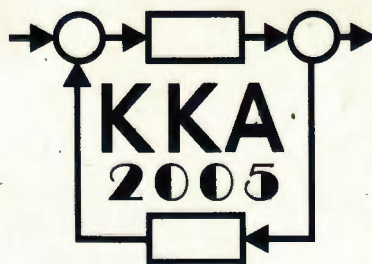


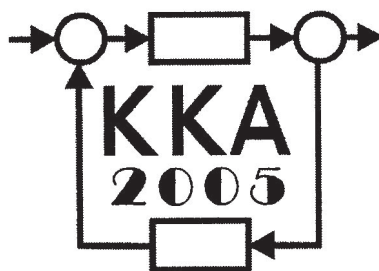
# **XV Krajowa Konferencja Automatyki**

## **Tom I**



**Redaktorzy:  
Zdzisław Bubnicki  
Roman Kulikowski  
Janusz Kacprzyk**

# XV Krajowa Konferencja Automatyki Tom I



Redaktorzy:  
Zdzisław BUBNICKI  
Roman KULIKOWSKI  
Janusz KACPRZYK

**ORGANIZATOR**

Komitet Automatyki i Robotyki Polskiej Akademii Nauk  
Instytut Badań Systemowych Polskiej Akademii Nauk

**WSPÓŁORGANIZATORZY**

Politechnika Warszawska

Przemysłowy Instytut Automatyki i Pomiarów

Polskie Stowarzyszenie Pomiarów, Automatyki i Robotyki

## **ORGANIZATOR**

Komitet Automatyki i Robotyki Polskiej Akademii Nauk  
Instytut Badań Systemowych Polskiej Akademii Nauk

## **WSPÓLORGANIZATORZY**

Politechnika Warszawska  
Przemysłowy Instytut Automatyki i Pomiarów  
Polskie Stowarzyszenie Pomiarów, Automatyki i Robotyki

## **KOMITET PROGRAMOWY**

Przewodniczący  
Zastępca Przewodniczącego

Zdzisław BUBNICKI  
Roman KULIKOWSKI

## **CZŁONKOWIE**

Stanisław BAŃKA  
Mikołaj BUSŁOWICZ  
Ryszard GESSING  
Jakub GUTENBAUM  
Stanisław KACZANOWSKI  
Janusz KACPRZYK  
Józef KORBICZ  
Krzysztof KOZŁOWSKI  
Krzysztof KUŹMIŃSKI  
Krzysztof MALINOWSKI  
Antoni NIEDERLIŃSKI  
Tadeusz PUCHAŁKA  
Stanisław SKOCZOWSKI  
Jerzy ŚWIĄTEK  
Ryszard TADEUSIEWICZ  
Krzysztof TCHOŃ  
Jan WĘGLARZ

Michał BIAŁKO  
Władysław FINDEISEN  
Henryk GÓRECKI  
Jerzy JÓZEFczyk  
Tadeusz KACZOREK  
Jerzy KLAMKA  
Zbigniew KOWALSKI  
Juliusz L. KULIKOWSKI  
Kazimierz MALANOWSKI  
Wojciech MITKOWSKI  
Władysław PEŁCZEWSKI  
Leszek RUTKOWSKI  
Roman SŁOWIŃSKI  
Andrzej ŚWIERNIAK  
Piotr TATJIEWSKI  
Leszek TRYBUS  
Andrzej P. WIERZBICKI

## **KOMITET ORGANIZACYJNY**

Przewodniczący  
Zastępcy Przewodniczącego

Roman KULIKOWSKI  
Janusz KACPRZYK  
Stanisław KACZANOWSKI  
Tadeusz KACZOREK  
Krzysztof MALINOWSKI  
Roman OSTROWSKI  
Tadeusz PUCHAŁKA  
Dariusz WAGNER  
Jan STUDZIŃSKI  
Jan W. OWSIŃSKI

Członkowie

Sekretarze naukowci

**ISBN 83-89475-00-6**

Copyright © Instytut Badań Systemowych Polskiej Akademii Nauk  
All rights reserved

Druk: ARGRAF, Warszawa

**STEROWANIE OPTYMALNE  
I ADAPTACYJNE**

## O PROJEKTOWANIU WIELOWYMIAROWYCH UKŁADÓW ADAPTACYJNEGO STEROWANIA

Stanisław BAŃKA

Politechnika Szczecińska, Wydział Elektryczny  
ul. Sikorskiego 37, 71-313 Szczecin, e-mail: banka@ps.pl

**Streszczenie:** W pracy omawia się problemy występujące w procesie adaptacji wielowymiarowych układów sterowania ze sprzężeniem zwrotnym, wykorzystujących technikę lokowania biegunów (z ang. *Pole Placement*). Na tle ogólnych wymagań stawianych wielowymiarowym układom ze sprzężeniem zwrotnym rozpatruje się przypadki sterowania modalnego ze sprzężeniem od wektora stanu obserwatorów Luenbergera pełnego rzędu lub obserwatorów funkcjonalnych zredukowanego rzędu. Podaje się sposoby projektowania regulatorów modalnych w dziedzinach operatorowych „s” lub „z” oraz ich realizacji w dziedzinach czasowych, przydatnych do celów sterowania adaptacyjnego.

**Słowa kluczowe:** Wielowymiarowe układy ze sprzężeniem zwrotnym, sterowanie adaptacyjne, sterowanie modalne, macierzowe równania wielomianowe.

### 1. WSTĘP

Jedną z bardziej popularnych technik stosowanych w układach adaptacyjnego sterowania liniowymi układami dynamicznymi jest technika lokowania biegunów zamkniętego układu sterowania w stabilnych regionach płaszczyzny zespolonej  $\text{Re } s < 0$  (lub  $|z| < 1$ ), nazywane sterowaniem modalnym.

W przypadku układów dynamicznych o jednym wejściu i wyjściu (SISO), opisywanych wymiernymi transmitancjami w dziedzinie  $s \in C$  dla układów ciągłych, lub  $z \in C$  dla układów z czasem dyskretnym, zadanie projektowania układu sterującego ze sprzężeniem zwrotnym od wyjść obiektu sprowadza się do rozwiązywania diofantycznego równania wielomianowego

$$n(\cdot)b(\cdot) + m(\cdot)a(\cdot) = \delta(\cdot) = q(\cdot)c(\cdot) \quad (1)$$

gdzie:  $b(\cdot)$  i  $a(\cdot)$  są wielomianami (względem operatorów „s” lub „z”) o znanych (identyfikowanych na bieżąco) współczynnikach, stanowiących odpowiednio licznik i mianownik wymiernej i właściwej transmitancji  $b(\cdot)/a(\cdot)$ .

Prawą stroną tego równania jest iloczyn dwóch monicznych wielomianów  $q(\cdot)c(\cdot)$ , które powinny być nie-

zmienne jeśli projektowany układ adaptacyjnego sterowania ze sprzężeniem zwrotnym ma mieć stałe, założone *a priori* właściwości dynamiczne. Wielomiany te muszą spełniać warunki Hurwitza (lub Schura dla układów z czasem dyskretnym), przy czym miejsca zerowe wielomianu  $q(\cdot)$  są zwykle biegunami (eksponencjalnego) obserwatora Luenbergera (pełnego rzędu  $n$  lub obserwatora funkcjonalnego o zredukowanym rzędzie  $n_1 < n$ ), natomiast miejsca zerowe wielomianu  $c(\cdot)$  są biegunami układu zamkniętego.

Rozwiązań równania (1) względem nieznanymi wielomianów  $n(\cdot)$  i  $m(\cdot)$  jest wiele, jeśli istnieją, przy czym praktyczne znaczenie mają w zasadzie tylko rozwiązania minimalnego stopnia. Jest nim zwykle para wielomianów  $n(\cdot)$  i  $m(\cdot)$  o minimalnych stopniach, opisujących wymierną transmitancję  $n(\cdot)/m(\cdot)$  poszukiwanego regulatora modalnego.

Liczba rozwiązań minimalnego stopnia zależy od stopni wielomianów, występujących po prawej i lewej stronie równania. W przypadku gdy

$$\deg a(\cdot) + \deg b(\cdot) \geq \deg q(\cdot) + \deg c(\cdot) \quad (2)$$

rozwiązaniem jest jedna para wielomianów  $n(\cdot)$  i  $m(\cdot)$  definiujących wymierną transmitancję  $n(\cdot)/m(\cdot)$  poszukiwanego regulatora modalnego, która powinna być właściwa (lub ściśle właściwa) aby otrzymany układ sterowania był realizowalny fizycznie. Jeśli powyższy warunek nie będzie spełniony, rozwiązań minimalnego stopnia może być więcej niż jedno a niektóre z nich (lub wszystkie) dawać będą regulatory niewłaściwe, tj. takie, w których stopień licznika ich transmitancji będzie większy od stopnia mianownika  $\deg n(\cdot) > \deg m(\cdot)$ .

W przypadku układów wielowymiarowych (MIMO) tj. układów o wielu wejściach  $m$  i wielu wyjściach  $l$ , układy sterowania adaptacyjnego ze sprzężeniem zwrotnym projektuje się w podobny sposób, rozwiązując analogiczne (unilateralne) macierzowe równania wielomianowe:

- lewostronne (w wersji podstawowej)

$$N_2(\cdot)B_1(\cdot) + M_2(\cdot)A_1(\cdot) = \Delta(\cdot) = Q(\cdot)C_1(\cdot) \quad (3a)$$

- lub prawostronne (w wersji dualnej)

$$A_2(\cdot)M_1(\cdot) + B_2(\cdot)N_1(\cdot) = \tilde{\Delta}(\cdot). \quad (3b)$$

W przypadku pierwszym, lewostronne równanie macierzowe (3a) jest rozwiązywane względem macierzy wielomianowych  $N_2(\cdot)$  i  $M_2(\cdot)$ . Macierze te definiują macierz wymiernych transmitancji wielowymiarowego regulatora modalnego w postaci lewostronnie względnie pierwszej (l.w.p.) frakcji ułamkowej  $M_2^{-1}(\cdot)N_2(\cdot)$ , w której  $M_2(\cdot) \in R[\cdot]^{m \times m}$  jest wielomianową macierzą „mianownikową” regulatora (nieosobliwą i wierszowo-zredukowaną), a  $N_2(\cdot) \in R[\cdot]^{m \times l}$  jej macierzą „licznikową”. Aby regulator modalny otrzymany, przez rozwiązanie równania (3a) był fizycznie realizowalny powinny być spełnione warunki:

$$\deg_n N_2(\cdot) \leq \deg_n M_2(\cdot), i = 1, 2, \dots, m. \quad (4)$$

W równaniu (3a) macierze  $B_1(\cdot) \in R[\cdot]^{l \times m}$  i  $A_1(\cdot) \in R[\cdot]^{m \times m}$  stanowią parę macierzy wielomianowych prawostronnie względnie pierwszych (p.w.p.) macierzowej frakcji ułamkowej  $B_1(\cdot)A_1^{-1}(\cdot)$ . Opisuje ona obiekt sterowania adaptacyjnego, który jest z założenia w pełni sterowalny (i obserwowalny).

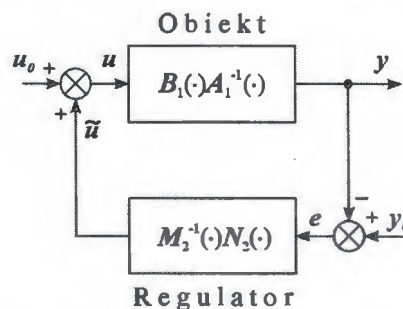
Macierze  $Q(\cdot) \in R[\cdot]^{m \times m}$  i  $C_1(\cdot) \in R[\cdot]^{m \times l}$  występujące po prawej stronie równania (3a) są macierzami „mianownikowymi” odpowiednio: obserwatora Luenbergera i zamkniętego układu sterowania modalnego, tzn. miejsca zerowe wyznaczników tych macierzy  $\det Q(\cdot) = 0$  i  $\det C_1(\cdot) = 0$  są odpowiednio: biegunami obserwatora (pełnego lub zredukowanego rzędu) i biegunami układu zamkniętego. Przyjęcie odpowiednich stabilnych wartości dla tych biegunów i wygenerowanie na ich podstawie odpowiednich macierzy  $Q(\cdot)$  i  $C_1(\cdot)$  – które formują macierz  $\Delta(\cdot) \in R[\cdot]^{m \times m}$  występującą po prawej stronie równania (3a) – jest znacznie trudniejsze niż w przypadku układów jednowymiarowych. Istnieje bowiem wiele możliwości ustalania (nieosobliwych) macierzy  $Q(\cdot)$  i  $C_1(\cdot)$  o znanych wymiarach i zadanych ich wyznacznikach. Dotyczy to zwłaszcza macierzy  $Q(\cdot)$ , której struktura (wierszowa) ma bezpośredni wpływ na strukturę wyznaczanych (nieznanych) macierzy  $N_2(\cdot)$  i  $M_2(\cdot)$ .

Jeszcze trudniej jest ustalić strukturę macierzy  $\tilde{\Delta}(\cdot) \in R[\cdot]^{l \times l}$ , występującą po prawej stronie (dualnego) równania macierzowego (3b). Powinna ona być odpowiednikiem iloczynu dwóch macierzy  $Q(\cdot)C_1(\cdot)$  z równania (3a), tj. miejsca zerowe wyznacznika tej macierzy powinny być równe tym samym, co poprzednio wartościom biegunów obserwatora i układu zamkniętego. Macierz ta ma jednak inne rozmiary i nieznaną strukturę

wierszową i kolumnową. Właściwy dobór macierzy  $\Delta(\cdot)$  i  $\tilde{\Delta}(\cdot)$  jest przedmiotem rozważań w tej pracy.

## 2. OPISY OBIEKTU I WAŻNIEJSZE CECHY WIELOWYMIAROWYCH UKŁADÓW ZE SPRZĘŻENIEM ZWROTNYM

Układy sterowania modalnego są szczególnym przypadkiem wielowymiarowych układów ze sprzężeniem zwrotnym. Schemat blokowy tego rodzaju układów dla podstawowej jego wersji przedstawiono na rys. 1.



Rys. 1. Wielowymiarowy układ sterowania modalnego ze sprzężeniem zwrotnym.

W powyższym układzie zawierającym wielowymiarowy obiekt i regulator, sygnały „zewnętrzne”  $u_0$  i  $y_0$  interpretuje się jako: (znane) „nominalne” wartości wektora sygnałów sterujących obiektem, (który najczęściej jest nieliniowy) oraz nominalne wartości wyjść obiektu (wektor wartości zadanych). Powinny to być te wartości sygnałów, dla których dokonano linearyzacji obiektu w wybranych „punktach pracy” układu. Sygnał  $e$  jest wektorem odchyłek regulacji (wektorem sygnałem błędu).

Zadaniem wielowymiarowego, liniowego regulatora adaptacyjnego (modalnego) jest sprowadzanie „przyrostowych” wartości sygnałów wyjściowych  $\tilde{y}$  (i wejściowych  $\tilde{u}$ ) liniowego modelu obiektu do zera, co odpowiada sprowadzanie wyjść nieliniowego obiektu  $y$  do ich wartości nominalnych  $y_0$ . Zmiany punktu pracy układu powodują zmiany parametrów liniowego modelu obiektu, do którego należy dobierać w sposób adaptacyjny nowe wartości parametrów wielowymiarowego regulatora.

Liniowym modelem sterowanego obiektu (o zmieniających się parametrach) może być dowolny, lecz w pełni sterowalny i obserwowalny układ dynamiczny  $n$ -tego rzędu o  $m$  wejściach i  $l$  wyjściach, opisany standardowymi równaniami stanu i wyjść. W ujęciu wielomianowym opisowi w przestrzeni stanów odpowiada macierz wymiernych transmitancji przedstawiona w postaci wielomianowych (prawostronnie względnie pierwszych p.w.p. lub lewostronnie względnie pierwszych l.w.p.), macierzowych frakcji ułamkowych (MFD)

$$C(sI_n - A)^{-1}B + D = B_1(s)A_1^{-1}(s) = A_2^{-1}(s)B_2(s) \quad (5)$$

gdzie:  $B_1(\cdot) \in R[\cdot]^{l \times m}$  i  $A_1(\cdot) \in R[\cdot]^{m \times m}$  spełniają warunki  $\deg_{ci} B_1(\cdot) \leq \deg_{ci} A_1(\cdot) = d_i$  dla  $i = 1, 2, \dots, m$ , przy czym  $A_1(\cdot)$  musi być macierzą nieosobliwą i kolumnowo-zredukowaną. W dualnej wersji układu, opisem tego samego obiektu są (inne) macierze „mianownikowe”  $A_2(\cdot) \in R[\cdot]^{l \times l}$  i „licznikowe”  $B_2(\cdot) \in R[\cdot]^{l \times m}$ , spełniające warunki  $\deg_{cj} B_2(\cdot) \leq \deg_{cj} A_2(\cdot) = \bar{d}_j$  dla  $j = 1, 2, \dots, l$ , przy czym nieosobliwa macierz  $A_2(\cdot)$  powinna być wierszowo-zredukowana. Można je otrzymać bezpośrednio z oryginalnych równań stanu i wyjść obiektu przez sprowadzenie ich do odpowiedniej (sterowalnej lub obserwowalnej), drugiej postaci kanonicznej Luenbergera-Brunowskiego (L-B) z wykorzystaniem podanych niżej zależności, określonych tzw. twierdzeniem „strukturalnym” Wolovicha [12].

Dla frakcji *p.w.p.* są to zależności:

$$\begin{aligned} A_1(s) &= \hat{B}_m^{-1} [\text{diag}[s^{d_i}, i = 1, \dots, m] - \hat{A}_m \hat{S}(s)] \\ B_1(s) &= \hat{C} \hat{S}(s) + D A_1(s) \end{aligned} \quad (6)$$

oraz dla frakcji *l.w.p.*

$$\begin{aligned} A_2(s) &= [\text{diag}[s^{\bar{d}_j}, j = 1, \dots, l] - \bar{S}(s) A_1] \bar{C}_1^{-1} \\ B_2(s) &= \bar{S}(s) \bar{B} + A_2(s) D \end{aligned} \quad (7)$$

gdzie:

$$\hat{S}(s) = \begin{bmatrix} 1 & s & \dots & s^{d_1-1} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & s & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & s & \dots & s^{d_m-1} \end{bmatrix}^T \quad (8)$$

i

$$\bar{S}(s) = \begin{bmatrix} 1 & s & \dots & s^{\bar{d}_1-1} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & s & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & s & \dots & s^{\bar{d}_l-1} \end{bmatrix}. \quad (9)$$

Macierze  $\hat{A}_m$  i  $\hat{B}_m$  w zależnościach (6) są macierzami liczbowymi utworzonymi z „nietrywialnych” wierszy macierzy stanu  $\hat{A}$  i wejść  $\hat{B}$ , przekształconych do drugiej postaci kanonicznej sterowalnej L-B. Macierz  $\hat{C}$  jest macierzą wyjść. Podobnie macierze  $\bar{A}_1$  i  $\bar{C}_1$  w zależności (7) są macierzami liczbowymi utworzonymi z „nietrywialnych” kolumn macierzy stanu  $\bar{A}$  i wyjść  $\bar{C}$ , oraz  $\bar{B}$  jest macierzą wejść opisu obiektu, przekształconego do drugiej postaci kanonicznej obserwowalnej L-B [8,9].

W podanych wyżej zależnościach istotną rolę odgrywają kolumnowe stopnie  $d_i = \deg_{ci} A_1(\cdot)$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$  równe indeksom sterowalności obiektu oraz wierszowe stopnie  $\bar{d}_j = \deg_{cj} A_2(\cdot)$ ,  $j = 1, 2, \dots, l$  równe jego indek-

som obserwowalności. Łatwo także zauważyć, że dla tak wyznaczanych macierzy mianownikowych obiektu ich macierze współczynników wiodących: kolumnowych

$$\Gamma_c(A_1(s)) = \lim_{s \rightarrow \infty} A_1(s) \text{diag}[s^{-d_i}, i = 1, 2, \dots, m] \quad (10)$$

i wierszowych

$$\Gamma_r(A_2(s)) = \lim_{s \rightarrow \infty} \text{diag}[s^{-\bar{d}_j}, j = 1, 2, \dots, l] A_2(s) \quad (11)$$

są nieosobliwe oraz mają postaci odpowiednio: prawego górnego trójkąta i lewego dolnego trójkąta (z jedynkami na przekątnej). Dla układów z czasem dyskretnym są to macierze liczbowe wyznaczone z analogicznych zależności przy  $z \rightarrow \infty$ .

Podobne definicje i właściwości obowiązują dla opisów wielowymiarowych regulatorów modalnych. Przy czym w wielowymiarowych układach sterowania jako reguła występuje następująca prawidłowość. Jeśli obiekt opisywany jest macierzą transmitancji w postaci frakcji prawostronnej, to regulator będący przedmiotem projektowania poszukiwany jest w postaci frakcji lewostronnej  $M_2^{-1}(\cdot) N_2(\cdot)$  i odwrotnie, gdy dana jest odpowiednia lewostronna postać frakcyjna obiektu, to macierz transmitancji poszukiwanego regulatora wyznaczana jest w postaci frakcji prawostronnej  $N_1(\cdot) M_1^{-1}(\cdot)$ .

Pierwszym podstawowym wymogiem, które omawiane układy sterowania muszą spełniać jest ich stabilność. W układach wielowymiarowych mogą – częściej niż w układach jednowymiarowych – występować „redukowalne” (niesterowalne i/lub nieobserwowalne) części układu. Takie redukowalne, niestabilne części układu, mogą uniemożliwić osiągnięcie realnej stabilności układu zamkniętego. Narzucenie warunków, w których niesterowalne i nieobserwowalne części układów będą stabilne, lub zagwarantowanie, aby w układzie w ogóle nie było części redukowalnych, prowadzi do sformułowania warunków stabilności „wewnętrznej” układów [6].

Drugim ważnym wymaganiem jest to, aby macierze transmitancji każdego dynamicznego elementu wchodzącego w strukturę projektowanego układu były macierzami transmitancji właściwych (lub ściśle właściwych). Wtedy każda z rozpatrywanych macierzy transmitancji będzie realizowalna fizycznie.

Stosując wielomianowe podejście do rozwiązywania zagadnień łatwo wykazać, że opisem właściwości dynamicznych układu przedstawionego na rys. 1. są macierze transmitancji wiążące sygnały zewnętrzne  $y_0$  i  $u_0$  z sygnałami  $e$  i  $\tilde{u}$  zgodnie z następującą zależnością

$$\begin{bmatrix} e \\ \tilde{u} \end{bmatrix} = T(B_1, A_1, M_2, N_2) \begin{bmatrix} y_0 \\ u_0 \end{bmatrix}, \quad (12)$$

w której blokowa macierz transmitancji  $T$  zapisana jest w formie (dwustronnej) wielomianowej reprezentacji frakcyjnej

$$T(B_1, A_1, M_2, N_2) = \begin{bmatrix} I_l & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -B_1(\cdot) \\ A_1(\cdot) \end{bmatrix} \Delta^{-1}(\cdot) [N_2(\cdot) \quad M_2(\cdot)] \quad (13)$$

z macierzą „mianownikową”  $\Delta(\cdot)$  układu zamkniętego, spełniającą macierzowe (lewostronne) równanie wielomianowe (3a).

W wersji dualnej rozpatrywanego układu sterowania, tj. w wersji gdy opis obiektu dany jest w postaci frakcji *l.w.p.* a regulator przyjmuje postać frakcji *p.w.p.*, właściwości zamkniętego układu sterowania opisuje analogiczna zależność

$$\begin{bmatrix} e \\ \tilde{u} \end{bmatrix} = \tilde{T}(A_2, B_2, N_1, M_1) \begin{bmatrix} y_0 \\ u_0 \end{bmatrix} \quad (14)$$

gdzie:

$$\tilde{T}(A_2, B_2, N_1, M_1) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_m \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -M_1(\cdot) \\ N_1(\cdot) \end{bmatrix} \tilde{\Delta}^{-1}(\cdot) [A_2(\cdot) \quad B_2(\cdot)] \quad (15)$$

z macierzą „mianownikową” układu  $\tilde{\Delta}(\cdot)$  spełniającą prawostronne równanie macierzowe (3b).

Przyjęte formy opisu obiektu i regulatora oraz zastosowanie wielomianowego ujęcia rozpatrywanego problemu, umożliwia bardzo proste sformułowanie warunków „wewnętrznej” stabilności i „wewnętrznej” właściwości układu zamkniętego z rys. 1.

Zgodnie z twierdzeniem podanym w pracy [6] warunkami koniecznymi i wystarczającymi istnienia regulatora w postaci frakcyjnej *l.w.p.*  $M_2^{-1}(\cdot)N_2(\cdot)$ , dla którego układ z rys. 1. (w jego wersji podstawowej, z obiektem ściśle właściwym) będzie „wewnętrznie” stabilny, są:

- 1). względna, odpowiednio prawostronna i lewostronna pierwszość par (blokowych) macierzy wielomianowych występujących w części frakcyjnej macierzy transmitancji (13),
- 2). istnienie rozwiązania macierzowego równania wielomianowego (3a) dla pewnej macierzy wielomianowej  $\Delta(\cdot) \in R[\cdot]^{m \times m}$ , spełniającej warunki Hurwitza (lub warunki Schura dla układów z czasem dyskretnym), która musi być macierzą wielomianową kolumnowo-wierszowo zredukowaną.

Przy czym  $\Delta(\cdot) \in R[\cdot]^{m \times m}$  jest macierzą wielomianową wierszowo-kolumnowo zredukowaną wtedy, gdy istnieją dla niej takie indeksy wierszowe  $\bar{k}_i > 0$  i kolumnowe  $k_i > 0$ , że spełniona jest zależność

$$\Delta(s) = \text{diag}[s^{\bar{k}_i}] \Delta_i(s) \text{diag}[s^{k_i}], i = 1, 2, \dots, m. \quad (16)$$

W powyższej zależności  $\Delta_i(s) \in R(s)^{m \times m}$  jest macierzą transmitancji wymiernych dwu-właściwych (z ang. *biproper* lub *bicausal*) tj. taką macierzą właściwych transmitancji wymiernych, dla których jej inwersja  $\Delta_i^{-1}(s)$  jest również macierzą transmitancji właściwych.

W układach z obiektami ściśle właściwymi powyższe warunki są warunkami koniecznymi i wystarczającymi na to, aby układ z rys. 1. był również „wewnętrznie” właściwy [6]. Wtedy rozwiązania równania (3a) (minimalnego stopnia) względem pary macierzy wielomianowych  $M_2(\cdot) \in R[\cdot]^{m \times m}$  i  $N_2(\cdot) \in R[\cdot]^{m \times d}$  spełniają warunki (4) z macierzą  $M_2(\cdot)$  wierszowo zredukowaną. Wtedy również macierze współczynników wiodących odpowiednich macierzy wielomianowych, występujących po prawej i lewej stronie równania (3a), spełniają zależność

$$\Gamma(\Delta(\cdot)) = \Gamma_r(M_2(\cdot)) \Gamma_c(A_1(\cdot)). \quad (17)$$

Niestety przy obiektach, które nie są opisane macierzami transmitancji ściśle właściwymi, wypełnienie opisanych powyżej warunków nie gwarantuje, aby otrzymany, wielowymiarowy regulator modalny był zawsze właściwy (lub ściśle właściwy). Mimo ich spełnienia, przy obiekcie właściwym, mogą się zdarzać rozwiązania równania (3a), dające regulatory opisane niewłaściwymi macierzami transmitancji. [1, 3 i 4]. Jak wiadomo nie są one fizycznie realizowalne.

Aby pożądane cechy minimalnych rozwiązań równania (3a) były możliwe do osiągnięcia, potrzebny jest właściwy dobór (lub wręcz odgadnięcie) wartości współczynników  $\bar{k}_i > 0$  (indeksów wierszowych) macierzy wierszowo-kolumnowo zredukowanej  $\Delta(\cdot) \in R[\cdot]^{m \times m}$  – przy (zwykle) znanych indeksach kolumnowych  $k_i > 0$  równych indeksom sterowalności obiektu  $k_i = d_i = \text{deg}_s A_1(\cdot)$  – tak, aby spełnione były warunki (16).

Dla dualnej wersji rozpatrywanego układu sterowania, charakteryzowanego macierzą transmitancji (15), obowiązują analogiczne warunki „wewnętrznej” stabilności i „wewnętrznej” właściwości układu, przy czym dla ich osiągnięcia macierz wielomianowa  $\tilde{\Delta}(\cdot) \in R[\cdot]^{l \times l}$  w równaniu (3b) powinna być wierszowo-kolumnowo zredukowana, z indeksami wierszowymi  $\bar{k}_j > 0$  i kolumnowymi  $k_j > 0$ , spełniającymi zależność

$$\tilde{\Delta}(s) = \text{diag}[s^{\bar{k}_j}] \tilde{\Delta}_j(s) \text{diag}[s^{k_j}], j = 1, 2, \dots, l \quad (18)$$

w której  $\tilde{\Delta}_j(s) \in R(s)^{l \times l}$  jest macierzą transmitancji wymiernych dwu-właściwych (*biproper*). W tej wersji układu można przyjmować indeksy wierszowe macierzy  $\tilde{\Delta}(\cdot)$  równe (znany) indeksom obserwowalności obiektu  $\bar{k}_j = \bar{d}_j = \text{deg}_s A_2(\cdot)$ ,  $j = 1, 2, \dots, l$ . Problemem jest właściwy dobór indeksów kolumnowych  $k_j > 0$ , tak, aby otrzymany regulator modalny był opisany ma-

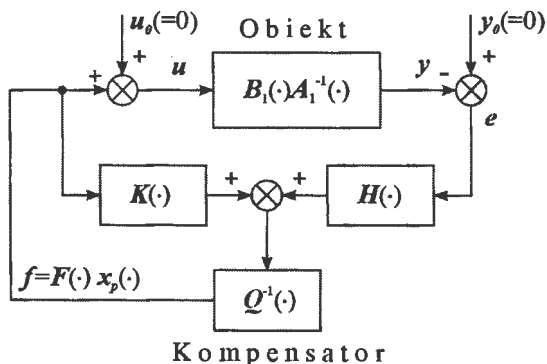


cierzą transmitancji właściwych (lub ściśle właściwych) w postaci frakcyjnej p.w.p.  $N_1(\cdot)M_1^{-1}(\cdot)$  z macierzą  $M_1(\cdot)$  kolumnowo zredukowaną.

### 3. SPOSOBY PROJEKTOWANIA UKŁADÓW STEROWANIA MODALNEGO

Korzystając z idei przesuwania (lokowania) biegunów układu zamkniętego w stabilne obszary zmiennej zespolonej „s” (lub „z”) za pomocą bezpośredniego (statycznego) sprzężenia zwrotnego od wektora stanu obiektu można określić macierz sprzężeń zwrotnych  $F$  dla której sprzężenie zwrotne  $\tilde{u} = -Fx$  daje możliwość „przesunięcia” biegunów układu zamkniętego w dowolny region płaszczyzny zespolonej „s” (lub „z”), o ile obiekt jest w pełni sterowalny [8, 9]. Przy braku dostępności pomiarowej wektora stanu obiektu  $x$  sprzężenie to może być zastąpione sprzężeniem  $\tilde{u} = -F\hat{x}$ , gdzie  $\hat{x} \in R^n$  jest wektorem stanu obserwatora Luenbergera pełnego rzędu (lub stacjonarnego filtru Kalmana), albo sprzężeniem  $\tilde{u} = -Fz + D_e$ , gdzie  $z \in R^n$  jest wektorem stanu funkcjonalnego obserwatora o zredukowanym rzędzie ( $n_1 < n$ ). Aby to było możliwe obiekt powinien być również obserwowalny (wykrywalny).

Strukturę takiego układu sterowania w ujęciu wielomianowym (w jego podstawowej wersji) przedstawia schemat blokowy na rys. 2.



Rys. 2. Struktura układu sterowania modalnego z wykorzystaniem obserwatora Luenbergera.

Na schemacie tym macierze transmitancji obserwatora w ujęciu wielomianowym przedstawione są za pomocą „trójki” macierzy wielomianowych  $Q(s)$ ,  $H(s)$  i  $K(s)$  zgodnie z zależnością:

$$f = Q^{-1}(s)K(s)\tilde{u} + Q^{-1}(s)H(s)e, \quad (19)$$

gdzie dla obserwatora pełnego rzędu (lub filtru Kalmana), zrealizowanego w postaci standardowych równań stanu i wyjść (25) (z wykorzystaniem „kopii” obiektu), obydwie macierze transmitancji określone są odpowiednio jako

$$Q^{-1}(s)K(s) = -F(sI_n - A + LC)^{-1}(B - LD) \quad (20)$$

i

$$Q^{-1}(s)H(s) = -F(sI_n - A + LC)^{-1}L, \quad (21)$$

gdzie  $L$ , jest macierzą „wzmocnień” obserwatora pełnego rzędu (stacjonarnego filtru Kalmana). Należy zauważyć, że macierze transmitancji (20) i (21) są zawsze ściśle właściwe, zarówno przy „właściwym” jak i „ściśle właściwym” obiekcie.

Łatwo sprawdzić, że macierze transmitancji (20) i (21) (określone zgodnie z wymaganiami twierdzenia „strukturalnego” Wolowicha) spełniają (lewostronne) macierzowe równanie wielomianowe

$$H(\cdot)B_1(\cdot) + K(\cdot)A_1(\cdot) = Q(\cdot)F(\cdot), \quad (22)$$

w którym

$$-F(\cdot) = C_1(\cdot) - A_1(\cdot) = -FT\hat{S}(\cdot), \quad (23)$$

gdzie  $\hat{T}$  jest (nieosobliwą) macierzą przekształcenia oryginalnych równań stanu i wyjść obiektu do drugiej postaci kanonicznej sterowalnej L-B.

Po uwzględnieniu, że „przyrostowa” część sygnału sterującego obiektem  $\tilde{u} = f$  i „zlikwidowaniu” tym samym wewnętrznej pętli sprzężenia widocznej na rys. 2, można otrzymać macierz transmitancji dla modalnego regulatora zbudowanego na bazie obserwatora pełnego rzędu (lub filtru Kalmana) w postaci frakcyjnej  $M_2^{-1}(\cdot)N_2(\cdot)$  (ściśle właściwej) z macierzami  $M_2(\cdot) = Q(\cdot) - K(\cdot)$  i  $N_2(\cdot) = -H(\cdot)$ . Macierze te spełniają macierzowe równanie wielomianowe (3a) (które jest równoważne równaniu (22)).

Realizacja tak określonego regulatora modalnego (pełnego rzędu) w postaci standardowych równań stanu i wyjść (i z wykorzystaniem oryginalnych macierzy opisu modelu obiektu w przestrzeni stanów) daje układ dynamiczny opisany równaniami:

$$\begin{aligned} \dot{x}_r(t) &= A_r x_r(t) + B_r e(t) \\ \tilde{u}(t) &= C_r x_r(t) + D_r e(t) \end{aligned} \quad (24)$$

gdzie:  $A_r = A - LC - (B - LD)F$ ,  $B_r = L$ ,  $C_r = -F$  i  $D_r = 0$ . Charakterystyczną cechą tak zrealizowanego regulatora modalnego jest to, że oprócz pełnienia funkcji regulacyjnych może on także „odtworzyć” (estymować) wektor stanu obiektu  $x_r(t) = \hat{x}(t) \rightarrow x(t)$ . Innym sposobem realizacji macierzy transmitancji  $M_2^{-1}(\cdot)N_2(\cdot)$  jest realizacja tego regulatora w odpowiedniej kanonicznej postaci równań stanu i wyjść (24) (z macierzą  $D_r = 0$ ), np. w drugiej postaci kanonicznej obserwowalnej L-B.

Można jeszcze zauważyć, że projektowanie tego rodzaju regulatorów modalnych pełnego rzędu (w podstawowej wersji układu) jest proste i można tego dokonać bez rozwiązywania jakichkolwiek macierzowych równań wielomianowych wg następującego sposobu.

### 3.1. Sposób I (Projektowanie ściśle właściwych regulatorów modalnych pełnego rzędu)

Sposób ten wynika wprost z rozważań dokonanych powyżej i dotyczy projektowania regulatorów pełnego rzędu, opisywanych ściśle właściwymi macierzami transmitancji. Do syntezy (projektowania) regulatorów wykorzystuje się bezpośrednio związki pomiędzy wielomianowymi opisami frakcyjnymi obiektu i jego opisami w przestrzeni stanów, a także opis (tożsamościowego) obserwatora pełnego rzędu, lub (stacjonarnego) filtru Kalmana w postaci ich standardowych równań stanu i wyjść:

$$\begin{aligned}\dot{\hat{x}}(t) &= (A - LC)\hat{x}(t) + (B - LD)\tilde{u}(t) + Le(t) \\ f(t) &= -F\hat{x}(t)\end{aligned}\quad (25)$$

W ujęciu wielomianowym dla otrzymania układu zamkniętego o z góry zadanych (stabilnych) wartościach biegunów można wygenerować diagonalną macierz o stopniach zgodnych z indeksami sterowalności obiektu  $d_i$  i macierzą kolumnowych współczynników wiodących  $\Gamma_c(C_d(\cdot)) = I_m$ . W przypadku układów ciągłych będzie to

$$C_d(s) = \text{diag}[c_i(s), i = 1, 2, \dots, m] \quad (26)$$

gdzie:

$$c_i(s) = \prod_{j=1}^{d_i} (s - s_j), \quad (27)$$

w których  $s_j$  są stabilnymi wartościami biegunów układu zamkniętego. Otrzymaną macierz należy pomnożyć lewostronnie przez macierz liczbową  $X = \Gamma_c(A_1(\cdot))$ , skąd otrzyma się macierz wielomianową

$$C_1(\cdot) = X C_d(\cdot) \quad (28)$$

o kolumnowej strukturze w pełni zgodnej ze strukturą macierzy mianownikowej obiektu  $A_1(\cdot) \in R[\cdot]^{m \times m}$ . Na jej podstawie z zależności (23) wyznacza się macierz sprzężeń zwrotnych  $F$ .

Podobnie, na podstawie znajomości wskaźników obserwowalności  $\bar{d}_j, j = 1, 2, \dots, l$  obiektu, generuje się diagonalną macierz

$$\bar{C}_d(s) = \text{diag}[\bar{c}_i(s), i = 1, 2, \dots, l] \quad (29)$$

gdzie:

$$\bar{c}_i(s) = \prod_{j=1}^{\bar{d}_i} (s - s_j) \quad (30)$$

dla przyjętych wartości biegunów  $s_j$  obserwatora. Mnożąc tę macierz prawostronnie przez macierz liczbową  $Y = \Gamma_r(A_2(\cdot))$ , otrzyma się

$$C_2(\cdot) = \bar{C}_d(\cdot)Y, \quad (31)$$

z której, w sposób dualny wyznacza się macierz „wzmocnień”  $L$  obserwatora Luenbergera ze wzoru:

$$\bar{S}(\cdot)\bar{T}L = C_2(\cdot) - A_2(\cdot), \quad (32)$$

gdzie  $\bar{T}$  jest (nieosobliwą) macierzą przekształcenia oryginalnych równań stanu i wyjść obiektu do II-giej postaci kanonicznej obserwowalnej L-B.

W przypadku konieczności korzystania z filtru Kalmana macierz wielomianowa  $C_2(\cdot)$  potrzebną do wzoru (32) otrzymuje się przez faktoryzację widmową (lewostronną) odpowiednio określonego wyrażenia. Wynikiem tej faktoryzacji (z wykorzystaniem różnych algorytmów dla układów z czasem ciągłym i dyskretnym) ma taką samą strukturę (wierszową) jak macierz  $A_2(\cdot)$ .

Wyznaczenie macierzy  $F$  i  $L$  z zależności (23) i (32) kończy projektowanie (ściśle właściwego) regulatora, który jest realizowany w dziedzinie czasowej w postaci standardowych równań stanu i wyjść z „kopią” obiektu (24) (lub równoważnie w postaci (25)).

Gdyby istniała potrzeba realizacji tego samego regulatora (24) w postaci kanonicznych równań stanu, można (dla znanych macierzy  $F$  i  $L$ ) wyznaczyć lewostronne postaci frakcyjne macierzy transmitancji (20) i (21) i obliczyć macierze  $M_2(\cdot) = Q(\cdot) - K(\cdot)$  i  $N_2(\cdot) = -H(\cdot)$ . Tak otrzymane macierze wielomianowe  $M_2(\cdot)$  i  $N_2(\cdot)$  spełniają macierzowe równanie wielomianowe (3a), którego prawą stroną jest macierz  $\Delta(\cdot) = Q(\cdot)C_1(\cdot)$ . Jej struktura jest zgodna ze wszystkimi wymaganiami opisanymi zależnością (16), przy czym indeksy: kolumnowe  $k_i = \deg_{ci} C_1(\cdot) = \deg_{ci} A_1(\cdot) = d_i$  oraz wierszowe  $\bar{k}_i = \deg_n Q(\cdot)$  ( $= \deg_n M_2(\cdot)$ ). Dzięki czemu spełniona jest również zależność (17). Jeśli otrzymana macierz transmitancji  $M_2^{-1}(\cdot)N_2(\cdot)$  spełniać będzie warunki twierdzenia strukturalnego Wolowicha, to można ją będzie zrealizować w przestrzeni stanów w II-giej postaci kanonicznej obserwowalnej L-B.

Szczególne znaczenie nabiera tu fakt, że wierszowe indeksy macierzy  $\Delta(\cdot)$ ,  $\bar{k}_i = \deg_n Q(\cdot)$  – które mają decydujący wpływ na strukturę wyznaczanego regulatora, a zwłaszcza na jego macierz mianownikową  $M_2(\cdot)$  – przyjmują wartości równe wskaźnikom obserwowalności pary macierzy  $(A - LC)$  i  $(-F)$ . Jeśli elementy macierzy  $L$  i  $F$ , na skutek zmian parametrów obiektu będą zmienne, to zmieniać się mogą także wspomniane wskaźniki obserwowalności, mimo przyjęcia stałych wartości biegunów (układu i obserwatora) przy niezmiennym wyznaczniku  $\det \Delta(\cdot)$ . Dlatego, aby regulatory modalne pełnego rzędu były zawsze ściśle właściwe, prawa strona macierzowego równania (3a) musi być zmienna. Zmieniać się w niej mogą nie tylko współczynniki poszczególnych elementów macierzy  $\Delta(\cdot)$ , ale także wierszowa struktura tej macierzy (i kolumnowa, jeśli zmieniać się będzie także struktura macierzy mianownikowej  $A_1(\cdot)$  obiektu).

Przedstawiony sposób projektowania jest koncepcyjnie prosty. Nie wymaga rozwiązywania jakichkolwiek rów-

nań wielomianowych oraz pozwala w sposób celowy i przewidywalny lokować bieguny układu zamkniętego „przypisane” do określonych wejść wielowymiarowego obiektu (a także lokować bieguny obserwatora związane z określonymi wyjściami obiektu). W układach wielowymiarowych jest to istotne, ponieważ kolejność „wczytywania” wartości biegunów może mieć duży wpływ na właściwości dynamiczne projektowanego układu.

Korzystanie z tego sposobu postępowania w trakcie adaptacji wielowymiarowego układu sterowania jest jednak mocno utrudnione z powodu dużego nakładu obliczeń numerycznych, które muszą być wykonywane wielokrotnie podczas wyznaczania obydwu opisów frakcyjnych obiektu (6) i (7) (dla wyznaczenia macierzy  $A_1(\cdot)$  i  $A_2(\cdot)$  w każdym kroku adaptacji). A przecież trzeba jeszcze wykonać obliczenia związane z identyfikacją parametrów (liniowego) modelu obiektu.

Ponieważ (zmieniające się) parametry obiektu muszą być identyfikowane na bieżąco, w trybie *on-line*, problemem jest również wybór właściwego opisu modelu obiektu, łatwego do identyfikacji i użytecznego w procesie projektowania (strojenia układu). Dla omawianego sposobu projektowania regulatorów naturalnym opisem (liniowego) modelu obiektu, jest opis w przestrzeni stanów (zgodny ze zlinearyzowanymi równaniami stanu i wyjść oryginalnego opisu obiektu).

### 3.2. Sposób II (Projektowanie właściwych regulatorów modalnych pełnego rzędu)

Biorąc pod uwagę wymienione powyżej fakty i kłopoty związane z dużą ilością obliczeń koniecznych do wykonania podczas adaptacji można zrezygnować z regulatorów ściśle właściwych, stosując inny sposób projektowania (strojenia) regulatorów pełnego rzędu, bardziej przydatny do realizacji w procesie adaptacyjnego sterowania. Polega on na wielokrotnym rozwiązywaniu macierzowego równania (3a) przy odpowiednio dobranej i nie zmieniającej się prawej stronie tego równania.

Dla tego drugiego sposobu postępowania, przed rozpoczęciem właściwego procesu adaptacji, po dobraniu odpowiednich zestawów (stabilnych) wartości biegunów dla układu zamkniętego i obserwatora Luenbergera, należy (jednokrotnie) wyznaczyć macierz  $C_1(\cdot) \in R[\cdot]^{m \times m}$  o stopniach  $\deg_{\sigma} C_1(\cdot) = \deg_{\sigma} A_1(\cdot) = d_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$  przy jednakowych  $\Gamma_c(C_1(\cdot)) = \Gamma_c(A_1(\cdot))$  oraz macierz  $Q(\cdot) \in R[\cdot]^{m \times m}$  o wierszowych stopniach  $\bar{r}_i = \deg_{\sigma} Q(\cdot)$  równych wskaźnikom obserwowalności pary macierzy liczbowych  $A - LC$  i  $-F$ . Następnie obliczyć wierszowo-kolumnowo zredukowaną macierz  $\Delta(\cdot) = Q(\cdot)C_1(\cdot)$  o indeksach: wierszowych  $\bar{k}_i = \bar{r}_i$  i kolumnowych  $k_i = d_i$ , spełniających zależność (16), która stanowić będzie prawą stronę macierzowego (lewostronnego) równania wielomianowego (3a).

Macierze te można obliczyć tak jak w pierwszym sposobie postępowania, tzn. poprzez wyznaczenie macierzy

$F$  i  $L$  z zależności (23) i (32), dla typowych (nominalnych) wartości parametrów sterowanego obiektu (jego liniowego modelu) oraz stosownie dobranych do nich (np. drogą symulacji) wartości biegunów i dokonanie faktoryzacji (20) i (21).

Inną metodą może też być bezpośrednie wygenerowanie macierzy  $Q(\cdot)$ , dla znanych (wierszowych) stopni  $\deg_{\sigma} Q(\cdot) = \bar{r}_i$  (w sposób podobny jak była generowana macierz  $C_2(\cdot)$  zgodnie z zależnościami (28)-(30)) przy niezmiennym sposobie generowania macierzy  $C_1(\cdot)$ . Mianowicie, dla znanych stopni  $\bar{r}_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$  należy wyznaczyć najpierw diagonalną macierz

$$\bar{Q}_d(s) = \text{diag}[\bar{q}_i(s), i = 1, 2, \dots, m] \quad (33)$$

w której

$$\bar{q}_i(s) = \prod_{j=1}^{\bar{r}_i} (s - s_j) \quad (34)$$

gdzie:  $s_j$  są przyjętymi wartościami biegunów obserwatora. Następnie pomnożyć ją prawostronnie przez odpowiednio przyjętą, nieosobliwą macierz  $Y = \Gamma_r(Q(\cdot))$

$$Q(\cdot) = \bar{Q}_d(\cdot)Y \quad (35)$$

Tak otrzymana macierz  $Q(\cdot)$  (wraz z macierzą  $C_1(\cdot)$ ) definiuje macierz  $\Delta(\cdot)$  wierszowo-kolumnowo zredukowaną, występującą po prawej strony równania (3a). Macierz występująca w zależności (35), można przyjąć np. w postaci lewego dolnego trójkąta z jedynkami na przekątnej. Wtedy macierz transmitancji  $M_2^{-1}(\cdot)N_2(\cdot)$  dla otrzymanego regulatora modalnego będzie miała postać spełniającą warunki twierdzenia „strukturalnego” Wolowicha.

Wyznaczanie regulatorów dla zmieniającego się modelu obiektu (adaptacja układu) polegać będzie wtedy na wielokrotnym rozwiązywaniu macierzowego równania (3a) przy „stałej” jego prawej stronie. Zmienne parametry (liniowego) modelu obiektu opisanego w postaci frakcji ułamkowej  $B_1(\cdot)A_1^{-1}(\cdot)$  powinny być identyfikowanego na bieżąco w trybie *on-line*. Dopóki zmiany parametrów modelu obiektu nie będą duże i nie zmieni się kolumnowa struktura macierzy  $A_1(\cdot)$  i nie naruszona będzie zgodność „struktury” lewej i prawej strony równania (3a), istnieje duża szansa, aby macierze transmitancji  $M_2^{-1}(\cdot)N_2(\cdot)$  tak otrzymywanego regulatora modalnego były właściwe. Wtedy można je będzie realizować w postaci odpowiednich (kanonicznych) równań stanu i wyjść (24), przy czym zwykle w tych realizacjach regulatorów macierz  $D_r \neq 0$ .

Zaletą tego sposobu postępowania jest mniejszy niż poprzednio nakład obliczeń wykonywanych podczas adaptacji układu sterowania. Jeśli postać frakcyjna opisu modelu obiektu  $B_1(\cdot)A_1^{-1}(\cdot)$  będzie zgodna z warunkami określonymi twierdzeniem „strukturalnym” Wolowicha – tzn. spełnione będą warunki zależności (6)

– to do identyfikacji parametrów obiektu można przyjąć wprost jego model w przestrzeni stanów w II-giej postaci kanonicznej sterowalnej L-B. Dla takiej (regulatorowej) postaci równań stanu i wyjść – z klatkami (blokami) Frobeniusa na przekątnej głównej macierzy  $\hat{A}$  – wartości współczynników wielomianowego opisu frakcyjnego (6) są często tożsame (np. przy  $B_m^{-1} = I_m$  i  $D = 0$ ) z wartościami odpowiednich elementów macierzy  $\hat{A}$ ,  $\hat{B}$ ,  $\hat{C}$  kanonicznych równań stanu i wyjść. Dzięki temu można uniknąć (wielokrotnego) przekształcania opisu z przestrzeni stanów w wielomianowy opis frakcyjny, przy czym w tych (odpowiadających sobie) postaciach opisu modelu obiektu, występuje minimalna liczba parametrów podlegających identyfikacji.

Poza tym dzięki strukturze macierzy  $\hat{A}$  – z diagonalnymi blokami macierzowymi w postaci Frobeniusa – macierz ta posiada zwykle własność cykliczności (z ang. *cyclic*) [9], co zwiększa możliwość uzyskiwania wyników identyfikacji minimalizujących globalnie przyjęte wskaźniki jakości identyfikacji.

### 3.3. Sposób III (Projektowanie właściwych regulatorów modalnych zredukowanego rzędu)

Trzecim możliwym sposobem projektowania wielowymiarowych regulatorów modalnych w układach regulacji adaptacyjnej jest synteza regulatorów zbudowanych na bazie obserwatorów funkcjonalnych o zredukowanym rzędzie  $n_1 < n$ . W wersji podstawowej układu, tj. gdy opis obiektu przyjęty jest w postaci *p.w.p.* frakcji ułamkowej  $B_1(\cdot)A_1^{-1}(\cdot)$  można wykorzystać tzw. kompensator Wolowicha [12], o strukturze jak przedstawiono na rys.2. Rząd tego kompensatora (i zbudowanego na jego bazie regulatora modalnego) wynosi  $n_1 = m(\nu - 1)$ , gdzie  $\nu = \max\{\bar{d}_j, j = 1, 2, \dots, l\}$ .

Wyznaczanie parametrów takiego zredukowanego regulatora modalnego podczas adaptacyjnego sterowania obiektem polega na rozwiązywaniu macierzowego równania wielomianowego (3a), po prawej stronie, którego występuje  $\Delta(\cdot) = Q(\cdot)C_1(\cdot)$  z macierzą  $Q(\cdot) \in R[\cdot]^{m \times m}$  dobieraną w regularnej postaci, tj. o jednakowych stopniach wierszowych  $\bar{r}_i = \bar{k}_i = \nu - 1$ . Dla układów z czasem ciągłym ma ona postać:

$$Q(s) = \begin{bmatrix} s^{\nu-1} & 0 & \dots & 0 & q_{1m}(s) \\ -1 & s^{\nu-1} & \dots & 0 & q_{2m}(s) \\ 0 & -1 & \dots & 0 & q_{3m}(s) \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & -1 & s^{\nu-1} + q_{mm}(s) \end{bmatrix} \quad (36)$$

gdzie:

$$q_{im}(s) = \sum_{j=0}^{\nu-2} a_{(i-1)(\nu-1)} s^j, \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (37)$$

i swobodnie zadawanym wyznaczniku

$$\det Q(s) = a_0 + a_1 s + \dots + a_{m\nu-m-1} s^{m\nu-m-1} + s^{m(\nu-1)} = \prod_{i=1}^m (s - s_i) \quad (38)$$

Identyczną strukturę macierzy  $Q(z)$  można przyjmować dla układów z czasem dyskretnym.

Macierz  $Q(\cdot)$  ma stałą strukturę o jednakowych wierszowych stopniach  $\bar{r}_i = \nu - 1$  oraz  $\Gamma_r(Q(\cdot)) = I_m$ , a także niezmiennie wartości współczynników wielomianów zależne wyłącznie od zadawanych (stabilnych) wartości biegunów  $s_i$  obserwatora. Macierz  $C_1(\cdot)$  dobierana jest tak samo jak w poprzednio omówionych sposobach postępowania i może się zmieniać, jeśli zmianie ulegnie struktura macierzy  $A_1(\cdot)$ .

Dopóki zmiany wartości parametrów liniowego modelu obiektu nie spowodują zmiany (kolumnowej) struktury macierzy  $A_1(\cdot)$  tak długo rozwiązania (minimalnego stopnia) równania (3a), przy niezmiennej jego prawej stronie, dawać będą właściwe macierze transmitancji  $M_2^{-1}(\cdot)N_2(\cdot)$  dla adaptacyjnego regulatora modalnego. Ich realizacje „czasowe” (24), mogą być wyznaczane np. w drugiej postaci kanonicznej obserwowalnej L-B. Prawie zawsze mają one macierz tranzycyjną  $D, \neq 0$ . Liniowym modelem obiektu wykorzystywanym podczas bieżącej identyfikacji może być jego kanoniczny opis w przestrzeni stanów, np. w II-giej postaci kanonicznej sterowalnej L-B, podobnie jak było to w drugim sposobie postępowania.

Niestety przedstawiony sposób postępowania (a ściślej mówiąc przyjęty sposób generowania macierzy  $Q(\cdot)$ ) nie gwarantuje osiągnięcia minimalnego rzędu regulatora  $n_1 < n$  i jest możliwy do wykorzystania w zasadzie tylko dla obiektów o  $m < l$ . Przy dużej liczbie wejść  $m$  obiektu i mocno zróżnicowanych wierszowych stopniach  $\bar{d}_j$  macierzy  $A_1(\cdot)$  rząd regulatora  $n_1 = m(\nu - 1)$  może przewyższyć rząd obiektu, co czyni wyniki projektowania bezsensownymi. Aby temu zapobiec można stosować np. metody opisane w pracy [9]. Nie są to jednak metody proste obliczeniowo, które można wprost stosować w układach regulacji adaptacyjnej.

### 3.4. Sposób IV (Projektowanie regulatorów modalnych w dualnej wersji układu)

Zaletą podstawowej wersji układów sterowania modalnego z obiektem opisywanym macierzą transmitancji w postaci frakcyjnej  $B_1(\cdot)A_1^{-1}(\cdot)$  jest jasna interpretacja roli macierzy  $Q(\cdot)$  i  $C_1(\cdot)$  występujących po prawej stronie (lewostronno) macierzowego równania (3a). Wadą jest sam opis obiektu w postaci  $B_1(\cdot)A_1^{-1}(\cdot)$ , ponieważ struktura tego opisu nie ma bezpośredniego związku z strukturą opisu w postaci równań różniczkowych (różnicowych) typu „wejścia-wyjścia”, które są najbardziej typową formą opisu układów dynamicznych

podlegających identyfikacji. Ponadto, jeśli opis ten nie jest wyznaczany w oparciu o twierdzenie „strukturalne” Wolovicha trudno jest w nim doszukać się czytelnych związków pomiędzy wartościami współczynników wielomianów w opisie frakcyjnym i wartościami elementów macierzy liczbowych odpowiadającego mu opisu w przestrzeni stanów. Nie można zatem przy takim opisie modelu obiektu zastosować (bez dodatkowego nakładu obliczeń) żadnej ze znanych metod identyfikacji wielowymiarowych układów dynamicznych.

W odróżnieniu od tego dualny opis modelu obiektu w *l.w.p.* postaci frakcyjnej  $A_2^{-1}(\cdot)B_2(\cdot)$  ma bezpośredni związek z opisem w formie równań różniczkowych (odpowiednio różnicowych) typu „wejścia-wyjścia”. Są nimi powszechnie znane w zagadnieniach identyfikacji modele ARMA

$$A_2(\cdot)y = B_2(\cdot)u. \quad (39)$$

Dla tej formy opisu modelu obiektu łatwiej jest znaleźć odpowiedni algorytm identyfikacji, umożliwiający bezpośrednią identyfikację współczynników wielomianów występujących w tym opisie (i odpowiadających im współczynników równań typu „wejścia-wyjścia” w dziedzinie czasowej). Niezależnie od powyższego, jeśli opis frakcyjny  $A_2^{-1}(\cdot)B_2(\cdot)$  modelu obiektu ma strukturę taką jak podano w zależnościach (7) i (9), to istnieją dla niego również bezpośrednie związki pomiędzy współczynnikami wielomianów i elementami macierzy liczbowych kanonicznego opisu w przestrzeni stanów. Są one analogiczne do wcześniej prezentowanych związków opisów frakcyjnych prawostronnych z opisem kanonicznym w przestrzeni stanów, wynikających z zależności (6) i (8), co również daje możliwość identyfikacji parametrów bezpośrednio w modelach z przestrzeni stanów. Dlatego w „wielomianowym przyborniku” pakietu Matlab [13] preferuje się sposób projektowania (i analizy) wielowymiarowych układów sterowania modalnego w wersji dualnej, tj. opisanych zależnościami (14), (15) i (18).

Niestety przy syntezie wielowymiarowych regulatorów modalnych w tej wersji opisów obiektu i regulatora, która wymaga rozwiązywania macierzowego (prawostronnego) równania wielomianowego (3b), powstaje problem wyboru odpowiedniej struktury dla (stabilnej) macierzy  $\tilde{A}(\cdot) \in R[\cdot]^{l \times l}$ , wierszowo-kolumnowo zredukowanej. W instrukcji [13] mówi się wręcz o „odgadywaniu” (metodą prób i błędów) wierszowych  $\bar{k}_j$  i kolumnowych  $k_j, j=1,2,\dots,l$  indeksów tej macierzy tak, by rozwiązania równania (3b) dawały właściwe macierze transmitancji  $N_1(\cdot)M_1^{-1}(\cdot)$ .

Aby struktury prawej strony równania (3b) nie trzeba było „odgadywać” proponuje się następujący sposób postępowania.

1). Zaprojektować (jednokrotnie) układ regulacji modalnej w wersji podstawowej dla typowych (nominalnych) wartości parametrów modelu obiektu, da-

nego w postaci liniowych równań stanu i wyjść. Można tego dokonać, wykorzystując jeden z podanych poprzednio sposobów postępowania.

2). Dysponując opisem modelu obiektu (z „typowymi” nominalnymi wartościami parametrów) w postaci *p.w.p.* frakcji  $B_1(\cdot)A_1^{-1}(\cdot)$  oraz wyznaczonego dla niego regulatora modalnego w postaci *l.w.p.* frakcji  $M_2^{-1}(\cdot)N_2(\cdot)$ , należy je przekształcić odpowiednio do postaci:

$$B_1(\cdot)A_1^{-1}(\cdot) \rightarrow A_2^{-1}(\cdot)B_2(\cdot) \quad (40)$$

oraz

$$M_2^{-1}(\cdot)N_2(\cdot) \rightarrow N_1(\cdot)M_1^{-1}(\cdot). \quad (41)$$

3). Dla znanych macierzy  $A_2(\cdot)$ ,  $B_2(\cdot)$ ,  $N_1(\cdot)$  i  $M_1(\cdot)$  obliczyć macierz  $\tilde{A}(\cdot) \in R[\cdot]^{l \times l}$  z zależności

$$\tilde{A}(\cdot) = A_2(\cdot)M_1(\cdot) + B_2(\cdot)N_1(\cdot). \quad (42)$$

Znając indeksy wierszowe  $\bar{k}_j = \deg_{\eta} A_2(\cdot) = \bar{d}_j$ , wyznaczyć indeksy kolumnowe  $k_j = \deg_{\sigma} M_1(\cdot)$  oraz macierz współczynników wiodących  $\Gamma(\tilde{A}(\cdot))$ . Sprawdzić czy miejsca zerowe wyznacznika  $\det \tilde{A}(\cdot) = 0$  są równe wcześniej przyjętym wartościom biegunów dla układu i obserwatora.

Przy znanych indeksach  $\bar{k}_j$  i  $k_j$  oraz  $\Gamma(\tilde{A}(\cdot))$  dokonać ewentualnej korekty elementów tej macierzy tak, aby jej miejsca zerowe były zgodne z założonymi wartościami biegunów.

Dla tak przygotowanej macierzy  $\tilde{A}(\cdot)$  dalszy proces wyznaczania parametrów regulatora modalnego  $N_1(\cdot)M_1^{-1}(\cdot)$  podczas adaptacyjnego sterowania polega na wielokrotnym rozwiązywaniu macierzowego równania wielomianowego (3b) przy zmieniających się parametrach identyfikowanego modelu obiektu ARMA (39). Dopóki zmiany wartości parametrów liniowego modelu obiektu nie spowodują zmiany (wierszowej) struktury macierzy  $A_2(\cdot)$  istnieje duża szansa, aby rozwiązania (minimalnego stopnia) równania (3b), przy niezmiennych jego prawej stronie, dawały właściwe macierze transmitancji  $N_1(\cdot)M_1^{-1}(\cdot)$  adaptacyjnego regulatora modalnego. Realizacje „czasowe” (24) takiego adaptacyjnego regulatora, mogą być wyznaczane np. w drugiej postaci kanonicznej sterowalnej L-B. Prawie zawsze będą one miały macierze tranzycyjne  $D_r \neq 0$ .

Należy zauważyć, że gdyby choć jeden z elementów układu tj. obiekt lub otrzymany regulator, był opisany macierzą transmitancji właściwych, to przez analogię do wcześniej przeprowadzonych rozważań (wynikających z twierdzenia przedstawionego w pracy [5]) powinien być spełniony związek

$$\Gamma(\tilde{A}(\cdot)) = \Gamma_r(A_2(\cdot))\Gamma_c(M_1(\cdot)), \quad (43)$$

analogiczny do zależności (17).

W przypadku, gdy obydwa elementy układu będą tylko właściwe, związek powyższy zwykle nie będzie spełniony. Wtedy do obliczeń regulatora macierz  $\tilde{A}(\cdot)$  musi być przyjęta bezpośrednio w takiej postaci, jaką otrzyma się podczas obliczeń w kroku 3).

Należy jeszcze zauważyć, że omówiony sposób ustalania struktury macierzy  $\tilde{A}(\cdot)$  można stosować zarówno dla regulatorów pełnego rzędu jak i regulatorów o zredukowanym rzędzie.

#### 4. UWAGI KOŃCOWE

Skuteczność przedstawionych sposobów postępowania przy projektowaniu wielowymiarowych regulatorów modalnych przydatnych w układach sterowania adaptacyjnego zależy od wielkości zmian parametrów liniowych modeli sterowanych obiektów. Jeśli zmiany parametrów obiektu będą radykalne tzn. takie, że zmieniać się będzie struktura ich wielomianowych opisów frakcyjnych to naruszona zostaje zgodność struktury stron macierzowego równania wielomianowego, odpowiednio lewostronnego bądź prawostronnego. Utrzymanie niezmienniczej prawej strony tych równań jest wtedy niemożliwe, ponieważ spowoduje to prawie natychmiast utratę cechy „wewnętrznej” właściwości układu sterowania. Aby temu zapobiec konieczne jest wtedy ponowne dobieranie odpowiedniej macierzy  $A(\cdot)$  lub  $\tilde{A}(\cdot)$  wierszowo-kolumnowo zredukowanej, zwykle przy tych samych (stabilnych) wartościach biegunów układu i obserwatora. Pierwszą oznaką pogarszania się sytuacji mogą być zmieniające się macierze współczynników wiodących  $\Gamma_c(A_1(\cdot))$  lub  $\Gamma_r(A_2(\cdot))$  macierzy „mianownikowych” modelu obiektu, a w skrajnych przypadkach kolumnowe lub wierszowe stopnie tych macierzy.

Kolejne realizacje w dziedzinie czasowej zaprojektowanych regulatorów modalnych o coraz to innych parametrach, może powodować dodatkowe perturbacje w działaniu układu, spowodowane niezgodnością (nieciągłością) sygnałów sterujących i zmiennych stanu regulatora.

Przykłady ilustrujące działanie omówionych sposobów projektowania dla podstawowej wersji układu z czasem ciągłym przedstawione są w pracy [4] (wraz z wynikami symulacji zaprojektowanych układów). Próbę praktycznego wykorzystania omówionych sposobów postępowania dla układów z czasem dyskretnym dla przyjętego (znanego) modelu statku wiertniczego, również w podstawowej wersji układu, przedstawiono w [5]. W pracy tej zaprojektowano regulatory modalne z wykorzystaniem *dead-beat*’owych obserwatorów Luenbergera (pełnego i zredukowanego rzędu). Działanie tych układów i właściwości otrzymanych regulatorów (podobnych do ciągłych wielowymiarowych regulatorów PD) będą przedstawione podczas obrad na Konferencji. Przykład ilustrujący przebieg obliczeń wg sposobu czwartego, dla dualnej wersji projektowanego układu,

przedstawiony będzie również podczas obrad Krajowej Konferencji Automatyki.

#### ON DESIGNING MULTIVARIABLE ADAPTIVE CONTROL SYSTEMS

**Abstract:** The paper deals with problems encountered when designing and implementing (in time domain) adaptive control systems in feedback multivariable dynamic systems employing the pole placement approach. Some cases of modal control using full-order and functional reduced-order Luenberger observers (as well as stationary Kalman filter) are considered against the background of general requirements that are imposed on multivariable feedback-based systems. Techniques for designing modal controllers in the s-domain or z-domain and their implementation in time-domain being suitable for adaptive control are given.

#### Literatura

- [1] Bańka S. (1991) Komputerowa synteza złożonych wielowymiarowych układów automatycznego sterowania w ujęciu wielomianowym. *Prace Naukowe Politechniki Szczecińskiej, Instytut Automatyki Przemysłowej*, 454/14, Szczecin.
- [2] Bańka S. (1996) Symulacja cyfrowa układów dynamicznych z algebraicznymi pętłami sprzężeń zwrotnych. *Prace IX Symposium „Symulacja procesów dynamicznych”*, Zakopane, 65-70.
- [3] Bańka S. (2002) Macierzowe równania wielomianowe w wielowymiarowych układach automatyki ze sprzężeniem zwrotnym. *Materiały XIV KKA, Zielona Góra*, 1, 119-128.
- [4] Bańka S., Dworak P. (2004) Sterowanie adaptacyjne w wielowymiarowych układach dynamicznych. *Pomiary Automatyka Kontrola*, 1, 19-24.
- [5] Bańka S., Dworak P. (2004) Adaptive control of the model of a drilling vessel. 11. *Symposium Maritime Elektrotechnik, Elektronik und Informationstechnik*, Rostock, 87-92.
- [6] Callier F.M., Desoer C.A. (1982) *Multivariable Feedback Systems*. Springer Verlag, New York.
- [7] Grimble M.J., Kučera V. (1996) *Polynomial Methods for Control Systems Design*. Springer Verlag, London.
- [8] Kaczorek T. (1993) *Teoria sterowania i systemów*. PWN, Warszawa.
- [9] Kaczorek T., Dzieliński A., Dąbrowski W., Łopata R. (2005) *Podstawy teorii sterowania*. WNT, Warszawa.
- [10] Rao S.K., Chen B.S. (1987) Design of minimal degree compensator with assignable poles or structure. *Automatica*, 23, 241-245.
- [11] Stefanidis P., Papliński A.P., Gibbard M.J. (1992) *Numerical Operations with Polynomial Matrices. Application to Multi-Variable Dynamic Compensator Design*. Springer Verlag, Berlin.
- [12] Wolovich W.A. (1974) *Linear Multivariable Systems*. Springer Verlag, New York.
- [13] *The Polynomial Toolbox 2 for use with Matlab®5. Manual*, Prague, 1999.



**Instytut Badań Systemowych  
Polskiej Akademii Nauk**

**ISBN 83-89475-02-2**