XV Krajowa Konferencja Automatyki

Tom I

KKA
2005

Redaktorzy:
Zdzisław Bubnicki
Roman Kulikowski
Janusz Kacprzyk

XV Krajowa Konferencja Automatyki
Tom I

Redaktorzy:
Zdzisław BUBNICKI
Roman KULIKOWSKI
Janusz KACPRZYK

ORGANIZATOR
Komitet Automatyki i Robotyki Polskiej Akademii Nauk
Instytut Badań Systemowych Polskiej Akademii Nauk

WSPÓŁORGANIZATORZY
Politechnika Warszawska
Przemysłowy Instytut Automatyki i Pomiarów
Polskie Stowarzyszenie Pomiarów, Automatyki i Robotyki

ISBN 83-89475-00-6

Druk: ARGRAF, Warszawa

STABILNOŚĆ, STEROWALNOŚĆ, OBSERWOWALNOŚĆ

OSIĄGALNOŚĆ ZUPEŁNA I STEROWANIE Z MINIMALNĄ ENERGIĄ DODATNICH UKŁADÓW DYSKRETNYCH Z OPÓŹNIENIAMI*

Mikołaj BUSŁOWICZ, Tadeusz KACZOREK

Politechnika Białostocka, Wydział Elektryczny ul. Wiejska 45D, 15-351 Białystok,
e-mails:busmiko@pb.bialystok.pl, kaczorek@isep.pw.edu.pl

Streszczenie: W pracy rozpatrzono problem zupełnej osiągalności (zadany stan końcowy jest stanem zupełnym) dodatnich układów dyskretnych z wieloma opóźnieniami zmiennych stanu. Taki rodzaj osiągalności (w odróżnieniu od zwykłej osiągalności, gdy stan końcowy jest stanem chwilowym) nazywany osiągalnością zupełną lub całkowitą. Wykazano, że w przypadku ogólnym dodatni układ z wieloma opóźnieniami nie jest całkowicie osiągalny. Całkowicie osiągalnym może być tylko dodatni układ z czystym opóźnieniem. Sformułowano kryteria całkowitej osiągalności takiego układu oraz podano metodę wyznaczania sterowania przeprowadzającego układ z zerowego zupełnego stanu początkowego do dowolnego zadanego nieujemnego zupełnego stanu końcowego. Rozważania zilustrowano przykładem liczbowym.

Słowa kluczowe: Układ dyskretny, opóźnienia, stan zupełny, osiągalność, sterowanie z minimalną energią.

1. WSTĘP

W układach dodatnich składowe wektorów wymuszeń, warunków początkowych, stanu i odpowiedzi przyjmują tylko wartości nieujemne. Liniowe układy dodatnie nie są zdefiniowane w przestrzeniach liniowych lecz w przestrzeniach stożków. Z tego powodu teoria takich układów jest mniej zaawansowana w porównaniu z teorią układów liniowych "niedodatnich". Problem analizy i syntezy układów dodatnich, ale bez opóźnień, jest tematem wielu publikacji od kilku lat, patrz np. monografie [4, 5, 6] oraz prace [1, 7] i cytowaną tam literaturę. Ostatnio problem osiągalności dyskretnych dodatnich układów liniowych z opóźnieniem rozpatrzono w pracach [2, 3, 9, 12]. Kryteria sterowania z minimalną energią takich układów podano w pracach [2, 8, 9].

W niniejszej pracy rozpatrzymy ogólniejszy rodzaj osiągalności dodatnich układów dyskretnych z opóźnieniami, a mianowicie tzw. osiągalność całkowitą, zwaną też osiągalnością zupełną. Rozpatrzymy też problem sterowania z minimalną energią w przypadku, gdy zadany stan końcowy jest stanem zupełnym. Problem sterowania z minimalną energią układów dynamicznych został po raz pierwszy rozwiązany w pracach [10, 11].

2. SFORMUŁOWANIE PROBLEMU

Niech $\Re^{n\times m}$ będzie zbiorem macierzy o wymiarach $n\times m$ o rzeczywistych elementach oraz $\Re^n = \Re^{n\times 1}$. Zbiór macierzy o wymiarach $n\times m$, których elementami są liczby rzeczywiste nieujemne, będziemy oznaczać przez $\Re_+^{n\times m}$, przy czym $\Re_+^n = \Re_+^{n\times 1}$. Zbiór liczb całkowitych nieujemnych będziemy oznaczać przez Z_+.

Weźmy pod uwagę dyskretny dodatni układ liniowy z opóźnieniami opisany równaniem stanu

$$x_{i+1} = A_0 x_i + \sum_{k=1}^{h} A_k x_{i-k} + Bu_i, \quad i \in Z_+, \tag{1}$$

z warunkiem początkowym

$$x_{-i}, \quad i = 0,1,\ldots,h, \tag{2}$$

gdzie h jest liczbą opóźnień, $A_k \in \Re_+^{n\times n}$, $k = 0,1,\ldots,h$, $B \in \Re_+^{n\times m}$. Jeżeli $u_i \in \Re_+^m$ dla $\forall i \in Z_+$, to przy spełnieniu powyższych założeń rozwiązanie równania stanu (1) jest nieujemne dla każdego $i \in Z_+$, tzn. $x_i \in \Re_+^n$ dla każdego $i \in Z_+$.

Definicja 1. Stan $x_i \in \Re_+^n$ nazywamy stanem (chwilowym) układu (1) w dyskretnej chwili i.

Definicja 2. Stan

$$\tilde{x}_i = \begin{bmatrix} x_i \\ x_{i-1} \\ \vdots \\ x_{i-h+1} \\ x_{i-h} \end{bmatrix} \in \Re_+^{\tilde{n}}, \quad \tilde{n} = (h+1)n, \tag{3}$$

nazywamy stanem zupełnym układu (1) w dyskretnej chwili i. Stan $\tilde{x}_0$ określony wzorem (3) dla $i = 0$ nazywamy zupełnym stanem początkowym układu (1).

Definicje osiągalności oraz osiągalności zupełnej układu (1) można sformułować w sposób podany poniżej.

*Praca naukowa finansowana ze środków Komitetu Badań Naukowych w latach 2004-2007 jako projekt badawczy.

Definicja 3.

1. Stan $x_f \in \Re_+^n$ nazywamy osiągalnym w N krokach, jeżeli istnieje ciąg wymuszeń $u_i \in \Re_+^m$, $i = 0,1,\ldots, N-1$, który przeprowadza układ (1) z zerowego zupełnego stanu początkowego do dowolnego zadanego nieujemnego stanu końcowego x_f.
2. Jeżeli każdy stan $x_f \in \Re_+^n$ jest osiągalny w N krokach, to układ (1) nazywamy $\Re_+^n$-osiągalnym lub osiągalnym N krokach.
3. Jeżeli dla każdego stanu $x_f \in \Re_+^n$ istnieje taka liczba naturalna N, że stan ten jest osiągalny w N krokach, to układ (1) nazywamy $\Re_+^n$-osiągalnym lub krótko osiągalnym.

Definicja 4.

1. Stan zupełny $\tilde{x}_f \in \Re_+^{\tilde{n}}$, $\tilde{n} = (h+1)n$, nazywamy osiągalnym w N krokach, jeżeli istnieje ciąg wymuszeń $u_i \in \Re_+^m$, $i = 0,1,\ldots, N-1$, który przeprowadza układ (1) z zerowego zupełnego stanu początkowego do zupełnego stanu końcowego $\tilde{x}_f$, tj. $\tilde{x}_N = \tilde{x}_f$.
2. Jeżeli każdy stan zupełny $\tilde{x}_f$ jest osiągalny w N krokach, to układ (1) nazywamy całkowicie osiągalnym N krokach.
3. Jeżeli dla każdego zupełnego stanu $\tilde{x}_f \in \Re_+^{\tilde{n}}$ istnieje taka liczba naturalna N, że stan ten jest całkowicie osiągalny w N krokach, to układ (1) nazywamy całkowicie osiągalnym.

Problem $\Re_+^n$-osiągalności (osiągalności) oraz sterowania z minimalną energią dodatniego układu (1) z jednym opóźnieniem został rozpatrzony w pracach [2, 3, 8] oraz z wieloma opóźnieniami w [9]. Warunki osiągalności oraz sterowalności układu (1) zostały podane w [12].

W niniejszej pracy wykażemy, że dodatni układ (1) może być całkowicie osiągalny tylko wtedy, gdy $A_k = 0$, $k = 0,1,\ldots,h-1$, czyli gdy jest on układem z czystym opóźnieniem. Podamy też metodę wyznaczania sterowania przeprowadzającego układ (1) z czystym opóźnieniem z zerowego zupełnego stanu początkowego do dowolnego zadanego nieujemnego zupełnego stanu końcowego oraz metodę wyznaczania sterowania, które ponadto zapewnia minimalną wartość kwadratowego wskaźnika jakości regulacji (sterowanie z minimalną energią).

3. ROZWIĄZANIE PROBLEMU

Równanie stanu (1) dodatniego układu z opóźnieniami możemy napisać w postaci równania stanu równoważnego układu bez opóźnień

$$\tilde{x}_{i+1} = A\tilde{x}_i + \tilde{B}u_i, \quad i \in Z_+, \tag{4}$$

z warunkiem początkowym $\tilde{x}_0$, przy czym wektor stanu $\tilde{x}_i$ ma postać (3) oraz

$$A = \begin{bmatrix} A_0 & A_1 & \cdots & A_{h-1} & A_h \\ I_n & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & I_n & 0 \end{bmatrix}, \quad \tilde{B} = \begin{bmatrix} B \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{5}$$

Zatem problem całkowitej osiągalności dodatniego układu dyskretnego z opóźnieniem (1) jest równoważny z problemem osiągalności dodatniego układu dyskretnego bez opóźnienia (4).

3.1. Całkowita osiągalność

Rozwiązanie równania (4) ma postać

$$\tilde{x}_i = A^i\tilde{x}_0 + \sum_{r=0}^{i-1} A^{i-r-1}\tilde{B}u_r. \tag{6}$$

Dla $\tilde{x}_0 = 0$ oraz $i = N$ wzór (6) można napisać w postaci

$$\tilde{x}_N = \tilde{R}_N u_0^N, \tag{7}$$

gdzie

$$\tilde{R}_N = [\tilde{B}, A\tilde{B}, \cdots, A^{N-1}\tilde{B}], \quad u_0^N = \begin{bmatrix} u_{N-1} \\ u_{N-2} \\ \vdots \\ u_0 \end{bmatrix}. \tag{8}$$

Istotne znaczenie w teorii osiągalności dodatnich układów dyskretnych opisanych równaniem stanu (4) odgrywa macierz osiągalności

$$\tilde{R}_N = [\tilde{B}, A\tilde{B}, \cdots, A^{N-1}\tilde{B}]. \tag{9}$$

Macierz (9) ma $\tilde{n} = (h+1)n$ wierszy i Nm kolumn. Może ona mieć pełny rząd wierszowy tylko wtedy, gdy $Nm \geq \tilde{n}$. Zatem przy $m = 1$ musi być $N \geq \tilde{n}$, natomiast przy $m > 1$ liczba N może być mniejsza od $\tilde{n}$.

Uwzględniając warunki osiągalności równoważnego układu dodatniego bez opóźnienia (4) (np. [5, 6]), kryterium osiągalności dodatniego układu (1) z opóźnieniem można sformułować w sposób podany poniżej.

Twierdzenie 1. Dodatni układ z opóźnieniem (1) jest całkowicie osiągalny wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje taka liczba naturalna N, że jest spełniony przynajmniej jeden z następujących warunków:

1. z macierzy $\tilde{R}_N$ można wybrać $\tilde{n} = (h+1)n$ liniowo niezależnych kolumn takich, że macierz $\overline{R}_N$ utworzona z tych kolumn jest uogólnioną macierzą permutacji (w każdym wierszu i każdej kolumnie tylko jeden element jest dodatni, a wszystkie pozostałe są zerowe),

2. z macierzy $\widetilde{R}_N$ można wybrać $\bar{n}$ liniowo niezależnych kolumn takich, że macierz odwrotna $\widetilde{R}_{\bar{n}}^{-1}$ macierzy utworzonej z tych kolumn ma elementy nieujemne, tzn. $\widetilde{R}_{\bar{n}}^{-1} \in \Re_{+}^{\bar{n}\times\bar{n}}$.

Istotne znaczenie w dalszych rozważaniach ma poniższy lemat oraz twierdzenie.

Lemat 1. Jeżeli macierz $[A, \widetilde{B}]$ o wymiarach $\bar{n}\times(\bar{n}+m)$ nie ma $\bar{n}$ liniowo niezależnych monomialnych kolumn (w każdej kolumnie tylko jeden element jest dodatni, a wszystkie pozostałe są zerowe), to nie istnieje liczba naturalna N taka, że dodatni układ z opóźnieniem (1) jest całkowicie osiągalny.

Dowód. Jeżeli dodatni układ (1) jest całkowicie osiągalny, to macierz $\widetilde{R}_N$ o postaci (9) ma $\bar{n}$ liniowo niezależnych monomialnych kolumn. Łatwo zauważyć, że jest to możliwe tylko wtedy, gdy macierz $[A, \widetilde{B}]$ ma $\bar{n}$ liniowo niezależnych monomialnych kolumn. ■

Twierdzenie 2. Jeżeli $A_k \neq 0$, $k = 0,1,\ldots,h-1$, to układ dodatni (1) nie jest całkowicie osiągalny.

Dowód. Macierz $[A, \widetilde{B}]$ można napisać w postaci $[A, \widetilde{B}] = [X_1, X_2]$, gdzie

$$X_1 = \begin{bmatrix} A_0 & A_1 & \cdots & A_{h-1} \\ I_n & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & I_n & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & I_n \end{bmatrix}, \quad X_2 = \begin{bmatrix} A_h & B \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{10}$$

Macierz X_2 może mieć co najwyżej n liniowo niezależnych monomialnych kolumn. Aby macierz $[A, \widetilde{B}] = [X_1, X_2]$ miała $\bar{n} = (h+1)n$ liniowo niezależnych monomialnych kolumn potrzeba i wystarcza, aby macierz X_1 o wymiarach $\bar{n}\times nh$ miała nh liniowo niezależnych monomialnych kolumn. Jest to możliwe tylko wtedy, gdy $A_k = 0$, $k = 0,1,\ldots,h-1$. ■

Z twierdzenia 2 wynika, że dodatni układ (1) nie jest całkowicie osiągalny w przypadku ogólnym. Może on być całkowicie osiągalnym tylko wtedy, gdy $A_k = 0$, $k = 0,1,\ldots,h-1$. Oznacza to, że całkowicie osiągalnym może być tylko dodatni układ z czystym opóźnieniem, opisany równaniem stanu

$$x_{i+1} = A_h x_{i-h} + Bu_i, \quad i \in Z_+, \tag{11}$$

z warunkiem początkowym (2).

Układ bez opóźnienia, równoważny układowi (11) z czystym opóźnieniem, można opisać równaniem stanu (4) o macierzach

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & A_h \\ I_n & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & I_n & 0 \end{bmatrix}, \quad \widetilde{B} = \begin{bmatrix} B \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \tag{12}$$

z warunkiem początkowym $\widetilde{x}_0 \in \Re_{+}^{\bar{n}}$.

Lemat 2. Jeżeli macierz $[A_h, B]$ nie ma n liniowo niezależnych monomialnych kolumn, to dodatni układ (11) nie jest całkowicie osiągalny.

Dowód. Macierz $[A, \widetilde{B}]$ przy macierzach A i $\widetilde{B}$ o postaciach (12) ma co najmniej nh liniowo niezależnych monomialnych kolumn. Nie ma ona $\bar{n} = (h+1)n$ liniowo niezależnych monomialnych kolumn, jeżeli macierz $[A_h, B]$ nie ma n liniowo niezależnych monomialnych kolumn. Teza wynika zatem z lematu 1. ■

Przypomnijmy, że (np. [5, 6]) zbiór $X \in \Re^n$ nazywamy stożkiem, jeżeli $x \in X$, to $\alpha x \in X$ dla każdego $\alpha \in \Re$. Stożek nazywamy wypukłym, jeżeli dla dowolnych $x_1, x_2 \in X$ każdy punkt odcinka $\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 \in X$ dla $\lambda \in [0,1]$. Stożek X nazywamy solidnym, jeżeli w jego wnętrzu mieści się kula $K(x,r)$ o środku w punkcie $x \in X$ i o promieniu r.

Ponieważ stożek stanów osiągalnych równoważnego układu dodatniego (4) o macierzach (12) jest stożkiem zupełnych stanów osiągalnych dodatniego układu (11) z czystym opóźnieniem, na podstawie prac [5, 6] można wykazać, że jeżeli układ dodatni (11) o macierzach (12) jest całkowicie osiągalny, to jest on zawsze całkowicie osiągalny w $N = \bar{n}$ krokach oraz udowodnić następujące twierdzenia.

Twierdzenie 3. Zbiór osiągalnych stanów zupełnych układu dodatniego (11) jest dodatnim stożkiem wypukłym. Stożek ten jest solidny wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje taka liczba naturalna N, że macierz osiągalności (9) przy macierzach A i $\widetilde{B}$ o postaciach (12) ma pełny rząd wierszowy równy $\bar{n}$.

Twierdzenie 4. Stożek zupełnych stanów osiągalnych dodatniego układu z opóźnieniem (11) jest niezmienniczy wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje taka liczba naturalna N, że rząd $\widetilde{R}_N = \bar{n}$ oraz współczynniki wielomianu charakterystycznego układu (11) (będącego wielomianem charakterystycznym macierzy A), o postaci

$$\det(z^{h+1}I_n - A_h) = z^{\bar{n}} + a_{\bar{n}-1}z^{\bar{n}-1} + \cdots + a_1 z + a_0$$

są niedodatnie, tzn. $a_i \leq 0$ dla $i = 0,1,\ldots,\bar{n}-1$.

Z powyższych twierdzeń wynika, że jeżeli spełnione są warunki twierdzenia 4, to stożek osiągalnych stanów zupełnych dodatniego układu (11) nie zmienia się dla

$N \geq \tilde{n}$. Jeżeli jest on równy przestrzeni $\Re_+^{\tilde{n}}$, tj. są spełnione warunki twierdzenia 1 dla dodatniego układu (11), to ten układ jest całkowicie osiągalny. Jeżeli natomiast nie jest on równy $\Re_+^{\tilde{n}}$, to dodatni układ (11) nie jest całkowicie osiągalny, bowiem dalsze zwiększanie N nie powoduje zwiększenia stożka stanów osiągalnych. Możemy więc stwierdzić, że jeżeli dodatni układ (11) nie jest całkowicie osiągalny w $N = \tilde{n}$ krokach, to nie jest on całkowicie osiągalny w większej liczbie kroków, a więc nie jest całkowicie osiągalny. Stożek zupełnych stanów osiągalnych w pewnych przypadkach może być też niezmienniczy dla wartości N mniejszych od $\tilde{n}$. Wynika to z tego, że warunek rząd $\tilde{R}_N = \tilde{n}$ może być spełniony dla $N < \tilde{n}$ przy $m > 1$. Wtedy, przy spełnieniu warunków twierdzenia 1, dodatni układ (11) jest osiągalny w $N < \tilde{n}$ krokach. Możemy więc stwierdzić, że wymieniona w twierdzeniu 1 liczba naturalna N może być mniejsza od $\tilde{n} = (h+1)n$ dla dodatnich układów (11) o liczbie wejść większej od 1.

Twierdzenie 5. Jeżeli dodatni układ (11) jest osiągalny, to jest on osiągalny w N krokach, gdzie $N \geq \mathrm{E}[\tilde{n}/q]$, przy czym $\mathrm{E}[\tilde{n}/q]$ oznacza najmniejszą liczbę całkowitą większą lub równą $\tilde{n}/q$, gdzie q jest liczbą liniowo niezależnych monomialnych kolumn macierzy $\tilde{B}$.

Dowód. Każda macierz $A^k\tilde{B}$ ($k = 0,1,\ldots,N-1$) macierzy osiągalności $\tilde{R}_N$ może mieć maksymalnie q liniowo niezależnych monomialnych kolumn. Oznacza to, że jeżeli dodatni układ (11) jest osiągalny, to wtedy $Nq = \tilde{n}$. ∎

Twierdzenie 6. Układ dodatni (11) jest całkowicie osiągalny, jeżeli istnieje taka liczba naturalna N, że rząd macierzy $\tilde{R}_N$ o postaci (9) jest równy $\tilde{n}$ oraz

$$\tilde{R}_N^{\mathrm{T}}[\tilde{R}_N\tilde{R}_N^{\mathrm{T}}]^{-1} \in \Re_+^{Nm\times\tilde{n}}. \tag{13}$$

Jeżeli jest spełniony warunek (13), to ciąg wymuszeń $u_i \in \Re_+^m$, $i = 0,1,\ldots,N-1$, który przeprowadza układ (11) z zerowego zupełnego stanu początkowego do zadanego zupełnego stanu końcowego $\tilde{x}_f \in \Re_+^{\tilde{n}}$, można wyznaczyć ze wzoru

$$u_0^N = \tilde{R}_N^{\mathrm{T}}[\tilde{R}_N\tilde{R}_N^{\mathrm{T}}]^{-1}\tilde{x}_f, \tag{14}$$

gdzie wektor u_0^N ma postać podaną w (8).

Dowód. Jeżeli rząd $\tilde{R}_N = \tilde{n}$, to macierz $\tilde{R}_N\tilde{R}_N^{\mathrm{T}}$ jest nieosobliwa. Jeżeli ponadto zachodzi (13), to wtedy $u_0^N \in \Re_+^{Nm}$ i $\tilde{x}_N = \tilde{R}_N u_0^N = \tilde{R}_N\tilde{R}_N^{\mathrm{T}}[\tilde{R}_N\tilde{R}_N^{\mathrm{T}}]^{-1}\tilde{x}_f = \tilde{x}_f$.

3.2. Sterowanie z minimalną energią

Problem sterowania z minimalną energią układu dynamicznego ma rozwiązanie wtedy i tylko wtedy, gdy ten układ jest układem osiągalnym [2, 8, 9, 10, 11]. Zatem w dalszych rozważaniach będziemy rozpatrywać dodatni układ (11) z czystym opóźnieniem.

Zadanie sterowania z minimalną energią dodatniego układu (11) można sformułować następująco: dane są macierze $A_h \in \Re_+^{n\times n}$, $B \in \Re_+^{n\times m}$, liczba kroków N, w której układ (11) jest przeprowadzany z zerowego zupełnego stanu początkowego do zadanego zupełnego stanu końcowego $\tilde{x}_f \in \Re_+^{\tilde{n}}$ oraz symetryczna dodatnio określona macierz $Q \in \Re^{m\times m}$ wskaźnika jakości

$$I(u) = \sum_{i=0}^{N-1} u_i^{\mathrm{T}} Q u_i, \tag{15}$$

przy czym $Q^{-1} \in \Re_+^{m\times m}$. Należy wyznaczyć ciąg sterujący $u_i \in \Re_+^m$, $i = 0,1,\ldots,N-1$, który przeprowadza ten układ z zupełnego zerowego stanu początkowego (2) do dowolnego zupełnego nieujemnego stanu końcowego $\tilde{x}_f$ i minimalizuje wskaźnik jakości (15).

Postępując podobnie jak w przypadku dodatniego układu dyskretnego bez opóźnień (np. [5, 6]) można wykazać, że sterowanie z minimalną energią, które przeprowadza dodatni układ (11) z zerowego zupełnego stanu początkowego do dowolnego zadanego nieujemnego zupełnego stanu końcowego można wyznaczyć ze wzoru

$$\hat{u}_0^N = \begin{bmatrix} \hat{u}_0 \\ \hat{u}_1 \\ \vdots \\ \hat{u}_{N-1} \end{bmatrix} = \overline{Q}_N \tilde{R}_N^{\mathrm{T}} W^{-1}\tilde{x}_f, \tag{16}$$

przy czym $W = \tilde{R}_N\overline{Q}_N\tilde{R}_N^{\mathrm{T}} \in \Re_+^{\tilde{n}\times\tilde{n}}$ oraz

$$\overline{Q}_N = \mathrm{diag}[Q^{-1},\ldots,Q^{-1}] \in \Re_+^{Nm\times Nm}, \tag{17}$$

zaś $\tilde{R}_N$ jest macierzą osiągalności (9). Ponadto, minimalną wartość wskaźnika jakości oblicza się ze wzoru

$$I(\hat{u}) = \tilde{x}_f^{\mathrm{T}} W^{-1}\tilde{x}_f. \tag{18}$$

Sterowanie optymalne, które minimalizuje wskaźnik jakości (15) zależy od macierzy wag Q. Poniżej pokażemy, że sterowanie (14) też jest sterowaniem z minimalną energią, które minimalizuje wskaźnik jakości (15) przy $Q = qI_m$, $q > 0$.

Twierdzenie 7. Jeżeli $Q = qI_m$, $q > 0$, to $\hat{u}_0^N = u_0^N$, gdzie $\hat{u}_0^N$ i u_0^N oblicza się ze wzorów (16) i (14), odpowiednio. W takim wypadku optymalną wartość wskaźnika jakości (15) oblicza się ze wzoru

$$I(\hat{u}) = q\tilde{x}_f^{\mathrm{T}}[\tilde{R}_N\tilde{R}_N^{\mathrm{T}}]^{-1}\tilde{x}_f. \tag{19}$$

Dowód. Jeżeli $Q = qI_m$, $q > 0$, to

$$\overline{Q}_N = q^{-1} I_{Nm} \in \mathfrak{R}_+^{Nm\times Nm},\quad W = q^{-1}\widetilde{R}_N \widetilde{R}_N^{\mathrm{T}} \in \mathfrak{R}_+^{\tilde{n}\times\tilde{n}}. \tag{20}$$

Ze wzoru (16), uwzględniając (20) i (14), mamy

$$\begin{aligned} \hat{u}_0^N &= \overline{Q}_N \widetilde{R}_N^{\mathrm{T}} W^{-1} \widetilde{x}_f = q^{-1}\widetilde{R}_N^{\mathrm{T}} q [\widetilde{R}_N \widetilde{R}_N^{\mathrm{T}}]^{-1} \widetilde{x}_f \\ &= \widetilde{R}_N^{\mathrm{T}} [\widetilde{R}_N \widetilde{R}_N^{\mathrm{T}}]^{-1} \widetilde{x}_f = u_0^N. \end{aligned} \tag{21}$$

Podstawiając drugi ze wzorów (20) do wzoru (18) otrzymamy (19). ■

Zauważmy, że warunki twierdzenia 7 są zawsze spełnione dla układu (11) o jednym wejściu ($m = 1$). Wtedy $Q = q > 0$.

4. PRZYKŁAD

Wyznaczyć ciąg sterowań, który przeprowadza dodatni układ (11) z czystym opóźnieniem $h = 2$ o macierzach

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0.1 \end{bmatrix},\quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \tag{22}$$

z zerowego zupełnego stanu początkowego do zupełnego stanu końcowego

$$\widetilde{x}_f = \begin{bmatrix} x_N \\ x_{N-1} \\ x_{N-1} \end{bmatrix},\quad x_N = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix},\quad x_{N-1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix},\quad x_{N-2} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}. \tag{23}$$

Dla rozpatrywanego układu macierze A i $\widetilde{B}$ mają postaci (12). Zatem

$$[A, \widetilde{B}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0.1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{24}$$

Macierz (24) ma $\tilde{n} = (h+1)n = 9$ liniowo niezależnych monomialnych kolumn. Zatem warunek podany w lemacie 1 nie jest więc spełniony. Oznacza to, że rozpatrywany układ może być osiągalny.

Macierz $\widetilde{B}$ ma dwie liniowo niezależne monomialne kolumny, zatem $q = 2$. Zgodnie z twierdzeniem 5 mamy więc $N \geq \mathrm{E}[\tilde{n}/q] = \mathrm{E}[9/2] = 5$. Łatwo sprawdzić, że dla $N = 5$ macierz osiągalności (9) nie ma pełnego rzędu wierszowego. Wyznaczając tę macierz przy $N = 6$ otrzymamy

$$\widetilde{R}_6 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{25}$$

Macierz (25) zawiera $\tilde{n} = 9$ liniowo niezależnych monomialnych kolumn, a więc rozpatrywany układ jest całkowicie osiągalny w $N = 6$ krokach.

Zgodnie z twierdzeniem 3, stożek zupełnych stanów osiągalnych rozpatrywanego układu jest stożkiem solidnym dla $N \geq 6$. Jest on nieznienniczy dla $N \geq 6$, bowiem współczynniki wielomianu charakterystycznego

$$\det(z^3 I_3 - A_2) = z^9 - 0.1 z^6,$$

są niedodatnie (twierdzenie 4).

Ponieważ macierz $\widetilde{R}_N^{\mathrm{T}}[\widetilde{R}_N \widetilde{R}_N^{\mathrm{T}}]^{-1} = \widetilde{R}_6^{\mathrm{T}}[\widetilde{R}_6 \widetilde{R}_6^{\mathrm{T}}]^{-1}$ jest macierzą nieujemną, poszukiwany ciąg sterowań można wyznaczyć ze wzoru (14). Wykonując odpowiednie obliczenia i korzystając z drugiego ze wzorów (8) otrzymamy

$$u_0 = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 1 \end{bmatrix},\quad u_1 = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 2 \end{bmatrix},\quad u_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}, \tag{26a}$$

$$u_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0.5 \end{bmatrix},\quad u_4 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0.5 \end{bmatrix},\quad u_5 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}. \tag{26b}$$

Wyznaczymy teraz sterowanie z minimalną energią, które w $N = 6$ krokach przeprowadza rozpatrywany układ z zerowego zupełnego stanu początkowego do zupełnego stanu końcowego (23) i minimalizuje wskaźnik jakości (15) przy

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \tag{27}$$

Obliczając sterowanie z minimalną energią ze wzoru (16) otrzymamy

$$\widetilde{u}_0 = \begin{bmatrix} 0.8 \\ 1 \end{bmatrix},\quad \widetilde{u}_1 = \begin{bmatrix} 0.8 \\ 2 \end{bmatrix},\quad \widetilde{u}_2 = \begin{bmatrix} 1.6 \\ 4 \end{bmatrix}, \tag{28a}$$

$$\widetilde{u}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0.2 \end{bmatrix},\quad \widetilde{u}_4 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0.2 \end{bmatrix},\quad \widetilde{u}_5 = \begin{bmatrix} 3 \\ 0.4 \end{bmatrix}. \tag{28b}$$

Obliczając z kolei wartości wskaźnika jakości (15) dla wyznaczonych ciągów sterowań (26) i (28) otrzymamy $I(\widetilde{u}) = 102.8 < I(u) = 105.5$.

5. UWAGI KOŃCOWE

W pracy rozpatrzono problem zupełnej osiągalności dodatnich układów dyskretnych z opóźnieniami zmiennych stanu. W takim przypadku zadany stan końcowy jest stanem zupełnym. Wykazano, że dodatni układ (1) nie jest układem całkowicie osiągalnym w przypadku ogólnym. Może on być on układem całkowicie osiągalnym tylko wtedy, gdy $A_k = 0$, $k = 0,1,\ldots,h-1$ (dodatni układ z czystym opóźnieniem). Sformułowano kryteria całkowitej osiągalności oraz podano metodę wyznaczania sterowania przeprowadzającego dodatni układ z czystym opóźnieniem (11) z zerowego zupełnego stanu początkowego do dowolnego zadanego nieujemnego zupełnego stanu końcowego. Podano też metodę wyznaczania sterowania, które nie tylko przeprowadza rozpatrywany układ z zerowego zupełnego stanu początkowego do dowolnego zadanego nieujemnego zupełnego stanu końcowego, ale też minimalizuje wskaźnik jakości regulacji o postaci (15). Wykazano, że sterowanie wyznaczone ze wzoru (14) też jest sterowaniem z minimalną energią, które minimalizuje wskaźnik jakości (15) przy macierzy wag $Q = qI_m$, $q > 0$.

COMPLETE REACHABILITY AND MINIMUM ENERGY CONTROL OF POSITIVE DISCRETE-TIME SYSTEMS WITH DELAYS

Abstract: The problem of complete reachability of positive discrete-time linear systems with delays is considered. It is shown that this system is not complete reachable in general case. Complete reachable may be only system with pure delay. Necessary and sufficient conditions for the complete reachability and minimum energy control of system with pure delay are given.

Literatura

[1] Benvenuti L., Farina L. (2004) A tutorial on the positive realization problem. *IEEE Trans. Autom. Control,* 49, 651-664.

[2] Busłowicz M., Kaczorek T. (2004) Reachability and minimum energy control of positive linear discrete-time systems with one delay. *Proc. 12th Mediterranean Conference on Control and Automation,* Kasadasi, Izmir, Turkey (CD-ROM).

[3] Busłowicz M., Kaczorek T. (2004) Osiągalność dodatnich układów dyskretnych z jednym opóźnieniem. W: R. Gessing, T. Szkodny (red.) *Automatyzacja procesów dyskretnych - część 1, Optymalizacja dyskretna, robotyka i sterowniki programowalne,* 9-16. WNT Warszawa-Gliwice.

[4] Farina L., Rinaldi S. (2000) *Positive Linear Systems: Theory and Applications.* Wiley, New York.

[5] Kaczorek T. (2000) *Dodatnie układy jedno- i dwuwymiarowe.* Oficyna Wydawnicza Politechniki Warszawskiej, Warszawa.

[6] Kaczorek T. (2002) *Positive 1D and 2D Systems.* Springer-Verlag, London.

[7] Kaczorek T. (2003) Some recent developments in positive systems. *Proc. 7th Conference on Dynamical Systems Theory and Applications, Łódź,* 25-35.

[8] Kaczorek T., Busłowicz M. (2004) Sterowanie z minimalną energią dodatnich układów dyskretnych z jednym opóźnieniem. W: R. Gessing, T. Szkodny (red.) *Automatyzacja procesów dyskretnych - część 1, Optymalizacja dyskretna, robotyka i sterowniki programowalne,* 83-90. WNT Warszawa-Gliwice.

[9] Kaczorek T., Busłowicz M. (2004) Recent developments in theory of positive discrete-time linear systems with delays - reachability, minimum energy control and realization problem, *Pomiary Automatyka Kontrola,* 10, 12-15.

[10] Klamka J. (1990) *Sterowalność układów dynamicznych.* PWN, Warszawa-Wrocław.

[11] Klamka J. (1991) *Controllability of Dynamical Systems.* Kluwer Academic Publ., Dordrecht.

[12] Xie G., Wang L. (2003) Reachability and controllability of positive linear discrete-time systems with time-delays. In: *Positive Systems* (Benvenuti, De Santis and Farina (Eds.)), 377-384. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg.

Instytut Badań Systemowych
Polskiej Akademii Nauk

ISBN 83-89475-02-2