . Ponieważ operator L jest generatorem silnie ciągłej półgrupy kontraktacji (tw. 3), zatem trajektorie układu zamkniętego $\{T_L(t), t \geq 0\}$ są ograniczone w przestrzeni Z . Relatywna zwartość zbioru (51) będzie zapewniona, jeżeli operator $(\lambda I - L)^{-1} : Z \rightarrow Z$ będzie zwarty dla pewnego $\lambda > 0$ [3, 26]. Z analizy przeprowadzonej w dowodzie tw. 2 wynika, że istnieje ograniczony operator $\Gamma(\lambda)^{-1}$ dla $\lambda \geq 0$. Zatem istnieje również ograniczony operator $(\lambda I - L)^{-1}$ dla $\lambda \geq 0$. Ponieważ włożenie przestrzeni $H^1(\Omega) \times L^2(\Omega) \times \mathbb{R}^m$ w przestrzeń $H^2(\Omega) \times H^1(\Omega) \times \mathbb{R}^m$ jest zwarte [29], więc operator $(\lambda I - L)^{-1} : Z \rightarrow Z$ jest operatorem zwartym.

Ostatecznie, relatywnie zwarte trajektorie układu zamkniętego dążą asymptotycznie do zbioru $\{0\}$, co dowodzi, że układ (20) jest globalnie asymptotycznie stabilny. \square

4. PRZYKŁAD

Jako przykład ilustrujący uzyskane wyniki teoretyczne zostanie rozważony jednowymiarowy model drgającej struny [1]. Załóżmy, że struna ma jednostkową długość i jest zamocowana na dwóch końcach. Przez $x(\xi, t)$ oznaczmy poprzeczne przemieszczenie się elementu struny dla $\xi \in (0, 1)$ i czasu $t > 0$. Zewnętrzne wymuszenie przykładamy w przedziale $[\xi_1, \xi_2] = [0.7, 1.0]$. System opisuje następujące równanie [5]:

$$\ddot{x}(\xi, t) = x''(\xi, t) + b(\xi)u(t), \quad t > 0, \xi \in (0, 1), \quad (52)$$

z warunkami brzegowymi

$$x(0, t) = x(1, t) = 0, \quad t \geq 0 \quad (53)$$

oraz początkowymi

$$x(\xi, 0) = 0.1(1 - \xi)\xi, \quad \dot{x}(\xi, 0) = 0, \quad \xi \in [0, 1]. \quad (54)$$

Funkcja $b : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ określa operator sterowania

$$b(\xi) = \begin{cases} 1, & \text{dla } \xi_1 \leq \xi \leq \xi_2, \\ 0, & \text{w p.p.} \end{cases} \quad (55)$$

Przyjmując przestrzeń Hilberta $X = L^2(0, 1)$ i określając odpowiednio liniowy operator A

$$Ax = -x'' \quad (56)$$

z dziedziną

$$D(A) = \{x \in H^2(0, 1) : x(0) = x(1) = 0\} \quad (57)$$

otrzymamy równanie abstrakcyjne (4). Można wykazać [5], że operator A jest operatorem dodatnio określonym i samosprzężonym. Ponadto, posiada on widmno dyskretne złożone z pojedynczych wartości własnych

$$\lambda_n = n^2\pi^2, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (58)$$

oraz odpowiadający im ortonormalny układ wektorów własnych v_n stanowiący bazę w przestrzeni Hilberta, przy czym

$$v_n = \sqrt{2} \sin(\sqrt{\lambda_n}\xi). \quad (59)$$

Operator sterowania $B \in L(\mathbb{R}, X)$ jest zdefiniowany poprzez funkcję charakterystyczną $b(\xi)$, przy czym

$$Bu(t) = b(\xi)u(t), \quad \xi \in [0, 1], t \geq 0. \quad (60)$$

Operator sprzężony $B^* \in L(X, \mathbb{R})$ będzie określał nam wyjście układu

$$y(t) = B^*x(\xi, t) = \langle b, x \rangle_X, \quad (61)$$

czyli przemieszczenie się w czasie elementu struny w miejscu przyłożenia sterowania. W [20] pokazano, że układ drgającej struny (52), (61) jest aproksymacyjnie obserwowalny wtedy i tylko wtedy, gdy parametry czujnika pomiarowego

$$\frac{\xi_1 + \xi_2}{2} \neq \frac{k}{n}, \quad \frac{\xi_2 - \xi_1}{2} \neq \frac{k}{n}, \quad (62)$$

$k = 1, 2, \dots, n, n = 1, 2, \dots$ są liczbami niewymiernymi. Jak wiadomo, w obliczeniach numerycznych każda wartość jest reprezentowana przez liczbę wymierną, zatem wynik (62) ma charakter jedynie teoretyczny. W praktyce zawsze będzie istnieć składowa nieobserwowalna.

Rozważmy kompensator dynamiczny opisany równaniem

$$\dot{w}(t) + 0.5w(t) = 0.1u(t), \quad w(0) = 0, \quad (63)$$

oraz następujące sprzężenie zwrotne

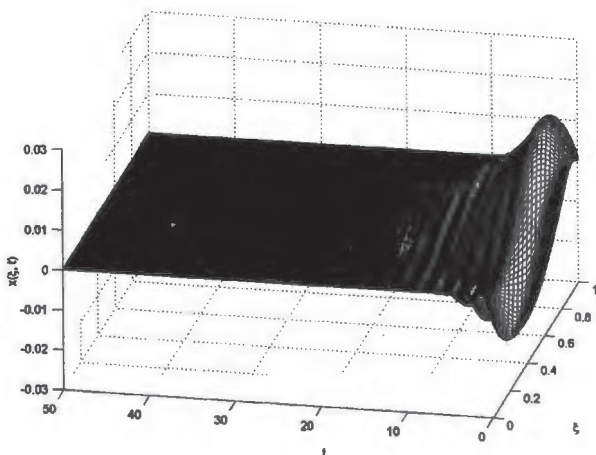
$$u(t) = -100[w(t) + y(t)]. \quad (64)$$

Rys. 1 przedstawia wykres wychYLENIA struny $x(\xi, t)$ po zastosowaniu sprzężenia zwrotnego (63), (64).

5. PODSUMOWANIE

W pracy zostało rozważone zagadnienie stabilizacji układów oscylacyjnych opisanych przez operatorowe równania drugiego rzędu z ograniczonymi operatorami wejścia i wyjścia. Równania stanu i wyjścia zostały zdefiniowane w rzeczywistych przestrzeniach Hilberta. Do stabilizacji układu zastosowano liniowe dynamiczne sprzężenie zwrotne współpracujące z układem kompensatora dynamicznego. Dowód globalnej asymptotycznej stabilności układu zamkniętego został przeprowadzony z wykorzystaniem zasady La Salle'a dla układów nieskończonego wymiarowych. Uzyskane wyniki teoretyczne zweryfikowano za pomocą symulacji komputerowych.

Praca naukowa finansowana ze środków Komitetu Badań Naukowych w roku 2005 jako projekt badawczy 3 T11A 011 26.



Rys. 1. Stabilizacja drgań struny. Wykres wykonany w oparciu o aproksymację modelu uwzględniającą 20 pierwszych wartości własnych.

STABILIZATION OF A LINEAR INFINITE-DIMENSIONAL OSCILLATORY SYSTEM BY LINEAR NON-VELOCITY FEEDBACK

Abstract: In this paper stabilization problem of linear infinite-dimensional oscillatory systems without damping is considered. We have shown that the closed-loop system which consists of the controlled system, linear non-velocity feedback and a parallel compensator is globally asymptotically stable. The stability results are proved by La Salle's theorem extended to infinite-dimensional systems.

Literatura

- [1] Awrejcewicz J., Krysko W. A. (2000) Drgania układów ciągłych. WNT, Warszawa.
- [2] Curtain R.F., Pritchard A.J. (1978) Infinite dimensional linear systems theory. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York.
- [3] Dafermos C.M., Slemrod M. (1973) Asymptotic behaviour of nonlinear contraction semigroups. *J. Funct. Anal.*, 13, 97–106.
- [4] Dunford N., Schwartz J.T. (1963) Linear operators. Part II. Spectral theory. Self adjoint operators in Hilbert space. Interscience, New York.
- [5] Engel K.J., Nagel R. (2000) One-parameter semigroups for linear evolution equation. Springer-Verlag, New York.
- [6] Hale J.K. (1969) Dynamical systems and stability. *J. Math. Anal. Appl.*, 26, 39–59.
- [7] Hale J.K., Infante E. F. (1967) Extended dynamical systems and stability theory. *Proc. Natl. Acad. Sci. USA*, 58(2), 405–409.
- [8] Klamka J. (1990) Sterowalność układów dynamicznych. PWN, Warszawa.
- [9] Kobayashi T. (1988) Finite-dimensional adaptive control for infinite-dimensional systems. *Int. J. Control*, 48, 289–302.
- [10] Kobayashi T. (1992) Frequency domain conditions of controllability and observability for a distributed parameter system with unbounded control and observation. *Int. J. Syst. Sci.*, 23, 2369–2376.
- [11] Kobayashi T. (1996) High-gain adaptive stabilization of collocated distributed parameter systems. *Arch. Control Sci.*, 5(XLD), 87–97.
- [12] Kobayashi T. (2001) Low gain adaptive stabilization of undamped second order systems. *Arch. Control Sci.*, 11(XLVII), 63–75.
- [13] Kobayashi T., Oya M. (2004) Adaptive stabilization of infinite-dimensional undamped second order systems without velocity feedback. *Arch. Control Sci.*, 14(L), 73–84.
- [14] La Salle J., Lefschetz S. (1967) *Zarys teorii stabilności Lapunowa i jego metody bezpośredniej*. PWN, Warszawa.
- [15] Lummer G., Phillips R.S. (1961) Dissipative operators in a Banach space. *Pacific J. Math.*, 11, 679–698.
- [16] Luo Z., Guo B., Morgül Ö. (1999) Stability and stabilization of infinite dimensional systems with applications. Springer-Verlag, London.
- [17] Mitkowski W. (1991) Stabilizacja systemów dynamicznych. WNT, Warszawa.
- [18] Mitkowski W. (2003) Dynamic feedback in LC ladder network. *Bull. Pol. Acad. Sci. Tech. Sci.*, 51, 173–180.
- [19] Mitkowski W. (2004) Stabilisation of LC ladder network. *Bull. Pol. Acad. Sci. Tech. Sci.*, 52, 109–114.
- [20] Mitkowski W., Skruch P. (2003) Funkcje charakterystyczne czujników pomiarowych w modelowaniu procesów dynamicznych. IV Krajowa Konferencja, Metody i systemy komputerowe w badaniach naukowych i projektowaniu inżynierskim, Kraków, Polska, 679–684.
- [21] Mitkowski W., Skruch P. (2004) Stabilization of second-order systems by linear position feedback. *Proc. of the 10th IEEE International Conference on Methods and Models in Automation and Robotics*, 30 August – 2 September 2004, Międzyzdroje, Poland, 273–278.
- [22] Mizohata S. (1973) The theory of partial differential equations. Cambridge Univ. Press, Cambridge.
- [23] Morgül Ö. (1994) A dynamic control law for the wave equation. *Automatica*, 30, 1785–1792.
- [24] Morgül Ö. (1998) Stabilization and disturbance rejection for the wave equation. *IEEE Trans. Autom. Control*, 43, 89–95.
- [25] Pazy A. (1983) Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations. Springer, New York.
- [26] Saperstone S. (1981) Semidynamical systems in infinite dimensional spaces. Springer-Verlag, New York.
- [27] Skruch P. (2004) Konstrukcja liniowego sprzężenia zwrotnego dla nieskończone wymiarowych układów oscylacyjnych. VI Międzynarodowe Warsztaty Doktoranckie OWD 2004, Wisła, 16–19 październik 2004, 433–438.
- [28] Slemrod M. (1976) Stabilization of boundary control systems. *J. Differ. Equations*, 22, 402–415.
- [29] Tanabe H. (1979) Equations of evolution. Pitman, London.
- [30] Taylor A.E., Lay D.C. (1980) Introduction to functional analysis. John Wiley & Sons, New York.
- [31] Turowicz A. (1995) Teoria macierzy. Wydawnictwa AGH, Kraków.
- [32] Wyrwał J. (2001) Controllability and observability of infinite dimensional systems. Doctoral Thesis, Silesian University of Technology, Department of Automatic Control, Electronics and Computer Science, Institute of Automatic Control.



**Instytut Badań Systemowych
Polskiej Akademii Nauk**

ISBN 83-89475-02-2