XV Krajowa Konferencja Automatyki

Tom I

KKA 2005

Redaktorzy:
Zdzisław Bubnicki
Roman Kulikowski
Janusz Kacprzyk

XV Krajowa
Konferencja Automatyki
Tom I

KKA
2005

Redaktorzy:
Zdzisław BUBNICKI
Roman KULIKOWSKI
Janusz KACPRZYK

ORGANIZATOR
Komitet Automatyki i Robotyki Polskiej Akademii Nauk
Instytut Badań Systemowych Polskiej Akademii Nauk

WSPÓŁORGANIZATORZY
Politechnika Warszawska
Przemysłowy Instytut Automatyki i Pomiarów
Polskie Stowarzyszenie Pomiarów, Automatyki i Robotyki

ORGANIZATOR

Komitet Automatyki i Robotyki Polskiej Akademii Nauk
Instytut Badań Systemowych Polskiej Akademii Nauk

WSPÓŁORGANIZATORZY

Politechnika Warszawska
Przemysłowy Instytut Automatyki i Pomiarów
Polskie Stowarzyszenie Pomiarów, Automatyki i Robotyki

KOMITET PROGRAMOWY

Przewodniczący	Zdzisław BUBNICKI
Zastępca Przewodniczącego	Roman KULIKOWSKI

CZŁONKOWIE

Stanisław BAŃKA
Mikołaj BUSŁOWICZ
Ryszard GESSING
Jakub GUTENBAUM
Stanisław KACZANOWSKI
Janusz KACPRZYK
Józef KORBICZ
Krzysztof KOZŁOWSKI
Krzysztof KUŹMIŃSKI
Krzysztof MALINOWSKI
Antoni NIEDERLIŃSKI
Tadeusz PUCHAŁKA
Stanisław SKOCZOWSKI
Jerzy ŚWIĄTEK
Ryszard TADEUSIEWICZ
Krzysztof TCHOŃ
Jan WĘGLARZ
Michał BIAŁKO
Władysław FINDEISEN
Henryk GÓRECKI
Jerzy JÓZEFCZYK
Tadeusz KACZOREK
Jerzy KLAMKA
Zbigniew KOWALSKI
Juliusz L. KULIKOWSKI
Kazimierz MALANOWSKI
Wojciech MITKOWSKI
Władysław PEŁCZEWSKI
Leszek RUTKOWSKI
Roman SŁOWIŃSKI
Andrzej ŚWIERNIAK
Piotr TATJEWSKI
Leszek TRYBUS
Andrzej P. WIERZBICKI

KOMITET ORGANIZACYJNY

Przewodniczący	Roman KULIKOWSKI
Zastępcy Przewodniczącego	Janusz KACPRZYK Stanisław KACZANOWSKI Tadeusz KACZOREK Krzysztof MALINOWSKI
Członkowie	Roman OSTROWSKI Tadeusz PUCHAŁKA Dariusz WAGNER
Sekretarze naukowi	Jan STUDZIŃSKI Jan W. OWSIŃSKI

ISBN 83-89475-00-6

Druk: ARGRAF, Warszawa

STEROWANIE OPTYMALNE
I ADAPTACYJNE

WYKORZYSTANIE NIERÓWNOŚCI RÓŻNICZKOWYCH W ADAPTACYJNYM STEROWANIU NIELINIOWYM

Andrzej DZIELIŃSKI

Politechnika Warszawska, Wydział Elektryczny,
Instytut Sterowania i Elektroniki Przemysłowej,
ul. Koszykowa 75, 00-662 Warszawa, e-mail: adziel@isep.pw.edu.pl

Streszczenie: W pracy omówiono osiągnięcia w dziedzinie zastosowania nierówności różniczkowych do sterowania nieliniowego. Główny nacisk został położony na problematykę badania stabilności w sensie Lapunowa zamkniętego układu nieliniowego sterowania adaptacyjnego. Zostało do tego wykorzystane pojęcie stabilności częściowej i pokazano jego przydatność do rozwiązania zadania nadażania za modelem w układzie sterowania adaptacyjnego z modelem odniesienia (ang. *Model Reference Adaptice Control – MRAC*)

Słowa kluczowe: sterowanie adaptacyjne, stabilność układów nieliniowych, metoda bezpośrednia Lapunowa, nierówności różniczkowe.

1. WPROWADZENIE

Sterowanie adaptacyjne nieliniowych układów sterowania jest dziedziną dobrze zdefiniowaną i będącą przedmiotem intensywnych badań od ponad dwudziestu lat. Wiele z opracowanych metod wykorzystuje wyniki różnych działów matematyki jak geometria różniczkowa (patrz [8]), metody Lapunowa ([15]), szeregi Volterry lub badań interdyscyplinarnych jak sieci neuronowych ([5]), programowanie ewolucyjne czy logika rozmyta. W niniejszej pracy podjęta została próba spojrzenia w nowy sposób na analizę adaptacyjnych układów nieliniowych wykorzystując nierówności różniczkowe do badania stabilności w sensie Lapunowa takich układów. Podejście to wykorzystuje również pewne elementy szczególnych przypadków bezposredniej metody Lapunowa. Celem prowadzonych prac jest stworzenie ogólnych ram dla badania problematyki nadążania ciągłego układu opisanego modelem w przestrzeni stanu za stabilnym modelem odniesienia. Motywacją do tego typu badań jest możliwość wykorzystania ich wyników w nieliniowym sterowaniu adaptacyjnym z modelem odniesienia (ang. Model Reference Adaptive Control – MRAC).

2. PODEJŚCIE DO BADANIA STABILNOŚCI W SENSIE LAPUNOWA W OPARCIU O NIERÓWNOŚCI RÓŻNICZKOWE

Nierówności różniczkowe stanowią część jakościowej teorii równań różniczkowych. Nasze zainteresowanie skupia się tylko na fragmencie tej olbrzymiej i bogatej dziedziny [18, 19, 11, 12, 17] dotyczącym pewnych własności równań różniczkowych zwyczajnych.

Jakościowa teoria równań różniczkowych zwyczajnych zajmuje się badaniem własności rozwiązań równań bez znajomości postaci tych rozwiązań. Jest to dość istotne w kontekście nieliniowym, gdyż wtedy na ogół nie znamy postaci rozwiązań. To czym natomiast dysponujemy to własności prawej strony równania oraz czasami informacje na temat dziedziny w jakiej jest zdefiniowana.

Ponieważ postawienie problemu wyklucza wiedzę ilościową (analityczną bądź numeryczną) na temat rozwiązań musimy posługiwać się wynikami jakościowymi o rozwiązaniach, takimi jak np. własności asymptotyczne (ograniczoność), stabilność w sensie Lapunowa, monotoniczność itd. Ta przykładowa lista własności pokazuje, że wyniki takie mogą mieć praktyczne zastosowanie w sterowaniu. Dodatkowo atrakcyjną ich cechą jest to, że mogą one zachodzić dla rodzin rozwiązań pozwalając wnioskować o odporności.

Znanym przykładem wykorzystania teorii jakościowej równań różniczkowych jest stosowanie funkcji Lapunowa [7] do badania stabilność. Innym ważnym, aczkolwiek nie tak dobrze znanym zastosowaniem, jest podejście z wykorzystaniem nierówności różniczkowych. Stosuje się je, między innymi, do badania odpornej stabilności (patrz rozdział 2.2.) i stąd próba zastosowania ich w kontekście sterowania adaptacyjnego również za pomocą rekurencyjnych sieci neuronowych.

2.1. Wstęp do nierówności różniczkowych

Na początku krótko zaprezentujemy podstawowe pojęcia i wyniki dotyczące nierówności różniczkowych. Omówiony będzie przypadek skalarny, gdyż będzie on wykorzystany bezpośrednio przy dyskusji metod w rozdziale 2.2. i jest prostszy do prezentacji niż przypadek wektorowy.

Wczesna historia tematu [17] sięga niezależnych od siebie prac O. Perrona i S.A. Czapłygina. W niniejszym wstępie zaprezentujemy sposób rozumowania przyjęty przez Czapłygina [13].

Twierdzenie 1 (Czapłygin) *Niech będzie dane skalarne* *równanie różniczkowe zwyczajne*

$$\dot{x} = f(x,t), \qquad x(t_0) = x_0 \tag{1}$$

wraz z warunkiem początkowym $(x_0, t_0) \in \Gamma$, *gdzie* Γ *jest dziedziną (zbiór spójny i otwarty) istnienia i jednoznaczności dla (1). Jeżeli prawa strona* f *równania (1) jest ciągła w* Γ, $x(t)$ *jest rozwiązaniem (1) odpowiadającym* (x_0, t_0) *oraz nierówności różniczkowe*

$$\dot{v} < f(v,t) \tag{2}$$

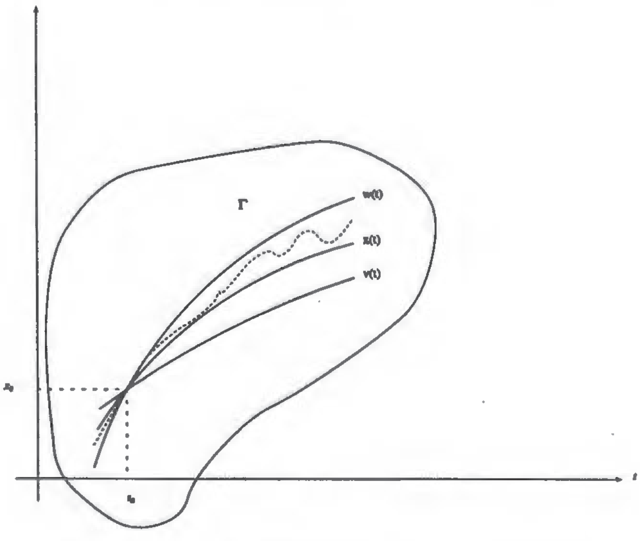
$$\dot{w} > f(w,t) \tag{3}$$

spełnione są dla wszystkich $t > t_0$ *(t w* Γ*) gdy* $v(t_0) = w(t_0) = x_0$, *wtedy nierówności*

$$v(t) < x(t) < w(t) \tag{4}$$

są również prawdziwe dla tych samych wartości t.

Zauważmy, że powyższe twierdzenie daje nam estymatę (4) nieznanego rozwiązania $x(t)$ wyrażoną poprzez znane funkcje spełniające (2)–(3). Jest to warunek wystarczający gdyż wymaga on aby odpowiednio górne (dolne) oszacowanie miało większe (mniejsze) nachylenie niż $x(t)$ dla *wszystkich* argumentów $t > t_0$. Widać, że na przykład krzywa przerywana na rys. 1 spełnia (4), ale nie spełnia (3).



Rysunek 1. Metoda Czapłygina nierówności różniczkowych (zasada porównania): $x(t)$ jest rozwiązaniem nominalnym, $v(t)$ rozwiązaniem dolnym, a $w(t)$ rozwiązaniem górnym. Równanie różniczkowe ma postać $\dot{x} = f(x,t)$ z warunkiem początkowym (x_0, t_0) i dziedziną Γ. Nierówności różniczkowe to $\dot{v} < f(v,t)$ i $f(w,t) < \dot{w}$ dla $t > t_0$, które implikują $v(t) < x(t) < w(t)$ dla $t > t_0$.

Dla danej prawej strony f może być trudno znaleźć v i w, dla których (2)–(3) są spełnione przynajmniej na rozsądnie długim przedziale t. W tej sytuacji następujący prosty wniosek z twierdzenia 1 może być przydatny.

Wniosek 1 *Niech (1) będzie takie samo jak w Twierdzeniu 1. Jeżeli istnieją funkcje* f_1 *i* f_2, *ciągłe w* Γ, *takie że*

$$f_1(x,t) < f(x,t) < f_2(x,t) \tag{5}$$

dla każdego $(x,t) \in \Gamma$ *(gdzie* $t > t_0$*) oraz wiedząc, że dla tych* (x,t) *istnieją i są jednoznaczne rozwiązania skalarnych, zwyczajnych równań różniczkowych*

$$\dot{v} = f_1(v,t), \qquad v(t_0) = x_0 \tag{6}$$

$$\dot{w} = f_2(w,t), \qquad w(t_0) = x_0 \tag{7}$$

wówczas rozwiązania (6)–(7) spełniają (4) dla wszystkich $t > t_0$.

Zgodnie z powyższym wnioskiem wystarczy znaleźć dwa równania różniczkowe zwyczajne, których prawe strony ograniczają prawą stronę równania (1) tak jak w (5). Oczywiście f_1 i f_2 należy dobrać jak najprostsze tak aby można było łatwo rozwiązać (6)–(7). W szczególności, jeżeli f_1 i f_2 są liniowe, f jest dwukrotnie różniczkowalna i znamy (co nie zawsze jest możliwe) podzbiór Γ, w którym $\partial^2 f / \partial x^2$ jest stałego znaku, wówczas Wniosek 1 prowadzi do silnej metody numerycznej generującej ciągi $\{v_k(t)\}$ i $\{w_k(t)\}$ szybko zbieżne do $x(t)$ (patrz [13]).

Zauważmy ponadto, że Twierdzenie 1 i Wniosek 1 dotyczą nieliniowych i niestacjonarnych równań różniczkowych zwyczajnych. Tak więc jest to przypadek bardzo ogólny (aczkolwiek ograniczony do równań skalarnych). Jest to szczególnie użyteczne w kontekście stabilności Lapunowa (patrz podrozdział 2.2.), a zwłaszcza dla układów adaptacyjnych, gdzie w opisie układu zamkniętego mamy do czynienia z niestacjonarnością.

Rozumowania które legło u podstaw Twierdzenia 1 nie można zastosować dla przypadku wektorowych równań różniczkowych i uzyskanie podobnych rezultatów nie jest łatwe. W przypadku liniowym, jednakże można wykazać pewne użyteczne właściwości [17]. Wynik ten jest szczególnie interesujący dla liniowych układów niestacjonarnych, które są wykorzystywane w kontekście sterowania adaptacyjjengo.

2.2. Funkcje Lapunowa, a nierówności różniczkowe

W dalszym ciągu przedstawione zostaną zastosowania wyniki z teorii nierówności różniczkowych, omówionych w poprzednim podrozdziale, do badania stabilności w sensie Lapunowa. Podejście to jest efektem pionierskich prac prowadzonych przez C. Corduneanu [1, 2], których dobre podsumowanie można znaleźć też w [11].

Przypomnijmy na początku pokrótce, że bezpośrednia metoda Lapunowa [6] jest niesłychanie ważna z punktu widzenia układów adaptacyjnego sterowania nieliniowego [15]. Jeżeli celem sterowania jest nadążanie za modelem odniesienia (patrz podrozdział 3.1.), wtedy–nawet gdy obiekt jest liniowy i stacjonarny–układ zamknięty będzie nieliniowy i nieautonomiczny. Stąd olbrzymia waga pojęcia jednostajnej stabilności asymptotycznej dla układów niestacjonarnych. Jest to w ogólności problem wysoce nietrywialny w układzie zamkniętym, dodatkowo komplikowany w układach adaptacyjnych przez konflikt między czynnością sterowania sprowadzającą błąd nadążania do zera, a prawem adaptacji starającym się wyzerować błąd parametrów. Ponadto nieliniowe, niestacjonarne zachowanie takich układów musi być rozważane w obecności zakłóceń i niemodelowanej dynamiki, a to wymaga stabilności odpornej. Dokładnie z tymi problemami możemy sobie poradzić za pomocą nierówności różniczkowych.

W tym celu potrzebne będą następujące definicje

Definicja 1 *Rozważmy wektorowe równanie różniczkowe*

$$\dot{x} = f(x,t), \qquad f(0,t) \equiv 0 \tag{8}$$

mające w dziedzinie $\Gamma \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ *dla każdych warunków początkowych* $(x_0, t_0) \in \Gamma$ *jednoznaczne rozwiązanie* $x(t; t_0, x_0)$. *Mówimy, że trywialne rozwiązanie równania (8) jest*

1. stabilne *wtedy i tylko wtedy gdy, dla dowolnego* $\varepsilon > 0$ *istnieje* $\delta = \delta(\varepsilon, t_0) > 0$, *taka że* $\|x_0\| < \delta$ *implikuje* $\|x(t; t_0, x_0)\| < \varepsilon$ *dla każdego* $t \geq t_0$;

2. jednoznacznie stabilne *wtedy i tylko wtedy gdy, dla dowolnego* $\varepsilon > 0$ *istnieje* $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, *taka że* $\|x_0\| < \delta$ *implikuje* $\|x(t; t_0, x_0)\| < \varepsilon$ *dla każdego* $t \geq t_0$;

3. asymptotycznie stabilne *wtedy i tylko wtedy gdy jest stabilne i istnieje* $\delta^* = \delta^*(t_0) > 0$, *taka że* $\|x_0\| < \delta^*$ *implikuje* $\lim_{t\to\infty} \|x(t; t_0, x_0)\| = 0$;

4. jednostajnie asymptotycznie stabilne *wtedy i tylko wtedy gdy jest jednostajnie stabilne i istnieje* $\delta^* > 0$, *taka że dla każdego* $\varepsilon > 0$ *istnieje* $T(\varepsilon) > 0$, *takie że* $\|x_0\| < \delta^*$ *implikuje* $\|x(t; t_0, x_0)\| < \varepsilon$ *dla wszystkich* $t \geq t_0 + T(\varepsilon)$.

Definicja 1 obejmuje postawowe pojęcia stabilności Lapunowa zerowego punktu równowagi układu (8) niezbędne w prezentowanym kontekście. Stabilność jednostajna (punkt 2 powyżej) różni się tym od stabilności zwykłej (punkt 1), że jest niezależna od czasu początkowego t_0, mimo niestacjonarnego charakteru równania (8). Ważnym wzmocnieniem w punkcie 3 powyższej Definicji jest dążenie trajektorii $x(t; t_0, x_0)$ asymptotycznie do zera. Jest to krytyczna właściwość w przypadku równania błędu w układach adaptacyjnych. W końcu punkt 4 Definicji 1 jest najbardziej pożądaną kombinacją: trywialne rozwiązanie równania (8) jest jednoznacznie stabilne i posiada sąsiedztwo (zdefiniowane przez $\|x_0\| < \delta^*$), takie że dla każdej chwili czasowej $t \geq t_0 + T(\varepsilon)$ rozwiązanie $x(t; t_0, x_0)$ zbliży się do punktu równowagi z dowolną dokładnością ε.

Zauważmy, że wszystkie pojęcia Definicji 1 opisują własności *lokalne*, tzn. postulują istnienie sąsiedztwa osi t (np. półcylinder K_{ρ,t_0}), w którym odpowiednie warunki są spełnione.

Z punktu widzenia odporności rozważamy stabilność układu w sytuacji gdy prawa strona równania (8) nie jest znana dokładnie lub gdy układ jest poddany zakłóceniom. W celu badania stabilności odpornej przydatna jest następująca definicja.

Definicja 2 *Rozważmy wektorowe równanie różniczkowe*

$$\dot{x} = f(x,t) + R(x,t), \qquad f(0,t) \equiv 0 \tag{9}$$

mające w dziedzinie $\Gamma \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ *dla każdych warunków początkowych* $(x_0, t_0) \in \Gamma$ *jednoznaczne rozwiązanie* $x(t; t_0, x_0)$. *Mówimy, że trywialne rozwiązanie równania (9) jest*

1. całkowo stabilne *wtedy i tylko wtedy gdy, dla dowolnego* $\varepsilon > 0$ *istnieje* $\delta = \delta(\varepsilon, t_0) > 0$, *taka że* $\|x_0\| < \delta$ *oraz*

$$\int_{t_0}^{t} \sup_{\|x\|<\varepsilon} \|R(x,t)\| dt < \delta \tag{10}$$

implikują $\|x(t; t_0, x_0)\| < \varepsilon$ *dla każdego* $t \geq t_0$;

2. stabilne pod działaniem ograniczonych zaburzeń *wtedy i tylko wtedy gdy, dla dowolnego* $\varepsilon > 0$ *istnieje* $\delta = \delta(\varepsilon, t_0) > 0$, *taka że* $\|x_0\| > \delta$ *oraz*

$$\sup_{t\geq t_0} \int_{t}^{t+1} \sup_{\|x\|<\varepsilon} \|R(x,t)\| dt < \delta \tag{11}$$

implikują $\|x(t; t_0, x_0)\| < \varepsilon$ *dla każdego* $t \geq t_0$.

Powyższa definicja dotyczy stabilności odpornej układu (9) i w związku z tym narzuca warunki na wyraz związany z zaburzeniem czyli $R(x,t)$ w równaniu (9). Przy takich założeniach rozpatrywana jest własność 1 Definicji 1. Tak więc punkt 1 Definicji 2 postuluje aby dla wszystkich trajektorii $x(t; t_0, x_0)$ (z sąsiedztwa $\|x_0\| < \delta$) udział $R(x,t)$ w czasie był mały, jeśli małe są trajektorie (patrz (10)). Podobna idea jest wyrażona w punkcie 2 Definicji 2 z jedną istotną różnicą: „małość" $R(x,t)$ jest mierzona średnim ograniczeniem, tzn. po wszystkich przedziałach $[t, t+1]$.

3. UKŁADY STEROWANIA ADAPTACYJNEGO Z MODELEM ODNIESIENIA

W niniejszym rozdziale omówimy pewne techniki stabilności Lapunowa, które w połączeniu z metodami zasygnalizowanymi w poprzednim rozdziale i omówionymi szczegółowo w pracy [4] można wykorzystać do rozwiązania zadania nadążania za modelem. Narzędzia te są więc bardzo przydatne w kontekście sterowania adaptycyjnego z modelem odniesienia (ang. Model Reference Adaptive Control – MRAC) oferując alternatywne spojrzenie na problematykę.

3.1. Nadążanie za modelem. Podejście w oparciu o teorię stabilności

Do rozwiązania problemu nadążania za modelem wykorzystane zostanie podejście oryginalnie zaproponowane w mechanice w nieco innym kontekście przez Makarowa [14]. Rozważał on następujący problem:

Definicja 3 *Rozważmy układ dwóch wektorowych równań różniczkowych*

$$\dot{r} = g(r,t), \qquad g(0,t) \equiv 0, \tag{12}$$

$$\dot{x} = f(x,r,t) \tag{13}$$

mający w dziedzinie $\Gamma \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$, dla wszystkich warunków początkowych $(r_0, t_0), (x_0, t_0) \in \Gamma$, jednoznaczne rozwiązanie $r(t; t_0, r_0)$ równania (12) oraz jednoznaczne rozwiązanie $x(t; t_0, x_0)$ równania (13). Układ (12)–(13) nazywamy stabilnym w sensie Makarowa *wtedy i tylko wtedy gdy, dla dowolnego $\varepsilon > 0$ isnieją $\delta_1 = \delta_1(\varepsilon, t_0)$ i $\delta_2 = \delta_2(\varepsilon, t_0)$, takie że $\|r_0\| < \delta_1$ oraz $\|r_0 - x_0\| < \delta_2$ implikuje $\|r(t; t_0, x_0)\| < \varepsilon$ oraz $\|r(t; t_0, x_0) - x(t; t_0, x_0)\| < \varepsilon$ dla wszystkich $t \geq t_0$.*

W istocie definicja ta postuluje stabilność modelu odniesienia (12) (w sensie punktu 1 Definicji 1 oraz stabilność błędu pomiędzy wyjściem odniesienia $r(t)$ i stanem $x(t)$ układu (13). Dokonując w powyższej definicji modyfikacji podobnych do tych z punktów 2–4 Definicji 1, możemy również otrzymać analogiczne wersje stabilności w sensie Makarowa.

Oczywiście, wprowadzając nową zmienną $e(t) = r(t) - x(t)$ powyższy problem można przeformułować do klasycznego problemu (zgodnego z punktem 1 Definicji 1) o wymiarze $(2n + 1)$. Jednakże Definicja 3 umożliwia wykorzystanie wiedzy *a priori* o układzie (13) i nie wymaga założenia $f(0, 0, t) \equiv 0$. Ponadto, może być wygodniej mieć do czynienia bezpośrednio z układem (13) niż z nowym układem otrzymanym w wyniku złączenia $r(t)$ i $e(t)$. W rzeczywistości badanie stabilności w sensie Makarowa może być dokonane poprzez rozważanie dwóch funkcji typu Lapunowa: jednej dla $r(t)$, drugiej dla $r(t) - x(t)$. Ostateczny wynik wymaga następującej definicji.

Definicja 4 *Niech $M_{\rho,t_0} = \{(r, x, t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} |\ \|r - x\| < \rho,\ t \geq t_0\}$. Funkcja $V : M_{\rho,t_0} \to \mathbb{R}$ nazywamy* dodatnio określoną w sensie Makarowa *wtedy i tylko wtedy gdy, $v(r, r, t) \equiv 0$ i istnieje funkcja $\phi : [0, \rho] \to \mathbb{R}$ klasy K, taka że*

$$V(r, x, t) \geq \phi(\|r - x\|) \tag{14}$$

w M_{ρ,t_0}.

Zauważmy, że M_{ρ,t_0} w powyższej definicji bierze pod uwagę, że rozważane rozwiązanie trywialne jest funkcją różnicy $r(t) - x(t)$.

Twierdzenie 2 *Niech istnieją dwie funkcje różniczkowalne $V_1 : K_{\rho,t_1} \to \mathbb{R}$ oraz $V_2 : M_{\rho,t_1} \to \mathbb{R}$, takie że V_1 jest dodatnio określona, a V_2 jest dodatnio określona dodatnio w sensie Makarowa. Układ (13)–(12) jest stabilny w sensie Makarowa jeżeli pochodne*

$$\begin{aligned} V_1'(r, t) &= \lim_{h \to 0} \frac{V_1(r + hg(r, t), t + h)}{h} \\ &= \frac{\partial V_1}{\partial t} + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial V_1}{\partial r_k} g_k(r, t), \\ V_2'(r, x, t) &= \lim_{h \to 0} \frac{V_2(r + hg, x + hf, t + h)}{h} \\ &= \frac{\partial V_2}{\partial t} + \\ &+ \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\partial V_2}{\partial r_k} g_k(r, t) + \frac{\partial V_2}{\partial x_k} f_k(r, x, t) \right) \end{aligned} \tag{15}$$

są ujemnie określone odpowiednio w K_{ρ,t_0} i M_{ρ,t_0}.

Zamiast różniczkowalności funkcji V_1 oraz V_2 w Twierdzeniu 2, możemy zażądać aby były one lokalnie lipschitzowskie i rozważyć dolną prawą pochodną Dini'ego. Jednakże przyjęcie założenia o różniczkowalności pozwala uzyskać wzory (15) na V_1' i V_2' w sposób jawny, co pomaga zrozumieć istotę podejścia Makarowa.

Idea polegająca na rozważaniu dwóch równoczesnych wektorowych układów równań różniczkowych oraz analiza ich stabilności była prezentowana przez kilku Autorów. Szczególnie interesujące są metody wykorzystujące nierówności różniczkowe wprowadzone w pracach Lakshmikanthama [9, 10] (patrz również [11]). Analogiczne podejście w wersji dyskretnej podał Pachpatte w pracy [16].

3.2. Stabilność częściowa

Zaprezentowane w podrozdziale 3.1. podejście Makarowa do zagadnienia nadążania za modelem jest ściśle związane z pojęciem stabilności częściowej. Wynika to z faktu, że zwykle możemy uznać model odniesienia (12) za stabilny i problem zredukować tylko do stwierdzenia stabilności układu (13), to znaczy rozważać tylko część $(2n + 1)$-wymiarowej przestrzeni stanu [3]. Przyjmujemy w tym celu następującą definicję

Definicja 5 *Rozważmy układ dwóch wektorowych równań różniczkowych*

$$\begin{aligned} \dot{r} &= G(r, e, t), \qquad G(0, 0, t) \equiv 0, \qquad (16) \\ \dot{e} &= F(r, e, t), \qquad F(0, 0, t) \equiv 0, \qquad (17) \end{aligned}$$

mających w dziedzinie $\Gamma \subset \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ jednoznaczne rozwiązanie $r(t; t_0, r_0, e_0)$ równania (16) oraz jednoznaczne rozwiązanie $e(t; t_0, r_0, e_0)$ równania (17) dla wszystkich warunków początkowych $(r_0, e_0, t_0) \in \Gamma$. Rozwiązanie trywialne $(r(t), e(t)) \equiv (0, 0) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ układu równań (16)–(17) nazywamy częściowo stabilnym *ze względu na e wtedy i tylko wtedy gdy, dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje $\delta = \delta(\varepsilon, t_0)$, taka że $\|r_0\| + \|e_0\| < \delta$ implikuje $\|e(t, t_0, r_0, e_0)\| < \varepsilon$ dla wszystkich $t \geq t_0$.*

Zauważmy specjalną strukturę problemu, podkreślającą rolę rozwiązania $e(t) \equiv 0$ równania (17). W definicji nie wymagamy stabilności ze względu na r, jedynie żądamy aby istniało rozwiązanie trywialne $(r(t), e(t)) \equiv 0$. Wektor e, w kontekście MRAC można interpretować jako $e(t) = r(t) - x(t)$, pod warunkiem że $n = m$ (patrz uwagi do Definicji 3). Definicja 5 jest definicją ogólną, gdzie rozwiązania równania (16) zależą od e_0 (gdyż G zależy od e), ale przy postawieniu problemu w sposób podobny do Definicji 3 zależność ta nie występuje, gdyż równanie (16)) ma postać (12).

Poprzez standardowe modyfikacje Definicji 5 możemy otrzymać inne pojęcia stabilności częściowej, analogiczne do punktów 2 – 4 Definicji 1. W tym kontekście potrzebujemy następujących pojęć, gdzie $P_{\rho_0,t_0} = \{(r, e, t) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} |\ \|e\| < \rho,\ t \geq t_0\}$.

Definicja 6 *Funkcję $V : P_{\rho,t_0} \to \mathbb{R}$ nazywamy* dodatnio określoną ze względu na e *wtedy i tylko wtedy gdy, $V(0, 0, t) \equiv 0$ oraz istnieje funkcja $\phi : [0, \rho] \to \mathbb{R}$ klasy*

K, *taka że*

$$V(r,e,t) \geq \phi(\|e\|) \tag{18}$$

w P_{ρ,t_0}.

Definicja 7 *Funkcję* $V : P_{\rho,t_0} \to \mathbb{R}$ *nazywamy* częściowo ubywającą *wtedy i tylko wtedy gdy, istnieje funkcja* $\psi : [0,\rho] \to \mathbb{R}$ *klasy* K, *taka że*

$$V(r,e,t) \leq \psi(\|r\| + \|e\|) \tag{19}$$

w P_{ρ,t_0}.

Ponadto potrzebny będzie nam wynik sformułowany przez Ważewskiego w postaci następującego lematu

Lemat 1 (Ważewski) *[18] Niech* $t_0 \geq 0$, $k_{r,t_0} = \{(y,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}|\ 0 \leq y < r \leq \infty,\ t \geq t_0\}$ *i* $\omega : k_{r,t_0} \to \mathbb{R}$ *niech będzie funkcją ciągłą. Rozważmy równanie różniczkowe*

$$\dot{y} = \omega(y,t) \tag{20}$$

z warunkiem początkowym $(y_0,t_0) \in k_{r,t_0}$, *a J niech będzie maksymalnym przedziałem istnienia rozwiązania* $y(t)$ *równania (20) dla* (y_0,t_0). *Jeżeli* $z(t)$ *jest funkcją ciągłą dla wszystkich* $t \in [t_0,t_1]$, *gdzie* $J \subset [t_0,t_1]$, *taką że*

$$D_+ z(t) \leq \omega(z(t),t) \quad \text{wraz z} \quad z(t_0) \leq y_0 \tag{21}$$

dla wszystkich $t \in [t_0,t_1]$, *wówczas*

$$z(t) \leq y(t) \tag{22}$$

dla wszystkich $t \in [t_0,t_1]$.

Tutaj $D_+ z(t) = \liminf_{h\to 0^+}[z(t+h) - z(t)]/h$ jest dolną prawą pochodną Dini'ego. Podstawowy wynik dotyczący stabilności ma następującą postać:

Twierdzenie 3 *Niech* ω *będzie funkcją jak w Lemacie 1, dla której istnieje jednoznaczne rozwiązanie równania (20) dla dowolnych* $(y_0,t_0) \in k_{r,t_0}$ *oraz* $\omega(0,t) \equiv 0$. *Ponadto, załóżmy że funkcja* $V : P_{\rho,t_0} \to \mathbb{R}$ *związana z równaniami (16)–(17), jest lokalnie lipschitz'owska w* P_{ρ,t_0} *i spełnia następujący warunek*

$$V'(r,e,t) \leq \omega(V(r,e,t),t) \tag{23}$$

dla wszystkich $(r,e,t) \in P_{\rho,t_0}$, *gdzie*

$$V'(r,e,t) = \liminf_{h\to 0^+} \frac{V(r + hG(r,e,t), e + hF(r,e,t), t+h}{h}. \tag{24}$$

1. *Jeżeli rozwiązanie trywialne równania (20) jest stabilne i V jest dodatnio określona ze względu na e, wtedy rozwiązania trywialne* $r(t) \equiv 0$ *i* $e(t) \equiv 0$ *równań (16)–(17) są częściowo stabilne ze względu na e.*

2. *Jeżeli rozwiązanie trywialne równania (20) jest jednostajnie stabilne i V jest dodatnio określona ze względu na e oraz częściowo ubywająca, wtedy rozwiązania trywialne* $r(t) \equiv 0$ *i* $e(t) \equiv 0$ *równań (16)–(17) są jednostajnie stabilne ze względu na e.*

3. *Jeżeli rozwiązanie trywialne równania (20) jest asymptotycznie stabilne i V jest dodatnio określona ze względu na e, wtedy rozwiązania trywialne* $r(t) \equiv 0$ *i* $e(t) \equiv 0$ *równań (16)–(17) są asymptotycznie stabilne ze względu na e.*

4. *Jeżeli rozwiązanie trywialne równania (20) jest jednostajnie asymptotycznie stabilne i V jest dodatnio określona ze względu na e oraz częściowo ubywająca, wtedy rozwiązania trywialne* $r(t) \equiv 0$ *i* $e(t) \equiv 0$ *równań (16)–(17) są jednostajnie asymptotycznie stabilne.*

Jeżeli założymy, że V w Twierdzeniu 3 jest różniczkowalna, a nie tylko lipschitz'owska wówczas widać podobieństwo (24) do (15).

4. WNIOSKI

W pracy pokazano kolejne wyniki (patrz [4]) pozwalające na projektowanie stabilnych w sensie Lapunowa układów nieliniowych. Zastosowana metodologia opiera się na jakosciowej teorii równań różniczkowych, a w szczególności na nierównościach różniczkowych. Przedstawione zostały podstawowe pojęcia zwiazane z nierównościami różniczkowymi wprowadzane przez Czapłygina [13] oraz pewne bardziej zaawansowane pojęcia z teorii stabilności Lapunowa. Najważniejsze wyniki pracy dotyczą połaczenia specyficznych technik Lapunowa z pewnymi nierównościami różniczkowymi w celu rozwiązania zadania nadążania za modelem co jest bardzo przydatne w kontekście sterowania adaptacyjnego z modelem odniesienia (MRAC). Szczególnie przydatne w tym ujęciu okazało się pojęcie stabilności częściowej (ang. *Partial Stability*) gdyż zwykla w zadaniu sterowania adaptacyjnego z modelem odniesienia możemy przyjąć, że model jest stabilny i skoncentrować się na badaniu stabilności tylko samego układu. W pracy podne zostały warunki wystarczające częściowej stabilności układu nieliniowego spełniających warunek isnienia i jednoznacnzości rozwiązań.

Literatura

[1] C. Corduneanu. Application of differential inequalities to stability theory. *Analele Ştiinţifice ale Universităţii „Al. I. Cuza" din Iaşi (Serie Nouă). Secţiunea I (Matematică, Fizică, Chimie)*, VI(1):47–58, 1960. (in Russian).

[2] C. Corduneanu. Addendum to the paper "Application of differential inequalities to stability theory". *Analele Ştiinţifice ale Universităţii „Al. I. Cuza" din Iaşi (Serie Nouă). Secţiunea I (Matematică, Fizică, Chimie)*, VII(2):247–252, 1961. (in Russian).

[3] C. Corduneanu. On partial stability. *Revue Roumaine de Mathématiques Pures et Appliquées*, IX(3):229–236, 1964. (in French).

[4] A. Dzieliński. Robust stability of a class of nonlinear systems. In *Proceedings of the 10th IEEE Conference on Methods and Models in Automation and Robotics, MMAR 2004, 30 August–2 September, 2004, Miedzyzdroje, Poland*, pages 311–314. IEEE, 2004.

[5] A. Dzieliński. *Modelowanie i sterowanie układów nieliniowych metodami neuropodobnymi.* Oficyna Wydawnicza PW, Warszawa, 2002.

[6] W. Hahn. *Theory and Application of Liapunov's Direct Method.* Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1963.

[7] W. Hahn. *Stability of Motion.* Springer-Verlag, New York, 1967.

[8] A. Isidori. *Nonlinear Control Systems.* Springer-Verlag, London, 3rd edition, 1995.

[9] V. Lakshmikantham. Differential systems and extension of Lyapunov's method. *Michigan Mathematical Journal*, 9:311–320, 1962.

[10] V. Lakshmikantham. Notes on variety of problems of differential systems. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 10:119–126, 1962.

[11] V. Lakshmikantham and S. Leela. *Differential and Integral Inequalities. Theory and Applications*, volume I: *Ordinary Differential Equations.* Academic Press, New York and London, 1969.

[12] V. Lakshmikantham and S. Leela. *Differential and Integral Inequalities. Theory and Applications*, volume II: *Functional, Partial, Abstract, and Complex Differential Equations.* Academic Press, New York and London, 1969.

[13] N. N. Luzin. On the method of approximate integration due to academician S. A. Chaplygin. *Uspekhi matematicheskikh nauk*, 6(6):3–27, 1951. (in Russian).

[14] S. M. Makarov. A generalisation of fundamental Lyapunov's theorems on stability of motion. *Izvestiya fiziko-matematicheskogo obshchestva pri Kazanskom gosudarstvennom universitete (Seriya 3)*, 10(3):139–159, 1938. (in Russian).

[15] K. S. Narendra and A. M. Annaswamy. *Stable Adaptive Systems.* Prentice-Hall, Eglewood Cliffs, NJ, 1989.

[16] B. G. Pachpatte. Finite-difference inequalities and an extension of Lyapunov's method. *Michigan Mathematical Journal*, 18:385–391, 1971.

[17] R. Rabczuk. *Elements of Differential Inequalities.* Polish Scientific Publishers, Warszawa, 1976. (in Polish).

[18] J. Szarski. *Differential Inequalities.* Polish Scientific Publishers, Warszawa, 2nd edition, 1967. (in Polish).

[19] W. Walter. *Differential and Integral Inequalities.* Springer-Verlag, Berlin and New York, 1970.

Instytut Badań Systemowych
Polskiej Akademii Nauk

ISBN 83-89475-02-2