XV Krajowa Konferencja Automatyki

Tom I

KKA 2005

Redaktorzy:

Zdzisław Bubnicki

Roman Kulikowski

Janusz Kacprzyk

XV Krajowa Konferencja Automatyki
Tom I

KKA
2005

Redaktorzy:
Zdzisław BUBNICKI
Roman KULIKOWSKI
Janusz KACPRZYK

ORGANIZATOR
Komitet Automatyki i Robotyki Polskiej Akademii Nauk
Instytut Badań Systemowych Polskiej Akademii Nauk
WSPÓŁORGANIZATORZY
Politechnika Warszawska
Przemysłowy Instytut Automatyki i Pomiarów
Polskie Stowarzyszenie Pomiarów, Automatyki i Robotyki

ORGANIZATOR

Komitet Automatyki i Robotyki Polskiej Akademii Nauk
Instytut Badań Systemowych Polskiej Akademii Nauk

WSPÓŁORGANIZATORZY

Politechnika Warszawska
Przemysłowy Instytut Automatyki i Pomiarów
Polskie Stowarzyszenie Pomiarów, Automatyki i Robotyki

KOMITET PROGRAMOWY

Przewodniczący — Zdzisław BUBNICKI
Zastępca Przewodniczącego — Roman KULIKOWSKI

CZŁONKOWIE

Stanisław BAŃKA
Mikołaj BUSŁOWICZ
Ryszard GESSING
Jakub GUTENBAUM
Stanisław KACZANOWSKI
Janusz KACPRZYK
Józef KORBICZ
Krzysztof KOZŁOWSKI
Krzysztof KUŹMIŃSKI
Krzysztof MALINOWSKI
Antoni NIEDERLIŃSKI
Tadeusz PUCHAŁKA
Stanisław SKOCZOWSKI
Jerzy ŚWIĄTEK
Ryszard TADEUSIEWICZ
Krzysztof TCHOŃ
Jan WĘGLARZ
Michał BIAŁKO
Władysław FINDEISEN
Henryk GÓRECKI
Jerzy JÓZEFCZYK
Tadeusz KACZOREK
Jerzy KLAMKA
Zbigniew KOWALSKI
Juliusz L. KULIKOWSKI
Kazimierz MALANOWSKI
Wojciech MITKOWSKI
Władysław PEŁCZEWSKI
Leszek RUTKOWSKI
Roman SŁOWIŃSKI
Andrzej ŚWIERNIAK
Piotr TATJEWSKI
Leszek TRYBUS
Andrzej P. WIERZBICKI

KOMITET ORGANIZACYJNY

Przewodniczący — Roman KULIKOWSKI
Zastępcy Przewodniczącego — Janusz KACPRZYK, Stanisław KACZANOWSKI, Tadeusz KACZOREK, Krzysztof MALINOWSKI
Członkowie — Roman OSTROWSKI, Tadeusz PUCHAŁKA, Dariusz WAGNER
Sekretarze naukowi — Jan STUDZIŃSKI, Jan W. OWSIŃSKI

ISBN 83-89475-00-6

Druk: ARGRAF, Warszawa

STABILNOŚĆ, STEROWALNOŚĆ, OBSERWOWALNOŚĆ

STABILIZOWALNOŚĆ I WYKRYWALNOŚĆ PEWNEJ KLASY SYSTEMÓW PARABOLICZNYCH O NIEPEWNYCH PARAMETRACH

Krzysztof OPRZĘDKIEWICZ

Akademia Górniczo-Hutnicza, Wydział Elektrotechniki, Automatyki, Informatyki i Elektroniki
Al. Mickiewicza 30,30-059 Kraków, e-mail:kop@uci.agh.edu.pl

Streszczenie: W pracy omówiono zagadnienia stabilizowalności i wykrywalności dla pewnej klasy systemów parabolicznych o niepewnych parametrach. Rozważono laboratoryjny obiekt cieplny opisany jednowymiarowym równaniem ciepłoprzewodnictwa z jednorodnymi warunkami brzegowymi Neumana na końcach oraz jednorodnym warunkiem początkowym. Parametry równania nie są dokładnie znane i są one opisane liczbami przedziałowymi, przy czym wymiar przestrzeni niepewnych parametrów jest równy 2. Dla rozważanego systemu podano geometryczną interpretację widma systemu oraz omówiono warunki stabilizowalności i wykrywalności bazujące na tej interpretacji. Wyniki zostały zilustrowane przykładem.

Słowa kluczowe: system paraboliczny, system o niepewnych parametrach, stabilizowalność, wykrywalność.

1. UWAGI WSTĘPNE

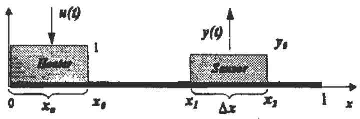
Zagadnienia stabilizowalności i wykrywalności w przypadku systemu nieskończenie wymiarowego mają kluczowe znaczenie podczas konstrukcji układu stabilizacji. W przypadku systemów spełniających założenie o dekompozycji widma analiza tych własności jest stosunkowo prosta, gdyż są one zdeterminowane przez wykładniczo niestabilną, skończenie wymiarową część systemu i do ich badania można wykorzystać techniki skończenie wymiarowe.

W pracy rozważono laboratoryjny obiekt cieplny opisany jednowymiarowym równaniem ciepłoprzewodnictwa z jednorodnymi warunkami brzegowymi Neumana na końcach oraz jednorodnym warunkiem początkowym na rozkład temperatury wzdłuż długości. Parametry równania ciepłoprzewodnictwa nie są dokładnie znane i są one opisane liczbami przedziałowymi, przy czym wymiar przestrzeni niepewnych parametrów jest równy 2. Dla rozważanego obiektu omówiono następujące zagadnienia:

- System paraboliczny z dwuwymiarową przestrzenią niepewnych parametrów,
- Stabilizowalność i wykrywalność rozważanego systemu o niepewnych parametrach,
- Przykład,
- Uwagi końcowe.

2. SYSTEM PARABOLICZNY Z DWUWYMIAROWĄ PRZESTRZENIĄ NIEPEWNYCH PARAMETRÓW

Rozważmy jednowymiarowy laboratoryjny obiekt cieplny, którego uproszczony schemat pokazano na rys 1. Obiekt z rys 1 może być opisany jednowymiarowym ró-



Rysunek 1. Obiekt doświadczalny

waniem ciepłoprzewodnictwa o postaci następującej:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\Theta(x,t)}{dt} = a\dfrac{\partial^2\Theta(x,t)}{\partial x^2} - R_a\Theta(x,t) + b(x)u(t), \\ \dfrac{\partial\Theta(0,t)}{dx} = 0, \\ \dfrac{\partial\Theta(1,t)}{dx} = 0, \\ \dfrac{\partial\Theta(x,0)}{dt} = 0, \\ y(t) = y_0\int_0^1 \Theta(x,t)c(x)dx \end{cases} \tag{1}$$

gdzie $0 \le x \le 1, t \ge 0$, $\Theta(x,t)$ jest temperaturą w chwili t i w punkcie x, R_a,a oznacza niepewne parametry przewodnictwa cieplnego i wymiany ciepła, $b(x)$ oznacza funkcję sterowania, $c(x)$ jest funkcją czujnika pomiarowego oraz y_0 oznacza wzmocnienie ustalone układu. Zakładamy, że liczbowe wartości parametrów modelu a oraz R_a nie są dokładnie znane i budują one obszar niepewnych parametrów Q zdefiniowany w sposób następujący:

$$Q = \left\{ q = [a, R_a]^T \text{ß} : \underline{a} \le a \le \overline{a}, \underline{R_a} \le R_a \le \overline{R_a} \right\} \tag{2}$$

W rozważanym przypadku zakładamy, że funkcje sterowania i czuujnika pomiarowego $b(x)$ i $c(x)$ są dokładnie znane.

Równanie (1) może być przedstawione w postaci abstrakcyjnego problemu początkowego w przestrzeni Hilberta

$X = L^2(0,1)$ ze standrardowym iloczynem skalarnym, jak zostało pokazane w pracach [14], [15]. Równanie to ma postać następującą:

$$\begin{cases} \dot{\Theta}(t) = A(q)\Theta(t) + bu(t) \\ \Theta(0) = 0 \\ y(t) = C\Theta(t) \end{cases} \tag{3}$$

gdzie: $A(q)\Theta = a\Theta'' - R_a\Theta, D(A(q)) = \{u \in H^2(0,1) : \Theta'(0) = 0, \Theta'(1) = 0\}$, $q = [a, R_a]^T \in Q$, $H^2(0,1) = \{u \in L^2(0,1) : u', u'' \in L^2(0,1)\}$, $C\Theta(t) = \langle c, \Theta(t)\rangle, Bu(t) = bu(t), \langle u, v\rangle = \int_0^1 u(x)v(x)dx$ (iloczyn skalarny)
Baza ortonormalna przestrzeni stanu jest tworzona przez następujący układ wektorów własnych:

$$h_i = \begin{cases} 0, i = 0 \\ \sqrt{2}cos(i\pi x), i = 1, 2, ... \end{cases} \tag{4}$$

Dyskretne widmo przedziałowe operatora stanu A jest zbiorem pojedynczych przedziałowych wartości własnych:

$$\Lambda(q) = \bigcup \Lambda_i(q) \tag{5}$$

Przedziałowe wartości własne $\Lambda_i(q)$ są opisane następująco:

$$\Lambda_i(q) = \{\lambda_i(q) : q \in Q\} \tag{6}$$

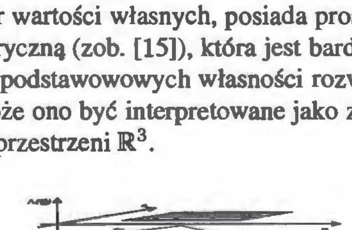
gdzie:

$$\lambda_i(q) = -a\pi^2 i^2 - R_a, i = 01, 2, 3, ... \tag{7}$$

przy czym $q = [a, R_a]^T \in Q$. Operatory A, B i C mają postać następującą:

$$A(q) = diag\{\lambda_0(q), \lambda_1(q), \lambda_2(q), ..\} \tag{8}$$

W rozważanym wypadku widmo systemu, rozumiane jako zbiór wartości własnych, posiada prostą interpretację geometryczną (zob. [15]), która jest bardzo wygodna do analizy podstawowowych własności rozważanego systemu. Może ono być interpretowane jako zbiór czworoboków w przestrzeni $\mathbb{R}^3$.



Rysunek 2. Widmo rozważanego systemu przedziałowego w przestrzeni $\mathbb{R}^3$.

$$B = [b_0, b_1, b_2, ...]^T \tag{9}$$

gdzie $b_i = \langle b, h_i\rangle$, $b(x)$ oznacza funkcję elementu grzejnego:

$$b(x) = \begin{cases} 1, x \in [0, x_0] \\ 0, x \notin [0, x_0] \end{cases} \tag{10}$$

$$C = [c_0, c_1, c_2, ...] \tag{11}$$

gdzie $c_i = \langle c, h_i\rangle$, $c(x)$ oznacza funkcję czujnika pomiarowego:

$$c(x) = \begin{cases} y_0, x \in [x_1, x_2] \\ 0, x \notin [x_1, x_2] \end{cases} \tag{12}$$

Z relacji (10) i (12) wynika, że funkcja elementu grzejnego $b(x)$ oraz funkcja czujnika pomiarowego $c(x)$ są funkcjami przedziałami stałymi. Po "odcięciu" dalszych elementów nieskończenie wymiarowych operatorów A, B i C otrzymuje się skończenie wymiarową interpretację operatorów (8), (9) oraz (11) które w takiej sytuacji mogą być interpretowane jako macierze.

3. STABILIZOWALNOŚĆ I WYKRYWALNOŚĆ ROZWAŻANEGO SYSTEMU O NIEPEWNYCH PARAMETRACH

Rozważany w pracy system należy do klasy systemów nieskończenie wymiarowych ze skończenie wymiarową podprzestrzenią stanów niestabilnych i słabo tłumionych. Jeżeli widmo tego systemu można zdekomponować na część wykładniczo stabilną (skończenie wymiarową) i część wykładniczo niestabilną, to dla takiego systemu można podać proste sformułowanie warunków stabilizowalności i wykrywalności. Wynika to z faktu, że dla systemów rozważanej klasy własność stabilizowalności jest rownoważna sterowalności części skończenie wymiarowej wykładniczo niestabilnej a własność wykrywalności jest równoważna obserwowalności części skończenie wymiarowej wykładniczo niestabilnej (zob. np. [11])
Z tego względu warunek konieczny stabilizowalności i wykrywalności dla rozważanego systemu parabolicznego o niepewnych parametrach może być sformułowany następująco:

Lemat 1 *(Warunek konieczny stabilizowalności i wykrywalności systemu)*
Rozważmy system paraboliczny o niepewnych parametrach z dwuwymiarową przestrzenią niepewnych parametrów, opisany równaniami (1) - (12).
Warunkiem koniecznym stabilizowalności i wykrywalności systemu jest, aby widmo systemu spełniało warunki o dekompozycji, sformułowane w pracy [15] s. 423 - 426.

Do dalszej analizy własności stabilizowalności i wykrywalności rozważanego systemu wykorzystane zostaną metody badania sterowalności i obserwowalności systemów skończenie wymiarowych o znanych parametrach oraz metody badania sterowalności dla systemów liniowych skończenie wymiarowych o niepewnych parametrach, sformułowane w pracy [16].
Charakterystyczną cechą systemów o niepewnych parametrach rozważanych w pracy [16] jest to, że pojęcia sterowalności i obserwowalności nie są jednoznaczne w obszarze niepewnych parametrów Q. W obszarze tym mogą istnieć podobszary, gdzie system będzie sterowalny (obserwowalny) i obszary, gdzie własności te nie będą spełnione. Dokładna analiza tych zagadnień jest omówiona

w pracy [16].
W tym miejscu należy zauważyć, że powyższa własność dotycząca sterowalności i obserwowalności może być rozszerzona na własności stabilizowalności i wykrywalności dla rozważanego systemu parabolicznego o niepewnych parametrach. Dla celów dalszej analizy wprowadzimy następujące pojęcia:

Definicja 1 *(Obszary stabilizowalności i niestabilizowalności)*

- *Podzbiór zbioru Q w którym system jest stabilizowalny nazywamy obszarem stabilizowalności i będzie on oznaczony przez Q_s,*
- *Podzbiór zbioru Q w którym system nie jest stabilizowalny nazywamy obszarem niestabilizowalności i będzie on oznaczony przez Q_{ns}*

Obszary stabilizowalności i niestabilizowalności mają 2 podstawowe własności:

$$Q_s \cup Q_{ns} = Q Q_s \cap Q_{ns} = 0 \tag{13}$$

Analogicznie definiujemy obszary wykrywalności i niewykrywalności:

Definicja 2 *(Obszary wykrywalności i niewykrywalności)*

- *Podzbiór zbioru Q w którym system jest wykrywalny nazywamy obszarem wykrywalności i będzie on oznaczony przez Q_d,*
- *Podzbiór zbioru Q w którym system nie jest wykrywalny nazywamy obszarem niewykrywalności i będzie on oznaczony przez Q_{nd}*

Podstawowe własności tych obszarów są identyczne jak powyżej:

$$Q_d \cup Q_{nd} = Q Q_d \cap Q_{nd} = 0 \tag{14}$$

Teraz wprowadźmy następujące oznaczenia: oznaczmy przez Q_c^{ns} i Q_{nc}^{ns} obszary sterowalności i niesterowalności dla skończenie wymiarowej, wykładniczo niestabilnej części systemu oraz oznaczmy przez Q_o^{ns} i Q_{no}^{ns} obszary obserwowalności i nieobserwowalności dla skończenie wymiarowej, wykładniczo niestabilnej części systemu. Na podstawie Twierdzenia 3.10 z pracy [11] s.192 możemy podać następującą zależność:

$$Q_{ns} = Q_{nc}^{ns} Q_s = Q_c^{ns} \tag{15}$$

Analogiczna zależność może być podana dla obszarów obserwowalności i wykrywalności na podstawie Tw 3.11 z pracy [11] s.195:

$$Q_{nd} = Q_{no}^{ns} Q_d = Q_o^{ns} \tag{16}$$

Następnie przypomnijmy, że do badania własności obserwowalności systemu liniowego skończenie wymiarowego o znanych parametrach mogą być użyte kryteria sterowalności ze względu na dualizm obu własności. Ta cecha może też być uogólniona na rozważaną w pracy klasę systemów o niepewnych parametrach.
Na podstawie zależności (15) i (16) można stwierdzić, że do badania własności stabilizowalności i wykrywalności dla rozważanego systemu o niepewnych parametrach mogą być użyte warunki sterowalności sformułowane w pracy [16] dla systemu liniowego skończenie wymiarowego o niepewnych parametrach z dwuwymiarową przestrzenią niepewnych parametrów.

4. PRZYKŁAD

Rozważamy rzeczywisty system paraboliczny, opisany w pracy. Parametry modelu systemu są znane z eksperymentów identyfikacyjnych i są one opisane liczbami przedziałowymi . Są one równe: $a = [0.0007, 0.0012]$, $R_a = [0.0255, 0.0280]$. Załóżmy, że wymagany przy dekompozycji widma współczynnik tłumienia jest równy: $\alpha = -0.2$.
Na początku sprawdzimy warunek konieczny stabilizowalności i wykrywalności, określony w lemacie 1. Dla założonej wartości parametru α sprawdzamy możliwość dekompozycji widma oraz wyznaczamy wymiar wykładniczo niestabilnej części systemu, stosując podejście omówione w pracy [15]. Najpierw wyznaczamy zbiory dopuszczalnych wartości współczynnika tłumienia systemu $\Phi(Q)$ dla zadanych wartości liczbowych, zgodnie z Definicją 6. W rozważanym wypadku są one równe: $\Phi(Q) = \{\Phi_1(Q), \Phi_2(Q), \Phi_3(Q), \Phi_4(Q)\}$, gdzie: $\Phi_1(Q) = (-0.0398, -0.0531), \Phi_2 = (-0.0754, -0.0877), \Phi_3 = (-0.1346; -0.1360), \Phi_4 = (-0.1982; -0.2175)$
Natychmiast możemy zauważyć, że dekompozycja widma dla przyjętej wartości parametru α jest możliwa, ponieważ $\alpha \in \Phi_4$. Wtedy wymiar wykładniczo niestabilnej części widma $\Lambda_n(Q)$ jest równy 3
Następnie dokonujemy sprawdzenia warunków stabilizowalności i wykrywalności.
Na podstawie wyników wcześniejszych badań autora, omówionych w pracach: [16] i [17] wynika, że własności stabilizowalności i wykrywalności dla rozważanego systemu są zdeterminowane przez geometrię przedziałowych wartości własnych Λ_i wykładniczo niestabilnej części systemu i mogą być badane łącznie.
Przypomnijmy, że rozważany system nieskończenie wymiarowy jest:

- stabilizowalny wtedy i tylko wtedy, gdy skończenie wymiarowa, wykładniczo niestabilna część systemu opisana dwójką macierzy (A_n, B_n) jest sterowalna,
- wykrywalny wtedy i tylko wtedy gdy skończenie wymiarowa, wykładniczo niestabilna część systemu, opisana dwójką macierzy (C_n, A_n) jest obserwowalna.

W rozważanym wypadku wykładniczo niestabilna, skończenie wymiarowa część systemu jest opisana następującą trójką macierzy A_n, B_n i C_n:

$$A_n = diag\{\Lambda_0, \Lambda_1, \Lambda_2\} B_n = [b_0, b_1, b_2]^T C_n = [c_0, c_1, c_2] \tag{17}$$

przy czym:

$$\lambda_0 = -R_a \lambda_1 = -\pi^2 a_w - R_a \lambda_2 = -4\pi^2 a_w - R_a \quad (18)$$

Teraz do macierzy (17), (18) zastosujmy podejście proponowane w pracach [16] i [17]. W rozważanym przypadku mamy 3 wartości własne, co powoduje, że w układzie mogą wystąpić co najwyżej 3 obszary niesterowalności i niesobserwowalności. Podstawowe równanie opisujące obszary niesterowalności i nieobserwowalności (zob. równanie (19) w pracy [16], równanie (17) w pracy [17]) przyjmuje w rozważanym wypadku następującą postać:

$$(j-i)\pi^2 a_w = 0 \quad (19)$$

Z postaci równania (19) widzimy, że nie posiada ono rozwiązań dla a_w nie zawierającego 0. Z tego wynika, że:

- para $[A_n, B_n]$ jest sterowalna w całym obszarze niepewnych parametrów systemu Q co implikuje stabilizowalność całego systemu w tym obszarze.
- para $[C_n, A_n]$ jest obserwowalna w całym obszarze niepewnych parametrów Q co implikuje wykrywalność całego systemu w tym obszarze.

5. UWAGI KOŃCOWE

Uwagi końcowe do pracy mogą być sformułowane następująco:

- Pojęcia stabilizowalności i wykrywalności dla systemu o niepwnych parametrach nie są jednoznaczne, w obszarze niepewnych parametrów Q mogą istnieć podobszary gdzie własności te są spełnione i podobszary, gdzie nie są spełnione.
- Warunkiem koniecznym stabilizowalności i wykrywalności rozważanego systemu parabolicznego o niepwnych parametrach jest spełnienie warunku o dekompozycji widma,
- Do wyznaczania obszarów stabilizowalności i wykrywalności mogą być stosowane kryteria sterowalności systemu liniowego skończenie wymiarowego o niepewnych parametrach.

Pracę zrealizowano w ramach umowy nr 10.10.120.41

A DETECTABILITY AND STABILIZABILITY PROBLEM FOR A CLASS OF UNCERTAIN - PARAMETER PARABOLIC SYSTEMS

Abstract: In the paper the detectability and stabilizability problem for parabolic system with two - dimensional uncertain - parameter space is presented. The system under consideration is described by a state space equation with known control and output matrices and an interval state matrix. The both investigated system's properties are by the geometry of the system's spectrum determined and can be tested with controllability and observability criterions for the linear uncertain-parameter system use. The results are by an example depicted.

Literatura

[1] Barnett S. *"Matrices. Methods and applications"*, Claredon Press Oxford 1992,

[2] Białas S. *"Odporna stabilność wielomianów i macierzy"*,Wyd AGH, Kraków 2002,

[3] Busłowicz M. *"Stabilność liniowych układów stacjonarnych o niepewnych parametrach"*, Białystok 1997,

[4] Busłowicz M. *"Odporna stabilność układów dynamicznych liniuowych stacjonarnych z opóźnieniami"*, Komitet Automatyki i Robotyki PAN, Warszawa-Białystok 2000,

[5] Feintuch A. *"Robust Control Theory in Hilbert Space"*,Springer 1998,

[6] Jakubowska M. *"Algorytmy badania stabilnośći macierzy przedziałowej i ich realizacja numeryczna* "Automatyka 1999 Vol. 3, No 2, pp. 413 - 430,

[7] Kalmikov S.A. , Sokin J.I. Juldasev Z. H. *"Metody intervalnogo analiza"* (ros.) Nauka 1986,

[8] Kharitonov W. L. *Ob assimptoticeskoj ustojcivosti polozenija ravnovesija semejstva sistem liniejnych differencialnych uravnenij*Diff. Uravnienija, vol.14,No.11,1978,pp2086-2088 (ros.)

[9] Klamka J. *"Sterowalność systemów dynamicznych"* PWN, 1990

[10] Mao X. *"Exponential Stability of Stochastic Delay Interval Systems With Markovian Switching"* IEEE Trans. Aut. Cont., vol. 47 No 10 October 2002, pp 1064 - 1612,

[11] Mitkowski W. *"Stabilizacja systemów dynamicznych"* PWN W-a 1991,

[12] Moore R. *"Interval Analysis"* Prentice Hall 1966,

[13] Moore R. *"Methods and Applications of Interval Analysis"* SIAM Philadelphia 1979,

[14] Oprzedkiewicz K. *"Przykład indetyfikacji obiektu parabolicznego"* Zeszyty Naukowe AGH, Elektrotechnika tom 16, zeszyt 2, 1997, s.99-106 Oprzedkiewicz K.

[15] Oprzedkiewicz K. *"The interval parabolic system"* Archives of Control Sciences, vol. 13, 2003, No. 4, pp 391-405,

[16] Oprzedkiewicz K.*"A controllability problem for a class of uncertain - parameters linear dynamic systems"* Archives of Control Sciences, Vol 14 (L), 2004 No. 1, pp.85-100,

[17] Oprzędkiewicz K. *"An observability problem for a class of uncertain-parameter linear dynamic systems"* Int. J of Applied Math and Comp Sc. (zatwierdz do druku 03 2005)

Instytut Badań Systemowych
Polskiej Akademii Nauk

ISBN 83-89475-02-2