JAN SLESZYŃSKI
PROFESOR UNIWERSYTETU JAGIELLOŃSKIEGO.

O LOGICE TRADYCYJNEJ

NAKŁADEM TOWARZYSTWA FILOZOFICZNEGO
W KRAKOWIE.
1921.

WYDAWNICTWO TOWARZYSTWA FILOZOFICZNEGO W KRAKOWIE. — Nr. 8.

JAN SLESZYŃSKI
PROFESOR UNIWERSYTETU JAGIELLOŃSKIEGO

O LOGICE TRADYCYJNEJ

ODCZYT

wygłoszony na zebraniu Towarzystwa Filozoficznego w Krakowie dnia 29. listopada roku 1917.

NAKŁADEM TOWARZYSTWA FILOZOFICZNEGO
W KRAKOWIE.
1921.

CZCIONKAMI DRUKARNI „GŁOS NARODU". KRAKÓW.

O logice tradycyjnej*).

Odczyt wygłoszony na zebraniu Towarzystwa Filozoficznego w Krakowie dnia 29. listopada roku 1917.

Szanowne Zebranie!

Przedmiotem mego odczytu będzie kilka uwag o logice tradycyjnej, czyli klasycznej.

Kiedy przed piętnastu laty zwróciłem się do logiki, nie miałem o tej nauce najmniejszego pojęcia. Podzielałem podówczas przekonanie wśród matematyków rozpowszechnione, że logika jest wcale niepotrzebna. Dużo kosztowało mnie pracy poznać obszerną literaturę logiki tradycyjnej, ale ta praca wydawała mi się konieczną. Wykładając bowiem w ciągu wielu lat jeden z najtrudniejszych dla wykładu rozdziałów matematyki, mianowicie tak zwany rachunek różniczkowy i chcąc być zrozumianym, pragnąłem podawać dowody dokładne, takie, któreby mogły każdego przekonać. Nie chciałem poprzestawać na tem, jak to u matematyków się zdarza, iż profesor udziela uczniowi odpowiedzi, której sens jest ten: to jest dla mnie rzecz oczywista, a skoro pan tego nie rozumiesz, to chyba przez omyłkę zostałeś matematykiem, ja na to nie poradzę. Musiałem więc dowody analizować. Ale tu się pokazało, że nie wiem właściwie, co to jest dowód, jakkolwiek to może wydawać się dziwnem. To była przyczyna, dla której zwróciłem się do logiki.

Odpowiedzi na swoje pytanie nie znalazłem, co prawda, w książkach, ale się przekonałem, że pogardliwy stosunek do logiki, tak rozpowszechniony wśród matematyków, polegał na fałszywym poglądzie. Przekonałem się, że logika zawiera bardzo dużo rzeczy potrzebnych i użytecznych dla matematyków. Ale zarazem zrozumiałem, iż nie można się dziwić takiemu stosun-

*) Uważam za przyjemny obowiązek wyrazić tu najserdeczniejsze podziękowanie p. Dr. Wojciechowi Gieleckiemu za łaskawą pomoc w ogłoszeniu niniejszego odczytu drukiem.

kowi matematyków do logiki (nie tylko tych matematyków, którzy logiki nie znają, ale i tych, którzy ją znają). Obraz logiki, jaki mi się przedstawił, zrobił na mnie dziwne wrażenie. Obok tych rzeczy, które były tak ważne i znaczące dla matematyki, znalazłem tam mieszaninę, powiedziałbym chaos, najrozmaitszych elementów, treści historycznej, metafizycznej, gnoseologicznej, psychologicznej i gramatycznej, tak, iż te rzeczy, które są potrzebne dla matematyki, toną, że tak powiem, w tej powodzi rzeczy niepotrzebnych.

Starałem się odtąd z tej logiki tradycyjnej wydzielić to, co dla matematyki jest ważne i potrzebne.

Taką jest geneza tych uwag, które mam podać.

Zwracam się teraz do przedmiotu mego odczytu.

Sądzę, że nie będzie błędem, gdy powiem, iż ta część logiki tradycyjnej, którą stworzył Arystoteles, jest teoryą stosunków, jakie mogą zachodzić między dwiema klasami. Jest ona doskonałą metodą sprawdzania rozumowań, o ile są prowadzone syllogistycznie, (co nie zawsze jest możliwem). Ta metoda zachwycała takich matematyków, jak Newton i Leibniz, którzy doskonale znali logikę Arystotelesa i byli jej wielbicielami. Potężna analiza myślenia, którą musiał przeprowadzić Arystoteles dla utworzenia swej logiki, skrystalizowała się w czterech zdaniach, które logika tradycyjna podaje w postaci:

S A P, S E P, S I P, S O P.

Zdania te, jak wiadomo, znaczą:

1) Każde S jest P,
2) Żadne S nie jest P,
3) Niektóre S są P,
4) Niektóre S nie są P.

„Niektóre“ bierzemy tu w znaczeniu „przynajmniej niektóre“, (a nie „tylko niektóre“, jak wykręcają czasami logicy współcześni).

Logika Arystotelesa jest teoryą przekształcania tych zdań (jak kontrapozycya i t. d.) i teoryą rugowania wspólnego terminu z dwóch takich zdań (teorya syllogizmu).

Powstają pytania: Na czem polega wybór owych czterech zdań? Czy analiza Arystotelesa jest kompletna?

O ile ten podział jest dokładny, skąd pochodzi — o tem dużo napisano. Otóż sprawa ta może być wyjaśniona, jeżeli postawimy sobie pewne bardzo proste zagadnienie, mianowicie: Dane są dwie klasy, jedna klasa (S) i druga (P). W jakim stosunku mogą się znajdować te klasy co do wspólności lub niewspólności elementów?

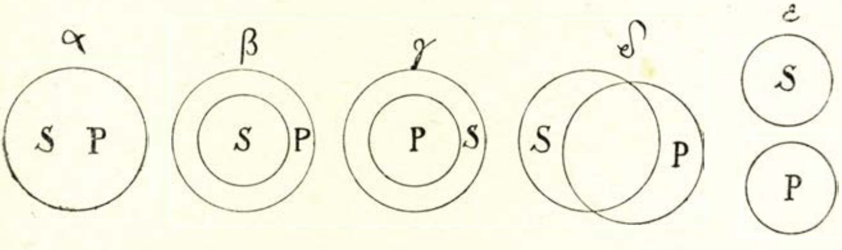
Zakładamy, iż klasy te n i e s ą p u s t e, to znaczy, że każda klasa zawiera przynajmniej jeden element (niektórzy logicy albo nie widzą, albo nie chcą widzieć, że Arystoteles to zakłada).

Odpowiedź na to pytanie opiewa: Stosunek ten jest pięcioraki. Klasa (S) do klasy (P) znajduje się w jednym i tylko jednym z pięciu stosunków.

Wynik tego badania da się przedstawić w następującej tablicy: Niech K_1, K_2, K_3 oznaczają klasy nie-puste, nie mające wspólnych elementów. W takim razie odpowiedź na nasze pytanie wypadnie tak: Między (S) a (P) zachodzi jeden i tylko jeden z pięciu stosunków, które oznaczmy przez α, β, γ, δ, ε.

	α	β	γ	δ	ε
(S)	K_3	K_3	K_1, K_3	K_1, K_3	K_1
(P)	K_3	K_2, K_3	K_3	K_2, K_3	K_2
	stosunek tożsamości	stosunek części do całości	stosunek całości do części	stosunek krzyżowania się klas	stosunek rozłączności

Można to za pomocą obwodów przedstawić schematycznie tak:



Skąd wiemy, że tylko takie mogą być wypadki?

Dowód może być podany na podstawie dyzjunkcyi zasadniczej, będącej połączeniem prawa sprzeczności i prawa wyłączonego środka. Można to (t. zw. „zupełna klasyfikacya") rozmaicie przeprowadzać. Wybiorę jeden z tych sposobów, mianowicie przez 4-krotne stosowanie dyzjunkcyi. Stosujemy ją: 1) do istnienia wspólnych elementów (K_3), 2) do istnienia elementów wyróżniających, 3) do istnienia elementów, wyróżniających klasę

(S), t. j. istnienia K_1 i 4) do istnienia elementów, wyróżniających klasę (P), t. j. istnienia K_2. Pierwsze zastosowanie wydziela: ε, drugie: α, trzecie: β, czwarte: γ i δ.

Mianowicie najpierw stosuję dyzjunkcyę do istnienia elementów wspólnych. Może być jedno z dwojga: albo wspólne elementy istnieją, albo nie istnieją. Gdy nie istnieją, to jest to wypadek ε. W innych wypadkach istnieją wspólne elementy (K_3). Wtedy mogę kontynuować klasyfikacyę, biorąc za podstawę istnienie wyróżniających elementów (to jest nie-wspólnych). Albo istnieją takie wyróżniające elementy, albo nie istnieją. Jeżeli nie istnieją, to będzie wypadek α. Jeżeli istnieją, wtedy mogę wziąć jako zasadę klasyfikacyi istnienie elementów wyróżniających w pierwszej klasie (t. j. w klasie (S)): albo nie istnieją, albo istnieją. Jeżeli nie istnieją, to będzie wypadek β. Jeżeli istnieją, wtedy mogę tę klasyfikacyę prowadzić na podstawie istnienia elementów wyróżniających w drugiej klasie (t. j. w klasie (P)) i otrzymam wypadki γ i δ.

Mamy tedy pięć elementarnych zdań:

$$S\alpha P,\ S\beta P,\ S\gamma P,\ S\delta P,\ S\varepsilon P,$$

które oznaczają:

Klasy są identyczne, albo pierwsza klasa stanowi część drugiej, albo druga klasa stanowi część pierwszej, albo klasy krzyżują się, albo nie mają wspólnych elementów.

Te zdania elementarne mogą być dla różnych celów łączone w inne zdania. Z nich możemy wytworzyć w następujący sposób te zdania, które rozważa Arystoteles:

A	O
α, β	γ, δ, ε

α, β, γ, δ	ε
I	E

t. j.

α	β	γ	δ	ε
A		O		
K_3	K_3	K_1, K_3	K_1, K_3	K_1
K_3	K_2, K_3	K_3	K_2, K_3	K_2
I				E

To znaczy:

A	składa	się	z	α i β
E	„	„	„	ε
I	„	„	„	$\alpha, \beta, \gamma, \delta$
O	„	„	„	$\gamma, \delta, \varepsilon$

Czyli: jeżeli dla danych klas (S) i (P) zachodzi SAP, to zachodzi SαP albo SβP i odwrotnie jeżeli zachodzi SαP albo SβP, to zachodzi SAP. Podobnie dla innych zdań.

Dlaczego właśnie taki podział ma doniosłość? — Dlatego taki wybór zdań jest ważny, że opiera się na stosunkach ogromnej wagi, bardzo rozpowszechnionych, na stosunkach: inkluzyi (włączenia) i ekskluzyi (wyłączenia), t. j. A i E.

A — jedna klasa zawiera się w drugiej (inclusio),
E — jedna klasa wyłącza, wyklucza drugą (exclusio).

Zdania A i zdania E na każdym kroku napotykamy, we wszystkich naukach. Skoro zaś rozważamy pewne stosunki, zniewoleni jesteśmy rozważać także ich przeczenia (funkcya przeczenia jest taką, iż bez niej nauka nie może istnieć). Przeczeniem dla A jest O, przeczeniem dla E jest I, jak widać z podanej tabelki, obejmującej ciąg od α do ε, który nazwiemy c i ą g i e m l o g i c z n y m.

Z tego ciągu bezpośrednio jasne są stosunki t. zw. „kwadratu logicznego", t. j. stosunki:

sprzeczności,
przeciwieństwa,
podprzeciwieństwa,
podporządkowania (subalternatio).

Między A i O, jak również E i I zachodzi stosunek sprzeczności; te dwa zdania nie mogą być ani razem prawdziwe (bo nie mają wspólnych wypadków), ani razem fałszywe (bo obejmują wszystkie możliwości).

Między A i E zachodzi stosunek przeciwieństwa: nie mogą być razem prawdziwe (bo nie mają wspólnych wypadków), ale mogą być razem fałszywe, bo nie obejmują wszystkiego.

Widzimy dalej, że O i I znajdują się w stosunku podprzeciwieństwa: nie mogą być razem fałszywe (bo obejmują razem wszystkie wypadki), jakkolwiek mogą być razem prawdziwe (bo mają wspólne wypadki: γ i δ).

Widoczny jest też stosunek podporządkowania:

z A wynika I,
z E wynika O

(wypadki A objęte są wypadkami I
„ E „ „ „ O)

Widzimy więc, że na ciągu logicznym nie tylko można oprzeć dokładne dowody twierdzeń, zawartych w kwadracie logicznym, ale można zarazem te twierdzenia unaocznić. To samo stosuje się do wnioskowania bezpośredniego i do syllogistyki. Tego jednak tu nie będę podawał.

Pozwolę sobie jeszcze przytoczyć odpowiedź na pytanie, jaka zmiana zachodzi w logice tradycyjnej, jeżeli wprowadzimy (jak to się dzieje w logice nowej) t. zw. „klasy puste“, to znaczy, jeżeli odrzucimy ograniczenie, że S i P muszą istnieć. Słusznem jest rozważać także taki wypadek, w matematyce bowiem często stawiamy pewne pytania o rzeczach, które mają czynić tym a tym warunkom zadość, a nie wiemy, czy takie rzeczy istnieją (naprzykład pierwiastki jakiegoś równania). Niema konieczności stosować twierdzeń nowej logiki, skoro wiemy, że w danym wypadku niema klas pustych; wtedy nikt nas nie może zmusić, żebyśmy nie korzystali z logiki Arystotelesa; gdy jednak występują „zera logiczne“, czyli „klasy puste“, to musimy stosować logikę nową.

W logice nowej klasyfikacya nasza okaże się niezupełną. Ostatni wypadek (ε) nie będzie już wypadkiem niepodzielnym, lecz da się dalej jeszcze podzielić, bo nieobecność elementów wspólnych może pochodzić także stąd, że jedna albo obydwie klasy są puste, t. j. nie mają wcale elementów.

Stosując 2 razy dyzjunkcyę 1) do istnienia elementów obydwóch klas, 2) tylko jednej, mamy:

	ζ	η	ϑ
(S)	K_1	—	—
(P)	—	K_2	—

ζ ... druga klasa pusta, pierwsza nie,
η ... pierwsza klasa pusta, druga nie,
ϑ ... obie klasy puste.

Razem otrzymamy tedy ciąg logiczny nowy:

	A		O				A	
	α	β	γ	δ	ε	ζ	η	ϑ
(S)	K_2	K_3	K_1, K_3	K_1, K_3	K_1	K_1	—	—
(P)	K_3	K_2, K_3	K_3	K_2, K_3	K_2	—	K_2	—
	I				E			

Zestawmy teraz obydwa ciągi logiczne: stary i nowy. W obydwóch ciągach zdania A i O, a także E i I wyłączają się wzajemnie, t. j. w obydwóch razach zachodzi stosunek sprzeczności, między A i O z jednej strony, a E i I z drugiej. Natomiast 3 pozostałe stosunki kwadratu logicznego: przeciwieństwo, podprzeciwieństwo i podporządkowanie odpadają w logice nowej.

Istotnie, w ciągu starym A i E są zdania przeciwne, bo nie mogą być razem prawdziwe, w nowym zaś A i E mogą zachodzić razem (η i ϑ). Dalej w ciągu starym I i O są podprzeciwne, bo nie mogą być razem fałszywe, w nowym zaś ciągu — mogą (η i ϑ). Nareszcie w ciągu starym zachodzi podporządkowanie A—I, E—O, bo wypadki A objęte są przez I, a E — przez O, w nowym to zachodzi: wypadki η i ϑ zdania A nie są objęte przez I i też wypadki E — przez O.

Można pokazać, że wprowadzenie klas pustych odbija się na logice Arystotelesa tak, iż w syllogistyce odpadają 4 tryby: Darapti, Felapton, Bamalip i Fesapo (te, których nazwy zawierają literę „p"). Ale nad tem nie będę się zatrzymywał.

Logistycy chełpią się, że wykazali błędy w syllogistyce Arystotelesa, ale to niepotrzebna chełpliwość, bo skoro zmieniamy założenia, to zmienią się i niektóre twierdzenia logiki, więc nie można tu mówić o błędach. Nowa logika wprowadza nowe założenia, potrzebne dla matematyki (wprowadzenie klas pustych).

Odnośnie do tej części logiki tradycyjnej, która wychodzi poza to, co wytworzył Arystoteles, to jest teoryi zdań warunkowych i teoryi zdań rozjemczych, ograniczę się do następującej uwagi:

Zdania warunkowe można przedstawić we formie:

$$p \supset q,$$

co znaczy: „z p wynika q" [znak $\supset$ wprowadził Peano].

Zdania rozjemcze: „jest p lub q", co można napisać:

$$p \vee q \quad („p \text{ lub } q"),$$

sprowadzają się do zdań warunkowych, bo: „*p* lub *q*“ znaczy to samo, co z „nie-*p* wynika *q*“, t. j., jeżeli *p* jest fałszywe, to *q* jest prawdziwe. Można więc ograniczyć teoryę zdań warunkowych i zdań rozjemczych, do samej teoryi zdań warunkowych.

Można pokazać, że zdanie: z „*p* wynika *q*“ sprowadza się do pewnego zdania S A P, ale nad tem również nie będę się zatrzymywał.

•

Na zakończenie — kilka słów o charakterze i znaczeniu logiki tradycyjnej.

Najnowsze badania z dziedziny logiki pokazały, iż teorya rozumowania bynajmniej nie jest wyczerpana przez logikę tradycyjną. Teorya rozumowania jest to teorya „zdań wtórnych“, zdań o zdaniach, czyli, jak nazywają logistycy: „logika zdań“.

Prawa tożsamości, sprzeczności, wyłączonego środka, kontrapozycya i wiele innych — to są „zdania o zdaniach“. Te zdania wtórne czyli „zdania o zdaniach“ mają ten odrębny charakter, iż m o g ą b y ć w d w o j a k i s p o s ó b u ż y t e: albo jako p r z e s ł a n k i albo jako s p o s o b y wnioskowania. Już Frege zwrócił uwagę na to, że można we wszystkich dowodach używać jednego tylko sposobu wnioskowania — tradycyjnego modus ponens: jeśli z *p* wynika *q* i jeśli *p* jest prawdziwe, to i *q* jest prawdziwe. Wszystkie inne zdania wtórne będą w takim razie figurowały w dowodach zupełnych jako przesłanki [1]).

Jeżeli porównamy rozumowanie oparte na dowodach zupełnych z tem rozumowaniem, którego używa logika tradycyjna i z którego korzystała, korzysta i prawdopodobnie będzie korzystała matematyka i nadal, to zobaczymy ciekawe wyniki. Pokazuje się, że zazwyczaj w dowodach matematycznych robi się intuicyjnie, nawpół świadomie, użytek z różnych zdań o zdaniach, jako sposobów wnioskowania. Tak więc matematyk intuicyjnie uwzględnia różne zasady logiczne, ale często nie będzie w stanie sformułować, jakie zdania logiczne wchodzą w grę. Bardzo często za pomocą zwłaszcza „reductio ad absurdum“ omija on szkopuł logicznych przesłanek.

Matematyk zazwyczaj jednak nie bierze rzeczy tak dokładnie. Dowód matematyka zwykle jest taki, iż nie dowodzi

---

[1]) Jest to przeprowadzone w znakomitem dziele „Principia mathematica“ Whiteheada i Russella, Cambridge 1910 - 1913.

O dowodzie zupełnym p. prace prof. Zaremby: Wstęp do analizy część I. 1915, str. 12—21, Théorie de la démonstration dans les sciences mathématiques (L'enseign. math. 1916, Nro 1) str. 14—24.

on rzeczy „jasnych“, chce on tylko przekonać, iż twierdzenie, które słuchaczowi nie wydaje się „oczywistem“, jest słuszne. Do tego służy logika tradycyjna i do tego zupełnie wystarcza. Jeżeli zostajemy w tej sferze, to tylko pozostaje wyrazić życzenie, aby matematycy znali i stosowali logikę tradycyjną, bo wtedy może nie będą w tak nieuważny sposób skracali dowodów. Zamiast wykonywać koziołki w rozumowaniu i pokrywać je słówkiem „oczywiste“, albo wmawiać w czytelnika, że „z łatwością“ zrozumie to, czego autor sam dobrze nie rozumie, podawać będą dowody poprawne i zrozumiałe.

Można powiedzieć, że dla takiej matematyki, jaką mieliśmy dotychczas, najzupełniej wystarcza logika tradycyjna. Ale ta logika nie wystarcza dla matematyki przyszłości. Jeżeli mianowicie będziemy się zajmowali badaniem podstaw matematyki, to do tego potrzebna jest logika nowa, której pierwsze zarysy znajdujemy w „Principia mathematica“. W tych badaniach bowiem wszystkie twierdzenia są oczywiste, a chodzi o to, aby ustanowić związek logiczny między twierdzeniami. W badaniach takich muszą być dowody zupełne, nie tylko w znaczeniu matematycznem. Nie wystarcza w takim razie wyliczyć przesłanki matematyczne, ale trzeba także wyliczyć i wszystkie przesłanki logiczne, bez tego bowiem samo pojęcie dowodu staje się nieokreślonem.

Jan Sleszyński.

Kraków, 26. I. 1921.