H. NIEWĘGŁOWSKI

GEOMETRYA

abd : bdc = ab × ~~bd~~ : bc.

GEOMETRYA

DZIEŁA G.-H. NIEWĘGŁOWSKIEGO.

ARYTMETYKA. — Kurs zupełny, zawierający : Liczenie. Działania naliczbach całkowitych. Podzielność liczb, największy spólny dzielnik, i najmniejszy wielownik. Ułamki. Liczby dziesiętne. Działania skrócone. Miary dziesiętne i dawne. Rachunek liczb wielorakich. Wyciąganie pierwiastku kwadratowego i sześciennego. Stosunki i proporcye. Reguły trzech. Teoryę przybliżeń liczebnych, błędy samoiste i względne. NOTY, wiadomość o postępniach arytmetycznej i geometrycznej ; wyciąganie skrócone pierwiastku kwadratowego ; kilka twierdzeń własności liczb. Przeszło 100 zagadnień rozwiązanych, i różne ćwiczenia. in-8° Paryż. 1866. Cena fr. 4.

Wkrótce wyjdzie z druku :

TRYGONOMETRYA PROSTOLINIJNA I SFERYCZNA.

Paryż. — Drukarnia E. MARTINET, ulica Mignon, 2.

GEOMETRYA

PRZEZ

G.-H. NIEWĘGŁOWSKIEGO

PROFESSORA RACHUNKU RÓŻNICZKOWEGO I CAŁKOWEGO,
W SZKOLE WYŻSZEJ POLSKIEJ W PARYŻU.

WYDANIE DRUGIE CAŁKIEM PRZEROBIONE I POWIĘKSZONE.

PARYŻ
W KSIĘG. K. KROLIKOWSKIEGO
ULICA DE SEINE, 20

LWÓW
W KOMMISIE KSIĘGARNI
KAROLA WILDA

1869

DO CZYTELNIKA.

Jako Arytmetyka tak i drugie wydanie mojej Geometryi wychodzi kosztem Hr. Jana Działyńskiego.

Nie każdemu dany jest niepospolity rozum, a nie każdy ma wzniosłe uczucia, żeby mógł pojąć doniosłość i chciał zamiłować myśl wydawania dzieł, zwłaszcza matematycznych, których trzeba ponieść koszta napisania i koszta druku bez żadnego przemyslowego zysku, i przestać na samem tylko moralnem zadowoleniu z dopełnienia narodowej powinności! Cześć więc i dzięki Hr. Działyńskiemu że, rozumiejąc na czem się opiera przyszłość narodu, mógł i chciał z poświęceniem przedsięwziąć takie wydawnictwo. Bez Niego nasza młodzież, mówię z głębokiem westchnieniem, nie czytałaby ani mojej Arytmetyki ani Geometryi!

To drugie wydanie Geometryi całkiem się różni od pierwszego. Wszystko w niem na nowo przerobione, znacznie powiększone, i ułożone w porządku w jakim dzisiaj wykładają Geometryę na zachodzie.

Od niedawnego czasu, Geometryę Starożytnych uzupełniono wprowadzeniem ogólnych metod Geometryi nowoczesnej. Pierwszą wyłożyłem w całości; z drugiej dałem tyle ile zakres elementarnego dzieła obejmować powinien, to jest: teoryę figur jednokładnych na płaszczyznie i w przestrzeni; stosunek nieharmoniczny i podział harmoniczny; biegunowę i oś pierwiastną, prostolinijną i sferyczną; figury biegunowe wzajemne; teoryę jednokreślności i pęków jednokreślnych, inwolucyę i pęki w inwolucyi; płaszczyzny biegunowe i pierwiastne.

Nadto, wyłożyłem maxima i minima figur płaskich i w przestrzeni; dałem wiedzę fundamentalnych własności trzech linij stożkowych; pokazałem przecięcia stożka i walca obrotowego, i przecięcia przeciwrównoległe stożka kołowego pochyłego. Nakoniec, dałem wiedzę o helicy, zasady perspektywy, teoryę przekształcenia przez promienie wodzące odwrotne, i rzut stereograficzny.

O użytku metod Geometryi nowoczesnej jedno słowo wystarczy. Wiadomo że, aby samą Geometryą Euklidesa otrzymać koło styczne do trzech kół danych, trzeba przejść przez szereg poprzednich zagadnień, tak że ostatnie wykreślenie staje się prawie niemożebnem praktycznie; gdy tymczasem metody Geometryi nowoczesnej dają rozwiązanie *wprost* i ogólne. To rozwiązanie, wskazane przez różnych autorów, uprościłem tak, że odrazu znajduję środek i promień każdego dwojanu kół stycznych do trzech danych.

Do wyłożonych teoryj dołączyłem zastosowania, i wiele rozwiązanych zagadnień; a po każdej księdze umieściłem rozmaite zadania do rozwiązania, dla uczniów którzy chcą zgłębić umiejętność.

Idąc w duchu nowoczesnych metod uczenia, dałem dla twierdzeń dowodzenia wprost, a dla wzajemnic dowodzenia zwane *per absurdum;* dla zagadnień rozwiązania analityczne. W przypadkach niespółmierności, w liniach krzywych i w powierzchniach krzywych, użyłem metody granic, jako jedynej ściśle dydaktycznej.

W tem miejscu, dla lepszego wyjaśnienia rzeczy, zacny Czytelniku, weźmy przykład, i przypuśćmy że chodzi o dowodzenie twierdzenia : *Okręgi dwóch kół są proporcyonalne do promieni,*

to jest $\frac{C}{C'} = \frac{R}{R'}$.

Przedtem, dowodzono tego twierdzenia mówiąc : jeśli ta proporcya nie jest prawdziwa, to dlatego że jeden z jej wyrazów, na przykład C', jest za wielki albo za mały. Biorąc okrąg najpierwej mniejszy od C' a potem większy, okazywano że żaden z dwóch nie sprawdza proporcyi. Ztąd wnoszono że, ponieważ okrąg C' nie jest ani za wielki ani za mały, proporcya $\frac{C}{C'} = \frac{R}{R'}$, jest prawdziwa. To rozumowanie nie jest zupełnie ścisłe; bo, przypuszczając że okrąg większy albo mniejszy od C' sprawdza proporcyę, przypuszcza się temsamem że istnieją okręgi wszelkiej wielkości; a to właśnie było pytaniem. Jest tu więc petycya zasad! żeby jej uniknąć, trzebaby, uważając promień większy albo mniejszy od R', dowodzić że oba przypuszczenia są niemożebne. Ale, mimo tego ulepszenia, dowodzenie zostaje zawsze uboczne.

Gdyby, stosując metodę nieskończenie małych, powiedziano:

Można uważać okrąg jako wielokąt foremny o nieskończenie małych bokach; owoż wielokąty foremne podobne mają się jako promienie, więc dwa okręgi kół mają się także jako promienie; wysłowionoby poprostu twierdzenie bez rzeczywistego dowodu. Albowiem, trzeba przede wszystkiem dowieśdź że biorąc, zamiast okręgu, wielokąt foremny wpisany o nieskończenie małych bokach, popełnia się błąd mniejszy od ilości nieskończenie małej 2° rzędu.

Przejdźmy nareszcie do metody granic. Uważając za widoczne że, *długość okręgu koła jest granicą do której dąży obwód wielokąta wpisanego w miarę jak jego boki maleją nieskończenie*, niektórzy dowodzą rzeczonego twierdzenia, mówiąc: Obwody wielokątów foremnych podobnych są proporcyonalne do swych promieni, *jakkolwiek małe mają boki*; więc okręgi jako granice tych obwodów są także proporcyonalne do swych promieni. To rozumowanie nie jest logiczne, bo przypuszcza że granice ilości zmiennych posiadają ich własności; co nie jest konieczną prawdą.

Żeby można użyć metody granic z całą matematyczną ścisłością, trzeba dać określenie długości łuku koła, dowodząc najpierwej że obwód łamanej wpisanej, której liczba boków rośnie nieskończenie i każdy bok dąży do zera, ma zawsze jedną i tę samą granicę, *jakakolwiek jest* USTAWA *wedle której te boki się zmieniają*; a potem, że łuk koła jest granicą tej łamanej. Czytelnik, przeglądając nasze dowodzenie twierdzenia, osądzi czy jest tak ścisłe jako być powinno. — Niech mi tu będzie wolno zwrócić uwagę uczonych professorów na dowodzenie powierzchni strefy i objętości wycinka sferycznego.

Z tablicy niżej umieszczonej, czytelnik będzie miał wyobrażenie o układzie tej książki, i o liczbie wyłożonych przedmiotów; a przebiegając nawet szybko rozdziały, zobaczy z jakiemi trudnościami miałem do walczenia.

Każdy pojmuje że nie łatwo pisać o rzeczach nad któremi mało kto w naszym języku pracował. Nie znając żadnego polskiego dzieła Geometryi nowoczesnej, musiałem, rad nierad, tworzyć techniczne wyrazy. Jeśli dobre, światli professorowie przyjmą je za swoje; a jeśli niedostateczne, utworzą lepsze. W każdym razie będę korzystał z dobrej rady.

We wszystkich częściach Geometryi, nietylko starałem się o jak największą jasność i nadewszystko o ścisłość dowodzeń, aby dzieło polskie nie ustępowało dziełom umiejętnego zachodu; ale jeszcze pragnąłem zachować wszędzie czystość i dobitność naszej mowy.

Jeśli ta praca, którą poddaję pod sąd ludzi specyalnych, zostanie przyzwoicie oceniona, i przyczyni się do umysłowego rozwoju naszej młodzieży, jako śmiem się spodziewać, będzie to dla Hr. Działyńskiego i dla mnie miłą nagrodą, i zachętą do wydania innych dzieł matematycznych które gotujemy.

Pisałem w Paryżu dnia 31 Stycznia 1869.

G.-H. NIEWĘGŁOWSKI.

TABLICA RZECZY

ZAWARTYCH W TEM DZIELE.

Stronica

GEOMETRYA PŁASKA.

KSIĘGA PIERWSZA

FIGURY PROSTOLINIJNE.

KSIĘGA DRUGA

KOŁO I MIARA KĄTÓW.

KSIĘGA TRZECIA

PROPORCYONALNOŚĆ LINIJ, PODOBIEŃSTWO WIELOKĄTÓW.

KSIĘGA CZWARTA

MIARA POWIERZCHNI.

KSIĘGA PIĄTA

WŁASNOŚCI ODCINKOWE-

GEOMETRYA PRZESTRZENI.

KSIĘGA SZÓSTA

PŁASCZYZNY.

KSIĘGA SIÓDMA

WIELOŚCIANY.

KSIĘGA ÓSMA

WALEC, STOŻEK, SFERA.

Stronica

KSIĘGA DZIEWIĄTA

MIARA TRZECH CIAŁ OKRĄGŁYCH, I WIELOŚCIANY FOREMNE.

KSIĘGA DZIESIĄTA

POWIERZCHNIE KRZYWE W OGÓLNOŚCI.

NOTY.

SKRÓCENIA UŻYWANE W TEM DZIELE.

Dla łatwiejszego zrozumienia dowodzeń, będziemy czasem odsyłali do zadań poprzednio wyłożonych; wtedy, jedna liczba położona w nawiasie, jako (3), oznacza twierdzenie *trzecie* księgi bieżącej; dwie zaś liczby, rzymska i arabska, jako (II, 3), oznaczają księgę *drugą*, twierdzenie *trzecie*.

Litery *uw*, *wn*, *wz*, *zag*, znaczą: *uwagę*, *wniosek*, *wzajemnicę*, *zagadnienie*, do których się odsyła; i tak: (16, *wn.* 2) oznacza twierdzenie XVI, wniosek II księgi bieżącej.

GEOMETRYA

WSTĘP

1. Część wyznaczona przestrzeni nazywa się *objętością.*

Wszelkie ciało zajmuje w przestrzeni miejsce które stanowi jego objętość.

To co oddziela objętość od przestrzeni otaczającej nazywa się *powierzchnią.*

Gdy się dwie powierzchnie przecinają, co mają spólnego nazywa się *linią.* Brzeg powierzchni jest linią.

Gdy się dwie linie przecinają, to co mają spólnego nazywa się *punktem.* Skrajności linii są punktami.

Punkt nie ma żadnej rozciągłości.

Objętość, powierzchnia i linia, pojęte oderwanie od ciała, nazywają się *figurami.*

2. GEOMETRYA jest *umiejętnością własności* i *miary* figur.

3. Dwie figury, które mogą przystać do siebie we wszystkich punktach, nazywają się *równemi.*

4. Każdy wie co jest *linia prosta.* Wiedza linii prostej jest pierwotna, i dlatego określić jej nie można.

Linia prosta stanowi to co nazywamy kierunkiem.

Ze wszystkich linij, tylko linia prosta może się obracać około dwóch którychkolwiek swoich punktów, tak że żaden jej punkt nie zmienia położenia w przestrzeni.

Z tej cechującej własności wynika że:

Dwie linie proste, mające dwa punkta spólne, przystają do siebie w całej rozciągłości. Zatem, Przez dwa punkta można zawsze poprowadzić linię prostą, ale tylko jedną.

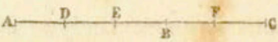
To się wyraża ściślej innemi słowy, mówiąc:

Dwa punkta wyznaczają położenie linii prostej.

Z tego co poprzedza, łatwo wnosimy że:

Linia prosta jest najkrótszą drogą z jednego punktu do drugiego.

Tę własność linii prostej, chociaż nie jest przez się oczywista, bierze się zwykle za jej określenie. I dlatego mówi się że linia prosta, łącząca dwa punkta A i B jest ich *odległością*.



Oznacza się linię prostą dwiema literami w dwóch jej punktach położonemi, i mówi się: *prosta* AB. Ale trzeba rozumieć że odcinek AB jest tylko częścią linii prostej, która przechodzi przez punkta A i B i rozciąga się nieograniczenie na obie strony.

5. *Dodaje się* odcinki linii prostej, przystawiając krańcami jeden do drugiego w tym samym kierunku; *odciąga się*, kładąc mniejszy na większym, zaczynając od spólnej skrajności. I tak, odcinek AC jest *summą* odcinków AB i BC; a zaś odcinek BC *różnicą* odcinków AC i AB.

Idzie za tem że, jeśli odcinki AD, DE, EB, BF i FC, są równe, linia AF (to jest odcinek AF) jest *wieloczynem* linii AD *pomnożonej* przez 4, linia AB wieloczynem linii AC pomnożonej przez $\frac{3}{5}$. I nawzajem, linia AD jest *ilorazem* linii AF *podzielonej* przez 4; a zaś linia AC ilorazem linii AB podzielonej przez $\frac{3}{5}$, albo jej wieloczynem z pomnożenia przez $\frac{5}{3}$. Zogólniając, mówi się, że linia AD *dzieli* linię AC i daje iloraz 5; i że iloraz z podzielenia linii AB przez AC jest $\frac{3}{5}$.

Jeśli teraz weźmiemy linię AD za *jedność linijną*, wtedy wielkości linij prostych AE, AB i AC wyrażą się liczbami 2, 3 i 5.

Między liniami AE, AB, AC, są oczywiście takie których wielkość wyraża się liczbą ułamkową zawartą między 2 i 3, między 3 i 5; a ponieważ od punktu A do punktów D, E,.. jest *ciągłość* punktów pośrednich, ztąd wnosimy że między liniami

AD i AB znajdują się linie, wyrażone liczbami niespółmiernemi $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{10}$, etc. które się mieszczą między 1 i 3. Co dowodzi że istnieją linie niespółmierne. Zatem,

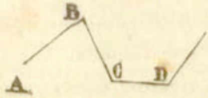
Dwie linie proste moga być *spółmierne*, to jest mieć największą spólną miarę, jako dwie liczby mają największy spólny dzielnik; albo być *niespółmierne*.

6. *Stosunkiem* jednej linii prostej do drugiej jest liczba która wyraża pierwszą gdy druga wzięta za jedność. I tak, stosunkiem linii AB do AC jest liczba $\frac{3}{5}$, to jest $\frac{AB}{AC} = \frac{3}{5}$.

Długością linii prostej jest jej stosunek do *jedności linijnej*. Ale wyraz długość bierze się często za samą linię prostą, i mówi się: długość AB.

Z tego co poprzedza wynika że stosunek dwóch linij prostych może być *spółmierny* albo *niespółmierny*.

7. *Linią łamaną* nazywa się linia złożona z części linij prostych które nie są w jednym kierunku, jako ABCD.



8. Wszelka linia która nie jest ani prosta ani łamana nazywa się *krzywą*, jako MNP. Linia krzywa zmienia ciągle kierunek od jednego punktu do drugiego.

9. Nazywa się PŁASCZYZNĄ powierzchnia nieograniczona, do której przystaje *całkiem* linia prosta, przechodząca przez dwa *jakiekolwiek* jej puntka.

Płasczyzna jest najprostszą z powierzchni. Aby sprawdzić czy powierzchnia np. stołu jest płasczyzną, przykłada się liniał w różnych kierunkach, i patrzy się czy między stołem i liniałem niema żadnej próżni.

10. *Powierzchnią łamaną* jest powierzchnia utworzona z części płasczyzn.

11. Wszelka powierzchnia, która nie jest ani płaska ani łamana, nazywa się ogólnie *powierzchnią krzywą.*

12. Figura nazywa się *płaską*, gdy wszystkie jej punkta leżą na jednej płasczyznie; a *figurą przestrzeni*, ta której punkta nie leżą wszystkie na jednej płasczyznie.

13. Figura, bądź płaska bądź przestrzeni, nazywa się *wypukłą*, gdy linia prosta nie może jej spotykać w więcej niż dwóch punktach.

14. Geometryą płaską nazywa się część geometryi dotycząca figur płaskich.

Geometryą przestrzeni jest ta część geometryi która się zajmuje figurami przestrzeni.

ZNACZENIE WYRAŻEŃ UŻYWANYCH W GEOMETRYI.

Pewnik (*axioma*) jestto prawda oczywista sama przez się, jako:
Całość jest większa od każdéj ze swych części.
Dwie ilości, z których każda równa się trzeciej, są sobie równe; etc.

Twierdzenie (*theorema*) jestto prawda która staje się oczywistą za pomocą rozumowania nazwanego *dowodzeniem.*
Wysłowienie twierdzenia zawiera *założenie i konkluzyę.*

Wzajemnicą twierdzenia jest twierdzenie odwrócone, tak że konkluzya bierze miejsce założenia, i nawzajem. Nie każda wzajemnica jest prawdziwa.

Zagadnienie (*problema*) jestto kwestya zadana do *rozwiązania.*

Wniosek jestto następstwo wywiedzione z twierdzenia albo nawet z zagadnienia.

Uwagą nazywają się spostrzeżenia zrobione nad jednem lub kilkoma zadaniami w celu ich objaśnienia lub zogólnienia.

PODZIAŁ DZIEŁA.

Niniejsze dzieło Geometryi elementarnej składa się z *dziesięciu Ksiąg.*

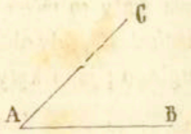
Pięć pierwszych ksiąg zawierają *Geometryę płaską*, a pięć ostatnich, *Geometryę przestrzeni.*

GEOMETRYA PŁASKA(*)

KSIĘGA PIERWSZA

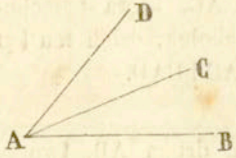
FIGURY PROSTOLINIOWE.

Określenie I. — Dwie linie proste, z jednego wychodzące punktu, ale w dwóch różnych kierunkach, tworzą figurę która się nazywa *kątem*. Jako kąt A.



Linie AB i AC są *ramionami* kąta, a punkt spotkania A jego *wierzchołkiem*.

Kąt osobny oznacza się literą wierzchołka, mówiąc: kąt A, jako wyżej. Ale gdy kilka kątów mają spólny wierzchołek, wtedy, dla odróżniena, oznacza się kąt trzema literami ramion, kładąc we środku literę wierzchołka. I tak, na figurze obok są trzy kąty, BAC, CAD i BAD.



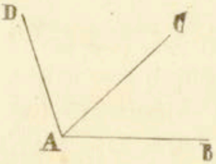
Mówi się że jeden kąt jest mniejszy od drugiego gdy, kładąc pierwszy na drugim tak żeby miały spólne ramie i wierzchołek. drugie ramie pierwszego kąta pada wewnątrz drugiego kąta, I tak, kąt BAC jest mniejszy od kąta BAD.

(*) Dawniej geometryę płaską nazywano Planimetryą; niewłaściwie, bo planimetrya jest tylko częścią geometryi płaskiej.

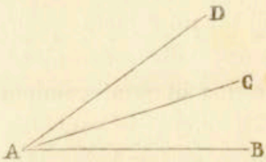
Zatem, jeśli przypuścimy że ramie AC, położone naprzód na ramieniu AB, obraca się około punktu A; w tym obrocie ramie AC, biorąc wszystkie położenia nieprzerwanie po sobie idące, tworzy z ramieniem AB kąt który, zaczynając od zera, rośnie ciągle. To jasno pokazuje że wielkość kąta nie zależy od długości ramion, ale tylko od ich roztworu: tak że wielkością kąta jest właśnie roztwór jaki tworzą dwie linie proste wychodzące z jednego punktu.

Dodaje się dwa kąty kładąc jeden obok drugiego; a *odciąga się*, kładąc jeden na drugim; zawsze tak żeby miały spólne ramie i wierzchołek: tym sposobem kąt BAD jest *summą* kątów BAC i CAD, a zaś kąt CAD *różnicą* kątów BAD i BAC.

II. — Dwa kąty BAC i CAD mające spólne ramie AC i wierzchołek A, ale leżące zewnątrz jeden drugiego, nazywają się *przyległemi*.

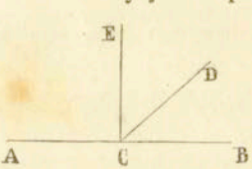


III. — Dwa kąty są *wierzchołkiem przeciwległe*, gdy oba ramiona jednego są przedłużeniem ramion drugiego; jako kąty AOC i BOD.



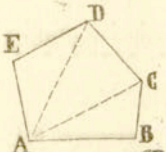
IV. — Nazywa się *dwójsieczną kąta* BAD linia prosta AC, która przechodząc przez wierzchołek, dzieli ten kąt na dwa równe BAC i CAD.

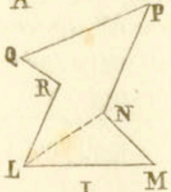
V. — Gdy jedna prosta CE, spotykając drugą AB, tworzy z nią dwa kąty przyległe ECA, ECB równe; każdy z tych kątów nazywa się *kątem prostym*, a linia CE *prostopadłą* do AB. Punkt C jest *spodkiem* albo *stopą* prostopadłej.



Linia prosta CD, tworząca z linią AB kąty przyległe DCA, DCB nierówne, jest pochyłą do tej linii.

VI. — *Wielokątem* nazywa się część płaszczyzny zamknięta liniami prostemi, jako ABCDE, LMNPQR.





Ale, ogólnie mówiąc, nazywa się także wielokątem wszelka linia łamana zamknięta, jako FGHIK.

Linie proste AB, BC, CD... formujące wielokąt, nazywają się jego *bokami;* a ich skrajności A, B, C... *wierzchołkami.*

Summa wszystkich boków stanowi *obwód* wielokąta.

Kąty wielokąta nazywają się *sterczącemi,* jako A, B, C, albo *wklęsłemi,* jako N, R, według jak przestrzeń kątowa jest obrócona na wewnątrz figury albo na zewnątrz.

Linia łącząca dwa wierzchołki wielokąta, nie idące po sobie, nazywa się *przekątną,* jako AC, LN, HK.

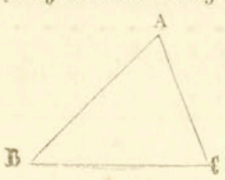
Wielokąt jest *wypukły,* gdy leży cały z jednej strony każdego ze swoich boków, jako ABCDE; bo linia prosta nie może spotykać jego obwodu w więcej niż dwóch punktach.

Przeciwnie, wielokąt LMNPQR nie jest wypukły; albowiem jedna część tego wielokąta leży z jednej strony boku QR przedłużonego, a druga z drugiej strony.

Wielokąt mający trzy boki jest najprostszy ze wszystkich, i nazywa się *trójkątem;* wielokąt o czterech bokach nazywa się *czworokątem* albo *czworobokiem;* o pięciu bokach *pięciokątem,* etc.

Twierdzenie I.

Każdy bok trójkąta jest mniejszy od summy dwóch innych, a większy od ich różnicy.



1° Ponieważ linia prosta BC jest najkrótszą drogą z punktu B do C, więc bok $BC < AB + AC$.

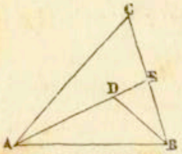
2° Mamy, na mocy 1°, $BC + AC > AB$

Odejmując AC po obydwóch stronach, otrzymamy $BC > AB - AC$.

To przypuszcza że bok AC jest mniejszy od AB.

Gdyby bok AC był większy od AB, dowiedzionoby podobnie że $BC > AC - AB$.

WNIOSEK. — *Jeśli połączymy punkt* D, *wzięty wewnątrz trójkąta* ABC, *ze skrajnościami boku* AB, *liniami prostemi* DA, DB ; *summa tych linij będzie mniejsza od summy dwóch innych boków trójkąta.*



Jakoż, przedłużmy AD aż do spotkania E z bokiem BC ; będzie

W trójkącie ACE, $AD + DE < AC + CE$.

A w trójkącie BDE, $BD < DE + BE$.

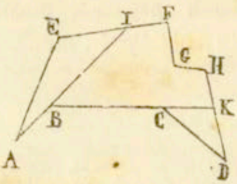
Dodając stronami te dwie nierówności, i odejmując spólną linię DE, otrzymamy

$$AD + BD < AC + CE + BE;$$

więc $$AD + BD < AC + CB.$$

UWAGA. — Poprzedzający wniosek jest tylko szczególnym przypadkiem następującego twierdzenia.

Linia ŁAMANA WYPUKŁA ABCD *jest mniejsza od wszelkiej linii* AEFGHD, *która ją otacza od jednej skrajności* A *do drugiej* D.



Na dowodzenie tego, przedłużmy w jedną stronę boki AB, BC, aż do spotkania I, K, z linią otaczającą.

Mamy oczywiście :

$$AB + BI < AE + EI$$
$$BC + CK < BI + IF + FG + GH + HK$$
$$CD < CK + KD.$$

Więc, dodając i redukując, otrzymamy :

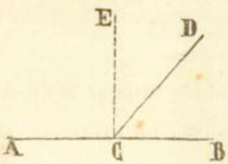
$$AB + BC + CD < AE + EF + FG + GH + HD.$$

PROSTOPADŁE I KĄTY.

Twierdzenie II.

Z punktu danego na linii prostej można zawsze wyprowadzić prostopadłę do tej linii; ale tylko jedną.

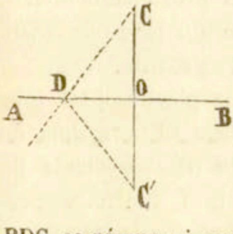
Jakoż, z punktu C danego na prostej AB, można wyprowadzić prostę CD, i obracać ją około punktu C, zaczynając od położenia CB a kończąc na CA. W tym obrocie, kąt DCB jest naprzód zero a potem ciągle rośnie; a zaś kąt przyległy DCA maleje i staje się zero. Ztąd wynika że kąt DCB, najpierwej mniejszy od kąta DCA, staje się mu równy, i potem go przewyższa. Więc istnieje położenie CE prostej CD, i tylko jedno, w którem ta linia, tworząc z daną prostą AB kąty przyległe równe, jest do niej prostopadłą.



Twierdzenie III.

Z punktu C, *danego zewnątrz prostej* AB, *można zawsze spuścić prostopadłę na tę linię; ale tylko jedną.*

1° Można zawsze połączyć punkt C z jakimkolwiek punktem D prostej AB, i poprowadzić przez punkt D prostę DC′, tak żeby czyniła kąt BDC′ równy kątowi BDC; a potem wziąć długość DC′ równą DC, i połączyć CC′: Powiedam że prosta CC′ jest prostopadła do AB.



Jakoż, jeśli położymy trójkąt DOC′ na DOC, obracając około boku DO; bok DC′ pójdzie po boku DC, bo kąty BDC′, BDC są równe; i punkt C′ padnie na C, dlatego że boki DC′, DC są równe. Zatém ramie OC′ przystaje do OC. Więc prosta

AB tworzy z prostą CC′ kąty przyległe AOC, AOC′ równe, a tem samem proste; więc prosta CO jest prostopadła do AB.

2° Powiedam teraz że wszelka prosta CD, różna od prostopadłej CO, jest pochyłą do AB. Jakoż, przedłużmy prostopadłę CO długością OC′ równą OC, i połączmy DC′. Po czem, jeśli położymy trójkąt DOC′ na DOC, obracając około DO, punkt C′ padnie na C; bo kąt DOC′ = DOC i bok OC′ = OC. Więc bok DC′ przystaje do DC; a przeto kąty ODC′, ODC są równe. Owoż, przedłużenie DE prostej CD nie przechodzi przez C′; bo przez dwa punkta C, C′ jedną tylko prostę CC′ poprowadzić można. Zatém kąt ODC′ jest mniejszy od ODE. Co pokazuje że kąt ODC, jako mniejszy od przyległego ODE, nie jest prosty (*określ.* V). Więc prosta CD jest pochyłą do AB.

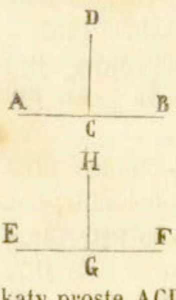
Wniosek. — Ztąd wynika że, jeśli w trójkącie jeden kąt jest prosty, to każdy z dwóch innych musi być mniejszy od prostego.

Uwaga. — Dwa powyższe twierdzenia mogą się zamknąć w jednem *ogólnem* wysłowieniu, jako następuje:

Przez punkt dany, można zawsze poprowadzić prostopadłę do danej prostej; ale tylko jedną.

Twierdzenie IV.

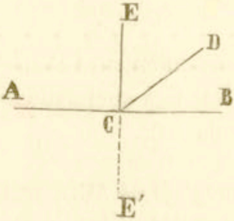
Wszystkie kąty proste są równe.



Niech będzie prosta CD prostopadła do AB, i prosta GH prostopadła do EF; powiedam że kąty proste ACD, EGH są równe.

Połóżmy drugą figurę na pierwszej tak żeby punkt G padł na C, i prosta EF przystała do prostej AB. Wtedy ramie GH przystanie do ramienia CD; bo z punktu C można wyprowadzić jedną tylko prostopadłę do AB. Więc kąty proste ACD, EGH są równe.

WNIOSEK. — Gdy jedna prosta CE jest prostopadła do drugiej AB, jej przedłużenie CE', jest także do niej prostopadłe; bo wszystkie cztery kąty ACE, ECB, BCE', ACE' są proste.



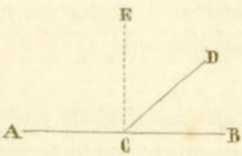
OKREŚLENIE VII. — Wszelki kąt BCD mniejszy od prostego nazywa się *ostrym*, a wszelki kąt ACD większy od prostego nazywa się *rozwartym*.

VIII. — Dwa kąty, których summa równa się dwom kątom prostym, nazywają się *spełniającemi*; kąt BCD jest *spełnieniem* kąta ACD.

A dwa kąty BCD, DCE, których summa równa się kątowi prostemu BCE, są *dopełniającemi*; kąt BCD jest *dopełnieniem* kąta DCE.

TWIERDZENIE V.

Wszelka prosta CD, *spotykająca drugą* AB, *tworzy z nią dwa kąty przyległe spełniające*. I NAWZAJEM.



Jeśli prosta CD jest prostopadła do AB, wtedy kąty przyległe ACD, BCD, są proste, i twierdzenie oczywiste.

Jeśli prosta CD jest pochyłą do AB, można ze spodka C wyprowadzić prostopadłę CE która podzieli kąt ACD, większy z dwóch przyległych, na dwa kąty ACE i ECD, i będzie summa kątów,

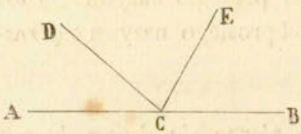
$$ACD + DCB = ACE + ECD + DCB.$$

Owoż, kąt ACE jest prosty, a summa kątów ECD + DCB czyni kąt prosty BCE; więc summa kątów ACD + DCB równa się dwom kątom prostym; to jest, prosta CD tworzy z prostą AB dwa kąty przyległe ACD, DCB spełniające.

Nawzajem, *jeśli dwa kąty przyległe* ACD i DCB *są spełniające, ich ramiona zewnętrzne są przedłużeniem jedno drugiego.*

Jakoż, przedłużenie ramienia AC tworzy z ramieniem CD spełnienie kąta ACD; ale z założenia kąt BCD jest tem spełnieniem; więc ramie CB jest przedłużeniem ramienia AC.

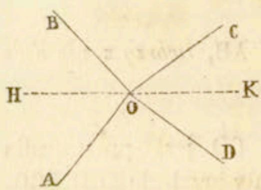
Wniosek I. — *Summa wszystkich kątów przyległych* ACD, DCE, ECB, *które leżą z jednej strony linii prostej, równa się dwom kątom prostym.*



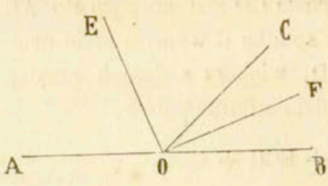
I nawzajem, *jeśli summa kątów przyległych, po sobie idących, równa się dwom prostym, ramiona zewnętrzne są w linii prostej.*

Bo oczywiście summa tych kątów równa się summie dwóch przyległych ACD + DCB.

II. — *Summa wszystkich kątów przyległych* AOB, BOC, COD, DOA, *które leżą naokoło jednego punktu, równa się czterem kątom prostym.*



Jakoż, jeśli przez punkt O poprowadzimy jakąkolwiek prostę HK, summa kątów przyległych, z każdej strony tej linii, będzie równa dwom prostym. Więc summa wszystkich kątów równa się czterem kątom prostym.



III. — *Dwójsieczna* OE, OF *dwóch kątów przyległych spełniających* AOC, COB *są do siebie prostopadłe.*

Jakoż,

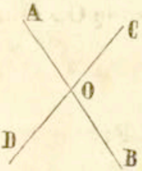
Summa kątów AOC + COB = 2P;

Zatem $$\frac{AOC}{2} + \frac{COB}{2} = 1P,$$

Czyli $$EOC + COF = 1P,$$

Więc dwójsieczne EO i OF są do siebie prostopadłe.

Twierdzenie VI.



Kąty wierzchołkiem przeciwległe są równe.

Niech będą dwie proste AB i CD które, przecinając się, tworzą kąty wierzchołkiem przeciwległe AOC i BOD. Te kąty AOC i BOD są równe jako spełnienia kąta AOD.

Twierdzenie VII.

Jeśli z punktu, wziętego zewnątrz prostej, spuszczono prostopadłę i pochyłe na tę linię; wtedy:

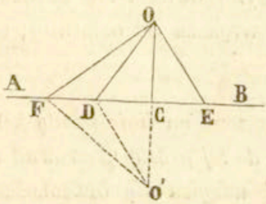
1° *Dwie pochyłe, równo oddalone od spodka prostopadłej, są równe.*

2° *Prostopadła jest krótsza od wszelkiej pochyłej.*

3° *Z dwóch pochyłych ta jest krótsza która się mniej oddala od spodka prostopadłej.*

I nawzajem.

Niech będzie prosta AB na którą, z punktu zewnętrznego O, spuszczono prostopadłę OC, i pochyłe OD, OE, OF.



1° Jeśli CD = CE', pochyłe OD i OE są równe. Bo, jeśli położymy trójkąt CDO na COE, obracając około boku CO; kąt prosty OCD przystanie do prostego OCE, i punkt D padnie na E. Więc pochyła OD jest równa pochyłej OE.

2° Aby dowieśdź że prostopadła OC jest krótsza od wszelkiej pochyłej OD; przedłużmy tę prostopadłę długością CO' równą OC, i połączmy DO'. Na mocy 1°, pochyłe DO, DO' są równe.

Owoż w trójkącie DOO',

$$\text{bok } OO' < OD + DO', \text{ czyli } 2OC < 2OD\text{; zkąd } OC < OD.$$

Więc prostopadła OC mniejsza od pochyłej OD.

3° Uważajmy teraz dwie pochyłe OE i OF, nierówno oddalone od spodka prostopadłej, i przypuśćmy że $CE < CF$; trzeba dowieść że pochyła OE jest mniejsza od OF. Owoż biorąc $CD = CE$, pochyłe OD, OE są równe; więc dość okazać że pochyła OD jest mniejsza od OF. W tym celu, przedłużmy prostopadłę OC długością CO′ równą CO, i połączmy DO′, FO′.

W trójkącie FOO′ mamy (1, *wn.*)

$$OD + DO' < OF + FO', \quad \text{czyli} \quad 2OD < 2OF;$$

więc pochyła OD mniejsza od pochyłej OF.

Nawzajem, jeśli z jednego punktu spuszczono prostopadłę i różne pochyłe na linię prostą, wtedy:

1° *Dwie pochyłe równe mają spodki równo oddalone od prostopadłej.*

Bo, gdyby te spodki nie były równo oddalone od prostopadłej, dwie pochyłe nie byłyby równe.

2° *Pochyła mniejsza ma spodek mniej oddalony od prostopadłej niż większa.*

Bo, jeśli tak nie jest; to, albo oba spodki równo się oddalają od prostopadłej, a wtedy dwie pochyłe byłyby równe; co przeciw założeniu: albo spodek mniejszej pochyłej oddala się bardziej niż większej, a wtedy pierwsza byłaby większa od ostatniej; co także przeciwne założeniu.

Wniosek I. — *Prostopadła* CO, *spuszczona na linię prostą* AB, *jest najkrótszą linią, jaką z tego punktu do tej prostej poprowadzić można; dlatego długość tej prostopadłej nazywa się* ODLEGŁOŚCIĄ *punktu* C *od* PROSTEJ AB.

II. — *Z jednego punktu tylko dwie pochyłe równe na linię prostą spuścić można, i te pochyłe są z obydwóch stron prostopadłej.*

Uwaga ogólna. — Wzajemnice twierdzeń dowodzą się zwykle tak zwaną *metodą przywiedzenia do niedorzeczności* (reductio ad absurdum). Zależy ona na tem że się przypuszcza zadanie samo jakoby nieprawdziwe, i ztąd wywodzą się następstwa możebne; a jeśli wszystkie są sprzeczne, bądź z przypuszczeniem, bądź z jaką prawdą już dowiedzioną, wtedy zadanie jest niezaprzeczalnie prawdziwe. — Powyższe dowodzenie wzajemnic może służyć za przykład i wyjaśnienie tej metody.

Ztąd wynika ogólne prawidło dotyczące wzajemnic, do którego często odsyłać będziemy.

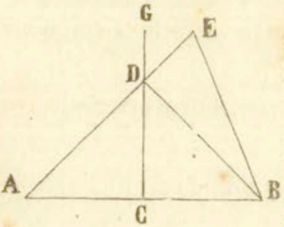
Jeśli wysłowienie twierdzenia zawiera wszystkie założenia jakie w jego przedmiocie zrobić można, i każde prowadzi do konkluzyi wyłącznie różnej, wtedy wzajemnice tego twierdzenia są koniecznie prawdziwe.

Twierdzenie VIII.

Wszelki punkt prostopadłej wyprowadzonej ze środka linii prostej, jest równo oddalony od obydwóch skrajności tej linii.

A wszelki punkt leżący poza prostopadłą nie jest równo oddalony od tychże skrajności

I nawzajem.



1° Niech będzie D, jakikolwiek punkt prostopadłej CG wyprowadzonej ze środka C prostej AB. Połączmy DA, DB.

Ponieważ CA = CB, więc pochyłe DA i DB są równe.

2° Niech będzie E punkt poza prostopadłą CG. Połączmy EA, EB i DB.

W trójkącie BDE mamy $EB < BD + DE$.

A że $BD = AD$ (1°), więc $EB < AD + DE$ czyli $EB < EA$.

Nawzajem, 1° *Wszelki punkt, równo oddalony od obydwóch skrajności linii prostej, leży na prostopadłej wyprowadzonej z jej środka.*

2° *Wszelki punkt nierówno oddalony od tychże skrajności leży zewnątrz rzeczonej prostopadłej.*

Obie wzajemnice są oczywiste (7 *uw.*)

Określenie IX. — *Nazywa się* miejscem geometrycznem *ciąg nieprzerwany punktów mających wyłącznie te same własności.*

Na mocy tego określenia, powyższe twierdzenie ze swemi wzajemnicami zogólnia się w następującem wysłowieniu:

Prostopadła, wyprowadzona ze środka linii prostej, jest miejscem geometrycznem punktów równo oddalonych od obydwóch skrajności tej linii.

TRÓJKĄTY, ICH RÓWNOŚĆ.

Określenie X. — Trójkąt nazywa się *równobocznym* gdy ma wszystkie boki równe; *rownoramiennym*, gdy ma dwa boki równe.

XI. — *Podstawą* trójkąta jest bok którykolwiek; a *wysokością*, prostopadła spuszczona na podstawę z wierzchołka przeciwległego.

Ale w trójkącie równoramiennym, nazywa się zwykle podstawą bok przyległy ramionom równym; a wierzchołkiem, wierzchołek przeciwległy tej podstawie.

XII.—Linia łącząca środek boku z wierzchołkiem przeciwległym trójkąta nazywa się *ośródkową.*

XIII. — Trójkąt mający wszystkie kąty równe nazywa się *równokątnym.*

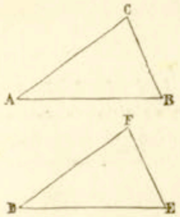
XIV. — Trójkąt jest *prostokątnym, rozwartokątnym* albo *ostrokątnym*, według jak ma kąt *prosty*, *rozwarty* albo same kąty *ostre.*

Bok przeciwległy kątowi prostemu trójkąta nosi imie *przeciwprostokątnej.*

Twiedzenie IX.

Dwa trójkąty są równe, gdy mają bok równy przyległy *duom kątom równym, każdy każdemu.*

Niech będzie bok AB=DE, i kąty przyległe A=D i B=E;



powiedam że dwa trójkąty ABC, DEF są równe.

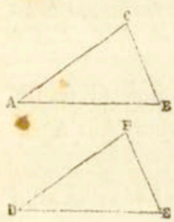
Jakoż, połóżmy trójkąt ABC na DEF, tak żeby wierzchołek A padł na D, i bok AB wziął kierunek boku równego DE; wtedy, wierzchołek B padnie na E, bo te boki są równe. A że kąty A i D są równe; bok AC pójdzie po DF, i wierzchołek C padnie na punkt linii DF. Tak samo, ponieważ kąty B, E są równe; bok BC pójdzie po EF, i wierzchołek C padnie na linię EF. Zatem, punkt C, padając zarazem na dwie pooste DF i EF, musi padać na ich spólnem przecięciu F. Więc dwa trójkąty ABC, DEF, przystając do siebie we wszystkich punktach, są równe.

Uwaga. — Z przystawania tych dwóch trójkątów wynika że bok AC = DF, bok BC = EF i kąt C = F.

Twierdzenie X.

Dwa trójkąty są równe, gdy mają kąt równy ZAWARTY *między dwoma bokami równemi, każdy każdemu.*

Niech będzie kąt A = D, bok AB = DE, i bok AC = DF: po-



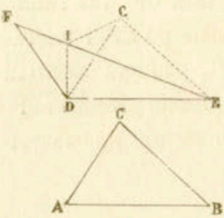
wiedam że dwa trójkąty ABC, DEF są równe.

Jakoż, połóżmy trójkąt ABC na DEF, tak żeby wierzchołek A padł na D, i bok AB przystał do swego równego DE; wtedy wierzchołek B padnie na E. A że kąty A i D są równe, bok AC pójdzie po DF; i wierzchołek C padnie na F, bo boki AC, DF są równe. Zatem, boki BC i EF przystają do siebie i są równe. Więc dwa trójkąty ABC, DEF są równe.

Uwaga. — Z przystawania tych trójkątów wynika że bok BC = EF, kąt B = E i kąt C = F.

Twierdzenie XI.

Gdy dwa trójkąty mają dwa boki równe, każdy każdemu, ZAWIERAJĄCE KĄT NIERÓWNY, *wtedy naprzeciw kąta mniejszego leży bok mniejszy.* I NAWZAJEM.



Niech będą dwa trójkąty ABC, DEF, w których bok $AB = DE$ i bok $AC = DF$, a kąt zawarty $A < EDF$; powiedam że bok $BC < EF$.

Jakoż, połóżmy trójkąt ABC na DEF, tak żeby bok AB przystał do swego równego DE. Wtedy, ponieważ kąt A jest mniejszy od kąta EDF, bok AC padnie w kącie EDF, i trójkąt ABC weźmie położenie DEC. Poprowadźmy teraz dwójsieczną DI kąta CDF, i połączmy IC. Dwa trójkąty DIC, DIF, mające bok DI spólny, bok $DC = DF$, i kąty między niemi zawarte równe z wykreślenia, są równe na mocy poprzedzającego twierdzenia. Więc bok $IC = IF$. A że, w trójkącie CEI, bok $EC < EI + IC$, czyli $EC < EI + IF$; więc $BC < EF$.

NAWZAJEM, *gdy dwa trójkąty mają dwa boki równe, każdy każdemu, a* TRZECI BOK NIERÓWNY; *wtedy naprzeciw trzeciego boku mniejszego leży kąt mniejszy.*

To jest, jeśli w dwóch trójkątach ABC, DEF, bok $AB = DE$ i bok $AC = DF$, a zaś bok BC mniejszy od EF; wtedy kąt A jest mniejszy od kąta D.

Jakoż, jeśli kąt A nie jest mniejszy od D, to może być tylko albo mu równy albo od niego większy. W pierwszym przypadku, dwa trójkąty ABC, DEF, mające kąt równy zawarty między dwoma bokami równemi, każdy każdemu, byłyby równe; a więc bok BC byłby równy bokowi EF; co niedorzeczne, bo bok BC jest z założenia mniejszy od EF. W drugim przypadku, bok BC byłby, na mocy samego twierdzenia, większy od EF; co się także sprzeciwia założeniu. Więc kąt A, nie będąc ani równy kątowi D ani od niego większy, jest od niego mniejszy.

TWIERDZENIE XII.

Dwa trójkąty są równe, gdy mają TRZY *boki równe, każdy każdemu.*

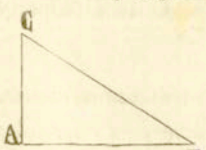
Niech będą dwa trójkąty ABC, DEF mające boki AB = DE, AC = DF, BC = EF; powiedam że te trójkąty są równe.

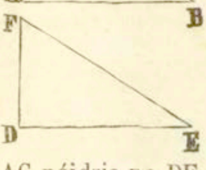
Jakoż, gdyby kąty A i D były równe; dwa trójkąty, mające kąt równy zawarty między dwoma bokami równemi, każdy każdemu, byłyby równe.

W samej rzeczy kąty A i D muszą być równe; bo inaczej, boki im przeciwległe BC, EF nie byłyby równe. Więc dwa trójkąty ABC, DEF równoboczne między sobą, są równe (*).

TWIERDZENIE XIII.

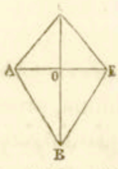
Dwa trójkąty PROSTOKĄTNE *są równe, gdy mają przeciwprostokątnę i bok odpowiednio równe.*





Niech będą dwa trójkąty ABC i DEF prostokątne przy A i D, w których przeciwprostokątna BC = EF i bok AB = DE; powiedam że te trójkąty są równe.

Jakoż, połóżmy trójkąt ABC na DEF, tak żeby wierzchołek A padł na D, i bok AB przystał do swego równego DE; wtedy bok AC pójdzie po DF, bo kąty A i D są proste. A że teraz pochyłe



(*) Można wprost dowieśdź tego twierdzenia.

Przystawmy do siebie dwa trójkąty ABC, BCE, tak żeby miały jeden bok BC spólny.

Ponieważ bok AB = EB i bok AC = EC, punkta B i C, są równo oddalone od punktów A i E: więc prosta BC jest prostopadła we środku prostej AE. Zatem jeśli, obracając około BC, przyłożymy trójkąt ABC do BEC, prostopadła OA przystanie do swej równej OE, wierzchołek A padnie na E. Zatem dwa trójkąty przystają do siebie we wszystkich punktach. — Więc są równe.

równe BC i EF są spuszczone z jednego punktu E na prostę DF; zatem odległości AC, DF ich spodków od prostopadłej są równe. Więc dwa trójkąty ABC, DEF, równoboczne między sobą, są równe.

Twierdzenie XIV.

Dwa trójkąty PROSTOKĄTNE *są równe, gdy mają przeciwprostokątne i kąt ostry odpowiednio równe.*

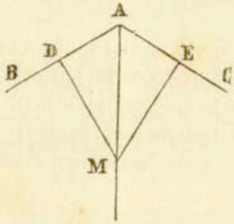
Niech będą dwa trójkąty ABC, DEF (*powyższa figura*) prostokątne przy A i D, w których przeciwprostokątna BC = EF i kąt B = E.

Połóżmy trójkąt DEF na ABC, tak żeby wierzchołek E padł na B, i bok ED poszedł po BA. Wtedy, ponieważ kąt B = E, bok EF pójdzie po BC; i wierzchołek F padnie na C, bo boki BC i EF są równe; nakoniec, bok FD, prostopadły do ED, weźmie kierunek prostopadłej CA; bo z punktu C jedną tylko prostopadłę na AB spuścić można. Zatem wierzchołek D, padając zarazem na kierunki BA i AC, pada na wierzchołek A. Więc dwa trójkąty ABC, DEF są równe.

Uwaga ogólna. — Należy uważać że, *gdy dwa trójkąty są równe, wtedy te ich kąty są równe które leżą naprzeciw boków równych*; i nawzajem, *te boki są równe które leżą naprzeciw kątów równych.*

Twierdzenie XV.

Wszelki punkt leżący na dwójsiecznéj kąta jest równo oddalony od jego ramion. I NAWZAJEM.



Z punktu M leżącego na dwójsiecznej AM kąta BAC, spuśćmy, na jego ramiona, prostopadłe MD i ME. Dwa trójkąty prostokątne AMD i AME, mające przeciwprostokątnę MA spólną i kąt MAD = MAE, są równe. Więc prostopadłe MD i ME są równe.

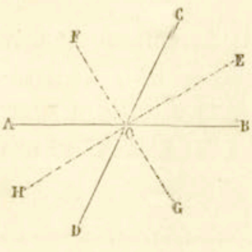
Nawzajem, *wszelki punkt* M, *wzięty wewnątrz kąta* BAC *i w równej odległości* MD = ME *od jego ramion, leży na dwójsiecznej tego kąta.*

Jakoż, prostopadłe równe MD i ME, padając po obydwóch stronach linii MA, tworzą trójkąty prostokątne MAD, MAE równe. Więc kąt MAD = MAE, i prosta MA jest dwójsieczną kąta BAC.

Wniosek. — Ztąd wynika że wszelki punkt nierówno oddalony od ramion kąta nie leży na jego dwójsiecznéj. Więc,

Dwójsieczna kąta jest miejscem geometrycznem punktów równo oddalonych od jego ramion.

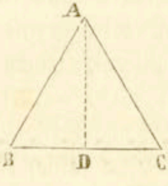
Uwaga. — Dwie linie proste, przecinające się, tworzą cztery kąty; zatem powyższy wniosek zogólnia się w następującem wysłowieniu:



Miejscem geometrycznem punktów równo oddalonych od dwóch linij prostych AB i CD, *które się przecinają, jest układ dwóch prostopadłych* EH, FG *które są dwójsiecznemi kątów tych dwóch linij.*

Twierdzenie XVI.

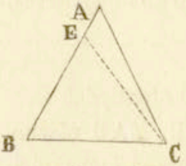
W trójkącie równoramiennym naprzeciw boków równych leżą kąty równe. I nawzajem.



Niech będzie trójkąt ABC, w którym boki AB i AC są równe. Połączmy wierzchołek A ze środkiem D podstawy BC. Dwa trójkąty ADB, ADC, mające trzy boki równe każdy każdemu, są równe. Więc kąt B jest równy kątowi C (14, uw.).

Nawzajem, *jeśli dwa kąty trójkąta są równe, boki im przeciwległe są także równe, i trójkąt jest równoramienny.*

Niech będzie trójkąt ABC w którym kąty B i ACB są równe.



Na kierunku boku AB weźmy długość BE równą bokowi AC, i połączmy CE. Dwa trójkąty BCE i BCA, są równe; albowiem mają bok BC spólny, boki BE i CA równe, i kąty B i BCA między temi bokami zawarte równe. Zatem kąt BCE jest równy kątowi B; a że kąty B i BCA są równe z założenia, więc kąt BCE jest rowny kątowi BCA. To dowodzi że boki CE i CA stanowią jednąlinię prostą, czyli że punkt E przypada w A. Więc boki AB i AC są równe, i trójkąt ABC jest równoramienny.

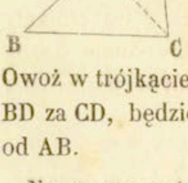
Wniosek.—Trójkąt równoboczny jest równokątny; i nawzajem, trójkąt równokątny jest równoboczny.

Uwaga. — Z równości trójkątów ADB i ADC wynika że: 1° kąty przy D są równe, a zatem proste; 2° Kąt DAB = DAC. To pokazuje że, *w trójkącie równoramiennym, linia łącząca środek podstawy z wierzchołkiem jest prostopadłą do podstawy i dwójsieczną kąta przy wierzchołku.*

Twierdzenie XVII.

W każdym trójkącie, naprzeciw kąta mniejszego jest bok mniejszy. I nawzajem.

Niech będzie trójkąt ABC. Jeśli kąt B jest mniejszy od BCA, bok AC jest także mniejszy od boku AB.

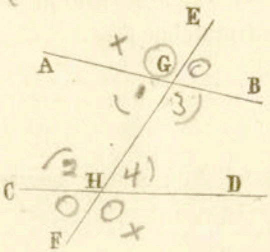


Jakoż, przez wierzchołek większego kąta C, poprowadźmy prostę CD, tak żeby czyniła z bokiem CB kąt DCB równy kątowi B; trójkąt BCD będzie równoramienny bok CD = BD. Owoż w trójkącie ACD, bok $AC < AD + DC$; więc, podstawiając BD za CD, będzie $AC < AD + BD$. Więc bok AC jest mniejszy od AB.

Nawzajem, *w trójkącie naprzeciw boku mniejszego leży kąt mniejszy.* Co widoczne (7, uw.).

RÓWNOLEGŁE.

Dwie proste AB, CD, przecięte trzecią EF, która się nazywa *sieczną* albo *poprzeczną*, tworzą z nią osiem kątów, mianowanych jako następuje :



1° *Kąty wewnętrzne*, które leżą wewnątrz dwóch linij prostych AB i CD z obydwóch stron siecznej EF. Takiemi są *cztery* kąty AGF, CHE, BGF, DHE.

2° *Kąty zewnętrzne*, utworzone zewnątrz linij prostych AB, CD z obydwóch stron siecznej EF. Takiemi są cztery kąty AGE, CHF, BGE, DHF.

3° *Kąty naprzemianległe wewnętrzne* są dwa kąty wewnętrzne, które leżą z obydwóch stron siecznej, jako AGF i DHE. Tak samo kąty BGF i CHE.

4°. *Kąty naprzemianległe zewnętrzne* są dwa kąty zewnętrzne, leżące z obydwóch stron siecznej, jako AGE i DHF. Tak samo kąty BGE i CHF.

5°. *Kąty odpowiedające* są dwa kąty jednostronne, jeden wewnętrzny a drugi zewnętrzny, jako AGE i CHE ; albo AGF i CHF. Tak samo kąty BGE i DHE, albo BGF i DHF.

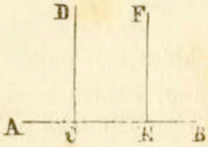
Określenie XV. — Dwie proste nazywają się równoległemi, gdy *leżą na jednej płaszczyźnie i nie mogą się spotykać*, jakkolwiek daleko byłyby przedłużone.

Istnienia równoległych dowodzi następujące twierdzenie.

Twierdzenie XVIII.

X

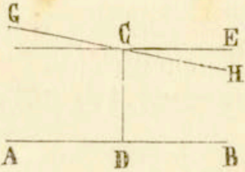
Dwie proste prostopadłe do trzeciej są równoległe.



Bo gdyby dwie proste CD i EF, prostopadłe do prostej AB, spotykały się, możnaby z punktu ich spotkania spuścić dwie prostopadłe na AB; co niemożebne (3).

Twierdzenie XIX.

Przez punkt C, *dany zewnątrz linii prostej* AB, *można zawsze poprowadzić równoległę do tej linii.*



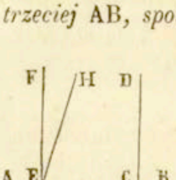
Jakoż, jeśli z punktu C spuścimy prostopadłę CD na AB, i wyprowadzimy prostopadłę CE do CD; dwie proste CE i AB, obie prostopadłe do CD, będą równoległe.

Postulatum. — Przyjmujemy jako prawdę, mniej więcej oczywistą, że:

Przez punkt, dany zewnątrz linii prostej, można poprowadzić jedną tylko równoległę do tej linii (*).

Wniosek I. — Ztąd wynika że:

Dwie proste, jedna CD *prostopadła a druga* EH *pochyła do trzeciej* AB, *spotykają się.*



Jakoż, przez punkt E można poprowadzić do AB prostopadłę EF która będzie równoległa do CD; więc pochyła EH, nie będąc równoległa do CD na mocy postulatum, spotyka tę prostopadłę CD.

(*) Zobacz notę na końcu dzieła.

II. — *Dwie proste, równoległe do trzeciej, są równoległe między sobą.*

Bo, gdyby się spotykały, możnaby przez punkt ich spotkania poprowadzić dwie równoległe do jednej prostej. Co niemożebne na mocy postulatum.

Ważna uwaga. — Dowieśdź z niezaprzeczalną ścisłością że :

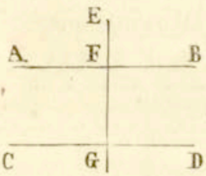
Przez jeden punkt nie można prowadzić dwóch równoległych do tej samej linii prostej ;

albo *że : Dwie proste, jedna prostopadła a druga pochyła do trzeciej, spotykają się ;*

nie zdaje się możebnem, z przyczyny właśnie określenia równoległych. Mimo licznie probowanych dowodzeń, zwykle Geometrowie biorą jedno z tych twierdzeń, które zresztą są następstwem jedno drugiego, za *postulatum*, to jest za prawdę niema. oczywistą, na którą się przyzwala bez matematycznego dowodu. Tym sposobem postulatum nie rozwiązuje węzła trudności równoległych, ale go rozcina.

Twierdzenie XX.

Gdy dwie proste AB, CD *są równoległe, wszelka prosta* EF *prostopadła do jednej z nich jest prostopadła do drugiej.*



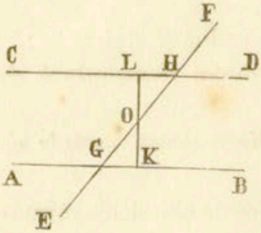
Jakoż, prosta EF, prostopadła do AB, spotyka CD w punkcie G ; bo przez punkt F nie można prowadzić dwóch równoległych : ta prosta EF musi być prostopadłą do CD; bo inaczej dwie proste AB i CD nie byłyby równoległe (19, *wn.* 1).

Wniosek. — Ztąd wynika że :

Dwie proste prostopadłe, każda do jednej z dwóch innych prostych, są równoległe albo się przecinają, według jak te dwie inne są równoległe albo się przecinają.

Twierdzenie XXI.

Dwie równoległe tworzą z sieczną wszystkie kąty ostre równe między sobą, i wszystkie kąty rozwarte także równe między sobą.



Niech będą dwie równoległe AB, CD przecięte sieczną EF. Aby dowieśdź że cztery kąty ostre, utworzone przez te trzy linie, są równe między sobą, dość okazać równość dwóch kątów naprzemianległych wewnętrznych BGH, CHG.

Przez środek O, odcinka GH, poprowadźmy prostopadłę OK do AB; ta prosta OK będzie zarazem prostopadłą do CD (20). Owoż, dwa trójkąty prostokątne OGK, OHL są równe, bo mają przeciwprostokątnę OG = OH, i kąty ostre GOK, HOL równe jako wierzchołkiem przeciwległe; więc kąty ostre OGB i OHC są równe. A że kąt OGB = AĠE, i kąt OHC = DHF, jako wierzchołkiem przeciwległe; więc kąty ostre przy G są równe kątom ostrym przy H.

Ztąd wnosimy że kąty rozwarte przy G są równe kątom rozwartym przy H, jako spełnienia kątów ostrych równych.

I tak samo o innych.

Wzajemnica powyższego twierdzenia nie jest prawdziwa; dlatego daje się zwykle wysłowienie twierdzenia, jako następuje.

Dwie równoległe przecięte sieczną tworzą z nią:

1° *Kąty odpowiadające równe.*

2° *Kąty naprzemianległe wewnętrzne równe.*

3° *Kąty naprzemianległe zewnętrzne równe.*

4° *Kąty jednostronne wewnętrzne spełniające.*

5° *Kąty jednostronne zewnętrzne spełniające.*

I nawzajem.

Albowiem dwa kąty odpowiedające, albo naprzemianległe wewnętrzne, albo naprzemianległe zewnętrzne są oba ostre albo rozwarte; a więc równe, na mocy powyższego dowodzenia.

Z dwóch kątów jednostronnych wewnętrznych albo zewnętrznych, jeden jest ostry a drugi rozwarty; więc te kąty są spełniające.

Nawzajem, *dwie proste są równoległe jeśli, przecięte sieczną, tworzą z nią kąty które zadość czynią jednemu z pięciu wymienionych warunków.*

I tak, *dwie proste* AB, CD (fig. powyższa), *tworzące z sieczną* EF *kąty odpowiedające równe* AGF, CHF, *są równoległe.*

Jakoż, gdyby przez punkt H poprowadzono równoległę do AB, toby ona tworzyła z sieczną EF kąt odpowiedający równy kątowi AGF. Ale kąt CHF jest właśnie odpowiedający równy kątowi AGF; więc prosta CD jest równoległa do AB.

Dowiedzionoby podobnie czterech innych wzajemnic.

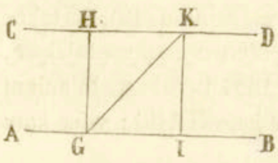
Wniosek. — Z tego twierdzenia i jego wzajemnic wynika że dwie proste spotykają się, gdy tworzą z sieczną kąty które nie dopełniają jednego z *pięciu* wymienionych warunków.

Twierdzenie XXII.

X

Dwie równoległe są wszędzie równo odległe.

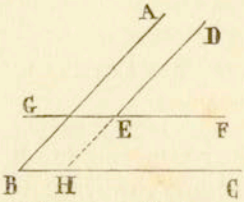
Niech będą dwie równoległe AB i CD. Odległością tych linij jednej od drugiej jest oczywiście spólna prostopadła; dość więc dowieśdź że dwie spólne prostopadłe GH, IK są równe. Połączmy GK. Dwa trójkąty prostokątne GIK, GHK, mające spólną przepciwrostokątnę GK, i kąty ostre IGK, HKG równe jako naprzemianległe wewnętrzne względem danych równoległych, są równe. Zatem prostopadłe GH i IK są równe. A że punkta G i I są jakiekolwiek, więc dwie równoległe AB, CD mają wszędzie równą odległość.



Uwaga. To twierdzenie usprawiedliwia niejako przyjęte postulatum teoryi równoległych.

Twierdzenie XXIII.

Dwa kąty mające ramiona równoległe, każde do każdego, są równe albo spełniające.



1° Niech będą dwa kąty ABC, DEF, których ramiona BA, ED są równoległe i skierowane w jedną stronę; ramiona BC i EF równoległe i także skierowane w jedną stronę. Powiedam że te kąty są równe.

Jakoż, przedłużmy ramie ED aż do punktu spotkania H z ramieniem BC. Dwa kąty ABC, DHC są równe jako odpowiedające względem równoległych AB i DH; tak samo, kąty DEF, DHC są równe jako odpowiedające względem równoległych BC i EF. Więc kąt ABC równy kątowi DEF.

2° Uważajmy teraz dwa kąty ABC, GEH, mające ramiona BA i EH równoległe ale skierowane w strony przeciwne, i ramiona BC i EG równoległe ale także skierowane w strony przeciwne. Te kąty są równe; bo kąt GEH jest równy kątowi DEF jako wierzchołkiem przeciwległy, a ten ostatni równy kątowi ABC, na mocy 1°. Więc kąt ABC równy kątowi GEH.

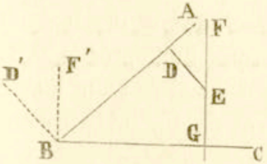
3° Nakoniec dwa kąty ABC, DEG, mające ramiona BA, ED równoległe i skierowane w jedną stronę, a zaś ramiona BC, EG także równoległe ale skierowane w strony przeciwne, są spełniające. Jakoż, jeśli przedłużymy ramie EG, kąt DEG będzie spełnieniem kąta DEF; owoż ten ostatni jest równy kątowi ABC; więc kąty ABC, DEG są spełniające.

Tak samo kąty ABC, FEH są spełniające.

Twierdzenie XXIV.

Dwa kąty mające ramiona prostopadle, każde do każdego, są równe albo spełniające.

Niech będą dwa kąty ABC, DEF mające ramiona BA, ED prostopadłe do siebie, i ramiona BC, EF także prostopadłe do siebie. Te kąty ostre są równe.



Jakoż, przez wierzchołek B, poprowadźmy proste BD', BF', odpowiednio prostopadłe do ramion BA i BC; te proste będą równoległe do ED, EF, i kąty D'BF', DEF, mające ramiona równoległe, każde do każdego i w te same strony, są równe. Owoż kąty ABC, D'BF' są równe jako dopełnienia kąta ABF'; więc kąt ABC jest równy kątowi DEF.

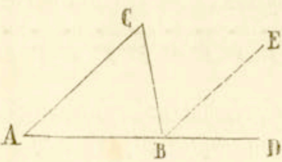
Ztąd wynika że kąty ABC, DEG, mające ramiona BA, ED prostopadłe do siebie, i ramiona BC, EG także prostopadłe do siebie, są spełniające. Jakoż, jeśli przedłużymy ramie EG, kąt DEF będzie spełnieniem kąta DEG; a że, na mocy powyższego dowodzenia, kąty ABC, DEF są równe; więc kąty ABC, DEG są spełniające.

Uwaga.— Jeśli z wierzchołka kąta ABC patrzymy na przestrzeń kątową, widzimy ramie BC na prawo a ramie BA na lewo. Otoż, na mocy tej uwagi, dwa poprzedzające twierdzenia mogą się z ogólnić i wysłowić z większą dobitnością, jako następuje :

Dwa kąty, mające ramiona równoległe albo prostopadłe, są równe albo spełniające, według jak ramiona równoległe albo prostopadłe są albo nie są oba tego samego imienia. — I tak : kąty ABC, DEF są równe; bo ramie prawe BC jest równoległe albo prostopadłe do prawego EF, a zaś lewe BA do lewego ED. Przeciwnie, kąty ABC, DEG są spełniające, bo ramie lewe BA jest równoległe albo prostopadłe do prawego ED, a zaś prawe BC do lewego EG ; etc.

Twierdzenie XXV.

Summa trzech kątów trójkąta równa się dwom kątom prostym.



W trójkącie ABC, przedłużmy bok AB, i przez wierzchołek B, poprowadźmy prostę BE równoległą do AC.

Kąty A i EBD są równe jako odpowiedające względem równoległych AC, BE; a kąty C i CBE są także równe jako naprzemianległe wewnętrzne względem tych samych równoległych AC, BE. Owoż, summa trzech kątów przyległych ABC, CBE, EBD, które leżą z jednéj strony linii prostéj AB, równa się dwom kątom prostym (5, *wn.* 1); więc, w trójkącie ABC, summa trzech kątów A, C, ABC równa się także dwom kątom prostym.

Wniosek I. — *Kąt zewnętrzny trójkąta równa się summie dwóch kątów wewnętrznych nieprzyległych*, to jest: kąt CBD = A + C.

II. — Trójkąt nie może mieć dwóch kątów prostych, a tém bardziéj dwóch kątów rozwartych.

W trójkącie prostokątnym kąty ostre są dopełniające.

III. — Każdy kąt trójkąta *równokątnego* jest jedną trzecią dwóch kątów prostych, czyli *dwiema trzeciemi* kąta prostego.

IV. — Jeśli dwa kąty jednego trójkąta są odpowiednio równe dwom kątom drugiego; albo, jeśli tylko summa dwóch pierwszych kątów równa summie dwóch drugich; wtedy trzecie kąty tych trójkątów są także równe.

WIELOKĄTY.

Określenie XVI. — Wielokąt nazywa się *równobocznym* gdy ma wszystkie boki równe, *równokątnym* gdy ma wszystkie kąty równe.

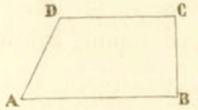
XVII. — Wielokąt zarazem *równoboczny* i *równokątny* nazywa się *foremnym*; jako trójkąt równoboczny, kwadrat, etc.

XVIII. — Dwa wielokąty mające wszystkie boki równe, każdy każdemu i w tym samym porządku ułożone, *są równoboczne między sobą.*

A zaś wielokąty mające wszystkie kąty równe, każdy każdemu, i w tym samym porządku ułożone, są *równokątne między sobą.*

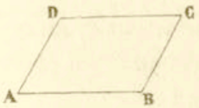
W obydwóch przypadkach, boki równe albo kąty równe, mające jednakowe położenie w dwóch wielokątach, nazywają się *odpowiednemi*.

XIX. — Między *czworobokami* należy uważać następujące:



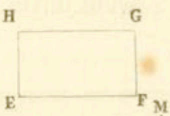
Trapez, mający dwa tylko boki równoległe, jako ABCD.

Te boki równoległe AB, CD są *podstawami*, a ich odległość *wysokością* trapezu.

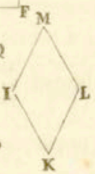


Równoległobok, mający wszystkie boki przeciwległe równoległe, jako ABCD (*figura naprzeciwko*).

Podstawą równoległoboku jest bok którykolwiek, a wysokością odległość podstawy od boku przeciwległego.



Prostokąt, mający wszystkie kąty proste jako EFGH.

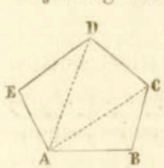


Ukośnik albo *kwadrat ukośny*, (*rhombus*) mający wszystkie boki równe, jako IKLM.

Kwadrat, mający wszystkie boki równe i kąty proste, jako NPQR.

TWIERDZENIE XXVI.

W wielokącie wypukłym, summa kątów wewnętrznych równa się tyle razy dwom kątom prostym ile jest boków mniej dwa.



Z jednego wierzchołka A poprowadźmy przekątne AC, AD do wszystkich innych. Wielokąt rozdziela się wtedy na tyle trójkątów ile ma boków mniej dwa, i oczywiście summa jego kątów wewnętrznych równa się summie kątów wszystkich trójkątów. A że summa kątów każdego trójkąta równa się dwom kątom prostym; więc summa kątów wewnętrznych wielokąta wypukłego równa się dwom kątom prostym wziętym tyle razy ile ten wielokąt ma boków mniej dwa (*).

Wniosek. — *Dwa wielokąty o* n *bokach są równokątne między sobą, gdy mają* n — 1 *kątów odpowiednio równych.*

Uwaga. — Jeśli weźmiemy kąt prosty za *jedność kątów* i oznaczymy przez n liczbę boków wielokąta, wartość summy kątów wewnętrznych będzie

$$2\,(n-2), \quad \text{czyli} \quad 2n-4.$$

I tak, w czworokącie $n=4$; podstawiając tę wartość, utrzymujemy $2\,(4-2)=4$. Więc *summa kątów wewnętrznych czworokąta wypukłego równa się czterem kątom prostym.*

Ztąd wynika że jeśli czworokąt jest równokątny, wszystkie jego kąty są proste.

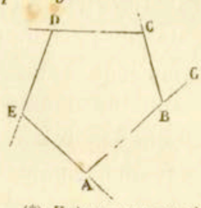
Na mocy powyższej formuły, w wielokącie równokątnym mającym n boków, wartość kąta wewnętrznego jest

$$\frac{2n-4}{n} \quad \text{czyli} \quad 2-\frac{4}{n}.$$

Zatem, w miarę jak liczba boków n rośnie, ułamek $\frac{4}{n}$ maleje, i wartość $2-\frac{4}{n}$ kąta wewnętrznego zbliża się coraz bardziej do 2P, swej granicy.

Twierdzenie XXVII.

W wielokącie WYPUKŁYM *summa kątow zewnętrznych, które się tworzy przedłużając wszystkie boki, równa się czterem kątom prostym.*



Jakoż, przy każdym z n wierzchołków, *np.* przy B, kąt zewnętrzny CBG z wewnętrznym ABC wartają 2 proste; zatem summa wszystkich kątów zewnętrznych i wewnętrz-

(*) Zobacz notę na końcu dzieła.

nych czyni $2n$ kątów prostych. A że summa samych kątów wewnętrznych czyni $2n-4$ kątów prostych; więc summa kątów zewnętrznych równa się *czterem* kątom prostym.

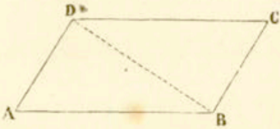
Wniosek. — Wielokąt wypukły nie może mieć więcej niż *trzy* kąty ostre wewnętrzne, bo nie może mieć więcej niż trzy kąty rozwarte zewnętrzne.

Twierdzenie XXVIII.

W każdym równoległoboku, 1° *boki przeciwległe są równe,* 2° *kąty przeciwległe są równe.*

I nawzajem.

1° Poprowadźmy przekątnę BD. Dwa trójkąty ABD, BCD, mają



bok BD spólny, kąt ABD = CDB, jako naprzemianległe wewnętrzne względem równoległych AB i CD; tak samo kąt ADB = CBD; więc te trójkąty są równe: zatem bok AB = CD, i bok AD = BC.

2° Kąty przeciwległe A i C są równe; bo mają ramiona tego samego imienia równoległe, każde do każdego.

Tak samo kąty przeciwległe B i D są równe.

Wniosek I. — *Dwie równoległe* AD, BC *zawarte między dwiema równoległemi* AB, CD *są równe.*

II. — *Ukośnik jest równoległobokiem.*

Uwaga. — Przekątna dzieli równoległobok na dwa trójkąty równe.

Nawzajem, 1° *Czworobok wypukły, mający wszystkie boki przeciwległe równe, jest równoległobokiem.*

Poprowadźmy przekątnę BD (*figura powyższa*). Dwa trójkąty ABD, BDC równoboczne między sobą, są równe. Zatem kąty naprzemianległe wewnętrzne ABD i BDC są równe; więc linie AB i CD są równoległe. Tak samo, kąty naprzemianległe wewnętrzne ADB i CBD są równe; przeto linia AD jest równoległa do BC. Więc czworobok ABCD jest równoległobokiem.

2° *Czworobok wypukły* ABCD, *mający wszystkie kąty przeciwległe równe, jest równoległobokiem.*

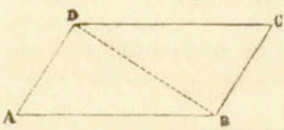
Jakoż, jeśli kąt $A = C$ i $B = D$, będzie $A + B = C + D$. A że summa kątów wewnętrznych czworoboku wypukłego równa się *czterem* kątom prostym; więc summa $A + B$, jako połowa summy czterech kątów prostych, równa się *dwom* kątom prostym. Zatem, linie AB i CD są równoległe (21, *wz.*).

Dowiedzie się podobnie że AB i CD są równoległe. Więc, etc.

Twierdzenie XXIX.

Czworobok wypukły, mający dwa boki równoległe i równe, jest równoległobokiem.

Poprowadźmy przekątnę BD. Dwa trójkąty ABD, CBD, mające

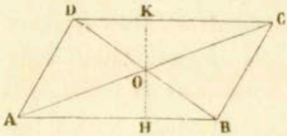


bok BD spólny, bok $AB = CD$ z założenia, i kąty zawarte ABD, BDC równe jako naprzemianległe wewnętrzne względem równoległych AB, CD, są równe; więc kąty naprzemianległe wewnętrzne ADB i CBD są równe; a zatem boki AD, BC są równoległe. Więc czworobok ABCD, mający wszystkie boki przeciwne równoległe jest równoległobokiem.

Twierdzenie XXX.

Przekątne równoległoboku przecinają się na dwie równe części.

I nawzajem.



Dwa trójkąty ABO, CDO, mające bok $AB = CD$, i dwa kąty przyległe $BAO = DCO$, $ABO = CDO$, są równe; więc bok $OA = OC$ i $OB = OD$.

Nawzajem. *Czworobok którego przekątne przecinają się zobopólnie na dwie części równe jest równoległobokiem.*

Bo, dwa trójkąty AOB, COD, mające kąty O równe, zawarte między bokami równemi każdy każdemu, są równe; zatem dwa boki przeciwległe AB i CD są równe i równoległe. Więc czworobok ABCD jest równoległobokiem.

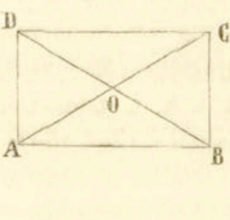
Określenie XX.— Punkt przecięcia O przekątnych równoległoboku nazywa się *środkiem* figury, dlatego że dzieli na dwie równe części wszelką prostę HK, która przezeń przechodzi. Jakoż, dwa trójkąty AOH, COK są równe (9); więc OH = OK.

Wniosek I. — Z równości trójkątów AOH, COK wynika że AH = CK; przeto, jeśli punkt H jest środkiem boku AB, punkt K będzie środkiem boku CD.

Więc *linie łączące środki boków przeciwległych równoległoboku przecinają się w jego środku.*

Uwaga. — Wszelka prosta HK, przechodząca przez środek O równoległoboku, dzieli go na dwa czworokąty równe AHKD, BHKC. Co łatwo widzieć, dając tylko pół obrotu jednemu z czworokątów około środka O.

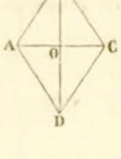
Wniosek II. — *W prostokącie przekątne są równe.*



Jakoż, dwa trójkąty ABC, ABD, mające bok AB spólny, bok BC = AD i kąty między niemi zawarte równe jako proste, są równe. Więc przekątna AC = BD.

Twierdzenie XXXI.

W ukośniku przekątne przecinają się pod kątem prostym, i są dwójsiecznemi kątów przeciwległych. I nawzajem.



Jakoż, w trójkątach równoramiennych ACB, ACD, przekątna BD ukośnika, przechodząc przez środek podstawy AC i przez wierzchołki B i D, jest prostopadłą do AC, i dwójsieczną kątów B i D (16 *uw*). Dla podobnej przyczyny, przekątna AC jest prostopadłą do przekątnej BD i dwójsieczną kątów A i C.

Nawzajem, *czworobok, którego obie przekątne są dwójsiecznemi kątów przeciwległych jest ukośnikiem.*

Bo, dwa trójkąty ABC, ACD, mające bok AC spólny, przyległy kątom równym, CAB = CAD, i ACB = ACD, są równe ; więc bok AB = AD, i bok BC = CD.

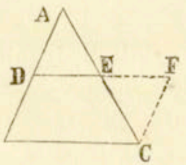
Tak samo, równość trójkątów BDA, BDC daje bok AB = BC i AD = CD. Więc czworobok ABCD, mający wszystkie boki równe, jest ukośnikiem.

Wniosek. — W kwadracie, przekątne są równe i prostopadłe do siebie, i są dwójsiecznemi kątów przeciwległych.

Nawzajem, czworobok jest kwadratem gdy jego przekątne są równe i są dwójsiecznemi kątów przeciwległych.

Twierdzenie XXXII.

W trójkącie ABC *prosta* DE, *która łączy środki dwóch boków, jest równoległa do trzeciego i równa jego połowie.*

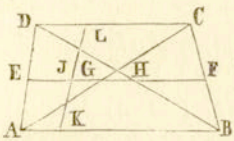


Przedłużmy DE długością EF równą DE, i połączmy CF. Dwa trójkąty CEF, ADE, mające bok CE równy AE z założenia, bok EF równy DE z wykreślenia, i kąty równe przy E, są równe. Więc bok CF jest równy bokowi AD, a temsamem bokowi BD ; i kąt F jest równy kątowi ADE. Ztąd wynika że czworokąt BCFD, mający dwa boki przeciwległe BD, CF równe i równoległe, jest równoległobokiem ; zatem boki DF i BC są równoległe i równe. Więc prosta DE, jako połowa boku DF, jest równoległa do boku BC i równa jego połowie.

Wniosek. — W trójkącie, równoległa do podstawy, poprowadzona przez środek jednego z boków przyległych, przechodzi przez środęk drugiego.

TWIERDZENIE XXXIII.

W trapezie ABCD, 1° *prosta* EF, *łącząca środki boków nierównoległych* AD, BC, *jest równoległa do podstaw* AB, CD, *i równa połowie ich summy.* 2° *Prosta* GH, *łącząca środki przekątnych* AC, BD, *jest równoległa do podstaw i równa połowie ich różnicy.*



Jakoż, prosta EG, przechodząca przez środki dwóch boków trójkąta ACD, jest równoległa do trzeciego boku CD; więc, na mocy poprzedzającego twierdzenia, ta równoległa EG przechodzi przez środek H przekątnej BD, przez środek F boku BC, i przez środek G przekątnej AC.

Uważajmy teraz że: w trójkącie ABD, $EH = \frac{1}{2}AB$;
a w trójkącie BCD, $FH = \frac{1}{2}CD$.

Zatem, summa $EH + HF = \frac{1}{2}AB + \frac{1}{2}CD$,

albo $EF = \dfrac{AB + CD}{2}$.

Więc *w trapezie, prosta* EF, *łącząca środki boków nierównoległych, jest równoległa do podstaw i równa połowie ich summy.*

Uważajmy nakoniec że, w trójkącie ACD, $EG = \frac{1}{2}CD$;

zatem, różnica $EH - EG = \frac{1}{2}AB - \frac{1}{2}CD$.

albo $GH = \dfrac{AB - CD}{2}$.

Więc *w trapezie, linia* GH, *łącząca środki przekątnych, jest równoległa do podstaw i równa połowie ich różnicy.*

WNIOSEK. — Linia EF, przechodzi przez środek wszelkiej prostej KL zawartej między podstawami trapezu, i przeto *jest miejscem geometrycznem punktów równo oddalonych od tych podstaw.*

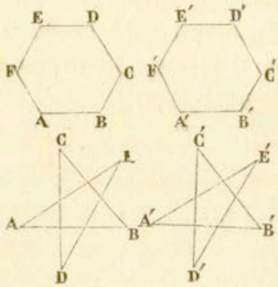
UWAGA. — Nie trudno dowieśdź dwóch następujących wzajemnic.

Czworokąt, w którym linia łącząca środki dwóch boków przeciwległych, równa się połowie summy albo *połowie różnicy dwóch innych boków, jest trapezem.*

RÓWNOŚĆ WIELOKĄTÓW JAKICHKOLWIEK

Twierdzenie XXXIV.

Dwa wielokąty n boków są równe, gdy mają n — 2 boki po sobie idące równe i PRZYLEGŁE *n — 1 kątom równym, każdy każdemu.*



Niech będą dwa wielokąty ABCDEF, A'B'C'D'E'F' w których, wyjąwszy *dwa boki* AB, A'B', i BC, B'C', i *kąt* B, B', między niemi zawarty, wszelkie inne boki i kąty są odpowiednio równe.

Dowodzi się równości tych wielokątów przez przystawanie, jako w twierdzeniu IX.

Uwaga. — Powyższe twierdzenie pokazuje że $2n - 3$ warunki *oddzielne* są *dostateczne* dla równości wielokątów które mają n boków.

Twierdzenie XXXV.

Dwa wielokąty n boków są równe, gdy mają n — 1 boków równych ZAWIERAJĄCYCH *n — 2 kątów równych, każdy każdemu.*

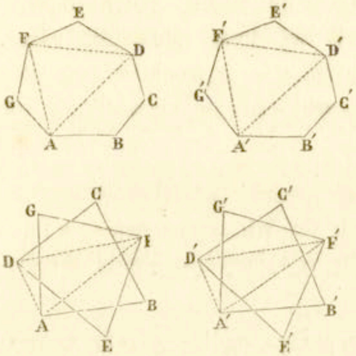
Dowodzenie przez przystawanie.

Uwaga. — *Powyższe twierdzenie może się jeszcze tak wysłowić : Dwa wielokąty n^{to} boczne są równe, gdy mają,* PRÓCZ BOKU I DWÓCH KĄTÓW PRZYLEGŁYCH, *wszystkie inne boki i kąty równe, każdy każdemu.*

To czyni $2n - 3$ warunków oddzielnych, które są dostateczne dla równości tych wielokątów.

Twierdzenie XXXVI.

Dwa wielokąty RÓWNOBOCZNE *między sobą są równe, gdy mają,* PRÓCZ TRZECH KĄTÓW, *wszystkie inne odpowiednio równe.*



Niech będą dwa wielokąty ABCDEFG i A′B′C′D′E′F′G′ mające wszystkie boki równe, każdy każdemu, i, prócz trzech kątów odpowiednych A i A′, D i D′, F i F′, wszystkie inne kąty odpowiednio równe. Połączmy wierzchołki kątów A, D, F, i A′, D′, F′, które nie są dane.

Dwa wielokąty ABCD, A′B′C′D′ są równe, bo mają, prócz boków AD, A′D′, i dwóch kątów przyległych, wszystkie inne boki i kąty odpowiednio równe (35). Więc bok AD = A′D′. Tak samo są równe wielokąty DEF i D′E′F′, FGA i F′G′A′; więc boki DF = D′F′ i AF = A′F′. Zatem dwa trójkąty ADF, A′D′F′, równoboczne między sobą, są równe: jeśli przeto położymy wielokąt ABCDEFG na wielokącie A′B′C′D′E′F′G′ tak żeby te trójkąty przystawały, dwa wielokąty przystaną oczywiście do siebie; więc są równe.

Uwaga. — Widzimy tu jeszcze że n boków i $n - 3$ kątów, przyzwoicie dobranych, stanowią $2n - 3$ warunków dostatecznych dla równości dwóch wielokątów n^{to} bocznych.

Uwaga ogólna o równości wielokątów. — Wyobraźmy jakikolwiek wielokąt mający n boków. Aby wyznaczyć z położenia *trzy* jego wierzchołki którekolwiek A, B, C, trzeba znać trójkąt ABC; co wymaga *trzech* warunków (9, 10, 11). Położenie każdego z $n - 3$ wierzchołków pozostałych wyznaczy się za pomocą trójkątów które mają za bok jeden z boków pierwszego trójkąta; zatem będzie wymagało *dwóch* tylko warunków: co wszystko razem czyni $2(n-3)$ warunków. Więc liczba warunków *koniecznych*, do wyznaczenia wielokąta mającego n boków, jest $3+2(n-3)$, czyli $2n-3$ wielkości *równych* (jako boki, kąty, etc.); a nadto trzeba jeszcze znać porządek układu tych wielkości. Dodajemy że $2n-3$ warunki *konieczne* są *dostateczne*, jako pokazują poprzedzające twierdzenia równości wielokątów; byle tylko dane wielkości były oddzielnie *różne*. (n kątów wielokąta liczą się jeno za $n-1$ wielkości oddzielnych) (26 *wn.*). A samo z siebie widoczne że te wielkości nie mogą być dane dowolnie.

Łatwo teraz pojmujemy że, jeśli gatunek wielokątów jest dany, liczba warunków koniecznych do ich wyznaczenia, a temsamem do równości, zmniejsza się w miarę ścieśnienia określenia. I tak:

Równość dwóch *czworokątów* wymaga ogólnie *pięciu* warunków: a równość dwóch *trapezów* wymaga tylko *czterech*; równość dwóch *równoległoboków*, *trzech*; równość dwóch *prostokątów*, albo dwóch *ukośników*, *dwóch* tylko; nakoniec równość dwóch kwadratów, *jednego*. Zatem,

TWIERDZENIE. — *Dwa trapezy są równe, gdy mają* CZTERY BOKI RÓWNE, *każdy każdemu.*

Aby dowieśdź tego twierdzenia poprowadź, przez skrajność mniejszej podstawy trapezu, równoległe do boku nierównoległego; tym sposobem utworzą się w tych trapezach dwa trójkąty odpowiedne, które przystaną do siebie, a z niemi dwa trapezy przystaną także.

TWIERDZENIE. — *Dwa równoległoboki są równe, gdy mają* KĄT RÓWNY ZAWARTY MIĘDZY DWOMA BOKAMI RÓWNEMI, *każdy każdemu.*

TWIERDZENIE. — *Dwa prostokąty są równe, gdy mają* DWA BOKI PRZYLEGŁE RÓWNE, *każdy każdemu.*

TWIERDZENIE. — *Dwa ukośniki są równe, gdy mają bok równy i kąt równy, każdy każdemu.*

TWIERDZENIE. — *Dwa kwadraty, a ogólnie dwa wielokąty foremne tej samej liczby boków, są równe gdy mają* BOK RÓWNY.

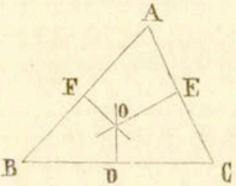
Zaledwie nadmienić należy że twierdzenia o równości wielokątów, wyżej wyłuszczone, nie są jedyne; i można oczywiście mieć inne, zastępując boki lub kąty przekątnemi, dwójsiecznemi, albo innemi wielkościami, byle przyzwoicie dobranemi. I tak, naprzykład:

Dwa wielokąty tej samej liczby boków są równe, gdy mają bok równy, i wszystkie przekątne, łączące obie skrajności tego boku z wierzchołkami, równe każda każdej i w tym samym porządku ułożone.

Dwa równoległoboki są równe, gdy mają przekątnę i obie wysokości równe, każda każdej; etc.

Jako ćwiczenie dajemy dowodzenie czterech następujących twierdzeń:

TWIERDZENIE I. — *Prostopadłe wyprowadzone ze środków boków trójkąta schodzą się w jednym punkcie.*



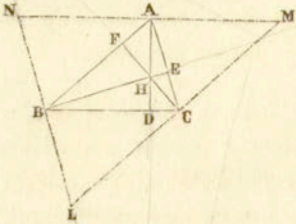
Niech będą D, E, F środki boków trójkąta ABC. Dwie prostopadłe DO, EO spotykają się w punkcie O, równo oddalonym od trzech wierzchołków A, B, C (8, *wz.*); więc punkt O leży na prostopadłej wyprowadzonej ze środka F boku AB. Więc, etc.

UWAGA. — Według jak trójkąt jest prostokątny, ostrokątny albo rozwartokątny, prostopadłe wyprowadzone ze środków boków spotykają się we środku przeciwprostokątnej, wewnątrz trójkąta, albo zewnątrz. Ztąd wynika że: *na płaszczyznie danego trójkąta, można zawsze znaleźć punkt, ale tylko jeden, równo oddalony od trzech jego wierzchołków.*

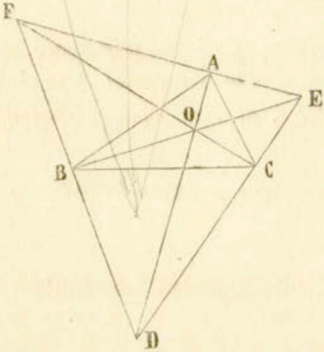
TWIERDZENIE II. — *Trzy wysokości trójkąta spotykają się w jednym punkcie.*

Przez wierzchołki trójkąta ABC poprowadźmy, równolegle do jego boków, proste LM, MN, LN które utworzą trójkąt LMN.

Czworoboki BCAN i BCMA są równoległobokami z wykreślenia, i dają



AN = BC = AM. Więc wysokość AD jest prostopadłą wyprowadzoną ze środka boku MN. Tak samo, wysokości BE, CF są prostopadłemi wyprowadzonemi ze środków boków LN, LM. Więc, na mocy poprzedzającego twierdzenia, te trzy prostopadłe schodzą się w jednym punkcie H.



Twierdzenie III.— *Dwójsieczne kątów trójkąta schodzą się w jednym punkcie.*

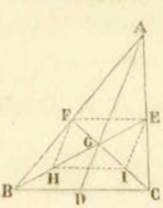
W trójkącie ABC, dwójsieczne AD, BE kątów wewnętrznych A, B spotykają się oczywiście wewnątrz trójkąta, w punkcie O, równo oddalonym od trzech boków (15); więc punkt O leży na dwójsiecznej kąta C. Więc, etc.

Uwaga. — Jeśli, przez trzy wierzchołki trójkąta ABC, poprowadzimy prostopadłe EF, DF, DE do dwójsiecznych AD, BE, CF; te prostopadłe będą dwójsiecznemi kątów zewnętrznych trókąta, i spotkają się we trzech punktach F, E, D równo oddalonych od boków trójkąta. Ztąd wynika że:

Mając dane trzy proste tworzące trójkąt, można zawsze, na ich płaszczyźnie, znaleźć cztery *punkta równo od nich oddalone. Jeden z tych punktów jest wewnątrz trójkąta, a trzy inne zewnątrz.*

Twierdzenie IV. — *Trzy ośródkowe trójkąta spotykają się w jednym punkcie.*

Niech będą D, E, F środki boków trójkąta ABC. Ośródkowe BE, CF spotykają się w punkcie G. W trójkącie ABC linia EF, łącząca środki dwóch boków, jest równoległa do trzeciego BC i równa jego połowie (32). Tak samo w trójkącie BCG, linia HI, łącząca środki boków BG i CG, jest równoległa do boku BC i równa jego połowie. Więc czworobok EFHI, mający dwa boki równoległe równe, jest równoległobokiem, i punkt G jest środkiem przekątnej HE. Zatem EG = GH = BH. To pokazuje że jedna ośródkowa CF,

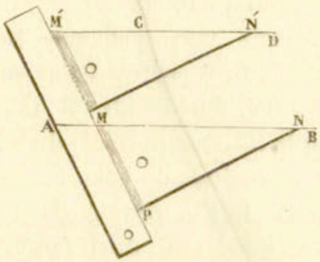


spotyka drugą BE w punkcie G, który leży na *jednej trzeciej* długości BE licząc od spodka E. Więc ośródkowa AD przechodzi także przez punkt G, i te trzy ośródkowe przecinają się w jednym punkcie.

ZAGADNIENIA KSIĘGI PIERWSZEJ.

Zagadnienie I.

Za pomocą węgielnicy, poprowadzić przez punkt C *równoległę do danej prostej* AB.



Przystawmy przeciwprostokątnę MN węgielnicy do danej prostej AB; a przyłożywszy do boku mniejszego MP liniał niezmienny, posuwajmy po nim węgielnicę aż dotknie punktu C. Wtedy, prosta CD, nakreślona wedle przeciwprostokątnej M'N', będzie równoległą do danej AB.

Uwaga. — Aby sprawdzić dokładność *liniału*, kreśli się li-

nię ACB, opierając ołówek wzdłuż brzegu liniału i posuwając go od jednej skrajności do drugiej. Potem, przewraca się liniał, jako pokazuje figura, i znowu, posuwając ołówek wzdłuż tego samego brzegu, kreśli się linię AC'B. Jeśli dwie linie ACB i AC'B schodzą się w jedną, liniał jest dokładny; jeśli nie, liniał jest fałszywy.

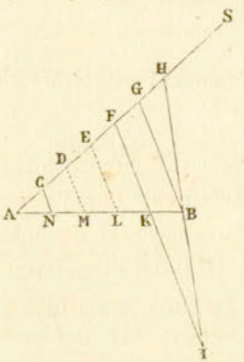
Węgielnica służy zwykle do kreślenia linij równoległych, jakośmy pokazali; można jej użyć do kreślenia linij prostopadłych, zapewniając się naprzód o jej dokładności.

Aby wyprobować węgielnicę, trzeba nakreślić wedle niej kąt prosty, przedłużyć jedno ramie i sprawdzić, za pomocą tej węgielnicy, czy tak utworzone dwa kąty spełniające są równe.

Zagadnienie II.

Podzielić linię prostą AB *na daną liczbę równych części.*

Przypuśćmy że trzeba podzielić prostę AB na *pięć* równych części. Przez skrajność A, poprowadźmy jakąkolwiek prostę AS; i, zaczynając od punktu C, ponieśmy na nią *pięć* razy dowolną



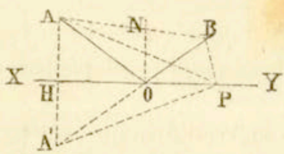
długość AC, w punktach D, E, F, G, H. Przez ostatni punkt H i skrajność B, poprowadźmy prostę HBI; weźmy BI = BH, i połączmy FI. Odcinek BK będzie *piątą częścią* danej prostej AB.

Na dowodzenie tego, pałączmy BG i przez punkta C, D, E poprowadźmy równoległe CN, DM, EL do BG. W trójkącie FIH prosta BG, łącząca środki dwóch boków, jest równoległa do boku FI. Zatem, w trapezie BGEL, równoległa FK do podstaw, przechodząca przez środek boku EG, dzieli bok BL na dwie równe części, to jest BK = KL. Dowiedzie się podobnie że KL = LM, LM = MN; a nakoniec w trójkącie ADM, MN = AN. Więc BK = $\frac{1}{5}$ AB. Zatem, przenosząc BK cztery razy na KA, podzielimy prostę AB na *pięć* równych części.

Zagadnienie III.

Mając dane dwa punkta A *i* B *zewnątrz linii prostej* XY, *znaleźć na tej linii punkt* O *taki żeby kąty* AOX, BOY *były równe.*

1° A i B z jednej strony linii XY. Z punktu A spuśćmy



na XY prostopadłę AH, i przedłużmy ją ilością HA′ równą AH; po czem poprowadźmy prostę BA′ która przetnie XY w punkcie O szukanym.

Jakoż, połączmy AO. Trójkąt AOA′ jest równoramienny (7); zatem, kąty HOA′, HOA są równe. A że kąt HOA′ = BOY, więc kąty AOX, BOY są równe.

Gdyby dano zagadnienie: *Przejść z punktu* A *do* B *najkrótszą drogą dotykającą linii prostej* XY;

rozwiązanie byłoby to samo.

Aby tego dowieśdź, trzeba okazać że, biorąc punkt P jakikolwiek na XY, summa AO + OB jest mniejsza od AP + PB. Owoż, pochyła AP = PA′ i AO = OA′; zatem AP + PB = PA′ + BP, a zaś AO + OB = BA′. A że linia prosta BA′ jest mniejsza od łamanej BP + PA′, więc droga AO + OB, krótsza od wszelkiej innej AP + PB, jest najkrótsza możebna z punktu A do B, dotykająca linii prostej XY.

2° Jeśli dane punkta, jako B i A′, leżą z obydwóch stron linii XY, wtedy linia prosta BOA′ rozwiązuje oba zagadnienia.

Wniosek. — Z tego co poprzedza wynika oczywiście następujące twierdzenie.

Ze wszystkich trójkątów mających spólną podstawę AB, *i wierzchołek na linii prostej* XY, *trójkąt obwodu minimum jest ten w którym boki przy wierzchołku tworzą kąty równe z linią* XY.

Uwaga.— Z punktu O, wyprowadźmy prostopadłę ON do XY; kąty NOA, NOB, oczywiście równe, nazywają się w Fizyce, jeden *kątem wpadnięcia* a drugi *kątem odbicia*.

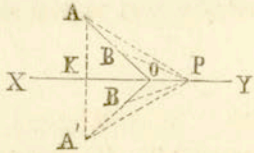
Otoż, ciało sprężyste które, idąc w kierunku AO, uderza linię XY, odbija się od niej w kierunku OB, tak że *kąt odbicia* NOB równa się *kątowi wpadnięcia* AON.

To się stosuje do głosu, ciepła i światła.

Zagadnienie IV.

Mając dane dwa punkta A *i* B, *zewnątrz linii prostej* XY, *znaleźć na tej linii punkt* O *taki żeby różnica dróg* AO *i* OB *była największa możebna*.

1° Jeśli dane punkta A i B leżą z obydwóch stron prostej XY; z punktu A spuśćmy prostopadłę AK na XY; przedłużmy ją



ilością KA' równą AK, i poprowadźmy prostę A'B która przetnie linię XY w punkcie O. Powiedam że różnica AO — BO jest szukaną.

Jakoż, weźmy jakikolwiek punkt P na XY; będzie

$$AP - BP = PA' - PB, \quad \text{a zaś } AO - BO = BA'.$$

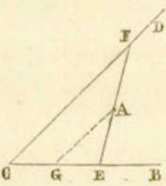
Owoż, w trójkącie BPA', bok $BA' > PA' - PB$;

więc różnica AO — BO, większa od wszelkiej innej AP — BP, jest największa możebna.

2° Jeśli dane punkta, jako A i B' leżą z jednej strony linii XY, wtedy linia prosta AB'O rozwiązuje zagadnienie; albowiem różnica dróg $AO - B'O = AB'$, a zaś $AP - B'P < AB'$.

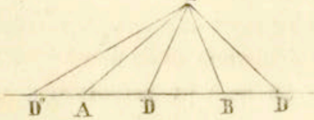
Zagadnienie V.

Przez punkt A, *dany w kącie* BCD, *poprowadzić linię prostą* EF, *tak żeby jej odcinki* AE, AF, *zawarte między tym punktem i ramionami kąta, były równe.*



Przez punkt A poprowadź prostę AG rownoległą do CD; weź GE = GC, i przez punkta E, A pociągnij prostę EAF która będzie szukaną. Bo, w trójkącie ECF, prosta AG równoległa do CF, przechodzi przez środek boku CE, więc dzieli bok EF na dwie równe części.

TWIERDZENIA DO DOWODZENIA.



1. Zewnątrz linii prostej AB wzięto punkt C tak żeby było AC = AB. Dowieśdź że, biorąc trzy punkta D, D', D'' na linii AB, będzie 1° $DC > DB$, 2° $D'C > D'B$, 3° $D''C < D''B$.

2. Linia wielokątna wypukła jest mniejsza od wszelkiej linii która ją ze wszech stron otacza.

3. Summa linij które łączą wierzchołki trójkąta z punktem wewnętrznym, jest mniejsza od obwodu, a większa od jego połowy.

4. W czworoboku wypukłym, obwód jest większy od summy przekątnych, a mniejszy od tejże summy podwójnej.

5. Dwójsieczne kątów wierzchołkiem przeciwległych, są w linii prostej.

6. Jeśli, w trójkącie prostokątnym, jeden z boków jest połową przeciwprostokątnej, wtedy kąt przeciwległy temu bokowi jest połową drugiego kąta ostrego.

I nawzajem, jeśli, w trójkącie prostokątnym, jeden kąt ostry jest połową drugiego, wtedy bok przeciwległy pierwszemu jest połową przeciwprostokątnej.

7. W trójkącie *równoramiennym*, summa prostopadłych, spuszczonych z punktu podstawy na dwa inne boki, jest ilością stałą.

Uwaga. — Jeśli punkt jest wzięty na przedłużeniu podstawy, wtedy różnica prostopadłych jest tą samą ilością stałą.

Ztąd wynika że podstawa trójkąta równoramiennego jest miejscem geometrycznem punktów, których summa algebryczna odległości, od dwóch ramion kąta przy wierzchołku, równa się prostopadłej spuszczonej ze skrajności podstawy na ramie przeciwległe.

8. W trójkącie *równobocznym*, summa trzech prostopadłych spuszczonych z punktu wewnętrznego na boki, równa się wysokości trójkąta.

Uwaga. — Jeśli punkt jest zewnątrz trójkąta, wtedy trzeba brać summę algebryczną tych prostopadłych, to jest: uważać jedne jako dodatne a inne jako odjemne.

9. Linie łączące środki boków cworokąta jakiegokolwiek tworzą *równoległobok*, którego przekątne spotykają się we środku linii łączącej środki przekątnych tego czworokąta.

10. W wielokącie mającym n boków liczba *wszystkich* przekątnych wyraża się formułą $\dfrac{n\,(n-3)}{2}$.

11. Dowieśdź że można układać posadzkę: 1° z trójkątów równobocznych. — 2° Z kwadratów. — 3° Z sześciokątów foremnych. — Pokazać że nie można z innych figur foremnych, branych oddzielnie, ułożyć posadzki.

12. Dowieśdź że można ułożyć posadzkę, biorąc : 1° Trójkąty równoboczne z kwadratami, albo z sześciokątami foremnemi, albo jeszcze z dwunastokątami foremnemi. — 2° Kwadraty z ośmiokątami foremnemi. — 3° Pięciokąty foremne z kwadratami ukośnemi których kąt ostry jest $\frac{2}{5}$ kąta prostego. — 4° Pięciokąty i dziesięciokąty foremne. 5° — Sześciokąty foremne z kwadratami ukośnemi których kąt ostry jest $\frac{2}{3}$ kąta prostego. — 6° Trójkąty, kwadraty i sześciokąty foremne, wszystkie trzy razem.

13. Jeśli cztery proste OA, OB, OC, OD, z jednego wychodzące punktu, tworzą kąty takie że *pierwszy* równa się *trzeciemu* a *drugi* czwartemu ; te kąty są wierzchołkiem przeciwległe.

14. W trójkącie prostokątnym ABC, w którym kąt ostry B jest połową ostrego C, ze środka przeciwprostokątnej wyprowadzono prostopadłę aż do spotkania E z bokiem AC przedłużonym. Dowieśdź że $AE = AC$.

15. W każdym trójkącie ABC, dwójsieczna AD kąta A przeciwległego podstawie, tworzy z wysokością AE kąt DAE, równy *połowie* różnicy kątów B i C przy podstawie.

16. W trójkącie prostokątnym ABC, ośródkowa AD przeciwprostokątnej BC i odpowiedająca wysokość AE tworzą kąt DAE równy różnicy kątów B i C.

17. Ramiona dwóch kątów jakichkolwiek ACB, AC′B przechodzą przez dwa punkta stałe A, B ; poprowadzono dwójsieczne tych kątów, które się spotykają w punkcie O. Dowieśdź że kąt $COC' = \frac{A+B}{2}$.

18. W czworoboku wypukłym, 1° dwójsieczne dwóch kątów, przyległych jednemu bokowi, przecinają się pod kątem równym połowie summy dwóch innych kątów ; 2° dwójsieczne dwóch kątów przeciwległych przecinają się pod kątem równym połowie różnicy dwóch innych.

19. W czworoboku ABCD, mającym kąt wklęsły C, poprowadzono dwójsieczne BO, DO ; dowieśdź że kąt $BOD = \frac{A+BCD}{2}$.

20. W czworoboku dwójsieczne kątów utworzonych bokami przeciwległemi przecinają się pod kątem który się równa połowie summy kątów przeciwległych.

21. Dowieśdź że równoległoboki wpisane w równoległobok są z nim spółśrodkowe.

22. Dowieśdź że można wpisać w prostokąt równoległoboki mające

boki równoległe do jego przekątnych, i że obwody tych równoległoboków są równe.

23. Na bokach AB i AE, pięciokąta foremnego ABCDE, wykreślono pięciokąty foremne ABMNP, AEM'N'P'. Dowieśdź że boki NP i N'P' są w linii prostej.

24. W trójkącie, boki równe mają ośródkowe równe, a bok mniejszy ma ośródkowę większą. I NAWZAJEM.

25. W trójkącie, kąt jest *prosty*, rozwarty albo ostry, według jak ośródkowa *boku przeciwległego* równa się jego *połowie*, jest od niej mniejsza albo większa. I NAWZAJEM.

26. W trójkącie, ośródkowa jednego boku jest mniejsza od połowy summy dwóch innych, a większa od połowy przewyżki tej summy nad trzecim bokiem.

27. W trójkącie, summa trzech ośródkowych jest mniejsza od obwodu a większa od jego połowy.

28. Trójkąt jest równoramienny gdy ośródkowa jednego boku jest dwójsieczną kąta przeciwległego.

29. Na bilardzie prostokątnym, popchnięto bilę równolegle do przekątnej. Dowieśdź że po dwóch odbiciach, ta bila będzie się toczyła równolegle do tej samej przekątnej.

30. Dowieśdź, że w czworoboku krzyżowym, różnica dwóch kątów, leżących z obydwóch stron punktu przecięcia, równa się różnicy dwóch innych.

31. Wielokąt mający środek, ma parzystą liczbę boków; i boki przeciwne są równe i równoległe.

32. Jeśli na jednem ramieniu kąta ABC wezmiemy długości BD i BE, a na drugiem długości odpowiednio równe BD', BE', i nakreślimy proste DE', ED', te liniie przetną się na dwójsiecznej kąta. Z tąd sposób kreślenia dwójsiecznej kąta za pomocą samego liniału.

33. W trójkącie ABC, przez wierzchołek A poprowadzono prostę AD która tworzy z ramieniem AB kąt BAD = C, i prostę AE która tworzy z ramieniem AC kąt CAE = B. Dowieśdź że trójkąt DAE jest równoramienny.

34. Jeśli przez punkt podstawy trójkąta równoramiennego poprowadzi się równoległe do dwóch boków, to one utworzą z temi bokami równoległobok mający obwód stały.

Wysłowić twierdzenie tak żeby obejmowało przypadek w którym punkt leży na kierunku podstawy ale zewnątrz.

35. Między trójkątami równej podstawy i równej wysokości, trójkąt równoramienny ma najmniejszy obwód.

36. W trójkącie ABC, wzięto na ramieniu AB kąta A długość AB′ równą bokowi AC, a na ramieniu AC długość AC′ równą bokowi AB, i poprowadzono prostę B′C′ która przecina bok BC w punkcie D. Dowieśdź że AD jest dwójsieczną kąta A.

37. W trójkącie ABC, 1° Przez punkt przecięcia K dwójsiecznej kąta A i dwójsiecznych kątów B, C albo ich spełnień, poprowadzono równoległę DE do boku BC; dowieśdź że DE równa się summie odcinków BD i CE. 2° Przez punkt przecięcia K′ dwójsiecznej spełnienia kąta A i dwójsiecznych kątów B, C albo ich spełnień, poprowadzono równoległę D′E′ do boku BC, która przecina ramiona AB i AC kąta A albo ich przedłużenia w punktach D′, E′; dowieśdź że D′E′ równa się *różnicy* odcinków D′B′ i CE′.

38. W trapezie prostokątnym ABCD, połączono wierzchołki A, B kątów prostych ze środkiem E boku przeciwległego CD. Dowieśdź że trójkąt ABE jest równoramienny.

39. Są dane dwie równoległe: z punktu A jednej spuszczono pochyłę AB i prostopadłę AC na drugą. Wiedząc że sieczna BED spotyka AC w punkcie E tak że ED = 2AB, dowieśdź że kąt DBC jest *jedną trzecią* kąta ABC.

40. Jeśli z punktu A spuścimy, na linię prostą jakąkolwiek, prostopadłę AB i pochyłe AC, AD, AE z jednej strony tej prostopadłej, tak żeby kąt BAC = CAD = DAE; wtedy BC < CD < DE.

41. W trójkącie ABC poprowadzono dwójsieczne AO, BO, CO trzech kątów; przedłużono BO aż do spotkania w punkcie D z bokiem AC, i spuszczono prostopadłę OE na AC. Dowieśdź że kąty AOE i COD są równe.

42. W równoległoboku ABCD punkta E i F są środkami boków przeciwległych AB i CD. Dowieśdź że BF i DE dzielą przekątnę AC na *trzy* równe części.

43. Dwójsieczna kątów mających ramiona równoległe albo prostopadłe, każde do każdego, są także równoległe albo prostopadłe jeśli te kąty są równe; a zaś odwrotnie, jeśli są spełniające.

44. Dowieśdź że w trapezie równoramiennym (który ma boki nierównoległe równe) kąty przeciwległe są spełniające.

45. Dwójsieczne kątów czworoboku wypukłego tworzą czworobok mający kąty przeciwległe spełniające. Jeśli pierwszy czworobok jest równoległobokiem wtedy drugi jest prostokątem, którego przekątne są równoległe do boków pierwszego i równe ich różnicy. A jeśli pierwszy czworobok jest prostokątem, to drugi jest kwadratem.

46. Przez trzy dane punkta poprowadzić trzy równoległe, tak żeby ich odległości wzajemne miały się jako liczby 1, 2, 3.

47. Znając położenie dwóch równoległych, poprowadzić, przez punkt dany na ich płaszczyznie, sieczną tak żeby jej odcinek, zawarty między temi równologłemi, miał długość żądaną.

48. Mając dane dwie równoległe i punkt na ich płaszczyznie, poprowadzić przez ten punkt sieczną tak żeby summa *albo* różnica jej odcinków zawartych między punktem i każdą z równoległych, była równa danej linii.

49. W kąt dany wpisać linię prostą długości danej i równoległą do linii danej.

50. Mając dane dwie linie równoległe AB, CD i punkt O, poprowadzić przez ten punkt sieczną OMN, tak żeby summa *albo* różnica odcinków OM, ON równała się linii danej.

51. Dwa punkta A i B są dane w kącie COD. Przejść z punktu A do B najkrótszą drogą, dotykając obydwóch ramion kąta.

52. Dwa punkta A i B leżą w trójkącie CDE. Przejść z A do B najkrótszą drogą dotykając trzech boków trójkąta.

53. Na bilardzie prostokątnym stoją dwie bile A i B. Jak trzeba uderzyć bilę A żeby, dotknąwszy czterech boków bilardu, spotkała bilę B?

54. Mając dany punkt D na ramieniu BA kąta ABC, znaleźć na tem ramieniu, drugi punkt E taki żeby jego odległości od punktu D i od drugiego ramienia BC były równe.

55. Mając dany kąt A, z punktu B, wziętego na jednem ramieniu, spuszczono prostopadłę BC na drugie AC; potem ze spodka C prostopadłę CD na AB; i tak dalej. Znaleźć linię równą summie tych prostopadłych.

56. W trójkącie ABC, poprowadzić równoległę DE do danej prostej MN, tak żeby część wpisana DE tej równoległej równała się summie odcinków BD + CE.

57. Mając dane dwa punkta M, N z jednej strony linii prostej AB: znaleźć na tej linii punkt O taki żeby kąt MOA był połową kąta NOB.

58. Wykreślić czworokąt, znając jego cztery boki i kąt dwóch boków przeciwległych.

59. Wykreślić pięciokąt, mając dane środki jego boków.

60. Znaleźć najmniejszy wielownik dwóch linij prostych.

Dowieśdź że dwie proste niespółmierne nie mają najmniejszego wielownika.

61. Dwa punkta A i B są dane z obydwóch stron dwóch prostych równoległych. Przejść z punktu A do B najkrótszą drogą, i taką żeby część drogi, zawarta między temi równoległemi, miała kierunek dany.

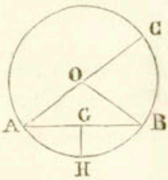
62. Dwa miasta A i B, przedzielone kilkoma rzekami, chcą zbudować mosty i drogę przejścia. W jakich punktach trzeba stawiać mosty, aby mieć drogę najkrótszą możebną? pamiętając że mosty muszą być prostopadłe do prądu rzeki.

KSIĘGA DRUGA

KOŁO I MIARA KĄTÓW.

Określenie I. — Okrąg jest to linia krzywa płaska i zamknięta, której wszystkie punkta są równo oddalone od punktu wewnętrznego nazwanego *środkiem*.

Koło jest część płasczyzny ograniczona okręgiem. Ale często daje się imie koła nawet okręgowi.



II. — Wszelka prosta OA, łącząca środek O z punktem A okręgu, nazywa się *promieniem*. Wynika z określenia że wszystkie promienie jednego koła są równe. — Zatem,

Dwa koła równego promienia przystają do siebie i są równe.

Oznacza się koło zwykle jedną literą jego środka, albo dwiema literami promienia zaczynając od środka, i mówi się: koło O, albo koło OA.

III. — Część okręgu, jako AHB, nazywa się *łukiem* koła. Prosta AB łącząca skrajności łuku jest *cięciwą*. A zaś prosta GH, łącząca środek cięciwy ze środkiem łuku, nazywa się *strzałą*.

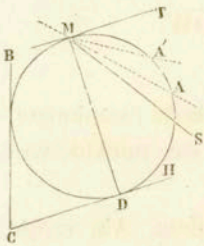
Uwaga. — Każda cięciwa AB podpasuje dwa łuki AHB, ACB; ale zwykle, przez *łuk podpasany* daną cięciwą trzeba rozumieć mniejszy z dwóch; chyba że wyraźnie inaczej zastrzeżono.

IV. — Wszelka cięciwa AOC przechodząca przez środek koła O nazywa się *średnicą*. Wszystkie średnice jednego koła są równe, jako złożone z dwóch promieni.

V. — Część koła ABHA, zawarta między łukiem i jego cięciwą, nazywa się *odcinkiem* koła.

VI. — Część koła AOBH, zawarta między dwoma promieniami i łukiem, nazywa się *wycinkiem*. Łuk AHB jest *podstawą* wycinka.

VII. — Wszelka prosta MS przecinająca koło jest *sieczną*.



VIII. — *Styczną* koła jest linia prosta MT mająca jeden tylko punkt M spólny z okręgiem; ten punkt M nazywa się *punktem zetknięcia*.

Jeśli obrócimy sieczną MA około punktu M tak żeby drugi punkt przecięcia A zeszedł się z pierwszym, wtedy sieczna przejdzie przez położenia MA, MA',... i stanie się MT. Ta prosta MT nazywa się *styczną*.

Zatem ogólnie, *styczną do linii krzywej w danym punkcie jest ostatnie położenie jakie bierze sieczna przechodząca przez ten punkt i przez punkt sąsiedni, gdy ten drugi, zbliżając się do pierwszego, z nim się schodzi*.

IX. — Dwa okręgi są sieczne gdy mają dwa punkta spólne.

Dwa okręgi są *styczne* do siebie, gdy mają jeden tylko punkt spólny.

A, *ogólnie*, dwie krzywe są styczne do siebie w danym punkcie, gdy mają spólną styczną w tym punkcie.

X. — *Normalną* do linii krzywej w danym punkcie jest prostopadła do stycznej w tym punkcie, jako MD.

XI. — Kąt dwóch cięciw, mający wierzchołek na okręgu, nazywa się *wpisanym*, jako DMS.

XII. — Kąt, którego ramiona są styczne do okręgu, nazywa się *opisanym*, jako BCH.

XIII. — Wielokąt jest *wpisany w koło* gdy ma wszystkie wierzchołki na okręgu.

Nawzajem, koło jest wtedy *opisane* na wielokącie.

XIV. — Wielokąt jest *opisany na kole* gdy wszystkie jego boki są styczne do okręgu.

Nawzajem, koło jest wtedy *wpisane* w wielokąt.

TWIERDZENIE I.

Okrąg jest linią wypukłą.

To znaczy że linia prosta nie może spotykać okręgu w więcej niż dwóch punktach. Jakoż, gdyby jakakolwiek prosta spotykała okrąg we trzech punktach; łącząc te punkta ze środkiem koła, możnaby z jednego punktu spuścić na jedną prostę trzy pochyłe równe; co niemożebne (I, 7, wn. 2).

ŁUKI I CIĘCIWY.

TWIERDZENIE II.

Średnica jest największą cięciwą koła.

Każda średnica dzieli koło i jego okrąg na dwie równe części.

1° Niech będzie cięciwa jakakolwiek AB. Poprowadźmy średnicę AC i promień OB. W trójkącie AOB mamy:

$AO + OB > AB$; więc średnica $AC > AB$.

2° Połóżmy odcinek EFBA na odcinku EFC, tak żeby miały spólną średnicę EF; łuk EABF przystanie do łuku FCE, bo ich punkta są równo oddalone od środka koła O. Więc średnica EF dzieli okrąg i koło na dwie równe części.

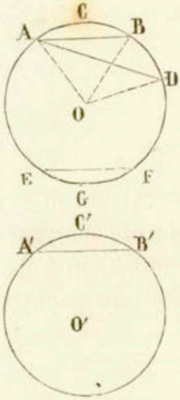
TWIERDZENIE III.

W jednem kole, albo we dwóch kołach równych:

1° *Łuki równe są podpasane cięciwami równemi.*

2° *Łuk mniejszy jest podpasany cięciwą mniejszą.*

I NAWZAJEM. (Byle oba łuki były mniejsze od półokręgu).



1° Niech będzie koło O, w którem łuk ACB jest równy łukowi EGF; powiedam że cięciwa AB jest równa cięciwie EF. Jakoż, jeśli na okręgu O′, równym okręgowi O, weźmiemy łuk A′C′B′ równy łukowi ACB; i położymy okrąg O na okręgu O′, tak żeby środek O padł na O′ i punkt A padł na A′; łuk ACB przystanie do swego równego A′C′B′, i punkt B padnie na B′. Zatem cięciwa AB jest równa cięciwie A′B′. Dowiedzie się podobnie że cięciwa EF jest równa cięciwie A′B′. Więc cięciwy AB i EF, równe każda cięciwie A′B′, są równe między sobą.

2° Jeśli w kole O łuk EGF jest mniejszy od łuku ABD, powiedam że cięciwa EF jest mniejsza od cięciwy AD. Jakoż, na większym łuku ABD weźmy łuk AB równy łukowi EF; cięciwy AB, EF będą równe (1°). Poprowadźmy promienie OA, OB, OD. Dwa trójkąty AOB, AOD mają bok OA spólny, bok OB równy OD jako promienie jednego koła, a kąt zawarty AOB mniejszy od kąta AOD; zatem bok AB jest mniejszy od AD (I, 11). Więc cięciwa EF jest mniejsza od cięciwy AB.

NAWZAJEM, w jednem kole albo we dwóch kołach równych:

1° *Cięciwy równe podpasują łuki równe.* 2° *Cięciwa mniejsza podpasuje łuk mniejszy.*

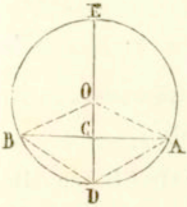
Obie wzajemnice są przez się widoczne.

UWAGA. — Powyższe twierdzenie, jakośmy zastrzegli, przypuszcza oba łuki mniejsze od półokręgu. Gdy przeciwnie, oba łuki są większe od półokręgu, wtedy twierdzenie w sensie odwrotnym jest prawdziwe, to jest: *łuk mniejszy ma cięciwę większą*; i nawzajem, *cięciwie mniejszej odpowieda łuk większy.*

Twierdzenie IV.

Średnica prostopadła do cięciwy dzieli tę cięciwę i oba jej łuki na dwie równe części.

Niech będzie średnica DE prostopadła do cięciwy AB. Poprowadźmy promienie OA, OB, i cięciwy DA, DB.



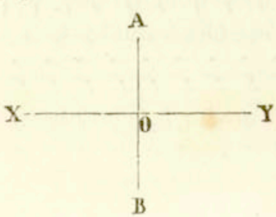
Pochyłe OA, OB, równe jako promienie jednego koła, są równo oddalone od spodka C prostopadłej OC; więc punkt C jest środkiem cięciwy AB. Ztąd wynika że cięciwy DA, DB, równo oddalone od spodka prostopadłej, są równe; więc łuki DA, DB, podpasane temi cięciwami, są równe.

Teraz, ponieważ półokręgi DAE, DBE są równe, i łuki DA, DB są równe; ich różnice łuki AE, BE są także równe.

Uwaga.—Środek koła O, środek cięciwy C, środek D łuku ADB, i środek E łuku AEB, leżą na jednej linii prostopadłej do cięciwy; co czyni *pięć* oddzielnych warunków. Owoż, *dwa* warunki wyznaczają linię prostą; zatem, wszelka prosta, zadość czyniąca dwom z pięciu wymienionych warunków, uczyni temsamem zadość trzem innym. I tak, *linia łącząca środek cięciwy ze środkiem jednego łuku jest prostopadłą do cięciwy, przechodzi przez środek koła i przez środek drugiego łuku*; etc.

Te pięć warunków, brane po dwa, dają *dziesięć* wysłowień; przeto twierdzenie powyższe ma *dziewięć* wzajemnic.

Wniosek. — *Miejscem geometrycznem środków cięciw równoległych jest średnica prostopadła do ich kierunku.*



Określenie XV. — Dwa punkta A i B nazywają się *symetrycznemi* względem linii prostej XY, zwanej *osią symetryi*, gdy ta oś jest prostopadła we środku O linii AB która je łączy.

Dwie figury są *symetryczne* względem osi, gdy każdy punkt jednej figury ma swój symetryczny w drugiej.

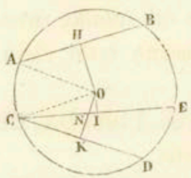
Zatem, na mocy powyższego twierdzenia;

KOŁO JEST FIGURĄ SYMETRYCZNĄ, *i każda średnica jest jego osią symetryi.*

TWIERDZENIE V.

W kole, cięciwy równe są równo oddalone od jego środka, a cięciwa większa leży bliżej tego środka. I NAWZAJEM.

1° Niech będą w kole O dwie cięciwy równe AB, CD. Ich odległością od środka O są prostopadłe OH, OK. Aby dowieśdź że te prostopadłe są równe, poprowadźmy promienie OA i OC. Dwa trójkąty prostokątne AOH, COK są równe; bo mają przeciwprostokątne OA, OC równe jako promienie, i boki AH, CK równe jako połowy cięciw równych z założenia. Więc prostopadłe OH, OK są równe.

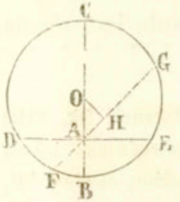


2° Niech będzie cięciwa CE większa od cięciwy AB; powiedam że cięciwa CE jest bliżej środka O niż AB. Jakoż, na łuku CDE, większym od łuku AB, weźmy łuk CD równy łukowi AB. Cięciwy CD i AB są równe; zatem równo oddalone od środka O. Więc dość okazać że cięciwa CE jest bliżej środka O niż CD. Spuśćmy tedy prostopadłe OI, OK na te cięciwy. Ponieważ środek K cięciwy CD i środek koła O leżą z obydwóch stron cięciwy CE, ta cięciwa przecina linię OK w punkcie N; zatem ON jest mniejsze od OK. A że prostopadła OI jest mniejsza od pochyłej ON; więc tem bardziej prostopadła OI jest mniejsza od prostopadłej OK. Co dowodzi że cięciwa CE jest bliżej środka koła O, niż cięciwa AB.

NAWZAJEM, *cięciwy równo oddalone od środka koła są równe, a cięciwa mniej oddalona od tego środka jest większa.*

Co przez się widoczne.

Uwaga. — Najmniejszą z cięciw, przechodzących przez punkt A dany



w kole, jest prostopadła DE do średnicy BAC w tym punkcie.

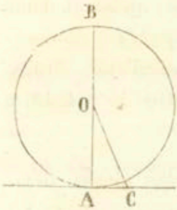
Jakoż, przez punkt A poprowadźmy cięciwę FG i spuśćmy na nią prostopadłę OH. Ponieważ prostopadła OA do DE, jako pochyła względem OH, jest od niej większa, cięciwa DE jest mniejsza od wszelkiej innej FG; więc ta cięciwa jest najmniejszą możebną w punkcie A koła.

STYCZNA I NORMALNA.

Twierdzenie VI.

Prostopadła na skrajności promienia jest styczną do koła.

I nawzajem.



Niech będzie prostopadła AC na skrajności promienia OA; połączmy jakikolwiek jej punkt C ze środkiem koła O. Pochyła OC jest większa od promienia OA; to dowodzi że punkt C leży poza okręgiem. Więc prosta AC, mająca jeden tylko punkt A spólny z okręgiem, jest styczną do niego.

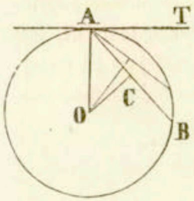
Nawzajem, *styczna do koła jest prostopadła do promienia w punkcie zetknięcia.*

Niech będzie AC styczna do koła w punkcie A. Ponieważ wszelki inny punkt C tej stycznej leży za kołem, promień zetknięcia OA, jako najkrótsza droga ze środka koła O do stycznej AC, jest prostopadły do tej linii.

Wniosek I. — *Przez punkt dany na okręgu można zawsze poprowadzić styczną koła, ale tylko jedną.*

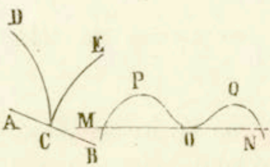
II. — *Styczna koła jest równoległa do cięciw które średnica, przechodząca przez punkt zetknięcia, dzieli na dwie równe części.*

III. — Linia prosta jest *styczną* koła, *sieczną*, albo leży *zewnątrz koła*, według jak jej odległość od środka tego koła jest równa promieniowi, od niego mniejsza albo większa.



Uwaga. — Ogólne określenie stycznej (Ok. VIII) łatwo prowadzi do powyższego twierdzenia. Jakoż, przez punkt A okręgu O, poprowadźmy cięciwę AB, i złączmy jej środek C ze środkiem koła, prostą CO która będzie prostopadła do AB jakkolwiek blisko punkt B dojdzie do A. Owoż, gdy punkt B schodzi się z punktem sąsiednim A, sieczna AB staje się *styczną* AT, a prostopadła OC promieniem OA; więc styczna AT jest prostopadła do promienia w punkcie zetknięcia.

Uważajmy teraz że linia prosta AB może mieć tylko jeden punkt spólny



C z krzywą DCE, a nie być do niej styczną; albo jako prosta MN, przecinać krzywę MPOQ, i być do niej styczną w punkcie O. To dowodzi że pierwsze określenie stycznej nie jest *konieczne* ani *dostateczne*; proste i dobre dla koła i dla krzywych *wypukłych zamkniętych*, nie stosuje się koniecznie do innych linij; gdy przeciwnie, drugie określenie jest ogólne; a co ważniejsze jeszcze, pokazuje że w każdym punkcie linii krzywej można poprowadzić styczną.

Z poprzedzającego twierdzenia wynika że *wszelka prosta przechodząca przez środek koła, jest* NORMALNĄ *do okręgu w obydwóch punktach przecięcia.*

Zatem, przez każdy punkt A płaszczyzny koła, można poprowadzić do okręgu O dwie normalne AB i AC, mające jeden kierunek; jako wskazuje figura poniżej.

Twierdzenie VII.

Jeśli z jednego punktu A poprowadzimy do koła obie normalne AB i AC, i pochyłe AD, AE, AG, wtedy

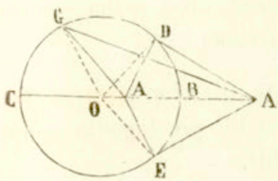
1° *Dwie pochyłe równo oddalone od jednej normalnej są równe.*

2° *Wszelka pochyła jest mniejsza od jednej normalnej a większa od drugiej.*

3° *Z dwóch pochyłych ta jest mniejsza która się mniej oddala od normalnej mniejszej.*

I NAWZAJEM.

Co do 1°. Niech będą dwie pochyłe AD, AE równo oddalone od normalnej AB, to jest mające łuki BD, BE równe; powiedam że te pochyłe są równe. Jakoż, jeśli położymy figurę ABD na ABE, obracając około AB, łuk BD przystanie do swego równego BE; więc pochyłe AD i AE są równe.



2° W dwóch trójkątach AOD mamy:

w większym, $AD < AO + OD$, i $AD > OA - OD$;

w mniejszym, $AD < AO + OD$, i $AD > OD - OA$.

Owoż, $OB = OD = OC$; więc, uważając zarazem oba trójkąty AOD, otrzymujemy

$$AD < AC, \text{ i } AD > AB.$$

To jest: pochyła AD jest mniejsza od normalnej większej AC, a większa od normalnej mniejszej AB.

3° Jeśli łuk BE jest mniejszy od BG, pochyła AE jest mniejsza od AG. Jakoż, na łuku BG, weźmy łuk BD równy łukowi BE; pochyła AE jest równa AD. Owoż dwa trójkąty AOD, AOG mają kąt AOD mniejszy od kąta AOG, a te kąty są zawarte między bokami równemi każdy każdemu; więc bok AD jest mniejszy od AG; to jest pochyła AE jest mniejsza od AG.

Wzajemnice są oczywiste.

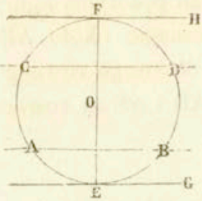
WNIOSEK. — Przez jeden punkt dwie tylko pochyłe równe do okręgu poprowadzić można.

OKREŚLENIE XVI. — ODLEGŁOŚCIĄ *punktu od okręgu* jest normalna mniejsza z tego punktu wychodząca. *Odległością dwóch okręgów* jest spólna normalna mniejsza, jako najkrótsza droga.

TWIERDZENIE VIII.

Dwie równoległe przejmują na okręgu łuki równe.

Dwie równoległe mogą być obie sieczne, albo jedna sieczna a druga styczna, albo też obie styczne do koła.



1° Równoległe AB, CD obie sieczne. Poprowadźmy średnicę EF prostopadłą spólną do siecznych AB i CD.

Mamy łuk EA = EB i łuk EC = ED.

Odejmując stronami, otrzymujemy:

Łuk EC — EA = ED — EB. Więc łuk AC = BD.

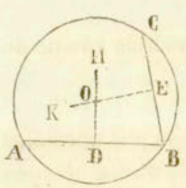
2° Równoległe CD, EG, jedna sieczna druga styczna, są prostopadłe do średnicy EF, przechodzącej przez punkt zetknięcia; więc łuk EC = ED.

3° Równoległe EG, FH obie styczne, są prostopadłe na skrajnościach tej samej średnicy EF; więc łuki EAF, EBF, są równe, jako półokręgi.

TWIERDZENIE IX.

Przez trzy punkta, nie leżące w linii prostej, można zawsze poprowadzić okrąg; ale tylko jeden.

To znaczy, że istnieje punkt, i tylko jeden, równo oddalony od



trzech punktów A, B, C, danych nie w linii prostej. Jakoż, punkt równo oddalony od A i B, znajduje się tylko na prostopadłej DH, wyprowadzonej ze środka prostej AB; bo ta prostopadła jest miejscem geometrycznem punktów równo oddalonych od skrajności linii prostej AB. Tak samo, punkt równo oddalony od B i C leży na prostopadłej EK wyprowadzonej ze środka prostej BC. Owoż, dwie proste DH, EK mogą się przecinać w jednym tylko punkcie; i przecinają się istotnie w pewnym punkcie O; bo są prostopadłe do dwóch prostych AB, BC spotykających się. Więc istnieje punkt O, i tylko jeden, równo oddalony od trzech punktów A, B, C, nie w linii prostej.

Zatem, okrąg nakreślony z punktu O jako środka, promieniem OA, przechodzi przez trzy punkta A, B, C, i jest jedynym.

To twierdzenie pokazuje że:

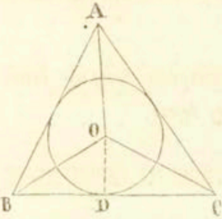
Trzy punkta, nie w linii prostej, wyznaczają okrąg.

Wniosek. — Dwa okręgi mające trzy punkta spólne przystają do siebie.

Twierdzenie X.

Na każdym trójkącie można opisać okrąg, i wpisać w niego okrąg.

Pierwsza część tego twierdzenia jest oczywista, na mocy poprzedzającego.

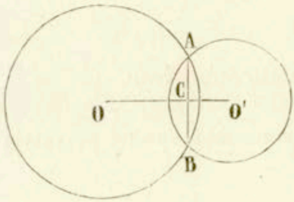


Co do drugiej, uważajmy że wszelki punkt wewnątrz kąta, równo oddalony od ramion, leży na dwójsiecznej tego kąta. Owoż, dwójsieczne trzech kątów trójkąta ABC spotykają się wewnątrz, i tylko w jednym punkcie O, który jest równo oddalony od jego boków; więc okrąg, nakreślony z punktu O jako środka, promieniem równym prostopadłej OD, jest jedynym który dotknie *wewnętrznie* wszystkich trzech boków trójkąta ABC, to jest będzie wpisany w ten trójkąt.

ZETKNIĘCIE KÓŁ.

Twierdzenie XI.

Gdy się dwa okręgi przecinają, linia łącząca ich środki jest prostopadłą do cięciwy spólnej, i dzieli ją na dwie równe części.



Niech będą A i B punkta przecięć dwóch kół O, O'. Ponieważ każdy ze środków O, O' jest równo oddalony od punktów A, B, linia środków O, O' jest prostopadła do cięciwy spólnej AB, i przechodzi przez jej środek C (I, 8).

Wniosek. — Przypuśćmy że okrąg O', mający dwa punkta A, B spólne z okręgiem O, obraca się około punktu A, tak że punkt B zbliża się do A. W tym obrocie, linia środków OO' jest prostopadłą do siecznej AB, i przechodzi przez śródek C cięciwy AB, jakkolwiek blisko punkt B dochodzi do A. Owoż, gdy punkt B schodzi się z A, linia środków przechodzi przez A, i sieczna AB staje się styczną spólną w punkcie A; wtedy dwa okręgi O, O' stają się stycznemi w tym punkcie. Więc,

Gdy dwa okręgi są styczne, ich punkt zetknięcia leży na linii środków, i styczna spólna jest prostopadłą do tej linii.

Wniosek I. — *Punkta przecięcia dwóch okręgów są symetryczne względem linii środków.*

Dwa oddzielne okręgi mogą mieć dwa punkta spólne, to jest przecinać się; albo mieć tylko jeden punkt spólny, to jest być styczne zewnętrznie albo wewnętrznie; albo nakoniec nie mieć żadnego punktu spólnego, to jest być zewnątrz albo wewnątrz jeden drugiego. Zatem, dwa okręgi mogą mieć względem siebie tylko pięć różnych położeń.

Twierdzenie XXIV.

1° *Jeśli dwa okręgi są* ZEWNĘTRZNE *względem siebie, odległość ich środków jest większa od summy promieni.*

2° *Jeśli dwa okręgi są* STYCZNE ZEWNĘTRZNIE, *odległość ich środków równa się summie promieni.*

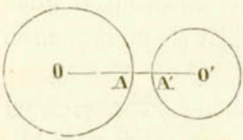
3° *Jeśli dwa okręgi* PRZECINAJĄ SIĘ, *odległość ich środków jest mniejsza od summy promieni a większa od ich różnicy.*

4° *Jeśli dwa okręgi są* STYCZNE WEWNĘTRZNIE, *odległość ich środków równa się różnicy promieni.*

5° *Jeśli dwa okręgi są* WEWNĄTRZ JEDEN DRUGIEGO, *odległość ich środków jest mniejsza od różnicy promieni.*

I NAWZAJEM.

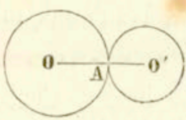
Jakoż,



1° W kołach *zewnętrznych* O, O', jest widoczne

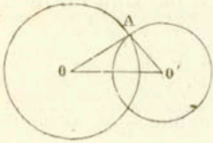
$$OO' = OA + AA' + A'O';$$

więc $$OO' > OA + O'A'.$$



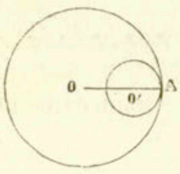
2° W kołach *stycznych zewnętrznie*, punkt zetknięcia A leży na linii środków OO';

więc $$OO' = OA + O'A.$$



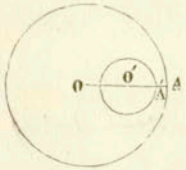
3° W kołach *siecznych*, jeden z punktów spólnych A i środki kół O, O' tworzą trójkąt AOO' w którym, przypuszczając promień $OA > O'A$, mamy:

$$OO' < OA + O'A, \quad \text{i} \quad OO' > OA - O'A.$$



4° W kołach *stycznych wewnętrznie*, środki kół O, O' i punkt zetknięcia A są w linii prostej;

więc $$OO' = OA - O'A.$$



5° Jeśli okręgi O, O′ są *wewnątrz jeden drugiego*, wtedy

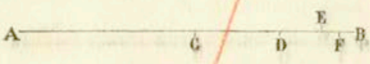
$$OO' = OA - O'A' - A'A;$$

więc $$OO' < OA - O'A'.$$

Wzajemnice tych pięciu paragrafów są widoczne (I, 7. *uw.*).

METODA GRANIC.

Dla lepszego zrozumienia rzeczy zacznijmy od przykładu.



Niech będzie linia prosta AB podzielona w punkcie C na dwie równe części; niech będą następnie: D środek linii BC, E środek linii BD, i tak dalej nieograniczenie, dzieląc ciągle na połowę. Widać oczywiście że, im więcej wyobrazimy wykonanych działań, tem bardziej środek ostatniej połowy zbliży się do skrajności B; ale jej nigdy nie dosięgnie.

Otoż, linie AC, AD, AE,.. wyrażające summę coraz większej liczby wziętych połówek są *ilościami zmiennemi;* a *ilość stała* AB, do której one ciągle dążą, i od której mogą się różnić tak malo jak się podoba, jest ich GRANICĄ.

Ilości niespółmierne, jako $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{5}$,........ log. 3 (podstawy 10), są *granicami* ilości spółmiernych coraz bardziej do nich przybliżonych.

Zrozumiawszy tedy dobrze, że

GRANICĄ *ilości zmiennej jest ilość stała do której ona dąży nieskończenie, choć jej nigdy nie dosięga;* nie trudno pojąć następujące zasady na których się opiera cała, tak ważna metoda granic której często w tem dziele używać będziemy.

I ZASADA GŁÓWNA. — *Gdy dwie ilości zmienne są ciągle równe, zbliżając się do swych granic, te granice są także równe.*

Bo inaczej jedna ilość zmienna miałaby dwie granice; co niedorzeczne.

II Zasada. — *Granicą summy ilości zmiennych, w liczbie skończonej, jest summa granic tych ilości.*

Niech będą A, B, C ilości zmienne; a, b, c odpowiedające granice; a zaś α, β, γ, ilości dodatne albo odjemne które się mogą stać mniejszemi od wszelkiej ilości danej, i takie że

$$A = a + \alpha, \qquad B = b + \beta, \qquad C = c + \gamma.$$

Mamy: $\quad A + B - C = a + b - c + \alpha + \beta - \gamma.$

Owoż, summa $\alpha + \beta - \gamma$, trzech ilości tak małych jak się podoba, może stać się mniejszą od wszelkiej danej wielkości; więc *granicą summy* $A + B - C$ jest *summa granic* $a + b - c$.

III Zasada. — *Granicą wieloczynu, skończonej liczby czynników, jest wieloczyn granic tych czynników.*

Niech będą ilości

$$A - a = \alpha$$
$$B - b = \beta$$
$$C - c = \gamma$$
$$\cdots\cdots$$

Pomnóżmy pierwszą równość przez wieloczyn BC, drugą przez Ca, trzecią przez ab;.... będzie

$$ABC - BCa = BC\alpha$$
$$BCa - Cab = Ca\beta$$
$$Cab - abc = ab\gamma$$

Dodając i redukując, otrzymujemy

$$ABC - abc = BC\alpha + Ca\beta + ab\gamma$$

Owoż, na mocy poprzedzającej zasady, druga strona równości ma za granicę zero; więc granicą wieloczynu ABC jest wieloczyn granic abc, to jest

$$gr.\,(ABC) = gr.\,A \times gr.\,B \times gr.\,C.$$

IV Zasada. — *Granicą ilorazu dwóch ilości jest iloraz ich granic.*

Niech będą: A dzielna, B dzielnik, $\frac{A}{B}$ iloraz; mamy oczywiście

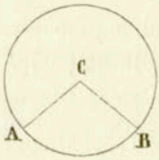
$$A = B \times \frac{A}{B}; \quad \text{więc } gr.\,A = gr.\,B \times gr.\,\frac{A}{B}.$$

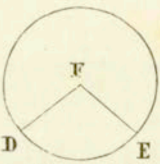
Zkąd wynika $\qquad gr.\,\frac{A}{B} = \frac{gr.\,A}{gr.\,B}.$

MIARA KĄTÓW.

Twierdzenie XIII.

W jednem kole, albo w kołach równych, kąty równe mające wierzchołek we środku koła przejmują na okręgu łuki równe. I nawzajem.





Niech będą dwa koła równe C i F. Jeśli kąty środkowe ACB, DFE są równe, łuki AB i DE objęte między ich ramionami są także równe. Jakoż, połóżmy koło C na kole F, tak żeby kąt środkowy ACB przystał do swego równego DFE; wtedy okręgi tych kół równych przystaną do siebie; zatem punkt A padnie na D i punkt B na E. Więc łuki AB, DE przystają do siebie i są równe.

Nawzajem, *Jeśli łuki* AB *i* DE *są równe, kąty środkowe* ACB, DFE *które je obejmują są także równe.*

Połóżmy okrąg CA na okręgu równym FD, tak żeby łuk AB przystał do swego równego DE; wtedy środek C padnie na F; zatem promień CA przystanie do FD i promień CB do FE. Więc kąty ACB, DFE są równe.

Wniosek. — Wynika ztąd oczywiście że, *W jednem kole albo we dwóch kołach równych, dwa wycinki równe mają podstawy równe.* I nawzajem.

Twierdzenie XIV.

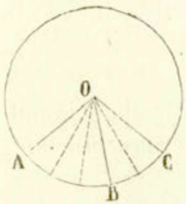
W jednem kole albo w dwóch kołach równych, kąty środkowe mają się jako łuki zawarte między ich ramionami.

Niech będą dwa kąty środkowe AOB, AOC. Powiedam że ich stosunek równa się stosunkowi łuków objętych AB, AC;

to jest: $$\frac{AOC}{AOB}=\frac{AC}{AB}.$$

Dwa przypadki rozróżnić należy, według jak łuki objęte są spółmierne albo niespółmierne.

1° Jeśli łuki AB, AC są *spółmierne*, przypuśćmy, dla utkwienia myśli, że się mają jako liczby 3 i 5 ; będzie $\frac{AC}{AB}=\frac{5}{3}$.

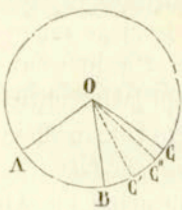


Wyobraźmy łuk AC podzielony na 5 równych części; łuk AB będzie zawierał 3 z tych części ; zatem, jeśli przez punkta podziału poprowadzimy promienie, podzielimy kąt AOC na 5 równych kątów, z których 3 będą się mieściły zupełnie w kącie AOB,

i będzie
$$\frac{AOC}{AOB}=\frac{5}{3}.$$

Więc stosunek kątów $\frac{AOC}{AOB}$ i stosunek łuków $\frac{AC}{AB}$, oba wyrażone tą samą liczbą $\frac{5}{3}$, są równe ; to jest $\frac{AOC}{AOB}=\frac{AC}{AB}$.

2° Przypuśćmy że łuki AB i AC są *niespółmierne* między sobą, pamiętając dobrze że *stosunkiem dwóch ilości niespółmiernych* jest *granica stosunków ilości spółmiernych, które się do nich nieograniczenie i coraz więcej przybliżają*.



Jeśli więc podzielimy łuk AB na pewną liczbę równych części, i poniesiemy jedną z nich na łuk AC, tyle razy ile można, ostatni punkt podziału C′ padnie przed C; zatem dwa łuki spółmierne AC′ i AB będą, na mocy 1°, proporcyonalne do odpowiedających kątów AOC′, AOB ; to jest będzie $\frac{AOC'}{AOB}=\frac{AC'}{AB}$.

Uważajmy teraz że, im na więcej równych części podzielimy łuk AB, tem ostatni punkt podziału padnie bliżej punktu C, i może paśdź tak blizko jak się podoba, chociaż go nigdy nie dosięgnie ; bo dwa łuki AB i AC są niespółmierne między sobą. Ztąd wynika że łuk AC jest granicą łuków AC′, AC″,... Więc stosunek łuków $\frac{AC}{AB}$ jest granicą stosunków $\frac{AC'}{AB}$, $\frac{AC''}{AB}$.. łuków spółmiernych coraz bardziej przybliżonych; a temsamem stosunek kątów $\frac{AOC}{AOB}$ jest granicą stosunków $\frac{AOC'}{AOB}$, $\frac{AOC''}{AOB}$ kątów odpowiedających tym łukom. Owoż, na mocy 1°, stosunki spółmierne kątów środkowych i łuków odpowiedających są ciągle równe, dążąc do swych granic; więc te granice są równe (*zasada* I), to jest

$$\frac{AOC}{AOB}=\frac{AC}{AB}.$$

Co dowodzi że, jakiekolwiek są łuki, spółmierne albo niespółmierne, *kąty środkowe są proporcyonalne do łuków zawartych między ich ramionami.*

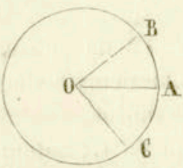
Uwaga II. — Wszystko co się powiedziało o kątach środkowych stosuje się do *wycinków kołowych.*

Powtarzając rozumowanie poprzedzające, łatwo znajdziemy że:

W jednem kole, albo we dwóch kołach równych, dwa wycinki mają się jako łuki ich podstawy.

Twierdzenie XV.

Kąt środkowy ma za miarę łuk zawarty między jego ramionami.



To znaczy że, wszelki kąt AOB ma tę samą miarę co łuk AB zawarty między jego ramionami, na okręgu nakreślonym z jego wierzchołka jako środka, promieniem jakimkolwiek AO; byle za *jedność kąta* wzięto kąt środkowy który obejmuje na tym okręgu łuk wybrany za *jedność łuku.*

Niech będzie do zmierzenia kąt AOB, który obejmuje łuk AB na okręgu promienia OA. Jeśli weźmiemy kąt AOC za jedność kąta i łuk odpowiedający AC za jedność łuku, miarą kąta AOB będzie stosunek $\frac{AOB}{AOC}$, a miarą łuku AB stosunek $\frac{AB}{AC}$. Owoż, te dwa stosunki są równe, na mocy poprzedzającego twierdzenia; więc *miara kąta środkowego* AOB *równa się miarze łuku* AB *zawartego między jego ramionami.* To się wyraża krócej, chociaż mniej jasno, mówiąc: *kąt środkowy ma za miarę łuk zawarty między jego ramionami.*

Zwykle bierze się *kąt prosty* za jedność kąta; w tym razie *jednością łuku* jest ćwierć okręgu czyli *ćwiercian*, jako łuk odpowiedający kątowi prostemu.

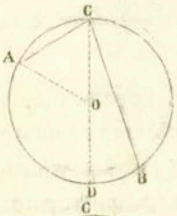
Dla dogodności obliczania łuków, podzielono, od niepamiętnych czasów, okrąg koła na 360 równych części które nazwano *stopniami*, każdy stopień na 60 *minut*, każdą minutę na 60 *sekund*, każdą sekundę na 60 *tercyj*. Wedle takiego podziału mówi się: np. w roku 1867 równik ziemski czyni z ekliptyką kąt A który ma 23 stopni 27 minut 25 sekund... a pisze się: kąt $A = 23°27'25''$.

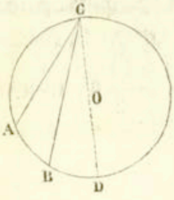
Wiedząc że jedność łuku czyli ćwiercian zawiera 90°, łatwo jest, mając kąt dany w stopniach, minutach i sekundach, znaleźć jego stosunek do kąta prostego; dość tylko podzielić tę ostatnią summę przez 90 stopni, wyraziwszy, ma się rozumieć, wszystko w stopniach albo w sekundach. I tak, kąt $23°27'25''$ równa się $\frac{84445}{324000}$ kąta prostego, albo prawie $\frac{6}{23}$, a cokolwiek więcej niż $\frac{1}{4}$ tego kąta.

Na końcu XVIII° wieku, chciano wprowadzić podział dziesiętny okręgu; jedność łuków, to jest ćwierć okręgu, podzielono na 100 stopni, każdy stopień na 100 minut, minutę na 100 sekund, etc.; ale uczeni, aby nie zrywać z przeszłością, nie przyjęli nowego podziału.

Twierdzenie XVI.

Kąt wpisany w koło ma za miarę połowę łuku zawartego między jego ramionami.



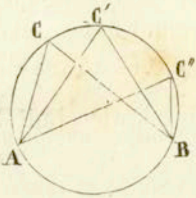


1° Przypuśćmy najpierwej środek koła O wewnątrz kąta wpisanego ACB. Poprowadźmy średnicę CD i promień OA. W trójkącie równoramiennym AOC, kąt zewnętrzny AOD, równy summie dwóch kątów $A + ACD$, równa się dwa razy wziętemu kątowi ACD. Owoż kąt AOD, jako środkowy, ma za miarę łuk objęty AD; więc kąt ACD, jego połowa, ma za miarę połowę tego łuku AD.

Dowiedzie się podobnie że kąt DCB ma za miarę połowę łuku DB. Zatem kąt wpisany ACB, równy summie kątów ACD+DCB, ma za miarę połowę summy łuków AD+DB, to jest połowę łuku AB.

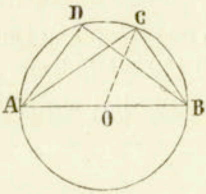
2° Przypuśćmy teraz że środek koła jest zewnątrz kąta wpisanego ACB, i poprowadźmy średnicę CD. Kąt ACD ma za miarę pół łuku AD, a zaś kąt BCD pół łuku BD; więc kąt ACB, jako różnica tych kątów, ma za miarę różnicę $\frac{AD}{2} - \frac{BD}{2}$, to jest $\frac{AB}{2}$.

Więc wszelki kąt wpisany w koło ma za miarę połowę łuku zawartego między jego ramionami.



Wniosek I. — *Wszystkie kąty* ACB, AC′B, AC″B... *wpisane w jeden odcinek koła są równe:* bo mają za miarę połowę tego samego łuku AB zawartego między ich ramionami.

II. — *Wszelki kąt* ADB *wpisany w półkole jest prosty*, bo ma za miarę połowę półokręgu, czyli ćwiercian.

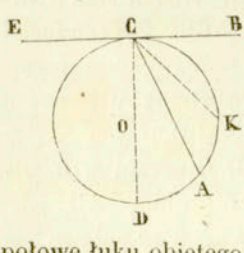


Kąt wpisany w koło jest ostry albo rozwarty, według jak obejmuje łuk *mniejszy albo większy od półokręgu.*

Uwaga. — W trójkącie prostokątnym ABC, ośrodkowa OC przeciwprostokątnej AB jest jej połową. *I nawzajem.*

Twierdzenie XVII.

Kąt ACB *utworzony styczną i cięciwą ma za miarę połowę łuku* AKC *zawartego między jego ramionami.*



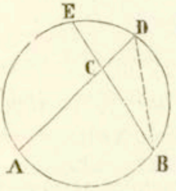
Przez punkt zetknięcia C, poprowadźmy średnicę CD. Kąt prosty DCB ma za miarę połowę półokręgu DAC, a zaś kąt wpisany ACD, połowę łuku AD; więc różnica kątów DCB—DCA, czyli kąt ACB, ma za miarę różnicę $\frac{\text{łuk DAC}}{2} - \frac{\text{łuk DA}}{2}$, to jest połowę łuku objętego AKC.

Dowiedzie się podobnie że kąt ACE ma za miarę pół łuku ADC.

Uwaga. — To twierdzenie jest następstwem poprzedzającego. Jakoż, kąt wpisany ACK ma za miarę połowę łuku AK, jakkolwiek blizko punkt K leży punktu C; owoż, gdy punkt K schodzi się z C, sieczna CK staje się styczną CB; więc kąt ACB ma za miarę połowę łuku AKC.

Twierdzenie XVIII.

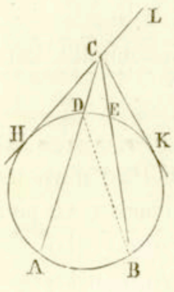
Kąt ACB *dwóch siecznych, spotykających się wewnątrz koła, ma za miarę połowę summy łuków* AB *i* DE, *zawartych między jego ramionami i przedłużeniem tych ramion.*



Połączmy BD. W trójkącie BCD kąt zewnętrzny ACB równa się summie dwóch kątów wpisanych B i D, których odpowiedające miary są $\frac{AB}{2}$ i $\frac{DE}{2}$; więc kąt ACB ma za miarę $\frac{AB+DE}{2}$, to jest połowę summy łuków objętych między ramionami i ich przedłużeniem.

Twierdzenie XIX.

Kąt ACB *dwóch siecznych, spotykających się zewnątrz koła, ma za miarę połowę różnicy łuków* AB *i* DE *zawartych między jego ramionami.*



Połączmy BD. W trójkącie BCD kąt wewnętrzny ACB jest różnicą kąta zewnętrznego ADB i wewnętrznego B, które, jako wpisane, mają za miarę $\frac{AB}{2}$ i $\frac{DE}{2}$; więc kąt C ma za miarę $\frac{AB-DE}{2}$, to jest połowę różnicy łuków objętych między jego ramionami.

Uwaga. — Jedna z siecznych albo nawet obie mogą stać się stycznemi; kąt utworzony temi liniami ma zawsze za miarę połowę różnicy łuków zawartych między jego ramionami; co łatwo widzieć, uważając styczną jako granicę położeń siecznej. — Można także powtórzyć dowodzenie poprzedzające.

Wniosek I. — *Kąt* HCK opisany *na kole ma za miarę połowę różnicy łuków* HAK *i* HDK *zawartych między jego ramionami.*

II. — Kąt BDC, spełnienie kąta wpisanego ADB, nazywa się *zawpisanym*, i ma za miarę połowę summy łuków AHD i BKD.

III. — Kąt KCL, spełnienie kąta opisanego HCK, nazywa się *zaopisanym*, i ma za miarę łuk HDK.

Twierdzenie XX.

Miejscem geometrycznem wierzchołka kąta C, *którego ramiona przechodzą przez dwa punkta stałe* A, B, *jest łuk koła* ACB.

Przez trzy punkta A, B, C poprowadźmy okrąg. Wszystkie kąty ACB ADB..., wpisane w odcinek koła ACB, są równe kątowi C; a, na mocy dwóch poprzedzających twierdzeń, żaden kąt, którego ramiona przechodzą przez punkta A i B ponad cięciwą AB, nie może się równać kątowi C, jeśli nie jest wpisany w odcinek koła ACB. Więc *miejscem geometrycznem wierzchołka kąta* C, opartego *na cięciwie* AB, *jest łuk koła* ACB.

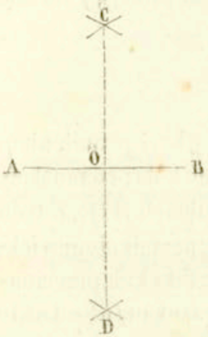
Łuk AKB jest miejscem geometrycznem wierzchołka kąta spełniającego kąt C.

Uwaga. — Z każdego punktu C łuku koła ACB *widać cięciwę* AB dod kątem równym kątowi ACB, a z punktu wziętego zewnątrz albo wewnątrz odcinka koła ACB widać tę samą cięciwę AB pod kątem mniejszym albo większym od kąta ACB. To wszystko stosuje się do odcinka koła, równego odcinkowi ACB, nakreślonego z drugiej strony cięciwy AB. Ztąd wynika że *miejsce geometryczne punktów, z których widać daną prostę* AB *pod kątem danym, składa się z dwóch równych łuków koła przechodzących przez skrajności* A *i* B *tej prostej.*

ZAGADNIENIA.

Zagadnienie I.

Podzielić daną prostę AB *na dwie równe części.*



Ze skrajności A i B prostej AB, jako środków, jednym promieniem większym od połowy odległości AB, nakreśl dwa łuki kół które się przetną w dwóch punktach C, D (12, 3°, wz.). Po czem, poprowadź prostę CD która podzieli AB na dwie równe części w punkcie O (I. 8).

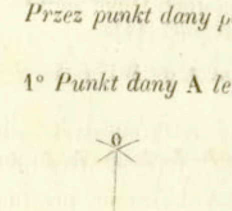
Wniosek. — Powyższe wykreślenie daje sposób wyprowadzenia prostopadłej ze środka danej prostej AB.

Uwaga I. — Powtarzając to wykreślenie, można podzielić daną prostę na 4, 8, 16,... a ogólnie, na 2^n równych części.

Zagadnienie II.

Przez punkt dany poprowadzić prostopadłę do prostej danej.

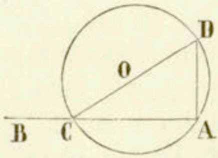
1° *Punkt dany* A *leży na danej prostej* BC.



Z punktu A jako środka, nakreśl jakimkolwiek promieniem dwa łuki kół przecinające prostę BC w punktach D i E. Z tych punktów jako środków, promieniem większym od połowy odległości DE, nakreśl dwa łuki kół przecinające się w punkcie O. Prosta OA będzie prostopadłą do BC.

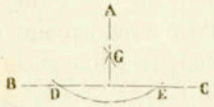
Jakoż, każdy z punktów A i O jest równo oddalony od obydwóch skrajności D i E; więc prosta OA jest prostopadła do BC we środku prostej DE.

2° *Punkt dany* A *jest skrajnością danej prostej* AB.

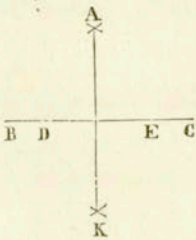


Z punktu zewnętrznego O nakreśl okrąg przechodzący przez punkt A, i przecinający prostę AB w drugim punkcie C. Poprowadź średnicę CD, i potem prostę DA która będzie prostopadłą żądaną; bo kąt CAD wpisany w półkole jest prosty.

3° *Punkt dany* A *leży zewnątrz danej prostej* BC.

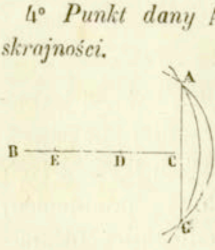


Z punktu A jako środka, i promieniem przyzwoitym, nakreśl łuk koła przecinający prostę BC w dwóch punktach D i E. Z tych ostatnich jako środków, promieniem większym od połowy odległości DE, nakreśl dwa łuki kół przecinające się w G. Prosta AG będzie prostopadłą szukaną, bo każdy z punktów A i G jest równo oddalony od skrajności linii DE.



Albo krócej. Z dwóch punktów D, E jako środków, wziętych przyzwoicie na prostej BC, nakreśl promieniami DA, EA, dwa łuki kół które się przetną w punktach A i K. Prosta AK będzie prostopadła do prostej BC (11).

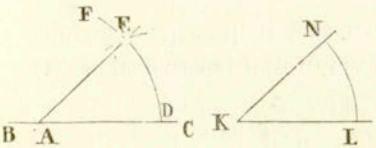
4° *Punkt dany* A *leży zewnątrz danej prostej* BC *i ku jej skrajności.*



Z punktów D, E jako środków, wziętych przyzwoicie na prostej BC, nakreśl dwa łuki kół przechodzące przez A, które się przetną w drugim punkcie G. Cięciwa spólna AG będzie prostopadła do prostej BC.

Zagadnienie III.

Na prostej BC *w danym punkcie* A *wykreślić kąt równy danemu* K.



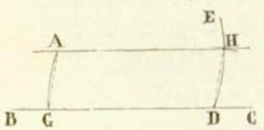
Z wierzchołka kąta danego K jako środka, jakimkolwiek promieniem KL, nakreśl łuk koła przecinający ramiona tego kąta w punktach L i N; potem, z punktu A jako środka, i tym samym promieniem, nakreśl łuk koła DF przecinający w D prostę BC. Weź cyrklem długość cięciwy LN, i tą otwartością cyrkla nakreśl, z punktu D jako środka, łuk koła przecinający w E łuk DF; kąt DAE będzie żądany.

Bo kąty środkowe DAE i K, obejmujące łuki równe jednego promienia, są równe.

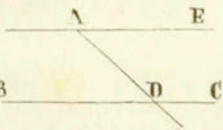
Zagadnienie IV.

Przez punkt dany A *poprowadzić równoległę do prostej danej* BC.

Pierwsze rozwiązanie. — Z punktu A jako środka, dostateczną otwartością cyrkla, nakreśl łuk koła DE, przecinający w D daną prostę BC; z punktu D jako środka, tą samą otwartością cyrkla, nakreśl drugi łuk koła AG który przejdzie przez A i przetnie w G prostę BC. Weź cyrklem długość cięciwy AG i tą otwartością nakreśl, z punktu D jako środka, łuk koła przecinający w H łuk DE; poprowadź nakoniec prostę AH, która będzie żądaną równoległą.



Jakoż, prowadząc cięciwy AG i DH, mamy równoległobok AGDH; więc prosta AH jest równoległa do BC.



Drugie rozwiązanie.— Przez dany punkt A poprowadź jakąkolwiek sieczną AD która przetnie w D daną prostę BC, i na AD zrób kąt DAE równy kątowi ADB. Prosta AE jest równoległa do BC, bo te dwie linie tworzą z sieczną AD kąty DAE, ADB naprzemianległe wewnętrzne równe.

Trzecie rozwiązanie. — Można także, za pomocą węgielnicy i liniału, kreślić równoległe; jakośmy to już pokazali (I. zag. 1).

Zagadnienie V.

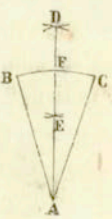
Przez punkt A *poprowadzić linię prostą któraby czyniła z daną prostą* BC *kąt równy danemu* K.

Jeśli punkt A jest dany na prostej BC, proste AG i AH, czyniące z prostą BC kąty BAG, CAH równe danemu K rozwiązują zagadnienie.

Jeśli punkt A jest dany zewnątrz prostej BC, wtedy przez A poprowadź równoległę DE do BC, i na DE w punkcie A zrób kąty DAG i EAH równe danemu K. Linie proste AG i AH rozwiążą zagadnienie; bo kąty naprzeciwległe wewnętrzne AGC i DAG, AHB i EAH, równe między sobą, są równe danemu kątowi K.

Zagadnienie VI.

Podzielić kąt, albo łuk koła, na dwie równe części.



1° Niech będzie dany kąt BAC. Z jego wierzchołka A jako środka, nakreśl łuk koła przecinający ramiona w punktach B i C. Z tych dwóch punktów jako środków, i promieniem przywoitym, nakreśl dwa łuki kół przecinające się w punktach D i E. Po czem, poprowadź prostę AD która będzie *dwójsieczną* kąta A.

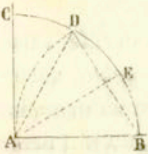
Jakoż, jeśli połączymy BD, CD, dwa trójkąty ADB, ADC będą równe; więc kąty DAB, DAC są równe.

2° Niech będzie dany łuk koła BC. Ze skrajności B i C tego łuku jako środków, i promieniem przyzwoitym, nakreśl dwa łuki kół przecinające się w punktach D i E. Prosta DE będzie prostopadła we środku cięciwy łuku BC, i podzieli ten łuk, w punkcie F, na dwie równe części (4).

Uwaga. — Powtarzając to wykreślenie, można podzielić kąt albo łuk koła na 2^n równych części.

Zagadnienie VII.

Podzielić kąt prosty na trzy równe części.



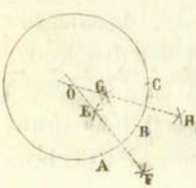
Z wierzchołka kąta prostego A jako środka, nakreśl łuk koła przecinający ramiona w punktach B i C. Z punktu B jako środka, tym samym promieniem BA, przetnij łuk BC w punkcie D. Kąt CAD będzie trzecią częścią kąta prostego.

Jakoż, połącz AD, BD; trójkąt ABD jest oczywiście równoboczny; zatem kąt BAD $= \frac{2}{3}$p. A więc kąt CAD $= \frac{1}{3}$p; etc.

Uwaga. — To zagadnienie jest szczególnym przypadkiem ogólnego zagadnienia trójdzielenia kąta, to jest: *podzielenia kąta na trzy równe części*, którego za pomocą samego *liniału* i *cyrkla* rozwiązać nie można.

Zagadnienie VIII.

Przez trzy punkta A, B, C, *nie leżące w linii prostej, poprowadzić okrąg koła.*

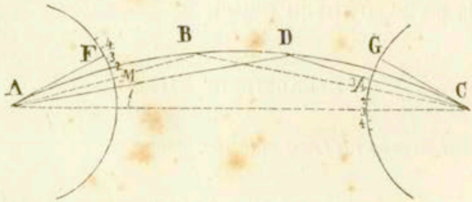


Z punktów A i B jako środków, i jednym promieniem, nakreśl dwa łuki kół przecinające się w E i F; z punktów B i C jako środków, jednym promieniem, nakreśl także dwa łuki kół przecinające się w G i H. Linie proste EF i GH przetną się we środku O koła szukanego którego promieniem jest odległość OA (9).

Uwaga. — *Opisać koło na danym trójkącie* ABC jest to samo zagadnienie.

Powyższe wykreślenie służy do znalezienia środka koła, albo środka łuku koła.

Zdarza się niekiedy że łuk koła, przechodzący przez trzy dane



punkta A, B, C, ma promień zanadto wielki aby go cyrklem nakreślić można. Wtedy otrzymuje się ten łuk *przez punkta*, następującym, praktycznym sposobem, który może służyć na gruncie.

Przez punkt A pociągnij jakąkolwiek prostę AD *pod* AB, i przez punkt C pociągnij prostę CD *ponad* CB, tak żeby czyniła kąt BCD równy kątowi BAD. Punkt przecięcia D tych dwóch prostych będzie leżał na łuku koła ABC. Jakoż, w trójkątach ABC, ADC summy kątów przy podstawie AC są oczywiście równe; więc trzecie kąty B i D są równe (I, 25, wn. 4). A że ramiona tych kątów przechodzą przez te same punkta A i C, więc ich wierzchołki B i D leżą na jednym łuku koła ABC.

Takim sposobem znajduje się inne punkta łuku. Dla ułatwienia rysunku kątów równych, kreśli się z punktów A i C jako środków, jednym promieniem, dwa łuki kół MF i NG na których się oznacza, począwszy od punktów przecięć M i N z cięciwami AB i BC, na obie strony, pewną liczbę równych części, dostatecznie małych aby punkta szukanego łuku były blizko jeden drugiego.

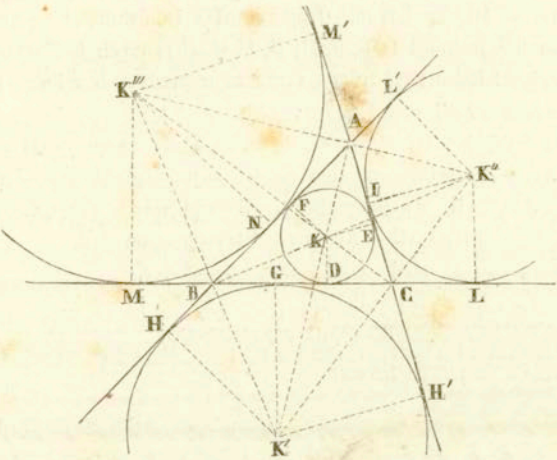
Można łatwo poprowadzić styczne do łuku AC na obydwóch jego skrajnościach A i C. Jakoż, jeśli zrobimy kąt BAF równy kątowi BCA, i kąt DCG równy kątowi DAC, proste AF i CG będą stycznemi żądanemi.

Mając jedną styczną łatwo wyznaczyć inną. I tak, aby otrzymać styczną łuku AC w punkcie B, dość wyprowadzić ze środka cięciwy AB prostopadłę aż do spotkania ze styczną AF; linia łącząca punkt spotkania z punktem B, będzie styozną szukaną.

Zagadnienie IX.

Wpisać koło w dany trójkąt ABC.

Nakreśl dwójsieczne kątów wewnętrznych A i B. Te linie prze-



tną się w punkcie K równo oddalonym od trzech boków trójkąta. Więc koło nakreślone ze środka K promieniem równym prostopadłej KD, będzie wpisane w trójkąt ABC.

Uwaga. — To zagadnienie jest szczególnym tylko przypadkiem następującego :

Nakreślić koło styczne do trzech prostych przecinających się po dwie.

Niech będą trzy proste AB, AC, BC przecinające się w punktach A, B, C. Poprowadźmy dwójsieczne kątów wewnętrznych i zewnętrznych trójkąta ABC. Te dwójsieczne spotkają się w czterech punktach K K′ K″ K‴ równo oddalonych od trzech linij danych (I, 15. uw.). Więc koła nakreślone z tych punktów jako środków, i promieniami równemi odległościom KD, K'H, K''L, K'''M, tych środków od linij danych, będą styczne do tych linij.

Zagadnienie ma cztery rozwiązania. Jednem z nich jest koło KD styczne wewnątrz, czyli *wpisane* w trójkąt ABC który tworzą trzy dane proste; trzema zaś innemi są koła K'H, K''L, K'''M styczne zewnątrz tych linij, i dlatego nazywają się *zawpisanemi.*

Środek każdego z tych czterech kół jest punktem spotkania trzech wysokości, w trójkącie którego wierzchołkami są trzy inne środki a spodkami tych wysokości wierzchołki trójkąta ABC.

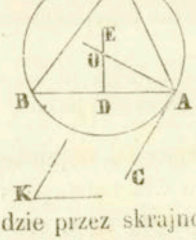
Uwaga. — Między bokami trójkąta ABC i odcinkami wyznaczonemi przez punkta zetknięć D, E, F, G, H, L, M,... czterech kół stycznych są pewne związki które znać trzeba Oznaczając przez a, b, c boki, przez $2p$ obwód trójkąta ABC, mamy:

$$AB + BG + CG + CA = AH + AH' = 2AH; \quad \text{więc} \quad AH = p.$$
$$AF + BD + CE = p, \text{ albo } AF + a = p; \text{ ztąd } AF = p - a.$$
$$AN = AM' = p - b = BF, \quad AI = AL' = p - c = CE.$$
$$FH = AH - AF = a; \quad NL' = p - BN = a.$$
$$LM = BL' + CM - a = b + c.$$
$$DG = BD - BG = p - b - (p - c) = c - b.$$
$$BG = BH = p - c = CD.$$

Podobnie o innych odcinkach.

Zagadnienie X.

Na danej prostej AB, *nakreślić odcinek koła obejmujący kąt dany* K; *to jest, nakreślić odcinek taki żeby wszystkie kąty w niego wpisane równały się danemu.*

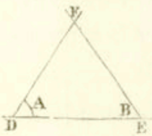


Przy skrajności A danej prostej AB, zrób kąt BAC równy danemu K, poprowadź prostopadłę AO do AC, i prostopadłę DE we środku prostej AB. Z punktu spotkania O tych dwóch prostopadłych jako środka, i promieniem OA, nakreśl łuk koła AMB, który przejdzie przez skrajności A, B, i wyznaczy szukany odcinek AMB.

Jakoż, prosta AC, prostopadła na skrajności promienia, jest styczną do okręgu O; przeto kąt BAC, utworzony styczną i cięciwą, ma za miarę połowę łuku objętego AB. A że wszelki kąt M, wpisany w odcinek AMB, ma za miarę tę samą połowę łuku AB; więc kąt M = BAC = K.

Zagadnienie XI.

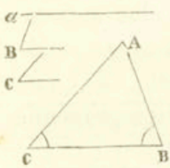
Mając dane dwa kąty A i B *trójkąta znaleźć trzeci.*



Nakreśl linię prostą jakąkolwiek DE, i przy dwóch jej punktach D i E zrób kąt D = A, E = B: trzeci kąt F trójkąta DEF będzie szukanym.

Zagadnienie XII.

Wystawić trójkąt znając jeden bok i dwa kąty.



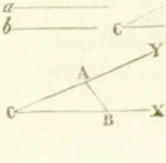
1° Jeśli dwa dane kąty B i C są przyległe bokowi danemu *a*; weź linię prostą BC = *a*, i przy jej skrajnościach zrób kąt ABC = B, i kąt ACB = C. Linie proste BA, CA przetną się w punkcie A, i trójkąt ABC będzie szukany.

2° Jeśli dwa dane kąty nie są oba przyległe danemu bokowi, wtedy wyznacza się trzeci kąt trójkąta (*zag.* 11), i zagadnienie przywodzi się do pierwszego przypadku.

Uwaga. — Zagadnienie jest oczywiście niemożebne, gdy summa dwóch danych kątów nie jest mniejsza od dwóch kątów prostych.

Zagadnienie XIII.

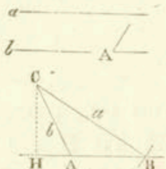
Wystawić trójkąt którego są wiadome dwa boki a, b, *i kąt* C *między niemi zawarty.*



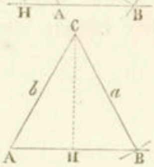
Nakreśl linię prostą jakąkolwiek CX. Przy punkcie C zrób kąt XCY równy danemu C; weź CA = *a*, i CB = *b*; połącz AB. Trójkąt ACB jest oczywiście trójkątem szukanym.

Zagadnienie XIV.

Wystawić trójkąt mając dane dwa boki a, b, *i kąt* A *przeciwległy bokowi* a.



Zrób kąt BAC = A; na jednem ramieniu weź AC = b, i z punktu C jako środka, promieniem równym bokowi przeciwległemu a, nakreśl łuk który przetnie ramie AB w punkcie B; trójkąt ABC będzie szukany.

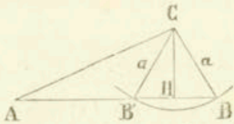


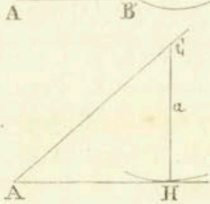
Dyskusya. — Dyskutować zagadnienie jestto szukać jakim warunkom powinny zadość czynić ilości dane, aby to zagadnienie było możebne, i ile mieć może rozwiązań.

Trzy różne przedstawiają się tu przypadki.

1° Gdy bok $a > b$, wtedy, jakikolwiek jest kąt A, łuk koła nakreślony z punktu C jako środka, promieniem a który jest większy od boku CA a temsamem większy od prostopadłej CH, przetnie ramie AB, w punkcie B. Więc w tym przypadku zagadnienie ma zawsze jedno rozwiązanie, trójkąt ABC.

2° Gdy bok $a = b$, szukany trójkąt jest równoramienny; więc kąt dany A musi być *ostry*. Ten warunek *konieczny* jest dostateczny, albowiem łuk koła nakreślony z punktu C jako środka, promieniem a który jest większy od prostopadłej CH, przecina ramie AB w punktach A i B, i trójkąt ACB jest jedynem rozwiązaniem.





3° Gdy bok $a < b$, trzeba żeby kąt A był *ostry;* bo inaczej trójkąt nie byłby możebny (I, 17). W tym przypadku, jeśli bok przeciwległy a jest większy od prostopadłej CH, łuk koła nakroślony z punktu C jako środka, promieniem a, spotyka samo ramie AB w dwóch punktach B i B′; i *dwa* trójkąty ABC, AB′C, rozwiązują zagadnienie.

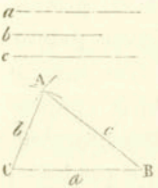
Jeśli zaś bok przeciwległy a jest równy prostopadłej CH, wtedy łuk nakreślony z punktu C promieniem a, jest styczny do ramienia AB w punkcie H; i trójkąt ACH jest jedynem rozwiązaniem.

Nakoniec, jeśli bok przeciwległy a jest mniejszy od prostopadłej CH, szukany trójkąt nie istnieje.

Jako widać, w tym trzecim przypadku, zagadnienie może mieć dwa rozwiązania, albo tylko jedno, albo nawet nie mieć żadnego.

Zagadnienie XV.

Wystawić trójkąt znając jego trzy boki a, b, c.



Weź linię prostą BC $= a$; z punktu B jako środka, promieniem równym bokowi c, nakreśl łuk koła; z punktu C jako środka, promieniem równym bokowi b, nakreśl drugi łuk koła który przetnie pierwszy w punkcie A. Trójkąt ABC rozwiąże zagadnienie.

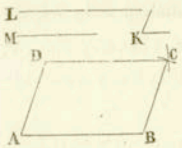
Uwaga. — Aby trójkąt był możebny, trzeba i dość jest żeby łuki kół nakreślone z punktów B i C jako środków, promieniami c i b, przecinały się; co wymaga żeby odległość tych środków, czyli prosta a, była mniejsza od summy promieni b i c, a większa od ich różnicy; to jest $a < b + c$ i $a > b - c$ albo $a > c - b$.

Więc, *aby można wystawić trójkąt znając dane trzy boki, trzeba i dość jest żeby największy z boków był mniejszy od summy dwóch innych.*

Zagadnienie XVI.

Wystawić równoległobok, mając dane dwa boki L *i* M, *i kąt* K *między niemi zawarty.*

Zrób kąt A równy danemu K (*zag.* 5.), i na jego ramionach weź długość AB równą danemu bokowi L, i długość AD równą

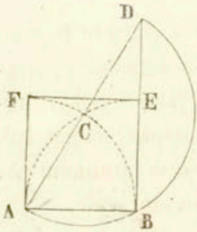


drugiemu bokowi M. Z punktu B jako środka, promieniem L, nakreśl łuk koła; z punktu D jako środka, promieniem M, nakreśl drugi łuk koła który przetnie pierwszy w punkcie C. Połącz B i C, D i C. Czworokąt ABCD będzie szukanym równoległobokiem; bo ma boki przeciwległe równe między sobą, a te boki i kąty są równe danym.

Uwaga. — Jeśli kąt dany jest prosty, równoległobok będzie prostokątem; a będzie ukośnikiem jeśli dane boki są równe.

Zagadnienie XVII.

Zbudować kwadrat znając jego bok AB.

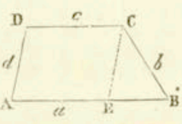


Z punktów A i B jako środków, promieniem AB nakreśl łuki kół które się przetną w C. Z punktu C jako środka, tym samym promieniem, nakreśl łuk koła ABD, i poprowadź średnicę ACD. Prosta BD jest prosto padła do AB i przecina łuk ACE w punkcie E który jest jednym z wierzchłoków szukanego kwadratu. Więc, jeśli z punktu E jako środka, promieniem EB, nakreślisz łuk koła który przetnie łuk BC w punkcie F, czworokąt ABEF będzie oczywiście żądanym kwadratem.

Uwaga. — Jako sprawdzenie cięciwy CE i CF powinny być równe.

Zagadnienie XVIII.

Wystawić trapez znając cztery jego boki a, b, c, d.



Niech będzie ABCD szukany trapez. Jeśli przez skrajność C podstawy mniejszej, poprowadzimy równoległę CE do boku AD, rozłożymy trapez na równoległobok AECD i na trójkąt BCE. W tym ostatnim wiadome są boki, to jest BC$=b$, CE$=d$, BE$=a-c$.

Więc, aby rozwiązać zagadnienie, dość jest wykreślić trójkąt mający za boki trzy linie b, d, $a-c$, i potem dopełnić równoległoboku AECD.

Dyskusya. W każdym wielokącie największy bok jest mniejszy od summy wszystkich innych. Ten warunek *konieczny* jest dostateczny w trapezie.

Jakoż, niech będą boki a, b, c, d trapezu w porządku wielkości $a > b > c > d$, i przypuśćmy $a < b + c + d$.

Jeśli weźmiemy za podstawy trapezu a i d, największy i najmniejszy z danych boków,

będzie oczywiście $a - d < b + c$ i $a - d > b - c$.

Co dowodzi że można wystawić trójkąt mający trzy boki $a-d$, b, c, i temsamem wystawić odpowiedający trapez.

Uważajmy teraz że, jeśli $a - b > c - d$, to także $a - c > b - d$; albo przeciwnie, jeśli $a - b < c - d$, to także $a - c < b - d$. Ztąd wynika że, albo trapez mający podstawy a i b i trapez mający podstawy a i c są oba razem możebne; albo przeciwnie, trapezy mające podstawy, jeden d i c a drugi d i b są możebne.

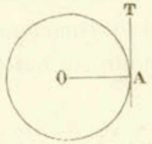
Nakoniec, gdy $a - b = c - d$, to także $a - c = b - d$; wtedy żaden z ostatnich trapezów nie istnieje.

Więc zagadnienie ma ogólnie *trzy* rozwiązania, albo tylko *jedno*; a może nawet nie mieć żadnego.

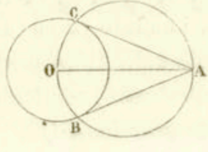
Zagadnienie XIX.

Przez dany punkt A *poprowadzić styczną do koła danego* O.

Trzeba odróżnić dwa przypadki.



1° Jeśli punkt A jest na okręgu; ze skrajności A promienia OA wyprowadź prostopadłę AT, która będzie styczną szukaną (6).



2° Dany punkt A jest zewnątrz koła O. Przypuśćmy zagadnienie rozwiązane, i niech będzie AB styczna do koła O w punkcie B. Ponieważ styczna koła jest prostopadła na skrajności promienia, kąt ABO jest prosty. Więc punkt zetktęcia B leży na okręgu nakreślonym na odległości AO jako średnicy, i także na danym okręgu O; więc leży na przecięciu tych dwóch okręgów. To pokazuje że zagadnienie ma dwa rozwiązania, i tylko dwa.

Aby je otrzymać, dość nakreślić na odległości AO jako średnicy, okrąg który przetnie okrąg O w dwóch punktach B, C. Proste AB i AC będą dwiema szukanemi stycznemi.

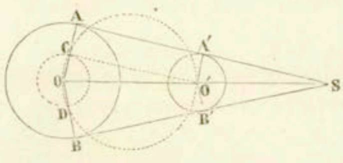
Wniosek. — Trójkąty prostokątne ABO, ACO, mające przeciwprostokątnę AO spólną, i dwa boki OB, OC równe jako promienie koła O, są równe. Ztąd wynika że

Dwie styczne koła AB i AC, *wychodzące z jednego punktu, są równe; prosta* AO, *która łączy ten punkt ze środkiem koła, jest dwójsieczną kąta* BAC *dwóch stycznych, i dwójsieczną kąta* BOC *dwóch promieni przechodzących przez punkta zetknięć; nakoniec punkta zetknięć* B *i* C *są* SYMETRYCZNE *względem prostej* AO.

Zagadnienie XX.

Poprowadzić styczną spólną dwom kołom danym.

Przypuśćmy zagadnienie rozwiązane, i niech będzie :



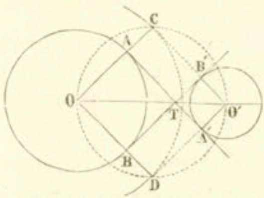
1° AA′ styczna *zewnętrzna* do dwóch kół O, O′. Poprowadźmy promienie zetknięć OA, O′A′, i równoległę O′C do stycznej AA′. Czworobok ACO′A′ jest prostokątem; więc OC = OA — O′A′, i prosta O′C jest styczną do koła OC. Wszystko tedy przywodzi się do wyznaczenia punktu styczności C. Ten zaś punkt znajduje się poprostu następującem wykreśleniem :

Ze środka koła O′, promieniem równym *różnicy* OA — O′A′ promieni dwóch kół danych, nakreśl koło OC, i na odległości OO′ środków tych kół jako średnicy, nakreśl drugie koło które przetnie pierwsze w punktach C i D ; po czem, poprowadź promienie OCA i ODB, i do nich odpowiednio równoległe promienie O′A′ i

O'B'. Nakoniec, poprowadź proste AA' i BB' które będą szukanemi stycznemi zewnętrznie.

Jako widzimy, dwie styczne zewnętrzne AA', BB' są o tyle możebne o ile ze środka koła O' można poprowadzić dwie styczne do koła OC. Owoż te ostatnie wymagają żeby punkt O' nie padał wewnątrz koła OC, to jest żeby było $OO' \geq OA - O'A'$.

Więc, jeśli dwa dane koła O i O' nie są *wewnątrz jedno drugiego*, można zawsze poprowadzić do nich dwie styczne zewnętrzne spólne. Ale, gdy dwa dane koła są styczne wewnętrznie, w tym przypadku mają tylko jedną styczną zewnętrzną spólną.



2° Niech będzie teraz AA' styczna *wewnętrzna* spólna dwom kołom O, O'. Poprowadźmy promienie zetknięć OA, O'A', i równoległę O'C do stycznej AA'. Czworobok ACO'A' jest prostokątem; więc $OC = OA + O'A'$, i prosta O'C' jest styczną do koła OC. Ztąd wynika następujące wykreślenie :

Ze środka koła O, promieniem równym *summie* $OA + O'A'$ promieni kół danych, nakreśl koło OC, i na odległości OO' środków tych kół jako średnicy, nakreśl drugie koło które przetnie pierwsze w punktach C i D; po czem, poprowadź promienie OC i OD, i do nich odpowiednio równoległe promienie O'A' i O'B'. Nakoniec, poprowadź proste AA' i BB' które będą szukanemi stycznemi wewnętrznemi.

Wykreślenie daje ogólnie dwie styczne wewnętrzne, byle było $OO' \geq OA + O'A'$. To pokazuje że, aby do dwóch kół danych można było poprowadzić dwie styczne wewnętrzne spólne, trzeba i dość jest żeby te koła były zewnętrzne. Ale, gdy dwa dane koła są styczne zewnętrznie, w tym przypadku mają tylko jedną styczną wewnętrzną spólną.

Z tego wszystkiego wynika że :

1° Dwa *koła zewnętrzne* mają *cztery* spólne styczne: dwie zewnętrzne i dwie wewnętrzne.

2° Dwa *koła styczne zewnętrznie* mają *trzy* spólne styczne: dwie zewnętrzne i jedną wewnętrzną (fig. 1).

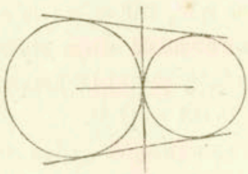


Fig. 1

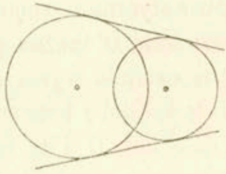


Fig. 2

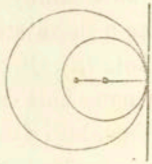


Fig. 3

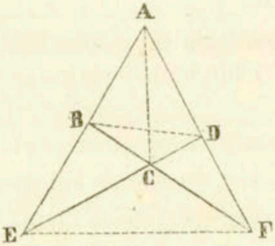
3° Dwa *koła sieczne* mają *dwie* spólne styczne zewnętrzne (fig. 2).

4° Dwa *koła styczne wewnętrznie* mają tylko jedną spólną styczną zewnętrzną (fig. 3).

5° Dwa *koła wewnątrz jedno drugiego* nie mają żadnej stycznej spólnej.

Uwaga. — Dwa koła stanowią układ symetryczny względem linii środków; więc ich spólne styczne spotykają się na tej linii, zewnętrzne zewnątrz dwóch kół, a wewnętrzne między niemi.

CZWOROBOK WPISALNY I OPISALNY.



Określenie XVII. — Układ czterech linij prostych, z których każda spotyka wszystkie inne, nazywa się *czworobokiem zupełnym*; i tak, figura ABCDFE, utworzona ze czterech prostych AB, BC, CD, AD które się spotykają w sześciu punktach A, B, C, D, E, F, jest czworobokiem zupełnym.

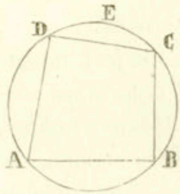
To nazwisko pochodzi ztąd że w czworoboku zupełnym znajduje się czworobok wypukły ABCD, czworobok wklęsły AECF i czworobok krzyżowy BEDFB.

Czworobok zupełny ma trzy przekątne AC, BD, EF które należą do trzech jego czworoboków.

Wielokąt mający wszystkie boki styczne do koła, ale leżący zewnątrz tego koła, nazywać będziemy *zaopisanym*.

Twierdzenie XXI.

W czworoboku wypukłym *wpisanym w koło kąty przeciwległe są spełniające.* — I nawzajem.

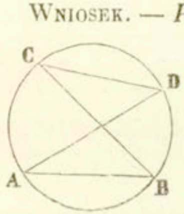


W czworoboku wpisanym ABCD, kąty przeciwległe A i C mają za odpowiedające miary połowę łuku BCD i połowę łuku BAD; summa tych miar czyni półokrąg; więc kąty przeciwległe A i C są spełniające. Tak samo kąty B i D są spełniające.

Nawzajem, *czworobok* ABCD, *mający kąty przeciwległe* A *i* C *spełniające, jest wpisalnym.*

Jakoż, przez trzy wierzchołki A, B, C, poprowadźmy koło. Kąt wpisany ABC ma za miarę połowę łuku AEC zawartego między jego ramionami; zatem kąt ADC, jego spełnienie z założenia, ma za miarę połowę łuku ABC, i dlatego musi być wpisany w odcinek koła AEC. Więc czworobok ABCD jest wpisany w koło ABC.

Wniosek. — *Prostokąt i trapez równoramienny są czworobokami wpisalnemi.*

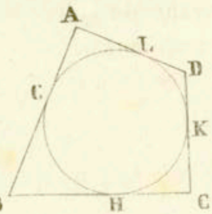


Uwaga. — *W czworoboku krzyżowym wpisanym* ABCD *kąty przeciwległe, jako* A *i* C, *są równe.* I nawzajem.

Twierdzenie XXII.

W czworoboku opisanym na kole, summa dwóch boków przeciwległych, równa się summie dwóch innych.

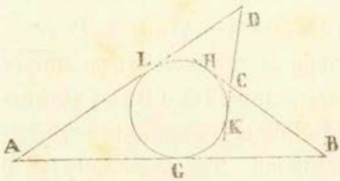
Niech będzie ABCD czworobok wypukły albo wklęsły opisany na kole, i G, H, K, L punkta zetknięć; mamy AG=AL,



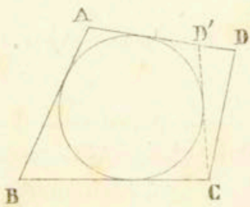
$BG = BH, CK = CH, DK = DL.$ Ztąd, dodając stronami, otrzymujemy

$$AB + CD = AD + BC.$$

NAWZAJEM, czworobok ABCD jest opisalny, gdy summy boków przeciwległych, $AB + CD$ i $AD + BC$, są równe.



Bo, jeśli tak nie jest, można zawsze wpisać koło które zostawi zewnątrz jeden z boków, jako CD; wtedy, poprowadziwszy styczną CD′, będzie w czworoboku opisanym ABCD′



$$AB + CD' = AD' + BC;$$

Ale z założenia

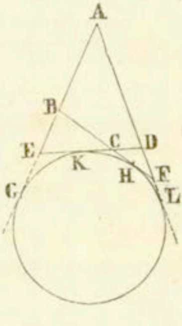
$$AB + CD = AD + BC;$$

ztąd, odejmując stronami wywodzimy $CD - CD' = DD'$. Ten wynik pokazuje że bok DD′ jest zero; czyli że bok CD jest styczny do koła wpisanego. Więc czworobok ABCD jest opisalny.

WNIOSEK. — Ukośnik jest opisalny.

TWIERDZENIE XXIII.

W czworoboku zaopisanym na kole, różnica dwóch boków przeciwległych równa się różnicy dwóch innych.



Albo wyraźniej, w czworoboku zaopisanym na kole summy boków tworzących kąty zaopisane są równe.

Jakoż, 1° uważając czworobok *wypukły* zaopisany ABCD, mamy

$AG = AL,\ BH = BG,\ CK = CH,\ DL = DK;$

zkąd wynika

$AG - BG + BH - CH = AL - DL + DK - CK;$

więc $\qquad AB + BC = AD + CD.$

2° W czworoboku *wklęsłym* AECF zaopisanym, znajdujemy

$$AG - AL = o,\ EK - EG = o,\ CK - CH = o,\ FL - FH = o.$$

Ztąd, dodając, wynika

$$AE + EC - AF - CF = 0 \text{ albo } AE + EC = AF + CF.$$

3° Nakoniec, w czworoboku *krzyżowym* BEDF zaopisanym, jest

$$BG - BH = o,\ EK - EG = o,\ DK - DL = o,\ FL - FH = o;$$

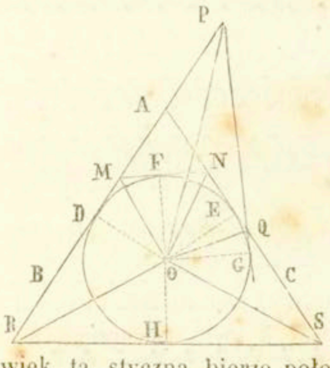
zkąd otrzymujemy $BE + ED = DF + BE.$

Uwaga. — Wzajemnice dwóch ostatnich paragrafów są prawdziwe, to jest: *Czworobok wklęsły albo krzyżowy jest zaopisalny gdy różnica dwóch boków przeciwległych równa się różnicy dwóch innych.*

Ale wzajemnica pierwszego paragrafu nie jest prawdziwa. Jakoż, w równoległoboku różnice dwóch boków przeciwległych są równe, a przecież równoległobok nie jest zaopisalny na kole.

Twierdzenie XXIV.

Część stycznej ruchomej, zawarta między dwiema stycznemi stałemi, jakiekolwiek bierze położenie, jest widziana ze środka koła pod tym samym kątem albo pod kątem spełniającym.



Niech będą dwie styczne stałe AB i AC w punktach D i E koła, Odróżniamy trzy oddzielne położenia stycznej ruchomej, to jest: 1° odcinek MN w kącie opisanym BAC, 2° PQ w kącie zaopisanym CAP, i 3° położenie niższe RS.

1° Kąt MON, pod którym widać ze środka koła O odcinek MN stycznej ruchomej, jest stały jakiekolwiek ta styczna bierze położenie w kącie BAC. Jakoż, nazywając F punkt zetkięcia stycznej MN, mamy kąt MOF = MOD, i kąt NOF = NOE (*zag.* 19, wn.): zatem kąt MON jest połową kąta DOE; a że ten ostatni nie zależy od położenia stycznej MN;

więc kąt MON jest ten sam dla wszystkich położeń stycznej MN w kącie BAC.

2° Uważajmy w kącie zaopisanym CAP styczną ruchomą PQ która dotyka koła w punkcie G. Kąt POQ, pod którym widać odcinek PQ ze środka koła O, jest różnicą kątów POG i QOG. Owoż, kąt POG jest połową kąta DOG, a kąt QOG połową kąta EOG; więc kąt POQ jest połową różnicy kątów DOG i EOG, to jest równa się połowie kąta stałego DOE.

3° Nakoniec uważajmy styczną ruchomą RS której punkt zetknięcia H, jest na łuku niższym DHE. Kąt ROH jest połową kąta DOH, a kąt HOS połową kąta EOH; zatem kąt ROS jest połową summy kątów DOH i EOH; a że ta summa kątów z kątem DOE czyni cztery kąty proste, więc kąt ROS, równy połowie summy kątów DOH+EOH jest spełnieniem połowy kąta stałego DOE, czyli jest spełnieniem kąta MON.

Jeśli styczne stałe BD i CE są równoległe, kąty MON, POQ i ROS są proste.

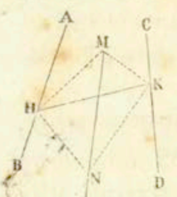
Uwaga. — Obwód trójkąta AMN jest stały jakiekolwiek styczna ruchoma MN ma położenie w kącie MAN. Bo MF = MD i NF = NE: więc AM + MN + AN = 2AD.

Dowiedzie się podobnie że w trójkącie ARS, AR + AS − RS = 2AD; tak samo w trójkącie APQ, PQ + AQ — AP = 2AD.

DALSZY CIĄG ZAGADNIEŃ KSIĘGI DRUGIEJ.

Zagadnienie XXI.

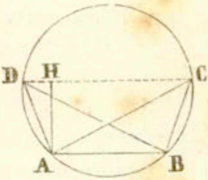
Poprowadzić dwójsieczną kąta dwóch linij prostych AB *i* CD, *których punkt spotkania nie jest oznaczony.*



Poprowadź jakąkolwiek sieczną HK, i nakreśl dwójsieczne HM, KM kątów wewnętrznych; punkt ich spotkania M, jako równo odddalony od ramion HA, HK, KC, należy do dwójsiecznej kąta linij AB i CD. Nakreśl jeszcze dwójsieczne HN i KN; punkt ich spotkania N należy także do dwójsiecznej szukanej. Więc prosta MN jest szukaną dwójsieczną.

Zagadnienie XXII.

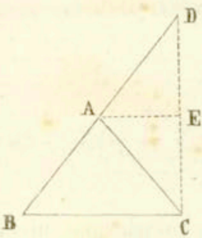
Wykreślić trójkąt, znając podstawę, kąt przeciwległy i wysokość odpowiedającą.



Na linii AB, równej podstawie, wykreśl odcinek koła obejmujący kąt równy danemu (*zag.* 10). Z punktu A wyprowadź do podstawy prostopadłę AH równą danej wysokości; przez punkt H poprowadź równoległę CD do podstawy, i punkta C, D, wktórych ta równoległa przecina łuk odcinka, połącz ze skrajnościami podstawy; dwa trójkąty równe ABC, ABD rozwiążą zagadnienie.

Zagadnienie XXIII.

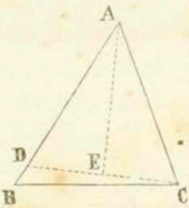
Zbudować trójkąt, znając bok, kąt przeciwległy, i summę albo *różnicę dwóch innych boków.*



1° Niech będzie naprzód trójkąt ABC w którym wiadome są : bok BC, kąt przeciwległy A i *summa* boków AB + AC.

Przedłużmy bok BA, i weźmy długość AD równą bokowi AC. W trójkącie równoramiennym ACD, kąt zewnętrzny BAC = 2D; co pokazuje że kąt D jest połową danego kąta A. Więc trójkąt BCD, w którym boki BC, BD, i kąt D są wiadome, wykreśli się sposobem już znanym (*zag.* 14). Po czem dość wyprowadzić, ze środka E boku CD, prostopadłę EA która wyznaczy wierzchołek A; i trójkąt ABC rozwiąże zagadnienie, które może mieć drugie rozwiązanie; albo nie mieć żadnego,

2° Niech będzie teraz trójkąt ABC, w którym wiadome są : bok BC, kąt przeciwległy A, i *różnica* boków AB — AC.



Na boku AB, weźmy długość AD równą bokowi AC. W trójkącie prostokątnym ADE, kąt zewnętrzny BDC $= 1^{\text{P}} + \frac{1}{2}$ A. Więc trójkąt BCD, w którym są wiadome: bok BC, kąt przeciwległy D i bok BD, wykreśli się jako wiadomo; po czem dość wyprowadzić, ze środka boku CD, prostopadłę EA która wyznaczy wierzchołek A; i trójkąt ABC będzie szukany. Może być drugie rozwiązanie, albo żadne.

Uwaga. — Oznaczając przez A, B, C, jako zwykle, kąty trójkąta ABC mamy w trójkącie BCD, na mocy 1°

$$\text{kąt BCD} = \text{BCA} + \text{ACD} = \text{C} + \tfrac{1}{2}\text{A};$$

a że w trójkącie ABC $\quad \text{kąt } \frac{1}{2}\text{A} = 1^{\text{P}} - \frac{1}{2}\text{B} - \frac{1}{2}\text{C};$

więc, dodając stronami, znajdziemy,

$$\text{kąt BCD} = 1^{\text{P}} + \tfrac{1}{2}(\text{C} - \text{B}).$$

Podobnie w trójkącie BCD, mamy na mocy 2°

$$\text{kąt BCD} = \text{BCA} - \text{DCA} = \text{C} - 1^{\text{P}} + \tfrac{1}{2}\text{A}.$$

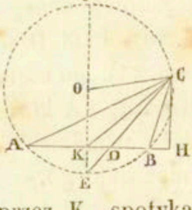
Ale, w trójkącie ABC, $\quad \text{kąt } \frac{1}{2}\text{A} = 1^{\text{P}} - \frac{1}{2}\text{B} - \frac{1}{2}\text{C};$
więc, dodając stronami, otrzymamy

$$\text{kąt BCD} = \tfrac{1}{2}(\text{C} - \text{B}).$$

Ta uwaga może służyć w zagadnieniach w których wiadome są: różnica dwóch kątów trójkąta, i summa albo różnica boków przeciwległych.

Zagadnienie XXIV.

Zbudować trójkąt, znając dwójsieczną kąta, ośródkowę boku przeciwległego, i wysokość odpowiedającą.



Przypuśćmy zagadnienie rozwiązane, niech będzie w trójkącie ABC, dwójsieczna CD kąta C, ośródkowa CK boku przeciwległego AB, i wysokość CH trójkąta odpowiedająca temu bokowi. Opiszmy koło na trójkącie ABC. Widzimy zaraz że średnica, przechodząca przez K, spotyka przedłużoną dwójsieczną CD, we środku E łuku AEB. Owoż, w trójkącie równoramiennym COE, kąt OCE jest równy kątowi CEO, a ten ostatni równy kątowi DCH. Więc dwójsieczna CD kąta ACB jest dwójsieczną kąta OCH, utworzonego przez promień OC i wysokość CH.

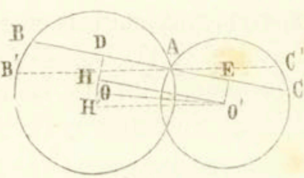
Ztąd wynika rozwiązanie zagadnienia: wykreśl trójkąt prostokątny CHK, mający ośródkowę CK za przeciwprostokątnę, a wysokość CH za jeden z boków; z punktu K wyprowadź prostopadłę KO do KH, i z wierzchołka C jako środka, promieniem równym dwójsiecznej CD, nakreśl łuk koła, który przetnie bok KH w punkcie D: potem zrób kąt DCO równy DCH, przecięcie ramienia CO z prostopadłą KO wyznaczy środek koła O, i promień OC: nakoniec nakreśl koło OC które przetnie prostę KH w punktach A, B, i da szukany trójkąt ABC.

Uwaga. — Czytelnik, uważając że kąt ECF jest prosty, albo że CE jest cięciwą koła opisanego, znajdzie łatwo inne rozwiązania.

Zagadnienie XXV.

Przez punkt A, *spólny dwom okręgom* O, O′, *poprowadzić sieczną* BAC, *tak żeby jej część* BC, *zawarta między temi okręgami, była równa linii danej.*

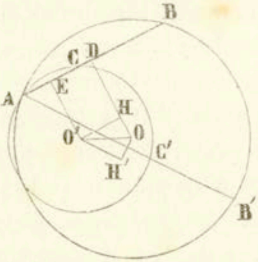
Przypuśćmy zagadnienie rozwiązane, i niech będzie najpierwej cięciwa BC, summa dwóch cięciw AB i AC, równa danej linii.



Ze środków kół O, O′ spuśćmy prostopadłe OD, O′E na BC, i przez punkt O′ poprowadźmy równoległę O′H do BC. Prosta HO′ równa się połowie cięciwy BC. Więc, aby rozwiązać zagadnienie, trzeba wykreślić trójkąt prostokątny OHO′, mający odległość OO′ środków dwóch kół danych za przeciwprostokątnę, i bok HO′ równy połowie linii danej; po czem, przez punkt A poprowadzić, równolegle do HO′, cięciwę BC która będzie linią żądaną.

Ten przypadek ma drugie rozwiązanie cięciwę B′C′.

Przypuśćmy powtóre że cięciwa BC, która czyni różnicę dwóch cięciw AB i AC, równa się danej linii.



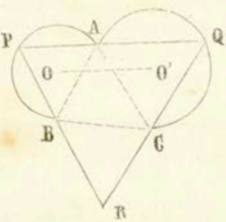
Jeśli ze środków kół O, O' spuścimy prostopadłe OD, O'E na BC, i przez O' poprowadzimy równoległę O'H do BC; prosta O'H będzie równa połowie cięciwy BC; i zagadnienie rozwiąże się jako w poprzedzającym przypadku.

Ten przypadek ma także drugie rozwiązanie, cięciwę B'C'.

Wniosek. — Prostopadła BO' do OD jest największą możebną, czyli *maximum*, gdy się równa odległości OO'. Więc *cięciwa* BC *jest maximum gdy jest równoległa do linii środków kół* OO'.

Zagadnienie XXVI.

Wykreślić trójkąt równoboczny, mający obwód największy możebny i którego boki przechodzą przez trzy punkta A, B, C.

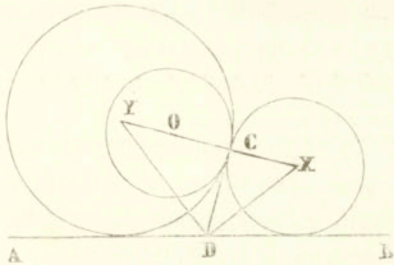


Niech będzie trójkąt szukany PQR. Wierzchołek kąta P leży na łuku odcinka koła, który obejmuje kąt 60°, i jest opisany na AB. Tak samo wierzchołek kąta Q leży także na odcinku koła który obejmuje kąt 60°, i jest opisany na AC. Jeśli więc na AB i AC jako cięciwach opiszemy odcinki koła obejmujące kąt 60°, i przez A poprowadzimy cięciwę PQ największą możebną (*zag.* 25), a potem poprowadzimy proste PB i QC które się przetną w punkcie R; otrzymamy trójkąt równoboczny PQR, mający obwód największy możebny, i którego boki przechodzą przez trzy punkta A, B, C.

Zagadnienie XXVII.

Nakreślić koło styczne do linii prostej AB, *i do koła* O *w danym punkcie* C.

Przypuśćmy zagadnienie rozwiązane; i niech będzie X szukane



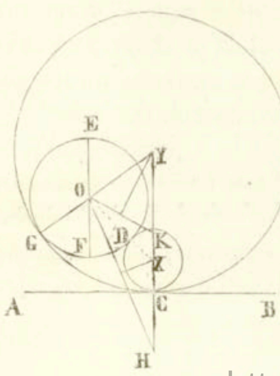
koło, styczne do prostej AB, i do koła O w punkcie C. Poprowadźmy przez C spólną styczną CD do kół O i X, która przetnie AB w punkcie D. Środek koła X leży na prostej OC, i na dwójsiecznej DX kąta stycznych DC, DB. Więc, jeśli poprowadzimy prostę OC i dwójsieczną DX kąta CDB; punkt przecięcia tych linij wyznaczy środek koła X i jego promień XC. Otrzymujemy tym sposobem koło styczne *zewnętrznie.*

Jeśli zaś poprowadzimy dwójsieczną DY kąta CDA, jej przecięcie z prostą OC wyznaczy środek Y i promień YC koła które będzie szyczne *otaczające.*

Jako widzimy, zagadnienie ma dwa rozwiązania; albo tylko jedno, jeśli punkt zetknięcia C leży na średnicy koła O, prostopadłej do AB. Ale, gdy prosta AB jest styczną koła w punkcie C, wtedy zagadnienie jest *niewyznaczone,* to jest wtedy wszystkie koła styczne w punkcie C do koła O są zarazem styczne do tej prostej AB. Nakoniec, gdy prosta AB jest sieczną koła O w punkcie C, zagadnienie jest niemożebne.

Zagadnienie XXVIII.

Nakreślić koło styczne do koła O, *i styczne do linii prostej* AB *w danym punkcie* C.



Niech będzie koło XC, styczne *zewnętrznie* do koła O i do prostej AB w punkcie C. Jego środek X znajduje się na prostopadłej CX do AB. Owoż, odległość środka koła X od środka koła O równa się summie promieni tych kół; więc, jeśli na prostopadłej CX, weźmiemy odległość CH równą promieniowi OD koła danego, środek X będzie równo oddalony od punktów O i H, a przeto będzie się znajdował na prostopadłej wyprowadzonej ze środka prostej OH, Ztąd wynika że przecięcie tej prostopadłéj z prostopadłą CX wyznacza środek szukanego koła X, i jego promień XC.

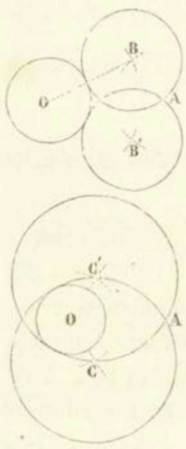
Podobnie rozumując, widzimy że, jeśli na prostopadłej CX, weźmiemy odległość CK równą promieniowi OD, i ze środka prostej OK wyprowadzimy prostopadłę, to ona przetnie CX i wyznaczy środek Y koła stycznego *otaczającego*, i jego promień YC.

Zagadnienie ma ogólnie dwa rozwiązania; ale może być niewyznaczone, a nawet niemożebne.

Uwaga. — Czytelnik, uważając że punkta zetknięć C, D, i skrajność E średnicy prostopadłej do AB, leżą w linii prostej, znajdzie łatwo środek koła X i jego promieni. Tak samo, punkta C, F, G leżą w linii prostej; co daje koła styczne Y.

Zagadnienie XXIX.

Przez punkt A *poprowadzić koło, danego promienia, styczne do koła* O.



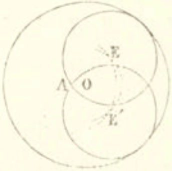
Nazwijmy, dla skrócenia, R promień koła wiadomego O, a zaś d długość promienia danego. Trzeba odróżnić dwa przypadki:

1° Punkt A jest dany *zewnątrz* koła O.

Z punktu A jako środka, promieniem d zakreśl łuk koła, i ze środka O, promieniem równym *summie* $R + d$ zakreśl drugi łuk koła. Ogólnie te dwa łuki przetną się w punktach B, B′, które będą środkami dwóch kół stycznych *zewnętrznie* do koła O.

Jeśli $d > R$, z punktu A jako środka, promieniem d nakreśl łuk koła, i ze środka O, promieniem równym *różnicy* $d - R$, nakreśl drugi łuk koła. Te dwa łuki, ogólnie mówiąc, przecinają się w dwóch punktach C i C′ które są środkami dwóch kół *otaczających*, stycznych do koła O.

2° Jeśli punkt A jest dany *wewnątrz* koła O, trzeba żeby długość *d* była mniejsza od R.



Wtedy z punktu A, promieniem D, nakreśl łuk koła, ze środka O promieniem równym różnicy R — *d*, nakreśl drugi łuk koła. Jeśli te dwa łuki przecinają się w punktach E i E′, te punkta są środkami dwóch kół stycznych *wewnętrznie* do koła O.

Zostawiamy czytelnikowi dyskusyę zagadnienia, które może mieć *cztery* rozwiązania, albo tylko trzy, dwa, jedno; a nawet nie mieć żadnego.

Zagadnienie XXX.

Mając dane na płaszczyznie trzy punkta A, B, C, *znaleźć czwarty z którego widać odległości* AC *i* BC *pod kątami wiadomemi.*

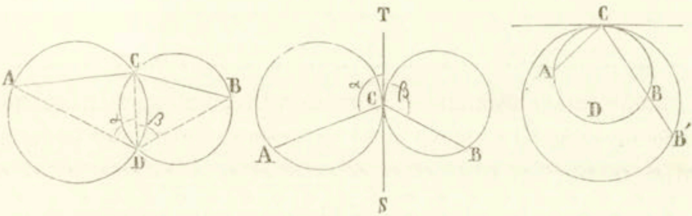


Fig. 1 Fig. 2 Fig. 3

Przypuśćmy zagadnienie rozwiązane, i niech będzie w kącie ACB punkt szukany D (*fig.* 1). Ponieważ z tego punktu odległości AC i BC mają być widziane pod kątami danemi ADC $= \alpha$ i BDC $= \beta$; więc, aby wyznaczyć punkt D, dość nakreślić na liniach AC i BC jako cięciwach, odcinki kół które obejmują odpowiedające kąty α i β; punkt przecięcia łuków tych odcinków bęfłzie żądanym punktem D.

Zagadnienie ma tylko jedno rozwiązanie, które nie zawsze jest możebne. Jakoż, łuki rzeczonych odcinków kół mogą się przecinać w kącie ACB, co właśnie daje powyższe rozwiązanie; albo się przecinać poza tym kątem, albo też być styczne w punkcie C, co pokazuje że szukany punkt D nie istnieje w kącie D.

Jeśli summa kątów $\alpha + \beta + C = 4P$, jako na *fig.* 2, odcinki kół mają spólną styczną ST, i oczywiście zagadnienie jest niemożebne.

A jeśli summa kątów $\alpha + \beta + C = 2P$, jako na *fig.* 3, odcinki kół są styczne w punkcie C; wtedy, albo oba koła, dające te odcinki, schodzą się w jedno koło ACB, i zagadnienie jest *niewyznaczone*, to jest każdy punkt D, leżący na łuku AB rozwiązuje zagadnienie; albo te dwa koła styczne są oddzielne, i zagadnienie jest niemożebne.

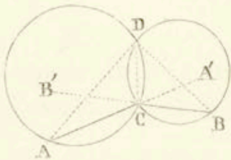


Fig. 1

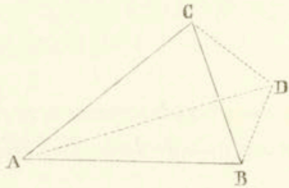


Fig. 2

Gdyby szukano punktu D w kącie A'CB', który jest wierzchołkiem przeciwległy kątowi ACB, rozumowanie byłoby podobne powyższemu, *fig.* 1.

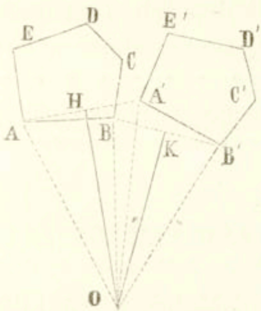
Nakoniec można także szukać punktu D poza kątem ACB, jako pokazuje *fig.* 2. W tem położeniu wiadome są kąty $ADC = \alpha$, i $BDC = \beta$; ztąd kąt $ADB = \beta - \alpha$. Więc szukany punkt D jest punktem z którego widać odległości AB i AC pod kątami wiadomemi; co właśnie przywodzi do pierwszego przypadku.

Szczegółowa dyskussya tego zagadnienia należy do Trygonometryi.

Zagadnienie XXXI.

Mając dane dwa wielokąty równe, znaleźć na ich płaszczyznie punkt taki żeby, obracając około niego jeden z tych wielokątów, można było sprowadzić na drugi i wykonać przystawienie.

Niech będą dwa wielokąty równe ABCDE, A'B'C'D'E' w któ-



rych bok AB = A'B', BC = B'C',... i kąt A = A', kąt B = B'... Poprowadźmy proste AA', BB', i z ich środków wyprowadźmy prostopadłe HO, KO które się przetną w szukanym punkcie O. Jakoż, połączmy OA, OB, i OA', OB'. Trójkąty AOA', BOB' są równoramienne; zatem trójkąty OAB, OA'B' mające trzy boki równe każdy każdemu, są równe. Więc, jeśli obrócimy figurę OABCDE około punktu O, tak żeby bok OA poszedł po OA', trójkąt OAB przystanie do swojego równego OA'B'. Ztąd wynika że kąt ABC pierwszego wielokąta przystaje do swojego równego A'B'C' w drugim wielokącie; zatem punkt C pada na C'; i tak dalej. Więc te dwa wielokąty równe przystają do siebie.

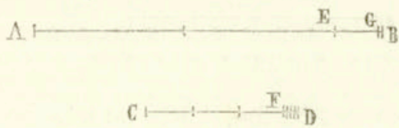
Uwaga. — Gdy boki odpowiedne AB, A'B' są równoległe i skierowane w jedną stronę, wtedy prostopadłe HO, KO są równoległe. W tym przypadku, wykona się przystawanie dwóch wielokątów równych *ruchem przeniesienia*, to jest posuwając jeden wielokąt ku drugiemu tak żeby wierzchołki *np.* A, B, C opisały linie proste, równe i równoległe, AA', BB', CC'....

Gdy dwa wielokąty równe są *przewrócone*, wtedy nie można wykonać ich przystawania ani *ruchem wirowym*, (około punktu), ani ruchem przeniesienia.

Zagadnienie XXXII.

Znaleźć największą spólną miarę dwóch linij prostych, i wyznaczyć ich stosunek liczebny.

Spólną miarą dwóch linij AB, CD, jest linia która się w nich



mieści dokładną liczbę razy, to jest bez reszty

Ponieważ największa spólna miara tych dwóch linij nie może przewyższać mniejszej CD, probujemy czy CD nie mieści się dokładnie w AB.

Przenieśmy więc CD na AB tyle razy ile można, i przypuśćmy, dla utkwienia myśli, że

$$AB = 2\,CD + EB;$$

Powiedam że największa spólna miara między AB i CD jest ta sama co między CD i EB.

Jakoż, wszelka prosta mieszcząca się dokładnie w AB i CD dzieli 2 CD czyli AE, zatem dzieli EB; więc ta linia jest spólną miarą między CD i EB. Nawzajem, wszelka linia mieszcząca się dokładnie w CD i EB dzieli 2 CD czyli AE, zatem dzieli AB; więc ta linia jest spólną miarą między AB i CD. Ponieważ tedy wszystkie spólne miary między AB i CD są te same co między CD i EB, więc największa spólna miara tych trzech linij jest także ta sama.

Przenieśmy teraz resztę EB na dzielnik CD, i przypuśćmy że

$$CD = 3\,EB + FD.$$

Dowiedzionoby, jako wyżej, że największa spólna miara trzech linij CD, EB, FD jest ta sama.

Ponieśmy FD na EB, i przypuśćmy że

$$EB = 2\,FD + GB.$$

Nakoniec, ponieśmy GB na FD, i dajmy że się mieści dokładnie cztery razy, to jest:

$$FD = 4\,GB.$$

Więc linia GB jest największą spólną miarą dwóch linij danych AB, CD.

Aby znaleźć stosunek liczebny linij AB i CD, podstawmy wartości wyrażone w linii BG.

Idąc w górę, otrzymujemy równości:

$$EB = 2\,(4\,GB) + GB = 9\,BG.$$

$$CD = 3\,(9\,BG) + 4\,BG = 31\,BG.$$

$$AB = 2(31\,BG) + 9\,BG = 71\,BG.$$

Zatem stosunek dwóch linij danych, wyrażony liczebnie, jest $\frac{AB}{CD}=\frac{71}{31}$.

Uwaga. — Metoda znalezienia największej spólnej miary dwóch linij danych jest właśnie ta sama która służy do znalezienia największego spólnego dzielnika dwóch liczb. Należy jednakże dowieśdź że, tak działając, dochodzi się zawsze do reszty zero, gdy dwie linie dane są *spółmierne ;* a przeciwnie, do reszt coraz mniejszych, *nieograniczenie*, gdy dwie linie dane są *niespołmierne.*

Nazwijmy, dla skrócenia, A i B dwie linie dane; R_1, R_2, R_3.... reszty po sobie idące; Q_1, Q_2, Q_3... ilorazy odpowiedające: będzie: $A=BQ_1+R_1$, $B=R_1Q_2+R_2$, $R_1=R_2Q_3+R_3$; etc.

Uważajmy teraz że reszta jest zawsze mniejsza od połowy dzielnej, $R_1<\frac{A}{2}$; albowiem, jeśli dzielnik jest mniejszy od połowy dzielnej, to tem bardziej reszta; a jeśli dzielnik jest większy od połowy dzielnej, to oczywiście reszta jest od niej mniejsza.

Na mocy tego, mamy:

$$R_1<\frac{A}{2},\quad R_2<\frac{B}{2};\quad R_4<\frac{R_2}{2}, \text{ a tem bardziej } R_4<\frac{B}{2^2}.$$

$$\text{Następnie}\quad R_6<\frac{B}{2^3};\ \ldots\ldots \text{ więc }\ _{2n}<\frac{B}{2^n}.$$

Jako widać, reszty maleją coraz bardziej; więc, jeśli dwie linie dane A, B mają spólną miarę, postępując wedle metody, dojdziemy koniecznie do reszty zero; bo inaczej, spólna miara tych linij, dzieląc wszystkie reszty, musiałaby dielić resztę mniejszą od wszelkiej ilości danej; co niedorzeczne.

Gdy dwie linie są niespółmierne, wtedy, otrzymawszy resztę przyzwoicie małą, można na tem działaniu poprzestać, i wziąć znalezioną resztę za spólną miarę przybliżoną; co da stosunek liczebny *przybliżony.*

Dla uniknienia zbyt małych linij, dobrze jest dwoić albo troić dwie reszty po sobie idące; co ułatwi ich porównanie, nie przeinaczając bynajmniej największej spolnej miary.

Aby znaleźć *największą spólną miarę dwóch kątów*, dość jest, z ich wierzchołków jako środków, i jednym promieniem, nakreślić łuki kół zawarte między ramionami tych kątów, i szukać największej spólnej miary łuków, sposobem wyłożonym powyżej.

ZADANIA.

63. — Z punktu A jako środka, wziętego zewnątrz koła O, nakreślono, promieniem AO, łuk koła BOC ; ze środka O promieniem ~~2OA~~ równym średnicy koła O, nakreślono drugi łuk koła który przecina pierwszy w punktach B i C ; poprowadzono proste OB, OC które spotykają okrąg O w punktach D i E. Dowieśdź że proste AD i AC są styczne do koła O.

Uwaga. — To twierdzenie daje sposób *opisowy* prowadzenia stycznej do koła, który gdzie indziej zastosować się może ; ten któryśmy wyłożyli w *zag*. XIX jest sposobem *miarowym* to jest opartym na *miarze* kąta.

64. — W trójkącie prostokątnym, średnica koła wpisanego równa się przewyżce summy boków kąta prostego nad przeciwprostokątną.

65. — Dwa trójkąty są równe gdy mają bok, kąt preciwległy i jego dwójsieczną, odpowiednio równe.

66. — Trójkąt mający dwie dwójsieczne równe, jest równoramienny.

67. — Trójkąt ABC jest wpisany w koło ; trzy jego wysokości spotykają się w H, wewnątrz albo zewnątrz koła ; prostopadła AH spotyka bok BC w D, a okrąg w E. Dowieśdź że DH = DE. Tak samo o dwóch innych.

68. — Między wszystkiemi trójkątami, mającemi równą podstawę i równy kąt przy wierzchołku, trójkąt równoramienny jest największy i ma obwód największy możebny.

69. — Okrąg przechodzący przez dwa wierzchołki trójkąta i przez punkt spotkania trzech wysokości równa się okręgowi opisanemu.

70. — Dowieśdź że trzy wysokości trójkąta są dwójsiecznemi kątów w trójkącie który ma za wierzchołki spodki tych *wysokości*. I nawzajem.

71. — W trójkącie wpisanym w koło, odległość środka koła od środka jednego z boków jest *połową* odległości wierzchołka, przeciwległego bokowi, od punktu spotkania trzech wysokości.

72. — Dowieśdź że najmniejsza linia, zawarta w kącie, jaką przez punkt

dwójsiecznej tego kąta poprowadzić można, jest prostopadła do dwójsiecznej.

73. — Dowieśdź że 1° wielokąt równoboczny wpisany w koło jest równokątny.

2° Wielokąt równokątny opisany na kole jest równoboczny.

Wzajemnice tych dwóch twierdzeń wtedy tylko są prawdziwe gdy wielokąty mają nieparzystą liczbę boków.

74. — Są dane w kole dwie cięciwy równoległe AB, CD; przez skrajności A i B poprowadzono sieczne jakiekolwiek AEF i BGH, które spotykają cięciwę CD w punktach E, G, a okrąg w punktach F, H. Dowieśdź że cztery punkta E, F, H, G są na jednym okręgu.

75. — Przez punkt zetknięcia dwóch kół poprowadzono dwie sieczne; dowieśdź że cięciwy łączące ich skrajności są równoległe.

76. — Są dane dwa koła przecinające się w punktach A, B; przez punkt S płaszczyzny poprowadzono dwie sieczne SCAD, SEDF. Dówieśdź że cięciwy CE, DF są równoległe.

77. — Z punktu danego na płaszczyznie koła poprowadzono ciąg siecznych do tego koła. Dowieśdź że środki cięciw są na jednym okręgu.

78. — Gdy trzy koła są styczne po dwa, wtedy trzy styczne punktów zetknięcia spotykają się w jednym punkcie.

79. — Przez punkt A poprowadzono, do prostej MN, dwie jakiekolwiek proste AB, AC; i, do tych ostatnich, wyprowadzono z punktów przecięć B, C, prostopadłe BD, CD; potem, z tego samego punktu A, poprowadzono znowu do MN dwie proste AB′, AC′, tak żeby kąty BAB′, CAC′ były równe; z punktów przecięć B′ i C′ wyprowadzono do AB′, AC′ prostopadłe B′D′, C′D′. Dowieśdź że punkta A, D, D′ są w linii prostej.

80. — Na dwóch bokach trójkąta, jako średnicach, nakreślono okręgi. Dowieśdź że te dwa okręgi przecinają się na trzecim boku trójkąta.

81. — Są dane dwa koła O, O′ styczne wewnętrznie w punkcie A. Do koła O poprowadzono styczną BC w punkcie D, która przecina koło O′ w punktach B, C. Dowieśdź że prosta AD jest dwójsieczną kąta BAC.

82. — Podzielono cięciwę koła na trzy równe części. Dowieśdź że promienie przechodzące przez punkta podziału nie dzielą łuku na trzy części równe.

83. — Na stycznej koła O w punkcie A, wzięto dwa punkta B, C, i poprowadzono styczne BD, CE w punktach D, E; połączono punkta zetknięć AD i AE. Dowieśdź że kąty BOC i DAE są równe.

84. — Z punktu A poprowadzono do koła O styczną AB, i promieniem AB nakreślono łuk koła który przecina prostę OA w punkcie C. Dowieśdź że punkta B, C, są w linii prostej z jedną skrajnością średnicy DE prostopadłej do OA.

85. — Jest dany trójkąt ABC prostokątny w A. Na prostę jakąkolwiek BD, która spotyka w D ramie AC, spuszczono prostopadłę CE która spotyka w E ramię AB. Dowieśdź że linia prosta DE jest prostopadła do przeciwprostokątnej BC.

86. — Przez punkt przecięcia A dwóch okręgów, poprowadzono dwie sieczne jakiekolwiek BAC, DAE. Dowieśdź że sieczne BD, CE, spotykają się pod kątem stałym.

87. — Przez środek P danej cięciwy MN koła, poprowadzono dwie cięciwy APB, CPD, i łącząc ich skrajności, utworzono czworokąt. Dowieśdź że dwa boki przeciwległe tego czworokąta spotykają daną cięciwę w dwóch punktach równo oddalonych od jej środka E.

88. — Przez każdy wierzchołek trójkąta i środki dwóch boków przyległych poprowadzono okrąg. Dowieśdź że te trzy okręgi przecinają się w jednym punkcie.

89. — W danem kole O nakreślono dwie średnice prostopadłe AB, CD; przez punkt B poprowadzono sieczną BE która spotyka średnicę CD w punkcie F; przez punkta A i E poprowadzono styczne które się spotykają w punkcie G. Dowieśdź że prosta FG jest prostopadłą do CD.

90. — Przez punkt A, wzięty zewnątrz koła O, poprowadzono średnicę AOB i sieczną ADE. Dowieśdź że, jeśli odcinek zewnętrzny AC siecznej równa się promieniowi, wtedy kąt COA jest *jedną trzecią* kąta DOB.

91. — Na przedłużonym promieniu OA, wzięto punkt B tak że BA równa się promieniowi OA, i z tego punktu B spuszczono prostopadłę BD na styczną jakąkolwiek CD; połączono AD. Dowieśdź że kąt ADB jest *jedną trzecią* kąta DAO.

92. — Przez punkt A płaszczyzny koła O poprowadzono jakąkolwiek sieczną ACD, średnicę AO i prostopadłę AB do tej średnicy; przez punkta C i D poprowadzono styczne CE i DF które spotykają prostopadłę AB w punktach E i F. Dowieśdź że odległości AE, AF są równe.

93. — Dwa koła przecinają się w dwóch punktach A i B; przez punkt A poprowadzono dwie sieczne jakiekolwiek CAD, EAF, i przez ich skrajności sieczne DE, FC które się spotykają w punkcie S. Dowieśdź że kąt S jest stały.

94 — Jest dany trójkąt ABC; z punktu jakiegokolwiek O jego płaszczyzny, spuszczono na boki trzy prostopadłe OD, OE, OF, i połączono ich spodki; na trójkątach ODE, ODF, OEF opisano okręgi. Dowieśdź że środki tych trzech okręgów są wierzchołkami trójkąta którego obwód jest połową obwodu trójkąta danego.

95. — Na trójkącie równobocznym ABC opisano okrąg, i połączono punkt M tego okręgu z wierzchołkami. Dowieśdź że największa ze trzech cięciw, dajmy na to MA, równa się summie dwóch innych, MB + MC.

I NAWZAJEM, jeśli punkt M, połączony z trzema wierzchołkami A, B, C trójkąta równobocznego, daje *np.* MA = MB + MC, ten punkt leży na okręgu ABC.

96. — Na bokach trójkąta ABC, nakreślono zewnętrznie trójkąty równokątne ABC', ACB', BCA'. Dowieśdź 1° że proste AA', BB', CC' są równe; 2° że się spotykają w jednym punkcie; 3° że z tego punktu widać boki trójkąta ABC pod tym samym kątem.

97. — W czworobok wpisano cztery koła, tak że każde jest styczne do trzech boków; dowieśdź że środki tych czterech kół są na jednym okręgu.

Tak samo, jeśli cztery koła są zawpisane w czworobok, to jest jeśli każde jest styczne do jednego z boków i do przedłużenia dwóch boków przyległych, środki tych kół leżą na jednym okręgu.

98. — Na każdym boku czworokąta ABCD wpisalnego, jako cięciwie, nakreślono okrąg; te cztery okręgi przecinają się w czterech punktach L, M, N, P różnych od A, B, C, D. Dowieśdź że czworokąt LMNP jest wpisalny.

99. — Dowieśdź że, w czworoboku zupełnym, koła opisane na jego czterech trójkątach ABC, ADE, BCE, BCF przechodzą przez jeden punkt, i że ten punkt i cztery środki kół są na jednym okręgu.

100. — Spodki prostopadłych spuszczonych na boki trójkąta, z jednego punktu wziętego na okręgu opisanym, są w linii prostej.

101. — Nazywając K środek koła wpisanego w trójkąt ABC, K', K'', K''' środki kół zawpisanych w kąty A, B, C; dowieśdź że 1° koło opisane na trójkącie przechodzi przez środki prostych KK', KK'', KK''', 2° punkta B, C, K, K' są na jednym okręgu, którego środek jest na przecięciu linii KK' z okręgiem opisanym; 3° punkta B, C, K'', K''' są na jednym okręgu, którego środek jest na przecięciu linii K''K''' z okręgiem opisanym.

102. W — trójkącie wpisanym w koło punkt spotkania trzech wysokości,

środek jednego boku i skrajność średnicy przechodzącej przez wierzchołek przeciwległy bokowi, leżą w linii prostej.

103. — Oznaczając przez R promień koła opisanego na trójkącie ABC; i przez r, r', r'', r''' promienie kół wpisanego i zawpisanych; przez δ, δ', δ'' prostopadłe spuszczone na boki ze środka koła opisanego; przez s, s', s'' strzałyto jest odcinki tych prostopadłych zawarte między bokami i okręgem opisanym: dowieśdź że

$$r' + r'' + r''' = 4R + r$$
$$\delta + \delta' + \delta'' = R + r$$
$$s + s' + s'' = 2R - r.$$

Uwaga. — Gdy środek koła opisanego pada zewnątrz trójkąta, wedy trzeba brać jedne prostopadłe dodatnie a drugie odjemnie.

104. — Środki trzech boków trójkąta, spodki trzech wysokości, i środki odcinków, łączących punkt spotkania tych wysokości z wierzchołkami trójkąta, stanowią *dziewięć* punktów które leżą na jednym okręgu koła. Promień tego koła, które nazwano *kołem dziewięciu punktów*, jest połową promienia koła opisanego, a jego środek jest we środku linii łączącej punkt spotkania trzech wysokości ze środkiem koła opisanego. Koło dziewięciu punktów dotyka wewnętrznie koła wpisanego w trójkąt a zewnętrznie trzech kół zawpisanych.

105. — Poprowadzić styczną koła równoległą do prostej danej.

106. — Jaka najkrótsza droga z A do B, dotykająca okręgu O?

107. — Mając dane trzy punkta A, B, C, znaleźć czwarty M taki żeby summa odległości MA + MB + MC była najmniejszą możebną.

108. — Przez punkt A, dany w kole, poprowadzić cięciwę BAC, tak żeby jej odcinki AB, AC czyniły różnicę daną.

109. — Mając dane na równinie cztery punkta A, B, C, D, nie leżące w linii prostej, poprowadzić drogę kołową, tak żeby przechodziła w równej odległości od tych punktów.

110. — Nakreślić okrąg, danego promienia, styczny w punkcie danym do prostej danej, *albo* do okręgu danego; *albo też* styczny do dwóch prostych danych, *albo* styczny do dwóch kół danych.

111. — Nakreślić koło styczne do dwóch prostych, *albo* do dwóch kół danych, *albo* do prostej i do koła, znając jeden punkt zetknięcia.

112. — Przez punkt A, poprowadzić koło styczne do danej prostej BC, takie żeby średnica przechodząca przez A tworzyła z tą prostą kąt równy danemu.

113. — Mając dane z położenia dwie linie proste, wykreślić okrąg, danego promienia, któryby przejmował na tych liniach dwie cięciwy długości danej.

114. — Podzielić łuk koła na dwie części, takie żeby summa *albo* różnica ich cięciw równała się linii danej.

115. — Przez punkt dany na płaszczyznie kąta poprowadzić linię prostą, taką żeby tworzyła z ramionami kąta trójkąt mający obwód deny.

116. — Mając dane dwa okręgi, poprowadzić spólną sieczną, tak żeby cięciwy na niej przejęte równały się liniom danym.

Przypadek szczególny gdy sieczna jest styczną do jednego z dwóch okręgów.

117. — Z danego punktu jako środka, nakreślić koło przecinające daną prostę, tak żeby jeden z jego odcinków mógł obejmować kąt dany.

118, — Są dane cztery punkta A, B, C, D. Nakreślić koło przechodzące przez A i B, tak żeby styczne wychodzące z C i D były równe.

119. — Jakie jest miejsce geometryczne środków kół, które przecinają pod kątem prostym szereg kół stycznych w jednym punkcie?

120. — Znaleźć miejsce geometryczne środka linii prostej, mającej długość daną, która się opiera na dwóch liniach prostokątnych.

121. — Z punktu zmiennego C na okręgu O spuszczono, na daną średnicę AB, prostopadłę CD, i wzięto na promieniu OC odcinek OM równy prostopadłej CD. Jakie jest miejsce punktu M ?

122, — Są dane dwie równoległe AB, CD i sieczna prostopadła EF która je spotyka w punktach O i P; w kącie AOE poprowadzono przez O sieczną OG która spotyka CD w punkcie G; na ramieniu OA wzięto odcinek OH = OP a na ramieniu OE odcinek OK = OG, i połączono HK Jakie jest miejsce punktu przecięć M linij OG i HK?

123. — W poprzedzającem zagadnieniu wziąć odcinek OH = OG, OK = OP, i szukać miejsca punktów przecięć linij OP i HK.

124. — Niech będzie w kole O średnica AB, przez jej skrajność B poprowadzono sieczną BCD, na której wzięto CD = BC i połączono DC i CA. Jakie jest miejsce punktu przecięcia prostych CA i DO?

125. — Mając dane trzy punkta , A, B, C w linii prostej; przez jeden z nich *np.* C poprowadzono jakąkolwiek prostę CD na której wzięto punkt M, tak żeby kąt AMD był równy kątowi BMC. Jakie jest miejsce punktu M?

126. — Są dane dwa punkta A, B, i prostopadła AC do AB. Połączono punkt B z punktem D wziętym na linii AC, i na AD jako średnicy, nakre-

ślono półokrąg który przecina BD w punkcie M. Znaleźć miejsce punktu M, gdy punkt D posuwa się po AC.

127. — W dane koło wpisano trójkąty spólnej podstawy; znaleźć miejsce środków kół wpisanych w te trójkąty.

128. — Do okręgu wpisanego w kąt, poprowadzić styczną, tak żeby jej część, zawarta w tym kącie, miała długość daną.

129. — Znaleźć miejsce geometryczne punktu z którego poprowadzone styczne do okręgu danego tworzą kąt dany.

130. — Skrajność A łuku koła AB połączono ze wszystkiemi jego punktami C, D, E,... cięciwami AC, AD,... które przedłużono ich długościami, to jest wzięto CC′=CA, DD′ = DA, EE′=EA ..Jakie jest miejsce punktów C′, D′, E′...?

131. — Dana jest w kole cięciwa AB; przez jej skrajność A poprowadzono jakąkolwiek sieczną AC, na której wzięto, wewnątrz albo zewnątrz koła, odcinek CM równy cięciwie CB. Jakie jest miejsce punktu M?

132. — Kąt prosty obraca się około swojego wierzchołka, a jego ramiona przecinają okrąg; jakie jest miejsce środka cięciw które łączą punkta przecięć?

133. — Z punktu jakiegokolwiek C, wziętego na średnicy stałej AB koła O, poprowadzono styczną CD, i, na dwójsieczną kąta ACD, spuszczono prostopadłę OM. Jakie jest miejsce punktu M

134. — Przez skrajność A promienia koła OA, poprowadzono jakąkolwiek sieczną ABC, która spotyka w punkcie C średnicę CO prostopadłą do OA; w punkcie B poprowadzono styczną BM; a przez środek H prostej CO i przez A, poprowadzono sieczną AH która spotyka w M styczną BM. Jakie jest miejsce geometryczne punktu M?

135. — Dano koło O i punkt A na jego płaszczyźnie. Znaleźć miejsce środków linij prostych które łączą punkt A z różnemi punktami okręgu O.

136. — Okrąg toczy się wewnątrz koła promienia podwójnego; jakie miejsce opisuje punkt tego okręgu?

137. — Znając podstawę trójkąta i różnicę boków przyległych, znaleźć miejsce spodka prostopadłych, spuszczonych z jednej skrajności podstawy na dwójsieczne kątów przy wierzchołku,

138. — Jest dany trójkąt prostokątny ABC przy A; prostopadła DE do przeciwprostokątnej przecina bok AB w D a bok AC w F; poprowadzono proste ED i BF które się przecinają w M. Znaleźć miejsce punktu M.

139. — Znaleźć miejsce geometryczne punktu spotkania trzech wysokości, w trójkątach które mają spólną podstawę i równy kąt przy wierzchołku.

140. — Mając dane trzy proste wychodzące z jednego punktu, przez punkt dany na jednej z nich, poprowadzić sieczną tak żeby te trzy proste dzieliły ją na dwie równe części.

141 — Mając dane dwa punkta A, B, z jednej strony linii prostej MN, znaleźć na tej linii punkt z którego widać odległość AB, pod kątem największym możebnym.

142. — Mając dane dwa punkta A, B, oba zewnątrz albo wewnątrz okręgu O, znaleźć na tej linii punkt z którego widać odległość AB pod kątem największym *albo* najmniejszym możebnym.

143. — W trójkącie ABC poprowadzić sieczną DE tak żeby część wpisania DE miała długość daną i równała się summie odcinków $BD + CE$.

144. — Zbudować trójkąt prostokątny mający obwód dany, i w którymby summa przeciwprostokątnej i wysokości odpowiedającej była największą możebną, *albo* w którymby dwójsieczna kąta prostego była maximum.

145. — Zbudować trójkąt prostokątny, znając dwie ośródkowe.

146. — Zbudować trójkąt prostokątny, znając jeden bok kąta prostego, i summę *albo* różnicę przeciwprostokątnej i drugiego boku.

147. — Zbudować trójkąt prostokątny, znając kąt ostry i przewyżkę przeciwprostokątnej nad jednym bokiem kąta prostego.

148. — Zbudować trójkąt równoramienny, znając położenie jego wierzchołka A, i wiedząc że skrajności B i C podstawy, leżą na dwóch danych równoległych DE, FG, z któremi ta podstawa czyni kąt dany.

149. — Zbudować trójkąt, znając trzy ośrodkowe.

150. — Zbudować trójkąt, mając obwód i kąty.

151. — Zbudować trójkąt, mając dwa kąty i promień koła wpisanego.

152. — Zbudować trójkąt, którego wiadome są: jeden bok, summa *albo* różnica dwóch innych, i promień jednego ze czterech kół, wpisanego i zawpisanych, *albo* promień koła opisanego. (Dziesięć zagadnień).

153. — Zbudować trójkąt, mając bok *albo* kąt, promień koła opisanego i promień koła wpisanego *albo* zawpisanego w ten kąt.

154. — Zbudować trójkąt, mając dane środki *trzech* ze czterech kół wpisanego i zawpisanych.

8

155. — Wykreślić boki trójkąta, znając środki i promienie dwóch ze czterech kół wpisanego i zawpisanych.

156. — Zbudować trójkąt, znając summę *albo* różnicę dwóch boków i kąty.

157. — Zbudować trójkąt, znając jedną ośrodkowę i dwa kąty.

158. — Zbudować trójkąt, znając bok, kąt, i jedną ośrodkowę. (Cztery przypadki).

159. — Zbudować trójkąt, znając jeden bok, jedną wysokość i jedną ośrodkowę; (rozróżnić pięć przypadków).

160. — Zbudować trójkąt, znając jeden kąt, jedną wysokość, i jedną ośrodkowę. (Odróżnić pięć przypadków).

161. — Zbudować trójkąt, znając bok *albo* kąt i dwie ośrodkowe.

162. — Zbudować trójkąt, znając bok *albo* kąt i dwie wysokości.

163. — Zbudować trójkąt, znając kąt, wysokość odpowiednią, i promień koła wpisanego.

164. — Zbudować trójkąt, znając obwód, promienie kół opisanego i zawpisanego.

165. — Zbudować trójkąt, znając obwód, różnicę promieni kół zawpisanego i wpisanego, i odległość środków tych kół.

166. — Zbudować trójkąt, znając dwa boki, i różnicę kątów przeciwległych.

167. — Zbudować trójkąt, znając bok *albo* kąt, promień koła opisanego, i promień koła wpisanego *albo* promień jednego ze trzech kół zawpisanych.

168. — Zbudować trójkąt, znając bok, kąt przeciwległy, i wiedząc że jeden z boków kąta jest połową drugiego.

169. — Zbudować trójkąt, znając kąt, summę boków tego kąta i promień koła wpisanego.

170. — Zbudować trójkąt, znając obwód, jeden kąt, i wysokość *albo* promień koła wpisanego.

171. — Zbudować trójkąt, którego obwód i jeden kąt są dane, i w którymby wysokość, odpowiedająca temu kątowi, była największą możebną

172. — Zbudować trójkąt, znając kąt, summę *albo* różnicę jego boków, i summę *albo* różnicę promieni kół, zawpisanego i wpisanego w ten kąt. (Cztery zagadnienia).

173. — Zbudować trójkąt, znając bok, summę dwóch innych boków, i summę *albo* różnicę promieni kół, zawpisanego i wpisanego w kąt tych dwóch boków.

174. — Zbudować trójkąt, mając bok, różnicę kątów przyległych, i summę *albo* różnicę dwóch innych boków.

175. — Zbudować trójkąt, znając bok, summę *albo* różnicę dwóch innych boków, i różnicę promieni kół zawpisanego i wpisanego w kąt tych dwóch boków. (Zobacz podobne zagadnienie w księdze III.)

176. — Zbudować trójkąt, znając bok, *albo* różnicę dwóch boków, i promienie kół wpisanego i zawpisanego w kąt tych dwóch boków.

177. — Zbudować trójkąt, znając bok, promień koła opisanego, i summę promieni kół wpisanego i zawpisanego w kąt przeciwległy bokowi.

178. — Zbudować trójkąt, znając obwód, kąt i jego dwójsieczną.

179. — Zbudować trójkąt, znając kąt, jego dwójsieczną i jedną wysokość.

180. — Zbudować rójkąt, znając dwójsieczną kąta, wysokość odpowiedającą, i promień koła wpisanego albo opisanego.

181. — Zbudować trójkąt, znając spodki trzech wysokości.

182. — Zbudować trójkąt, znając bok, kąt przyległy, i summę *albo* różnicę dwóch innych boków.

183. — Zbudować trójkąt, znając dwa boki, i wiedząc że kąt, przeciwległy jednemu z nich, jest trzecią częścią kąta przeciwległego drugiemu.

Dowieśdź że, dla możebności zagadnienia, trzeba żeby mniejszy z dwóch danych boków był większy od trzeciej części większego.

184. — Zbudować trójkąt, znając kąty i przewyżkę dwóch boków nad trzecim.

185. — Zbudować trójkąt, znając kąty i wiedząc że wierzchołki leżą na trzech równoległych danych.

186. — Zbudować trójkąt, znając kąty i wiedząc że wierzchołki leżą na trzech okręgach spółśrodkowych danych.

187. — Zbudować trójkąt równoboczny, mający wierzchołki na trzech okręgach spółśrodkowych danych.

188, W dany kwadrat wpisać trójkąt równoboczny, tak żeby jeden wierzchołek był jego wierzchołkiem.

189. — Zbudować trójkąt równy danemu, którego boki przechodzą przez trzy punkta dane.

190. — Zbudować trójkąt, mając dany obwód, kąt z wielkości i z położenia, i punkt przez który przechodzi bok przeciwległy temu kątowi.

191. — Zbudować trójkąt równy danemu, któregoby wierzchołki były na trzech prostych danych.

192. — Wpisać kwadrat w przestrzeń zawartą między dwoma kołami siecznemi.

193. — W dane koło wpisać trójkąt mający boki równoległe do trzech prostych danych.

194. — Mając dany trójkąt, nakreślić z jego wierzchołków jako środków, trzy koła styczne między sobą.

195. — W dany trójkąt wpisać trójkąt którego wiadome są kąty i położenie jednego z wierzchołków.

196. — Znając bok i kąt przeciwległy w trójkącie, znaleźć miejsce geometryczne środków kół wpisanego i zawpisanego w ten kąt.

197. — Znaleźć na płaszczyznie trójkąta punkt którego summa odległości od trzech boków jest minimum.

198. — Zbudować kwadrat, mając summę *albo* różnicę przeciwprostokątnej i boku.

199. — Mając dane dwie przekątne zbudować równoległobok w którymby jeden kąt był podwójnym drugiego.

200. — Zbudować równoległobok, znając kąt i obie przekątne.

201. — Zbudować równoległobok, znając kąt, wysokość i jedną przekątnę.

202. — Zbudować równoległobok, którego wiadome są jeden bok i kąt, i którego boki przechodzą przez cztery dane punkta.

203, — Zbudować trapez, znając podstawy i przekątne.

204. — W dane koło wpisać trapez, znając różnicę podstaw i wysokość, *albo* jedną przekątnę.

205. — W dane koło wpisać trapez, znając summę *albo* różnicę podstaw, i jeden kąt *albo* bok.

206. — Na danem kole opisać trapez którego wiadome są dwa boki nierównoległe.

207. — Na danem kole opisać ukośnik którego bok jest wiadomy.

208. — Mając dane dwie równoległe i dwa punkta, poprowadzić przez

te punkta dwie inne równoległe któreby, przecinając dwie pierwsze, tworzyły z niemi ukośnik.

209. — Mając dane cztery punkta, poprowadzić przez nie cztery linie proste któreby, przecinając się po dwie, tworzyły kwadrat *albo* ukośnik mający kąt dany.

210. — Zbudować czworokąt, mając dane dwa kąty przeciwległe, obie przekątne i ich kąt.

211. — Zbudować czworokąt, mając cztery boki, i kąt dwóch boków przeciwległych.

212. — Zbudować czworokąt, znając cztery boki, i linię która łączy środki dwóch boków przeciwległych.

213. — Mając dane boki wielokąta opisanego na kole, wyrachować odcinki tych boków, zawarte między wierzchołkami i punktami zetknięć.

214. — Na danej cięciwie nakreślić okrąg, tak żeby dwa łuki odpowiedające tej cięciwie były w stosunku 3 : 5.

215. — Mając dane dwa okręgi zewnętrzne, poprowadzić sieczną długości danej i równoległą do prostej danej.

216. — Nakreślić trzy równe koła, styczne po dwa, i styczne wewnętrznie do koła danego.

217. — Mając dane dwa okręgi spółśrodkowe, poprowadzić przez punkt dany spólną sieczną, tak żeby summa jej odcinków, zawartych między temi okręgami, równała się danej linii. Wyznaczyć maximum tej summy.

218. — Mając dane dwa koła i linię prostą AB, znaleźć na tej linii punkt taki, żeby styczne z niego poprowadzone do tych kół były równo nachylone na AB.

219. — Jest dany okrąg i dwie średnice prostopadłe AA′, BB′. Przez skrajność A poprowadzono sieczną ACD, która przecina okrąg w punkcie C a średnicę BB′ w punkcie D. Przez punkt C, poprowadzono styczną koła CM, a przez D prostopadłę DM do średnicy BB′. Znaleźć miejsce geometryczne punktu przecięć M linii CM i DM.

220. — Nakreślić dwa koła styczne między sobą i styczne w danych punktach linii prostej, znając summę *albo* różnicę promieni tych kół.

221. — Mając dane trzy punkta A, B, C poprowadzić przez jeden z nich *np.* przez A, linię prostą tak żeby, spuszczając na nią z punktów B i C prostopadłe BF i CF, summa tych prostopadłych *albo* ich różnica była równa danej linii.

222. — Mając dane dwa punkta A i B z jednej strony linii prostej MN, znaleźć na tej linii punkt O taki, żeby kąty AOM i BON czyniły summę *albo* różnicę daną. (Dwa zagadnienia).

223. — Mając dane koło, linię prostą i punkt leżący na niej, nakreślić koło styczne do tej prostej w danym punkcie, któreby przecinało dane koło pod kątem danym, a w szczególności pod kątem prostym.

224. — Nakreślić koło danego promienia, któreby przecinało dane koło i linię prostą wedle danych cięciw.

225. — Nakreślić koło danego promienia, któreby przecinało, pod kątami danemi, dwie proste *albo* dwa okręgi.

226. — Mając daną z położenia linię prostą, i koło z położenia i wielkości nakreślić koło któreby przechodziło przez dwa dane punkta, i przecinało dane koło wedle cięciwy czyniącej z daną prostą kąt równy danemu.

227. — Niech będzie w trójkącie ABC ośrodkowa AD, dowieśdź że linia łącząca wierzchołek B ze środkiem tej ośrodkowej dzieli bok przeciwległy AC w stosunku 1 do 2.

228. — Niech będzie prostokąt ABCD; w trójkąt ABC wpisano koło, które dotyka AB w E i BC w F; po czem, poprowadzono EH równoległe do BC, i FK równoległe do AB. Dowieśdź że prostokąt HK jest połową prostokąta ABCD.

229. — Ze wszystkich trójkątów, mających równy kąt przy wierzchołku i równy obwód, trójkąt równozamienny jest maximum a jego podstawa minimum.

230. — Ze wszystkich trójkątów, mających równy kąt przy wierzchołku i równą różnicę między summą boków tego kąta i podstawą, trójkąt równoramienny jest minimum i jego podstawa minimum.

KSIĘGA TRZECIA

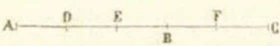
PROPORCYONALNOŚĆ LINIJ, I PODOBIEŃSTWO WIELOKĄTÓW.

Określenie I. — Przez wieloczyn odcinków linij prostych należy rozumieć wieloczyn liczb które mierzą te odcinki, czyli wieloczyn ich długości.

Ztąd wynika że kwadratem linii prostej jest kwadrat liczby która ją mierzy.

Dla zogólnienia wysłowień własności odcinkowych, wprowadzono znaki + i —, mówiąc że wieloczyn albo stosunek dwóch odcinków jest *dodatny* albo *odjemny*, według jak te odcinki idą oba w jedną stronę albo oba w strony wprost przeciwne.

I tak, niech będą punkta A, D, B, C leżące w linii prostej.



Jeśli weźmiemy za *jedność linijną* odcinek AD który się mieści, dajmy na to, 3 razy w odcinku AB a 5 razy w odcinku AC, wielkość wieloczynu AB . AC wyrazi się przez wieloczyn liczb 3 . 5, a wartość stosunku $\frac{AB}{AC}$ przez stosunek $\frac{3}{5}$.

Wprowadzając znaki *więcej* i *mniej*, powiemy że wieloczyny AB . AC i BA . CA są tych samych znaków, oba dodatne; a zaś wieloczyny AB . AC i BA . AC są znaków przeciwnych, pierwszy dodatny drugi odjemny.

Na mocy tej ugody piszemy

$$\frac{AB}{AC} = \frac{3}{5} = \frac{BA}{CA}, \quad \text{a zaś} \quad \frac{AB}{CA} = -\frac{3}{5} = \frac{BA}{AC}.$$

Jako widzimy, wartość wieloczynu albo stosunku odcinków jest *liczebna* czyli samoista, gdy wyraża samą tylko wielkość tych ilości, jako $\frac{AB}{AC} = \frac{3}{5}$; a ta wartość jest *algebryczna* gdy wyraża zarazem wielkość i znak, jako $\frac{AB}{CA} = -\frac{3}{5}$.

Wiemy że równość dwóch stosunków nazywa się *proporcyą*.

Żeby dobrze rozumieć znaczenie proporcyi w geometryi, przypuśćmy, na przykład, że cztery punkta A, B, C, D, w linii prostej, dają dwa stosunki równe $\frac{AB}{BC}$ i $\frac{AD}{CD}$. Otoż, uważając samą tylko wartość liczebną tych stosunków, mamy proporcyę

$$\frac{AB}{BC} = \frac{AD}{CD}.$$

W tej proporcyi jedność linijna, do której odnosimy wyrazy pierwszego stosunku, może być całkiem różna od tej którą mierzymy wyrazy drugiego stosunku. Ale jeśli, stosując własność fundamentalną proporcyj : *wieloczyn skrajnych* równa się *wieloczynowi średnich*, piszemy równość

$$AB.CD = AD.BC\ ;$$

wtedy wszystkie cztery odcinki muszą się odnosić do tej samej jedności linijnej. W równości stosunków odcinki zostają *wielkościami mianowanemi*, a w równości wieloczynów te odcinki wyrażają *liczby oderwane*.

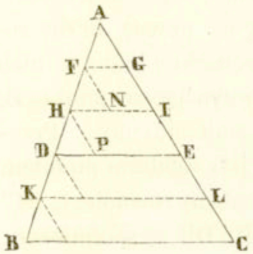
Teraz, jeśli chcemy wyrazić, nie tylko równość liczebną stosunków $\frac{AB}{BC}$ i $\frac{AD}{CD}$, ale jeszcze kierunek odcinków, to jest położenie punktów B i D względem A i C, używamy znaków $+$ albo $-$, i piszemy powyższą proporcyę jako następuje

$$\frac{BA}{BC} = -\frac{DA}{DC}.$$

Widzimy tedy że, za pomocą znaków, zogólnia się geometryczne wyrażenia.

Twierdzenie I.

Wszelka równoległa do jednego z boków trójkąta dzieli dwa inne na części proporcyonalne.



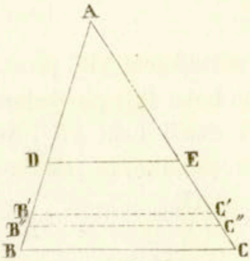
Niech będzie, w trójkącie ABC prosta DE równoległa do boku BC; powiedam że ta równoległa dzieli boki AB i AC na odcinki proporcyonalne, to jest daje proporcyę $\frac{AD}{BD} = \frac{AE}{CE}$.

Jakoż, 1° jeśli odcinki AD i BD są *spółmierne* przypuśćmy, dla utkwienia myśli, że się mają jako liczby 3 i 2, to jest że $\frac{AD}{BD} = \frac{3}{2}$. Podzielmy bok AB na 5 równych części; na mocy przypuszczenia, 3 z tych części będą się mieściły w odcinku AD a dwie w odcinku BD. Po czem, przez punkta podziału, poprowadźmy proste FG, HI, KL, równoległe do boku BC; te równoległe podzielą bok AC na 5 równych części, z których 3 będą się mieściły w odcinku AE, a zaś 2 w odcinku CE.

Na dowodzenie tego, poprowadźmy przez punkta podziału, proste FN, HP,... równoległe do boku AC, które dopełnią równoległoboków FGIN, HIEP... Owoż, trójkąty AFG, FHN są równe; bo mają boki AF i FH równe z wykreślenia, kąty przyległe A i HFN równe jako odpowiedające względem dwóch równoległych AG i FN, kąty AFG i FHN także równe jako odpowiedające względem dwóch równoległych FG i HI. Więc boki AG i GI są równe. A że, w równoległoboku FGIN, boki przeciwległe FN i GI są równe; więc bok AG jest równy GI. Dowiedzie się podobnie że bok GI jest równy IE; i tak dalej. Ztąd wynika że odcinki AE i CE, złożone, pierwszy z 3AG a drugi z 2AG, mają się jako liczby 3 i 2, czyli że $\frac{AE}{CE} = \frac{3}{2}$.

Więc stosunki $\frac{AD}{BD}$ i $\frac{AE}{CE}$, równe każdy trzeciemu $\frac{3}{2}$, są równe między sobą, to jest

$$\frac{AD}{BD} = \frac{AE}{CE}.$$



2° Jeśli odcinki AD i BD są niespółmierne między sobą, wyobraźmy odcinek AD podzielny na pewną liczbę równych części, i ponieśmy jedną z nich na odcinek BD, zaczynając od punktu D, tyle razy ile się zmieścić może. Przypuszczając że B' jest ostatnim punktem podziału, poprowadźmy równoległę $B'C'$ do boku BC. W trójkącie $AB'C'$, odcinki AD i DB' są spółmierne; więc, na mocy 1°, mamy

$$\frac{AD}{DB'} = \frac{AE}{EC'}.$$

Owoż, jeśli podzielimy odcinek AD na większą liczbę równych części, mniejszych od BB', i, zaczynając od punktu D, poniesiemy jedną z nich na odcinek DB tyle razy ile można; przynajmniej jeden z punktów podziału musi paśdź między punktami B i B' przypuśćmy w B''. Więc znowu, prowadząc prostę $B''C''$ równoległą do BC, będzie, na mocy 1°,

$$\frac{AD}{DB''} = \frac{AE}{EC''}.$$

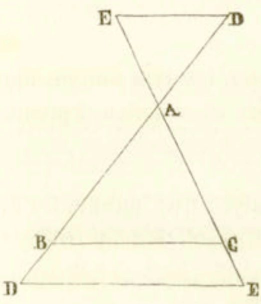
To rozumowanie jasno pokazuje że, dzieląc odcinek AD na części dostatecznie małe, i przenosząc je na odcinek DB, można dojść z ostatnim punktem podziału tak blisko punktu B jak się podoba. Ztąd wnosimy że stosunki spółmierne $\frac{AD}{DB'}$ i $\frac{AE}{EC'}$ $\frac{AD}{DB''}$ i $\frac{AE}{EC''}$, etc., mogąc się różnić od stosunków niespółmiernych $\frac{AD}{DB}$ i $\frac{AE}{EC}$ ilością mniejszą od wszelkiej naznaczonej, mają te stosunki za odpowiedające granice. Owoż, stosunki spółmierne, jakośmy dowiedli, są ciągle równe zbliżając się do swych granic $\frac{AD}{DB}$ i $\frac{AE}{EC}$; więc te ostatnie są równe.

Więc, czy stosunki $\frac{AD}{DB}$ i $\frac{AE}{EC}$ są spółmierne czy niespółmierne, zawsze one dają proporcyę $$\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}.$$

Wniosek. — Z tej proporcyi wywodzi się, przez dodawanie, dwie następujące

$$\frac{AD}{AE} = \frac{DB}{CE} = \frac{AD + DB}{AE + EC},$$

albo $$\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} \quad \text{i} \quad \frac{BD}{AB} = \frac{CE}{AC}$$



Trzy powyższe proporcye są jeszcze prawdziwe, gdy równoległa DE do boku BC leży zewnątrz trójkąta ABC, jako widać na figurze naprzeciwko.

Uwaga. — Ta i poprzedzająca figura jasno pokazują że : gdy punkta D i E leżą na bokach między wierzchołkami trójkąta, stosunki $\frac{DA}{DB}$ i $\frac{EA}{EC}$ są oba *odjemne* ; a gdy punkta D i E leżą na przedłużeniach boków, te stosunki są oba *dodatne*.

Na tej uwadze opiera się dowodzenie następującego twierdzenia, które jest wzajemnicą powyższego.

Wzajemnica. *Wszelka prosta, wyznaczająca na dwóch bokach trójkąta odcinki które dają stosunki równe* z wielkości i ze znaku, *jest równoległa do trzeciego boku.*

Niech będzie prosta DE, spotykająca boki AB i AC trójkąta ABC w punktach D i E (*fig. powyższe*); ta prosta będzie równoległa do boku BC, jeśli stosunki $\frac{DA}{DB}$ i $\frac{EA}{EC}$ są równe i mają te same znaki.

Jakoż, przez punkt D poprowadźmy równoległę DE' do boku BC; ta linia spotka bok AC w pewnym punkcie E', i da proporcyę

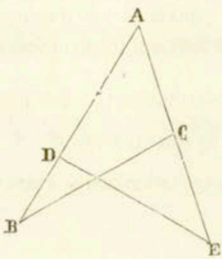
$$\frac{DA}{DB}=\frac{E'A}{E'C}.$$

Ale z założenia $\frac{DA}{DB}=\frac{EA}{EC}$; więc $\frac{E'A}{E'C}=\frac{EA}{EC}$.

Zważając na wartość *algebryczną* stosunków, to jest : bacząc najpierwej na ich znaki, z ostatniej równości wnosimy że punkta E' i E leżą oba na samych bokach trójkąta ABC, albo oba na ich przedłużeniach; potem, uważając wartość liczebną tych stosunków, widzimy łatwo, że punkta E' i E leżą oba z jednej strony wierzchołka A. Więc, przez dodawanie w pierwszym przypadku a przez odciąganie w drugim, z powyższej równości wyprowadzamy następującą

$$\frac{E'A}{AC}=\frac{EA}{AC},$$

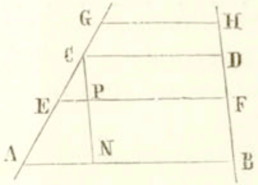
która dowodzi że odcinki AE' i AE są równe, i w tym samym idą kierunku. Więc dwa punkta E' i E schodzą się w jeden, i prosta DE jest równoległa do boku BC.



Uwaga. — Gdyby dwa punkta D i F, leżące na kierunkach boków trójkąta ABC, zadość czyniły *liczebnie* tylko proporcyi $\frac{DA}{DB}=\frac{EA}{EC}$, prosta DE nie byłaby koniecznie równoległa do BC. Jakoż, biorąc punkt D na boku AB a punkt E na przedłużeniu boku AC, tak żeby było AD = 2BD, i AE = 2CE, powyższa proporcya byłaby sprawdzona, ale prosta DE przecinałaby bok BC.

Ten przykład dowodzi nietylko użyteczności, ale nawet, możnaby powiedzieć, niezbędnej potrzeby znaków w Geometryi.

Wniosek II. — Z tego co poprzedza wynika ogólne twierdzenie, którego zresztą wprost się dowiedzic powtarzając już wiadome rozumowanie. Oto wysłowienie rzeczonego twierdzenia które wszakże nie ma wzajemnicy.



Równoległe AB, CD, EF... *przejmują na dwóch jakichkolwiek prostych* AC i BD *odcinki proporcyonalne.*

Jakoż, $\frac{AE}{BF} = \frac{EC}{FD} = \frac{CG}{DH} = \ldots$

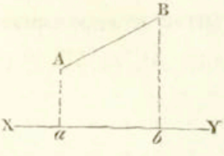
III. — *Równoległa* EF *do podstaw trapezu* ABDC (fig. powyższa) *dzieli boki nierównoległe* AC i BD *na części proporcyonalne.* I NAWZAJEM.

Poprowadźmy równoległę CN do boku BD. W trójkącie ACN równoległa EP do boku AN daje $\frac{AE}{CE} = \frac{NP}{CP}$.

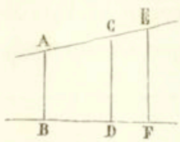
Owoż $NP = BF$, i $CP = DF$; więc $\frac{AE}{CE} = \frac{BF}{DF}$.

Wzajemnica oczywista.

OKREŚLENIE. II. — Nazywa się *rzutem punkta* A na linii prostej XY zwanej *osią*, spodek *a* prostopadłej spuszczonej z punktu A na tę oś.



Rzutem linii prostej na osi XY jest miejsce geometryczne rzutów jej punktów na tej osi. Ztąd wynika że rzutem prostej AB na osi XY jest odcinek *ab*, zawarty między rzutami obydwóch skrajności A i B tej prostej.



Niech będą BD i DF rzuty odcinków AC i CE prostej AE na osi BF. Proste AB, CD, EF, prostopadłe do BF, są równoległe; więc, w trapezie ABFE, mamy

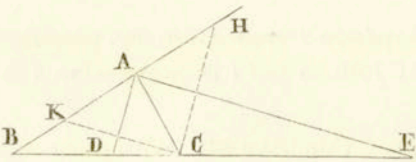
$$\frac{AC}{BD} = \frac{CE}{DF}.$$

To dowodzi że *odcinki linii prostej są proporcyonalne do swoich rzutów na osi jakejkolwiek.*

Twierdzenie II.

W każdym trójkącie, 1° *dwójsieczna kąta dzieli bok przeciwległy na dwa odcinki proporcyonalne do boków im przyległych.* 2° *Dwójsieczna kąta zewnętrznego wyznacza na boku przeciwległym dwa odcinki proporcyonalne do boków im przyległych.*

I nawzajem.



1° Niech będzie, w trójkącie ABC, dwójsieczna AD kąta A. Powiedam że odcinki DB i DC są proporcyonalne do boków im przyległych AB i AC.

Jakoż, poprowadźmy równoległę CH do dwójsiecznej AD, będzie w trójkącie BCH,

$$\frac{DB}{DC} = \frac{AB}{AH}.$$

Owoż, względem dwóch równoległych AD i CH, kąty odpowiedające BAD, BHC są równe, i kąty naprzemianległe wewnętrzne DAC, ACH są także równe; ale kąty BAD, DAC są równe z przyczyny dwójsiecznej AD; więc kąty AHC, ACH są równe, a przeto boki AC i AH są równe. Zatem, podstawiając AC za AH w powyższej proporcyi, otrzymujemy

$$\frac{DB}{DC} = \frac{AB}{AC} \qquad (1).$$

2° Uważajmy teraz, w trójkącie ABC, dwójsieczną AE kąta zewnętrznego CAH. Jeśli poprowadzimy równoległę CK do dwójsiecznej AE, będzie w trójkącie ABE,

$$\frac{EB}{EC} = \frac{AB}{AK}.$$

Owoż, względem dwóch równoległych CK i AE, kąty odpowiedające EAH, CKA są równe, i kąty naprzemianległe wewnętrzne EAC, ACK są także równe. Ale kąty EAH, EAC są równe z przyczyny dwójsiecznej AE; więc kąty AKC, ACK są równe, i temsamem boki AC i AK są równe. Zatem, podstawiając AC za AK w powyższej proporcyi, otrzymujemy

$$\frac{EB}{EC} = \frac{AB}{AC}. \qquad (2)$$

Nawzajem, *jeśli w trójkącie* ABC, *prosta wychodząca z wierzchołka kąta* A, *dzieli bok przeciwległy* BC *na części proporcyonalne do boków przyległych, ta prosta jest dwójsieczną kąta* A *wewnętrznego albo zewnętrznego, według jak spotyka sam bok przeciwległy kątowi albo jego przedłużenie.*

Niech będzie najpierwej, wewnątrz trójkąta ABC, prosta AD która daje proporcyę $\frac{BD}{CD} = \frac{AB}{AC}$. Owoż dwójsieczna kąta wewnętrznego A przecina bok BC w pewnym punkcie D' i daje także proporcyę $\frac{BD'}{CD'} = \frac{AB}{AC}$. Z tych dwóch proporcyj wynika $\frac{BD'}{CD'} = \frac{BD}{CD}$; zkąd, przez dodawanie, wywodzimy $\frac{BD'}{BC} = \frac{BD}{BC}$. Więc BD' = BD; co dowodzi że prosta AD jest dwójsieczną kąta wewnętrznego A.

Niech będzie potem, zewnątrz trójkąta ABC, prosta AE która daje proporcyę $\frac{EB}{EC} = \frac{AB}{AC}$. Owoż dwójsieczna kąta zewnętrznego A spotyka także przedłużenie boku BC, w pewnym punkcie E', i wyznacza proporcyę $\frac{E'B}{E'C} = \frac{AB}{AC}$. Z tych dwóch proporcyj wynika trzecia $\frac{E'B}{E'C} = \frac{EB}{EC}$ która pokazuje że, jeśli $E'B > E'C$ to także $EB > EC$, i na odwrot. To dowodzi że punkta E i E' są oba na tem samem przedłużeniu boku BC. Zatem, przez odciąganie, z ostatniej proporcyi wywodzimy $\frac{E'B}{BC} = \frac{EB}{BC}$; co daje E'B = EB. Więc prosta AE jest dwójsieczną kąta zewnętrznego A.

PROPORCYA HARMONICZNA.

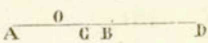
Mówi się że *trzy ilości a, b, c tworzą* PROPORCYĘ HARMONICZNĄ, *gdy przewyżka pierwszej nad drugą ma się do przewyżki drugiej nad trzecią, jako pierwsza ma się do drugiej* ; to jest gdy $\dfrac{a-b}{b-c}=\dfrac{a}{c}$.

Druga ilość b nazywa się *średnią harmoniczną* między a i c, jej wartość, na mocy określenia, jest

$$b=\frac{2ac}{a+c}; \qquad \text{zkąd wynika} \qquad \frac{1}{b}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{c}\right).$$

Ostatnia równość pokazuje że *odwrotność średniej harmonicznej dwóch ilości równa się średniej arytmetycznej ich odwrotności.*

I tak, trzy liczby 6, 3, 2 dają proporcyę harmoniczną $\dfrac{6-3}{3-2}=\dfrac{6}{2}$; a liczba 3 jest średnią harmoniczną liczb 6 i 2 (*).



Mówi się że dwa punkta C i D dzielą *harmonicznie* linię prostą AB, gdy odcinki, liczone od tych punktów, dają proporcyę

$$\frac{CA}{CB}=\frac{DA}{DB}$$

(*) Nazwisko proporcyi harmonicznej, nadane przez Greków, pochodzi z teoryi dźwięków muzycznych. Jakoż, aby struna dźwięczna wydała trzy tony : *ut*, *mi*, *sol*, które tworzą akord doskonały, harmonię, trzeba żeby drganie odbyło się w trzech jej częściach proporcyonalnych do liczb $1, \frac{4}{5}, \frac{2}{3}$; otóż, te liczby dają proporcyę $\dfrac{1-\frac{4}{5}}{\frac{4}{5}-\frac{2}{3}}, = \dfrac{1}{\frac{2}{3}}$; która dlatego właśnie nazywa się harmoniczną.

Nazywa się *postępnią harmoniczną* ciąg liczb z których każda jest średnią harmoniczną między dwiema sąsiedniemi ; jako

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots\ldots \frac{1}{n}.$$

Mając dane dwa wyrazy sąsiednie a, b postępni harmonicznej, łatwo się tworzy następujące, zważając że określenie proporcyi harmonicznej daje $c=\dfrac{ab}{2a-b}$

która jest harmoniczną, Jakoż, pisząc tę proporcyę jako pokazuje figura, to jest:

$$\frac{DA - DC}{DC - DB} = \frac{DA}{DB};$$

otrzymujemy trzy odcinki DA, DO, DB, które tworzą proporcyę harmoniczną.

Punkta C i D nazywają się *sprzężonemi harmonicznemi* względem linii AB, a ich odległość CD jest średnią harmoniczną odległości DA i DB.

Nawzajem, punkta A i B są sprzężonemi harmonicznemi względem linii CD; albowiem powyższą proporcyę można pisać:

$$\frac{BD}{CB} = \frac{AD}{AC} \quad \text{czyli} \quad \frac{AD - AB}{AB - AC} = \frac{AD}{AC};$$

co daje trzy odcinki AD, AB, AC, tworzące proporcyę harmoniczną.

Cztery punkta w linii prostej, jako A, C, B, D, tworzą proporcyę harmoniczną, czyli jako się mówi, *stanowią układ harmoniczny*, gdy wieloczyn odcinków skrajnych AC, BD równa się wieloczynowi odcinka średniego CB przez całą linię AD.

Jakoż, z równości AC.BD = CB.AD wynika proporcya harmoniczna $\frac{CA}{CB} = \frac{DA}{BD}$.

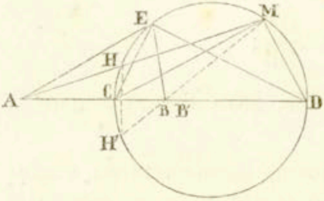
Uwaga. — Z porównania proporcyj (1) i (2) twierdzenia II, otrzymujemy proporcyę harmoniczną

$$\frac{DB}{DC} = \frac{EB}{EC},$$

która pokazuje że, *w każdym trójkącie, dwójsieczna kąta i dwójsieczna jego spełnienia dzielą bok przeciwległy harmonicznie, w stosunku boków przyległych.*

Twierdzenie III.

Miejscem geometrycznem punktów, których odległości od dwóch punktów stałych są w stosunku danym, jest okrąg. Średnicą tego *okręgu jest linia łącząca dwa punkta sprzężone które dzielą hormonicznie, w stosunku danym, odległość punktów stałych.*



Niech będą A i B dwa punkta stałe, $\frac{m}{n}$ stosunek dany. Na linii AB między A i B istnieje punkt C, i tylko jeden, który dzieli odległość AB w stosunku $\frac{CA}{CB}=\frac{m}{n}$. Jakoż, $\frac{CA}{CB}=\frac{AB-CB}{CB}=\frac{AB}{CB}-1$; gdy punkt C znajduje się w punkcie A stosunek $\frac{AC}{CB}$ jest oczywiście zero, a gdy punkt C posuwa się ku punktowi B, odcinek CB maleje aż do zera, a stosunek $\frac{AB}{CB}$ rośnie ciągle aż do nieskończoności. Ztąd wnosimy że, idąc od punkta A do B, stosunek $\frac{CA}{CB}$ bierze wszystkie wartości od o aż do ∞; a że te wartości są ciągłe, więc jest jedna między niemi, i tylko jedna, równa $\frac{m}{n}$; to jest, istnieje na linii AB między A i B, punkt C który daje $\frac{CA}{CB}=\frac{m}{n}$.

Przypuśćmy teraz, zewnątrz linii AB, punkt E należący do szukanego miejsca, i połączmy EA, EC, EB; będzie $\frac{EA}{EB}=\frac{m}{n}$. Ale już mamy $\frac{CA}{CB}=\frac{m}{n}$; zatem $\frac{EA}{EB}=\frac{CA}{CB}$. Ztąd wnosimy że, w trójkącie ABE, prosta EC jest dwójsieczną kąta AEB. Jeśli więc poprowadzimy dwójsieczną ED spełnienia kąta AEB, ta linia wyznaczy na prostej AB punkt D sprzężony harmoniczny punkta C, i będzie

$$\frac{DA}{DB}=\frac{CA}{CB}=\frac{m}{n}.$$

Owoż, dwójsieczne EC i ED są do siebie prostopadłe; co pokazuje że punkt E szukanego miejsca leży na okręgu mającym CD za średnicę.

Ten okrąg jest właśnie szukanem miejscem. Aby tego dowieść, dość jest okazać że, biorąc jakikolwiek punkt M rzeczonego okręgu i łącząc MA, MC, MB, MD, prosta MC jest dwójsieczną kąta AMB. Przez punkt M poprowadźmy prostę MB′, tak żeby tworzyła z prostą MC kąt CMB′ równy kątowi CMA; będzie (2)

$$\frac{CA}{CB'} = \frac{DA}{DB'}, \qquad \text{a mamy} \qquad \frac{CA}{CB} = \frac{DA}{DB}.$$

Ztąd, dzieląc stronami i potem dodając, otrzymujemy

$$\frac{CB'}{CB} = \frac{DB'}{DB} = \frac{CB' + DB'}{CB + DB} = 1.$$

Co dowodzi że $CB' = CB$, czyli że MC jest dwójsieczną kąta AMB.

Zatem
$$\frac{MA}{MB} = \frac{CA}{CB} = \frac{m}{n}.$$

Więc miejscem geometrycznem punktów których odległości od punktów A i B są w stosunku $\frac{m}{n}$, jest okrąg mający za średnicę odległość CD dwóch punktów które dzielą prostę AB harmonicznie w stosunku danym.

Jeśli stosunek $\frac{m}{n}$ jest równy *jedności*, wtedy rzeczone miejsce staje się prostopadłą wyprowadzoną ze środka prostej AB (I, 8).

Uwaga. — Ponieważ MC jest dwójsieczną kąta AMB, punkta przecięć H i H′ prostych MA i MB z okręgiem, są symetryczne względem AB. Więc, mając dany, na prostej CD, jeden z dwóch punktów które ją dzielą harmonicznie, łatwo znaleźć drugi. I tak, jeśli jest dany punkt A, nakreśl okrąg na prostej CD jako średnicy, poprowadź sieczną AM, i weź symetryczny H′ punktu H; prosta MH′ wyznaczy na CD punkt B sprężony harmoniczny punktu A.

PODOBIEŃSTWO WIELOKĄTÓW.

Określenie III. — *Dwa wielokąty nazywają się* podobnemi, *gdy mają boki proporcyonalne* zawierające *kąty równe*.

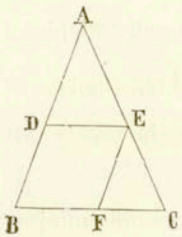
Boki proparcyonalne, jako mające jednakowe położenie w dwóch wielokątach podobnych, są bokami *odpowiednemi;* i nawzajem. Kąty zawarte między bokami odpowiednemi nazywają się *kątami odpowiednemi*, a ich wierrchołki są *wierzchołkami odpowiednemi.*

W trójkątach podobnych, boki odpowiedne są przeciwległe kątom równym, i nawzajem.

Istnienia trójkątów podobnych dowodzi następujace twierdzenie.

Twierdzenie IV (*).

Równoległa do jednego z boków trójkąta wyznacza drugi trójkąt podobny pierwszemu.



Niech będzie, w trójkącie ABC, równoległa DE do boku BC. Trójkąty ADE, ABC są oczywiście równokątne między sobą; więc, aby dowieśdź że są podobne, dość okazać że boki odpowiedne są proporcyonalne.

Owoż, DE równoległe do BC, daje (1, wn.)

$$\frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}; \quad (1)$$

a jeśli poprowadzimy równoległę EF do AB, będzie

$$\frac{AE}{AC}=\frac{BF}{BC},$$

albo, ponieważ w równoległoboku BFED bok BF równy DE,

$$\frac{AE}{AC}=\frac{DE}{BC}. \quad (2)$$

Z proporcyj (1) i (2), które mają spólny stosunek, wynika

$$\frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}=\frac{DE}{BC}.$$

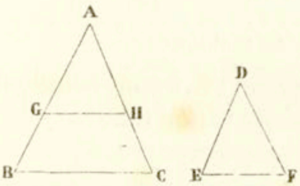
(*) Twierdzenie Talesa z *Miletu*, 639-548 przed J. Ch.

Więc trójkąty ADE, ABC, mające boki proporcyonalne i kąty między niemi zawarte równe, są podobne.

Uwaga. — Powyższe twierdzenie nie przestaje być prawdziwe gdy równoległa DE do BC jest zewnątrz trójkąta ABC.

Twierdzenie V.

Dwa trójkąty równokątne między sobą są podobne.



Aby dwa trójkąty były równokątne między sobą, dość żeby dwa kąty jednego równały się odpowiednio dwom kątom drugiego (I, 25, *wn.*).

Niech będą tedy dwa trójkąty ABC, DEF w których kąt A = D i B = E; te trójkąty są podobne.

Jakoż, na boku AB, odpowiednym bokowi DE, weźmy odległość AG równą bokowi DE, i poprowadźmy GH równoległe do BC. Trójkąty AGH, DEF mające bok równy AG = DE, przyległy dwom kątom równym A = D i AGH = E, są równe; a że trójkąt AGH jest podobny trójkątowi ABC, więc trójkąty ABC i DEF są podobne.

Wniosek I. — *Dwa trójkąty prostokątne są podobne gdy mają kąt ostry równy.*

II. — *Dwa trójkąty mające boki równoległe albo prostopadłe, każdy do każdego, są podobne.*

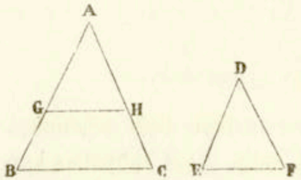
Jakoż, kąty odpowiedne, zawarte między takiemi bokami, są równe albo spełniające (I, 23 i 24). A że dwa kąty pierwszego trójkąta nie mogą być oba spełnieniami kątów drugiego, bo wtedy summa wszystkich kątów w obydwóch trójkątach przewyższałaby cztery kąty proste; więc te kąty są równe.

Zatem dwa rzeczone trójkąty, mając dwa kąty odpowiednio równe, są podobne.

Uwaga. — W ostatnim przypadku, boki równoległe albo prostopadłe są odpowiedne.

TWIERDZENIE VI.

Dwa trójkąty mające kąt równy zawarty między bokami proporcyonalnemi są podobne.



Niech będą dwa trójkąty ABC, DEF w których

$$\text{kąt } A = D, \quad \text{i} \quad \frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF};$$

te trójkąty są podobne.

Jakoż, na boku AB, odpowiednym bokowi DE, weźmy odległość AG równą DE, i poprowadźmy równoległę GH do BC.

Trójkąty podobne ABC i AGH dają proporcyę

$$\frac{AB}{AG} = \frac{AC}{AH},$$

która ma, z proporcyą daną $\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF}$, pierwszy stosunek równy, bo $AG = DE$ z wykreślenia; więc $\frac{AC}{AH} = \frac{AC}{DF}$. Ztąd wynika że $AH = DF$. Co dowodzi że dwa trójkąty AGH, DEF, mające kąt równy zawarty między bokami równemi odpowiednio, są równe. A że trójkąt AGH jest podobny trójkątowi ABC; więc trójkąty ABC i DEF są podobne.

WNIOSEK. — *Dwa trójkąty równoramienne, mające kąt równy, są podobne.*

TWIERDZENIE VII.

Dwa trójkąty mające boki proporcyonalne są podobne.

Niech będą ABC, DEF (*fig. powyższa*) dwa trójkąty w których

$$\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF} = \frac{BC}{EF}. \qquad (1)$$

Na boku AB, odpowiednym bokowi DE, weźmy długość AG równą DE, i poprowadźmy równoległę GH do BC.

Trójkąty podobne ABC, AGH dają ciąg stosunków równych

$$\frac{AB}{AG}=\frac{AC}{AH}=\frac{BC}{GH}, \qquad (2)$$

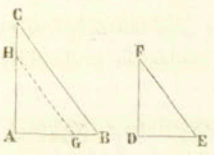
które mają te same liczniki co stosunki ciągu (1). Owoż, pierwsze stosunki $\frac{AB}{AG}$ i $\frac{AB}{DE}$ są równe, bo $AG=DE$ z wykreślenia; więc

$$\frac{AC}{AH}=\frac{AC}{DF} \text{ i } \frac{BC}{GH}=\frac{BC}{EF}.$$

Ztąd wynika że $AH=DF$, i $GH=EF$. Co dowodzi że dwa trójkąty AGH, DEF, mające boki równe każdy każdemu, są równe. A że trójkąt AGH jest podobny trójkątowi ABC, więc dwa trójkąty ABC i DEF są podobne.

Twierdzenie VIII.

Dwa trójkąty prostokątne, mające przeciwprostokątnę i bok odpowiednio proporcyonalne, są podobne.



Niech będą dwa trójkąty prostokątne ABC, DEF, w których przeciwprostokątne BC, EF, i boki AB, DE dają proporcyę

$$\frac{BC}{EF}=\frac{AB}{DE};$$

te trójkąty są podobne.

Jakoż, na boku AB, odpowiednym bokowi DE, weźmy długość AG równą DE, i poprowadźmy równoległę GH do BC. Dwa trójkąty ABC, AGH są podobne, i dają proporcyę

$$\frac{BC}{GH}=\frac{AB}{AG},$$

która ma z daną proporcyą drugi stosunek $\frac{AB}{AG}$ równy $\frac{AB}{DE}$, bo $AG=DE$ z wykreślenia; więc $\frac{BC}{GH}=\frac{BC}{EF}$. Ztąd wynika że $GH=EF$; zatem dwa trójkąty prostokątne AGH, DEF są równe, bo mają przeciwprostokątnę i bok odpowiednio równe. A że trójkąt AGH jest podobny trójkątowi ABC; więc trójkąty ABC i DEF są podobne.

Uwaga. — Te cztery twierdzenia podobieństwa trójkątów odpowiedają czterem pierwszym twierdzeniom równości ; z tą różnicą że zamiast boków równych są boki proporcyonalne. I tak :

Dwa trójkąty są *równe*, gdy mają :	Dwa trójkąty są *podobne*, gdy mają :
1° Dwa kąty równe przyległe bokowi równemu.	1° Dwa kąty równe, (gdy są równokątne między sobą).
2° Kąt równy zawarty między dwoma bokami równemi.	2° Kąt równy zawarty między dwoma bokami proporcyonalnemi.
3° Trzy boki równe.	3° Trzy boki proporcyonalne.
4° Przeciwprostokątnę i bok odpowiednio równe.	4° Przeciwprostokątnę i bok odpowiednio proporcyonalne.

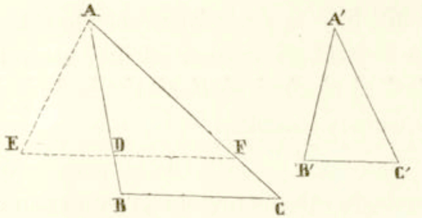
Aby uzupełnić to porównanie, dodajemy że twierdzenie : *Dwa trójkąty prostokątne są równe, gdy mają przeciwprostokątnę i kąt ostry, odpowiednio równe*, jest niejako wnioskiem pierwszego twierdzenia równości trójkątów, i dlatego właśnie odpowieda zadaniu : *Dwa trójkąty prostokątne są podobne gdy mają kąt ostry równy*, które jest wnioskiem pierwszego twierdzenia podobieństwa trójkątów.

Widzimy łatwo że każdy przypadek podobieństwa trójkątów zawiera *dwa* tylko warunki, gdy tymczasem ich równość wymaga zawsze *trzech* warunków. Jako równość trójkątów służy do dowodzenia równości pewnych linij, tak podobieństwo może służyć do okazania proporcyonalności tych linij. W tym celu umieszczamy tutaj twierdzenie które ma także związek z proporcyonalnością boków w dwóch trójkątach.

Twierdzenie IX.

W dwóch trójkątach, które mają jeden kąt równy a drugi odpowiednio spełniający, boki przeciwległe kątom równym są proporcyonalne do boków przeciwległych kątom spełniającym.

Niech będą dwa trójkąty ABC, A'B'C' mające kąty BAC i B'A'C'



równe, a kąty ABC i A'B'C' spełniające: boki BC, B'C' są proporcyonalne do boków AC, A'C'.

Jakoż, na boku AB w punkcie A, zróbmy kąt BAE równy kątowi B'A'C'; weźmy długość AD równą bokowi A'B', i przez punkt D poprowadźmy równoległę EF do boku BC. Trójkąty DAE i B'A'C' są równe. Zatem bok AE = A'C' i DE = B'C'. Owoż AD, dwójsieczna kąta EAF, daje

$$\frac{DE}{DF}=\frac{AE}{AF}.$$

Ale trójkąty podobne ABC, ADF dają także

$$\frac{BC}{DF}=\frac{AC}{AF}.$$

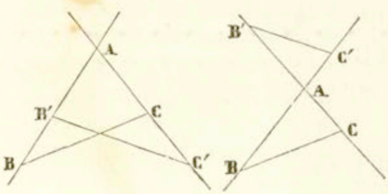
Więc, dzieląc stronami te dwie równości, otrzymujemy

$$\frac{BC}{DE}=\frac{AC}{AE} \quad \text{czyli} \quad \frac{BC}{B'C'}=\frac{AC}{A'C'}.$$

OKREŚLENIE IV.—Dwie sieczne kąta nazywają się *przeciwrównoległemi*, gdy jedna tworzy z jednem ramieniem, albo z jego przedłużeniem, kąt równy kątowi który druga tworzy z drugiem, tak żeby były dwa trójkąty podobne.

TWIERDZENIE X.

W kącie A, *dwie przeciwrównoległe* BC, B'C' *wyznaczają na ramionach albo na ich przedłużeniach odcinki, liczone od wierzchołka, których wieloczyny* AB . AB' *i* AC . AC' *są równe.* I NAWZAJEM.



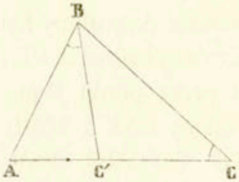
Jakoż, dwa trójkąty ABC, A'B'C' podobne, dają:

$$\frac{AB}{AC'}=\frac{AC}{AB'};$$

zkąd $AB.AB'=AC.AC'$.

Nawzajem, dwie sieczne BC, B'C' są przeciwrównoległe w kącie A, jeśli wyznaczają na kierunkach ramion odcinki których wieloczyny AB.AB' i AC.AC' są równe *z wielkości* i *ze znaku.*

Dowodzenie jako we wzajemnicy twierdz. I.



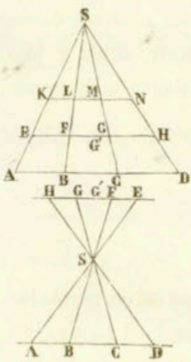
Wniosek. — Jeśli dwie przeciwrównoległe w kącie przecinają jedno ramie w tym samym punkcie, *np.* w punkcie B, wtedy odcinek AB = AB', i powyższy wieloczyn staje się

$$\overline{AB}^2 = AC.AC'.$$

To pokazuje że w trójkącie ABC, w którym sieczna BC' i bok BC są dwiema przeciwrównoległemi w kącie A, bok AB jest średnim proporcyonalnym między odcinkiem przyległym AC' i bokiem AC. I nawzajem.

Twierdzenie XI.

Sieczne, *przechodzące przez jeden punkt, przejmują na dwóch równoległych odcinki proporcyonalne.* I nawzajem.



Niech będą sieczne SA, SB, SC... które przechodzą przez punkt S, i przecinają dwie równoległe AD i EH. Odcinki tych równoległych, zawarte między siecznemi, są proporcyonalne.

Jakoż, trójkąty podobne SAB, SEF dają (4)

$$\frac{AB}{EF} = \frac{SB}{SF}.$$

Tak samo, trójkąty podobne SBC, SFG dają także

$$\frac{SB}{SF} = \frac{BC}{FG} = \frac{SC}{SG}.$$

Nakoniec trójkąty podobne SCD, SGH dają

$$\frac{SC}{SG} = \frac{CD}{GH}.$$

Ztąd, odtrącając stosunki spólne, otrzymujemy

$$\frac{AB}{EF} = \frac{BC}{FG} = \frac{CD}{GH}.$$

Nawzajem. *Sieczne* AE, BF, CG,... *które przejmują na dwóch równoległych* AD, *i* EH, *odcinki proporcyonalne, schodzą się w jednym punkcie.*

Niech będzie S punkt spotkania dwóch siecznych AE, BF; poprowadźmy prostę GS która przetnie EH w pewnym punkcie G′, i będzie

$$\frac{AB}{EF} = \frac{BC}{FG'}.$$

Ale z założenia, $\frac{AB}{EF} = \frac{BC}{FG}$; zatem $FG' = FG$.

Więc sieczna CG przechodzi przez punkt S; i tak samo inne.

Uwaga. — Gdy stosunek $\frac{AB}{EF}$ równa się jedności, to jest gdy odcinki dwóch równoległych, zawarte między siecznemi, są równe, wtedy te sieczne są równoległe. W tym przypadku, można jeszcze zachować wysłowienie twierdzenia, byle tylko uważano *dwie równoległe jako dwie proste które się spotykają w nieskończenie wielkiej odległości.*

II. — Jeśli jest więcej niż dwie równoległe, jako AD, EH, KN, ich odcinki, zawarte między siecznemi AS, BS, CS, DS przechodzącemi przez jeden punkt, są między sobą proporcyonalne. Co się wyraża pisząc

$$AB : EF : KL :: BC : FG : LM :: CD : GH : MN.$$

Ta dawna notacya, w obecnym przypadku użyteczna, czyta się mówiąc: AB ma się do EF do KL, jako BC do FG do LM; jako CD do etc.

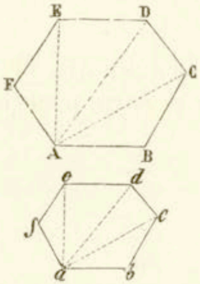
Zajmiemy się teraz podobieństwem wielokątów jakichkolwiek.

Określenie V. — W wielokątach podobnych, dwa punkta są *odpowiedne* gdy, złączone z dwiema skrajnościami boków odpowiednych, wyznaczają trójkąty podobne i podobnie ustawione.

Dwie proste, łączące dwa punkta odpowiedne, nazywają się *liniami odpowiednemi*; jako *np.* dwie przekątne które łączą wierzchołki odpowiedne.

TWIERDZENIE XII.

Dwa wielokąty, złożone z równej liczby trójkątów podobnych i podobnie ustawionych, są podobne. I NAWZAJEM.



Niech będą dwa wielokąty ABCDEF, *abcdef*, złożone z trójkątów odpowiednych podobnych ABC i *abc*, ACD i *acd*, etc.

Z podobieństwa trójkątów ABC, *abc* wynika że kąt B = *b*, kąt ACB = *acb* i kąt ACD = *acd*; zatem kąt BCD = *bcd*. Dowiedzie się podobnie że kąt CDE = *cde*; i t, d.

Nadto, porównywając boki odpowiedne, mamy

$$\frac{AB}{ab} = \frac{BC}{bc} = \frac{AC}{ac} = \frac{CD}{cd} = \dots \text{ etc.}$$

Więc wielokąty ABCDE, *abcde*, mające boki proporcyonalne i kąty między niemi zawarte równe, są podobne.

NAWZAJEM, *dwa wielokąty podobne* ABCDEF, abcdef *rozkładają się na równą liczbę trójkątów podobnych i podobnie ustawionych.*

Z wierzchołków odpowiednych A, *a*, poprowadźmy przekątne do wszystkich innych. Dwa trójkąty ABC, *abc* są podobne; bo mają, z założenia kąt równy, B = *b*, zawarty między bokami proporcyonalnemi. Zatem kąt ACB = *acb*; a że kąt BCD = *bcd*, więc kąt ACD = *acd*; nadto $\frac{AC}{ac} = \frac{BC}{bc} = \frac{CD}{cd}$. Więc dwa trójkąty ACD, *acd*, mające kąty równe ACD, *acd*, zawarte między bokami proporcyonalnemi, są podobne. Dowiedzie się tak samo podobieństwa trójkątów następujących; etc.

UWAGA. — Gdy wielokąty podobne nie są wypukłe, wtedy proste odpowiedne, z jednego wyprowadzone punktu, nie dzielą ich koniecznie na trójkąty *składające*; ale zawsze tworzą trójkąty odpowiedne podobne i podobnie ustawione. I nawzajem.

Twierdzenie XIII.

Dwa wielokąty równokątne między sobą są podobne, gdy mają $n-2$ boki po sobie idące proporcyonalne i PRZYLEGŁE *kątom równym.*

Niech będą dwa wielokąty ABCDEF, *abcdef*, (*figura powyższa*) równokątne między sobą, i mające, *prócz* boków AF i *af*, EF i *ef*, wszystkie inne boki proporcyonalne. Poprowadźmy przekątne odpowiedne AC, AD, *ac*, *ad*. Dwa trójkąty ABC, *abc*, mające kąty B i *b* równe zawarte między dwoma bokami proporcyonalnemi, są podobne; zatem kąt $ACB = acb$. A że kąt $BCD = bcd$, więc kąt $ACD = acd$. Nadto $\frac{AC}{ac} = \frac{BC}{bc} = \frac{CD}{cd}$. Więc dwa trójkąty ACD, *acd*, mające kąt równy, $ACD = acd$, zawarty między dwoma bokami proporcyonalnemi, są podobne.

I tak następnie, przechodząc przez trójkąty odpowiednio podobne, dochodzimy do trójkątów AEF, *aef* równokątnych, które dowodzą że boki AF, EF są proporcyonalne do *af*, *ef*. Więc dwa wielokąty ABCDEF, *abcdef* są podobne (*Okreś*. III).

Uwaga. — Aby dwa wielokąty n boków były równokątne między sobą, dość jest żeby miały $n-1$ kątów odpowiednio równych (I, 26 *wn.*); nadto te $n-2$ boki proporcyonalne dają $n-3$ równości stosunków. Więc w tych wielokątach, $n-1$ kątów równych i $n-2$ boków proporcyonalnych wyznaczają tylko $2n-4$ warunków podobieństwa. Powyższe twierdzenie pokazuje że te warunki są dostateczne.

Twierdzenie XIV.

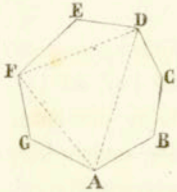
Dwa wielokąty n boków są podobne, gdy mają $n-1$ boków proporcyonalnych ZAWIERAJĄCYCH *$n-2$ kątów odpowiednych równych.*

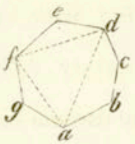
Dowodzenie podobne poprzedzającemu.

Uwaga. — Twierdzenie pokazuje że $n-1$ boków proporcyonalnych i $n-2$ kątów odpowiednych równych wyznaczają także $2n-4$ warunków, *dostatecznych* dla podobieństwa dwóch wielokątów n^{to} bocznych.

TWIERDZENIE XV.

Dwa wielokąty są podobne gdy mają boki proporcyonalne, ZAWIERAJĄCE, PRÓCZ TRZECH, *wszystkie inne kąty odpowiedne równe.*





Niech będą dwa wielokąty ABCDEFG, *abcdefg*, mające boki proporcyonalne, w których trzy kąty odpowiedne A i *a*, D i *d*, F i *f* nie są dane, ale wszystkie inne odpowiedne są równe. Połączmy wierzchołki kątów niewiadomych.

Wielokąty ABCD, *abcd* mające, prócz boku AD, *ad*, i dwóch kątów przyległych, wszystkie inne boki proporcyonalne i kąty odpowiedne równe, są podobne na mocy poprzedzającego twierdzenia. Więc kąt ADC$=adc$, kąt DAB$=dab$; i $\frac{AD}{ad}=\frac{AB}{ab}$.

Tak samo wielokąty DEF, *def* są podobne; więc kąt EDF$=edf$, kąt DFE$=dfe$; i $\frac{DF}{df}=\frac{DE}{de}$.

Nakoniec, wielokąty podobne AGF, *agf* dają: kąt AFG$=afg$, kąt FAG$=fag$, i $\frac{AF}{af}=\frac{AG}{ag}$.

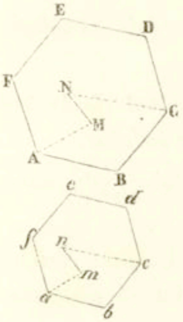
Więc dwa trójkąty ADF, *adf*, mające boki proporcyonalne, są równokątne między sobą. Zatem idzie że cały kąt A$=a$, D$=d$, F$=f$. Więc dwa wielokąty ABCDEFG, *abcdefg* są podobne.

UWAGA. — Widzimy tu jeszcze że n boków proporcyonalnych i $n-3$ kątów odpowiednych równych dają także $2n-4$ warunków, dostatecznych dla podobieństwa dwóch wielokątów n^{to} bocznych.

TWIERDZENIE XVI.

W wielokątach podobnych linie odpowiedne są proporcyonalne do boków odpowiednych.

Niech będą, w wielokątach podobnych ABCDEF, *abcdef*, dwie



proste odpowiedne MN, *mn*. Połączmy AM, NC, *am*, *nc*. Ponieważ punkta M, N są odpowiedne punktom *m*, *n*, kąt MAB$=$*mab*, i kąt NCB $=$ *ncb;* zatem dwa wielokąty MABCN *mabcn*, mające, prócz boku MN, *mn*, i dwóch kątów przyległych, wszystkie inne boki proporcyonalne i kąty między niemi zawarte równe, są podobne (14).

Więc $$\frac{MN}{mn} = \frac{AB}{ab}.$$

Określenie VI. — Stosunek dwóch boków odpowiednych, albo ogólniej, stosunek dwóch linij odpowiednych nazywa się *stosunkiem podobieństwa* dwóch wielokątów.

Gdy stosunek podobieństwa równa się *jedności*, wtedy dwa wielokąty podobne stają się równemi. To pokazuje, że równość figur jest szczególnym przypadkiem ich podobieństwa.

Uwaga ogólna o podobieństwie wielokątów. — Trzy powyższe twierdzenia podobieństwa wielokątów odpowiedają trzem twierdzeniom równości; i więcej ich być nie może, jeśli uważamy same tylko boki i kąty. Owóż, wiemy że równość dwóch wielokątów n^{to} bocznych wymaga, ogólnie mówiąc, 2n — 3 warunków; a że stosunek podobieństwa jest niezależny od liczby boków; więc dla podobieństwa tych wielokątów trzeba tylko 2n — 4 warunków. Podobieństwo wymaga tedy *jednego* warunku *mniej* niż równość. Co się łatwo przewidzieć mogło, albowiem dwie figury podobne stają się równemi, gdy stosunek podobieństwa staje się równy jedności. Ta liczba warunków *koniecznych* jest *dostateczna*, jako pokazują twierdzenia poprzedzające; byle tylko dane wielkości były oddzielne i przyzwoicie dobrane.

Jako w rówości tak i w podobieństwie, liczba warunków koniecznych zmniejsza się gdy gatunek figur podobnych jest dany. Zatem, z równości figur, wnosimy że:

Twierdzenie. — *Dwa* trapezy, *mające boki odpowiedne proporcyonalne, są podobne.*

Twierdzenie. — *Dwa* prostokąty *mające dwa boki przyległe proporcyonalne, są podobne.*

Twierdzenie. — *Dwa* równoległoboki, *mające kąt równy zawarty między dwoma bokami proporcyonalnemi, są podobne.*

Twierdzenie. — *Dwa* równoległoboki *są podobne, gdy mają przekątnę i dwa boki przyległe proporcyonalne.*

Nakoniec, jeśli do wyznaczenia figury danego gatunku trzeba jednej tylko linii, wszystkie figury tego gatunku są podobne. Zatem:

Wszystkie kwadraty są podobne.

A ogólnie, *wszystkie wielokąty foremne, równej liczby boków, są podobne.*

Promień wyznacza koło; więc

Wszystkie koła są podobne.

WŁASNOŚCI MIAROWE W TRÓJKĄCIE, CZWROBOKU I KOLE.

Twierdzenie XVII.

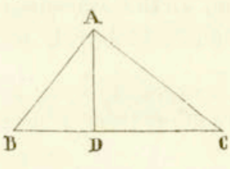
Jeśli w trójkącie prostokątnym ABC, z wierzchołka kąta prostego A spuścimy prostopadłę AD na przeciwprostokątnę BC, wtedy:

1° *Trójkąt* ABC *rozkłada się na dwa trójkąty* ADB *i* ADC *podobne do niego i temsamem podobne między sobą.*

2° *Każdy bok kąta prostego jest średnim proporcyonalnym między swoim rzutem na przeciwprostokątnej i tą przeciwprostokątną.*

3° *Prostopadła jest średnią proporcyonalną między rzutami boków kąta prostego na przeciwprostokątnej.*

I nawzajem.



Jakoż, 1° Trójkąty prostokątne ABC, ABD, mające kąt ostry B spólny, są podobne; tak samo trójkąty prostokątne ACD i ABC mające kąt ostry C spólny, są także podobne. Zatem dwa trójkąty ABD i ACD, podobne trójkątowi ABC, są podobne między sobą.

2° Trójkąty podobne ABD, ABC dają

$$\frac{BC}{AB} = \frac{AB}{BD} \qquad \text{albo} \qquad \overline{AB}^2 = BC \, . \, BD.$$

Więc *bok* AB *jest średnim proporcyonalnym między swoim rzutem* BD *na przeciwprostokątnej* BC *i tą przeciwprostokątną.*

Ten wynik można wprost otrzymać, uważając że linie AC i AD są przeciwrównoległe w kącie B. Co pokazuje że część 2° zadania jest szczególnym przypadkiem twierdzenia X.

Stosując tę uwagę, widzimy zaraz że linie AB i AD, przeciwrównoległe w kącie C, dają

$$\overline{AC}^2 = BC \, . \, CD.$$

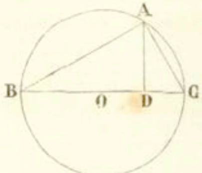
Więc *bok* AC *jest średnim proporcyonalnym między* BC *i* CD.

3° Nakoniec, dwa trójkąty podobne ADB, ADC dają

$$\frac{BD}{AD} = \frac{AD}{CD} \qquad \text{albo} \qquad \overline{AD}^2 = BD \, . \, CD.$$

Więc *prostopadła* AD, *jest średnią proporcyonalną między rzutami* BD *i* CD *boków kąta prostego na przeciwprostokątnej.*

Łatwe dowodzenie wzajemnic zostawiamy czytelnikowi.



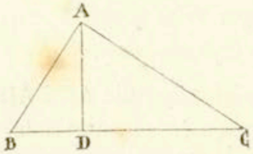
Wniosek. — Jeśli z punktu A, wziętego na okręgu, spuścimy prostopadłę AD na średnicę BC, i poprowadzimy cięciwy AB, AC do skrajności tej średnicy, trójkąt ABC będzie prostokątny. Więc,

1° *Każda z cięciw* AB, AC *jest średnią proporcyonalną między swoim rzutem na średnicy przechodzącej przez jej skrajność, i tą średnicą.*

2° *Prostopadła* AD *jest średnią proporcyonalną między rzutami* AB *i* AC *tych dwóch cięciw na średnicy.*

Twierdzenie XVIII.

W trójkącie prostokątnym, kwadrat z przeciwprostokątnej jest równy summie kwadratów z dwóch innych boków.



Niech będzie trójkąt prostokątny ABC. Jeśli z wierzchołka A kąta prostego spuścimy prostopadłę AD na przeciwprostokątnę, każdy bok kąta prostego będzie średnim proporcyonalnym między przeciwprostokątną i odcinkiem przyległym; to jest

$$\overline{AB}^2 = BC \times BD \quad \text{i} \quad \overline{AC}^2 = BC \times CD.$$

Ztąd, dodając stronami, otrzymujemy

$$\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = BC(BD + CD) = \overline{BC}^2.$$

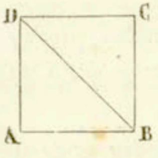
$$\text{albo} \qquad \overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2.$$

Wniosek. — Z równości $\overline{AB}^2 = BC \times BD$ i $\overline{AC}^2 = BC \times CD$ wynika

$$\frac{\overline{AB}^2}{BD} = \frac{\overline{AC}^2}{CD} = \frac{\overline{BC}^2}{BC}.$$

Więc, *w trójkącie prostokątnym, kwadraty z boków kąta prostego i z przeciwprostokątnej są odpowiednio proporcyonalne do rzutów tych trzech boków na przeciwprostokątnej.*

II. — *Stosunek przekątnej kwadratu do jego boku równa się liczbie niespółmiernej* $\sqrt{2}$



Jakoż, przekątna BD kwadratu jest przeciwprostokątną trójkąta prostokątnego i równoramiennego ABD; zatem

$$\overline{BD}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AD}^2 = 2\overline{AB}^2; \quad \text{ztąd} \quad \frac{\overline{BD}^2}{\overline{AB}^2} = 2.$$

Więc $$\frac{BD}{AB} = \sqrt{2}, \quad \text{albo} \quad BD = AB\sqrt{2}.$$

Co dowodzi że *przekątna i bok kwadratu są dwiema liniami niespółmiernemi.*

Uwaga. — Za pomocą tego twierdzenia można wyrachować jeden z boków trójkąta prostokątnego, gdy dwa inne są wiadome. I tak:

Mając dane boki b i c kąta prostego, znajdziemy przeciwprostokątnę a, biorąc równość

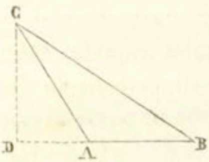
$$a^2 = b^2 + c^2; \qquad \text{zkąd} \qquad a = \sqrt{b^2 + c^2}.$$

Jeśli wiadoma przeciwprostokątna a i jeden z boków b kąta prostego, znajdziemy drugi bok c biorąc równość

$$c^2 = a^2 - b^2; \qquad \text{zkąd} \qquad c = \sqrt{a^2 - b^2}.$$

Twierdzenie XIX.

W trójkącie rozwartokątnym, kwadrat z boku przeciwległego kątowi rozwartemu równa się summie kwadratów z dwóch boków kąta, więcej podwójny wieloczyn jednego z tych boków przez rzut na nim drugiego.



Niech będzie trójkąt ABC w którym kąt A jest rozwarty. Z wierzchołka C spuśćmy, na bok AB tego kąta, prostopadłę CD która wyznaczy rzut AD drugiego boku AC.

W trójkącie prostokątnym BCD, mamy

$$\overline{BC}^2 = \overline{CD}^2 + \overline{BD}^2.$$

a trójkąt ACD, także prostokątny, daje

$$\overline{CD}^2 = \overline{AC}^2 - \overline{AD}^2.$$

Teraz, ponieważ kąt BAC jest rozwarty, prostopadła CD pada zewnątrz trójkąta, i linia BD równa się summie AB + AD. Owoż, linie AB i AD wyrażają długości, to jest liczby które je mierzą;

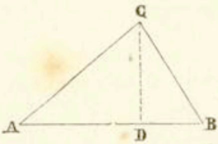
więc $$\overline{BD}^2 = (AB + AC)^2 = \overline{AB}^2 + 2AB.AD + \overline{AD}^2.$$

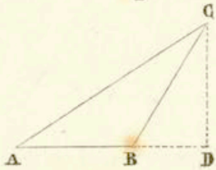
Dodając stronami trzy powyższe równości i uprosczając, otrzymujemy

$$\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 + 2AB.AD.$$

TWIERDZENIE XX.

W każdym trójkącie, kwadrat z boku przeciwległego kątowi ostremu równa się summie kwadratów z dwóch boków kąta, mniej podwójny wieloczyn jednego z tych boków przez rzut na nim drugiego.





Niech będzie trójkąt ABC w którym kąt A jest ostry. Z wierzchołka C spuśćmy na bok AB prostopadłę CD która wyznaczy na nim rzut AD drugiego boku AC kąta A. Ta prostopadła znajduje się wewnątrz albo zewnątaz trójkąta ABC, według jak kąt ABC jest ostry albo rozwarty. W obydwóch przypadkach trójkąt BCD jest prostokątny, i daje

$$\overline{BC}^2 = \overline{CD}^2 + \overline{BD}^2.$$

Ale trójkąt ACD jest także prostokątny; zatem

$$\overline{CD}^2 = \overline{AC}^2 - \overline{AD}^2.$$

Teraz, jeśli prostopadła CD przypada wewnątrz trójkąta ABC, linia BD równa się różnicy AB — AD; a jeśli, przeciwnie, ta prostopadła znajduje się zewnątrz, wtedy rzut AD jest większy od boku AB, i linia BD równa różnicy AD — AC. Ale w obydwóch razach, kwadrat z BD jest ten sam (*), a tylko on jedynie wchodzi do dowodzenia; więc mamy

$$\overline{BD}^2 = (AB - AD)^2 = \overline{AB}^2 - 2AB.AD + \overline{AD}^2.$$

Dodając te trzy równości i uprosczając, otrzymujemy

$$\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 - 2AB.AD.$$

WNIOSEK. — Ze trzech powyższych twierdzeń wynika że

NAWZAJEM, kąt przeciwległy danemu bokowi trójkąta jest *prosty*, *rozwarty* albo *ostry*, według jak kwadrat z tego boku *równa*

(*) Nazywając a i b dwie liczby które mierzą linie proste AB i AD, wiadomo z Algebry że $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 = (b - a)^2$.

się summie kwadratów z dwóch innych boków, jest od niej *większy* albo *mniejszy*.

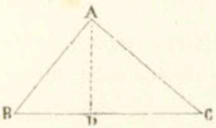
I tak, w trójkącie ABC, nazywając a, b, c boki przeciwległe kątom A, B, C :

1° Jeśli $a=5$, $b=4$, $c=3$, kąt A jest prosty; bo $5^2=4^2+3^2$.

2° Jeśli $a=6$, $b=4$, $c=3$, kąt A jest rozwarty; bo $6^2>4^2+3^2$.

3° Jeśli $a=2$, $b=4$, $c=3$, kąt A jest ostry; bo $2^2<4^2+3^2$.

Uwaga. — Znając trzy boki trójkąta, można wyrachować, za pomocą tych twierdzeń, rzut każdego boku na jednym z dwóch innych, a następnie trzy wysokości trójkąta.



Jako zastosowanie, szukajmy w trójkącie ABC wysokości AD, odpowiedającej bokowi BC $=a$. Uważając że jeden z dwóch kątów B i C jest ostry, *np.* C, mamy najpierwej w trójkącie prostokątnym ACD, $\overline{AD}^2=b^2-\overline{CD}^2$; a potem, w trójkącie ABC, $c^2=a^2+b^2-2a\,.\,CD$;

zkąd
$$CD=\frac{a^2+b^2-c^2}{2a}.$$

Podstawiając tę wartość, będzie

$$\overline{AD}^2=b^2-\frac{(a^2+b^2-c^2)^2}{4a^2}=\frac{4a^2b^2-(a^2+b^2-c^2)^2}{4a^2};$$

więc
$$AD=\frac{1}{2a}\sqrt{4a^2b^2-(a^2+b^2-c^2)},$$

Można rozłożyć na czynniki ilość pod pierwiastnikiem, i tym sposobem nadać formę logarytmowemu rachunkowi dogodną. Jakoż, ta ilość, będąc różnicą kwadratów, równa się wieloczynowi summy i różnicy ich pierwiastków, to jest

$$4a^2b^2-(a^2+b^2-c^2)^2=(2ab+a^2+b^2-c^2)\ (2ab-a^2-b^2+c^2).$$

Tak samo rozkłada się każdy z czynników w nawiasach, i daje

$$2ab+a^2+b^2-c^2=(a+b)^2-c^2=(a+b+c)\ (a+b-c),$$
$$2ab-a^2-b^2+c^2=c^2-(a-b)^2=(c+a-b)\ (c-a+b).$$

Więc, $$AD=\frac{1}{2a}\sqrt{(a+b+c)\ (a+b-c)\ (a+c-b)\ (b+c-a)}.$$

A jeśli dla skrócenia uczynimy, jako zwykle, $a+b+c=2p$, zkąd będzie

$$a+b-c=2p-2c=2(p-c),\ a+c-b=2(p-b),\ b+c-a=2(p-a);$$

otrzymamy ostatecznie

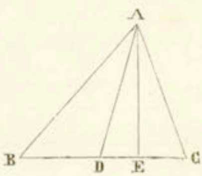
$$\mathrm{AD}=\frac{2}{a}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

Znajdzie się wysokość odpowiedającą bokowi b albo c, zamieniając tylko w mnożniku $\frac{2}{a}$ bok a na b albo na c.

Twierdzenie XXI.

W każdym trójkącie: 1° *Summa kwadratów z dwóch boków równa sie podwójnemu kwadratowi z połowy trzeciego boku, więcej podwójny kwadrat z jego ośródkowej;*

2° *Różnica kwadratów z dwóch boków równa się podwójnemu wieloczynowi z trzeciego boku przez rzut na nim jego ośródkowej.*



Niech będzie trójkąt ABC. Połączmy środek D boku BC z wierzchołkiem przeciwległym A, i spuśćmy prostopadłę AE na BC.

W trójkącie ABD kąt D jest rozwarty, przeto $\overline{\mathrm{AB}}^2=\overline{\mathrm{BD}}^2+\overline{\mathrm{AD}}^2+2\mathrm{BD}\,.\,\mathrm{DE}$

A zaś w trójkącie ADC kąt D jest ostry, więc $\overline{\mathrm{AC}}^2=\overline{\mathrm{CD}}^2+\overline{\mathrm{AD}}^2-2\mathrm{CD}\,.\,\mathrm{DE}$.

Ztąd, 1° dodając te równania stronami, i uważając że $\mathrm{CD}=\mathrm{BD}$, otrzymamy $\overline{\mathrm{AB}}^2+\overline{\mathrm{AC}}^2=2\overline{\mathrm{BD}}^2+2\overline{\mathrm{AD}}^2$ (1).

2° Odejmując drugie równanie od pierwszego, będzie

$$\overline{\mathrm{AB}}^2-\overline{\mathrm{AC}}^2=4\mathrm{BD}\times\mathrm{DE};$$

a bacząc że $2\mathrm{BD}=\mathrm{BC}$, mamy ostatecznie

$$\overline{\mathrm{AB}}^2-\overline{\mathrm{AC}}^2=2\mathrm{BD}\times\mathrm{DE} \qquad (2).$$

Uwaga. — Znając trzy boki trójkąta, można wyrachować trzy ośródkowe i ich rzuty na bokach odpowiednych.

Wniosek I. — Równanie (1) pokazuje że, jeśli w trójkącie ABC podstawa BC jest niezmienna a boki przyległe AB, AC zmieniają się tak że summa ich kwadratów, $\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2$, zostaje ta sama, wtedy odległość AD jest stała.

Więc, *miejscem geometrycznem punktu* A, *którego summa kwadratów odległości od dwóch punktów danych* B, C *zostaje stała, jest okrąg koła mający środek we środku linii* BC.

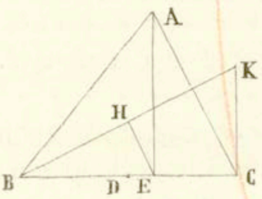
Uwaga. — Można wyrachować promień tego koła. Jakoż, oznaczając summę stałą $AB^2 + AC^2$ przez k^2, będzie

$$AD = \sqrt{k^2 - \tfrac{1}{2}\overline{BC}^2}.$$

Co wymaga żeby $$BC < k\sqrt{2}$$

Wniosek II. — Równanie (2) pokazuje że, jeśli w trójkącie ABC podstawa BC jest niezmienna, a boki przyległe AB, AC zmieniają się tak że różnica ich kwadratów, $\overline{AB}^2 - \overline{AC}^2$, zostaje ta sama, wtedy rzut DE jest stały.

Więc *miejscem geometrycznem punktu* A, *którego różnica kwadratów odległości od dwóch punktów danych* B, C *zostaje stała, jest linia prostopadła do linii* BC.



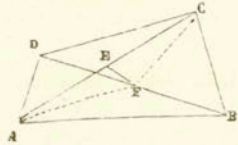
Uwaga Nie trudno wykreślić spodek E tej prostopadłej. Dla skrócenia uczyńmy $AB^2 - AC^2 = k^2$, przypuszczając $AB > AC$. Będzie, na mocy równania (2)

$$BE = \tfrac{1}{2}BC + \frac{k^2}{2BC} = \frac{\overline{BC}^2 + k^2}{2BC}.$$

Wyprowadzając do BC prostopadłę $CK = k$, mamy $\overline{BC}^2 + k^2 = \overline{BK}^2$ Jeśli więc ze środka H przeciwprostokątnej BK wyprowadzimy prostopadłę, to ona wyznaczy na BC spodek E prostopadłej AD. Jakoż, trójkąty podobne BEH, BCK dają $\frac{BE}{BK} = \frac{BH}{BC}$; zatem $BE = \frac{\overline{BK}^2}{2BC}$. Co właśnie daje punkt E.

Twierdzenie XXII.

W każdym czworoboku, summa kwadratów z boków równa się summie kwadratów z przekątnych, więcej poczwórny kwadrat z linii łączącej środki tych przekątnych.



Niech będą E, F, środki przekątnych AC, BD. Połączmy AF, CF, EF; będzie:

W trójk. ABD, $\overline{AB}^2 + \overline{AD}^2 = 2\overline{BF}^2 + 2\overline{AF}^2$,

w trójk. BCD, $\overline{BC}^2 + \overline{CD}^2 = 2\overline{BF}^2 + 2\overline{CF}^2$.

w trójkącie ACF, $2\overline{AF}^2 + 2\overline{CF}^2 = 4\overline{AE}^2 + 4\overline{EF}^2$.

Dodając te równości stronami i redukując, otrzymamy:

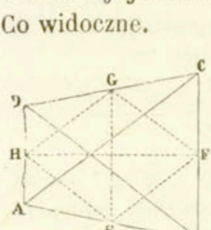
$$\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 + \overline{CD}^2 + \overline{AD}^2 = 4\overline{BF}^2 + 4\overline{AE}^2 + 4\overline{EF}^2.$$

Owoż $4\overline{BF}^2 = (2BF)^2 = \overline{BD}^2$, i $4\overline{AE}^2 = (2AE)^2 = \overline{AC}$; więc ostatecznie: $\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 + \overline{CD}^2 + \overline{AD}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BD}^2 + 4\overline{EF}^2$.

Wniosek I. — W równoległoboku przekątne przecinają się na ołowy, linia EF jest zero; więc:

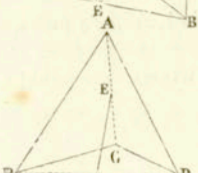
Summa kwadratów z boków równoległoboku równa się summie kwadratów z jego przekątnych.

I nawzajem, *czworobok jest równoległobokiem gdy summa kwadratów z jego boków równa się summie kwadratów z przekątnych.* Co widoczne.



II. — Wiadomo że w czworoboku ABCD linie łączące środki boków przyległych tworzą równoległobok EFGH. Więc, na mocy poprzedniego wniosku, mamy:

$$2\overline{EF}^2 + 2\overline{EH}^2 = \overline{EG}^2 + \overline{FH}^2.$$



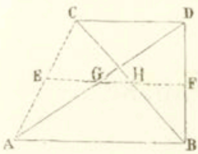
A że $EF = \frac{AC}{2}$ (I, 32) i $FG = \frac{BD}{2}$;

więc, podstawiając i redukując, otrzymujemy

$$\overline{AC}^2 + \overline{BD}^2 = 2(\overline{EG}^2 + \overline{FH}^2),$$

to jest : *w każdym czworoboku, summa kwadratów z przekątnych, równa się podwójnej summie kwadratów linij które łączą środki boków przeciwległych.*

III. — *W trapezie summa kwadratów z przekątnych równa się summie kwadratów z boków nierównoległych, więcej podwójny wieloczyn z podstaw.*



Jakoż, podług twierdzenia powyższego, mamy w trapezie ABCD :

$$\overline{AD}^2 + \overline{BC}^2 + 4\overline{GH}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BD}^2 + \overline{CD}^2 + \overline{AC}^2.$$

Owoż, $GH = \dfrac{AB - CD}{2}$ (I, 33),

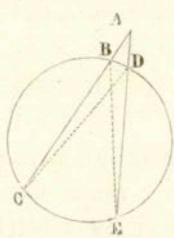
a ztąd $$4\overline{GH}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{CD}^2 - 2AB \cdot CD;$$

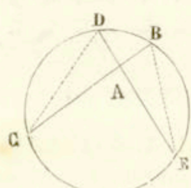
więc, odejmując ostatnią równość od pierwszej i redukując, otrzymamy :

$$\overline{AD}^2 + BC^2 = AC^2 + BD^2 + 2AB \cdot CD.$$

Twierdzenie XXIII.

Jeśli poprowadzimy sieczną do koła, przez punkt jego płaszczyzny, wieloczyn odległości tego punktu od dwóch punktów przecięć będzie stały, jakiekolwiek sieczna weźmie położenie.





Niech będzie sieczna ABC która, przechodząc przez punkt A, przecina okrąg w dwóch jakichkolwiek punktach B i C. Aby dowieśdź że wieloczyn odcinkowy AB.AC jest niezależny od położenia siecznej w kole, dość okazać że, jeśli poprowadzono drugą sieczną ADE, dwa wieloczyny odcinkowe AB.AC i AD.AE są równe.

Uważajmy że punkt A może być zewnątrz koła albo wewnątrz, jako pokazują dwie powyższe figury; ale dowodzenie jest to samo w obydwóch przypadkach.

Jakoż, połączmy BE, CD. Dwa trójkąty ABE i ACD, mające kąty przy A równe, i kąty C, E równe jako wpisane w ten sam odcinek koła, są podobne i dają

$$\frac{AB}{AD}=\frac{AE}{AC}; \qquad \text{więc } AB.AC=AD.AE.$$

Ten wynik można odrazu otrzymać, uważając że cięciwy BE i CD są przeciwrównoległe w kącie A (10).

Powyższe, ogólne twierdzenie rozdziela się zwykle na dwa następujące, które mają wzajemnicę; to jest:

1° *Dwie sieczne koła* AC *i* AE (pierwsza figura), *wychodzące z punktu zewnętrznego są odwrotnie proporcyonalne do swoich odcinków zewnętrznych* AB *i* AD.

2° *Dwie cięciwy* BC *i* DE (druga figura) *przecinają się w kole na części odwrotnie proporcyonalne.*

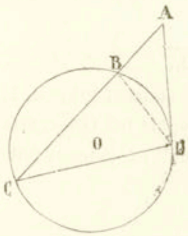
Nawzajem, *gdy dwie proste* BC *i* DE, *przedłużone jeśli trzeba, spotykają się w punkcie* A, *tak że wieloczyny ich odcinków są równe, to jest* AB.AC = AD.AE, *cztery skrajności* B, C, D, E *tych linij leżą na jednym okręgu.*

Jakoż, połączmy BE, CD; z założenia $\frac{AB}{AE}=\frac{AD}{AC}$, więc dwa trójkąty ABE, ACD mające kąty przy A równe zawarte między bokami proporcyonalnemi, są podobne; zatem kąty odpowiedne AEB, ACD są równe. Jeśli więc na cięciwie BD nakreślimy odcinek koła obejmujący kąt AEB, łuk tego odcinka przejdzie przez punkt C (II, 20.)

Wniosek. — Gdy punkt A jest zewnątrz koła, jedna z dwóch siecznych, *np.* ADE, może stać się styczną; co się zdarza gdy punkta D i E schodzą się w jeden D. Wtedy $AD = AE$, i równość $AB \cdot AC = AD \cdot AE$ staje się

$$AB \cdot AC = \overline{AD}^2.$$

Więc, *jeśli z punktu, wziętego zewnątrz koła, poprowadzono styczne i sieczne, styczna jest średnią proporcyonalną między sieczną i jej odcinkiem zewnętrznym.*



Można wprost dowieśdź tego twierdzenia. Jakoż, niech będą styczna AD i sieczna AC do koła O. Poprowadźmy cięciwy BD i CD. Dwa trójkąty ACD, ABD są podobne; bo kąt A jest spólny, a kąty C i ADB, jeden wpisany drugi zawarty między styczną i cięciwą, są równe jako mające za miare połowę łuku BD.

Więc $$\frac{AC}{AD} = \frac{AD}{AB} \qquad \text{albo} \qquad \overline{AD}^2 = AB \cdot AC.$$

Nawzajem, gdy dwie proste AC, AD wychodzą z jednego punktu, i mniejsza AD jest średnią proporcyonalną między większą AC i jej odcinkiem AB, okrąg przechodzący przez skrajności B, C, D tych trzech linij, jest styczny w punkcie D do linii mniejszej AD.

Jakoż, z założenia $\overline{AD}^2 = AB \cdot AC$; jeśliby więc okrąg przechodzący przez trzy punkta B, C, D spotykał prostę AD w drugim punkcie D′, byłoby $AB \cdot AC = AD \cdot AD'$.

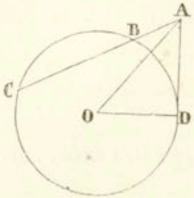
Zatem $$AD \cdot AD' = \overline{AD}^2, \qquad \text{albo} \qquad AD' = AD.$$

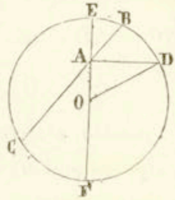
Co dowodzi że punkt D′ przypada w D, czyli że okrąg BCD jest styczny do prostej AD w punkcie D.

Uwaga I. To co poprzedza dowodzi że skrajności dwóch przeciwrównoległych w kącie są na jednym okręgu; a gdy dwie przeciwrównoległe przechodzą przez jeden punkt ramienia kąta, to ramie jest styczne do okręgu w tym punkcie.

Uwaga II. — Gdy punkt A jest zewnątrz koła O (*fig.* poniżej), prowadząc styczną DA i łącząc OA, OD, mamy

$$AB \cdot AC = \overline{AD}^2 = \overline{OA}^2 - \overline{OD}^2.$$





A gdy punkt A jest wewnątrz koła, wtedy, prowadząc średnicę EAF i do niej prostopadłę AD i łącząc OD, otrzymujemy

$$AB \cdot AC = AE \cdot AF = \overline{AD}^2 = \overline{OD}^2 - \overline{OA}^2.$$

Owoż, w pierwszym przypadku wieloczyn AB. AC jest dodatny (określ. 1), i OA $>$ OD; w drugim, wieloczyn AB. AC jest odjemny, ale też OA $<$ OD; więc, mając wzgląd na znaki, można zawrzeć oba przypadki w jednem tylko wyrażeniu

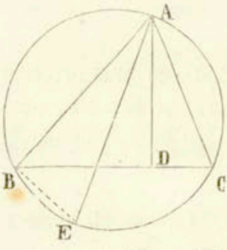
$$AB \cdot AC = \overline{OA}^2 - \overline{OD}^2.$$

Ta równość pokazuje że wieloczyn AB. AC jest stały nie tylko gdy sieczna ABC zmienia położenia w kole O, ale jeszcze gdy punkt A posuwa się po okręgu promienia OA, spółśrodkowym z okręgiem O.

Określenie VII. — Steiner (*) nazywa wieloczyn AB.AC *potęgą punktu* A *względem koła* O. Ta potęga, jako widzimy, jest dodatna albo odjemna według jak punkt A leży zewnątrz albo wewnątrz koła.

Twierdzenie XXIV.

Wieloczyn dwóch boków trójkąta jest równy wieloczynowi wysokości odpowiedającej trzeciemu bokowi przez średnicę koła opisanego.



Niech będzie, w trójkącie ABC, wysokość AD odpowiedająca bokowi BC. Opiszmy koło; przez wierzchołek A poprowadźmy średnicę AE, i połączmy BE. Dwa trójkąty prostokątne ABE, ACD, mające kąty ostre E i C równe, są podobne i dają

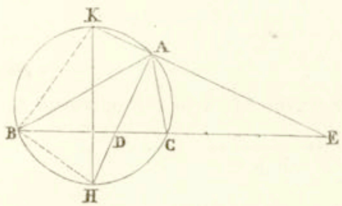
$$\frac{AB}{AD} = \frac{AE}{AC}; \qquad \text{więc} \qquad AB.AC = AD.AE.$$

(*) Znakomity Matematyk Szwajcarski, zmarły r. 1863.

TWIERDZENIE XXV.

W każdym trójkącie, 1° *wieloczyn dwóch boków kąta równa się wieloczynowi odcinków które jego dwójsieczna wyznacza na trzecim boku, więcej kwadrat z tej dwójsiecznej.*

2° *Wieloczyn dwóch boków kąta równa się wieloczynowi odcinków które dwójsieczna kąta spełniającego wyznacza na kierunku trzeciego boku, mniej kwadrat z tej dwójsiecznej.*



1° Niech będzie w trójkącie ABC, dwójsieczna AD kąta A. Jeśli opiszemy koło, ta dwójsieczna przejdzie przez środek H łuku BC. Połączmy BH. Dwa trójkąty ABH, ACD, mające kąty przy A równe z założenia, i kąty AHB, ACD równe jako wpisane w ten sam odcinek koła, są podobne i dają

$$\frac{AB}{AD}=\frac{AH}{AC}; \qquad \text{zkąd} \qquad AB.AC=AH.AD,$$

albo $$AB.AC=(AD+DH)AD=AD.DH+\overline{AD}^2.$$

Ale $$AD.DH=DB.DC;$$

więc $$AB.AC=DB.DC+\overline{AD}^2.$$

UWAGA. — Jeśli trójkąt ABC jest równoramienny $AB=AC$, wtedy $DB=DC$; zatem $\overline{AB}^2=\overline{BD}^2+\overline{AD}^2$; co sprawdza znane już twierdzenie.

2° Uważajmy teraz dwójsieczną AE spełnienia kąta BAC, która przechodzi przez środek K łuku BAC; i połączmy BK. Dwa trójkąty ABK, ACE są podobne; bo mają kąty BKA, ACE równe jako spełnienia kąta ACB, i kąty BAK, CAE równe jako dopełnienia połowy kąta BAC.

Zatem $$\frac{AB}{AE}=\frac{AK}{AC};$$

zkąd $$AB.AC=AK.AE=(EK-EA)\,EA=EK.EA-\overline{EA}^2.$$

Ale $$EK.EA=EB.EC;$$

więc $$AB.AC = EB.EC - \overline{AE}^2.$$

Uwaga. — Za pomocą tego twierdzenia, można wyrachować w funkcyi boków trójkąta długość dwójsiecznej kąta wewnętrznego albo zewnętrznego.

Jakoż, dla dwójsiecznej AD kąta wewnętrznego A,

mamy $$AD = \sqrt{AB.AC - DB.DC};$$

a wartości odcinków DB i DC otrzymują się ze stosunków

$$\frac{DB}{c} = \frac{DC}{b} = \frac{a}{b+c}.$$

Więc $$AD = \frac{2}{b+c}\sqrt{bcp(p-a)}.$$

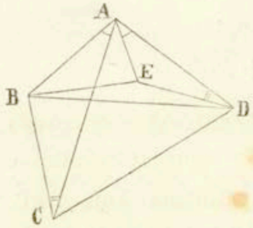
Podobnym sposobem znajduje się dwójsieczną AE kąta zewnętrznego A,

$$AE = \frac{2}{c-b}\sqrt{bc(p-b)(p-c)}$$

przypuszczając bok $c > b$.

Twierdzenie XVI.

W czworoboku wypukłym *wpisalnym, wieloczyn przekątnych równa się summie wieloczynów boków przeciwległych.* I nawzajem.



Niech będzie ABCD czworobok *wypukły* jakikolwiek. Na boku AD, uczyńmy kąt DAE równy kątowi BAC, i kąt ADE równy kątowi ACB; trójkąty ADE, ABC będą podobne i dadzą

$$\frac{AD}{AC} = \frac{DE}{BC} = \frac{AE}{AB}; \quad \text{zkąd} \quad AD.BC = AC.DE \qquad (1).$$

Ale, połączmy BE. Trójkąty ABE, ACD, mające kąty równe BAE i CAD zawarte między bokami AB, AE i AC, AD proporcyonalnemi na mocy powyższych proporcyi, są podobne i dają

$$\frac{AB}{AC} = \frac{BE}{CD}; \quad \text{zkąd} \quad AB.CD = AC.BE \qquad (2).$$

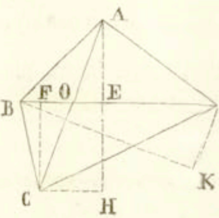
Dodając teraz równości (1) i (2), otrzymujemy

$$AB.CD + AD.BC = (BE + DE)AC.$$

Owoż, przekątna BD jest mniejsza od summy BE + DE; więc w czworoboku jakimkolwiek ABCD, byle wypukłym, wieloczyn przekątnych AC.BD jest *mniejszy* od summy AB.CD + AD.BC wieloczynów boków przeciwległych. Aby te ilości były równe, trzeba żeby BD = BE + DE, to jest żeby kąty ADB i ACB były równe; albo innemi słowy, trzeba i dość jest żeby czworobok ABCD był wpisalny w koło.

Twierdzenie XXVII.

W czworoboku *wypukłym* wpisalnym *stosunek przekątnych równa się stosunkowi summy wieloczynów boków które się schodzą w skrajnościach pierwszej przekątnej do summy wieloczynów boków które się schodzą w skrajnościach drugiej.* I NAWZAJEM.



Niech będzie czworobok *wypukły* jakikolwiek ABCD. Nazywając R promień koła opisanego na trójkącie ABD, i AE wysokość, mamy (24).

$$AB.AD = 2R.AE \qquad (1).$$

Tak samo trójkąt BCD, w którym promień koła opisanego jest R' a wysokość CF, daje

$$CB.CD = 2R'.CF \qquad (2).$$

Owoż, jeśli z punktu C spuścimy prostopadłę CH na AE, będzie CF = EH, i trójkąty podobne AOE, COF, ACH dadzą

$$\frac{AE}{AO} = \frac{CF}{CO} = \frac{AH}{AC};$$

Ztąd $\qquad AE = \frac{AH}{AC}.AO, \quad$ i $\quad CF = \frac{AH}{AC}.CO.$

Podstawiając te wartości w równościach (1), (2), i dodając stronami, znajdujemy

$$AB.AD + CB.CD = \frac{AH}{AC}(2R.AO + 2R'.CO) \qquad (3).$$

Jeśli spuścimy prostopadłe BK na AC i DK na BK, i nazwiemy R'', R''' promienie kół opisanych na trójkątach ABC, ACD, otrzymamy podobnie

$$BA.BC + DA.DC = \frac{BK}{BD}(2R''.BO + 2R'''.DO) \qquad (4).$$

Teraz uważajmy że trójkąty prostokątne ACH, BDK są podobne, bo ich kąty ostre CAH, DBK mające ramiona odpowiedne prostopadłe są równe; zatem $\frac{AH}{AC} = \frac{BK}{BD}$.

Więc, dzieląc stronami równości (3) i (4), będzie ostatecznie

$$\frac{AB.AD + CB.CD}{BA.BC + DA.DC} = \frac{2R.AO + 2R'.CO}{2R''.BO + 2R'''.DO}.$$

Ten wynik pokazuje że druga strona równości przywodzi się tylko wtedy do stosunku przekątnych $\frac{AC}{BD}$ gdy czworobok jest wpisalny. Więc ten warunek jest konieczny i dostateczny dla prawdziwości wysłowionego twierdzenia i jego wzajemnicy.

Uwaga. — Znając cztery boki a, b, c, d czworoboku wpisalnego, nie trudno wyznaczyć jego przekątne x, y. Jakoż, dwa ostatnie twierdzenia dają:

$$xy = ac + bd, \quad \frac{x}{y} = \frac{ad + bc}{ab + cd};$$

ztąd, najpierwej mnożąc a potem dzieląc stronami i wyciągając pierwiastek kwadratowy, otrzymujemy

$$x = \sqrt{\frac{(ac+bd)(ad+bc)}{ab+cd}}, \quad y = \sqrt{\frac{(ac+bd)(ab+cd)}{ad+bc}}.$$

Można jeszcze mieć odległość δ środków dwóch przekątnych tego czworoboku; albowiem na mocy wiadomego twierdzenia jest

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = x^2 + y^2 + 4\delta^2.$$

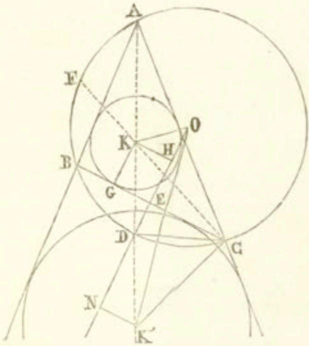
Podstawiając wartości za x^2, y^2, otrzymamy ostatecznie

$$\delta = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{(a^2-c^2)^2 bd + (b^2-d^2)^2 ac}{(ab+cd)(ad+bc)}}.$$

Twierdzenie XXVIII.

1° *W trójkącie odległość środków kół, opisanego i wpisanego, jest średnią proporcyonalną między promieniem koła opisanego i* PRZEWYŻKĄ *tego promienia nad średnicą koła wpisanego.*

2° *Odległość środków kół, opisanego i zawpisanego, jest średnią proporcyonalną między promieniem koła opisanego i* SUMMĄ *tego promienia i średnicy koła zawpisanego.*



1° Niech będą O i K środki kół, opisanego na trójkącie ABC i wpisanego, OD i KG promienie tych kół które nazwiemy R i r. Promień OD, przechodzący przez punkt spotkania D dwójsiecznej kąta A z okręgiem, jest prostopadły do boku BC a przeto równoległy do promienia KG.

Owoż, w trójkącie ODK, spuśćmy prostopadłę KH na OD, będzie

$$\overline{KO}^2 = \overline{DO}^2 + \overline{DK}^2 - 2DO.DH.$$

albo $$\overline{KO}^2 = R^2 + \overline{DK}^2 - 2R(DE + r).$$

Ale trójkąt DCK jest oczywiście równoramienny, to jest DK = DC; a wiemy że $\overline{DC}^2 = 2R.DE$ (15, wn).

Więc, dodając dwie ostatnie równości i redukując, znajdujemy.

$$\overline{KO}^2 = R^2 - 2Rr \qquad \text{albo} \qquad \overline{KO}^2 = R(R - 2r).$$

2° Niech będzie K' środek koła zawpisanego. Jeśli spuścimy prostopadłę K'N na DO, promień tego koła, który nazwiemy r', będzie równy summie ND + DE. Owóż, trójkąt DOK' daje

$$\overline{OK'}^2 = \overline{DO}^2 + \overline{DK'}^2 + 2DO.DN$$

albo $$\overline{OK'}^2 = R^2 + DK'^2 + 2R(r' - DE).$$

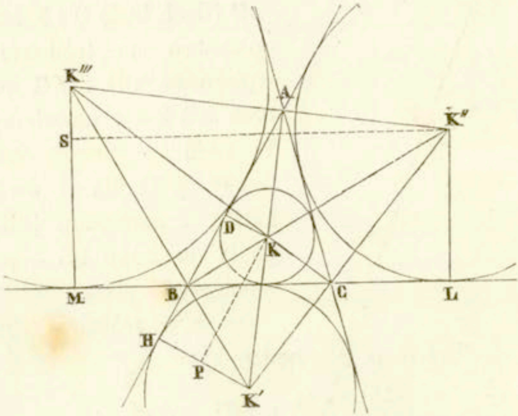
A nie trudno widzieć że $DK' = DC = DK$; a już mamy

$$\overline{DC}^2 = 2R.DE.$$

Więc, dodając i redukując, otrzymujemy ostatecznie

$$\overline{OK'}^2 = R^2 + 2Rr' \quad \text{albo} \quad \overline{OK'}^2 = R(R + 2r').$$

Uwaga. — Można łatwo znaleźć czemu się równa odległość środków kół, wpisanego i zawpisanego, stycznych do jednego z boków trójkąta, albo odległość środków dwóch kół zawpisanych.



I tak, aby otrzymać odległość KK' środków kół wpisanego i zawpisanego względem boku a, poprowadźmy równoległę KP do AB. Widzimy że $KP = DH = a$ (II *zag.* 9 uw.) i $PK' = r' - r$;

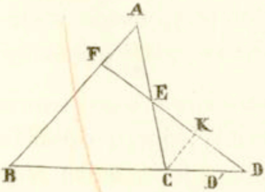
więc $$KK' = \sqrt{(r' - r)^2 + a^2}.$$

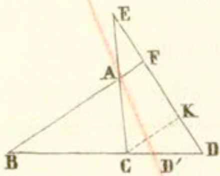
Podobnie, aby mieć odległość $K''K'''$ środków dwóch kół zawpisanych w kąt BAC, poprowadźmy równoległę $K''S$ do BC; widzimy że $K''S = LM = b + c$, i $SK''' = r''' - r''$

więc $$K''K''' = \sqrt{(r''' - r'')^2 + (b + c)^2}$$

POPRZECZNE.

Określenie V. — Linia prosta, która przecina wszystkie boki wielokąta albo ich przedłużenia, nazywa się *poprzeczną*.





Poprzeczna wyznacza na każdym boku dwa odcinki których stosunek, jako już wiemy, jest dodatny albo odjemny.

I tak, w trójkącie ABC, poprzeczna DEF wyznacza na boku BC dwa odcinki DB i DC których stosunek $\frac{DB}{DC}$ jest *dodatny*; a zaś na boku AC, dwa odcinki EA i EC których stosunek $\frac{EA}{EC}$ jest *odjemny*.

Twierdzenie XXIX.

Poprzeczna DEF (fig. powyższa) *wyznacza na bokach trójkątu* ABC *sześć odcinków takich, że wieloczyn stosunków odcinkowych równa się jedności dodatnej, to jest*

$$\frac{DB}{DC} \cdot \frac{EC}{EA} \cdot \frac{FA}{FB} = +1.$$

I nawzajem.

Jakoż, poprowadźmy równoległę CK do boku AB. Trójkąty podobne DBF, DCK dają

$$\frac{DB}{DC} = \frac{FB}{KC}$$

Ale trójkąty podobne CEK, AEF dają także

$$\frac{EC}{EA} = \frac{KC}{FA}.$$

Ztąd, mnożąc te równości stronami i redukując, otrzymujemy

$$\frac{DB}{DC} \cdot \frac{EC}{EA} \cdot \frac{FA}{FB} = 1.$$

Teraz uważajmy że w trójkącie poprzeczna może spotykać dwa tylko boki i przedłużenie trzeciego, albo spotykać same tylko przedłużenia boków; w pierwszym przypadku są dwa stosunki odcinkowe odjemne a trzeci dodatny, w drugim zaś wszystkie trzy stosunki są dodatne. Więc w obydwóch przypadkach wieloczyn trzech stosunków odcinkowych równa się *jedności dodatnej*.

Uwaga. — Jako widać, trzy stosunki odcinkowe, które tworzą powyższy wieloczyn, są takie że mianownik jednego stosunku i licznik drugiego kończą się na tę samą literę wierzchołka trójkąta; albo innemi słowy, licznikami tych stosunków są trzy odcinki nieprzyległe a mianownikami trzy inne odcinki.

Nawzajem, *trzy punkta, leżące na trzech bokach trójkąta, są w linii prostej jeśli dają wieloczyn trzech stosunków odcinkowych równy jedności dodatnej.*

Jakoż, niech będą trzy punkta D, E, F, które leżą na kierunkach boków trójkąta ABC i dają

$$\frac{DB}{DC} \cdot \frac{EC}{EA} \cdot \frac{FA}{FB} = +1,$$

Ponieważ wieloczyn trzech stosunków odcinkowych jest dodatny, jeden z tych stosunków przynajmniej, np. $\frac{DB}{DC}$ musi być dodatny, to jest punkt D musi leżeć na przedłużeniu boku BC. Zatem, prosta EF spotyka także przedłużenie tego boku, w pewnym punkcie D', i daje,

$$\frac{D'B}{D'C} \cdot \frac{EC}{EA} \cdot \frac{FA}{FB} = +1.$$

Z tych dwóch równości wynika

$$\frac{D'B}{D'C} = \frac{DB}{DC}.$$

Co dowodzi że punkta D' i D leżą oba na jednem przedłużeniu boku BC. Owoż, z ostatniej proporcyi, przez odciąganie, wynika $\frac{D'B}{BC} = \frac{DB}{BC}$; zkąd $D'B = DB$. Więc trzy punkta D, E, F są w linii prostej.

Uwaga. — Stosunek $\frac{DB}{DC} = \frac{DC + BC}{DC} = 1 + \frac{BC}{DC}$. (*fig. jako wyżej*).

Gdy odcinek DC, rosnąc co raz bardziej, staje się nieskończenie wielkim, $\frac{BC}{DC}$ maleje i staje się zero; zatem stosunek $\frac{DB}{DC}$ ma za granicę 1; wtedy poprzeczna EF staje się równoległą do boku BC, i równość

$$\frac{DB}{DC}\cdot\frac{EC}{EA}\cdot\frac{FA}{FB}=1 \text{ przywodzi się do } \frac{EC}{EA}\cdot\frac{FA}{FB}=1, \text{ albo } \frac{FA}{FB}=\frac{EA}{EB}.$$

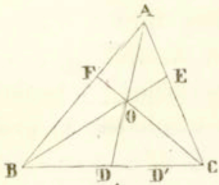
To pokazuje że twierdzenie 1 jest wnioskiem obecnego.

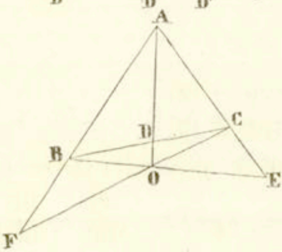
Twierdzenie XXX.

Trzy poprzeczne AD, BE, CF, *poprowadzone z jednego punktu* O *do wierzchołków trójkąta* ABC, *wyznaczają na bokach przeciwległych sześć odcinków takich, że wieloczyn trzech stosunków odcinkowych równa się jedności odjemnej, to jest*

$$\frac{DB}{DC}\cdot\frac{EC}{EA}\cdot\frac{FA}{FB}=-1$$

I nawzajem.





Jakoż, uważajmy dwa trójkąty ADB i ADC, mające za bok spólny poprzeczną AD. W trójkącie ABD, poprzeczna CF daje

$$\frac{CB}{CD}\cdot\frac{OD}{OA}\cdot\frac{FA}{FB}=1\ ;$$

a w trójkącie ACD, poprzeczna BE daje także

$$\frac{BD}{BC}\cdot\frac{EC}{EA}\cdot\frac{OA}{OD}=1\ ;$$

Ztąd, mnożąc stronami, otrzymujemy

$$\frac{DB}{DG}\cdot\frac{EC}{EA}\cdot\frac{FA}{FB}=1.$$

Teraz uważajmy że punkt O może być wewnątrz albo zewnątrz trójkąta ABC; w pierwszym przypadku trzy poprzeczne przecinają same boki i dają *trzy* stosunki *odjemne*, w drugim te poprzeczne przecinają tylko jeden bok i przedłużenia dwóch innych, zatem dają *jeden* stosunek *odjemny* a dwa dodatne. W obydwóch przypadkach liczba stosunków odjemnych jest nieparzysta; więc powyższy wieloczyn trzech stosunków odcinkowych równa się *jedności odjemnej*, jakośmy powiedzieli.

Nawzajem, *jeśli trzy poprzeczne, przechodzące przez trzy wierzchołki trójkąta, wyznaczają na bokach przeciwległych odcinki takie, że wieloczyn trzech stosunków odcinkowych równa się jedności odjemnej, te poprzeczne spotykają się w jednym punkcie, albo są równoległe.*

Niech będą trzy poprzeczne AD, BE, CF ktore, przecinając boki trójkąta ABC w punktach D, E, F, dają

$$\frac{DB}{DC}\cdot\frac{EC}{EA}\cdot\frac{FA}{FB}=-1.$$

Ponieważ wieloczyn tych trzech stosunków jest odjemny, jeden z nich przynajmniej *np.* $\frac{DB}{DC}$ musi być odjemny, a dwa inne oba dodatne albo oba odjemne; to znaczy że AD, jedna ze trzech poprzecznych, musi spotykać bok BC między B i C; a zaś dwie inne obie spotykają same boki albo same przedłużenia.

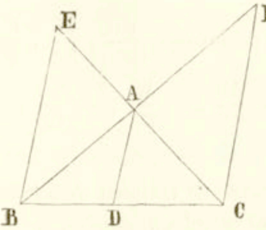
Jeśli więc dwie poprzeczne BE, CF przecinają się w punkcie O, prosta OA, która łączy ten punkt z wierzchołkiem A, przecina bok BC w pewnym punkcie D'; zatem

$$\frac{D'B}{D'C}\cdot\frac{EC}{EA}\cdot\frac{FA}{FB}=-1.$$

Z tych dwóch równości wynika $\frac{D'B}{D'C}=\frac{DB}{DC}$.

Co dowodzi że prosta OA spotyka bok BC między B i C. Owoż, z ostatniej równości przez dodawanie, wynika, $\frac{D'B}{BC}=\frac{DB}{BC}$; zkąd $D'B = DB$. Więc trzy poprzeczne AD, BE, CF spotykają się w jednym punkcie O.

Jeśli dwie poprzeczne BE i CF są równoległe, wtedy poprzeczna AD jest do nich równoległa. Bo, gdyby spotykała jedną z nich, na mocy tego co poprzedza wszystkie trzy przecinałyby się w jednym punkcie.



Ten przypadek istnieje. Jakoż, niech będą trzy poprzeczne równoległe AD, BE, CF, przechodzące każda przez jeden wierzchołek trójkąta ABC. W trójkącie BCE, poprzeczna AD równoległa do BE daje

$$\frac{DB}{BC} = \frac{EA}{EC};$$

a w trójkącie BCF, ta sama poprzeczna AD równoległa do CF daje także

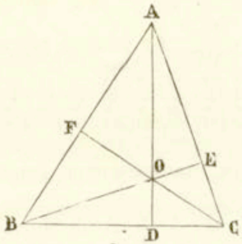
$$\frac{BC}{DC} = \frac{FB}{FA}.$$

Mnożąc stronami, i uważając że tylko jeden stosunek jest odjemny, znajdziemy $\frac{DB}{DC} \cdot \frac{EC}{EA} \cdot \frac{FA}{FB} = -1.$

Za pomocą dwóch poprzednich twierdzeń, łatwo się dowodzi licznych zadań, jako następujące:

1° *Ośródkowe trójkąta przecinają się w jednym punkcie*: bo każdy ze trzech stosunków odcinkowych równa się -1

2° *Linie łączące wierzchołki trójkąta z punktami zetknięć jednego ze czterech kół stycznych spotykają się w jednym punkcie.* Dowodzenie nie przedstawia żadnej trudności.



3° *Trzy wysokości trójkąta przecinają się w jednym punkcie.*

Jakoż, trójkąty prostokątne podobne BAD i BCF, CBE i CAD, ACE i ABE dają

$$\frac{DB}{FB} = \frac{AB}{BC}, \quad \frac{EC}{DC} = \frac{BC}{AC}, \quad \frac{FA}{EA} = \frac{AC}{AB}.$$

Ztąd, mnożąc stronami, wynika

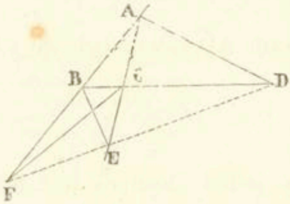
$$\frac{DB}{DC} \cdot \frac{EC}{EA} \cdot \frac{FA}{FB} = 1.$$

Owoż, w trójkącie spodki trzech wysokości są w liczbie nieparzystej na bokach; więc powyższy wieloczyn równa się -1; etc.

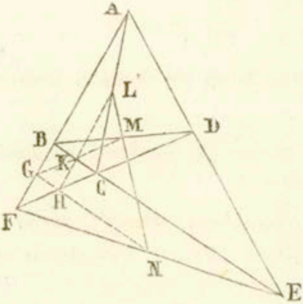
4° *Dwójsieczne* AD, BE, CF *trzech kątów trójkąta* ABC *spotykają się w jednym punkcie.*

Jakoż, na mocy twierdzenia II, stosunki odcinkowe $\frac{DB}{DC}, \frac{EC}{EA}, \frac{FA}{FB}$ równają się odpowiednio stosunkom $-\frac{AB}{AC}, -\frac{BC}{BA}, -\frac{CA}{CB}$, których wieloczyn jest równy -1.

Dowodzi się tak samo że, *w trójkącie, dwójsieczne spełnień dwóch kątów i dwójsieczna trzeciego kąta spotykają się w jednym punkcie.*



5° *Dwójsieczne* AD, BE, CF, *kątów zewnętrznych trójkąta* ABC *spotykają boki przeciwległe we trzech punktach* D, E, F, *które leżą w linii prostej.* Jakoż, te punkta spotkań leżą na przedłużeniach boków, i dają trzy stosunki odcinkowe których wieloczyn równa się $+1$.



6° *W czworoboku zupełnym* ABCDEF, *środki* L, M, N *trzech przekątnych* AC, BD, EF, są w linii prostej.

Jakoż, poprowadźmy LK, MG, NH równoległe do AF, DF, BE. Te proste wyznaczają trójkąt GHK na którego bokach leżą punkta L, M, N, i dają wieloczyn stosunków odcinkowych $\frac{LH}{LK} \cdot \frac{MK}{MG} \cdot \frac{NG}{NK}$, a ten równa się wieloczynowi $\frac{AF}{AB} \cdot \frac{EB}{EC} \cdot \frac{DC}{DF}$; bo odcinki pierwszego są połowami odpowiednych odcinków drugiego. Owoż, z przyczyny poprzecznej ADE w trójkącie BCF, ostatni wieloczyn równa się $+1$; więc, etc.

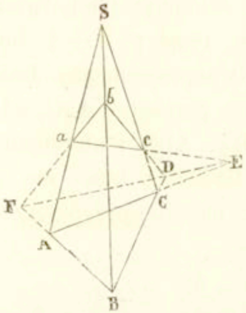
Zakończymy te zastosowania następującem twierdzeniem które nam później będzie użyteczne.

Twierdzenie XXXI (*).

Gdy wierzchołki dwóch trójkątów ABC, *abc*, *leżą na trzech prostych zbiegających się w jednym punkcie* S, *boki przeciwległe tym*

(*) To twierdzenie uczonego Desargues, z wieku XVII, stanowi podstawę teoryi *figur odpowiedniczych*, w dziele « *Traité des figures projectives* » Generala Poncelet.

wierzchołkom przecinają się w trzech punktach D, E, F *w linii prostej*. I NAWZAJEM.



Jakoż, trójkąt SAB, przecięty poprzeczną ab, daje

$$\frac{FA}{FB}\cdot\frac{bB}{bS}\cdot\frac{aS}{aA}=1.$$

Tak samo trójkąty SAC, SBC, przecięte poprzecznemi ac i bc, dają :

$$\frac{aA}{aS}\cdot\frac{cS}{cC}\cdot\frac{C}{EA}=1, \quad \text{i} \quad \frac{DB}{DC}\cdot\frac{cC}{cS}\cdot\frac{bS}{bB}=1.$$

Ztąd, mnożąc stronami, wynika :

$$\frac{DB}{DC}\cdot\frac{EC}{EA}\cdot\frac{FA}{FB}=+1.$$

Więc trzy punkta D, E, F są w linii prostej.

NAWZAJEM, *gdy boki dwóch trójkątów* ABC, abc *przecinają się w trzech punktach* D, E, F *w linii prostej ; wierzchołki tym bokom przeciwległe leżą na trzech prostych które się zbiegają w jednym punkcie.*

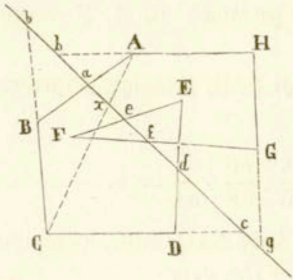
Bo, jeśli linia Aa nie przechodzi przez punkt spotkania S linij Bb, Cc, wtedy linia SA musi spotykać bok AB, w punkcie a' różnym od a; zatem, łącząc $a'c$, boki $a'c$, AC spotkają się w punkcie E′ różnym od E, ale zawsze na linii DF, na mocy samego twierdzenia. Ztąd wynika że dwie linie proste DF i AC przecinałyby się w dwóch punktach E, E′ ; co niemożebne. Więc, etc.

Jeśli linie Bb, Cc są równoległe, wtedy linia Aa jest do nich równoległa. Co się zgadza z twierdzeniem, uważając że punkt S może się oddalać aż do nieskończoności.

TWIERDZENIE XXXII.

Poprzeczna wyznacza na każdym boku wielokąta dwa odcinki takie, że wieloczyn stosunków odcinkowych równa się jedności dodatnej.

Jeśli to twierdzenie jest prawdziwe w wielokącie mającym n



boków, to będzie także prawdziwe w wielokącie $n+1$ boków. Jakoż, niech będzie wielokąt jakikolwiek ABCDEFGHA, mający $n+1$ boków, przecięty poprzeczną abg. Jeśli poprowadzimy przekątnę AxC, oddzielimy trójkąt ABC, i otrzymany wielokąt ACDEFGHA który ma n boków; więc, na mocy przypuszczenia, będzie

$$\frac{xA}{xC}\cdot\frac{cC}{cD}\cdot\frac{dD}{dE}\cdot\frac{eE}{eF}\cdot\frac{fF}{fG}\cdot\frac{gG}{gH}\cdot\frac{hH}{hA}=+1.$$

Ale, w trójkącie ABC, ta sama poprzeczna abg daje

$$\frac{xC}{xA}\cdot\frac{aA}{aB}\cdot\frac{bB}{bC}=+1.$$

Więc, mnożąc i redukując, znajdujemy

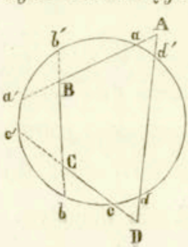
$$\frac{aA}{aB}\cdot\frac{bB}{bC}\cdot\frac{cC}{cD}\cdot\frac{dD}{dE}\cdot\frac{eE}{eF}\cdot\frac{fF}{fG}\cdot\frac{gG}{gH}\cdot\frac{hH}{hA}=+1.$$

Uwaga. — Jako widzimy obecne twierdzenie jest zogólnieniem twierdzenia XXIX.

Poprzeczna może być okręgiem koła, jako w następującem twierdzeniu sławnego Carnot.

Twierdzenie XXXIII.

Okrąg koła, przecinający boki wielokąta, wyznacza na każdym CZTERY *odcinki takie, że wieloczyn* DWOJANÓW *stosunków odcinkowych równa się jedności dodatnej.*



Jakoż, mamy: $\frac{Aa\,.\,Aa'}{Ad\,.\,Ad'}=1$, $\frac{Bb\,.\,Bb'}{Ba\,.\,Ba'}=1$,

$$\frac{Cc\,.\,Cc'}{Cb\,.\,Cb'}=1,\qquad \frac{Dd\,.\,Dd'}{Dc\,.\,Dc'}=1.$$

Ztąd, mnożąc, otrzymujemy

$$\frac{aA \,.\, a'A}{aB \,.\, a'B} \times \frac{bB \,.\, b'B}{bC \,.\, b'C} \times \frac{cC \,.\, c'C}{cD \,.\, c'D} \times \frac{dD \,.\, d'D}{dA \,.\, d'A} = 1.$$

Ten wieloczyn jest dodatny, bo stosunki odcinkowe idą dwojanami dodatnemi.

PODOBIEŃSTWO FIGUR W OGÓLNOŚCI.

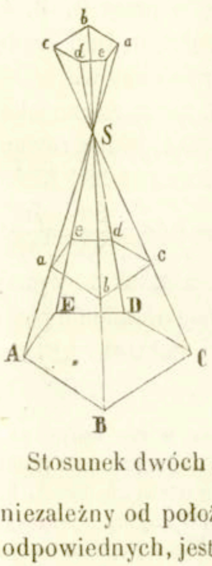
FIGURY JEDNOKŁADNE.

TWIERDZENIE XXXIV.

Jeśli połączymy punkt S, *płaszczyzny wielokąta* ABCDE, *z jego wierzchołkami, i na promieniach* SA, SB, SC... *albo na ich przedłużeniach, weźmiemy punkta* a, b, c,... *tak żeby było*

$$\frac{Sa}{SA} = \frac{Sb}{SB} = \frac{Sc}{SC} = \ldots = k, \quad (k \text{ liczba dana})$$

wielokąt abcde będzie podobny wielokątowi ABCDE.



Jakoż, boki odpowiedne ab i AB, bc i BC, etc. są równoległe (1, *wz.*); zatem

$$\frac{ab}{AB} = \frac{Sb}{SB} = \frac{bc}{BC} = \ldots = k, \quad \text{i kąty} \quad b = B,$$

$c = C$, etc.

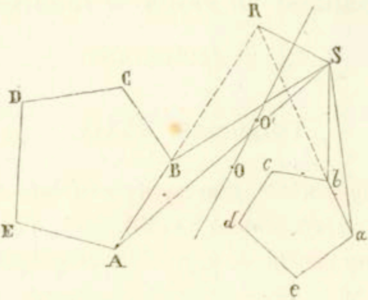
Więc dwa wielokąty *abcde*, ABCDE, mające boki proporcyonalne i kąty między niemi zawarte równe, są podobne.

OKREŚLENIE VI. — Linie SA i Sa, SB i Sb,... nazywają się *promieniami wodzącemi odpowiednemi* punktów A i a, B i b,... a punkt S *środkiem podobieństwa* dwóch wielokątów.

Stosunek dwóch promieni wodzących *odpowiednych*, np. $\frac{Sa}{SA}$, niezależny od położenia punktu S jako równy stosunkowi boków odpowiednych, jest stosunkiem podobieństwa. Ten stosunek jest *dodatny* albo *odjemny*, według jak dwa promienie odpowiedne idą oba w jedną stronę albo oba w strony przeciwne.

Twierdzenie XXXV.

Dwa wielokąty podobne na jednej płaszczyźnie, których boki są ustawione w tym samym porządku (*), *mają środek podobieństwa.*

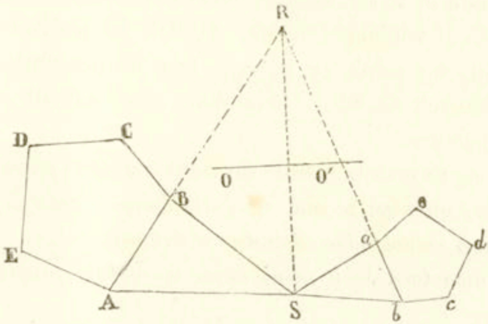


Niech będą dwa wielokąty podobne ABCDE, *abcde*, w których dwa boki odpowiedne AB, *ab* spotykają się w punkcie R. Jeśli przez punkta R, A, *a* poprowadzimy koło O, a przez R, B, *b* koło O'; punkt S, symetryczny punktu R względem linii środków OO', będzie środkiem podobieństwa tych wielokątów.

Jakoż, połączmy SA, SB, S*a*, S*b*. Kąty SAB, S*ab* są równe jako wpisane w ten sam odcinek RA*a*S koła; kąty SBA, S*ba* są równe jako spełnienia kątów RBS, R*b*S wpisanych w ten sam odcinek RB*b*S koła. Zatem trójkąty SAB, S*ab* są równokątne i dają $\frac{Sa}{SA}=\frac{ab}{AB}$.
Jeśli więc obrócimy figurę S*abcd* około punktu S, tak żeby promień S*a* padł na odpowiedny SA; wszystkie inne promienie pierwszej figury padną na odpowiedne drugiej, i boki *ab* i AB, *bc* i BC, etc. będą równoległe.

(*) Aby określić co znaczy wyrażenie « boki ustawione w tym samym porządku » wyobraźmy sobie że widz, stojący wewnątrz wielokąta, patrzy na punkt ruchomy, który przebiega obwód w porządku alfabetycznym wierzchołków A, B, C.... albo a, b, c.... to jest : od A do B, potem do C .... W obydwóch wielokątach ABCDE, a b c d e, ten ruch odbywa się dla widza od prawej ręki ku lewej ; otóż dlaczego mówimy że boki tych wielokątów są ustawione *w tym samym porządku* ; a zaś przeciwnie w trójkącie ABS i wielokącie ABCDE, boki są ustawione *w porządku odwrotnym*.

Więc punkt S jest środkiem podobieństwa dwóch wielokątów *abcde*, ABCDE, i z tego punktu S widać dwa boki odpowiedne pod tym samym kątem.



Dwa wielokąty podobne ABCDE, *abcde* mogą mieć boki odpowiedne skierowane w strony przeciwne, jako AB, *ab*, ale w tym samym porządku ustawione. Jeśli zrobimy wykreślenie jako wyżej, znajdziemy środek podobieństwa S tych wielokątów. Jakoż, kąty SAB, S*ab*, mające za miarę połowę łuku R*a*S, są równe; tak samo kąty SBA, S*ba*, mające za miarę połowę łuku RBS są także równe. Zatem trójkąty SAB, S*ab* są równokątne i dają $\frac{Sa}{SA} = \frac{ab}{AB}$. Jeśli więc obrócimy figurę S*abcde* około punktu S, tak żeby promień S*a*, był przedłużeniem odpowiednego promienia SA, wszystkie inne promienie będą przedłużeniami swoich odpowiednych, i boki odpowiedne będą równoległe między sobą. A jeśli obrócimy figurę S*abcde* około punktu S, tak żeby promień S*a* padł na odpowiedny SA, wtedy wszystkie inne promienie padną na swoje odpowiedne ; etc.

Gdy dwa wielokąty podobne ABCDE, *abcde* mają boki odpowiedne równoległe, wtedy środek podobieństwa jest spólnym punktem spotkania prostych A*a*, B*b*, C*c*,...; co jest szczególnym przypadkiem powyższego wykreślenia, uważając proste A*a*, B*b*,... jako łuki kół promienia nieskończenie wielkiego. Zresztą, nie trudno dowieśdź wprost tego przypadku.

Powyższe twierdzenie nie jest prawdziwe, gdy dwa wielokąty podobne mają boki odpowiedne w odwrotnym porządku ustawione, to jest gdy jeden z wielokątów jest przewrócony.

Gdy punkta a, b, c... leżą na samych promieniach wodzących SA, SB, SC,... wielokąty *abcde*, ABCDE są *podobne* i *podobnie położone*. Gdy zaś punkta a, b, c,... leżą na przedłużeniach promieni wodzących SA, SB..., wielokąty *abcde* ABCDE są *podobne* i *odwrotnie położone*.

Wyraża się to podobieństwo zarazem *kształtu* i *położenia* dwóch wielokątów, mówiąc że one są *jednokładne proste* w pierwszym przypadku, a *jednokładne odwrotne* w drugim.

Zatem, *dwa wielokąty jednokładne mają boki proporcyonalne i równoległe*.

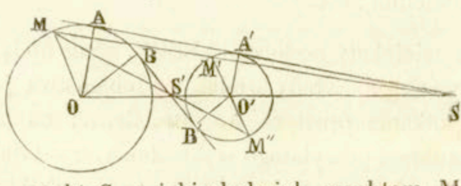
Zogólniając jednokładność, mówi się że powyższy układ punktów a, b, c... jest jednokładny do układu A, B, C...

Z tego określenia wynika oczywiście że, według jak punkta układu A, B, C... są osobne, albo tworzą linie ciągłe, punkta układu jednokładnego a, b, c... są także osobne, albo tworzą linie ciągłe.

Dwa układy punktów, a ogólnie dwie figury, są *jednokładne proste* albo *jednokładne odwrotne*, według jak stosunek jednokładności $\dfrac{Sa}{SA}$ jest *dodatny* albo *odjemny*.

Gdy dwie figury są jednokładne odwrotne, dość jest dać jednej z nich pół obrotu około środka jednokładności S, aby ją uczynić wprost jednokładną do drugiej.

Jako przykład, szukajmy figury jednokładnej do okręgu OA, biorąc punkt S za środek podobieństwa.



Połączmy punkt S z jakimkolwiek punktem M okręgu O, i weźmy na promieniu SM punkt M′ taki żeby było $\dfrac{SM'}{SM} = k$;

po czem, poprowadzimy prostę M'O' równoległą do MO, która przetnie SO w punkcie O'.

Dwa trójkąty podobne SO'M', SOM dają

$$\frac{SO'}{SO} = \frac{O'M'}{OM} = k.$$

Co dowodzi że punkt O' nie zależy od kierunku promienia OM, i że długość O'M' jest stała. Ztąd wnosimy że miejscem geometrycznem punkta M' jest okrąg mający środek w punkcie O'.

Gdyby wzięto punkt S' za środek podobieństwa i poprowadzono prostę O'M'' równoległą do OA, tak żeby było $\frac{O'M'}{OA} = k$, znalezionoby ten sam okrąg O'.

Więc *figurą jednokładną do okręgu jest okrąg.*

Wniosek. — Ztąd wynika że *dwa okręgi są zarazem jednokładne proste i odwrotne.*

Twierdzenie XXXVI.

W dwóch figurach jednokładnych, dwie proste odpowiedne są równoległe i w stosunku podobieństwa (fig. tw. XXXIV).

Jakoż, dwie proste odpowiedne *np. ab*, ACB, dzieląc promienie odpowiedne SA, SB w stosunku podobieństwa k, są równoległe, i dają

$$\frac{AC}{ac} = \frac{Sa}{SA} = k.$$

Wniosek. — Jeśli trzy punkta jednej figury są w linii prostej, trzy punkta odpowiedne figury jednokładnej są także w linii prostej; albo innemi słowy, *figurą jednokładną do linii prostej jest linia równoległa odpowiedna.*

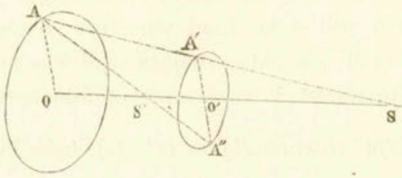
Zatem, jeśli jedna prosta przechodzi przez środek podobieństwa, jej odpowiedna przechodzi także i do niej przystaje.

Kąt dwóch linij równa się kątowi linij jednokładnych,

Styczne w punktach odpowiednych, dwóch krzywych jednokładnych, są równoległe jako granice siecznych równoległych.

Twierdzenie XXXVII.

Dwie figury są jednokładne, jeśli na ich płaszczyźnie istnieją dwa punkta O, O' *takie, że proste które łączą puukt* O *z różnemi punktami pierwszej figury, i proste które łączą punkt* O' *z punktami drugiej, są równoległe i w tym samym stosunku.*



Jakoż, niech będą dwie figury O, O'; jeśli proste OA, O'A' są równoległe i w tę samą stronę skierowane, prosta AA' przetnie przedłużenie linii OO' w punkcie S, i będzie

$$\frac{SO'}{SO} = \frac{SA'}{SA} = \frac{O'A}{OA} = k$$

To pokazuje że, jakikolwiek wzięto dwojan punktów odpowiednych A, A', punkt S zostaje niezmienny na linii OO'. Więc dwie figury O i O' są jednokładne proste i mają punkt S za środek podobieństwa.

Jeśli zaś proste OA i O'A'' dwóch figur O, O' są równoległe ale skierowane w strony przeciwne, wtedy prosta AA'' spotyka linię OO' w punkcie S' między O i O', i daje

$$\frac{S'O'}{S'O} = \frac{S'A''}{S'A} = \frac{O'A''}{OA} = k$$

Więc, w tym razie, dwie figury O i O' są jednokładne odwrotne, i mają punkt S' za środek podobieństwa.

Twierdzenie XXXVIII.

Jeśli dwie figury mające środki są jednokładne proste, to one są także jednokładne odwrotne.

Niech będą dwie figury jednokładne proste (*fig. poprzednia*), wktórych są: O i O' środki, A i A' dwojan punktów odpowiednych, S środek jednokładności prostej. Punkt S leży na linii środków OO′, bo te środki O, O′ są punktami odpowiednemi dwóch figur. Jeśli więc na przedłużeniu promienia O′A′ weźmiemy długość O′A″ równą O′A′, punkt A″ będzie należał do figury O′A′, ponieważ punkt O′ jest środkiem tej figury. Owoż $\frac{O'A'}{OA}=k$,

zatem
$$\frac{O'A'}{OA}=k=\frac{S'A''}{S'A}.$$

Więc dwie figury OA, O′A′ są jednokładne odwrotne, mające punkt S′ za środek jednokładności odwrotnej.

Nawzajem, *dwie figury mają środki, jeśli są zarazem jednokładne proste i jednokładne odwrotne.*

Jakoż, przez punkt A jednej figury, i przez oba środki jednokładności S, S′, poprowadźmy proste AS, AS′, które wyznaczą na drugiej figurze dwa punkta A′ i A″ odpowiedne punktowi A; jeśli więc połączymy A′A″, i przez A poprowadzimy prostę AO, równoległą do A′A″, te dwie proste przetną SS′ w punktach O i O′ które będą środkami dwóch figur. Albowiem

$$\frac{OA'}{OA}=\frac{SA'}{SA}=k \quad \text{i} \quad \frac{O'A''}{AO}=\frac{S'A''}{S'A}=k;$$

zkąd
$$\frac{OA'}{OA}=\frac{O'A''}{OA} \quad \text{albo } O'A'=O'A''.$$

Więc punkt O′, który przecina na dwie równe części wszelką cięciwę A′A″ przezeń przechodzącą, jest środkiem figury O′A′. Dla tej samej przyczyny punkt O jest środkiem figury OA.

Wniosek I.—Dwa środki jednokładności S, S′ dzielą harmonicznie linię środków OO′. Jakoż, $\frac{SA'}{SA}=k=\frac{SO'}{SO}$ i $\frac{S'A''}{S'A}=k=\frac{S'O'}{S'O}$;

więc
$$\frac{S'O'}{S'O}=\frac{SO'}{SO}.$$

II. — Styczne spólne zewnętrzne dwóch kół przechodzą przez środek jednokładności prostej, a styczne spólne wewnętrzne przez środek jednokładności odwrotnej.

Gdy dwa koła są styczne, punkta zetknięcia są środkami jednokładności prostej albo odwrotnej, według jak zetknięcie jest zewnętrzne albo wewnętrzne.

Twierdzenie XXXIX.

Dwie figury F, F′ *jednokładne do trzeciej* F″ *są jednokładne między sobą.*

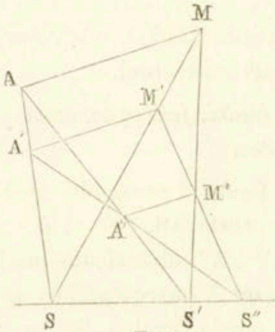


Fig 1

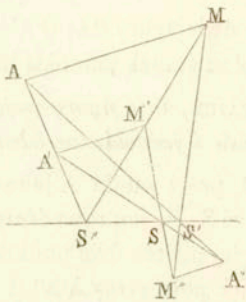


Fig 2

Połączmy punkt A figury F z jakimkolwiek jej punktem M, i tak samo na figurach F′, F″ połączmy punkta A′ i M′, A″ i M″, odpowiedne punktom A i M. Ponieważ figury F′ i F są jednokładne, linie odpowiedne A′M′ i AM są równoległe i w stosunku jednokładności k'', to jest $\frac{A'M'}{AM} = k''$. Tak samo, z przyczyny jednokładności figur F″ i F, linie odpowiedne A″M″ i AM są równoległe i w stosunku jednokładności k', to jest $\frac{A''M''}{AM} = k'$. Zatem proste A′M′ i A″M″ są równoległe i w stosunku stałym $\frac{k''}{k'}$. Więc figury F′ i F″ są jednokładne (37).

Uwaga. — Powyższe układy figur jasno pokazują że dwie figury F, F′, obie jednokładne proste do trzeciej F″ (fig. 1), albo obie jednokładne odwrotne do F″ (fig. 2), są jednokładne proste; a zaś dwie figury F′, F″ (fig. 2), pierwsza jednokładna prosta do F druga jednokładna odwrotna do F, są jednokładne odwrotne. Ztąd wynika że, mając dane trzy figury jednokładne, między trzema układami które z nich utworzyć można, biorąc po dwie, jest zawsze *jeden* albo *trzy* układy jednokładności prostej, a dwa układy, albo żaden, jedności odwrotnej.

TWIERDZENIE XL.

Trzy środki jednokładności S, S′, S″, *trzech figur jednokładnych po dwie, są w linii prostej.*

Jakoż, linia prosta S′S″ (*fig, jako wyżej*), należąc do figury F, ma za odpowiedną w figurze F′ siebie samą; bo przechodzi przez środek jednkładności S″ figur F i F′ (36 *wn.*). Owoż, ta sama prosta S′S″, ma za odpowiedną w figurze F″ także siebie samą; bo przechodzi przez środek jednokładności S′ figur F i F″. Więc prosta S′S″, będąc spółną figurom F′ i F″, przechodzi przez ich środek jednokładności S. Więc trzy środki jednokładności S, S′, S″ są w linii prostej.

WNIOSEK. — Trzy koła, a ogólnie trzy układy jednokładne ze środkami, uważane po dwa, mają trzy środki jednokładności prostej i trzy środki jednokładności odwrotnej.

Te trzy środki jednokładności prostej leżą na jednej linii prostej, która się nazywa *osią jednokładności prostej*; a zaś dwa środki jednokładności odwrotnej i środek jednokładności prostej, odpowiedający trzeciemu środkowi jednokładności odwrotnej, leżą także na jednej linii prostej, która się nazywa *osią jednokładności odwrotnej*. Jest więc *jedna* oś jednokładności prostej, i *trzy* osie jednokładności odwrotnej.

OGÓLNE OKREŚLENIE PODOBIEŃSTWA. — Widzieliśmy że dwa wielokąty jednokładne są podobne; i nawzajem, dwa wielokąty podobne mogą wziąć położenie jednokładne. Trzeba wszakże uważać że, gdy jeden z tych wielokątów jest przewrócony, można go, pół obrotem około jednego z boków, odwrócić na drugą stronę i potem dać położenie jednokładne do drugiego wielokąta. Nadto, określenie jednokładności stosuje się oczywiście do linij krzywych. To wszystko łatwo prowadzi do następującego, ogólnego określenia podobieństwa :

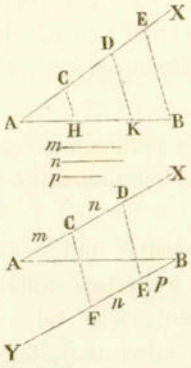
Jedna figura jest podobna drugiej, gdy jest równa jednej z figur jednokładnych do tej drugiej.

Zatem idzie że *środek podobieństwa*, *stosunek podobieństwa* i *oś podobieństwa* są to samo, chociaż mniej logicznie, co środek jednokładności, stosunek jednokładności i oś jednokładności.

ZAGADNIENIA KSIĘGI TRZECIEJ.

ZAGADNIENIE I.

Podzielić linię prostą AB *na części proporcyonalne do danych linij* m, n, p; *albo na części równe.*



1° *Rozwiązanie.* — Przez skrajność A prostej AB, poprowadź dowolną prostę AX, na której weź długości: AC $= m$, CD $= n$, i DE $= p$. Połącz BE, i, przez punkta C, D, poprowadź, równolegle do BE, proste CH, DK, które podzielą AB na części proporcyonalne do linij danych m, n, p (I, *wn.* 2).

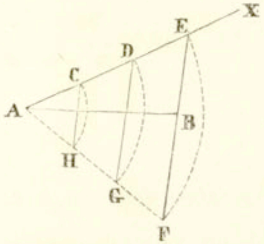
2° *Rozwiązanie.* — Przez skrajności A i B danej prostej AB, poprowadź dwie równoległe dowolne AX i BY. Weź na AX odcinki AC$=m$, i CD $= n$; a na BY, odcinki BE$=p$, i EF $= n$. Poprowadź proste DE, CF, które podzielą AB na części proporcyonalne do linij m, n, p.

UWAGA. Drugi sposób wymaga jednej tylko równoległej BY do AX, dlatego może być często dogodniejszy od pierwszego.

Powyższe wykreślenia dają sposób dzielenia linii prostej na części równe *np.* na *trzy*; albowiem dość przypuścić $m = n = p$, to jest wziąć na prostej dowolnej AX odcinki równe AC$=$CD$=$DE.

Poprowadziwszy równoległę DK do EB, uważajmy że wtedy DE jest trzecią częścią linii AE; więc BK jest *trzecią* częścią danej linii AB. Jeśli tedy weśmiemy KH równe BK, punkta K, H podzielą AB na *trzy* równe części.

Oto jeszcze, między wieloma, dogodny sposób dzielenia danej prostej na części równe, *np.* na *trzy*.

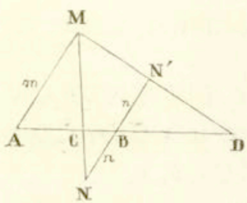


Przez skrajność A danej prostej AB, poprowadź prostę AX, i weź na niej trzy odcinki równe $AC = CD = DE$. Połącz BE, i z punktu A jako środka, promieniem AE, nakreśl łuk koła EF który przetnie prostę BE w punkcie F, przypuszczając że $AE > AB$. Po czem połącz AF, i z punktu A jako środka promieniami AD, AC, nakreśl łuki kół które przetną prostę AF w punktach G, H.

Nakoniec poprowadź cięciwy DG, CH które, oczywiście równoległe do EF, podzielą prostę AB na trzy równe części.

Zagadnienie II.

Podzielić prostę AB *harmonicznie w stosunku* m *do* n.



Przez skrajności A i B danej prostej, poprowadź dwie jakiekolwiek równoległe AM i BN; weź na pierwszej długość $AM = m$ a na drugiej długości $BN = BN' = n$. (Możnaby nawet wziąć odcinki AM i BN, BN′, nie równe ale tylko proporcyonalne do m i n.) Nakoniec poprowadź proste MN i MN′; te linie przetną prostę AB w punktach C i D które ją podzielą harmonicznie.

Jakoż, trójkąty podobne ACM i BCN, ADM BDN dają

$$\frac{CA}{CB}=\frac{AM}{BN}=\frac{m}{n}, \text{ i } \frac{DA}{DB}=\frac{AM}{BN'}=\frac{m}{n}; \text{ więc } \frac{CA}{CB}=\frac{DA}{DB}=\frac{m}{n}.$$

Uwaga. Powyższe wykreślenie może służyć do *wyznaczenia czwartego punktu harmonicznego, gdy trzy inne są dane.*

Można wyrazić każdy z odcinków w funkcyi długości $AB = a$ i liczb m i n. Jakoż, mamy

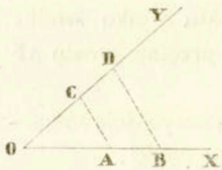
$$\frac{CA}{m}=\frac{CB}{n}=\frac{a}{m+n}; \qquad \text{ztąd} \qquad CA=\frac{ma}{m+n} \qquad \text{i} \qquad CB=\frac{na}{m+n}.$$

Tak samo, $\frac{DA}{m} = \frac{DB}{n} = \frac{a}{m-n}$, przypuszczając $m > n$,

więc $DA = \frac{ma}{m-n}$, $DB = \frac{na}{m-n}$; zkąd $CD = \frac{2mna}{m^2 - n^2}$.

ZAGADNIENIE III.

Znaleźć czwartą proporcyonalną do trzech prostych danych a, b, c.



Zrób kąt jakikolwiek XOY; na jednem ramieniu OX, weź $OA = a$ i $OB = b$; a na drugiem, $OC = c$: połącz punkta A i C linii skrajnej i średniej, i poprowadź równoległę BD do AC. Prosta OD będzie czwartą proporcyonalną żądaną; bo

$$\frac{OA}{OB} = \frac{OC}{OD} \quad \text{czyli} \quad \frac{a}{b} = \frac{c}{x}.$$

Zkąd
$$x = \frac{bc}{a}.$$

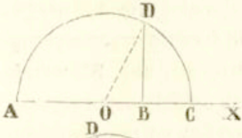
UWAGA. — Gdy dwie linie średnie b i c są równe, mamy $\frac{a}{b} = \frac{b}{x}$; zkąd $x = \frac{b^2}{a}$. Wtedy prosta szukana nazywa się *trzecią proporcyonalną do dwóch prostych* a, b, i jest ta sama co czwarta proporcyonalna do trzech prostych a, b, b.

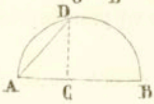
II. Można, za pomocą czwartych proporcyonalnych, znaleźć wartość niewiadomej $x = \frac{abcd}{a'b'c'}$, wiedząc że a, b, c, d, a', b', c' oznaczają linie proste. Jakoż, uczyńmy $\frac{ab}{a'} = \alpha$, i $\frac{\alpha c}{b'} = \beta$; wyznaczywszy czwarte proporcyonalne α i β, sposobem już znanym, otrzymamy wartość $x = \frac{\beta d}{c'}$. która jest także czwartą proporcyonalną do β, α, d.

ZAGADNIENIE IV.

Znaleźć średnię proporcyonalną między danemi prostemi a *i* b.

1° *Wykreślenie.* — Na prostej nieograniczonej AX, weź $AB = a$



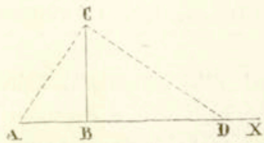


i BC$=b$; na summie AC jako średnicy, nakreśl półokrąg ACD, i z punktu B wyprowadź, do średnicy, prostopadłę BD która spotka okrąg w D. Prosta BD będzie średnią proporcyonalną szukaną (17).

2° *Wykreślewie.* — Na prostej AB, równej większej a z dwóch danych, nakreśl półokrąg ABD; weź AC $= b$, wyprowadź prostopadłę CD do AB, i połącz AD. Cięciwa AD będzie średnią proporcyonalną między a i b (17. wn.).

3° *Wykreślenie.* — Na prostej nieograniczonej AX, weź AB$=a$ i AC$=b$; na ich różnicy BC jako średnicy, nakreśl półokrąg BCD, i z punktu A poprowadź styczną AD kóra będzie średnią proporcyonalną szukaną (23. *wn.*).

Używa się dwóch ostatnich wykreśleń wtedy zwłaszcza gdy dwie dane proste a i b są wielkie.



Dobrze będzie uważać że twierdzenia, które dały wykreślenie średniej proporcyonalnej, mogą służyć do znalezienia trzeciej proporcyonalnej.

I tak, jeśli chcemy otrzymać trzecią proporcyonalną do dwóch prostych a i b, dość jest, na prostej nieograniczonej AX, wziąć długość AB $= a$, wyprokadzić z punktu B prostopadłę BC $= b$, połączyć AC, i z punktu C wyprowadzić do AC prostopadłę CD która przetnie AX w punkcie D. Linia BD będzie trzecią proporcyonalną szukaną. Jakoż, w trójkącie prostokątnym ACD,

$$\overline{BC}^2 = AB\,.\,BD; \quad \text{więc} \quad BD = \frac{b^2}{a}\cdot$$

Jeśli $a > b$, można otrzymać trzecią proporcyonalną sposobem następującym, który często jest użyteczny. Na prostej AB jako średnicy (*fig. wykreśl.* 2°), nakreśl półokrąg, z punktu A jako środka, promieniem AD$=b$, nakreśl łuk koła który przetnie półokrąg w punkcie D; nakoniec spuść prostopadłę DC na AB; prosta AC będzie oczywiście linią szukaną.

Uwaga. — Średnia proporcyonalna między dwiema liniami prostemi nazywa się *średnią geometryczną*, połowa summy tych linij *średnią arytmetyczną*.

Owoż, w trójkącie prostokątnym BDO (*fig. pierwsza*), bok BD wyraża średnię geometryczną dwóch prostych a i b, OD ich średnię arytmetyczną, BO połowę różnicy tych linij. A że bok BD jest mniejszy od przeciwprostokątnej OD, więc

Srednia geometryczna dwóch linij prostych albo dwóch liczb, jest mniejsza od ich średniej arytmetycznej,

to jest
$$\sqrt{ab} < \frac{a+b}{2}.$$

Trójkąt BDO pokazuje że te dwie średnie, geometryczna i arytmetyczna, nie mogą być równe tylko wtedy gdy bok BO czyli $\frac{a-b}{2}$ jest zero, to jest gdy $a = b$.

Jest więcej jeszcze. Trójkąt BDO daje

$$\overline{OD}^2 = \overline{BD}^2 + \overline{BO}^2, \qquad \text{albo} \qquad \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = ab + \left(\frac{a-b}{2}\right)^2.$$

To równanie, które jest *tosamością*, dowodzi dwóch ważnych twierdzeń:

Wieloczyn dwóch ilości a i *b, tego samego znaku*, które czynią summę stałą, *jest maximum gdy te ilości są równe*, albo *gdy tylko ich różnica jest minimum jeśli równe być nie mogą*.

Nawzajem, *summa dwóch ilości, dodatnych albo odjemnych*, które czynią wieloczyn stały, *jest minimum w pierwszym razie a maximum w drugim, gdy te ilości są równe, albo gdy tylko ich różnica jest minimum jeśli równe być nie mogą* (*).

Można łatwo widzieć od czego jest mniejsza różnica między średnią arytmetyczną i średnią geometryczną. Jakoż, trójkąt BDO daje

$$\overline{OD}^2 - \overline{BD}^2 = \overline{BO}^2 \qquad \text{albo} \qquad (OD + BD)(OD - BD) = \overline{BO}^2$$

(*) Na zastosowanie dajemy twierdzenie które należy do księgi IV.

Ze wszystkich trójkątów równowartych, mających ten sam kąt przy wierzchołku, trójkąt równoramienny ma obwód minimum.

Ponieważ te trójkąty są równowarte wieloczyn pr jest stały; więc summa $p + r$ jest minimum jeśli różnica $p - r$ jest minimum, albowiem p i r nie mogą być równe. Owóż, figura stronicy 81 jasno pokazuje że, w miarę jak trójkąt danej powierzchni zbliża się do równoramiennego, r rośnie a zaś p maleje; zatem $p - r$ maleje aż do minimum. Więc gdy trójkąt równowarty danemu staje się równoramiennym jego obwód $2p$ jest minimum.

ztąd $$\mathrm{OD} - \mathrm{BD} = \frac{\overline{\mathrm{BO}}^2}{\mathrm{OD} + \mathrm{BD}}.$$

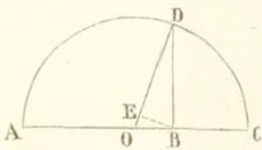
Owoż $\mathrm{OD} > \mathrm{BD}$, więc $$\mathrm{OD} - \mathrm{BD} < \frac{(a-b)^2}{8\sqrt{ab}};$$

więc tem bardziej $$\mathrm{OD} - \mathrm{BD} < \frac{(a-b)^2}{8b}.$$

Co dowodzi że, *biorąc średnię arytmetyczną zamiast średniej geometrycznej dwóch liczb, popełnia się błąd mniejszy od kwadratu różnicy tych liczb podzielonego przez osiem razy mniejszą z nich.*

Zagadnienie V.

Znaleźć średnię harmoniczną dwóch prostych danych a, b.



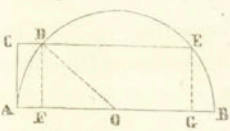
Na linii prostej nieograniczonej weź $\mathrm{AB} = a$, i $\mathrm{BC} = b$; nakreśl średnię geometryczną BD i średnię arytmetyczną OD tych linij, po czem spuść prostopadłę BE na OD; prosta DE będzie średnią harmoniczną żądaną.

Bo, w trójkącie prostokątnym BDO, $$\mathrm{DE} = \frac{\overline{\mathrm{DB}}^2}{\mathrm{DO}} = \frac{2ab}{a+b}.$$

Uwaga. — Figura pokazuje oczywiście że średnia proporcyonalna BD dwóch ilości a i b jest średnią proporcyonalną między średnią arytmetyczną AO i średnią harmoniczną DE tych ilości.

Zagadnienie VI.

Wykreślić dwie linie proste których summa i wieloczyn są dane.



Niech będzie prosta AB równa summie a dwóch prostych szukanych, których średnią proporcyonalną jest dana prosta b. Jeśli na AB jako średnicy, nakreślimy półokrąg i poprowadzimy: przez punkt A, prostopadłę AC do AB równą prostej b, a przez punkt C sieczną CE równoległą do AB i przecinającą półokrąg w punktach C, D; odcinki CD i CE tej siecznej będą dwiema liniami szukanemi.

Jakoż, wieloczyn CD . CE równa się kwadratowi stycznej AC; więc CD . CE $= b^2$. Aby dowieśdź że summa tych dwóch odcinków jest równa danej linii a, spuśćmy prostopadłe DF i EG na AB; będzie oczywiście

$$CD = AF = BG \text{ i } CE = AG; \text{ więc } CD + CE = AB = a.$$

Zagadnienie ma tylko jedno rozwiązanie; jego możebność wymaga żeby prosta AC, czyli dana b, nie przewyższała $\frac{1}{2}a$. Gdy AC dosięga wartości maximum $\frac{1}{2}$AB, wtedy sieczna CE staje się styczną do półokręgu, i odcinki CD, CE są równe.

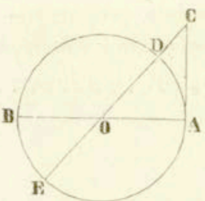
UWAGA. — Można łatwo wyrazić algebrycznie wartości odcinków CD i CE. Jakoż, $CD = OA - OF$, $CE = OA + OF$;

a że $$OF = \sqrt{\overline{DO}^2 - \overline{DF}^2} = \sqrt{\frac{a^2}{4} - b^2}$$

więc $$CD = \frac{a + \sqrt{a^2 - 4b^2}}{2} \qquad CE = \frac{a - \sqrt{a^2 - 4b^2}}{2}$$

ZAGADNIENIE VII.

Wykreślić dwie proste których różnica i wieloczyn są wiadome.



Niech będzie prosta AB równa różnicy a dwóch prostych szukanych, b ich średnia proporcyonalna. Jeśli na AB jako średnicy, nakreślimy koło, i z punktu A wyprowadzimy styczną AC równą prostej b, a potem poprowadzimy, przez punkt C i przez środek O, sieczną CDE która przetnie to koło w punktach D i E; odcinki CD i CE tej siecznej będą dwiema liniami szukanemi.

Jakoż, różnica odcinków CE i CD jest równa średnicy DE albo AB, a ich wieloczyn kwadratowi $\overline{AC}^2$ albo $\overline{b}^2$.

Zagadnienie jest zawsze możebne.

UWAGA. — Znajdzie się wyrażenie algebryczne dwóch odcinków

CD i CE, uważając że $CD = OC - OA$, a $CE = OC + OA$. Owoż,

$$OC = \sqrt{\overline{OA}^2 + \overline{AC}^2} = \sqrt{\frac{a^2}{4} + b^2};$$

więc $CD = \sqrt{\frac{a^2}{4} + b^2} - \frac{a}{2}$, $CE = \sqrt{\frac{a^2}{4} + b^2} + \frac{a}{2}$.

Uwaga ogólna. Równanie stopnia 2°, jeśli wyrazimy znaki spółczynników bierze cztery następujące kształty :

$$x^2 + px + q = 0 \quad (1), \qquad x^2 - px - q = 0 \quad (2),$$
$$x^2 - px + q = 0 \quad (3), \qquad x^2 + px - q = 0 \quad (4).$$

Owoż, zamieniając x na $-x$, dwa pierwsze równania wchodzą we dwa ostatnie ; więc dość uważać te ostatnie tylko.

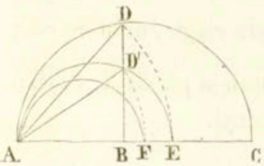
Aby te równania mogły mieć geometryczne znaczenie, trzeba żeby były *jednorodne* to jest złożone z wyrazów tego samego stopnia : co otrzymamy czyniąc $\sqrt{q} = k$: i będzie $x^2 - px + k^2 = 0$, $x^2 + px - k^2 = 0$ albo $(p - x)x = k^2$ (5) i $(x + p)x = k^2$ (6).

Równanie (5) wyraża zagadnienie : *Znaleźć dwie proste x i $p - x$ których summa p i wieloczyn k^2 są dane.* Co już umiemy.

Równanie (6) wyraża także wiadome zagadnienie : *Znaleźć dwie proste x i $p + x$ których różnica p i wieloczyn k^2 są dane.*

To pokazuje że, nie rozwiązując równania stopnia 2°, można zawsze wyznaczyć geometrycznie jego pierwiastki.

Można także za pomocą *linii prostej* i *koła* czyli liniału i cyrkla, wykreślić pierwiastek wskazu 2^k wszelkiej liczby N.



Jakoż, weźmy długość AB za *jedność*, a długość $AC = N$. Na AC jako średnicy, nakreślmy półokrąg : z punktu B wyprowadźmy prostopadłę BD do średnicy ; cięciwa AD będzie wyobrażała pierwiastek kwadratowy z N ;

bo $\overline{AD}^2 = AB \times AC = 1 \times N$, czyli $AB = \sqrt{N}$.

Weźmy teraz $AE = AD$; na średnicy AE wykreślmy półokrąg, i złączmy A z punktem pzzecięcia D′ ; cięciwa AD′ będzie wyobrażała pierwiastek kwadratowy z $\sqrt{N}$, zatem będzie pierwiastkiem *czwartym* z N,

Bo $AD' = \sqrt{AB \times AE} = \sqrt{1 \times \sqrt{N}} = \sqrt[4]{N}$.

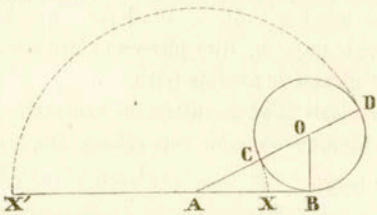
Postępując podobnie, wykreślimy pierwiastek potęgi 2^k z liczby N.

Jako widać, ten pierwiastek jest tem bliższy jedności im wykładnik k jest większy : co już zkądinąd wiadome.

Wykreślenie przypuszcza $N > 1$, ale łatwó je zmodyfikować gdy $N < 1$. Zaledwie nadmienić potrzebujemy że pierwiastki równań przywiednych do 2° stopnia, wykreślają się podobnie za pomocą liniału i cyrkla.

Zagadnienie VIII.

Podzielić linię prostą AB *w stosunku średnim i skrajnym.*



Mówi się że punkt X dzieli prostę AB w stosunku średnim i skrajnym, jesli jego odległość od jednej skrajności tej linii jest średnią proporcyonalną między odległością od drugiej skrajności i całą prostą AB.

Nazwijmy X punkt który wyznacza na prostej AB dwa odcinki AX i BX, tak żeby było

$$\frac{AB}{AX} = \frac{AX}{BX}.$$

Idąc od punktu A do B, stosunek $\frac{AB}{AX}$ maleje ciągle od ∞ do 1, a zaś stosunek $\frac{AX}{BX}$ rośnie, także ciągle, od 0 do ∞ ; to pokazuje wyraźnie że, między A i B, istnieje punkt X, i tylko jeden, który zadość czyni powyższej proporcyi.

Teraz, z tej proporcyi wynika

$$\frac{AB}{AX} = \frac{AB + AX}{AX + BX};$$

a uważając że $AX + BX = AB$, i oznaczając przez AX′ summę odcinków $AX + AB$, liczoną od punktu A, będzie

$$\frac{AB}{AX} = \frac{AX'}{AB}; \quad \text{zkąd} \quad \frac{AB + AX'}{AX'} = \frac{AX'}{AB}.$$

Ostatnia proporcya dowodzi że, z lewej strony punktu A, istnieje punkt X', i tylko jeden, którego odległość AX' jest średnią proporcyonalną między odległością BX' i całą prostą AB.

Nakoniec, z prawej strony punktu B niema żadnego punktu posiadającego wyżej rzeczoną własność; bo jego odległość od A, będąc większa od odległości od B i większa od prostej AB, nie może być średnią proporcyonalną między niemi.

Więc, na prostej AB istnieją dwa punkta X i X', i tylko dwa, które rozwiązują zagadnienie. Jeden z tych punktów jest między A i B, a drugi z lewej strony punktu A albo z prawej strony punktu B, według jak odcinek średni liczy się od A albo od B.

Teraz, dla wyznaczenia punktów X i X', uważajmy proporcyę

$$\frac{AB}{AX}=\frac{AX'}{AB} \qquad \text{która daje} \qquad AX.AX'=\overline{AB}^2.$$

To równanie pokazuje że, aby otrzymać punkta X i X', trzeba znaleźć dwie proste AX i AX' czyli AX i AB + AX, których różnica AB i wieloczyn $\overline{AB}^2$ są wiadome; co właśnie stanowi zagadnienie już rozwiązane. Ztąd następujące wykreślenie.

Ze skrajności B danej prostej AB, wyprowadź prostopadłę BO równą połowie tej prostej, i połącz AO; potem, z punktu O jako środka, promieniem OB, nakreśl okrąg który przetnie linię AO w punktach C i D; odcinek AC będzie równy niewiadomej AX a odcinek AD niewiadomej AX'; nakoniec, z punktu A jako środka, promieniami AC i AD, nakreśl łuki kół które przetną linię AB w punktach szukanych X i X'.

Uwaga I. — Nazywając a długość prostej AB, mamy

$$OB=\frac{a}{2}, \quad \text{i} \quad AO=\sqrt{a^2+\frac{a^2}{4}}=\frac{a}{2}\sqrt{5}.$$

Zatem $$AX=\frac{a}{2}\sqrt{5}-\frac{a}{2}=\frac{a}{2}(\sqrt{5}-1), \quad \text{i} \quad AX'=\frac{a}{2}(\sqrt{5}+1).$$

Dobrze jest także znać wyrażenie odcinków skrajnych,

$$BX=\frac{a}{2}(3-\sqrt{5}) \quad \text{i} \quad BX'=\frac{a}{2}(3+\sqrt{5}).$$

II. — Można rozwiązać algebrycznie powyższe zagadnienie. Jakoż, oznacząjąc przez a daną prostę AB, przez x szukany odcinek średni, powinno być

$$\frac{a}{x}=\frac{x}{a-x}; \qquad \text{zkąd} \qquad x^2+ax-a^2=0.$$

Rozwiązując to równanie 2° stopnia, znajdujemy

$$x=-\frac{a}{2}\pm\sqrt{\frac{a^2}{4}+a^2}$$

Owoż, uważając że pierwiastnik $\sqrt{\frac{a^2}{4}+a^2}$ wyraża przeciwprostokątnę trójkąta prostokątnego, w którym bokami kąta prostego są $\frac{a}{2}$ i a, widzimy łatwo że pierwszy pierwiastek $x=\sqrt{\frac{a^2}{4}+a^2}-\frac{a}{2}$, oznacza szukany odcinek średni AX, i prowadzi właśnie do tego samego wykreślenia które daje geometrya.

Drugi pierwiastek $x=-\frac{a}{2}-\sqrt{\frac{a^2}{4}+a^2}$ jest odjemny. Aby wiedzieć co on znaczy, zamieńmy x na $-x$ w powyższem równaniu, które stanie się

$$x^2-ax-a^2=0 \qquad \text{i da} \qquad x=\frac{a}{2}\pm\sqrt{\frac{a^2}{4}+a^2}.$$

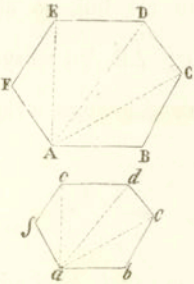
Ztąd wnosimy że wartość algebryczna $-\frac{a}{2}-\sqrt{\frac{a^2}{4}+a^2}$ drugiego pierwiastku pierwszego równania wyraża odcinek AX′, który właśnie ma kierunek w stronę przeciwną odcinka AX. Co także wskazuje geometrya.

Ten przykład jest jednym z niezaprzeczalnych dowodów że algebra i geometrya uzupełniają się nawzajem, i dlatego powinny być uprawiane nierozdzielnie.

Zagadnienie IX.

Na danym boku zbudować trójkąt podobny danemu, albo wielokąt podobny danemu wielokątowi.

1° Aby na prostej *ab*, jako boku odpowiednym bokowi AB,



zbudować trójkąt podobny danemu ABC, zrób kąt *bac* równy kątowi BAC, i kąt *abc* równy ABC. Trójkąty *abc* i ABC będą podobne jako równokątne między sobą.

2° Niech będzie do zbudowania, na prostej *ab*, wielokąt podobny wielokątowi ABCDEF. Przypuszczając że prosta *ab* ma być bokiem odpowiednym bokowi AB, rozłóż na trójkąty wielokąt ABCDEF, prowadząc przekątne, jako AC, AD... To zrobiwszy, zbuduj na *ab* trójkąt *abc* podobny trójkątowi ABC; potem na *ac* trójkąt *acd* podobny trójkątowi ACD; i tak dalej; nakoniec na *ae* trójkąt *aef* podobny trójkątowi AEF. Wielokąt *abcdef* będzie podobny wielokątowi ABCDEF; bo oba składają się z jednej liczby trójkątów podobnych i podobnie ustawionych (12).

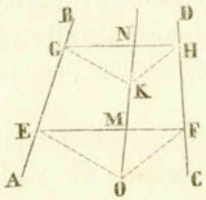
Następujące wykreślenie jest dogodniejsze. Przy skrajności *b* danego boku *ab*, który ma być odpowiedny bokowi AB wielokąta ABCDEF, zrób kąt *abc* = B, i weź bok *bc* równy czwartej proporcyonalnej do boków AB, *ab*, BC. Przy wierzchołku *c*, zrób kąt *bcd* = C, i weź bok *cd* równy czwartej proporcyonalnej do boków AB, *ab*, CD. I tak następnie, aż do przedostatniego wierzchołka *e*, gdzie weź tylko boki *ef* i *af*, równe czwartym proporcyonalnym do boków AB, *ab*, EF, i do AB, *ab*, AF; i z wierzchołków *e* i *a* jako środków, promieniami *ef* i *af* nakreśl łuki kół które się przetną w punkcie *f*. Wielokąty ABCDEF, *abcdef* będą podobne (25).

Uwaga. — Te czwarte proporcyonalne kreślą się łatwo odrazu. Zrób kąt przyzwoity A; na jedno ramie ponieś boki wielokąta danego, AB, BC, CD..., a na drugiem weź AN = *ab*. Poprowadź prostę BN i do niej równoległe CP, DQ, ER... Odcinki NP, PQ, QR... będą odpowiednemi bokami wielokąta szukanego; co widoczne,

Można do wykreślenia wielokątów podobnych użyć teoryi figur jednokładnych (32), zwłaszcza gdy dano nie bok *ab* ale tylko jego stosunek $\frac{m}{n}$ do boku odpowiednego AB. To wszystko za nadto jest łatwe żeby potrzebowało szczegółowego wyjaśnienia.

Zagadnienie X.

Przez punkt O, *dany na płaszczyznie dwóch prostych* AB i CD, *poprowadzić linię prostą przechodzącą przez punkt spotkania tych prostych, których przedłużyć nie można.*



Połącz punkt O z dwoma punktami E i F danych prostych AB i CD, i poprowadź równoległę GH do EF; a przez punkta G i H, równoległę GK do FO i równoległę HK do FO: prosta OK będzie linią szukaną.

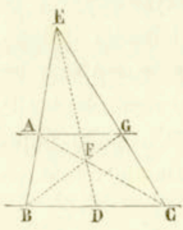
Jakoż, trójkąty OME i KNG, OMF i KNH, mające boki równoległe każdy do każdego, są podobne i dają

$$\frac{ME}{NG}=\frac{OM}{KN} \quad \text{i} \quad \frac{MF}{NH}=\frac{OM}{KN}, \quad \text{ztąd} \quad \frac{ME}{NG}=\frac{MF}{NH}.$$

Więc proste AB, CD, OK spotykają się w jednym punkcie (11.).

Zagadnienie XI.

Przez punkt A, *dany na* GRUNCIE, *wytknąć równoległę do danej prostej* BC.



Na kierunku prostej BC weź łańcuchem dwa razy długość dowolną BD = DC. Utkwij tyczkę w każdym ze trzech punktów B, D, C, i w danym A; utkwij piątą tyczkę na linii BA w pryzwoitym punkcie E; szóstą na przecięciu F linij AC i ED, a siódmą na przecięciu G linij BF, CE. Prosta AG będzie równoległą szukaną.

Jakoż, w trójkącie BCE, trzy poprzeczne ED, BG, CA dają :

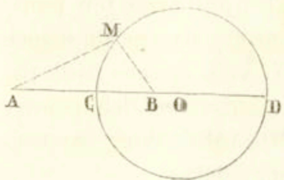
$$\frac{DB}{DC} \times \frac{GC}{GE} \times \frac{AE}{AB} = -1.$$

A że z wykreślenia $\frac{DB}{DC} = -1$, przeto $\frac{AE}{AB} = \frac{GE}{GC}$. Więc prosta AC jest równoległa do BC.

Zagadnienie XII.

Znaleźć miejsce geometryczne punktów równo oświeconych przez dwa punkta światła A, B.

Wiadomo z fizyki że *natężenie światła jest w stosunku odwrotnym kwadratu z odległości.*



Niech będzie M punkt równo oświecony przez punkta światłe A i B, których natężenia światła, na jedność odległości, nazywamy a, b.

Na mocy powyższej ustawy, natężenia świateł A i B na punkt M wyrażą się stosunkami $\frac{a}{\overline{AM}^2}$, $\frac{b}{\overline{BM}^2}$.

Owoż, wedle zagadnienia, te natężenia powinny być równe ;

więc $\frac{a}{\overline{AM}^2} = \frac{b}{\overline{BM}^2}$, zkąd $\frac{AM}{BM} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$.

To pokazuje że stosunek odległości punktu M od A i B jest stały. Więc miejscem geometrycznem punktu M, równo oświeconego przez światła A i B, jest okrąg koła mający za średnicę odległość CD dwóch punktów które dzielą prostę AB harmonicznie, w stosunku $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$.

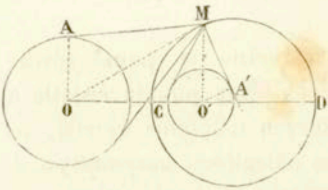
Promień tego koła, jeśli nazwiemy d długość AB, wyrazi się przez $\frac{d\sqrt{ab}}{a-b}$ (*zag.* 2) ; odległość $BO = \frac{bd}{a-b}$.

Uwaga. — Gdyby, mając dane trzy punkta świątle A, B, C, szukano na ich płaszczyźnie punktu równo oświeconego; wtedy trzebaby najpierwej znaleźć miejsce punktów równo oświeconych przez A i B, a potem miejsce punktów równo oświeconych przez A i C. Punkta przecięcia tych dwóch miejsc będą równo oświecone przez trzy światła A, B, C.

Mogą być dwa punkta równo oświecone, albo tylko jeden, a nawet może nie być żadnego.

Zagadnienie XIII.

Znaleźć miejsce geometryczne punktów z których widać dwa koła dane pod tym samym kątem.



Niech będzie M jeden z punktów szukanych; jeśli przez ten punkt poprowadzimy styczne do dwóch kół O, O′, kąty opisane będą równe, a temsamem ich połowy kąty AMO, AMO′. Więc dwa trójkąty prostokątne AOM, A′O′M są podobne i dają:

$$\frac{MO}{MO'} = \frac{OA}{O'A'}.$$

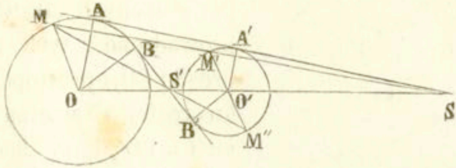
To pokazuje że stosunek odległości $\frac{MO}{MO'}$ jest stały. Więc, miejscem geometrycznem punktu M jest okrąg, mający za średnicę odległość CD środków podobieństwa dwóch kół danych (38, *wn.*).

Można wprost dowieśdź że z punktu M widać dwa dane koła pod tym samym kątem. Jakoż, na mocy powyższego wykreślenia mamy $\frac{MO}{MO'} = \frac{OA}{O'A'}$; zatem dwa trójkąty prostokątne MOA, MO′A′, mające przeciwprostokątnę i bok odpowiednio proporcyonalne, są podobne. Więc kąty AMO, A′MO′ są równe.

Uwaga — Gdyby szukano punktu z którego widać trzy dane koła pod tym samym kątem, otrzymanoby ten punkt przecięciem dwóch miejsc geometrycznych nakreślonych jako powżysze.

Zagadnienie XIV.

Poprowadzić styczną spólną dwom kołom.



Wyznacz najpierwej środki podobieństwa S, S' danych kół O, O', dzieląc linię środków harmonicznie w stostunku promieni OM, OM' (*zag.* V); poprowadź potem z każdego środka S i S' styczne do koła O; te linie będą także styczne do koła O'. Jakoż, punkta A i A', w których jedna z tych prostych *np.* SA, spotyka oba okręgi, są odpowiedne; ale środki kół O i O' są także punktami odpowiednemi. Zatem promienie OA, O'A' są rownoległe, i prosta SA, prostopadła do OA, jest prostopadła do promienia O'A'. Więc linia SA jest spólną styczną do dwóch kół O, O'. Dowiedzie się tak samo że inne styczne do koła O, poprowadzone z punktów S i S', są także stycznemi do koła O'.

To wykreślenie, chociaż nie prostsze od już znanego, może czasem być użyteczne.

ZAGADNIENIA ZETKNIĘCIA KÓŁ.

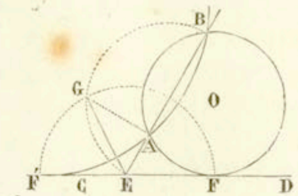
Zagadnienie XV.

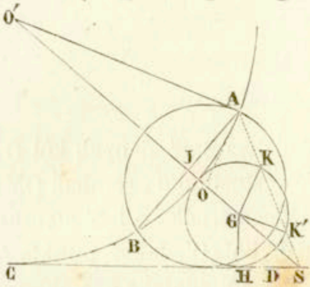
Nakreślić okrąg przechodzący przez dwa punkta A, B, *i styczny do prostej danej* CD.

1° *Rozwiązanie.* — Przypuśćmy zagadnienie rozwiązane, i niech będzie O koło szukane styczne w punkcie F do prostej CD. Przedłużmy prostę AB aż do spotkania E z daną CD.

Będzie $\overline{EF}^2 = EA \times EB$.

Ztąd następujące wykreślenie. Na BE jako średnicy, nakreśl półokrąg EGB; wyprowadź prostopadłę AG do AB; z punktu E





jako środka i promieniem EG, nakreśl półokrąg przecinający prostę CD w dwóch punktach F, F′, które będą punktami zetknięć kół szukanych. Prostopadłe wyprowadzone z tych punktów do prostej CD, i prostopadła we środku prostej AB przetną się w punktach O i O', które będą środkami kół szukanych, a zaś AO i AO′ ich promieniami.

2^e^ *Rozwiązanie.* — Środek koła szukanego leży na prostopadłej IS, wyprowadzonej ze środka prostej AB. Punkt spotkania S tej prostopadłej z daną prostą CD jest środkiem podobieństwa wszystkich kół stycznych do CD, które mają środki na IS. Zatem z punktu jakiegokolwiek G prostej IS jako środka, promieniem równym prostopadłej GH spuszczonej na CD, nakreśl okrąg który przetnie linię SA w punktach K i K′. Przez punkt A poprowadź równoległę AO do promienia GK, i równoległę AO′ do GK′. Przecięcia O, O′ będą środkami dwóch kół szukanych.

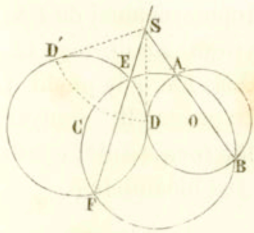
Zagadnienie ma ogólnie dwa rozwiązania, gdy punkta A i B są oba z jednej strony prostej CD. Ale, gdy proste AB i CD są równoległe, wtedy spodek prostopadłej, spuszczonej ze środka prostej AB na CD, jest jedynym punktem zetknięcia koła ; zagadnienie przywodzi się do *zag.* VIII *księgi* II, i ma tylko jedno rozwiązanie.

Zagadnienie jest niemożebne, gdy punkta A i B leżą po obydwóch stronach prostej CD.

Zagadnienie XVI.

Nakreślić okrąg przechodzący przez dwa punkta A, B, *i styczny do okręgu danego* C.

Niech będzie O szukany okrąg, D punkt zetknięcia. Przez



punkta A i B, poprowadź jakikolwiek okrąg ABF, przecinający dany okrąg C w punktach E, F; z punktu przecięcia S siecznych AB, EF, poprowadź styczne SD, SD′ do koła C. Punkta D, D′, będą punktami zetknięć żądanemi.

Bo $\overline{SD}^2 = SE\ SF = SA \times SB.$

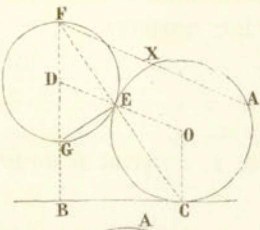
Więc SD jest styczną do koła szukanego. Tak samo SD′ jest styczną do drugiego koła które także rozwiązuje zagadnienie.

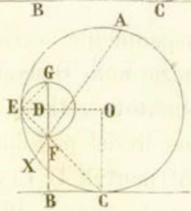
Tym sposobem, zagadnienie przywodzi się do już znajomego.

Aby zagadnienie było możebne, dane punkta A i B muszą znajdować oba zewnątrz, albo oba wewnątrz danego koła C.

Zagdvnienie XVII.

Nakreślić koło przechodzące przez punkt A, *i styczne do prostej* BC *i do koła* D.





Przypuśćmy zagadnienie rozwiązane, i niech będzie O koło szukane, styczne w punktach C i E do prostej BC i do koła D. Złączmy DO i OC; i przedłużmy CE aż do spodkania F z okręgiem D. Dwa trójkąty równoramienne COE, DEF, mające kąty przy E rowne, są podobne. Więc kąty F i C są równe, i prosta DF jest równoległa do OC, a temsamem prostopadła do BC. Punkta B i F są wiadome, a prosta FA przecina sukane koło O w punkcie X który się łatwo znajduje. Jakoż, sieczne FA, FC dają:

$$FA \times FX = FC \times FE.$$

Ale, w kącie BFC dwie przeciwrównoległe BC i EG dają także

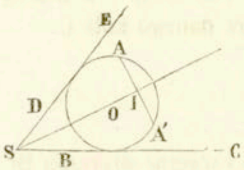
$$FC \times FE = FB \times FG.$$

Więc $FA \times FX = FB \times FG$. To pokazuje że punkt X może się także wyznaczyć za pomocą czwartej proporcyonalnej do FA, FB, FG. Tym sposobem zagadnienie przywodzi się do *zag.* 15.

Zagadnienie ma ogólnie *cztery* rozwiązania. Ale, gdy punkt A jest dany wewnątrz koła D, wtedy: jeśli prosta BC spotyka koło D, zagadnienie ma dwa albo jedno tylko rozwiązanie; a jeśli prosta BC nie spotyka koła D, zagadnienie jest niemożebne.

Zagadnienie XVIII.

Nakreślić okrąg przechodzący przez punkt A *i styczny do dwóch prostych* BC, DE.

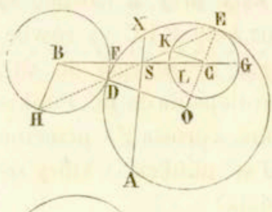


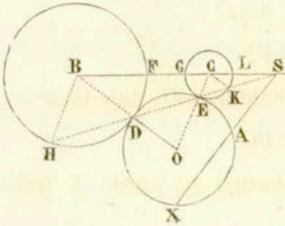
Szukany okrąg O jest symetryczny względem dwójsiecznej SI kąta stycznych SB, SD. Więc jeśli z punktu A spuścimy prostopadłę AI na tę dwójsieczną, i weźmiemy IA' = IA, punkt A' będzie należał do żądanego okręgu i zagadnienie przywiedzie się do już znanego.

Zagadnienie ma *dwa* rozwiązania; ale jest niemożebne gdy dwie proste BC, DE są równoległe, a punkt A leży zewnątrz.

Zagadnienie XIX.

Nakreślić koło przechodzące przez punkt A, *i styczne do dwóch kół* B i C.





Przypuśćmy zagadnienie rozwiązane, i niech będzie koło O styczne szukane. Linia punktów zetknięć D, E, przechodzi przez środek podobieństwa S dwóch kół danych B, C. Jakoż, trójkąty równoramienne BDH, ODE, CEK, są podobne; zatem kąt D = E = K. Więc promienie BD, CK są równoległe, i linia DE przechodzi przez środek podobieństwa S. Do tego, cztery punkta nieodpowiednie D, E, G, F, leżą na jednym okręgu; bo z przyczyny środka podobieństwa S, cięciwy DF i KL są równoległe; ale w czworoboku wpisanym GEKL, boki KL i EG są przeciwrównoległe, więc w kącie S linie DF i EG są przeciwrównoległe i dają $SD \,.\, SE' = SF \,.\, SG.$

Zatem, jeśli przez punkt A poprowadzimy sieczną SA która przetnie okrąg O w punkcie X,

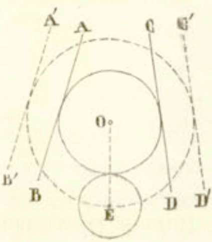
będzie $SX \,.\, SA = SD \,.\, SE = SF \,.\, SG.$

To pokazuje że cztery punkta A, G, F, X, leżą na jednym okręgu. Więc punkt X łatwo się wyznaczy, i zagadnienie przywodzi się do *Zag.* 16.

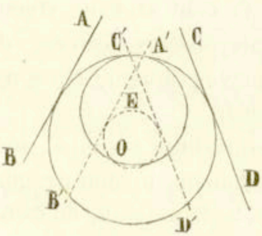
Zagadnienie ma ogólnie *cztery* rozwiązania.

Zagadnienie XX.

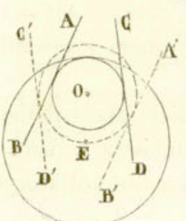
Nakreślić koło styczne do dwóch linij prostych AB, CD, *i do koła* E.



1° Niech będzie koło O, styczne *zewnętrznie* do koła E i do linij prostych AB, CD. Jeśli nakreślimy koło OE, spółśrodkowe z szukanem, to ono przejdzie przez środek danego koła E, i będzie styczne do dwóch linij prostych które leżą zewnątrz, równolegle do danych AB i CD, na odległość promienia EF. Ta uwaga przywodzi żądane zagadnienie do już wiadomego.



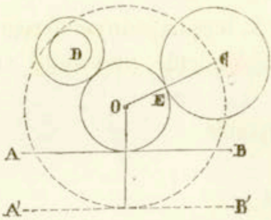
2° Aby otrzymać koło styczne *otaczające* koło E, prowadzi się, jako wyżej, równoległe A'B' i C'D' do AB i CD, na odległość promienia EF, ale idąc od tych linij ku środkowi koła E.



3° Jeśli obie proste AB i CD przecinają koło E, wtedy są dwa koła styczne *wewnętrznie* do koła E, które się otrzymuje prowadząc, jako w poprzedzającym przypadku, równoległe A'B' i C'D' do AB i CD, na odległość promienia EF, idąc od tych linij ku środkowi E; i dokończa się rozwiązania sposobem już wiadomym, Zagadnienie ma *cztery* rozwiązania, albo tylko dwa; a może nawet nie mieć żadnego.

Zagadnienie XXI.

Nakreślić koło styczne do prostej AB *i do dwóch kół* C *i* D.

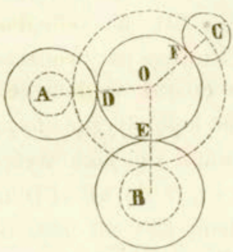


Niech będzie O jedno z kół szukanych. Jeśli nakreślimy koło OC, spółśrodkowe z szukanem, to ono przejdzie przez punkt C, będzie styczne do linii prostej A'B' równoległej do AB, na odległość promienia CE, i styczne do koła spółśrodkowego z kołem D a mającego za promień summę albo różnicę promieni kół C i D. Więc środek O wyznaczy się za pomocą *Zag.* 18.

Zagadnienie ma ogólnie *osiem* rozwiązań; albo tylko cztery, dwa; albo nie ma żadnego.

Zagadnienie XXII.

Nakreślić koło styczne do trzech kół danych.



Przypuśćmy zagadnienie razwiązane, i niech będzie O koło szukane styczne *zewnętrznie;* przypuśćmy jeszcze, dla utkwienia myśli, że promień CF jest najmniejszy ze trzech.

Jeśli tedy nakreślimy koło OC, spółśrodkowe z szukanem, to ono przejdzie przez środek C i będzie styczne do dwóch kół których środkami są A i B, a promieniami różnice AD — CF BE — CF. Więc środek O wyznaczy się sposobem już wiadomym, i rozwiązanie łatwo się uzupełnia.

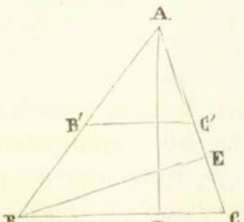
Jeśli szukane koło ma otaczać koła A i B, wtedy, dla znalezienia ego środka, trzeba nakreślić koło OC spółśrodkowe z szukanem, o ono przejdzie przez środek C i będzie styczne do kół których środkami są A i B a promieniami summy AD + CF i BE + CF. Podobnie o innych.

Zagadnienie ma ogólnie *osiem* rozwiązań; ale w przypadkach szczególnych może mieć mniej, a nawet nie mieć żadnego

UWAGA OGÓLNA. — Rozwiązania *ośmiu* zagadnień zetknięcia kół, któreśmy wskazali są zaiste łatwe w teoryi, bo się przywodzą jedne do drugich; ale dlatego właśnie są rzadko praktyczne, z przyczyny komplikacyi wykreśleń. Damy później rozwiązanie wprost, oparte na metodach geometryi nowoczesnej.

ZAGADNIENIE XXIII.

Zbudować trójkąt znając jego trzy wysokości.



Oznaczmy przez a', b', c' trzy wysokości szukanego trójkąta, odpowiedające trzem bokom a, b, c.

Uważajmy naprzód że w każdym trójkącie wysokości są odwrotnie proporcyonalne do boków odpowiedających. Jakoż, w trójkącie ABC, dwa trójkąty prostokątne BCE, ACD dają

$$\frac{BC}{AC}=\frac{BE}{AD}; \quad \text{więc} \quad BC \,.\, AD = AC \,.\, BE.$$

Ztąd wnosimy że, nazywając a', b', c' trzy wysokości szukanego trójkąta, odpowiedające trzem bokom a, b, c, będzie

$$aa' = bb' = cc'.$$

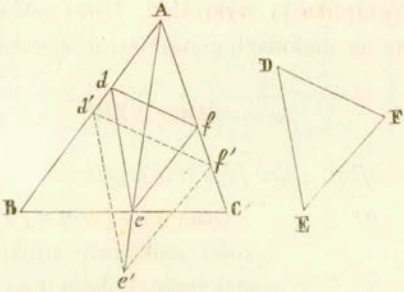
Zkąd, dzieląc przez $a'b'$, wynika

$$\frac{a}{b'}=\frac{b}{a'}=\frac{c}{\frac{a'b'}{c'}}.$$

To pokazuje że, jeśli wykreślimy trójkąt AB′C′, mający boki b', a', $\frac{a'b'}{c'}$ odpowiedające kątom A, B′, C′, ten trójkąt będzie podobny szukanemu. Więc, aby otrzymać ten ostatni, dość wziąć na prostopadłej AD spuszczonej z wierzchołka A na bok $B'C'$, długość AD równą wysokości a', i przez punkt D poprowadzić równoległę BC do $B'C'$; co da szukany trójkąt ABC.

Zagadnienie XXIV.

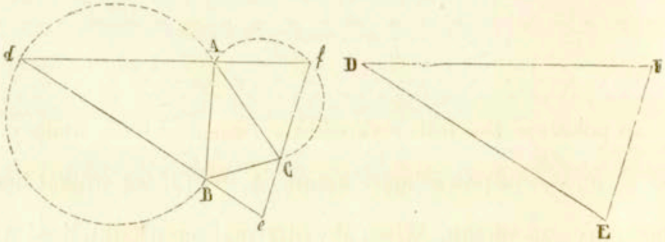
W dany trójkąt ABC *wpisać trójkąt, któregoby boki były równoległe do boków danego trójkąta* DEF.



Niech będzie *def* trójkąt szukany, którego boki są równoległe do boków trójkąta DEF. Jeśli w trójkącie ABC poprowadzimy równoległę $d'f'$ do df, i, przez punkta d', f', równoległe $d'e'$, $f'e'$ do de, fe; utworzymy trójkąt $d'e'f'$ jednokładny do szukanego trójkąta def; punkt A będzie środkiem podobieństwa tych dwóch trójkątów. Więc prosta AC przecina bok BC w punkcie e który jest jednym z wierzchołków trójkąta szukanego. Aby więc otrzymać ten ostatni, dość poprowadzić równoległe ed i ef do ED i EF, i złączyć df.

Zagadnienie XXV.

Na trójkącie ABC *opisać trójkąt równy danemu trójkątowi* DEF.



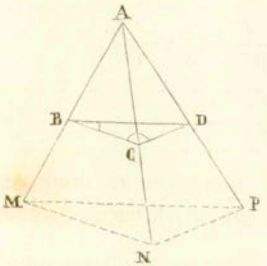
Niech będzie trójkąt szukany *def* równy danemu DEF. Wierzchołek *d* leży na łuku odcinka koła, opisanego na boku AB i i obejmującego kąt D; tak samo wierzchołek *f* leży na łuku odcinka koła, opisanego na boku AC i obejmującego kąt F. Więc, jeśli nakreślimy te dwa odcinki kół i poprowadzimy, przez punkt A, cięciwę *df* równą bokowi DF, a potem proste *d*B i *f*C które się przetną w punkcie *e*, otrzymamy trójkąt *def* równy trójkątowi DEF; bo te trójkąty mają bok równy przyległy dwom kątom równym.

Zagadnienie ma ogólnie *sześć* rozwiązań; bo przez punkt A można prowadzić *dwie* cięciwy równe bokowi DF (II. *zag.* 23.), a kąt *d* może się opierać na każdym ze trzech boków trójkąta ABC. Ale w szczególnych przypadkach może być mniej rozwiązań, a nawet nie być żadnego.

Aby łatwiej znaleźć rozwiązanie, jeśli istnieje, trzeba zacząć od *największego* boku trójkąta ABC i opisać na nim odcinek koła obejmujący *najmniejszy* z kątów trójkąta DEF.

Zagadnienie XXVI.

Zbudować czworokąt którego są dane dwa boki przyległe i przekątna ich wierzchołka, kąt dwóch innych boków i kąt jednego z nich z drugą przekątną.

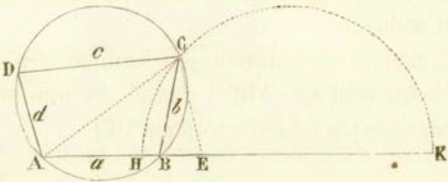


Przypuśćmy zagadnienie rozwiązane, i niech będzie czworobok ABCD w którym wiadome są dwa boki przyległe AB, AD, przekątna AC, kąt BCD i kąt CBD.

Na prostej MP, równoległej do BD, wykreślmy trójkąt MNP podobny trójkątowi BCD. Ponieważ stosunek $\frac{AM}{AP} = \frac{AB}{AD}$ jest znany, wiemy że punkt A leży na okręgu mającym za średnicę odległość dwóch punktów które dzielą bok MP harmonicznie w stosunku $\frac{AB}{AD}$. Ten sam punkt A leży także na okręgu mającym za średnicę odległość dwóch punktów które dzielą bok NP harmonicznie, w stosunku wiadomym $\frac{AC}{AD}$. Więc punkt A jest wyznaczony, względem boku MP; co daje czworobok AMNP podobny szukanemu, Więc aby otrzymać ten ostatni, dość wziąć na boku AM długość AB równą danemu bokowi AB, i dokończyć czworoboku ABCD.

Zagadnienie XXVII.

Wykreślić czworobok wpisalny znając jego boki.



Przypuśćmy zagadnienie rozwiązane, i niech będzie czworobok wpisalny ABCD w którym $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$, $DA = d$. Przedłużmy AB i złączmy AC. Mamy oczywiście kąt $CBE = D$. Więc, jeśli na boku CB, jako odpowiednym bokowi CD, zbudujemy trójkąt CBE podobny trójkątowi CDA, wyznaczymy zarazem punkt E i stosunek odległości punktu C od A i E. Bo wtedy będzie:

$$\frac{AD}{BE} = \frac{CD}{CB} = \frac{CA}{CE}, \quad \text{albo} \quad \frac{d}{BE} = \frac{c}{b} = \frac{CA}{CB};$$

zkąd

$$BE = \frac{bd}{c}, \quad \text{i} \quad \frac{CA}{CE} = \frac{c}{b}.$$

To pokazuje że punkt C leży na okręgu mającym za średnicę odległość HK punktów H, K, które dzielą prostę AE harmonicznie w stosunku $\frac{c}{b}$; przypuszczając że bok c nie jest mniejszy od b. Owoż, punkt C leży także na okręgu nakreślonym ze środka B promieniem $BC = b$. Więc punkt C jest wyznaczony, i czworobok łatwo się dokończa.

Zagadnienie ma ogólnie trzy rozwiązania, i jest możebne byle tylko, ma się rozumieć, największy ze czterech boków był mniejszy od summy trzech innych.

Powyższe wykreślenie wymaga żeby $a < b + c$; dopełni się zawsze tego warunku, biorąc za bok a najmniejszy ze czterech danych.

Gdyby było zagadnienie: *W dany wielokąt* WPISAĆ *wielokąt podobny drugiemu danemu*, możnaby przewrócić zadanie i szukać *wielokąta* OPISANEGO *na danym* DRUGIM *a podobnego* PIERWSZEMU.

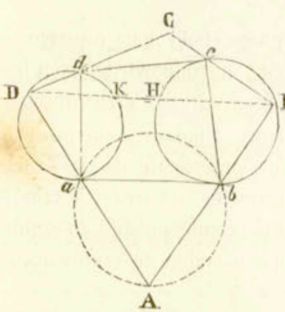
Rozwiązawszy to nowe zogadnienie, łatwo będzie wyznaczyć, na bokach pierwszego danego, punkta odpowiedne wielokąta podobnego które mają być wierzchołkami szukanego wielokąta wpisanego.

Taki sposób rozwiązania zagadnienia nazywa się *metodą odwrotną*, która polega na tem że się bierze *niewiadome* za *wiadome*, i *nawzajem*.

Korzyść tej metody jest szczególniej w opisaniu figur, dlatego że odcinki kół, obejmujące kąty wiadome, dają zaraz miejsce geometryczne wierzchołków szukanego wielokąta. Następujący przykład jaśniej to pokaże.

Zagadnienie XXVIII.

W dany czworobok MNPQ *wpisać czworobok mnpq, podobny innemu czworobokowi danemu abcd.*



Przewróćmy zadanie, i szukajmy jak *opisać na czworoboku abcd czworobok* ABCD *podobny danemu czworobokowi* MNPQ.

Przypuszczając że kąty M, N, Q odpowiedają bokom *ab*, *bc*, *ad*, wierzchołki A, B, D leżą na łukach odcinków kół obejmujących kąty wiadome. Owoż jeśli poprowadzimy przekątnę BD, ta linia przetnie łuki kół nakreślonych na *bc* i *ad*, w dwóch punktach H i K które wyznaczyć można; albowiem czworobok ABCD jest podobny danemu MNPQ, i przeto trójkąt ABD podobny trójkątowi MNQ. Więc kąty ABH i ADK są wiadome, a temsamem łuki bH i aK; co właśnie wyznacza punkta H i K. Otrzymawszy je, prowadzimy prostę HK której dwa punkta przecięcia B i D, z odcinkami kół już nakreślonemi, są dwoma wierzchołkami przeciwległemi czworoboku opisanego ABCD; i zagadnienie pomocnicze zostaje rozwiązane.

Teraz, aby rozwiązać dane zagadnienie, dość podzielić boki danego czworoboku MNPQ, w stosunku odcinków wyznaczonych, przez punkta a, b, c, d, na bokach odpowiednych czworoboku podobnego ABCD. Punkta podziału będą wierzchołkami czworoboku wpisanego szukanego.

Zagadnienie ma ogólnie *osiem* rozwiązań. Jakoż, przypuszczając w zagadnieniu pomocniczem kąt A oparty na boku ab, uważajmy że kąty B i D mogą się opierać na bokach bc i ad; co właśnie daje rozwiązanie na figurze. Albo przeciwnie, kąty B i D opierają się na bokach ad i bc; co stanowi drugie rozwiązanie, które może nie być różne od pierwszego. Jeśli przypuścimy że kąt A opiera się następnie na każdym ze trzech boków bc, cd, da, znajdziemy sześć innych rozwiązań.

ZADANIA.

231 — W trójkącie prostokątnym, zrzutowano boki kąta prostego na przeciwprostokątnej, potem zrzutowano te rzuty na odpowiedających bokach kąta prostego i znowu zrzutowano ostatnie rzuty na przeciwprostokątnej, i tak dalej. Owóż, wiadomo że *kwadraty* z boków kąta prostego są proporcyonalne do rzutów tych boków na przeciwprostokątnej; dowieśdź że *sześciany* tychże boków są proporcyonalne do *drugich* rzutów czyli do rzutów drugiego rzędu, *potęgi czwarte* proporcyonalne do rzutów *trzeciego rzędu*; a ogólnie, potęgi n^{te} są proporcyonalne do rzutów rzędu $n - 1$.

232. — *Środek ciężkości trójkąta* (punkt spotkania trzech ośródkowych), środek koła opisanego, i punkt spotkania trzech wysokości są w linii prostej. Odległości tych trzech punktów po dwa są w stosunku liczb 1, 2, 3.

233. — Środek ciężkości trójkąta, *środek ciężkości jego obwodu* (środek koła wpisanego w trójkąt mający wierzchołki we środku boków) i środek koła wpisanego są w linii prostej. Odległość tych trzech punktów po dwa są w stosunku liczb 1, 2, 3.

234. — Trójkąt w którym kwadraty z dwóch boków są proporcyonalne do rzutów tych boków na trzecim. jest prostokątny albo równoramienny.

235. — Jeśli w trójkącie jeden kąt jest połową drugiego, wtedy dwójsieczna kąta większego dzieli bok przeciwległy na dwa odcinki, takie że bok przeciwległy kątowi mniejszemu jest średnim proporcyonalnym między bokiem większym i odcinkiem mu przyległym.

236. — Trójkąt ABC, w którym prosta AD, poprowadzona z wierzchołka A do boku przeciwległego BD, jest średnią proporcyonalną między odcinkami BD i CD tego boku, jest prostokątny albo rozwartokątny przy A.

237. — Trójkąt równoramienny ABC jest wpisany w koło, przez wierzchołek A poprowadzono sieczną ADE która przecina podstawę i okrąg w punktach D, E; dowieśdź że $\overline{AB}^2 = AD \,.\, AE$.

238. — Dowieśdź że w trójkącie ABC, w którym summa dwóch boków AB + BC jest stała, ośródkowa trzeciego boku BC jest najmniejsza możebna gdy boki AB i AC są równe.

239. — W trójkąt prostokątny wpisano kwadrat; dowieśdź że bok DE tego kwadratu, który się opiera na przeciwprostokątnej BC, jest średnią proporcyonalną między odcinkami BD i CE przeciwprostokątnej.

240. — Z punktu O płaszczyzny trójkąta ABC spuszczono na jego boki BC, AC, AB prostopadłe OA′, OB′, OC′; dowiśdź że

$$\overline{AC'}^2 - \overline{BC'}^2 + \overline{BA'}^2 - \overline{CA'}^2 + \overline{CB'}^2 - \overline{AB'}^2 = 0.$$

I NAWZAJEM, jeśli trzy punkta A′, B′, C′, leżące na kierunkach boków trójkąta, zadość czynią temu równaniu, trzy prostopadłe wyprowadzone z tych punktów do boków odpowiedających spotykają się w jednym punkcie.

Wywieśdź ztąd że prostopadłe wyprowadzone ze środków boków trójkąta spotykają się w jednym punkcie; że trzy wysokości trójkąta spotykają się w jednym punkcie; że trzy prostopadłe wyprowadzone z punktów zetknięć spotykają sią w jednym punkcie.

241. — Z punktu O płaszczyzny wielokąta ABCD... spuszczono na jego boki AB, BC,... prostopadłe OA′, OB′,... ; dowieśdź że

$$\overline{AA'}^2 - \overline{BA'}^2 + \overline{BB'}^2 - \overline{CB'}^2 + \overline{CC'}^2 - \overline{DC'}^2 + \ldots = 0.$$

242. — W trójkącie ABC poprowadzono ciąg poprzecznych równoległych

do boku BC; dowieśdź że przekątne trapezów tak utworzonych przecinają się na ośródkowej tego boku.

243. — Na bokach trójkąta ABC wystawiono trójkąty równoboczne ABD, ACE, BCF. Dowieśdź że trzy linie AF, BE, CD są równe i schodzą się w punkcie z którego widać boki trójkąta ABC pod tym samym kątem.

244. W koło wpisano trójkąt, i przez każdy wierzchołek poprowadzono styczną; dowieśdź że trzy punkta spotkania stycznych z bokami przedłużonemi są w linii prostej.

245. — W dwóch wielokątach podobnych ABCDE, A'B'C'D'E' poprowadzono dwie przekątne odpowiedne CD, C'D', i spuszczono na nie prostopadłe AH, A'H', a na te ostatnie, prostopadłe BK, B'K'. Dowieśdź że odcinki AK, BK są proporcyonalne do odcinków A'K', B'K'.

246. — Cięciwy spólne trzech kół spólnych przecinają się w jednym punkcie.

247. — W trójkącie ABC, boki AB i AC, podzielone w punktach D i E w stosunku średnim i skrajnym, są podzielone na części proporcyonalne.

248. — Mając dane okręgi spólśrodkowe poprowadzić sieczną, tak żeby jej części, wpisane w te okręgi, były w stosunku m do n.

249. — Podzielić daną prostę na dwie części takie żeby kwadrat z jednej i wieloczyn z drugiej przez całą linię były w stosunku $m : n$.

250. — Podzielić daną prostę AB na dwie części takie żeby jedna była średnią proporcyonalną między drugą częścią i inną prostą CD.

251. — Podzielić daną prostę na dwie części takie żeby summa ich kwadratów była równa danemu kwadratowi.

Znaleźć minimum tej summy kwadratów.

252. — Mając dane trzy proste z jednego wychodzące punktu, poprowadzić do nich, przez punkt dany, sieczną tak żeby jej odcinki zawarte między temi prostemi były w stosunku żądanym.

253. — Przez punkt, wzięty na dwójsiecznej danego kąta, poprowadzić linię prostą tak żeby jej część wpisana miała długość daną.

Wywieśdź ztąd minimum tej długości.

254. — Przez dwa punkta poprowadzić okrąg przecinający daną prostę pod odcinkiem koła obejmującym kąt dany.

255. — W danem kole nakreślić m kół równych, stycznych między sobą i do koła danego.

256. — Przez dany punkt poprowadzić koło styczne do koła danego, wiedząc że jego środek powinien leżeć na danej prostej.

257. — Przez dwa punkta poprowadzić koło któreby przecinało dane koło wedle cięciwy danej.

258. — Mając dane dwa okręgi i punkt na jednym z nich, poprowadzić przez ten punkt trzeci okrąg któryby przecinał dwa pierwsze pod kątami danemi.

259. — Mając dane dwa punkta M i N na ramionach kąta A, poprowadzić dwa koła O, O′ styczne w tych punktach do ramion kąta, i styczne między sobą, i takie żeby ich promienie były w stosunku danym.

260. — Mając dane koło i dwa punkta na jego płaszczyznie, poprowadzić przez te punkta dwie proste takie żeby, przecinając się w okręgu, tworzyły kąt największy *albo* najmniejszy możebny.

261. — Przez punkt O dwójsiecznej kąta A poprowadzić cięciwę BOC tak żeby było $$\overline{OB}^2 + \overline{OC}^2 = k^2.$$

262. — Z punktu M, wziętego na okręgu spuszczono prostopadłe MP i MQ na dwie styczne jakiekolwiek, i prostopadłę MR na cięciwę zetknięć. Dowieśdź że MR jest średnią proporcyonalną między MP i MQ.

263. — Na bokach trójkąta ABC zbudowano kwadraty ABDE, ACFG, BCHI, połączono EG, FH, DI, BF, CD, i spuszczono prostopadłę AK na BC Dowieśdź że 1° prostopadła AK i przekątne BF, CD spotykają się w jednym punkcie. 2° prostopadłe spuszczone z A na EG, z B na DI, i z C na FH spotykają się w jednym punkcie.

264. — Mając dane dwa koła, poprowadzić sieczną, równoległą do danej prostej, tak żeby jej części wpisane w koło były proporcyonalne do promieni tych kół.

265. — Przez punkt dany A zewnątrz koła poprowadzić sieczną ABC tak żeby jej część BC wpisana w koło była $n^{tą}$ częścią całej siecznej AC.

266. — Mając dane trzy okręgi, znaleźć na jednym z nich punkt taki żeby różnica kwadratów, ze stycznych poprowadzonych z tego punktu do dwóch pozostałych okręgów, równała się danemu kwadratowi.

267. — Znaleźć punkt z którego poprowadzone styczne do dwóch kół danych są równe i tworzą kąt równy danemu.

268. — Do danego koła poprowadzić styczną tak żeby prostopadłe na nią spuszczone, z dwóch punktów płaszczyzny tego koła, były w stosunku m i n.

269. — Są dane dwie linie proste, na jednej wzięto odcinek AB ; znaleźć na drugiej punkt M taki żeby z niego było widać odcinek AB pod kątem największym możebnym.

270. — Przez punkt zewnętrzny poprowadzić sieczną do danego okręgu tak żeby była podzielona w stosunku średnim i skrajnym.

271. — Przez punkt zewnętrzny koła poprowadzić sieczną tak żeby wieloczyn (*albo* stosunek) części wpisanej i zewnętrznej równał się ilości danej.

272. — Nakreślić koło takie żeby styczne do niego poprowadzone, ze trzech punktów danych, miały długości dane.

273. — Przez punkt dany na płaszczyznie kąta poprowadzić sieczną taką żeby wieloczyn *albo* stosunek jej odcinków, licząc od punktu do ramion, równał się danemu.

274. — Przez punkt K płaszczyzny koła poprowadzono średnicę KAB i cięciwę KCD; połączono BC i BD; przez skrajność A średnicy poprowadzono styczną która spotyka sieczne BC, BD w punktach P, Q. Dowieśdź że wieloczyn AP.AQ jest stały (niezależny od kierunku cięciwy CD).

Rozróżnić dwa przypadki, według jak punkt K jest zewnątrz albo wewnątrz koła.

275. — Przez punkt P płaszczyzny koła O poprowadzono sieczną PAB, i wzięto punkt B′ symetryczny punktu B względem średnicy PQ; dowieśdź że prosta AB′ przechodzi przez punkt stały, niezależny od kierunku siecznej PAB.

276. — Gdy w kole dwie cięciwy przecinają się prostokątnie, wtedy summa kwadratów ze czterech odcinków równa się kwadratowi ze średnicy.

277. — Na bilardzie kołowym stoi bila, w jakim kierunku trzeba ją popchnąć żeby po trzech odbiciach powróciła na swoje miejsce?

278. — Linia prosta AB jest podzielona w punktach C i D, tak że odcinek AC jest średnią proporcyonalną między AB i AD; z punktu A wyprowadzono drugą prostę AE równą odcinkowi AC. Dowieśdź że linia EC jest dwójsieczną kąta BED.

279. — Przez dwa punkta A i B, leżące zewnątrz okręgu, poprowadzić dwie sieczne spotykające się na tym okręgu, tak żeby cięciwa CD, która łączy dwa inne punkta przecięcia, była równoległa do AB.

280. — Mając dane dwa okręgi, poprowadzić do nich styczne któreby się przecinały na danej prostej i czyniły z nią kąty równe.

281. — Ze środka C łuku AB wyprowadzono cięciwę CD która przecina cięciwę AB w punkcie E. Dowieśdź że cięciwa AC jest średnią proporcyonalną między CD i CE.

282. — Gdy dwie cięciwy przecinają się w kole na odcinki proporcyonalne, linia łącząca punkt przecięcia ze środkiem koła jest dwójsieczną kąta tych cięciw.

283. — Z punktu A okręgu poprowadzono cięciwy AB, AC,... i przecięto je sieczną równoległą do stycznej koła w punkcie A. Dowieść że wieloczyn każdej cięciwy przez odcinek zawarty między punktem A i sieczną jest stały.

284. — Z punktu A poprowadzono dwie styczne AB i AC do koła O; potem, przez punkt zetknięcia B, poprowadzono średnicę BD na którą spuszczono prostopadłę CE z drugiego punktu zetknięcia C. Dowieść że sieczna AD dzieli prostopadłę CE na dwie równe części.

285. — Przez punkt A okręgu poprowadzono średnicę AB i styczną AC, przez punkt C poprowadzono drugą styczną CD, a przez jej punkt zetknięcia D prostopadłę DE do AB. Dowieść że prosta BC dzieli prostopadłę DE na dwie równe części.

286. — Z wierzchołka kąta A nakreślono łuk koła zawarty między jego ramionami. Poprowadzić do tego łuku styczną tak żeby jej odcinki, zawarte między punktem zetknięcia i ramionami kąta, były w stosunku danym.

287. — Dwa koła O, O′ mają spólną cięciwę EF i linię środków ACBD. Dowieść że

$$OO'.EF = \sqrt{AC.AD.BC.BD.}$$

288. — Są dane trzy równoległe; z punktów P i Q poprowadzono sieczne które się spotykają na jednej z nich a przecinają dwie inne, pierwsza przecina jedną z nich w A a druga przecina drugą równoległę w B. Dowieść że linie AB, A′B′... spotykają się w jednym punkcie.

289. — Odległość punktu M okręgu od cięciwy AB jest średnią proporcyonalną między odległościami tego punktu od stycznych na skrajnościach A i B tej cięciwy.

290. — Punkt jakikolwiek E średnicy AB połączono ze skrajnościami cięciwy równoległej CD. Dowieść że

$$\overline{CE}^2 + \overline{DE}^2 = \overline{AE}^2 + \overline{BE}^2.$$

291. — Dwa koła O, O′ są styczne w punkcie A; przez ten punkt poprowadzono, pod kątem prostym, dwie sieczne spólne BAB′ i CAC′; linia środków przecina te koła w punktach D i D′; dowieść że

$$\overline{BB'}^2 + \overline{CC'}^2 = \overline{DD'}^2.$$

292. — Dowieśdź że część stycznej koła, zawarta między dwiema stycznemi poprowadzonemi przez skrajności średnicy jakiejkolwiek, jest podzielona w punkcie zetknięcia na dwa odcinki których wieloczyn równa się kwadratowi promienia.

293. — Dwie sieczne przecinają się pod kątem prostym w kole albo po za kołem ; dowieśdź że summa kwadratów z dwóch cięciw przeciwrównoległych, które łączą ich punkta przecięć z kołem, równa się kwadratowi ze średnicy.

294. — Dwa koła O, O′ są styczne zewnętrznie w punkcie A. Z punktu M, z którego widać promienie AO i AO′ pod tym samym kątem, poprowadzono do tych dwóch kół styczne MB i MB′ ; dowieśdź że

$$\overline{MA}^2 = MB.MB'.$$

295. — Cztery punkta A, B, C, D leżą na jednym okręgu O ; utworzono cztery trójkąty ABC, ABD, BCD, BCA, w których punkta spotkań trzech wysokości są H, H′, H″, H‴ ; dowieśdź że te cztery punkta są na jednym okręgu równym pierwszemu.

296. — Dwa koła przecinają się ; poprowadzić przez jeden z punktów przecięć sieczną, tak żeby wieloczyn cięciw przejętych równał się kwadratowi z danej linii.

297. — Mając dane dwie linie proste i punkt na ich płaszczyźnie, nakreślić z tego punktu jako środka, okrąg któryby przecinał dwie dane linie wedle cięciwy równoległej do trzeciej prostej.

298. — Przez punkt przecięcia dwóch okręgów poprowadzić sieczną tak żeby cięciwy na niej przejęte były w stosunku danym.

299. Mając dane dwie linie proste i punkt na ich płaszczyźnie, wyznaczyć na jednej z nich punkt któryby był równo oddalony od punktu danego i od drugiej prostej. Dyskutować możebność i liczbę rozwiązań.

300. — Punkt C, dany na średnicy AB, połączono z jakimkolwiek punktem M okręgu ; po czem wyprowadzono do prostej CM, w punkcie M, prostopadłę EF która spotyka styczne AE i BF w punktach E i F. Dowieśdź że z punktu C widać odcinek EF pod kątem prostym, i że wieloczyn AE.BF jest stały.

301. — Mając dane trzy punkta A, B, C, poprowadzić przez jeden z nich *np.* przez A, linię prostą tak żeby spuszczając na nią z punktów B i C prostopadłe BE i BF wieloczyn *albo* stosunek tych prostopadłych był równy danej ilości.

302. Mając dane punkt A, koło i linię prostą, wyznaczyć na tej linii punkt B taki żeby styczna do koła, wyprowadzona z tego punktu, była równa odległości BA.

303. — Cięciwa spólna dwom kołom, opisanym na przekątnych trapezu jako średnicach, przechodzi przez punkt spotkania boków nierównoległych.

304. — Podzielić łuk koła AB na dwie części AC i CB, takie żeby cięciwy AC i CB miały stosunek dany.

305. — Mając dane trzy punkta na okręgu, znaleźć trzy okręgi styczne między sobą i styczne w tych punktach do danego okręgu.

306. — Średnicę AB koła O podzielono harmonicznie w punktach C i D, z których wyprowadzono dwie prostopadłe do AB; dowieśdź że wszelka styczna koła spotyka te prostopadłe w punktach M i N których odległości OM, ON od środka koła O tworzą stosunek stały.

307. — Z punktu A poprowadzono do koła obie styczne i sieczną jakąkolwiek, które je spotykają w punktach B, C i D, E. Dowieśdź że w czworoboku BDCE wieloczyny boków przeciwległych są równe.

308. — Są dane dwa koła OA, O'A' nie mające żadnego punktu spólnego; dowieśdź że na linii ich środków istnieją dwa punkta B i C zadość czyniące równaniom

$$OB.OC = \overline{OA}^2 \qquad \text{i} \qquad O'B,O'C = \overline{O'A'}^2.$$

309. — Mając dane dwa punkta na okręgu i sieczną, poprowadzić przez te punkta dwie sieczne spotykające się na tym okręgu, i przecinające daną w dwóch punktach którychby odległości od punktu danego na tej siecznej były w stosunku danym.

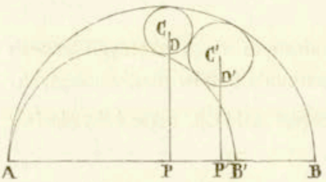
310. — W czworoboku ABCD, podzielono proporcyonalnie dwa boki przeciwległe AB i DC w punktach E i F; i także proporcyonalnie dwa boki przeciwległe AD i BC w punktach G i H; dowieśdź że proste EF i GH, są podzielone w punkcie przecięcia O na odcinki proporcyonalne do odcinków boków przeciwległych, to jest

$$\frac{EO}{FO} = \frac{BH}{GH} \qquad \text{i} \qquad \frac{GO}{HO} = \frac{AE}{BE}.$$

311. — Na linii AB i na każdej jej połowie jako średnicy, nakreślono półkola, z jednej strony AB; po czem w przestrzeń zawartą między trzema półkolami wpisano koło. Dowieśdź że średnica tego koła jest trzecią częścią średnicy AB.

312. — Mając dane punkt A, linię prostą i koło, znaleźć na tej prostej

punkt B taki, żeby kwadrat z AB był równy summie *albo* różnicy potęg punktów A i B względem danego koła.



313. — Gdy dwa koła AB, AB′ są styczne wewnętrznie w punkcie A, i gdy dwa inne koła C, C′ są styczne do nich i styczne między sobą; wtedy, spuszczając ze środków C, C′ prostopadłe CP, C′P′ na średnicę AB′, różnica stosunków tych prostopadłych do promieni odpowiedających $\frac{CP}{CD}$, $\frac{C'P'}{C'D'}$, równa się liczbie 2.

A jeśli koła C, C′, C″,.. są styczne każda do dwóch sąsiednich, stosunki $\frac{CP}{CD}$, $\frac{C'P'}{C'D'}$, $\frac{C''P''}{C''D''}$,.. tworzą postępnię arytmetyczną.

314. — Zbudować trójkąt prostokątny, znając summę *albo* różnicę boków kąta prostego i stosunek ich kwadratów.

315. — Zbudować trójkąt prostokątny, znając różnicę dwóch boków kąta prostego i różnicę ich rzutów na przeciwprostokątnej.

316. — Zbudować trójkąt prostokątny, znając summę *albo* różnicę dwóch boków kąta prostego i wysokość odpowiadającą przeciwprostokątnej.

317. — Zbudować trójkąt prostokątny, taki żeby jeden z boków kąta prostego był średnim proporcyonalnym między drugim bokiem i daną przeciwprostokątną.

318. — Zbudować trójkąt prostokątny, mając dany jeden bok kąta prostego i rzut drugiego na przeciwprostokątnej.

319. — Zbudowac trójkąt równoramienny taki żeby boki równe miały długość daną, a kąty im przeciwległe były dwa razy większe od kąta przy wierzchołku.

320. — Zbudować trójkąt znając podstawę, wysokość i różnicę kątów przy podstawie.

321. — Zbudować trójkąt, znając bok, różnicę dwóch innych boków, i summę promieni kół wpisanego i zawpisanego w ich kąt.

322. — Zbudować trójkąt znając summę dwóch boków, i promienie kół wpisanego i zawpisanego w ich kąt.

323. — Zbudować trókąt, znając dwa boki i dwójsieczną ich kąta, *albo* dwójsieczną kąta spełniającego.

324. Zbudować trójkąt znając bok, summę dwóch innych boków, i dwójsieczną ich kąta.

325. — Zbudować trójkąt znając bok, kąt przeciwległy i jego dwójsieczną.

326. — Zbudować trójkąt, znając kąt *albo* bok, promień koła opisanego, i odległość środków kół opisanego i wpisanego, *albo* zawpisanego w ten kąt.

327. — Zbudować trójkąt, mając dane dwa boki, i wiedząc że jeden z kątów im przeciwległych jest połową drugiego.

Dowieść że możebność tego zagadnienia wymaga żeby bok mniejszy przewyższał połowę większego.

328. — Zbudować trójkąt, znając podstawę, wysokość i summę, *albo* różnicę, *albo* wieloczyn, *albo* stosunek dwóch innych boków.

329. — Zbudować trójkąt znając bok, jego ośródkowę, i wieloczyn *albo* stosunek dwóch innych boków.

330. — Zbudować trójkąt, znając wieloczyn dwóch boków, ośródkowę trzeciego boku, i różnicę kątów przyległych temu bokowi.

331. — Zbudować trójkąt znając kąt przy wierzchołku, wysokość odpowiadającą, i ośródkowę podstawy.

332. — Zbudować trójkąt, znając summę *albo* różnicę dwóch boków, ich kąt, i wysokość wierzchołka tego kąta.

333. — Zbudować trójkąt, znając dwa boki i długość linii która, idąc od wierzchołka ich kąta, dzieli bok przeciwległy w stosunku średnim i skrajnym.

334. — Zbudować trójkąt, znając jeden bok, jeden kąt i stosunek dwóch innych boków.

335. — Zbudować trójkąt, znając wielkość i *położenie* podstawy, summę *albo* różnicę dwóch innych boków, i linię prostą *albo* okrąg na którym ma leżeć wierzchołek trójkąta.

336. — Znając wysokość trójkąta, promienie kół opisanego i wpisanego, znaleźć boki.

337. — Zbudować trójkąt, a ogólnie wielokąt, podobny danemu i mający obwód dany.

338. — Zbudować trójkąt podobny danemu, i mający wierzchołki na trzech prostych *albo* na trzech okręgach danych.

339. — Zbudować trójkąt, znając dwójsieczną kąta, dwójsieczną jego spełnienia, i wieloczyn *albo* stosunek boków tego kąta.

340. — Zbudować trójkąt, znając jeden bok, różnicę kwadratów dwóch innych, i jeden kąt.

341. — Zbudować trójkąt, znając kąt, summę boków tego kąta, i wysokość jego wierzchołka.

342. — W koło promienia R wpisać trójkąt równoramienny w którym wiadoma jest *summa* podstawy i wysokości.

Dowieśdź że maximum tej summy jest $R(1+\sqrt{5})$.

343. — W koło promienia R wpisać trójkąt równoramienny w którym wiadoma jest *różnica* podstawy i wysokości.

Dyskusya. — Jeśli podstawa większa od wysokości, wtedy maximum *różnicy* jest $R(\sqrt{5}-1)$; a jeśli przeciwnie, podstawa mniejsza od wysokości, wtedy *różnica* musi być mniejsza od 2R.

344. — W dane koło wpisać trójkąt którego dwa boki przechodzą każdy przez jeden z dwóch punktów danych M, N, a trzeci bok czyni z prostą MN kąt równy danemu.

345. — W dane koło wpisać trójkąt którego boki przechodzą każdy przez jeden ze trzech punktów danych M, N, P.

346. — Na danym trójkącie MNP opisać trójkąt ABC podobny innemu trójkątowi, i taki żeby linie, łączące jego wierzchołki z wierzchołkami kątów przeciwległych trójkąta MNP, były prostopadłe do boków trójkąta ABC.

347. — Znaleźć wewnątrz trójkąta punkt którego odległości od trzech boków są proporcyonalne do linij danych.

348. — Trojkąt ABC jest wpisany w koło; przez wierzchołek A poprowadzono styczną, i przez wierzchołek B równoległę BD która spotyka kierunek AC w punkcie D. Dowieśdź że $\overline{AB}^2 = AC \cdot AD$.

349. — Są dane dwa okręgi spółśrodkowe. Zbudować trójkąt podobny danemu, i mający dwa wierzchołki na większym okręgu a jeden na mniejszym.

350. — Mając dany punkt O w kącie BAC, znaleźć na ramionach tego kąta dwa punkta M i N takie, żeby trójkąt MNO był podobny danemu trójkątowi DEF.

351. — W trójkącie ABC przez wierzchołek B poprowadzono prostę BD która spotyka bok przeciwległy AC w punkcie D; przez środek O prostej BD i przez wierzchołek A poprowadzono prostę AOE która spotyka bok przeciwległy BC w punkcie E. Dowieśdź że $\frac{EB}{EC} = \frac{AD}{AC}$.

352. — W trójkącie ABC przez wierzchołek B i środek O ośródkowej AD poprowadzono poprzeczną BE; w jakim stosunku bok AC i poprzeczna BE zostały podzielone przez punkta E i O?

353. — W trójkącie ABC poprzeczna abc, równoległa do dwójsiecznej kąta A albo jego spełnienia, dzieli bok przeciwległy BC na dwa odcinki aB i aC, proporcyonalne do odcinków cB i bC przyległych temu bokowi.

354. — Gdy trójkąt zmienny DEF, opisany na trójkącie stałym ABC, porusza się zostając ciągle podobny sobie samemu, wtedy punkt jakikolwiek jego płasczyzny opisuje okrąg.

355. — Odległość punktu spotkania trzech ośródkowych trójkąta, od linii prostej jakiejkolwiek, jest średnią arytmetyczną odległości trzech wierzchołków trójkąta od tej prostej.

356. — Nazywając G punkt spotkania ośródkowych w trójkącie ABC, będzie
$$\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 = 3(\overline{AG}^2 + \overline{BG}^2 + \overline{CG}^2).$$

357. — Niech będzie G punkt spotkania trzech ośródkowych trójkąta ABC, M punkt jego płasczyzny; dowieśdź że
$$\overline{MA}^2 + \overline{MB}^2 + \overline{MC}^2 = \overline{AG}^2 + \overline{BG}^2 + \overline{CG}^2 + 3\overline{MG}^2.$$

358. — W trójkącie równobocznym ABC, ze środka D boku BC spuszczono prostopadłę DE na bok AB. Dowieśdź że BD jest *czwartą częścią* boku AB.

359. — W trójkącie ABC, wieloczyn odległości punktów B i C od dwójsiecznej kąta wewnętrznego A równa się wieloczynowi odległości środka boku BC od tej dwójsiecznej przez dwójsieczną kąta spełniającego.

Tak samo, wieloczyn odległości punktów B i C od dwójsiecznej kąta zewnętrznego A równa się wieloczynowi odległości środka boku BC od tej dwójsiecznej przez dwójsieczną kąta wewnętrznego.

360. — Środek koła wpisanego w trójkąt, środek jednego z boków, i środek linii łączącej punkt zetknięcia tego boku z wierzchołkiem przeciwległym, są w linii prostej.

361. — Podobne twierdzenie dla środka koła zawpisanego.

362. — W trójkącie równoramiennym ABC, kąty B i C są dwa razy większe od kąta przy wierzchołku A; dowieśdź że
$$\overline{AB}^2 = \overline{BC}^2 + AB \cdot BC.$$

363. — W trójkącie ABC, poprowadzono dwie wysokości BD i CE; dowieśdź że
$$\overline{BC}^2 = AB \cdot BE + AC \cdot CD.$$

364. — W trójkącie ABC, poprowadzić do boku BC równoległę DE tak żeby summa kwadratów z długości DE i z odcinków BD i CE była równa kwadratowi m^2.

365. — W trójkącie ABC rozwartokątnym przy A, poprowadzić z wierzchołka A do boku przeciwległego prostę AD tak żeby była średnią proporcyonalną między odcinkami BD i CD tego boku.

366. — Na fig. *twierdz.* XXV, dowieśdź że $BH = \sqrt{HD.HA}$ i $BK = \sqrt{KA.KE}$.

367. — Oznaczając przez R promień koła opisanego na trójkącie, przez d, d_1, d_2, d_3 odległości środka tego koła od środków kół wpisanego i zawpisanych; dowieśdź że

$$12R^2 = d^2 + d_1^2 + d_2^2 + d_3^2.$$

368. — W trójkącie summa prostopadłych, spuszczonych ze środka koła opisanego na trzy boki, równa się summie promieni kół wpisanego i opisanego.

369. — W trójkącie ABC, oznaczając przez AD i AE dwójsieczne kąta A i jego spełnienia, przez H środek podstawy BC, przez AK wysokość odpowiedającą; będzie

$$HK.HD = \left(\frac{AB - AC}{2}\right)^2, \quad \text{i} \quad HK.HE = \left(\frac{AB + AC}{2}\right)^2.$$

370. — W każdym trójkącie, oznaczając przez R promień koła wpisanego, przez a, b, c trzy boki, przez a', b', c' wysokości im odpowiedające, przez α, β, γ odcinki tych wysokości zawarte między punktem ich spotkania i wierzchołkami A, B, C; będzie

$$12R^2 = a^2 + b^2 + c^2 + \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2, \text{ i } a^2 + b^2 + c^2 = 2(\alpha a' + \beta b' + \gamma c').$$

371. — Na dwójsiecznej kąta A trójkąta ABC wyznaczyć punkt M taki żeby różnica kątów MBC i MCB była maximum.

372. — W dane koło wpisać trójkąt taki żeby jeden z jego boków był równoległy do danej prostej a dwa inne przechodziły przez dwa punkta dane na tej prostej.

373. — W dane koło wpisać trójkąt któregoby boki przechodziły przez trzy punkta dane.

374. — W dany trójkąt wpisać drugi trójkąt któregoby boki przechodziły przez trzy punkta dane w linii prostej.

375. — W trójkącie ABC, zmniejszono bok AB ilością dowolną BB', a

powiększono bok AC ilością CC′ równą pierwszej. Dowieśdź że nowa podstawa B′C′ jest podzielona przez dawną BC w stosunku odwrotnym boków zmienionych AB i AC.

376. — Mając dane dwa okręgi spółśrodkowe promień R i r, na jednym wzięto jakikolwiek punkt M i złączono go ze skrajnościami A i B średnicy drugiego; dowieśdź że

$$\overline{AM}^2 + \overline{BM}^2 = 2(R^2 + r^2).$$

377. — Jeśli w trójkącie wpisanym w koło z punktu okręgu spuszczono na boki trzy pochyłe pod kątami równemi i w tę samą stronę idące, spodki tych pochyłych są w linii prostej.

378. — Jeśli z wierzchołków trójkąta opisanego na kole spuszczono na styczną trzy pochyłe, które widać ze środka koła pod kątami równemi idąc od wierzchołków, te pochyłe spotykają się w jednym punkcie.

379. — Jeśli trzy promienie, wychodzące z wierzchołków trójkąta, odbijają się na jego płaszczyznie, w jednym punkcie danej prostej, promienie odbite spotykają boki trójkąta we trzech punktach w linii prostej.

380. — Połączono z wierzchołkami trójkąta ABC punkt P jego płaszczyzny, i poprowadzono przezeń proste PA′, PB′, PC′ tak żeby kąty APA′, BPB′, CPC′ były równe i skierowane w tę samą stronę; dowieśdź że te proste spotykają boki przeciwległe trójkąta we trzech punktach w linii prostej.

381. — W trójkącie ABC, połączono wierzchołek A z punktem D boku przyciwległego BC. Dowieśdź że

$$\overline{AD}^2 . BC = \overline{AB}^2 . CD + \overline{AC}^2 . BD - BC . BD . CD.$$

382. — Punkt O płaszczyzny trójkąta ABC połączono z jego wierzchołkam i przez środek każdego boku poprowadzono równoległę do prostej łączącej wierzchołek przeciwległy bokowi z punktem O; dowieśdź że te równoległe spotykają się w jednym punkcie O′, i każda z nich równa się połowie linii do której jest równoległą.

383. — Wyznaczyć kąty trójkąta równoramiennego, którego podstawą jest odcinek większy danej prostej podzielonej w stosunku średnim i skrajnym, a bokami przyległemi ta prosta sama.

384. — Mając dany trójkąt przecięty poprzeczną, jeśli na każdym boku wyznaczymy sprzężony harmoniczny punktu spotkania poprzecznej, względem skrajności tego boku, linie proste, łączące te trzy punkta z wierzchołkami przeciwległemi, przetną się w jednym punkcie.

385. — Mając dany trójkąt przecięty poprzeczną, jeśli wyznaczymy na każdym z dwóch boków sprzężony harmoniczny punktu spotkania poprzecznej względem skrajności tego boku, te dwa punkta będą w lini prostej z punktem w którym poprzeczna spotyka trzeci bok trójkąta.

386. — Mając dany trójkąt PQR opisany na kole O, połączono środki jego boków liniami prostemi, i tak utworzono drugi trójkąt ABC; z wierzchołków A, B, C poprowadzono do koła O styczne które spotykają boki przeciwległe trójkąta ABC w punktach D, E, F; dowieśdź że te trzy punkta są w linii prostej.

387. — Trójkąt ABC, wpisany w koło, przecięto poprzeczną w punktach a, b, c: oznaczając przez α, β, γ, długości stycznych poprowadzonych do tego koła z punktów a, b, c; dowieśdź że

$$\alpha\beta\gamma = Ab \,.\, Bc \,.\, Ca = Ac \,.\, Ba \,.\, Cb.$$

388. — Zbudować trapez znając obie podstawy i obie przekątne.

389. — Zbudować trapez, znając dwa boki nierównoległe i dwie przekątne.

390. — Zbudować trapez którego wiadome są dwie podstawy, stosunek dwóch innych boków i wysokość.

391. — Zbudować trapez, znając dwa boki nierównoległe, kąt dwóch boków, i stosunek *albo* wieloczyn podstaw.

392. — Poprowadzić, przez dwa punkta dane, dwie równoległe któreby tworzyły z dwiema danemi równoległemi równoległobok mający boki proporcyonalne do dwóch linij danych.

393. — Wpisać w dane koło trapez, znając summę dwóch podstaw i jeden z dwóch innych boków.

394. — W dane koło wpisać trapez którego różnica dwóch podstaw i jedna przekątna są wiadome.

395. — Wpisać w dane koło trapez którego wiadoma jest summa *albo* różnica podstaw, i wysokość.

396. — Zbudować równoległobok podobny danemu, któregoby boki przechodziły przez cztery punkta dane.

397. — W czworoboku opisanym na kole linie łączące punkta zetknięć przechodzą przez punkt przecięcia przekątnych.

398. — W równoległoboku ABCD, przez punkt O, wzięty na przedłużeniu boku AD, poprowadzono poprzeczną MNO która spotyka boki przeciwległe AB i CD w punktach M, N. Gdy boki AB i BC, nie zmieniając długości,

obrócą się około wierzchołków A i D jakoby biegunów, równoległobok weźmie położenie AB′C′D, takie że $AM'=AM$ i $DN'=DN$. Dowieśdź że trzy punkta O, M′, N′ są zawsze w linii prostej, i że stosunek $\frac{OM'}{ON'}=\frac{OM}{ON}$.

399. — Zbudować trapez ABCD którego dwa wierzchołki A i B są dane, podstawa wyższa CD przechodzi przez punkt dany O, kąt C jest wiadomy, i boki nierównoległe AD, BC są w stosunku danym $\frac{m}{n}$.

400. — Znając cztery boki trapeza wyrachować przekątne.

401. — W równoległoboku ABCD nakreślono okrąg przechodzący przez wierzchołek A, i przecinający boki AB i AD i przekątnę AC w punktach F, H, G; dowieśdź że

$$AB \cdot AF + AD \cdot AH = AC \cdot AG.$$

402. — Wpisać kwadrat w półkole.

403. — W dany trójkąt wpisać równoległobok podobny danemu.

404. — W dany prostokąt wpisać prostokąt podobny danemu.

405. — Gdy ukośnik ABCD jest opisany na kole, wszelka styczna MN wyznacza na dwóch bokach przyległych AB i AD dwa odcinki AM i DN których wieloczyn jest stały.

406. — W trapezie ABCD, poprowadzono równoległę EF do podstawy AB, tak że dzieli boki AD i BC w stosunku $m:n$; dowieśdź że

$$(m+n)EF = mAB + nCD.$$

407. — Zbudować ukośnik, znając jego bok i wiedząc że jest średnim proporcyonalnym między przekątnemi.

408. — Kąt BAC obraca się około wierzchołka A, a długości ramion AB, AC zostają w stosunku stałym. Gdy punkt B posuwa się po linii prostej danej z położenia, jaką linię opisuje punkt C?

409. — Węgielnica opiera się na dwóch liniach prostokątnych. Znaleźć *miejsce geometryczne* wierzchołka kąta prostego.

410. — Znaleźć *miejsce* punktów których odległości od dwóch linij prostych są w stosunku danym.

411. — Znaleźć miejsce punktów których odległość od podstawy trójkąta równoramiennego jest średnią proporcyonalną między odległościami od dwóch innych boków.

412. — Są dane dwa punkta A, B. Znaleźć 1° miejsce punktu M takiego żeby było $m \times \overline{AM}^2 + n \times \overline{BM}^2 = k^2$.

2° Miejsce punktu M takiego żeby było $m \times \overline{AM}^2 - n \times \overline{BM}^2 = k^2$.

413 — Mając dane dwie linie proste AA′ i BB′, znaleźć miejsce geometryczne punktów X takich aby, prowadząc przez nie proste XP i XQ które spotykają AA′ i BB′ w punktach P i Q, i tworą z niemi kąty równe danym, odległości XP i XQ były w stosunku danym.

414. — Mając dane dwie linie proste AA′ i BB′, znaleźć miejsce punktów X takich żeby, spuszczając z nich prostopadłe XP i XQ na AA′ i BB′, było

$$a \cdot XP + b \cdot XQ = k^2.$$

415. — Z punktu A poprowadzono sieczne do koła O, i styczne w punktach przecięć. Znaleźć miejsce spotkań tych stycznych.

416. — Z punktu A poprowadzono do okręgu O linie AB, AB′..., i podzielono je w stosunku stałym $m : n$. Znaleźć miejsce punktów podziału.

417. — Z punktu A poprowadzono do koła O sieczną ABC i wzięto na niej punkt M taki żeby było $AM \cdot AC = k^2$. Znaleźć miejsce punktu M gdy sieczna ABC obraca się około punktu A.

418. — Z punktu A poprowadzono do linii prostej BC, promień wodzący AD i wzięto na nim punkt M, tak żeby było $AM \times AD = k^2$. Znaleźć miejsce punktu M.

Wyprowadzić to miejsce geometryczne z poprzedzającego.

419. — Znaleźć miejsce punktów z których odcinki AB, CD, linii danej AD, są widziane pod tym samym kątem.

420. — Z punktu A, wziętego na ramieniu kąta AOB, poprowadzono do ramienia OB promień wodzący AB, i na nim jako średnicy, nakreślono okrąg który przecina te ramiona w punktach C, D. Znaleźć miejsce środka linii CD.

421. — Są dane dwie linie proste AP, BR, i na każdej jeden punkt A, B; z obydwóch stron tych punktów wzięto odcinki równe AP = AQ = BR = BS, i złączono ich skrajności. Znaleźć 1° miejsce punktów skrzyżowań linij DS i QR; 2° miejsce punktów spotkań linij PR i QS.

422. — Znaleźć miejsce punktów z których prostopadłe spuszczone na boki danego trójkąta mają spodki w linii prostej.

423. — W dwóch kołach O, O′ stycznych zewnętrznie, z punktu zetknięcia A poprowadzono cięciwy AB, AB′ których długości są w stosunku $m : n$; na te cięciwy spuszczono promienie kół prostopadłe które się przecinają w punkcie M. Znaleźć miejsce geometryczne punktu M.

424. — Z punktu A, wziętego na okręgu, poprowadzono cięciwy

AB, AB′, AB″... i na każdej obrano punkt C, C′... taki żeby było $AB \cdot AC = AB' \cdot AC' = \ldots$; dowieśdź że miejscem geometrycznem punktów C, C′, C″... jest prostopadła do średnicy AOD.

425. — Są dane linia prosta MN i kąt BAC mający wierzchołek A zewnątrz tej prostej. Ramie AB kąta spotyka linię MN w punkcie B, a na ramieniu AC wzięto punkt C taki żeby było $AB \cdot AC = k^2$. Wyznaczyć miejsce punktu C, gdy kąt BAC obraca się około swojego wierzchołka.

426. — Miejsce punktów których odległości od dwóch linij prostych danych są w stosunku stałym.

427. — W trójkącie podobnym danemu, jeden z wierzchołków zostaje stały a drugi opisuje linię prostą albo okrąg. Jakie jest miejsce trzeciego wierzchołka?

428. — Są dane punkt A i linia prosta BC; znaleźć miejsce punktów M które dzielą sieczne AN, poprowadzone z punktu A do prostej BC, tak żeby było $AM \cdot AN = k^2$.

429. — Jest dane koło O; z punktu C, wziętego na przedłużeniu średnicy AB, wyprowadzono prostopadłę CD do tej średnicy, i przez punkt D poprowadzono dwie styczne DE i DF do koła. Dowieśdź że cięciwa zetknięć EF spotyka średnicę AB w punkcie stałym K, jakiekolwiek jest położenie punktu D na prostopadłej CD.

Nawzajem, jeśli przez punkt K poprowadzono cięciwę EF i przez jej skrajności E, F styczne koła ED, FD; dowieśdź że miejscem spotkania D tych stycznych jest prostopadła CD do średnicy AKB.

430. — Znaleźć miejsce punktów które dzielą cięciwy koła wychodzące z jednego punktu na dwa odcinki dające wieloczyn stały.

431. — Mając dane koło O i punkt P, znaleźć miejsce punktów M takich żeby odległość MP równała się stycznej poprowadzonej z punktu M do koła.

432. — Dwa trójkąty podobne ABC, A′B′C′ mają dwa boki odpowiedne BC i B′C′ równoległe; gdy trójkąt ABC obraca się około swego wierzchołka A, jakie miejsce opisuje punkt przecięcia dwóch linij prostych które łączą wierzchołki odpowiedne boków BC i B′C′?

433. — Jest dany kąt XOY i punkt A na ramieniu OX. Z punktu A poprowadzono dwie sieczne jakiekolwiek AM i AN, które przecinają ramie OY w punktach M i N; po czem, z tych punktów, poprowadzono proste MM′ i NN′ odpowiednio równoległe do AN i AM; te proste przecinają ramie OX w punktach M′ i N′; 1° Dowieśdź że OA jest średnią proporcyonalną mię-

dzy OM' i ON'; 2° Znaleźć miejsce punktów przecięcia dwóch prostych MM' i NN'.

434. — Znaleźć miejsce środków kół które widać z dwóch punktów danych pod kątami danemi.

435. — Nakreślić koło które widać ze trzech punktów danych pod kątami danemi.

436. — Miejsce wierzchołków trójkątów które mają spólną podstawę i równą ośródkowę jednego z boków przyległych podstawie.

437. — Znaleźć miejsce punktów, z których widać pod kątami równemi dwa dane odcinki jednej linii prostej.

438. — Z punktu zmiennego C okręgu O spuszczono, na daną średnicę AB, prostopadłę CD, i wzięto na promieniu OC punkt M tak żeby było $\frac{OM}{CD} = \frac{m}{n}$. Jakie jest miejsce punktu M?

439 — Znaleźć miejsce punktów których odległości od dwóch danych okręgów są proporcyonalne do promieni tych okręgów.

440. — Znaleźć miejsce środków kół które przecinają dwa dane koła, w dwóch punktach *średnicowo* przeciwległych.

KSIĘGA CZWARTA

MIARA POWIERZCHNI.

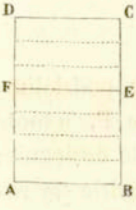
Określenie I. — Dwie figury zawierające tę samą rozciągłość powierzchni nazywają się *równowartemi* (*)

Dwie figury równe są temsamem równowarte; ale dwie figury równowarte nie są koniecznie równe. I tak, kwadrat i koło mogą być równowarte, to jest równe co do powierzchni; ale, nie mając tego samego kształtu, nie mogą być równe.

Zmierzyć powierzchnię jest to wyznaczyć jej stosunek z *powierzchnią wziętą za jedność*. Tą jednością jest zwykle *kwadrat* wystawiony na *jedności linii*. Ztąd pochodzi że miara powierzchni figury nazywa się jej *kwadraturą*,

Twierdzenie I.

Dwa prostokąty tej samej podstawy są proporcyonalne do wysokości.



Niech będą dwa prostokąty ABCD, ABEF mające spólną podstawę AB, i wysokości AD, AF.

Rozróżniamy, jako zwykle, dwa przypadki. I tak,

1° Jeśli wysokości AD, AF są *spółmierne*, przypuśćmy, dla utkwienia myśli, że się mają jako liczby 7 do 4; będzie

$$\frac{AD}{AF} = \frac{7}{4}.$$

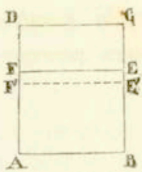
(*) W niektórych dziełach takie figury nazwano *równoważnemi*, wyraz niewłaściwy, wcale inną myśl malujący.

Podzielmy wysokość AD na 7 równych części; wysokość AF będzie zawierała 4 z tych części. Jeśli więc przez punkta podziału poprowadzimy równoległe do podstawy AB, te linie podzielą prostokąt ABCD na 7 prostokątów równych, jako mających równe podstawy i wysokości; 4 z tych prostokątów będą się mieściły w prostokącie ABEF.

Zatem $$\frac{ABCD}{ABEF} = \frac{7}{4}.$$

Więc stosunek prostokątów $\frac{ABCD}{ABEF}$ i stosunek wysokości $\frac{AD}{AF}$, oba wyrażone tą samą liczbą, są równe, to jest

$$\frac{ABCD}{ABEF} = \frac{AD}{AF}.$$



2° Jeśli wysokości AD, AF są *niespółmierne*, wyobraźmy wysokość AD podzieloną na pewną liczbę równych części, i ponieśmy jedną z nich na wysokość AF, tyle razy ile się zmieścić może; niech będzie F' ostatni punkt podziału. Przez punkt F' poprowadźmy rownoległę $F'E'$ do AB. Ponieważ prostokąty ABCD, $ABE'F'$ mają wysokości AD, AF' spółmierne; zatem, na mocy 1, będzie

$$\frac{ABCD}{ABE'F'} = \frac{AD}{AF'}.$$

Owoż, uważajmy że, im na więcej części równych podzielimy wysokość AD, tem bliżej punkt F' padnie punktu F, a może paśdź tak blisko jak się podoba, chociaż go nigdy nie dosięgnie; i zawsze stosunek prostokątów tak przybliżonych będzie się równał stosunkowi wysokości spółmiernych. A że te dwa stosunki zmienne są ciągle równe, zblżając się nieskończenie do swych granic, więc te granice są także równe, to jest

$$\text{gr.}\frac{ABCD}{ABE'F'} = \text{gr.}\frac{AD}{AF'} \quad \text{albo} \quad \frac{ABCD}{ABEF} = \frac{AD}{AF}.$$

Więc, jakiekolwiek są wysokości, spółmierne albo niespółmierne, dwa prostokąty mające równe podstawy są proporcyonalne do swych wysokości.

Wniosek. — Ponieważ w prostokącie można wziąć którykolwiek z boków za podstawę albo za wysokość, więc

Dwa prostokąty tej samej wysokości są proporcyonalne do swych podstaw.

Twierdzenie II.

Stosunek dwóch prostokątów jakichkolwiek rowna się wieloczynowi stosunku podstaw przez stosunek wysokości.

Niech będą P i P' dwa prostokąty, A i A' ich podstawy, B i B' wysokości. Wyobraźmy trzeci prostokąt P'' mający podstawę A pierwszego prostokąta, a wysokość B' drugiego.

Owoż, dwa prostokąty P, P'', mające tę samą podstawę A, dają

$$\frac{P}{P''}=\frac{B}{B'};$$

a dwa prostokąty P'', P', mające tę samą wysokość B', dają także

$$\frac{P''}{P'}=\frac{A}{A'};$$

więc, mnożąc stronami i znosząc spólny czynnik P'', otrzymujemy

$$\frac{P}{P'}=\frac{A}{A'}\times\frac{B}{B'}.$$

Za pomocą tego twierdzenia można znaleźć stosunek dwóch prostokątów których podstawy i wysokości są wymierzone jedną linią, albo nawet dwiema liniami wziętemi za jedność, jako stopy, metry. I tak, przypuśćmy że podstawa $A=40^{stop}$, wysokość $B=2^{met},4$; $A'=0^{met},8$, $B'=9^{stop},6$; będzie

$$\frac{P}{P'}=\frac{40^s}{9,_s6}\times\frac{2^m,4}{0^m,8}=\frac{40^s}{9,6}\times\frac{2,4}{0,8}=\frac{5}{4}.$$

Więc prostokąt P równa się $\frac{5}{4}$ prostokąta P'.

Jeśli podstawa i wysokość obydwóch prostokątów są wymierzone tą samą linią wziętą w jedność, wtedy będziemy mieli

wieloczyn $\frac{A}{A'} \times \frac{B}{B'} = \frac{A \,.\, B}{A' \,.\, B'}$; więc $\frac{P}{P'} = \frac{A \,.\, B}{A' \,.\, B'}$.

Co dowodzi że *dwa prostokąty jakiekolwiek mają się jako wieloczyny z podstawy przez wysokość.*

I tak, jeśli podstawa $A = 9^m$, wysokość $B = 4^m$, $A' = 15^m$, $B' = 8^m$, będzie

$$\frac{P}{P'} = \frac{9 \,.\, 4}{15 \,.\, 8} = \frac{3}{10}; \quad \text{więc} \quad P = \frac{3}{10} P'.$$

Twierdzenie III.

Powierzchnia prostokąta równa się wieloczynowi z podstawy przez wysokość.

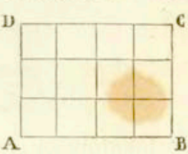
Niech będzie do zmierzenia prostokąt P, mający podstawę A i wysokość B. Jeśli za *jedność powierzchni weźmiemy kwadrat wystawiony na jedności linii*, i porównamy z nim prostokąt P, będzie

$$\frac{P}{1^{kw}} = \frac{A}{1^{l}} \times \frac{B}{1^{l}}; \quad \text{albo} \quad P = A \times B.$$

Owoż, pierwsza strona tej równości wyraża miarę powierzchni prostokąta P, a druga jest wieloczynem liczb które mierzą jego podstawę i wysokość; więc powyższa równość pokazuje że *powierzchnia prostokąta ma za miarę wieloczyn liczb które mierzą jego podstawę i wysokość.*

Wysłowia się to twierdzenie krócej, chociaż mniej jasno, mówiąc:

Powierzchnia prostokąta równa się wieloczynowi z podstawy przez wysokość.



Przykład. — Jeśli podstawa A zawiera 4 *jedności linijne* a wysokość B 3 takich jedności, powierzchnia prostokąta będzie miała $4 \times 3 = 12$ *jedności kwadratowych.* — Ten wynik łatwo widać na figurze; jakoż, linie równoległe do boków przeciwległych prostokąta ABCD, poprowadzone przez punkta podziału podstawy i wysokości, rozkładają ten prostokąt oczywiście na 4×3 czyli 12 kwadratów mających za bok jedność linijną.

Często używa się wyrazu *rozmiar* na oznaczenie linii wymierzonej. I tak, podstawa i wysokość prostokąta są jego dwoma rozmiarami; dlatego też mówi się że *powierzchnia prostokąta równa się wieloczynowi dwóch jego rozmiarów*. Z tej przyczyny, w dawnych dziełach, wieloczyn dwóch linij prostych nazywano ich prostokątem.

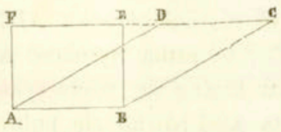
Wniosek. — *Powierzchnia kwadratu równa się drugiej potędze jego boku.*

Bo w kwadracie podstawa A równa się wysokości; więc powierzchnia kwadratu ma za miarę $A \cdot A = A^2$.

Ztąd pochodzi że *drugą potęgę liczby* nazwano *jej kwadratem*.

Twierdzenie IV.

Powierzchnia równoległoboku równa się wieloczynowi z podstawy przez wysokość.



Niech będzie równoległobok ABCD. Jeśli ze skrajności podstawy AB, wyprowadzimy prostopadłe AF i BE aż do przecięcia z bokiem przeciwległym CD, utworzymy prostokąt ABEF równowarty równoległobokowi ABCD. Jakoż, dwa trójkąty prostokątne ADF, i BCE są równe; bo mają przeciwprostokątne AD, BC równe jako boki przeciwległe równoległoboku ABCD, i boki AF, BE także równe jako boki przeciwległe prostokąta ABEF. Teraz uważajmy że, odejmując trójkąt ADF od czworoboku ABCF zostaje równoległobok ABCD, a odejmując od tego samego czworoboku trójkąt BCE, zostaje prostokąt ABEF; ztąd wnosimy że równoległobok ABCD jest równowarty prostokątowi ABEF. Owoż, prostokąt ABEF ma za miarę wieloczyn z podstawy przez wysokość, to jest AB . BE; więc powierzchnia równoległoboku ABCD ma za miarę ten sam wieloczyn AB . BE, to jest równa się wieloczynowi z podstawy AB przez wysokość BE.

Wniosek. — Dwa równoległoboki mające równe podstawy i równe wysokości są równowarte.

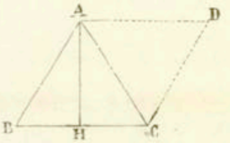
Zatem, dwa równoległoboki mają się jako wieloczyny z podstaw przez wysokości.

Ztąd wynika że:

Dwa równoległoboki równej podstawy są proporcyonalne do swych wysokości; a dwa równoległoboki równej wysokości są proporcyonalne do podstaw.

Twierdzenie V.

Powierzchnia trójkąta równa się połowie wieloczynu z podstawy przez wysokość.



Niech będzie trójkąt ABC, mający bok BC za podstawę, i prostopadłę AH za wysokość. Dopełnijmy równoległoboku BCDA, prowadząc równoległę AD do BC, i równoległę CD do BA. Przekątna AC dzieli ten równoległobok na dwa trójkąty równe ABC i ACD; zatem trójkąt ABC jest połową równoległoboku ABCD, który ma z nim spólną podstawę BC i tę samą wysokość AH. Owoż, powierzchnia równoległoboku równa się wieloczynowi BC . AH; więc powierzchnia trójkąta ABC równa się połowie tego wieloczynu, to jest równa się połowie wieloczynu z podstawy BC przez wysokość AH.

To się wyraża pisząc $ABC = \frac{1}{2}BC . AH$.

Wniosek I. — Dwa trójkąty mające równe podstawy i równe wysokości są równowarte. Zatem, dwa trójkąty mają się jako wieloczyny z podstaw przez wysokości.

Ztąd wynika że:

Dwa trójkąty równej podstawy są proporcyonalne do swych wysokości; a dwa trójkąty równej wysokości są proporcyonalne do podstaw.

Uwaga. — Można wyrazić *powierzchnię trójkąta w funkcyi jego trzech boków a, b, c.*

Jakoż, wiemy już (III, 20 *uw.*) że, w trójkącie ABC wysokość AD, odpowiedająca bokowi a, wyraża się przez

$$AD = \frac{2}{a}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

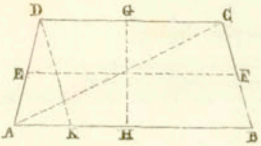
Jeśli pomnożymy tę wysokość przez połowę podstawy, to jest przez $\frac{a}{2}$, otrzymamy powierzchnię S trójkąta w funkcyi boków,

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

Gdy trójkąt jest równoboczny, mający bok a, wtedy $p = \frac{3}{2}a$; zatem wysokość $AD = \frac{a}{2}\sqrt{3}$, i powierzchnia $S = \frac{a^2}{4}\sqrt{3}$. Co zresztą łatwo się wprost znajduje.

Twierdzenie VI.

Powierzchnia trapezu równa się wieloczynowi z połowy summy podstaw przez wysokość.



Niech będzie trapez ABCD. Prowadząc przekątnę AC, rozkładamy go na dwa trójkąty ABC i ACD, które mają podstawy AB i CD trapezu za podstawy, a jego wysokość GH za spólną wysokość.

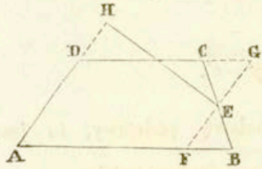
Owoż, trójkąt $ABC = \frac{1}{2}AB \,.\, GH$, a trójkąt $ACD = \frac{1}{2}CD \,.\, GH$; więc, dodając, otrzymamy powierzchnię trapezu,

$$ABCD = \frac{AB + CD}{2} \,.\, GH.$$

Wniosek I. — Niech będą E i F środki boków nierównoległych trapezu ABCD; wiemy że $EF = \frac{AB + CD}{2}$ (I, 33). Więc powierzchnia trapezu $ABCD = \frac{1}{2}EF \,.\, GH$.

To jest, *powierzchnia trapezu równa się wieloczynowi z wysokości przez linię która łączy środki boków nierównoległych.*

II. — W trapezie ABCD, przez środek E boku BC poprowadźmy równoległę FG i prostopadłę EH do boku AD. Dwa trójkąty BEF, CEG są równe; bo mają boki BE, CE równe, kąty przy E rowne, i kąty EBF, ECG równe jako naprzemianległe wewnętrzne względem równoległych AB, DC. Zatem, trapez ABCD jest równowarty równoległobokowi AFGD. Owoż, powierzchnia tego ostatniego ma za miarę wieloczyn podstawy AD przez wysokość EH; więc ten wieloczyn AD . EH jest także miarą trapezu ABCD.



Więc *powierzchnia trapezu równa się wieloczynowi jednego z boków nierównoległych przez odległość od niego środka drugiego boku.*

Uwaga. — Powierzchnia trapezu może się także wyrazić w funkcyi jego czterech boków a, b, c, d.

Jakoż, jeśli poprowadzimy równoległę DK do BC, (*fig. poprzednia*), wysokość GH trapezu, równa wysokości trójkąta ADK odpowiedającej bokowi $AK = a - c$, wyrazi się przez (III, 20, uw.)

$$GH = \frac{1}{2(a-c)}\sqrt{(a-c+b+d)(b+d-a+c)(a-c+d-b)(a-c+b-d)}$$

albo, czyniąc dla skrócenia, $a+b+c+d=2p$, będzie

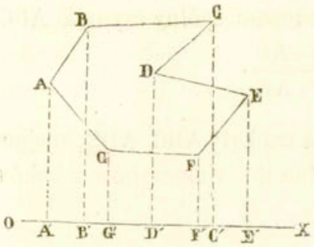
$$GH = \frac{2}{a-c}\sqrt{(p-a)(p-c)(p-c-b)(p-c-d)}.$$

Więc powierzchnia trapezu jest

$$S = \frac{a+c}{2} . GH = \frac{a+c}{a-c}\sqrt{(p-a)(p-c)(p-c-b)(p-c-d)}.$$

Aby wyrachować powierzchnię wielokąta jakiegokolwiek, dość jest rozłożyć ten wielokąt na trójkąty, albo na inne figury któreby łatwo wymierzyć można, i zrobić summę obliczonych powierzchni.

Gdy trzeba wyrachować wielokąt na gruncie, prowadzi się największą przekątnę możebną, i spuszcza się na nią prostopadłę z każdego wierzchołka. Te linie rozłożą wielokąt na trójkąty i na trapezy prostokątne, których nie trudno wymierzyć powierzchnię. Można jeszcze inaczej obliczać powierzchnię wielokąta na gruncie, zwłaszcza gdy jest niedostępny, rozkładając na trapezy prostokątne, sposobem następującym.



Na płaszczyznie danego wielokąta ABCDEFG poprowadźmy, zewnątrz, linię prostą OX, i spuśćmy na nią, ze wszystkich wierzchołków, prostopadłe AA′, BB′... które, dla skrócenia, nazwijmy $a, b, c,$... Oznaczmy przez O punkt wyjścia, i nazwijmy jeszcze a', b', c',... odległości OA′, OB′, OC′... Nakoniec, nazywając P powierzchnię danego wielokąta, otrzymamy formułę łatwą do rachunku,

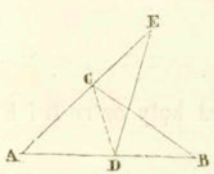
$$2P=(a+b)(b'-a')+(b+c)(c'-b')-(c+d)(c'-d')+(d+e)(e'-d')$$
$$-(e+f)(e'-f')-(f+g)(f'-g')-(g+a)(g'-a').$$

Sama figura pokazuje które trapezy trzeba wziąć dodatnie a które odjemnie.

PORÓWNANIE POWIERZCHNI.

Twierdzenie VII.

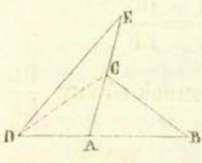
Dwa trójkąty mające kąt równy albo spełniający, są proporcyonalne do wieloczynów z boków tego kąta.



1° Niech będą dwa trójkąty ABC, ADE mające kąt równy A. Połączmy CD.

Dwa trojkąty ABC, ADC, mające spólną wysokość, mają się jako podstawy AB, AD; to jest

$$\frac{ABC}{ADC}=\frac{AB}{AD}.$$



Tak samo, trójkąty ADC, ADE, mające spólną wysokość, są proporcyonalne do podstaw AC, AE; to jest

$$\frac{ADC}{ADE}=\frac{AC}{AE}.$$

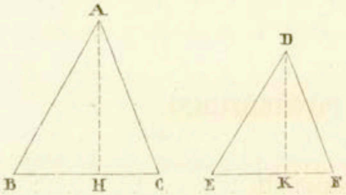
Mnożąc te proporcye stronami i znosząc spólny czynnik ADC, otrzymujemy $\frac{ABC}{ADE} = \frac{AB \,.\, AC}{AD \,.\, AE}$.

2° Dowiedzie się podobnie że dwa trójkąty ABC, ADE, mające kąty A spełniające, są proporcyonalne do wieloczynów z boków tych kątów.

Wniosek. — Więc, dwa trójkąty ABC, ADE, mające kąt A równy albo spełniający są równowarte jeśli $AB \,.\, AC = AD \,.\, AE$.

Twierdzenie VIII.

Dwa trójkąty podobne są proporcyonalne do kwadratów z boków odpowiednych.



Niech będą dwa trójkąty ABC, DEF mające podstawy BC, EF, i wysokości AH, DK. Powierzchnie tych trójkątów mają się jako wieloczyny z podstaw przez wysokości, to jest

$$\frac{ABC}{DEF} = \frac{BC \,.\, AH}{EF \,.\, DK} \quad \text{albo} \quad \frac{ABC}{DEF} = \frac{BC}{EF} \cdot \frac{AH}{DK}.$$

Owoż, trójkąty ABC, DEF są podobne, zatem

$$\frac{BC}{EF} = \frac{AB}{DE};$$

ale trójkąty prostokątne ABH, DEK, mające kąty ostre B i E równe, są także podobne i dają

$$\frac{AH}{DK} = \frac{AB}{DE}; \quad \text{ztąd wynika} \quad \frac{AH}{DK} = \frac{BC}{EF}.$$

Więc, zastępując stosunek $\frac{AH}{DK}$ przez stosunek równy $\frac{BC}{EF}$, otrzymujemy

$$\frac{ABC}{DEF} = \frac{BC}{EF} \cdot \frac{BC}{EC} = \frac{\overline{BC}^2}{\overline{EF}^2}.$$

Inne dowodzenie. — Ponieważ trójkąty ABC, DEF są podobne, ich kąty odpowiedne A i D są równe; zatem, na mocy poprzedzającego twierdzenia, będzie

$$\frac{ABC}{DEF}=\frac{AB\,.\,AC}{DE\,.\,DF}=\frac{AB}{DE}\cdot\frac{AC}{DF}.$$

Owoż, z podobieństwa tych dwóch trójkątów wynika

$$\frac{AB}{DE}=\frac{AC}{DF};$$

więc
$$\frac{ABC}{DEF}=\frac{AB}{DE}\cdot\frac{AB}{DE}=\frac{\overline{AB}^2}{\overline{DE}^2}.$$

TWIERDZENIE IX.

Obwody wielokątów podobnych mają się jako boki odpowiedne albo jako linie odpowiedne, a ich powierzchnie jako kwadraty z tych linij.

1° Nazywając $a, b, c,..$ i $a', b', c',..$ boki odpowiedne dwóch wielokątów podobnych, mamy, na mocy określenia podobieństwa.

$$\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}=..;\quad \text{ztąd}\quad \frac{a+b+c+}{a'+b'+c'+}=\frac{a}{a'}.$$

Więc *obwody dwóch wielokątów podobnych mają się jako boki odpowiedne, albo jako linie odpowiedne.* (III, 16).

2° Powierzchnie dwóch wielokątów podobnych rozkładają się na równą liczbę trójkątów podobnych i podobnie ustawionych; oznaczając przez S powierzchnię pierwszego wielokąta złożoną z trójkątów $T, T_1, T_2...$, przez S powierzchnię drugiego złożoną z trójkątów odpowiednych $T', T'_1, T'_2..$, będzie, na mocy poprzedzającego twierdzenia,

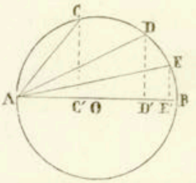
$$\frac{T}{T'}=\frac{a^2}{a'^2},\quad \frac{T_1}{T'_1}=\frac{a^2}{a'^2},\quad \frac{T_2}{T'_2}=\frac{a^2}{a'^3},\quad \frac{T_3}{T'_3}=\frac{a^2}{a'^2}...$$

Ztąd wynika ciąg stosunków równych

$$\frac{T}{T'}=\frac{T_1}{T'_1}=\frac{T_2}{T'_2}=\ldots=\frac{a^2}{a'^2};$$

więc $$\frac{T+T_1+T_2+}{T'+T'_1+T'_2+}=\frac{a^2}{a'^2},\quad \text{albo}\quad \frac{S}{S'}=\frac{a^2}{a'^2}.$$

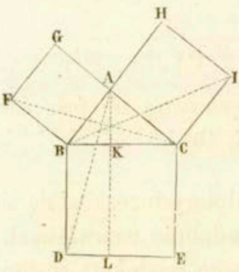
Co dowodzi że *powierzchnie wielokątów podobnych mają się jako kwadraty z boków odpowiednych albo z linij odpowiednych.*



Uwaga. — Jeśli na cięciwach AC, AD, AE, wychodzących z jednej skrajności średnicy AB, wystawimy figury podobne, to one będą się miały jako rzuty tych cięciw na średnicy. Albowiem te figury mają się jako kwadraty z boków odpowiednych AC, AD, AE,... owóż, kwadraty $\overline{AC}^2$, $\overline{AD}^2$, $\overline{AE}^2$,... są proporcyonalne do rzutów AC′, AD′, AE′... ;więc, etc.

Twierdzenie X.

W trójkącie prostokątnym, kwadrat wystawiony na przeciwprostokątnej równa się summie kwadratów wystawionych na bokach kąta prostego (*).



Niech będzie trójkąt ABC prostokątny w A; wystawmy na jego bokach kwadraty BCED, ABFG, ACHI; z wierzchołka A spuśćmy na przeciwprostokątnę BC prostopadłę AK którą przedłużmy aż do przecięcia L z bokiem DE, i poprowadźmy przekątne AD, CF.

Teraz, uważajmy że kąty ABD, FBC są równe, jako złożone z kąta spólnego ABC i z kątów prostych CBD i ABF; dotego, bok AB = BF, i bok BD = BC jako boki kwadratów. Zatem, dwa trójkąty ABD, FBC, mające kąt równy zawarty między bokami równemi, każdy każdemu, są równe.

(*) Twierdzenie Pitagoresa z *Samos*. (580 przed J. Ch.)

Owoż, trójkąt ABD jest połową równoległoboku BDLK który ma z nim spólną podstawę BD i równą wysokośc BK; tak samo, trójkąt FBC, jest połową kwadratu ABFG który ma z nim spólną podstawę BF i równą wysokośc AB; więc połowa prostokąta BDLK równa się połowie kwadratu ABFG, i temsamem, prostokąt BDLK jest równowarty kwadratowi ABFG.

Dowiedzionoby podobnie że prostokąt CELK jest równowarty kwadratowi AClH. Więc summa prostokątów BDLK i CELK, czyli kwadrat BCED, równa się summie kwadratów ABFG, ACIH. To się wyraża pisząc

$$\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2.$$

Wniosek I. — Z powyższego równania wynika

$$\overline{AB}^2 = \overline{BC}^2 - \overline{AC}^2.$$

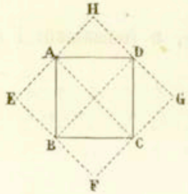
Więc, w trójkącie prostokątnym, *kwadrat wystawiony na jednym boku kąta prostego jest różnicą kwadratów wystawionych na przeciwprostokątnej i na drugim boku.*

II. — Prostokąty BKLD, CKLE, mające spólną wysokość, są proporcyonalne do podstaw BK, CK; a że te prostokąty są równowarte kwadratom ABFG, ACHI, więc

$$\frac{ABFG}{BK} = \frac{ACHI}{CK} = \frac{BCED}{BC}.$$

To pokazuje że, *w trójkącie prostokątnym, kwadraty wystawione na bokach kąta prostego i na przeciwprostokątnej są proporcyonalne do rzutów tych boków na przeciwprostokątnej i do przeciwprostokątnej.*

III. — *Kwadrat wystawiony na przekątnej danego kwadratu jest od niego dwa razy większy.*

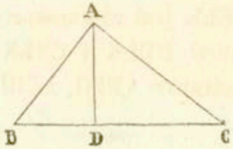


Niech będzie kwadrat ABCD; poprowadźmy przekątnę AC. Trójkąt ABC prostokątny i równoramienny daje

$$\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 = 2\overline{AB}^2.$$

To zadanie łatwo się geometrycznie

okazuje. Przez wierzchołki kwadratu ABCD poprowadźmy równoległe do przekątnych, utworzymy kwadrat EFGH. Otóż, ostatni kwadrat zawiera oczywiście osiem trójkątów równych których pierwszy zawiera cztery; więc kwadrat EFGH jest dwa razy większy od kwadratu ABCD.



IV. — W trójkącie prostokątnym ABC, spuśćmy prostopadłę AD na przeciwprostokątnę, będzie (5)

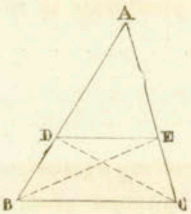
$$BC \,.\, AD = AB \,.\, AC.$$

Otóż,
$$\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2;$$

Jeśli więc podzielimy strony ostatniej równości przez kwadraty stron pierwszej, otrzymamy wynik godny uwagi

$$\frac{1}{\overline{AD}^2} = \frac{1}{\overline{AB}^2} + \frac{1}{\overline{AC}^2}.$$

Uwaga ogólna. — Własności miarowe figur mogą służyć do okazania proporcyonalności linij. J tak, jeśli chcemy dowieśdź że :



W trójkącie ABC *równoległa* DE *do boku* BC *dzieli proporcyonalnie dwa inne boki* AB *i* AC. Połączmy B i E, C i D. Widzimy zaraz że dwa trójkąty ADE, BDE, mające równą wysokość, są proporcyonalne do podstaw AD, BD, to jest

$$\frac{ADE}{BDE} = \frac{AD}{BD}.$$

Tak samo, trójkąty ADE, CDE dają

$$\frac{ADE}{CDE} = \frac{AE}{CE}.$$

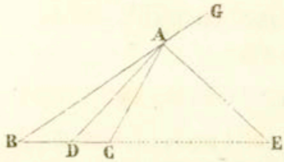
Otóż, dwa trójkąty BDE i CDE, mające spólną podstawę DE, i wierzchołki B i C na równoległej BC do DE, są równowarte: co dowodzi że dwa pierwsze stosunki $\frac{ADE}{BDE}$ i $\frac{ADE}{CDE}$ są równe, a temsamem i dwa drugie $\frac{AD}{BD}$ i $\frac{AE}{CE}$;

więc
$$\frac{AD}{BD} = \frac{AE}{CE}.$$

To dowodzenie w tem godne uwagi że nie potrzebuje rozróżniać odcinków na spółmierne i niespółmierne.

Weźmy jeszcze inny przykład.

W *każdym trójkącie* ABC, *dwójsieczna* AD *kąta* A *i dwójsieczna* AE *kąta spełniającego dzielą, każda, bok przeciwległy* BC *na dwa odcinki proporcyonalne do boków przyległych.*



Aby dowieść tego twierdzenia, uważajmy że: 1° dwa trójkąty ABD, ACD mające spólny wierzchołek A i podstawy BD, CD w linii prostej, są proporcyonalne do tych podstaw, to jest

$$\frac{ABD}{ACD}=\frac{BD}{CD}.$$

Ale te same trójkąty ABD, ACD, mające za wierzchołek punkt D dwójsiecznej kąta BAC, są równej wysokości, zatem proporcyonalne do podstaw AB, AC, to jest

$$\frac{ABD}{ACD}=\frac{AB}{AC}.$$

Więc, porównywając te dwie proporcye, otrzymujemy

$$\frac{BD}{CD}=\frac{AB}{AC}.$$

2° Dwa trójkąty AEB, AEC, równej wysokości, są proporcyonalne do podstaw EB, EC, to jest

$$\frac{AEB}{AEC}=\frac{EB}{EC}.$$

Te same trójkąty AEB, AEC, mające wierzchołek w punkcie E dwójsiecznej spełnienia kąta BAC, są równej wysokości, zatem proporcyonalne do podstaw AB, AC, to jest

$$\frac{AEB}{AEC}=\frac{AB}{AC}$$

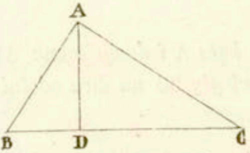
więc

$$\frac{EB}{EC}=\frac{AB}{AC}.$$

Powyższe dowodzenie w tem znakomite że nie wymaga kreślenia żadnej linii.

Dobrze jest wiedzieć że:

W trójkącie prostokątnym ABC *summa boków kąta prostego jest mniejsza od summy przeciwprostokątnej i odpowiedającej wysokości.*



Jakoż, $\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = \overline{BC}^2$

i $AB \cdot AC = BC \cdot AD.$

Ztąd wynika

$$\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 + 2AB \cdot AC < \overline{BC}^2 + 2BC \cdot AD + \overline{AD}^2.$$

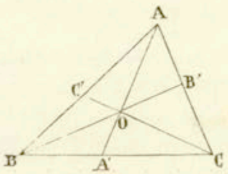
Więc,

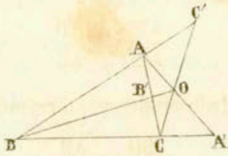
$$AB + AC < BC + AD.$$

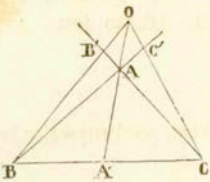
Dowiedźmy teraz następującego twierdzenia.

Jeśli, przez punkt O *płasczyzny trójkąta* ABC *i przez wierzchołki, poprowadzimy linie proste które spotykają boki przeciwległe w punktach* A′, B′, C′, *będzie*

$$\frac{OA'}{AA'} + \frac{OB'}{BB'} + \frac{OC'}{CC'} = 1.$$







1° Uważajmy punkt O wewnątrz trójkąta ABC, jako na pierwszej figurze. Powierzchnia trójkąta ABC składa się z trójkątów BOC, AOC, AOB; więc

$$\frac{BOC}{ABC} + \frac{AOC}{ABC} + \frac{AOB}{ABC} = 1. \qquad (1)$$

Owoż, stosunek trójkątów BOC i ABC, mających spólną podstawę BC, jest równy stosunkowi wysokości, albo stosunkowi linij OA′ i AA′. Tak samo o dwóch innych stosunkach. Więc, podstawiając, będzie

$$\frac{OA'}{AA'} + \frac{OB'}{BB'} + \frac{OC'}{CC'} = 1.$$

2° Jeśli punkt O leży zewnątrz trójkąta ABC, w jednym ze trzech kątów, jako na drugiej figurze, uważamy że powierzchnia tego trójkąta jest summą trójkątów BOC, AOB mniej AOC; zatem

$$\frac{BOC}{ABC} + \frac{AOB}{ABC} - \frac{AOC}{ABC} = 1,$$

Ale trójkąty OBC, ABC, spólnej podstawy BC, są proporcyonalne do wysokości albo do linij OA′, AA′; etc.

więc
$$\frac{OA'}{AA'}+\frac{OC'}{CC'}-\frac{OB'}{BB'}=1. \qquad (2)$$

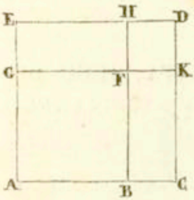
3° Nakoniec, jeśli punkt O leży w kącie wierzchołkiem przeciwległym jednemu z kątów trójkąta ABC, jako na trzeciej figurze, wtedy uważamy że trójkąt ABC równa się trójkątowi OBC mniej trójkątami OAC i OAB; więc
$$\frac{OA'}{AA'}-\frac{OB'}{BB'}-\frac{OC'}{CC'}=1. \qquad (3)$$

Zważając na znaki stosunków, łatwo widzimy że równania (2) i (3) wywodzą się z równania (1).

Ten przykład jest dowodem użyteczności ilości odjemnych w geometryi.

Można geometrycznie dowodzić formuł algebrycznych. I tak, znajoma formuła $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$ wysłowia się geometrycznie jako twierdzenie,

Kwadrat wystawiony na summie dwóch linij równa się summie kwadratów wystawionych na tych liniach więcej podwójny ich prostokąt.



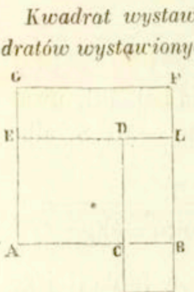
Aby dowieśdź tego twierdzenia, weźmy linię AC równą summie dwóch linij AB, BC: na liniach AC, AB wystawmy kwadraty ACDE, ABFG, i przedłużmy boki BF, GF aż do spotkania w punktach H, K.

Owoż, prostokąt FKDH jest oczywiście kwadratem wystawionym na BC; a prostokąty BCKF, GFHE, mające rozmiary AB i BC, są równe.

Więc $(AB+BC)^2=\overline{AB}^2+\overline{BC}^2+2AB.BC.$

Tak samo, formuła $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$ wysłowia się:

Kwadrat wystawiony na różnicy dwóch linij równa się summie kwadratów wystawionych na tych liniach mniej podwójny ich prostokąt.



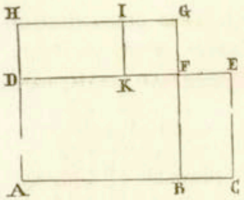
Aby tego dowieśdź, weźmy linię AC równą różnicy dwóch linij AB, BC; na tych trzech liniach wystawmy kwadraty ACDE, ABFG, BCHK, i przedłużmy ED aż do spotkania L.

Prostokąty ELFG, DHKL, mające rozmiary AB, BC, są równe, a cała figura składa się z kwadratów ABFG i BCHK; zatem, odejmując od niej dwa prostokąty ELFG, DHKL pozostaje kwadrat ACDE wystawiony na różnicy AB — BC.

Więc $(AB-BC)^2=\overline{AB}^2+\overline{BC}^2-2AB\times BC.$

Nakoniec dowiedźmy twierdzenia.

Prostokąt wystawiony na summie i różnicy dwóch linij, równa się różnicy kwadratów wystawionych na tych liniach.



Niech będzie prostokąt ACED którego podstawa AC jest summą dwóch linij AB i BC, a zaś wysokość AD ich różnicą. Na linii AB wystawmy kwadrat ABGH ; na linii DE weźmy DK = DA i dopełnijmy prostokąta DKIH.

Prostokąt KFGI jest oczywiście kwadratem wystawionym na linii KF równej BC ; a zaś dwa prostokąty BCEF, DKIH, mające rozmiary AD i BC, są równe ; zatem prostokąt ACED jest równowarty wielokątowi ABFKIH, który jest różnicą kwadratów ABGH i KFGI, wystawionych na liniach AB i BC.

Więc $$(AB + BC)(AB - BC) = \overline{AB}^2 - \overline{BC}^2.$$

To twierdzenie jest geometrycznym obrazem ważnej, algebrycznej formuły. $$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2.$$

ZWIĄZKI MIĘDZY POWIERZCHNIĄ TRÓJKĄTA, JEGO BOKAMI, I PROMIENIAMI KÓŁ OPISANEGO, WPISANEGO I ZAWPISANYCH.

Oznaczamy, jako zwykle, przez a, b, c boki trójkąta ABC przeciwległe kątom A, B, C ; przez S jego powierzchnię, przez $2p$ obwód, przez R i r promienie kół opisanego i wpisanego.

W trójkącie ABC mamy (III, 22)

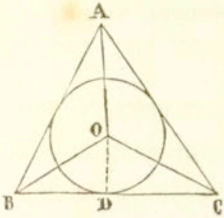
$$AB \,.\, AC = 2R \,.\, AD.$$

Jeśli więc pomnożymy obie strony przez trzeci bok BC, uważając że $\frac{1}{2}BC \times AD = S$, otrzymamy $AB \,.\, AC \,.\, BC = 4R \,.\, S$, albo

$$4RS = abc \ (1) ; \quad \text{ztąd} \quad R = \frac{abc}{4S} = \frac{abc}{4\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}.$$

Co daje promień koła opisanego na trójkącie w funkcyi jego boków.

Niech będzie teraz koło promienia r wpisane w trójkąt ABC.



Połączmy OA, OB, OC. Trójkąty BOC, AOC, AOB mają za miarę $\frac{1}{2}ar$, $\frac{1}{2}br$, $\frac{1}{2}cr$. Więc powierzchnia trójkąta ABC jest

$$S=\frac{ar+br+cr}{2}=\left(\frac{a+b+c}{2}\right)r;$$

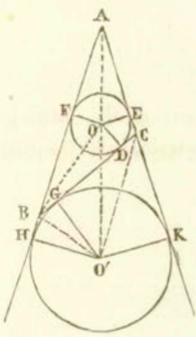
albo, czyniąc $a+b+c=2p$,

$$S=pr \quad (2), \quad \text{zkąd} \quad r=\frac{S}{p}=\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}}$$

Więc, *powierzchnia trójkąta równa się wieloczynowi z połowy obwodu przez promień koła wpisanego.*

Druga formuła daje promień koła wpisanego w funkcyi boków trójkąta.

Wiadoma formuła, która wyraża powierzchnię trójkąta w funkcyi boków, może się teraz otrzymać bardzo pięknie za pomocą geometryi.



Niech będzie trójkąt ABC. Środki O, O′, kół wpisanego i zawpisanego, leżą, jako wiadomo, na dwójsiecznych kątów wewnętrznych i zewnętrznych. Poprowadźmy promienie zetknięć OD, OE, OF, O′G, O′H, O′K. Wiemy już (II, *zag.* 9) że:

$AH=p$, $AF=p-a$, $BF=p-b$, $BH=p-c$.

Teraz, uważajmy że dwa trójkąty podobne AFO, AHO′ dają

$$\frac{AF}{AH}=\frac{FO}{HO'}; \qquad \text{ztąd} \qquad (p-a)r'=pr;$$

nazywając r' promień koła zawpisanego stycznego do boku BC.

Następnie, dwa trójkąty BFO, BHO′, mające boki prostopadłe każdy do każdego, są także podobne i dają

$$\frac{BF}{HO'}=\frac{FO}{BH}; \qquad \text{zkąd} \qquad (p-b)(p-c)=rr'.$$

Z tych dwóch równości, pomnożonych stronami, wynika

$$(p-a)(p-b)(p-c)=pr^2.$$

Pamiętając że $pr=S$, pomnóżmy obie strony przez p, otrzymamy

$$p(p-a)(p-b)(p-c)=p^2r^2=S^2;$$

Więc

$$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}. \qquad (3)$$

Znając boki trójkąta, nie trudno wyznaczyć promienie kół zawpisanych.

Jakoż, trójkąt $ABC=ABO'+ACO'-BCO'$. Więc

$$S=\frac{cr'}{2}+\frac{br'}{2}-\frac{ar'}{2}=(p-a)r' \quad (4); \quad \text{zkąd} \quad r'=\frac{S}{p-a}.$$

Nazywając r'', r''', promienie kół zawpisanych w kąty B, C, otrzymamy podobnie:

$$S=(p-b)r'' \quad (5); \quad \text{zkąd} \quad r''=\frac{S}{p-b}.$$

$$S=(p-c)r''' \quad (6); \quad \text{zkąd} \quad r'''=\frac{S}{p-c}.$$

Między promieniami kół, wpisanego i zawpisanych, istnieje związek który się łatwo za pomocą poprzedzających formuł znajduje.

Jakoż, formuły (2), (4), (5), (6) dają

$$p=\frac{S}{r}, \quad p-a=\frac{S}{r'}, \quad p-b=\frac{S}{r''}, \quad p-c=\frac{S}{r'''};$$

ztąd, odciągając pierwszą równość od summy trzech następujących i dzieląc przez S, wynika

$$\frac{1}{r'}+\frac{1}{r''}+\frac{1}{r'''}=\frac{1}{r}. \qquad (7).$$

ot jest, *summa odwrotności promieni kół zawpisanych w trójkąt równa się odwrotności promienia koła wpisanego.*

Można wyrazić powierzchnię trójkąta w funkcyi promieni kół wpisanego i zawpisanych; albowiem, mnożąc przez siebie formuły (2), (4), (5), (6), będzie

$$S^4 = p(p-a)(p-b)(p-c)\,rr'r''r''' = S^2 rr'r''r''';$$

więc

$$S = \sqrt{rr'r''r'''} \qquad (8).$$

Między trzema wysokościami trójkąta i promieniem koła wpisanego jest także związek. Jakoż, nazywając a', b', c' wysokości odpowiedające bokom a, b, c; mamy

$$aa' = bb' = cc' = 2pr \quad \text{albo} \quad \frac{a}{\frac{1}{a'}} = \frac{b}{\frac{1}{b'}} = \frac{c}{\frac{1}{c'}} = \frac{2p}{\frac{1}{r}}.$$

Owoż, summa liczników $a+b+c=2p$;

więc

$$\frac{1}{a'} + \frac{1}{b'} + \frac{1}{c'} = \frac{1}{r} \qquad (9).$$

to jest, *Summa odwrotności trzech wysokości trójkąta równa się odwrotności promienia koła wpisanego.*

Z formuł (7) i (9) wynika

$$\frac{1}{r'} + \frac{1}{r''} + \frac{1}{r'''} = \frac{1}{a'} + \frac{1}{b'} + \frac{1}{c'}.$$

Można mieć powierzchnię trójkąta w funkcyi trzech wysokości. Jakoż, podstawiając w formule (3) wartości

$$p = \frac{S}{r} = S\left(\frac{1}{a'} + \frac{1}{b'} + \frac{1}{c'}\right), \quad a = \frac{2S}{a'}, \quad b = \frac{2S}{b'}, \quad c = \frac{2S}{c'};$$

otrzymujemy

$$\frac{1}{S} = \sqrt{\left(\frac{1}{a'} + \frac{1}{b'} + \frac{1}{c'}\right)\left(\frac{1}{b'} + \frac{1}{c'} - \frac{1}{a'}\right)\left(\frac{1}{a'} + \frac{1}{c'} - \frac{1}{b'}\right)\left(\frac{1}{a'} + \frac{1}{b'} - \frac{1}{c'}\right)}$$

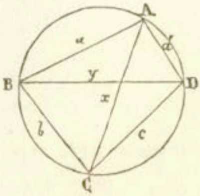
albo

$$S = \frac{a'^2b'^2c'^2}{\sqrt{(a'b'+a'c'+b'c')(a'b'+a'c'-b'c')(a'b'+b'c'-a'c')(a'c'+b'c'-a'c')}}$$

Uwaga. — Wiemy że najmniejsza wysokość trójkąta odpowieda największemu bokowi; więc, nazywając a najmniejszą wysokość, aby trójkąt, którego są dane trzy wysokości, był możebny trzeba i dość jest żeby było

$$\frac{2S}{a'} < \frac{2S}{b'} + \frac{2S}{c'}, \quad \text{albo} \quad \frac{1}{a'} < \frac{1}{b'} + \frac{1}{c'}.$$

Zakończymy ten rozdział wyznaczeniem powierzchni czworoboku wpisalnego, w funkcyi jego boków.



Niech będzie czworobok ABCD wpisany w koło promienia R. Oznaczmy jego boki AB, BC, CD, DA przez a, b, c, d; przekątnę AC przez x. Formuła (1) daje

$$\text{tr. ABC} \times 4\text{R} = abx, \qquad \text{tr. ACD} \times 4\text{R} = cdx.$$

Dodając stronami, i uważając że summa ABC + ACD wyraża powierzchnię S czworoboku, otrzymujemy

$$4\text{RS} = (ab + cd)x.$$

Ale w trójkącie ABC, biorąc wysokość odpowiedającą bokowi a, mamy (III, 24 i 20 uw.)

$$bx = \frac{\text{R}}{a}\sqrt{4a^2b^2 - (a^2 + b^2 - x^2)^2}.$$

Z tych równań, pomnożonych stronami, wynika

$$\text{S} = \frac{ab + cd}{4ab}\sqrt{4a^2b^2 - (a^2 + b^2 - x^2)^2}.$$

Podstawiając teraz wartość $x^2 = \dfrac{(ac + bd)(ad + bc)}{ab + cd}$ (III, 27. uw.),

znajdziemy $\text{S} = \dfrac{1}{4}\sqrt{4(ab + cd)^2 - (a^2 + b^2 - c^2 - d^2)^2}.$

Można uprościć, rozkładając ilość pod pierwiastnikiem na czynniki, jako uż widzieliśmy; co daje najpierwej

$$\text{S} = \frac{1}{4}\sqrt{(a+b+c-d)(a+b-c+d)(a-b+c+d)(b+c+d-a)};$$

po czem, czyniąc dla skrócenia, $a + b + c + d = 2p$, otrzymujemy

$$\text{S} = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}.$$

Jeśli jeden z boków czworoboku maleje aż do zera, np. $d = 0$, wtedy czworobok staje się trójkątem, i ostatnia formuła sprawdza formułę (3).

Wniosek. — Podstawiając wartość na x, znajdziemy łatwo promień koła opisanego na czworoboku,

$$\text{R} = \frac{(ab + cd)x}{4\text{S}} = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{(ab + cd)(ac + bd)(ad + bc)}{\text{S}}}.$$

WIELOKĄTY FOREMNE.

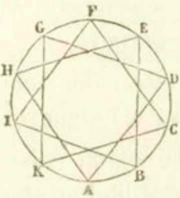
Twierdzenie XI.

Istnieją wielokąty foremne wszelkiej liczby boków.

Jakoż, można sobie wyobrazić okrąg podzielony na tyle równych części ile się podoba, i połączyć punkta podziału. Utworzy się tym sposobem wielokąt, którego wszystkie boki będą równe jako cięciwy podpasujące łuki równe, i wszystkie kąty także równe jako mające tę samą miarę. Więc ten wielokąt, zarazem równoboczny i równokątny, jest foremny.

Twierdzenie XII.

Jeśli podzielimy okrąg na n *części równych w punktach* A, B, C.. *i, poczynając od jednego z nich* A, *połączymy te punkta co pierwszy, co drugi,... a ogólnie co* k; *byle* k *i* n *były liczbami pierwszemi między sobą, utworzymy wielokąt foremny mający* n *boków.*



Niech będzie łuk $AD = AB.k$. Ponieważ liczby k i n są pierwszemi między sobą, najmniejszym spólnym wielownikiem łuku $AB.k$ i okręgu $AB.n$, jest $AB.k.n$. Owoż ten wieloczyn jest to samo co $(AB.k)n$ albo $(AB.n)k$, to jest n razy łuk AD, albo k razy okrąg; więc, łącząc punkta podziału co k, utworzymy wielokąt foremny mający n boków, którego obwód podpasuje k razy okrąg.

Takie wielokąty nazywaja się *gwiaździstemi.*

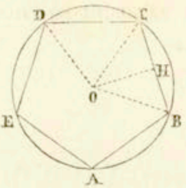
Figura pokazuje dziesięciokąt gwiazdzisty ADGKCFIBEHA. Okrąg jest podzielony na 10 części; punkta podziału połączone co *trzeci* dają 10 boków, a obwód podpasuje 3 razy okrąg.

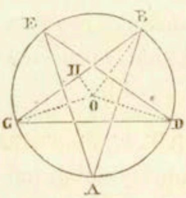
Uwaga. — Jeśli liczby k i n mają największy spólny dzielnik d wtedy najmniejszym wielownikiem łuku $AB.k$ i okręgu $AB.n$

jest $(AB \,.\, k)\frac{n}{d} = (AB \,.\, n)\frac{k}{d}$. Więc, łącząc punkta podziału co k, otrzymujemy wielokąt foremny mający $\frac{n}{d}$ boków i podpasujący $\frac{k}{d}$ razy okrąg.

Twierdzenie XIII.

Na każdym wielokącie foremnym można opisać okrąg, i wpisać w niego okrąg.





1° Przez trzy wierzchołki A, B, C wielokąta foremnego poprowadźmy okrąg. Środek O tego okręgu leży na dwójsiecznej kąta B, bo cięciwy AB, BC są równe. Połączmy OB, OC, OD.

Trójkąt OBC jest równoramienny, przeto kąt CBO = BCO = $\frac{1}{2}$ BCD; zatem dwa trójkąty OCB, OCD są równe, bo mają kąty przy C równe zawarte między dwoma bokami równemi; ztąd wynika że bok OD = OB. Więc okrąg przechodzący przez trzy wierzchołki A, B, C przechodzi także przez czwarty D. Dowiedzionoby podobnie że przechodzi przez wszystkie inne wierzchołki; więc ten okrąg jest opisany na wielokącie foremnym.

Nadto, na wielokącie foremnym jeden tylko okrąg opisać można; bo, przez trzy punkta A, B, C, nieleżące w linii prostej, jeden tylko okrąg przechodzić może.

2° Wszystkie boki AB, BC, .. wielokąta foremnego, jako cięciwy koła opisanego, są równo oddalone od jego środka O; więc okrąg nakreślony ze środka O, odległością OH jako promieniem, jest styczny we środku każdego boku wielokąta; więc jest wpisany w ten wielokąt.

Okrąg wpisany jest jedyny; bo wewnątrz figury trzech linij prostych istnieje tylko jeden punkt równo oddalony od tych linij.

Wniosek I. — W wielokącie foremnym, prostopadłe wyprowadzono ze środków boków i dwójsieczne kątów wewnętrnych spotykają się w jednym punkcie, który jest spólnym środkiem kół opisanego i wpisanego. Ten środek dwóch kół nazywają czasem *środkiem wielokąta foremnego* (*). Nazwano także *promieniem wielokąta foremnego* promień koła opisanego, a zaś *apotemą* tego wielokąta promień koła wpisanego.

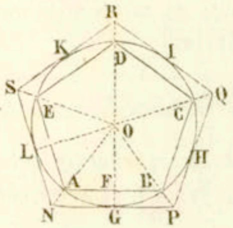
Wniosek II. — Linia *łamana foremna*, to jest łamana wypukła, zarazem równoboczna i równokątna, ma także *środek*, *promień* i *apotemę*.

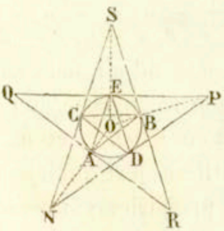
Uwaga. — Z twierdzenia i wniosku poprzedzającego wynika że : W *wielokącie foremnym, apotemy, i przekątne wierzchołków przeciwległych* (**), są OSIAMI SYMETRYI.

Zatem *wielokąt foremny jest figurą symetryczną, i ma tyle osi symetryi ile boków.*

Twierdzenie XIV.

Mając dany wielokąt foremny wpisany w koło, można zawsze opisać na temże kole wielokąt foremny podobny. I NAWZAJEM.





Niech będzie wielokąt foremny wpisany ABCDE. Przez środki łuków G, H, I... poprowadźmy styczne NP, PQ...; wielokąt opisany NPQRS będzie podobny danemu.

Jakoż, prosta ON. jako dwójsieczna kąta N stycznych, przechodzi przez wierzchołek A który jest środkiem łuku GL; tak samo dwójsieczna OP kąta P przechodzi przez wierzchołek B; etc. Ale boki NS i AE, NP i AB, etc są równoległe między sobą; więc kąt $N = A$, $P = B$, ...

(*) Nazwisko *środka* nie jest właściwe w wielokącie foremnym nieparzystej liczby boków ; bo ten punkt nie dzieli na dwie równe części linij prostych wpisanych które przez niego przechodzą.

(**) W wielokącie *parzystej liczby boków*, dwa wierzchołki, albo dwa boki

Nadto, w trójkącie ONP, $\frac{NP}{AB} = \frac{OP}{OB}$;

a w trójkącie OPQ, $\frac{PQ}{BC} = \frac{OP}{OB}$; więc $\frac{NP}{AB} = \frac{PQ}{BC}$.

Dowiedzionoby podobnie proporcyonalności wszystkich innych boków.

Więc wielokąt opisany NPQRS jest podobny wpisanemu ABCDE, a że ostatni jest foremny, więc pierwszy jest także foremny.

Wzajemnica tego twierdzenia, to jest: *mając dany wielokąt foremny opisany na kole, można zawsze wpisać w to koło wielokąt podobny*, jest widoczna.

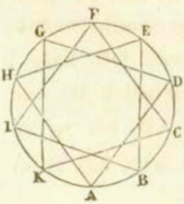
Uwaga. — Można także opisać wielokąt podobny foremnemu wpisanemu, prowadząc styczne przez wierzchołki tego ostatniego.

Opisuje się jeszcze wielokąt podobny foremnemu wpisanemu, sposobem następującym: przez środek G łuku AB poprowadź prostopadłę NP do promienia OG i przedłuż promień OA aż do spotkania N; po czem, ze środka koła O promieniem ON, zakreśl okrąg na który przenieś bok NP = 2NG. jako cięciwę, tyle razy ile można; otrzymasz wielokąt szukany.

Dowodzenia dwóch powyższych twierdzeń stosują się zarazem do wielokątów foremnych gwiazdzistych, jako widać na figurach.

Twierdzenie XV.

Liczba wielokątów foremnych mających n *boków równa się połowie liczby która wyraża ile jest całkowitych przed* n *i pierwszych do* n.



Niech będą 1, $a, b \ldots n - b, n - a, n - 1$ wszystkie całkowite mniejsze od n i pierwsze do n. Podzielmy okrąg na n równych części i połączmy punkta podziału co jeden,... co a... Ponieważ każda z tych liczb jest mniejsza od n i pierwsza do n, przejdziemy zawsze

są *przeciwległe*, gdy je przedziela połowa liczby innych.

W wielokącie *nieparzystej liczby boków*, wierzchołek i bok są *przeciwległe*, gdy je przedziela połowa liczby innych wierzchołków albo boków.

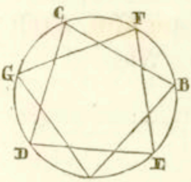
I tak, są przeciwległe w *sześciokącie* ABCDEF, wierzchołki A i D, boki AB i DE; a w pięciokącie wierzchołek A i bok CD; etc.

przez wszystkie punkta podziału nim wrócimy do punktu wyjścia, i tym sposobem utworzymy tyle wielokątów foremnych ile jest całkowitych przed n i pierwszych do n. Te wielokąty są równe dwojanami, bo łuki $AB.a$ i $AB(n-a)$, których summa stanowi okrąg, mają tę samą cięciwę; przeto, łącząc punkta podziału co a, tworzymy ten sam wielokąt jako łącząc je co $n-a$, ale idąc w stronę przeciwną. Więc liczba wielokątów foremnych mających n boków równa się połowie liczby wyrażającej ile jest całkowitych przed n i pierwszych do n.

Uwaga. — Jest 1 tylko trójkąt foremny, 1 czworobok foremny i 1 sześciokąt foremny; ale 2 pięciokąty foremne i 2 dziesięciokąty foremne; 3 siedmiokąty foremne; etc.

Twierdzenie XVI.

Summa kątów wewnętrznych wielokąta foremnego n *boków równa się tyle razy dwom kątom prostym ile jest jedności w liczbie* n — 2k; *oznaczając przez* k *liczbę wziętych przedziałów.*



Niech będzie ABC... GA wielokąt foremny n boków, utworzony biorąc po k równych przedziałów. Kąt wewnętrzny ABC ma za miarę połowę łuku ADC, to jest $\frac{AD(n-2k)}{2}$; a summa wszystkich n kątów równych wielokąta ma za miarę $\frac{1}{2}AD.n.(n-2k)$ czyli $\frac{1}{2}$ okrąg $\times (n-2k)$, więc ta summa kątów równa się $2^p \times (n-2k)$.

Wniosek. — *Summa kątów zewnętrznych wielokąta foremnego równa się* 4k *kątów prostych.*

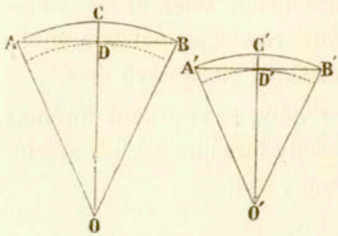
Bo summa kątów zewnętrznych z wewnętrznemi czyni $2n$ kątów prostych; a że same wewnętrzne wartają $2^p\,.\,(n-2k)$ czyli $2n-4k$ kątów prostych, więc summa kątów zewnętrznych równa się $4k$ kątów prostych.

Uwaga. — Biorąc $k=1$, otrzymujemy twierdzenia już znane.

Twierdzenie XVII.

Dwa wielokąty foremne równej liczby boków są podobne.

Obwody tych wielokątów są proporcyonalne do promieni albo do apotem, a powierzchnie do kwadratów z tych linij.



Jokoż, 1° dwa wielokąty foremne mają boki proporcyonalne, bo te boki są równe w każdej figurze; i mają kąty równe, bo wartość kąta wewnętrznego w wielokącie foremnym zależy od liczby boków (I, 26, uw.), a liczba boków jest ta sama w obydwóch figurach; więc te wielokąty są podobne.

2° Niech będą teraz AB i A′B′ boki odpowiedne dwóch wielokątów foremnych podobnych; O i O′ środki, OA i O′A′ promienie, OD i O′D′ apotemy tych wielokątów. Trójkąty prostokątne OAD, O′A′D′ są podobne, bo mają kąty ostre AOD, A′O′D′ równe jako połowy kątów środkowych równych. Więc

$$\frac{AD}{A'D'} \quad \text{albo} \quad \frac{AB}{A'B'}=\frac{OA}{O'A'}=\frac{OD}{O'D'}\ .$$

Owóż, obwody wielokątów podobnych mają się jako boki odpowiedne, a powierzchnie jako kwadraty z tych boków (9); więc, nazywając P i P′ obwody dwóch wielokątów foremnych podobnych, będzie

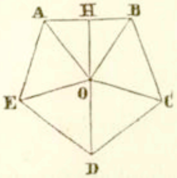
$$\frac{P}{P'}=\frac{AO}{A'O'}=\frac{OD}{O'D'}\ .$$

Jeśli te wielokąty są wypukłe, nazywając S i S′ ich powierzchnie, mamy

$$\frac{S}{S'}=\frac{\overline{AO}^2}{\overline{A'O'}^2}=\frac{\overline{OD}^2}{\overline{O'D'}^2}\ .$$

TWIERDZENIE XVIII.

Powierzchnia wielokąta foremnego wypukłego ma za miarę wieloczyn z obwodu przez połowę apotemy.



Niech będzie O środek wielokąta foremnego ABCDE. Poprowadźmy apotemę OH i promienie OA, OB, OC, OD, OE, które rozłożą ten wielokąt na trójkąty mające jego boki AB, BC, CD,.. za podstawy, a jego apotemę OH za spólną wysokość. Więc summa powierzchni tych trójkątów, to jest powierzchnia wielokąta foremnego ABCDE, ma za miarę wieloczyn z summy bo ków AB, BC, CD... przez połowę apotemy OH, czyli wieloczyn z obwodu przez połowę apotemy.

Oznaczając przez a, p, S, apotemę, obwód, i powierchnię wielokąta foremnego, mamy

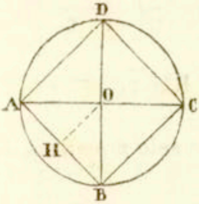
$$S = \tfrac{1}{2} pa.$$

UWAGA. — Z poprzedzającego dowodzenia wynika że *powierzchnia wielokąta opisanego na kole ma za miarę połowę wieloczynu z obwodu przez promień tego koła.*

ZAGADNIENIA O WIELOKĄTACH FOREMNYCH.

ZAGADNIENIE I.

Wpisać kwadrat w dane koło.



Poprowadźmy dwie średnice AC i BD prostopadłe do siebie i połączmy ich skrajności. Czworobok ABCD jest kwadratem, bo ma wszystkie boki równe jako cięciwy ćwiercianów, i kąty proste.

Aby otrzymać stosunek boku kwadratu do promienia R, uważajmy że trójkąt ABO, prostokątny i równoramienny, daje

$$\overline{AB}^2 = \overline{OA}^2 + \overline{OB}^2 = \overline{2OA}^2,$$

zkąd $$\frac{AB}{OA} = \sqrt{2} \quad \text{albo} \quad AB = OA\sqrt{2}.$$

Więc *bok kwadratu wpisanego w koło promienia* R *równa się* $R\sqrt{2}$.

Apotema $OH = \frac{1}{2}R\sqrt{2}$ (I, 32.).

Zagadnienie II.

Wpisać sześciokąt foremny i trójkąt równoboczny w dane koło.

1° Niech będzie AB bok sześciokąta foremnego wpisanego. Kąt środkowy AOB jest *szósta* częścią *czterech* kątów prostych, albo $\frac{2}{3}$ kąta prostego. Zatem summa dwóch innych kątów A i B trójkąta równoramiennego OAB równa się 2 kątom prostym mniej $\frac{2}{3}$ kąta prostego, to jest $\frac{4}{3}$ kąta prostego. A że te dwa kąty są równe, każdy z nich jest $\frac{2}{3}$ kąta prostego, i trójkąt AOB jest równoboczny.

Więc *bok sześciokąta foremnego wpisanego w koło równa się jego promieniowi.*

Aby zbudować sześciokąt foremny promienia R, dość nakreślić tym promieniem okrąg, i wpisać w niego sześć cięciw, po sobie idących, równych promieniowi.

2° Łącząc co drugi wierzchołki sześciokąta foremnego ABCDEF, utworzymy trójkąt równoboczny wpisany ACE.

Aby wyznaczyć stosunek boku tego trójkąta do promienia, poprowadźmy średnicę BE; będzie, w trójkącie prostokątnym ABE,

$$\overline{AE}^2 = \overline{BE}^2 - \overline{AB}^2, \quad \text{albo} \quad \overline{AE}^2 = \overline{4R}^2 - \overline{R}^2 = \overline{3R}^2.$$

Ztąd $$\frac{AE}{R} = \sqrt{3}, \quad \text{albo} \quad AE = R\sqrt{3}.$$

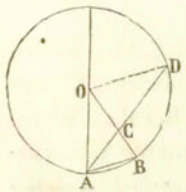
Więc *bok trójkąta równobocznego wpisanego w koło promienia* R *równa się* $R\sqrt{3}$.

Co do apotem trójkąta równobocznego i sześciokąta foremnego, one są połowami nawzajem boków tych wielokątów. Jakoż, w trójkącie ABE, apotema OK trójkąta wpisanego ACE jest połową boku AB sześciokąta; i nawzajem apotema OH sześciokąta wpisanego ABCDEF jest połową boku AE trójkąta ACE.

Więc $\quad OH = \frac{1}{2}R, \qquad OK = \frac{1}{2}R\sqrt{3}.$

Zagadnienie III.

Wpisać dziesięciokąt foremny w dane koło.



Przypuśćmy okrąg O promienia R podzielony na dziesięć równych części, i niech będzie AB bok dziesięciokąta foremnego wpisanego. Aby znaleźć stosunek tego boku do promienia, poprowadźmy dwójsieczną AD kąta BAO, będzie

$$\frac{OA}{AB} = \frac{CO}{CB} \qquad \text{(III, 2.)}.$$

Owoż, w trójkącie równoramiennym OAB, kąt środkowy AOB jest *dziesiątą* częścią czterech kątów prostych, czyli $\frac{2}{5}$ kąta prostego; zatem summa kątów A i B przy podstawie równa się 2 kątom prostym mniej $\frac{2}{5}$ kąta prostego, to jest czyni $\frac{8}{5}$ kąta prostego; a że te dwa kąty są równe, każdy z nich jest $\frac{4}{5}$ kąta prostego. Ztąd wynika że trójkąt ACO jest równoramienny, bo kąt $AOC = \frac{2}{5}p = OAC$; i tak samo trójkąt ABC jest równoramienny, bo kąt $ACB = CAO + COA = \frac{4}{5}p = B$. Z tego wszystkiego wnosimy że bok $AB = AC = OC$.

Jeśli więc, w powyższej proporcyi, podstawimy OC za AB i OB za OA, będzie

$$\frac{OB}{OC} = \frac{OC}{CB};$$

co dowodzi że punkt C dzieli promień OB w stosunku średnim i skrajnym. Więc *bok* AB *dziesięciokąta foremnego równa się większemu odcinkowi* OC *promienia* OB *podzielonego w stosunku średnim i skrajnym.*

Połączmy teraz, co trzeci, punkta okręgu podzielonego na dziesięć równych części: otrzymamy dziesięciokąt foremny *gwiaź-*

dzisty, którego bokiem jest cięciwa AD oczywiście dwójsieczna kąta BAO. Aby wyznaczyć ten bok AD, uważajmy że dwa trójkąty równoramienne CAO i OAD, mające kąt A spólny, są podobne; zatem proste OC i OD są przeciwrównoległe, i dają

$$AC \,.\, AD = \overline{AO}^2 = R^2.$$

Dotego, trójkąt DCO jest równoramienny; bo kąt DOB, dwa razy większy od kąta DAB, jest równy kątowi DCO; więc DC = DO

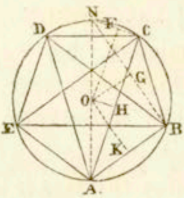
Zatem $$AD - AC = R.$$

Dwa powyższe równania pokazują że boki AC i AD, dwóch dziesięciokątów foremnych wpisanych w koło, są dwiema liniami prostemi których różnica równa się promieniowi R koła a wieloczyn kwadratówi tego promienia. Więc *otrzyma się oba boki, dzieląc promień* R *w stosunku średnim i skrajnym ; odcinek dodatny będzie bokiem dziesięciokąta foremnego wypukłego a odcinek odjemny bokiem dziesięciokąta foremnego gwiaździstego.*

Mamy tedy (III, *Zag.* 8).

$$AB = \tfrac{1}{2}R(\sqrt{5} - 1) \quad \text{i} \quad AD = \tfrac{1}{2}R(\sqrt{5} + 1).$$

Wniosek. — Podzieliwszy okrąg na dziesięć równych części,



jeśli połączymy punkta podziału po dwa, otrzymamy pięciokąt foremny wypukły ABCDE; a jeśli je połączymy po cztery, będziemy mieli pięciokąt foremny gwiaździsty ACEBDA.

Poprowadźmy średnię AN, i nazwijmy d i d' boki CN i BN dziesięciokątów foremnych wypukłego i gwiaździstego. Dwa trójkąty prostokątne ABN i ACN dają

$$\overline{AB}^2 = 4R^2 - \tfrac{1}{4}R^2(6+2\sqrt{5}) = R^2 + \tfrac{1}{4}R^2(6-2\sqrt{5}) = R^2 + d^2$$

$$\overline{AC}^2 = 4R^2 - \tfrac{1}{4}R^2(6-2\sqrt{5}) = R^2 + \tfrac{1}{4}R^2(6+2\sqrt{5}) = R^2 + d'^2.$$

Więc *bok pięciokąta foremnego wypukłego jest przeciwprostokątną trójkąta prostokątnego w którym kąt prosty ma za ramiona promień koła i bok dziesięciokąta foremnego wypukłego.*

Tak samo, *bok pięciokąta foremnego gwiaździstego jest przeciw-*

prostokątną trójkąta prostokątnego, w którym kąt prosty ma za ramiona promień koła i bok dziesięciokąta foremnego gwiaździstego.

Podstawiając wartości boków d i d', znajdziemy, w funkcyi promienia R, boki AB i AC dwóch pięciokątów foremnych, wypukłego i gwiaździstego.

$$AB = \tfrac{1}{2}R\sqrt{10-2\sqrt{5}}, \quad \text{i} \quad AC = \tfrac{1}{2}R\sqrt{10+2\sqrt{5}}.$$

Co do apotem tych czterech wielokątów foremnych, uważajmy że one są nawzajem połowami boków. I tak, apotema OF dziesięciokąta foremnego wypukłego jest połową boku AC pięciokąta foremnego gwiaździstego; a nawzajem, apotema OH pięciokąta foremnego gwiaździstego jest połową boku dziesięciokąta foremnego wypukłego. Tak samo, apotemy OG i OK dziesięciokąta foremnego gwiaździstego i pięciokąta foremnego wypukłego są nawzajem połowami ich boków AB i BN.

Więc wartości czterech apotem są:

w dziesięciokącie foremnym wypukłym $OF = \tfrac{1}{4}R\sqrt{10+2\sqrt{5}}.$

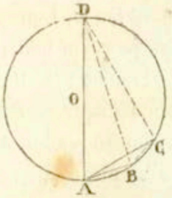
w dziesięciokącie foremnym gwiaździstym $OG = \tfrac{1}{4}R\sqrt{10-2\sqrt{5}}.$

w pięciokącie foremnym wypukłym $OK = \tfrac{1}{4}R(\sqrt{5}+1).$

w pięciokącie foremnym gwiaździstym $OH = \tfrac{1}{4}R(\sqrt{5}-1).$

Zagadnienie IV.

Wpisać piętnastokąt foremny w dane koło.



Niech będą AB i AC boki dziesięciokąta foremnego i sześciokąta foremnego; łuk BC równa się $\frac{1}{6} - \frac{1}{10} = \frac{1}{15}$ okręgu. Więc cięciwa BC jest bokiem piętnastokąta foremnego wpisanego.

Aby wyznaczyć ten bok w funkcyi promienia, poprowadźmy średnicę AD, i połączmy BD, CD. Czworobok wpisany ABCD daje

$$AD \cdot BC + AB \cdot CD = AC \cdot BD.$$

Owoż, CD jest bokiem trójkąta równobocznego wpisanego, a zaś BD bokiem pięciokąta gwiaździstego; więc

$$2R \, . \, BC + \tfrac{1}{2}R(\sqrt{5}-1)R\sqrt{3} = R \, . \, \tfrac{1}{2}R\sqrt{10+2\sqrt{5}};$$

ztąd $$BC = \tfrac{1}{4}R(\sqrt{10+2\sqrt{5}} + \sqrt{3} - \sqrt{15}.$$

Co do apotemy, jej wartość w funkcyi promienia jest więcej skomplikowana.

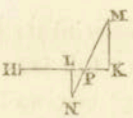
Uwaga ogólna. — Ponieważ umiemy dzielić łuk na dwie równe części, potrafimy, bacząc na to co poprzedza, wpisać w koło wielokąty mające:

4,	8,	16,	32....	2^n boków,
3,	6,	12,	24....	$3 \, . \, 2^n$ boków,
5,	10,	20,	40....	$5 \, . \, 2^n$ boków,
15,	30,	60,	120....	$15 \, . \, 2^n$ boków,

Możemy jeszcze, za pomocą liniału i cyrkla, wpisać w koło wielokąty mające $2^n + 1$ boków, byle tylko ta liczba była pierwsza: jako 17, 257.... ale o tej rzeczy mówić obszerniej nie tu jest miejsce.

Widzimy teraz łatwo że można, kreśląc tylko *linie proste i koła*, podzielić *kąt prosty* na takie równe części których liczba jest jedną z wyżej wymienionych, jako to: na 3, 5, 15, 20, etc.

Uwagv II. — Jeśli bok wielokąta foremnego, *np. siedmiokąta*, który chcemy wpisać w koło, nie jest znany w funkcyi promienia, wtedy musimy go szukać z przybliżeniem. Następujący sposób jest do tego dogodny.



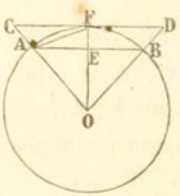
Linię HK, któa się zdaje bokiem *siedmiokąta*, poniesmy *siedem* razy jako cięciwę na okrąg O, i przypuśćmy że przechodzi punkt wyjścia A, pewnym łukiem stanowiącym błąd przez *zbytek*. Na skrajnosci K linii probowanej, wyprowadźmy prostopadłę KM równą cięciwie łuku przewyżki.

Weźmy teraz linię mniejszą HL, i, poczynając od tego samego punktu A, poniesmy *siedem* razy jako cięciwę; przypuśćmy że tą razą niedostaje pewnego łuku który właśnie stanowi błąd przez *niedostatek*. Na skrajności L wyprowadźmy, w stronę przeciwną, prostopadłę LN równą cięciwie łuku niedostającego. Złączmy MN. Punkt przecięcia P podzieli różnicę KL, boków probowanych, proporcyonalnie do cięciw dwóch błędów przeciwnych. Zatem linia HP mniej się różnić będzie od boku szukanego.

Jeśli błąd jeszcze znaczny, wtedy wyprowadza się, z punktu P, prostopadłę równą cięciwie łuku który błąd oznacza, i, postępując jako wyżej, znajduje się punkt P′; nieochybnie bok HP′ będzie więcej przybliżony. — Po kilku próbach dojdzie się do takiego przybliżenia że wykreślenie nawet prawdziwej wartości nie byłoby dokładniejsze.

Zagadnienie V.

Mając dany promień koła i bok wielokąta foremnego wpisanego, znaleźć bok wielokąta opisanego podobnego. I nawzajem.



1° Niech będzie AB $= a$ bok wielokąta foremnego wpisanego w koło promienia R; CD $= b$ będzie bokiem wielokąta opisanego podobnego. Dwa trójkąty podobne COD, AOB dają

$$\frac{\mathrm{CD}}{\mathrm{AB}} = \frac{\mathrm{OF}}{\mathrm{OE}}, \quad \text{zkąd} \quad \mathrm{CD} = \frac{a\mathrm{R}}{\mathrm{OE}}.$$

Ale $$\mathrm{OE} = \sqrt{\mathrm{R}^2 - \frac{a^2}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{4\mathrm{R}^2 - a^2};$$

więc $$b = \frac{2a\mathrm{R}}{\sqrt{4\mathrm{R}^2 - a^2}}$$

2° Aby, *nawzajem*, mając dany bok b, znaleźć bok a, uważajmy że te same trójkąty podobne ABO, CDO dają

$$\frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{CD}} = \frac{\mathrm{OA}}{\mathrm{OC}}.$$

Ale $$\mathrm{OC} = \sqrt{\mathrm{R}^2 + \frac{b^2}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{4\mathrm{R} + b^2};$$

więc $$a = \frac{2b\mathrm{R}}{\sqrt{4\mathrm{R}^2 + b^2}}.$$

Ta formuła łatwo się algebrycznie z poprzedzającej wywodzi.

Uwaga. — W trójkącie równobocznym wpisanym $a = \mathrm{R}\sqrt{3}$

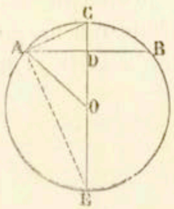
więc $b = 2R\sqrt{3} = 2a$;

Ten wynik pokazuje że bok trójkąta równobocznego opisanego na kole jest dwa razy większy od boku trójkąta równobocznego wpisanego.

Czego nie trudno dowieśdź geometrycznie.

ZAGADNIENIE VI.

Mając dany promień koła i bok wielokąta foremnego wpisanego, znaleźć bok wielokąta foremnego wpisanego podwójnej liczby boków, i wyrachować powierzchnię tego wielokąta.



Niech będzie $AB = a$ bok wielokąta foremnego wpisanego w koło promienia R; $AC = a'$ będzie bokiem wielokąta foremnego wpisanego podwójnej liczby boków.

Trójkąt OAC, w którym kąt O jest ostry, daje

$$\overline{AC}^2 = \overline{OA}^2 + \overline{OC}^2 - 2OC \cdot OD.$$

Ale, w trójkącie prostokątnym ADO,

$$OD = \sqrt{\overline{OA}^2 - \overline{AD}^2} = \frac{1}{2}\sqrt{4R^2 - a^2}.$$

więc $$a' = \sqrt{2R^2 - R\sqrt{4R^2 - a^2}}.$$

NAWZAJEM, znając a' można łatwo znaleźć a. Jakoż, powierzchnia trójkąta prostokątnego ACE ma za miarę $\frac{1}{2}CE \times AD$, albo $\frac{1}{2}AC \times AE$; więc $CE \times AD = AC \times AE$. Podstawiając wartości, otrzymujemy

$$Ra = a'\sqrt{4R^2 - a'^2}; \quad \text{ztąd} \quad a = \frac{a'}{R}\sqrt{4R^2 - a'^2}.$$

Znając promień i bok wielokąta foremnego wpisanego, mającego n boków, można wyrachować powierzchnię wielokąta foremnego wpisanego podwójnej liczby boków, nie szukając jego boku a'. Jakoż, nazywając S tę powierzchnię, mamy:

$$S = \text{trój. AOC} \times 2n = n \cdot OC \cdot AD;$$

więc $$S = \frac{1}{2} naR.$$

Zastosujmy. — W sześciokącie $a = R$; więc bok dwunastokąta foremnego jest

$$a' = \sqrt{2R^2 - R\sqrt{4R^2 - R^2}} = R\sqrt{2 - \sqrt{3}} = \frac{R}{2}(\sqrt{6} - \sqrt{2});$$

a powierzchnia dwunastokąta, $S = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot R^2 = 3R^2$.

Na zastosowanie drugiej formuły, szukajmy boku a pięciokąta foremnego, znając bok dziesięciokąta foremnego.

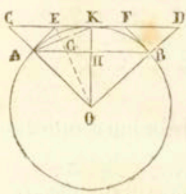
Wiemy że $$a' = \frac{R}{2}(\sqrt{5} - 1);$$

więc $$a = \frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1)\sqrt{4R^2 - \frac{R^2}{4}(\sqrt{5} - 1)^2},$$

albo $$a = \frac{R}{4}(\sqrt{5} - 1)\sqrt{10 + 2\sqrt{5}} = \frac{R}{2}\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}.$$

Zagadnienie VII.

Mając dany promień koła i bok wielokąta foremnego opisanego, znaleźć bok wielokąta foremnego opisanego podwójnej liczby boków. I NAWZAJEM.



Niech będzie $CD = b$ bok wielokąta foremnego opisanego na kole promienia R. Poprowadźmy OC, OD, i styczne AE, BF. Bokiem wielokąta foremnego opisanego, podwójnej liczby boków, będzie $EF = b'$.

Mamy $AE = EK = \frac{1}{2}b'$; a trójkąty podobne ACE, CKO dają

$$\frac{AE}{OK} = \frac{AC}{CK}. \quad \text{albo} \quad \frac{\frac{1}{2}b'}{R} = \frac{\sqrt{R^2 + \frac{b^2}{4}} - R}{\frac{1}{2}b};$$

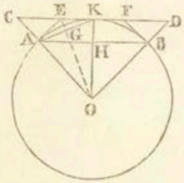
więc $$b' = \frac{2R}{b}(\sqrt{4R^2 + b^2} - 2R).$$

Nawzajem, rozwiązując poprzedzającą formułę na b, otrzymamy.

$$b = \frac{8R^2 b'}{4R^2 - b'^2}.$$

Zagadnienie VIII.

Mając dane obwody p *i* P *dwóch wielokątów foremnych podobnych, wpisanego i opisanego, znaleźć obwody* p' i P' *wielokątów foremnych wpisanego i opisanego podwójnej liczby boków.*



Niech będą AB i CD boki wielokątów p i P. Połączmy wierzchołek A z punktem zetknięcia K, i poprowadźmy styczne AE, BF. Proste AK, EF będą bokami wielokątów p', P'.

Oznaczając przez n liczbę boków wielokątów p, P, mamy

$$p = 2n \,.\, AH, \quad P = 2n \,.\, CB; \quad p' = 2n \,.\, AK = 4n \,.\, GK,$$
$$P' = 4n \,.\, EK.$$

Teraz w trójkącie COK, dwójsieczna OE daje

$$\frac{EK}{EC} = \frac{OK}{OC} = \frac{OA}{OC} = \frac{p}{P};$$

ztąd
$$\frac{EK}{EK + EC} = \frac{p}{P + p}, \quad \text{albo} \quad \frac{P'}{2P} = \frac{p}{P + p};$$

więc
$$P' = \frac{2Pp}{P + p}.$$

Ta formuła pokazuje że obwód P' jest średnią harmoniczną między obwodami P i p,

Żeby teraz wyznaczyć p', uważajmy że dwa trójkąty prostokątne EGK, AHK, mające kąty ostre K i A równe, są podobne i dają

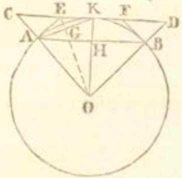
$$\frac{AH}{AK} = \frac{GK}{EK} \quad \text{albo} \quad \frac{p}{p'} = \frac{p'}{P'};$$

więc
$$p' = \sqrt{pP'}.$$

UWAGA. $$P' - p' < \frac{P - p}{4}$$

ZAGADNIENIE IX.

Mając dane powierzchnie A *i* B *dwóch wielokątów foremnych podobnych, wpisanego i opisanego, znaleźć powierzchnie* A′ *i* B′ *wielokątów foremnych wpisanego i opisanego podwójnej liczby boków.*



Powtarzając wykreślenia poprzedzającej figury, mamy

$A = 2n$. trój. AOH, $B = 2n$. trój. COK ;

$A' = 2n$, trój. AOK, $B' = 4n$. trój. AOE.

Trójkąty AOH, AOK, równej wysokości, mają się jako podstawy,

$$\frac{AOH}{AOK} = \frac{OH}{OK} .$$

Dla tej samej przyczyny trójkąty AOK, COK dają także

$$\frac{AOK}{COK} = \frac{OA}{OC} .$$

Ale w trójkącie COK prosta AH, równoległa do boku CK, daje

$$\frac{OH}{OK} = \frac{OA}{OC} .$$

Zatem $$\frac{AOH}{AOK} = \frac{AOK}{COK} \quad \text{albo} \quad \frac{A}{A'} = \frac{A'}{B} ;$$

więc $$A' = \sqrt{A . B}$$

Aby wyznaczyć B′, uważajmy że dwa trójkąty AOE, COE, mające równą wysokość, są proporcyonalne do podstaw

$$\frac{AOE}{COE} = \frac{OA}{OC}, \quad \text{ale} \quad \frac{OA}{OC} = \frac{OH}{OK} = \frac{A}{A'} ; \quad \text{zatem} \quad \frac{AOE}{COE} = \frac{A}{A'} .$$

Z tąd wynika $$\frac{AOE}{AOE + COE} = \frac{A}{A + A'} \quad \text{albo} \quad \frac{B'}{2B} = \frac{A}{A + A'} ;$$

więc
$$B' = \frac{2A\,.\,B}{A + A'}\ (^*).$$

Uwaga. — Szukajmy różnicy $B' - A'$. Mamy

$$B' - A' = \frac{2A\,.\,B}{A + \sqrt{A\,.\,B}} - \sqrt{A\,.\,B} = \frac{\sqrt{A\,.\,B}\,(\sqrt{B} - \sqrt{A})}{\sqrt{A} + \sqrt{B}},$$

albo, mnożąc oba wyrazy przez $\sqrt{B} + \sqrt{A}$,

$$B' - A' = \frac{\sqrt{A\,.\,B}\,(B - A)}{A + B + 2\sqrt{A\,.\,B}}$$

Owoż, średnia arytmetyczna $\frac{1}{2}(A + B)$ jest większa od średniej geometrycznej $\sqrt{A\,.\,B}$;

więc
$$B' - A' < \frac{\sqrt{A\,.\,B}\,(B - A)}{4\sqrt{A\,.\,B}} \quad \text{albo} \quad B' - A' < \frac{B - A}{4}.$$

Dla zogólnienia zamieńmy znamiona na wskazy, będzie

$$B_1 - A_1 < \tfrac{1}{4}(B - A); \quad \text{następnie} \quad B_2 - A_2 < \tfrac{1}{4}(B_1 - A_1), \ldots$$

$$B_n - A_n < \tfrac{1}{4}(B_{n-1}\ A_{n-1}).$$

Ztąd, mnożąc powyższe nierówności stronami, otrzymujemy

$$B_n - A_n < \frac{B - A}{4^n}.$$

Ten wynik dowodzi że różnice powierzchni $B_1 - A_1$, $B_2 - A_2, \ldots$ maleją coraz bardziej, i mają za granicę zero.

(*) Można inaczej wyrazić powierzchnię B'.

Jakoż,
$$\frac{\text{tr. AOE}}{\text{tr. COE}} = \frac{OA}{OC} = \frac{\text{tr. AOK}}{\text{tr. COK}} = \frac{A'}{B}.$$

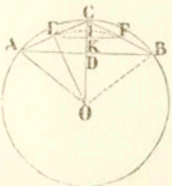
Ztąd
$$\frac{AOE}{AOE + COE} = \frac{A'}{B + A'} \quad \text{albo} \quad \frac{B'}{2B} = \frac{A'}{B + A'},$$

więc
$$B' = \frac{2BA'}{B + A'}.$$

To pokazuje że powierzchnia B' jest średnicą harmoniczną między powierzchniami B i A'.

Zagadnienie X.

Znając promień R *i apotemę* r *wielokąta foremnego, znaleźć promień* R' *i apotemę* r' *wielokąta foremnego* RÓWNOOBWODOWEGO *podwójnej liczby boków.*



Niech będzie AB bok wielokąta foremnego danego, OC = R jego promień, OD = r apotema. Poprowadźmy cięciwy AC, BC. Linia EF jest równoległa do boku AB i równa jego połowie, a kąt środkowy EOF = $\frac{1}{2}$AOB : więc EF jest bokiem, OE promieniem R', OK apotemą r' wielokąta foremnego *równoobwodowego* podwójnej liczby boków.

Punkt K jest środkiem strzały CD ;

więc $$OK = OD + \frac{OC - OD}{2} = \frac{OC + OD}{2},$$

albo $$r' = \frac{R + r}{2}.$$

Teraz, w trójkącie prostokątnym COE, bok $OE = \sqrt{OC \times OK}$;
więc $$R' = \sqrt{Rr'}.$$

Szukajmy jeszcze różnicy $R - r'$. Jeśli promieniem OE, zakreślimy łuk koła EIF, będzie strzała IK $< \frac{1}{4}$CD. Albowiem punkt I leży na dwójsiecznej kąta CEF, i prosta IK jest prostopadła do ramienia EF a prosta IC pochyła do ramienia EC tego kąta; to pokazuje że IK $<$ IC, a temsamem IK $< \frac{1}{2}$CK albo IK $< \frac{1}{4}$CD.

Więc $$R' - r' < \frac{R - r}{4}.$$

Uwaga. — Formuły dające wartości r' i R' są proste, i do rachunku przybliżonego dogodne; bo wiemy że drugą można zastąpić przez pierwszą, gdy połowa żądanych cyfer już wyznaczona. Ale formuły dwóch poprzedzających zagadnień nie zdają się przedstawiać tych korzyści. Jednakże, aby je uczynić dogodniejszemi, dość wziąć odwrotności. I tak, formuła

$$B' = \frac{2A \cdot B}{A + A'} \quad \text{daje} \quad \frac{1}{B'} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{A} + \frac{A'}{A \cdot B}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{B} + \frac{1}{A'}\right),$$

uważając że $A \cdot B = A'^2$.

Z formuły $A' = \sqrt{A . B}$ wywodzimy $\frac{1}{A'} = \sqrt{\frac{1}{A} \cdot \frac{1}{B}}$.

Tak samo, formuła $P' = \frac{2Pp}{P+p}$ daje $\frac{1}{P'} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{P}\right)$;

a z formuły $p' = \sqrt{pP'}$ wynika $\frac{1}{p'} = \sqrt{\frac{1}{p} \cdot \frac{1}{P'}}$.

Te wyniki otrzymuje się wprost geometrycznie, sposobem eleganckim o którym dobrze jest wiedzieć.

Jakoż, 1° wiemy że (*fig. zag.* 9)

$$\frac{A}{A'} = \frac{OH}{OK} = \frac{OA}{OC} = \frac{A'}{B}; \quad \text{zkąd} \quad \frac{OH}{\frac{1}{B}} = \frac{OK}{\frac{1}{A'}} = \frac{OC}{\frac{1}{A}}.$$

Nadto,

$$\frac{OA}{OC} = \frac{\text{tr. } OAE}{\text{tr. } OCE} = \frac{OH}{OK}, \quad \text{albo} \quad \frac{OH}{OAE} = \frac{OK}{OCE} = \frac{OH+OK}{OCK};$$

zkąd

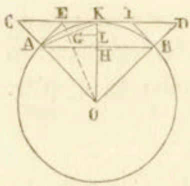
$$\frac{OH}{\frac{1}{B}} = \frac{\frac{1}{2}(OH+OK)}{\frac{1}{B'}}.$$

Zatem

$$\frac{OH}{\frac{1}{B}} = \frac{OK}{\frac{1}{A'}} = \frac{OC}{\frac{1}{A}} = \frac{\frac{1}{2}(OH+OK)}{\frac{1}{B'}}.$$

Owoż, na mocy pierwszej równości, $\overline{OK}^2 = OH . OC$; więc

$$\frac{1}{A'} = \sqrt{\frac{1}{A} \cdot \frac{1}{B}}, \quad \text{i} \quad \frac{1}{B'} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{B} + \frac{1}{A'}\right).$$



2° Ponieważ obwody wielokątów foremnych podobnych są proporcyonalne do ich apotem, poprowadziwszy prostopadłę OL do OK, mamy

$$\frac{p}{P} = \frac{OH}{OK} \quad \text{i} \quad \frac{p'}{P'} = \frac{OG}{OK} = \frac{OL}{OG}.$$

Albo

$$\frac{OK}{\frac{1}{p}} = \frac{OH}{\frac{1}{P}} \quad \text{i} \quad \frac{OG}{\frac{1}{p'}} = \frac{OL}{\frac{1}{P'}}.$$

Owoż, trójkąty podobne OGK, AHK dają

$$\frac{OK}{OG} = \frac{AK}{AH} = \frac{p'}{p}, \quad \text{albo} \quad \frac{OK}{\frac{1}{p}} = \frac{OG}{\frac{1}{p'}};$$

zatem
$$\frac{OK}{\frac{1}{p}} = \frac{OH}{\frac{1}{P}} = \frac{OG}{\frac{1}{p'}} = \frac{OL}{\frac{1}{P'}}.$$

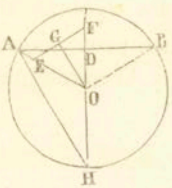
Teraz uważajmy że $OL = \frac{1}{2}(OH + OK)$, i $OG = \sqrt{OK \cdot OL}$;

więc
$$\frac{1}{P'} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{P}\right), \quad \text{i} \quad \frac{1}{p'} = \sqrt{\frac{1}{p} \cdot \frac{1}{P}}.$$

Uwaga
$$\frac{1}{p'} - \frac{1}{P'} < \frac{1}{p} - \frac{1}{P}.$$

Zagadnienie XI.

Mając dane promień i apotemę wielokąta foremnego, wyrachować promień i apotemę wielokąta foremnego RÓWNOWARTEGO *podwójnej liczby boków.*



Niech będą O środek, AB bok, OA = R promień, OD = r apotema wielokąta danego. Aby otrzymać wielokąt równowarty i podwójnej liczby boków, zamieńmy trójkąt AOD, który jest połową trójkąta AOB, na trójkąt równoramienny i równowarty EOF. Wtedy O będzie środkiem, a EF bokiem wielokąta szukanego; zatem OF = R', OG = r'.

Owóż, dwa trójkąty AOD, EOF, równowarte z przypuszczenia, i mające kąt spólny O, dają (7 *wn.*)
$$\overline{OF}^2 = OA \times OD; \quad \text{więc} \quad R' = \sqrt{R \times r}.$$

Przedłużmy DO aż do przecięcia H z okręgiem, i połączmy AH. Dwa trójkąty prostokątne FOG, AHD są podobne i dają
$$\frac{OG}{DH} = \frac{OF}{AH}; \quad \text{ztąd} \quad OG = \frac{DH \cdot OF}{AH},$$

$$\text{Więc} \quad r' = \frac{(R + r)\sqrt{Rr}}{\sqrt{2R(R + r)}} \quad \text{albo} \quad r' = \sqrt{r\left(\frac{R + r}{2}\right)}.$$

Uwaga.
$$R' - r < \frac{R - r}{2}.$$

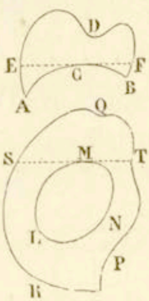
MIARA OKRĘGU I POWIERZCHNI KOŁA.

Określenie II. — Dwa łuki, dwa wycinki, dwa odcinki dwóch kół różnych nazywają się podobnemi, gdy odpowiedają dwom kątom środkowym równym.

Wiemy że długością linii prostej jest jej stosunek do innej prostej wziętej za jedność; pojmujemy także wielkości względne dwóch łuków jednego koła, bo możemy je porównać z trzecim łukiem tego samego koła, przyzwoicie dobranym, który przenosimy na te łuki tyle razy ile można; liczby wskazujące ile się razy ten łuk w nich mieści dają stosunek dwóch łuków. Ale, jeśli chcemy porównać dwa łuki kół różnych, albo łuk koła z linią prostą, ponieważ niema żadnej linii któraby, przeniesiona na takie dwie linie, przystawała do każdej, trzeba, dla wyobrażenia wielkości względnych, określić co należy rozumieć przez *długość* łuku koła. Dwa następujące twierdzenia ułatwią to określenie.

Twierdzenie XIX.

Linia WYPUKŁA *jest mniejsza od wszelkiej linii która ją otacza od jednej skrajności do drugiej.*



Niech będzie linia wypukła ABC otoczona, od skrajności A do B, jakąkolwiek linią ADB. Oczywiście między różnemi drogami, jako ACB, ADB, które idą od A do B, jest przynajmniej jedna najkrótsza; jeśli więc linia wypukła niejest tą najkrótszą drogą, to musi nią być jedna z otaczających, dajmy na to ADB. Owoż, jeśli przez punkt C linii ACB, poprowadzimy styczną ECF która spotka tę linię, jako wypukłą, w tym tylko punkcie, a przetnie otaczającą ADB w punktach E i F, będzie prosta EF mniejsza od krzywej EDF; więc linia otaczająca AEFB jest mniejsza od otaczającej AEDFB, którąśmy wzięli za jedną z najkrótszych. To dowodzi że między liniami otaczającemi wypukłą ACB niema najkrótszej drogi od A do B; wiec tą drogą, krótszą od otaczających, jest linia wypukła ADB.

Wniosek. — Linia wypukła LMN jest mniejsza od wszelkiej linii EFQS która ją ze wszystkich stron otacza.

Jakoż, poprowadźmy styczną SMT, będzie

$$SMT < SQT,$$

a na mocy powyższego twierdzenia,

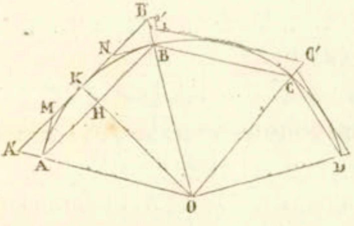
$$MLNM < MS + SRPT + TM;$$

więc, dodając, otrzymujemy

$$LMN < SRPTQ.$$

Twierdzenie XX.

Łuk koła jest granicą linii łamanej wpisanej.



Niech będzie linia łamana jakakolwiek ABCD, wpisana w łuk koła AD. Poprowadźmy styczne A′B′, B′$_1$C′,... równoległe do cięciw AB, BC,... i zawarte między normalnemi OA, OB, OC,.... Te styczne, które są bokami opisanemi na łuku AB, nie stanowią koniecznie linii ciągłej; ale każdy z boków opisanych jest większy od łuku odpowiedającego. I tak, bok A′B′ jest większy od łuku AB; albowiem, jeśli na obydwóch skrajnościach łuku poprowadzimy styczne AM, BN, będzie $MA' > MA$ i $NB' > NB$; a że linia łamana AMNB jest większa od łuku AB, więc tem barzdiej bok A′B′ większy od łuku AB.

Nadto, gdy się powiększa ciągle liczbę boków łamanej wpisanej, różnica dwóch boków odpowiednych, wpisanego i opisanego, jako AB i A′B′, maleje coraz więcej; bo $\frac{AB}{A'B'} = \frac{OH}{OK}$, a różnica

HK, między promieniem OK i apotemą OH, mniejsza od cięciwy AK, jest tem bardziej mniejsza od łuku AB, który może być wzięty tak mały jak się podoba. Więc granicą stosunku $\frac{AB}{A'B'}$, jest jedność; co zresztą przez się widoczne.

Okazawszy to, oznaczmy przez l, l', l''... boki wpisane AB, BC..., przez L, L', L''... boki opisane, A'B', B'C',.... przez $\frac{l^{(m)}}{L^{(m)}}$ i $\frac{l^{(p)}}{L^{(p)}}$ największy i najmniejszy ze stosunków, będzie (*)

$$\frac{l^{(m)}}{L^{(m)}} > \frac{l + l' + l'' +}{L + L' + L'' +} > \frac{l^{(p)}}{L^{(p)}}.$$

Owoż, gdy boki łamanej wpisanej dążą do zera, wtedy, jakośmy dopiero co dowiedli, $gr. \frac{l^{(m)}}{L^{(m)}} = 1$ i $gr. \frac{l^{(p)}}{L^{(p)}} = 1$;

więc $gr. (l + l' + l'' + ...) = gr. (L + L' + L'' + ...)$.

Teraz uważajmy że łuk koła AD jest zawarty między summami $l + l' + l'' + ...$ i $L + L' + L'' + ...$które mają spólną granicę; więc tą granicą jest łuk koła AD.

Ztąd wnosimy że, linia łamana wpisana w łuk koła AD, jakakolwiek jest ustawa wedle której rośnie liczba jej boków i każdy dąży do zera, ma zawsze tę samą granicę, to jest łuk AD.

Możemy teraz dać określenie długości łuku koła, i temsamem długości okręgu.

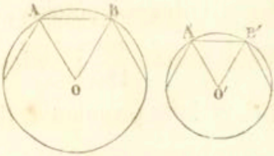
OKREŚLENIE III. — DŁUGOŚCIĄ *łuku koła jest* GRANICA *do której dąży* OBWÓD *linii łamanej wpisanej w ten łuk, gdy liczba boków rośnie nieskończenie, i każdy bok zbliża się coraz bardziej do zera.*

TWIERDZENIE XXI.

Okręgi dwóch kół są proporcyonalne do promieni.

Niech będą R i R' promienie, C i C' długości dwóch okręgów;

(*) Zobacz naszą ARYTMETYKĘ rozdz. *stosunki.*



P i P′ obwody dwóch wielokątów foremnych, równej liczby boków, wpisanych w te okręgi; mamy (17)

$$\frac{P}{P'}=\frac{R}{R'} \quad \text{albo} \quad \frac{P}{R}=\frac{P'}{R'}.$$

Ta proporcya istnieje jakkolwiek małe są boki dwóch wielokątów wpisanych; owoż, im bardziej powiększy się liczbę boków, tem więcej stosunki zmienne $\frac{P}{R}$ i $\frac{P'}{R'}$, ciągle równe, zbliżą się do swych granic $\frac{C}{R}$ i $\frac{C'}{R'}$; więc te granice są równe, to jest

$$\frac{C}{R}=\frac{C'}{R'}.$$

Wniosek. — Ztąd wynika że *stosunek okręgu do srednicy jest liczbą stałą*.

Jakoż, proporcya $\frac{C}{R}=\frac{C'}{R'}$ albo $\frac{C}{2R}=\frac{C'}{2R'}$ pokazuje że stosunek okręgu C do średnicy 2R, jako równy stosunkowi wszelkiego innego okręgu C′ do jego średnicy 2R′, jest ten sam we wszystkich okręgach.

Nazywając tedy, jako zwykle, π ten stosunek, mamy

$$\frac{C}{2R}=\pi, \qquad \text{zkąd} \qquad C=2\pi R.$$

Więc *długość okręgu* C *równa się wieloczynowi ze średnicy* przez liczbę π.

Liczba π jest niespółmierna (*), pokażemy niebawem jak się otrzymuje.

Oto wartość π na mniej niż $\frac{1}{10^{30}}$, jej odwrotność i logarytm.

$$\pi = 3{,}14159265358979323846264338327\,9\ldots$$

$$\frac{1}{\pi} = 0{,}31830988618379067153\ldots$$

$$\log.\,\pi = 0{,}4971498726941338543\,5.$$

II. — *Długość łuku n stopni w kole promienia* R. Ponieważ

(*) Zobacz notę na końcu dzieła.

długość łuku 180° w kole promienia R, czyli długość półokręgu jest πR, długość łuku 1 stopnia wyraża się przez $\frac{\pi R}{180}$; więc, oznaczając przez l długość łuku n stopni w kole promienia R, będzie

$$l = \frac{n\pi R}{180}.$$

Za pomocą tej formuły, znajduje się łatwo *łuk koła mający długość równą promieniowi*. Jakoż, czyniąc $l = R$, otrzymujemy

$$n = \frac{180^\circ}{\pi} = 180^\circ \times 0{,}31830988.. = 57^\circ\, 17'\, 44'',80.$$

PRZYKŁADY:

1° *Jaka jest długość okręgu którego promień ma* $0^m,64$?

Mnożąc promień $0^m,64$ przez $2\pi = 6{,}283..$ wartość na mniej niż 0,001, znajdziemy że szukana długość okręgu jest $4^m,02$ na mniej niż centymetr, przez niedostatek.

2° *Jaki jest promień okręgu długości* $5^m,4$?

Mamy $R = \frac{5^m,4}{2} \times \frac{1}{\pi} = 2^m,7 \times 0{,}3183 = 0^m,859$ na mniej niż millimetr.

3° *Jaka jest długość łuku* $24°36'$ *w kole promienia* $0^m,75$?

Mamy tu $n = 24 + \frac{36}{90} = 24 + \frac{2}{5} = \frac{122}{5}.$

Zatem,

$$l = \frac{0^m,75 \times 122 \times \pi}{5.180} = \frac{3^m \times 61\pi}{1800} = \frac{183^m \times 3{,}141}{1800} = 0^m,31$$

na mniej niż centymetr.

4° *Jaki jest promień koła w którem łuk* 30° *ma 2 metry*?

Tu $l = 2^m$. $n = 30$; zatem

$$R = \frac{2^m \times 180}{30\pi} = 12^m.\frac{1}{\pi} = 12^m \times 0{,}31830 = 3^m,819..$$

na mniej niż millimetr.

TWIERDZENIE XXII.

Dwa łuki kół podobne są proporcyonalne do swych promieni.

Niech będą, (*figura poprzedzająca*) w kołach promieni R i R', dwa łuki podobne AB i A'B', odpowiedające kątom środkowym AOB i A'O'B'. Mamy

$$\frac{AB}{2\pi R}=\frac{AOB}{4^p} \quad \text{i} \quad \frac{A'B'}{2\pi R'}=\frac{A'O'B'}{4^p}.$$

Więc
$$\frac{AB}{R}=\frac{A'B'}{R'}, \quad \text{albo} \quad \frac{AB}{A'B'}=\frac{R}{R'}.$$

TWIERDZENIE XXIII.

W dwóch kołach jakichkolwiek, kąty środkowe mają się jako stosunki łuków objętych do promieni.

Niech będą, w dwóch kołach promieni R i R', dwa łuki AB i A'B' odpowiedające kątom środkowym O i O'.

W kole promienia R, stosunek kąta środkowego AOB do kąta prostego równa się stosunkowi łuku odjętego AB do ćwiercianu $\frac{1}{2}\pi R$, to jest

$$\frac{AOB}{1^p}=\frac{AB}{\frac{1}{2}\pi R}.$$

Tak samo, w kole promienia R'

$$\frac{A'O'B'}{1^p}=\frac{A'B'}{R'}.$$

Więc, dzieląc stronami, otrzymujemy

$$\frac{A'O'B'}{AOB}=\frac{\frac{AB}{R}}{\frac{A'B'}{R'}}.$$

WNIOSEK. — Jeśli za jedność kątów weźmiemy kąt środkowy A'O'B', obejmujący łuk A'B' równy swemu promieniowi R', powyższa równość da miarę kąta środkowego AOB, i będzie

$$\mathrm{AOB} = \frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{R}}.$$

Ten ważny wynik pokazuje że, *w jakiemkolwiek kole, kąt środkowy ma za miarę stosunek łuku objętego do promienia*; byle za jedność kątową wzięto kąt obejmujący łuk równy swemu promieniowi.

Jedność linijna zostaje tu zupełnie dowolna, a kąt wzięty za jedność jest, jako wiemy, $57°17'44''80$. W tem założeniu, kąt prosty ma za miarę $\frac{\frac{1}{2}\pi \mathrm{R}}{\mathrm{R}} = \frac{1}{2}\pi = 1{,}5707\ldots$; kąt $45°$ za miarę $\frac{1}{4}\pi$; etc.

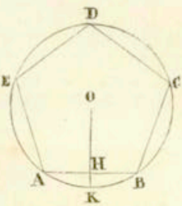
II.—Jeśli oznaczymy przez a miarę kąta środkowego odniesioną do powyższej jedności kątowej, przez l długość łuku przejętego na okręgu promienia R, otrzymamy dwa równie użyteczne wyrażenia,

$$a = \frac{l}{\mathrm{R}} \quad \text{albo} \quad l = a\mathrm{R}.$$

Twierdzenie XXIV.

Powierzchnia koła ma za miarę wieloczyn z okręgu przez połowę promienia.

Dowiedziemy najpierwej że powierzchnia koła jest granicą powierzchni wielokąta wpisanego, którego liczba boków rośnie nieskończenie i każdy bok dąży do zera, wedle ustawy jakiejkolwiek.



Niech będzie wielokąt ABCDE wpisany w koło O. Powierzchnia tego koła składa się z powierzchni wielokąta ABCDE i z summy odcinków kół takich jako ABK, BCL,.. Owoż, odcinek koła ABK jest mniejszy od prostokąta mającego za podstawę cięciwę AB i za wysokość strzałę HK, a tem bardziej mniejszy od prostokąta mającego za podstawę długość łuku AKB i za wysokość tę samą strzałę. Więc, oznaczając przez f największą strzałę tych odcinków, przez C długość okręgu, summa powierzchni wszystkich odcinków będzie mniejsza od summy wieloczynów: łuk $AB.f +$ łuk $BC.f + \ldots$, to jest mniejsza od Cf. Ale, gdy cięciwy dążą do zera, ich strzały dążą także do zera; więc $gr.\, Cf = 0$. Ztąd wnosimy że powierzchnia wielokąta wpisanego w koło O, jakakolwiek jest ustawa wedle której rośnie liczba boków i każdy bok dąży do zera, ma zawsze tę samą granicę, która jest powierzchnią koła O.

Teraz, aby wyznaczyć powierzchnię koła O, wpiszmy w nie wielokąt foremny ABCDE. Wiemy że, nazywając p obwód, a apotemę wielokąta foremnego, jego powierzchnia S' ma za miarę

$$S' = p . \tfrac{1}{2}a.$$

Owoż. gdy liczba boków rośnie coraz więcej, te boki maleją, i powierzchnia S' wielokąta dąży do powierzchni S koła O, obwód p do okręgu C, apotema a do promienia R; więc, przechodząc do granicy, mamy

$$S = C . \tfrac{1}{2}R \qquad (1).$$

Wniosek. — Jeśli, w powyższej równości, zastąpimy okrąg C przez jego wartość $2\pi R$, otrzymamy

$$S' = \pi R^2 \qquad (2).$$

Ta formula, dogodna w zastosowaniach liczebnych, wyraża powierzchnię koła w funkcyi promienia, i nawzajem daje promień koła gdy powierzchnia jest wiadoma.

Nazywając d średnicę koła, będzie $R = \frac{1}{2}d$; zatem

$$S = \tfrac{1}{4}\pi d^2.$$

Ten wynik daje powierzchnię koła w funkcyi średnicy.

Jeśli wyrugujemy R za pomocą formul (1) i (2), znajdziemy

formulę $$S = \frac{C^2}{4} \cdot \frac{1}{\pi} \qquad (3)$$

która daje powierzchnię koła gdy okrąg wiadomy, albo ten okrąg gdy powierzchnia jest wiadoma.

PRZYKŁADY :

1° *Znaleźć powierzchnię koła którego średnica jest* $3^m,5$.

Mamy $$S = \pi\left(\frac{3,5}{2}\right)^2 = \tfrac{1}{4}\pi.12,25.$$

Biorąc za π wartość 3,1415 otrzymamy $S = 9^{mk},62$, na mniej niż poł decymetra kwadratowego.

2° *Znaleźć promień koła którego powierzchnia jest 12 metrów kwadratowych.*

Mamy $$\pi R^2 = 12;$$

ztąd $$R = \sqrt{12 \times \frac{1}{\pi}} = \sqrt{12 \times 0,31831} = 1^m,95$$

na mniej niż centymetr.

3° *Jaka jest powierzchnia koła którego okrąg ma 7 metrów?*

Formuła (3) daje $$S = \frac{7^2}{4} \cdot \frac{1}{\pi} = \frac{49}{4} \cdot 0,31830 = 3^{mk},90.$$

na mniej niż pół decymetra kwadratowego, przez zbytek.

II. *Powierzchnie dwóch kół są proporcyonalne do kwadrotów z promieni.*

Niech będą S i S′ powierzchnie dwóch kół, R i R′ ich promienie; mamy

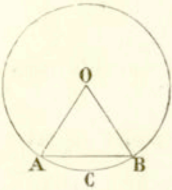
$$S = \pi R^2 \quad \text{i} \quad S' = \pi R'^2; \quad \text{więc} \quad \frac{S}{S'} = \frac{R^2}{R'^2}.$$

UWAGA.—Koło jest równowarte trójkątowi którego podstawa ma długość okręgu a wysokość równa promieniowi; albo, biorąc promień za jedność, koło jest równowarte prostokątowi którego wysokością jest *jedność linijna* a długością podstawy liczba π. Gdyby więc znaleziono linię prostą długości π, wtedy średnia proporcyonalna między podstawą i wysokością tego prostokąta byłaby bokiem kwadratu równowartego kołu. Rozwiązanoby tedy sławne zagadnienie *kwadratury koła*, które zależy na tem żeby, za pomocą *liniału i cyrkla*, to jest kreśląc linie proste i koła, wystawić kwadrat równowarty danemu kołu (*).

(*) Zobacz notę na końcu dzieła.

TWIERDZENIE XXV.

Powierzchnia wycinka kołowego ma za miarę wieloczyn z jego łuku przez połowę promienia.



Jakoż, mamy widocznie

$$\frac{\text{wyc. AOB}}{\pi\overline{OA}^2} = \frac{\text{łuk. AB}}{2\pi OA}.$$

albo, mnożąc oba wyrazy ostatniego stosunku przez połowę promienia OA,

$$\frac{\text{wyc. AOB}}{\pi\overline{OA}^2} = \frac{\text{łuk. AB} \times \frac{1}{2}OA}{2\pi\,.\,OA \times \frac{1}{2}OA}.$$

Owoż, mianowniki tych stosunków są równe; więc

$$\text{wyc. AOB} = \text{łuk. AB} \times \tfrac{1}{2}OA.$$

UWAGA. — Dochodzi się wprost do tego wyniku, uważając wycinek koła jako granicę wycinków wielokątnych foremnych wpisanych, których boki dążą do zera.

WNIOSEK. — Oznaczając przez S, α i R powierzchnię, kąt i promień wycinka kołowego, mamy

$$\frac{S}{\pi R^2} = \frac{\alpha}{4}; \qquad \text{więc} \qquad S = \frac{\alpha}{4}\pi R^2.$$

A jeśli nazwiemy n° liczbę stopni kąta α, będzie także

$$S = \frac{n\pi R^2}{360}.$$

formuły dogodne do liczebnych zastosowan.

II. — *Dwa wycinki podobne są proporcyonalne do kwadratów z promieni.*

Nazwijmy S i S' powierzchnie dwóch wycinków podobnych mających kąt α i promienie R, R'; będzie, na mocy poprzedniego wniosku,

$$S = \frac{\alpha}{4}\pi R^2 \quad \text{i} \quad S' = \frac{\alpha}{4}\pi R'^2;$$

więc

$$\frac{S}{S'} = \frac{R^2}{R'^2}.$$

III. — *Powierzchnia odcinka kołowego* ABC *równa się różnicy powierzchni wycinka* OACB *i trójkąta* ABO.

Gdy cięciwa AB jest jednym z wiadomych boków wielokątów foremnych, wtedy można wyrachować w funkcyi promienia powierzchnię trójkąta, i temsamem powierzchnię odcinka. W innych przypadkach trzeba użyć *Trygonometryi.*

Przykład. — *Znaleźć powierzchnię odcinka* 120° *w kole promienia* 8^m.

Cięciwa łuku 120°, w kole promienia 8^m, równa się $8\sqrt{3}$, zatem trójkąt OAB ma za miarę $\frac{1}{2} \cdot 8\sqrt{3}\sqrt{8^2-48}=16\sqrt{3}$; a że miara wycinka OACB równa się $\frac{1}{3}\pi \cdot 8^2$, więc powierzchnia odcinka ABC jest

$$S=\frac{1}{3}\pi \cdot 64-16\sqrt{3}=\frac{16}{3}(4\pi-3\sqrt{3})=37^{mk},9077$$

na mniej niż centymetr kwadratowy.

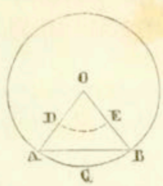
IV. *Dwa odcinki kołowe podobne są proporcyonalne do kwadratów z promieni.*

Nazwijmy W i T powierzchnie wycinka i trójkąta, których różnicą jest pierwszy odcinek; W' i T' powierzchnie wycinka i trójkąta których różnicą jest drugi odcinek. Ponieważ wycinki W i W' są podobne, i trójkąty T i T' także podobne, oznaczając przez R i R' promienie, mamy

$$\frac{W}{W'}=\frac{R^2}{R'^2}=\frac{T}{T'}; \quad \text{ztąd} \quad \frac{W-T}{W'-T'}=\frac{R^2}{R'^2}.$$

Twierdzenie XXVI.

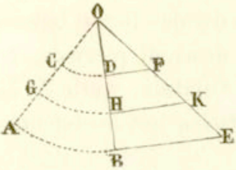
Powierzchnia trapezu kołowego ma za miarę wieloczyn z połowy summy podstaw przez wysokość.



Trapez kołowy ABED jest różnicą dwóch wycinków podobnych OAB i ODE; jego podstawami są łuki AB i DE, a wysokością różnica AD promieni. Jeśli oznaczymy przez a miarę kąta środkowego O, długości podstaw będą $AB=aR$ i $DE=aR'$, powierzchnia S trapezu kołowego ABED wyrazi się przez

$$S = \frac{aR^2}{2} - \frac{aR'^2}{2} = \frac{a(R+R')}{2}(R-R').$$

Więc
$$S = \frac{AB+DE}{2} . AD.$$



Uwaga. — Powiezzchnia trapezu kołowego ABDC równa się wieloczynowi z wysokości BD przez łuk koła GH równo oddalony od podstaw; albowiem ten trapez jest równowarty trapezowi prostolinijnemu BEFD, w którym podstawa BE równa łukowi AB; etc.

Zagadnienie XII.

Wyrachować stosunek okręgu do średnicy, z przybliżeniem wyznaczonem.

Formuły $C = 2\pi R$ (1), i $S = \pi R^2$ (2),

z których wywodzimy $\pi = \frac{C}{2R}$ i $\pi = \frac{S}{R^2}$,

nastręczają cztery elementarne sposoby wyrachowania liczby π.

Jakoż, dając sobie promień R, można, za pomocą zagadnień poprzednio wyłożonych, wyrachować okrąg C albo powierzchnię koła S, z przybliżeniem wyznaczonem. To stanowi *metodę obwodów* i *metodę powierzchni*.

Można także, dając sobie długość C okręgu, albo powierzchnię S koła, wyrachować promień R. To stanowi *metodę* wielokątów *równoobwodowych* i *metodę* wielokątów *równowartych*.

Aby pokazać jedynie możebność takiego rachunku, wyłożymy dwie z tych metod.

1° *Metoda obwodów*. Na $R = 1$, formula (1) daje $\pi = \frac{1}{2}C$; więc π wyraża *długość półokręgu* którego promień wzięto za *jedność*. To pokazuje że półobwód, wszełkiego wielokąta wpisanego w okrąg promienia 1, jest wartością liczby π przybliżoną przez niedostatek, a półobwód wielokąta opisanego na tym okręgu jest wartością π przybliżoną przez zbytek. Więc jeśli, zaczynając *np.* od sześciokąta foremnego, wyrachujemy, za pomocą formuł *zag.* VIII, półobwody wielokątów foremnych, wpisanego i opisanego, liczby boków 12, 24, 48..., otrzymamy wartości coraz mniej od siebie różne, które będą zawierały liczbę π; ich cyfry spólne będą należały do prawdziwej wartości π.

Tą metodą, Archimedes, najsławniejszy z matematyków, wpisując i opisując *sześciokąt* foremny, potem dwojąc liczbę boków aż do wielokątów mających 96 boków, dowiódł pierwszy że liczba π mieści się między $3\frac{10}{71}$ i $3\frac{10}{70}$. Ostatnia wartość $3\frac{1}{7}$ czyli $\frac{22}{7}$, która przewyższa π mniej niż *półsetną* jest dostateczna w wielu zastosowaniach.

Adryan Metius, matematyk hollenderski XVII^go wieku, znalazł dla π wartość $\frac{355}{113}$, przybliżoną na mniej niż $\frac{1}{2.10^6}$ przez zbytek: łatwo pamiętać tę liczbę, bo się otrzymuje pisząc dwa razy każdą ze trzech pierwszych liczb nieparzystych 113355, i przedzielając na połowę.

Metoda obwodów, prosta w zasadzie i jasna w teoryi, jest nader mozolna w zastosowaniu. Ale można znacznie ułatwić rachunek, szukając odwrotności obwodów zamiast samych obwodów. Jakoż, formuły

$$\frac{1}{P_1}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{P}+\frac{1}{p}\right) \quad \text{i} \quad \frac{1}{p_1}=\sqrt{\frac{1}{p}\cdot\frac{1}{P_1}}$$

prostsze od formul *zag.* VIII, pokazują że liczby $\frac{1}{P_1}, \frac{1}{p_1}, \frac{1}{P_2}, \frac{1}{p_2}, \ldots$ są naprzemian średnią arytmetyczną i średnią geometryczną dwóch bezpośrednio poprzedzających; co wiele uprosza ich rachunek.

Więc, jeśli w formule $C=2\pi R$ weźmiemy $R=\frac{1}{2}$, co daje $C=\pi$ albo $\frac{1}{\pi}=\frac{1}{C}$, odwrotności $\frac{1}{P_n}, \frac{1}{p_n}$, wszelkiego wielokąta foremnego opisanego i wpisanego, będą wartościami dla $\frac{1}{\pi}$, przybliżonemi pierwsza przez niedostatek drugo przez zbytek. Owoż, różnica $\frac{1}{p_n}-\frac{1}{P_n}$ jest mniejsza od $\frac{1}{4}\left(\frac{1}{p_{n-1}}-\frac{1}{P_{n-1}}\right)$, a temsamem $\frac{1}{p_n} - \frac{1}{P_n} < \frac{1}{4^n}\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{P}\right)$; co dowodzi że te różnice mogą stać się mniejszemi od wszelkiej ilości danej, byle tylko wzięto n dostatecznie wielkie. Ztąd wnosimy że liczby $\frac{1}{P_1}, \frac{1}{p_1}, \frac{1}{P_2}, \frac{1}{p_2}, \ldots$ naprzemian mniejsze i większe od $\frac{1}{\pi}$, mają liczbę $\frac{1}{\pi}$ za granicę.

Aby znaleźć przybliżoną wartość liczby $\frac{1}{\pi}$, zacznijmy od kwadratu. W kole promienia $\frac{1}{2}$, obwody kwadratów wpisanego i opisanego są $p = 2\sqrt{2}$ i $P = 4$; zatem $\frac{1}{P} = \frac{1}{4}$, $\frac{1}{p} = \frac{1}{4}\sqrt{2}$. Jeśli teraz będziemy uważali że $\frac{1}{4}$ jest średnią arytmetyczną między 0 i $\frac{1}{2}$, a zaś $\frac{1}{4}\sqrt{2}$ średnią geometryczną między $\frac{1}{2}$ i $\frac{1}{4}$, przyjdziemy do następującego zadania:

Liczba $\frac{1}{\pi}$ jest granicą do której dążą liczby szeregu utworzonego, zaczynając od 0 i $\frac{1}{2}$, i biorąc naprzemian średnię arytmetyczną i średnię geometryczną między dwiema bezpośrednio poprzedzającemi.

Oto obraz rachunków aż do wielokąta 128 boków.

Liczba boków	Wartość $\frac{1}{P_n}$	Wartość $\frac{1}{p_n}$
4	$\frac{1}{P} = 0{,}2500000$	$\frac{1}{p} = 0{,}3535534$
8	$\frac{1}{P_1} = 0{,}3017767$	$\frac{1}{p_1} = 0{,}3266407$
16	$\frac{1}{P_2} = 0{,}3142087$	$\frac{1}{p_2} = 0{,}3203644$
32	$\frac{1}{P_3} = 0{,}3162867$	$\frac{1}{p_3} = 0{,}3188217$
64	$\frac{1}{P_4} = 0{,}3180541$	$\frac{1}{p_4} = 0{,}3184377$
128	$\frac{1}{P_5} = 0{,}3182459$	$\frac{1}{p_5} = 0{,}3183418$

Znajdujemy tym sposobem $\frac{1}{\pi} = 0{,}318$ na mniej niż jedną tysiączną; a można wziąć nawet $\frac{1}{\pi} = 0{,}3182$, bo ta wartość jest przybliżona na mniej niż $0{,}0001$.

Zachodzi teraz pytanie, jaką wartość wyrachować dla $\frac{1}{\pi}$, *aby otrzymać π z przyblsżeniem wyznaczonem?*

Wiemy (*) że, dzieląc 1 przez wartość $\frac{1}{\pi}$ z błędem ε, popełniamy błąd ilorazu mniejszy od $\frac{\varepsilon}{\left(\frac{1}{\pi}-\varepsilon\right)^2}$. Owoż, $\frac{1}{\pi} > 0{,}318$; zatem błąd ilorazu jest mniejszy od $\frac{\varepsilon}{(0{,}318)^2}$ czyli od 10ε.

Więc, aby wyznacczyć π z przybliżeniem żądanem, dość znaleźć wartość $\frac{1}{\pi}$ z jedną cyfrą więcej, podzielić 1 przez tę wartość, i przestać na cyfrze dziesiętnej rzędu przybliżenia.

Jeśli chcemy mieć π z *sześcioma* dokładnemi dziesiętnemi, trzebaby ciągnąć rachunek powyższego obrazu, aż do wielokątów których odwrotności obwodów mają *siedem* spólnych dziesiętnych. Jednakże, doszedłszy do wielokąta mającego 64 boków, możnaby już uprościć działanie, zastępując średnię geometryczną przez średnię arytmetyczną; albowiem różnica $\frac{1}{p_4} - \frac{1}{P_4} = 0{,}0003836$ pokazuje że błąd jest mniejszy od $\frac{(0{,}0004)^2}{8 \times 0{,}318} < \frac{1}{10^7}$; ten błąd maleje coraz bardziej, z przyczyny że $\frac{1}{p_n}$ maleje a $\frac{1}{P_n}$ rośnie. Ale i ten łatwy rachunek nie jest potrzebny; bo można odrazu mieć średnię arytmetyczną nie szukając poprzednich. Następujące twierdzenie posłuży do tego skrócenia.

(*) *Zob.* rozd. Przybliżenia w naszej arytmetyce.

W szeregu rosnącym, którego każdy wyraz jest średnią arytmetyczną dwóch poprzedzających, wyrazy dążą do granicy która się równa pierwszemu wyrazowi więcej $\frac{2}{3}$ różnicy dwóch pierwszych.

Aby tego dowieśdź, uważajmy że, jeśli oznaczymy przez a i $a+\delta$ dwa pierwsze wyrazy szeregu, dwa następujące będą

$$a+\tfrac{1}{2}\delta \quad \text{i} \quad a+\tfrac{3}{4}\delta.$$

Owoż, ostatnie wyrazy można pisać:

$$a+\tfrac{2}{3}\delta-\tfrac{1}{6}\delta \quad \text{i} \quad a+\tfrac{2}{3}\delta+\tfrac{1}{12}\delta;$$

więc następujące średnie arytmetyczne są:

$$a+\tfrac{2}{3}\delta-\tfrac{1}{24}\delta$$
$$a+\tfrac{2}{3}\delta+\tfrac{1}{48}\delta$$
$$a+\tfrac{2}{3}\delta-\tfrac{1}{96}\delta$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Widzimy teraz łatwo że wyrazy szeregu, na przemian mniejsze i większe od liczby $a+\frac{2}{3}\delta$, dążą nieskończenie do tej liczby ktora jest ich granicą.

Stosując twierdzenie do naszego rachunkn, mamy

$$\frac{1}{p_4}=0{,}3184377,\qquad \frac{1}{\mathrm{P}_4}=0{,}3180541,\qquad \frac{1}{p_4}-\frac{1}{\mathrm{P}_4}=0{,}0003836.$$

Zatem $\dfrac{1}{\pi}=0{,}3180541+\frac{2}{3}.\,0{,}0003836=0{,}3183098,$

na mniej niż $0{,}0000001$.

Więc ostatecznie $\pi=3{,}141593$ na mniej niż $0{,}000001$.

Metoda wielokątów równoobwodowych. Jeśli nazwiemy x promień okręgu równego obwodowi kwadratu którego bok wzięto za *jedność*, formuła $\mathrm{C}=2\pi x$ da $\pi=\dfrac{2}{x}\cdot$ Chodzi tedy o wyznaczenie wartości promienia x.

W tym celu, uważając że okrąg $2\pi x$ jest oczywiście większy od okręgu $2\pi r_n$, wpisanego we wszelki wielokąt foremny równoobwodowy z kwadratem, ale mniejszy od okręgu $2\pi \mathrm{R}_n$ opisanego na tym wielokącie; łatwo widzimy że promień x mieści się między apotemą r_n i promieniem R_n; a że różnica $R_n - r_n$ dąży d o zeza, w miarę jak n rośnie, ztąd wnosimy że

Promień okręgu danej długości jest granicą apotem i promieni wielokątów foremnych równoobwodowych

Owoż, wiemy że w kwadracie obwodu 4 apotema $r = \frac{1}{2}$ i promień $R = \frac{1}{2}\sqrt{2}$; jeśli będziemy zważali że $\frac{1}{2}$ jest średnią arytmetyczną między 0 i 1, a zaś $\frac{1}{2}\sqrt{2}$ średnią geometryczną między 1 i $\frac{1}{2}$, przyjdziemy do następującego twierdzenia:

Liczby szeregu którego dwie pierwsze są 0 *i* 1, *a każda z następujących jest, naprzemian, średnią arytmetyczną i średnią geometryczną między dwiema bezpośrednio poprzedzającemi, mają za granicę promień okręgu równego* 4.

Na mocy tego twierdzenia, wykonywając po kolei rachunek apotem i promieni, aż do wielokąta 128 boków, znajdujemy następujący obraz wyników.

LICZBA BOKÓW.	APOTEMA.	PROMIEŃ.
4.	$r = 0{,}5000000$	$R = 0{,}7071068$
8.	$r_1 = 0{,}6035534$	$R_1 = 0{,}6532815$
16.	$r_2 = 0{,}6284174$	$R_2 = 0{,}6407289$
32.	$r_3 = 0{,}6345731$	$R_3 = 0{,}6376435$
64.	$r_4 = 0{,}6361083$	$R_4 = 0{,}6368754$
128.	$r_5 = 0{,}6364919$	$R_5 = 0{,}6366836$

Teraz, ponieważ różnica $R_5 - r_5 = 0{,}0001917$, można wziąć średnię arytmetyczną zamiast średniej geometrycznej; bo błąd będzie mniejszy od $\frac{(0{,}0002)^2}{8 \times 0{,}63} < \frac{1}{10^8}$.

Zatem, stosując wiadome już twierdzenie średnich arytmetycznych, otrzymujemy

$$x = 0{,}6364919 + \tfrac{2}{3} \times 0{,}0001917 = 0{,}6366197.$$

Więc $$\pi = \frac{2}{0{,}6366197} = 3{,}141593.$$

na mniej niż jedną milionową. Co jest własnie wartością znalezioną powyżej.

Uwaga. — Gdybyśmy wzięli $C=2$, mielibyśmy $\pi=\frac{1}{x}$; wtedy, w kwadracie równoobwodowym, byłoby $r=\frac{1}{4}$, $R=\frac{1}{4}\sqrt{2}$; i rachunek wyznaczenia wartości π byłby zupełnie ten sam co w metodzie obwodów.

Te jednakże metody, mimo znakomitych uproszczeń byłyby jeszcze bardzo mozolne, gdyby chciano znaleźć wartość π z wieloma dziesiętnemi. W ostatnich czasach, sposobami o których tu mowy być nie może, posunięto rachunek wartości π aż do 540 dziesiętnych.

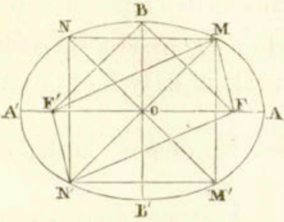
WIEDZA O LINIACH STOŻKOWYCH (*)

WŁASNOŚCI FUNDAMENTALNE ELLIPSY

Ellipsa *jest to linia krzywa płaska, zamknięta, i taka że summa odległości każdego jej punktu od dwóch punktów niezmiennych równa się długości stałej.*

Te punkta niezmienne, które oznaczamy przez F i F′, nazywają się *ogniskami* ellipsy; linie MF, MF′ łączące punkt M ellipsy z ogniskami są *promieniami wodzącemi* tego punktu. Oznaczając przez AA′ summę promieni wodzących, będzie dla każdego punktu M ellipsy,

$$MF + MF' = AA'.$$



Powyższe równanie daje praktyczny sposób kreślenia ellipsy ogrodnikom wiadomy. Krańce sznura, którego długość równa się danej ilości AA′, przywiązują się w oznaczonych ogniskach F i F′, a tyczka pionowa, wytężająca ten sznur w punkcie M, wzdłuż się pomyka; wtedy skrajność tyczki

(*) Trzy linie krzywe *ellipsa*, *hiperbola* i *parabola*, które można otrzymać przecinając stożek kołowy płaszczyzną, nazywają się dlatego *stożkowemi*.

kreśli ellipsę; bo summa MF + MF′ jest ciągle równa długości sznura.

Zmieniając długość sznura i *odległość ogniskową* FF′ można otrzymać wszelką ellipsę.

Wynika oczywiście z określenia że ellipsa jest linią symetryczną względem linii ognisk FF′, i względem prostopadłej BB′ wyprowadzonej z jej środka O.

Punkt przecięcia tych dwóch osi symetryi *prostokątnych* jest *środkiem* ellipsy. Jakoż, niech będą: N symetryczny punktu M względem osi BB′, M′ i N′ symetryczne punktów M i N względem osi FF′; jeśli połączymy M′N′, czworokąt MNN′M′ będzie widocznie prostokątem; więc punkt O jest środkiem przekątnej MN′ (I, 30, wn.). Owoż, punkt M jest wzięty jakikolwiek na ellipsie; więc, na ellipsie, każdemu punktowi M odpowieda punkt N′ symetryczny względem punktu O. Ztąd wynika że środek O odległości ogniskowej FF′ jest środkiem ellipsy.

Można tego wprost dowieśdź. Niech będzie N′ symetryczny punktu M ellipsy; poprowadźmy N′F i N′F′, czworobok MFN′F′, w którym przekątne FF′, MN′ przecinają się na połowy w punkcie O, jest równoległobokiem; zatem $N'F + N'F' = MF + MF'$. Co dowodzi że punkt N′ należy do ellipsy; więc punkt O jest środkiem tej linii.

W trójkącie FMF′ ośrodkowa $OM < \dfrac{MF + MF'}{2}$;

a że $MF + MF' = 2OA$, więc $OM < OA$.

To pokazuje że największym promieniem ellipsy jest OA, a najmniejszym OB. Dlatego też odległość AA′ nazywa się *wielką osią* ellipsy, a odległość BB′ *małą osią*; skrajności tych osi A i A′, B i B′ są *wierzchołkami* ellipsy.

Długość wielkiej osi oznacza się przez $2a$, długość małej osi przez $2b$, a odległość ogniskową FF′ przez $2c$.

Z istnienia trójkąta MFF′ wynika że $2c < 2a$ czyli $c < a$.

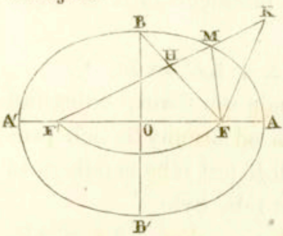
Stosunek $\dfrac{c}{a}$, który oznaczają przez e, nazywa się *excentryczności* ellipsy.

Ta excentryczność jest ułamkiem który się zmienia od 0 aż do 1.

Gdy $c = 0$, ogniska F i F′ ellipsy schodzą się w jej środku O, i ellipsa staje się kołem promienia a. Zatem koło jest szczególnym przypadkiem ellipsy.

Gdy $c = a$, excentryczność $\frac{c}{a} = 1$, i ellipsa staje się linią prostą $FF' = 2a$.

Ztąd wynika że ellipsa jest tem więcej spłasczona im ma większą excentryczność, a tem bliższa koła im excentryczność mniejsza.



Trójkąt prostokątny OBF daje $a^2 = b^2 + c^2$; to równanie wyznacza jedną ze trzech ilości a, b, c gdy dwie inne są wiadome.

I tak, $c = \pm\sqrt{a^2 - b^2}$;

więc aby, znając obie osie ellipsy, wyznaczyć jej ogniska, dość jest ze skrajności B małej osi jako środka, promieniem równym a, nakreślić łuk koła który przetnie wielką oś w dwóch ogniskach F i F′.

Ziemia i wszystkie inne planety opisują w przestrzeni ellipsy których słońce zajmuje jedno z ognisk.

Uważajmy teraz punkt K zewnątrz ellipsy, i połączmy go z ogniskami; w trójkącie KFF′ będzie (I, 1, *wn*)

$$KF + KF' > MF + MF' \quad \text{albo} \quad KF + KF' > 2a.$$

Jeśli zaś weźmiemy punkt H wewnątrz elipsy, trójkąt MFF′ da

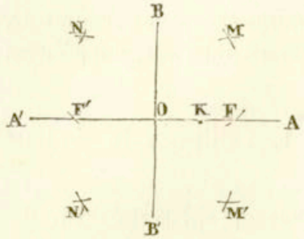
$$HF + HF' < MF + MF' \quad \text{albo} \quad HF + HF' < 2a.$$

Więc, według jak summa odległości punktu od ognisk równa wielkiej osi, jest od niej większa albo mniejsza, ten punkt leży na elipsie, jest zewnątrz albo wewnątrz tej krzywej.

Zagadnienie XIII.

Nakreślić ellipsę punktami znając obie osie.

Poprowadź dwie proste AA′, BB′ prostopadłe do siebie w punk-



cie O. Weź długość $OA = OA' = a$ długość $OB = OB' = b$. Z wierzchołka B jako środka, promieniem a nakreśl łuk koła który oznaczy na AA' ogniska F i F'. Po czem, weź między temi ogniskami na AA' jakikolwiek punkt K, i z punktów F i F' jako środków, promieniami odpowiednio równemi odległościom KA i KA', nakreśl łuki kół; ich punkta przecięcia M i M' będą należały do ellipsy; bo

$$MF + MF' = M'F + M'F' = KA + KA' = 2a.$$

Ale trzeba dowieśdź że te łuki przecinają sie. Owoż, odległość FF' środków kół jest oczywiście mniejsza od summy $2a$ ich promieni; więc, dla przecięcia dwóch kół, dość jest żeby ta odległość była większa od różnicy promieni, to jest żeby było

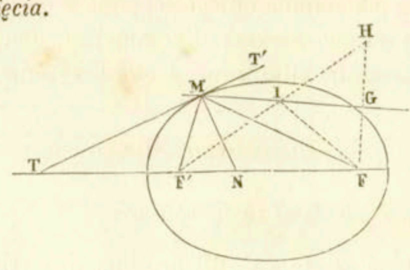
$FF' > KA' - KA$ czyli $2c > 2a - 2KA$; zkąd $KA > AF$.
Co właśnie jest warunkiem którego powyższe wykreślenie dopełnia.

Przemieniając promienie można, temi samemi otwartościami cyrkla, otrzymać względnie do kożdego punktu K, cztery punkta M, M' i N, N' ellipsy.

Jeśli punkt K jest w O, wykreślenie daje wierzchołki B i B' małej osi elipsy; a jeśli punkt K jest w F albo w F', odpowiedające punkta ellipsy są wierzchołkami A i A' wielkiej osi. Promień wodzący *minimum* jest FA a *maximum* FA'.

Twierdzenie XXVII.

Styczna do ellipsy czyni kąty równe z promieniami wodzącemi punktu zetknięcia.



Niech będzie punkt M dany na ellipsie. Przez ten punkt i przez sąsiedni M', poprowadźmy sieczną MM', i, z ogniska F, spuśćmy na nią prostopadłę FG którą przedłużmy długością $GH = FG$. Jeśli teraz poprowadzimy F'H, ta prosta przetnie sieczną MM' w punkcie I który będzie między M i M'. Jakoż, wiemy (I, *zag.* 3) że $FI + IF'$ jest najkrótszą drogą z punktu F do F' dotykającą siecznej MM'; zatem $IF + IF' < MF + MF'$ czyli $IF + IF' < 2a$. To dowodzi że punkt I siecznej MM' leży wewnątrz ellipsy, a więc między M i M'. Wiemy nadto że prosta MM' tworzy z prostemi IF, IF' kąty równe FIM', F'IM; i ta równość kątów istnieje ciągle jakkolwiek blisko punkt M' dochodzi do M. Owoż, gdy punkt M' schodzi się z punktem M, punkt I schodzi się z nim także, i sieczna MM' staje się styczną do ellipsy w punkcie M; więc styczna do ellipsy czyni kąty równe z promieniami wodzącemi punktu zetknięcia, to jest kąt $TMF' = T'MF$.

Wniosek. — Jeśli w punkcie M poprowadzimy prostopadłę MN do stycznej MT, kąty NMF, NMF' będą równe jako dopełnienia kątów równych FMT', F'MT.

Więc *normalna do ellipsy jest dwójsieczną kąta który tworzą promienie wodzące punktu zetknięcia.*

Ztąd wynika że styczna i normalna punktu M ellipsy dzielą harmonicznie odległość ogniskową.

W wierzchołkach ellipsy normalna ma kierunek odpowiedającej osi, a styczna jest prostopadłą do tej osi.

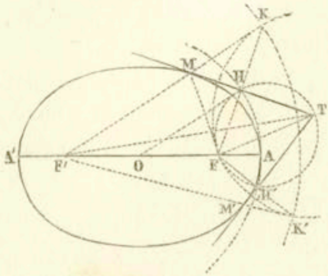
Uwaga. — Własności stycznej i normalnej w ellipsie usprawiedliwiają nazwę *ogniska.*

Jakoż, na mocy ustawy fizycznej że: *kąt odbicia jest równy kątowi wpadnięcia*, promienie światła, ciepła albo dźwięku, które wychodzą z jednego ogniska ellipsy, po odbiciu się od tej linii, zbiegają się w drugiem ognisku.

Zagadnienie XIV.

Poprowadzić styczną do ellipsy przez punkt dany.

1° *Jeśli jest dany punkt* M *na ellipsie*, poprowadź promienie wodzące MF, MF' i dwójsieczną MI kąta spełniającego FMK która będzie styczną szukaną.



2° *Jeśli punkt dany* T *jest zewnątrz ellipsy*, przypuśćmy zagadnienie rozwiązane, i niech będzie MT styczna szukana. Z ogniska F poprowadźmy do stycznej MT prostopadłę FK, która spotka w punkcie K przedłużony promień wodzący MF′ punktu zetknięcia M. Owoż, styczna MT jest dwójsieczną kąta FMK; zatem trójkąt MFK jest równoramienny i styczna MT jest prostopadła we środku podstawy FK. Ztąd wynika że TK = TF, i MK = MF a przeto F′K = $2a$. Tym sposobem punkt K jest wyznaczony i następnie punkt zetknięcia M.

Więc, aby rozwiązać zagadnienie, z danego punktu T jako środka, promieniem FT nakreśl łuk koła, i z ogniska F′ jako środka, promieniem $2a$, nakreśl drugi łuk koła który przetnie pierwszy w punktach K i K′; po czem, poprowadź proste F′K i F′K′, ich przecięcia M i M′ z ellipsą wyznaczą punkta zetknięć M i M′; i proste TM, TM′ będą stycznemi szukanemi.

Dwa wyżej nakreślone koła przecinają się zawsze gdy dany punkt T nie jest wewnątrz ellipsy. Jakoż, w trójkącie TFF′, mamy

$$TF' < TF + FF' \qquad \text{i} \qquad TF' > TF - FF';$$

więc tem bardziej

$$TF' < TF + 2a \qquad \text{i} \qquad TF' > TF - 2a.$$

Nadto, jeśli punkt T jest zewnątrz ellipsy, wtedy

$$TF + TF' > 2a; \quad \text{zkąd} \quad TF' > 2a - TF.$$

Gdy punkt T leży na wielkiej osi, trójkąt TFF′ nie istnieje; ale trzy potrzebne nierówności, wyżej znalezione, są jeszcze prawdziwe.

Ponieważ tedy odległość TF′ środków dwóch kół jest mniejsza od summy promieni $2a$, TF, i większa od ich różnicy gdy punkt T jest zewnątrz ellipsy; więc te koła przecinają się w dwóch punktach K i K′, i zagadnienie ma dwa rozwiązania.

Powyższy sposób prowadzenia stycznej do ellipsy wystarcza wtedy nawet gdy ellipsa nie jest nakreślona, i tylko wiadome jej ogniska i wielka oś. W tym przypadku, wyznaczywszy punkt K jakośmy wskazali, szuka się punktu równoodległego od F i K; prosta przechodząca przez ten punkt i przez dany T jest styczną do ellipsy, a jej przecięcie M z promieniem F'K jest punktem zetknięcia. Tak samo znajduje się drugą styczną TM'.

Z tego co poprzedza ważne wynikają wnioski.

WNIOSEK I. — *Styczna do ellipsy ma z nią jeden tylko punkt spólny.*

Jakoż, przedłużmy promień wodzący F'M; styczna MT jest dwójsieczną kąta FMK, jeśli więc weźmiemy MK = MF i połączymy FK, styczna MT będzie prostopadła we środku prostej FK. Ztąd wynika że TK = TF. Owoż, w trójkącie TKF', mamy

$$\mathrm{TK} + \mathrm{TF'} > \mathrm{F'K} \quad \text{albo} \quad \mathrm{TF} + \mathrm{TF'} > 2a\,;$$

więc wszystkie punkta stycznej MT, oprócz punktu zetknięcia M, są zewnątrz ellipsy.

II. — Koło któreśmy kreślili z ogniska F' jako środka, promieniem $2a$, nazywa się kołem *kierującem ellipsy względnem do ogniska* F'. Ellipsa ma dwa koła kierujące względne do dwóch ognisk.

Ponieważ odległości MK i MF są równe, jakikolwiek jest punkt M na ellipsie, ztąd wnosimy że

Miejscem punktów równoodległych od okręgu majacego środek F', *i od punktu wewnętrznego* F, *jest ellipsa mająca punkta* F *i* F' *za ogniska i koło* F' *za koło kierujące względne do* F'.

Jeśli z punktu F, wziętego wewnątrz koła F'K, poprowadzono do jego okręgu różne proste jako FK, wtedy prostopadłe wyprowadzone ze środka tych linij są styczne do ellipsy, to jest owłóczą tę krzywę; dlatego mówi się że ellipsa jest *owłoką* tych prostopadłych.

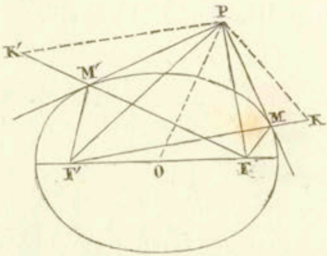
III. — Punkt I jest rzutem ogniska F na stycznej MT. Połączmy ten punkt ze środkiem O ellipsy. W trójkącie KFF', linia OI łącząca środki dwóch boków FK, FF' jest równoległa do trzeciego boku F'K i równa jego połowie; więc OI = a. Ztąd wynika że

Miejscem rzutów ognisk ellipsy na jej stycznych jest okrąg koła opisany na wielkiej osi joko średnicy.

To koło nazywają czasem *kołem głównem* ellipsy.

Uwaga. — Punkt I jest przecięciem koła głównego i koła nakreślonego na odległości FT jako średnicy. Ta uwaga nastręcza inny sposób prowadzenia stycznej do ellipsy, przez punkt zewnętrzny T. Sama figura dostatecznie to wyjaśnia.

IV. — *Styczne* PM, PM′ *poprowadzone do ellipsy przez punkt zewnętrzny* P, *czynią kąty równe z promieniami wodzącemi tego punktu ; linia łącząca punkt* P *z jednem ogniskiem jest dwójsieczną kąta który tworzą dwie linie idące z tego ogniska do dwóch punktów zetknięć* M *i* M′.



Jakoż, koła kierujące przecinają przedłużone promienie F′M i FM w punktach K i K′, tak że PK = PF i PK′ = PF′. Zatem dwa trójkąty PKF′, PFK′, mające trzy boki równe każdy każdemu, są równe. Zkąd wynika że kąty KPF′ i FPK′ są równe. Jeśli tedy odtrącimy część spólną kąt FPF′, otrzymamy kąty KPF i K′PF′ równe ; więc kąty MPF i M′PF′, jako połowy tych ostatnich, są równe.

Wynika także z równości trójkątów PKF′, PFK′ że kąty PKM i PFM′ są równe ; owoż, kąt PKM jest równy kątowi PFM ; więc kąty PFM i PF′M′ są równe, to jest linia FP jest dwójsieczną kąta promieni zetknięć FM, FM′.

V. — Przypuśćmy że kąt stycznych MPM′ jest prosty (*fig. powyższa*). Ponieważ kąt M′PF′ = MPK, trójkąt KPF′ jest prostokątny ; zatem

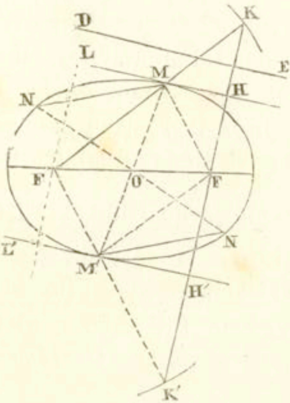
$$\overline{PK}^2 + \overline{PF'}^2 = \overline{F'K}^2, \qquad \text{albo} \qquad \overline{PF}^2 + \overline{PF'}^2 = 4a^2.$$

To dowodzi że punkt P opisuje okrąg mający ośródkowę OP za promień. Owoż, gdy punkt P staje się wierzchołkiem prostokąta opisanego na ellipsie, ta ośródkowa jest przeciwprostokątną trójkąta w którym kąt prosty ma za boki a i b ; więc

Miejscem wierzchołka kąta prostego opisanego na ellipsie jest okrąg spółśrodkowy, mający promień równy $\sqrt{a^2+b^2}$.

Zagadnienie XV.

Poprowadzić do ellipsy styczną równoległą do danej prostej.



Przypuśćmy zagadnienie rozwiązane, i niech będzie MH styczna równoległa do danej prostej DE. Widzimy zaraz że prostopadła FH, spuszczona z ogniska F na styczną MH, jest prostopadła do prostej DE i przecina w punkcie K koło kierujące F′. Więc, aby wykreślić styczną do ellipsy równoległą do danej prostej DE, dość jest poprowadzić, przez jedno ognisko F, prostopadłę FH do DE, i potem z drugiego ogniska F′ jako środka, nakreślić koło kierujące które przetnie tę prostopadłę w punktach K i K′. Prostopadłe HM i H′M′, wyprowadzone ze środków linij FK i FK′, będą szukanemi stycznemi do ellipsy, a ich przecięcia z promieniami F′K i F′K′ będą punktami zetknięć M i M′.

Zagadnienie ma zawsze dwa rozwiązania; powyższe wykreślenie daje obydwa, nie potrzebując nawet wykreślonej ellipsy, byle tylko wiadome były wielka oś i ogniska.

Wniosek. — *W ellipsie punkta zetknięć* M *i* M′ *dwóch stycznych równoległych* MH, M′H′ *są symetryczne względem jej środka* O.

Jakoż, trójkąty równoramienne KMF, KF′K′, FM′K′, mające kąt równy przy podstawie, są podobne i mają boki równoległe. Zatem czworobok FMF′M′ jest równoległobokiem, i środek O ellipsy jest środkiem przekątnej MM′.

Nawzajem, *styczne do ellipsy w dwóch punktach symetrycznych względem jej środka są równoległe.* Dowiedziemy tej wzajemnicy dowodząc następującego, ogólniejszego twierdzenia:

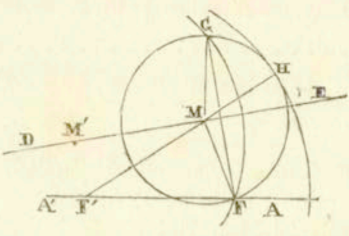
W każdej krzywej mającej środek, styczne w dwóch punktach symetrycznych względem tego środka są równoległe i równo od niego oddalone.

Niech będą dwa punkta M i M' symetryczne względem środka O krzywej jakiejkolwiek, *np.* ellipsy (*fig. powyższa*). Uważajmy punkt N sąsiedni punktu M, i symetryczny N' sąsiedni punktu M'. Ponieważ dwa trójkąty OMN, OM'N' są równe, sieczne MN i M'N' są równoległe i równo oddalone od środka O linii krzywej, jakkolwiek blizko punkt N dochodzi do M. Więc styczne do krzywej, w dwóch punktach symetrycznych M i M', jako granice tych siecznych, są równoległe i równo oddalone od środka O.

II. Punkta H i H' należą do koła głównego ellipsy; więc $FH.FH'=a^2-\overline{OF}^2$, albo $FH.FH'=b^2$. Owoż jeśli, przez ognisko F', poprowadzimy cięciwę LL' koła głównego prostopadłą do stycznej HL, będzie oczywiście $FH'=F'L$; więc *w ellipsie wieloczyn odległości dwóch ognisk od stycznej jest równy kwadratowi z połowy osi mniejszej.*

Zagadnienie XVI.

Mając dane ogniska F *i* F' *i wielką oś* AA' *ellipsy, wyznaczyć punkta jej przecięć z daną prostą* DE.



Przypuśćmy zagadnienie rozwiązane, i niech będzie M punkt przecięcia ellipsy z daną prostą DE; połączmy ten punkt z ogniskami, i przedłużmy promień wodzący F'M długością MH równą MF. Punkt H należy do koła kierującego F'H, i do koła nakreślonego z punktu M jako środka promieniem MF, które jest styczne do koła kierującego. Jeśli więc weźmiemy punkt G symetryczny ogniska F, będziemy mieli drugi punkt koła MF, i zagadnienie przywiedzie się do wyznaczenia środka koła które przechodzi przez dwa punkta wiadome F, G, i jest styczne do koła kierującego F'H; co już umiemy (III, *zag.* 16).

Zagadnienie ma dwa rozwiązania albo tylko jedno, albo nawet nie ma żadnego; albowiem dana prosta DE może być sieczną albo styczną do ellipsy, albo leżeć zewnątrz.

Wniosek. — Ponieważ linia prosta nie może spotykać ellipsy w więcej niż dwóch punktach, *ellipsa jest linią wypukłą*.

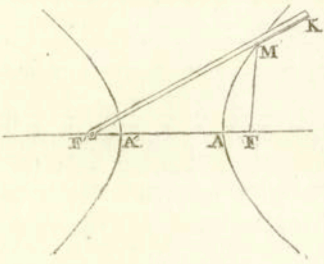
WŁASNOŚCI FUNDAMENTALNE HIPERBOLI.

Hiperbola *jestto linia krzywa płaska taka, że różnica odległości każdego jej punktu od dwóch punktów niezmiennych równa się długości stałej*,

Te punkta niezmienne F, F' nazywają się *ogniskami*, a odległości MF, MF' punktu M hiperboli od ognisk są *promieniami wodzącemi* tego punktu. Oznaczając przez AA' daną różnicę, będzie dla każdego punktu hiperboli

$$MF' - MF = \pm AA'.$$

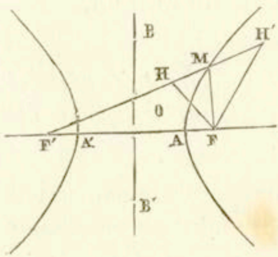
Znak + albo —, według jak punkt M jest więcej oddalony od ogniska F' albo od ogniska F.



To równanie wskazuje sposób kreślenia hiperboli *ruchem ciągłym*: bierze się liniał F'K dłuższy od odległości ogniskowej FF', i jeden jego koniec przytwierdza się w ognisku F', tak żeby liniał mógł się tylko obracać około tego punktu; po czem, jedna skrajność nici, której długość równa się przewyżce liniału nad daną długością AA', przywiązuje się w ognisku F a drugą skrajność na końcu K liniału. Wtedy ołówek, wytężający nić wzdłuż liniału obracającego się około ogniska F', kreśli łuk żądanej hiperboli; bo różnica MF' — MF jest ciągle równa danej długości AA', jako pokazuje sama figura.

Obracając podobnie liniał około ogniska F, nakreśli się drugą część hiperboli.

To wykreślenie pokazuje że hiperbola składa sie z dwóch części, które nie mają żadnego punktu spólnego. Albowiem, dla każdego punktu M prawej części figury jest $MF' > MF$; a przeciwnie, dla punktu lewej części, $MF > MF'$. Każda z tych dwóch oddzielnych części ma dwie gałęzie, rozciągające się nieograniczenie nad i pod linią ogniskową FF'. Hiperbola ma tedy cztery gałęzie nieskończenie rozległe na cztery strony płaszczyzny.



Wynika z określenia że hiperbola jest linią symetryczną względem linii ognisk FF' i względem prostopadłej BB' wyprowadzonej z jej środka O.

Te dwie osie symetryi nazywają się *osiami hiperboli*, a punkt ich przecięcia O jest środkiem tej krzywej.

Oś przechodząca przez ogniska spotyka hiperbolę w punktach A i A' które są jej wierzchołkami. Ta oś nazywa się *osią poprzeczną*, jej długość AA' oznacza się przez $2a$. Druga oś BB' nie spotyka hiperboli, i nazywa się *osią niepoprzeczną* a czasem *osią urojoną*. Odległość ogniskowa FF' oznacza się przez $2c$.

Z istnienia trójkąta MFF' wnosimy że $2c > 2a$ czyli $c > a$.

Uważajmy punkt H, leżący *zewnątrz* hiperboli, i złączmy go z ogniskami. Ponieważ promień wodzący HF' przecina hiperbolę w punkcie M, mamy

$$MF' - MF = 2a.$$

Owoż, trójkąt MFH daje

$$MF - MH < HF;$$

więc $MF' - MH < 2a + HF$. albo $HF' - HF < 2a$.

Uważajmy teraz pumkt H' leżący *wewnątrz* hiperboli, i złączmy go z ogniskami. Ponieważ promień wodzący H'F' przecina w M gałęź hiperboli należącą do ogniska F, mamy najpierwej

$$MF' - MF = 2a,$$

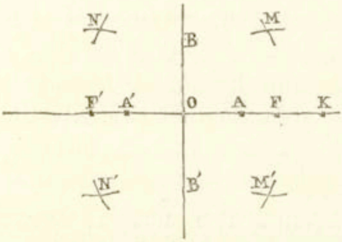
a potem, w trójkącie MFH', $\quad MH' + MF > H'F$;

więc $\quad MF' + MH' > 2a + H'F \quad$ albo $\quad H'F' - H'F > 2a.$

Ztąd wnosimy że, według jak różnica odległości punktu od dwóch ognisk hiperboli równa się $2a$, jest mniejsza albo większa od tej ilości, punkt M leży na hiperboli, jest zewnątrz albo wewnątrz tej krzywej.

Zagadnienie XVII.

Nakreślić hiperbolę punktami, znając oba ogniska i oś poprzeczną.



Z obydwóch stron środka O odległości ogniskowej FF', oznaczmy punkta A i A', biorąc $OA = OA' = a$; poczem, weźmy jakikolwiek punkt K na przedłużeniu OF. Jeśli z punktów F i F', jako środków, promieniami KA i KA' nakreślimy łuki kół, punkta przecięć M i M' tych łuków będą należały do hiperboli; bo

$$MF' - MF = KA' - KA = 2a.$$

Ale trzeba dowieśdź że tak nakreślone łuki kół przecinają się. Owoż, odległość FF' środków kół jest oczywiście większa od różnicy promieni $KA' - KA$ czyli $2a$; więc trzeba tylko żeby odległość FF' była mniejsza od summy tych promieni, to jest powinno być

$$FF' < KA' + KA \quad \text{albo} \quad 2c < 2a + 2KA;$$

zkąd $\quad KA > c - a \quad$ albo $\quad KA > KF.$

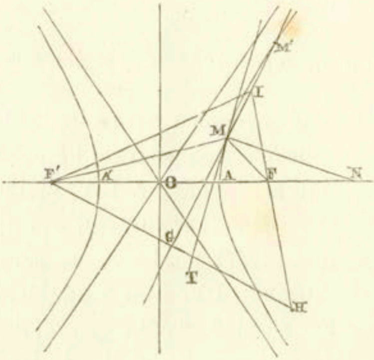
Co właśnie jest warunkiem którego powyższe wykreślenie dopełnia.

Przemieniając promienie, można, temi samemi otwartościami cyrkla, otrzymać na każdy punkt K cztery punkta M i M', N i N' hiperboli.

Jeśli punkt K jest w F, odpowiedające punkta hiperboli są wierzchołkami A i A′. Promień wodzący *minimum* jest $c - a$. Niema promienia wodzącego maximum; ponieważ punkta hiperboli mogą się oddalać nieskończenie od ognisk.

Twierdzenie XXVIII.

Styczna do hiperboli jest dwójsieczną kąta który tworzą promienie wodzące punktu zetknięcia.



Niech będzie punkt M na hiperboli. Przez ten punkt i przez sąsiedni M′, poprowadźmy sieczną MM′, i na nią spuśćmy z ogniska F′ prostopadłę F′G którą przedłużmy wielkością GH=GF′; po czem poprowadźmy prostę HF. Ta linia spotka sieczną MM′ w punkcie I leżącym między M i M′. Jakoż, połączmy IF, IF′. Ponieważ prosta MM′ jest dwójsieczną kąta FIF′ (1, *zag.*4), i różnica IF′ —IF jest maximum, będzie IF′—IF>MF′—MF, albo MF′—MF >2a. Więc punkt I jest wewnątrz hiperboli a temsamem między punktami M i M′. Ztąd wynika że, gdy punkt M′ zbliża się do M, punkt I zbliża się tem bardziej do niego. Owoż, jakkolwiek blisko punkt M dochodzi do M, sieczna MM′ jest ciągle dwójsieczną kata FIF′; więc granica tej siecznej, styczna w punkcie M hiperboli, jest dwójsieczną kąta FMF′.

Wniosek. — Normalna MN do hiperboli jest dwójsieczną spełnienia kąta promieni wodzących punktu zetknięcia.

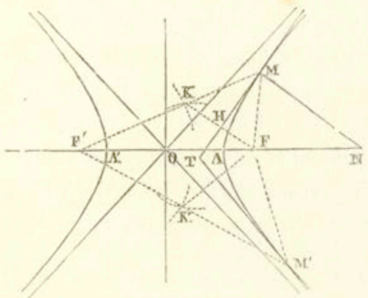
Ztąd wnosimy że styczna i normalna punktu M hiperboli dzielą harmonicznie odległość ogniskową FF′.

W wierzchołku hiperboli normalna ma kierunek osi poprzecznej, a styczna jest prostopadła do tej osi.

Uwaga. — W hiperboli, promienie światła, ciepła albo głosu, wychodzące z jednego ogniska, po odbiciu się od tej krzywej, oddalają się od drugiego ogniska i tylko ich przedłużenia w niem się zbiegają.

Zagadnienie XVIII.

Poprowadzić styczną do hiperboli przez punkt dany.



1° Jeśli jest dany punkt M na hiperboli, poprowadź promienie wodzące MF i MF', a dwójsieczna MT kąta FMF' tych promieni będzie styczną szukaną.

2° Jeśli jest dany punkt T zewnątrz hiperboli, przypuśćmy zagadnienie rozwiązane i niech będzie MT styczna żądana. Z ogniska F, poprowadźmy do stycznej MT, prostopadłę FH która spotka w punkcie K promień wodzący MF' punktu zetknięcia M. Owoż, styczna MT jest dwójsieczną kąta FMF'; zatem trójkąt FMK jest równoramienny, i prosta MT jest prostopadła we środku podstawy FK. Ztąd wynika że TK = TF, i MK = MF, a przeto F'K = 2a. Tym sposobem punkt K jest wyznaczony, i następnie punkt zetknięcia M.

Więc, aby rozwiązać zagadnienie, z danego punktu T jako środka, promieniem TF nakreśl łuk koła, i z ogniska F' jako środka, promieniem 2a nakreśl drugi łuk koła który przetnie pierwszy w punktach K i K'; po czem, poprowadź proste F'K i F'K' które wyznaczą na hiperboli punkta zetknięć M i M'; i proste TM i TM' będą stycznemi szukanemi.

Aby dowieśdź że dwa wyżej nakreślone koła przecinają się zawsze gdy dany punkt T jest zewnątrz hiperboli, uważajmy że trójkąt TFF' daje

$$\mathrm{TF'} > \mathrm{FF'} - \mathrm{TF}, \text{ a tem bardziej } \mathrm{TF'} > 2a - \mathrm{TF};$$

nadto, ponieważ punkt T jest zewnątrz hiperboli, mamy

$$\mathrm{TF'} - \mathrm{TF} < 2a \quad \text{i} \quad \mathrm{TF} - \mathrm{TF'} < 2a;$$

zkąd
$$\mathrm{TF'} > \mathrm{TF} + 2a \quad \text{i} \quad \mathrm{TF'} > \mathrm{TF} - 2a$$

Więc rzeczone koła przecinają się.

WNIOSEK. — *Styczna do hiperboli ma z nią jeden tylko punkt spólny.*

Dowodzenie jako w ellipsie.

II. — Koło któreśmy kreślili z ogniska F' jako środka i promieniem $2a$, nazywa się *kołem kierującem hiperboli* względnem do ogniska F'. Hiperbola ma dwa koła kierujące względne do dwóch ognisk.

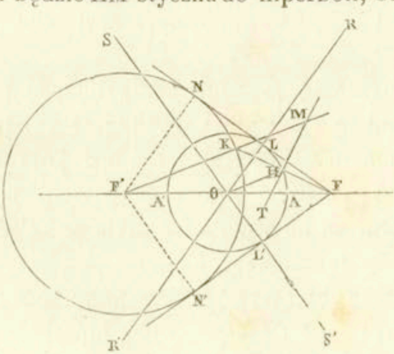
Widzimy łatwo że *miejscem punktów równoodległych od koła* F' *i od punktu* zewnętrznego F *jest hiperbola, mająca punkta* F *i* F' *za ogniska, a koło* F' *za koło kierujące względem ogniska* F'.

Zatem, *jeśli ze środka linij łączących punkta okręgu* F' *z punktem zewnętrznym* F *wyprowadzimy prostopadłe, owłoka tych prostopadłych będzie hiperbola mająca ogniska* F *i* F'.

III. — *Miejscem rzutów ognisk hiperboli na stycznych jest koło opisane na osi poprzecznej jako średnicy.*

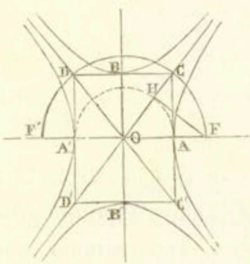
To koło nazywają *kołem głównem* hiperboli.

IV. — Niech będzie HM styczna do hiperboli, OH koło główne,



F'K koło kierujące. Ponieważ promienie OH i F'K są równoległe, ognisko F jest środkiem podobieństwa tych dwóch kół; poprowadźmy do nich styczną spólną FLN. Widzimy łatwo że, gdy punkt H zbliża się do punktu zetknięcia L, punkt K przysuwa się do punktu zetknięcia N, a punkt zetknięcia M stycznej HM do hiperboli oddala się coraz więcej od F'. Jeśli więc punkt H padń w L, styczna HM przystaje do prostej OL, i punkt zetknięcia M jest nieskończenie oddalony od F'. Ta prosta OL, granica stycznej HM, do której hiperbola zbliża się nieskończenie i może być tak blisko jak się podoba chociaż jej nigdy nie dosięga, nazywa się NIEMALTYCZNĄ (*asymptota*) hiperboli.

Jest druga spólna styczna FL' do kół głównego i kierującego; zatem prostopadła OL' do FL' jest drugą niemaltyczną do prawej części hiperboli. A ponieważ hiperbola jest symetryczną względem osi poprzecznej AA', i względem prostopadłej wyprowadzonej ze środka O tej osi, dwie rzeczone niemaltyczne, przedłużone, są niemaltycznemi do dwóch gałęzi lewej części hiperboli.



Hiperbola ma tedy dwie niemaltyczne RR' i SS', które przechodzą przez jej środek, i są prostopadłe do stycznych zewnętrznych, spólnych kołom głównemu i kierującemu tej krzywej.

Z wierzchołka A osi poprzecznej, wyprowadźmy prostopadłę AC aż do przecięcia w punktach C i C' z niemaltycznemi RR' i SS', i dopełnijmy prostokąta CC'DD'; po czem, z ogniska F spuśćmy prostopadłę FH na niemaltyczną OK. Wiemy już że $OH = a$, więc dwa trójkąty prostokątne OAC, OFH są równe; ztąd wynika $OC = OF = c$,

Poprowadźmy BB' drugą oś symetryi hiperboli. Dla podobieństwa z ellipsą, długość $BB' = 2AC$ nazwano *długością osi niepoprzecznej* hiperboli, i oznaczono przez $2b$.

Jako w ellipsie tak i w hiperboli jest związek między trzema ilościami a, b, c. Jakoż, trókąt prostokątny ACO daje

$$c^2 = a^2 + b^2, \quad \text{zkąd} \quad c = \pm \sqrt{a^2 + b^2}.$$

To równanie wskazuje graficzny sposób wyznaczenia ognisk hiperboli, gdy długości obydwóch osi są wiadome.

Dość wyprowadzić ze skrajności A osi poprzecznej prostopadłę AC $= b$, i nakreślić, ze środka O hiperboli, promieniem OC, półkole które przetnie oś poprzeczną w dwóch ogniskach F i F'.

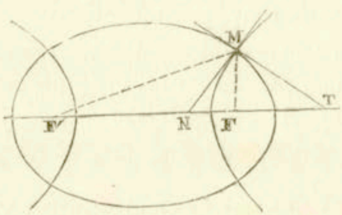
Jako widzimy, niemaltyczne hiperboli są dwiema przekątnemi prostokąta zbudowanego na jej osiach; one najwyraźniej wskazują kształt tej krzywej, i dlatego zawsze je przede wszystkiem kreślić należy.

Hiperbola nazywa się *równoboczną* gdy jej osie są równe. Owoż, gdy $a = b$, prostokąt CC'D'D jest kwadratem; więc w hiperboli równobocznej niemaltyczne są prostokątne, i nawzajem.

Dwie hiperbole nazywają się *sprzężonemi*, gdy mają spólne osie i temsamem spólne niemaltyczne, ale są umieszczone w różnych kątach tych niemaltycznych; jako na powyższej figurze.

Twierdzenie XXIX.

Ellipsa i hiperbola spółogniskowe przecinają się pod kątem prostym.



Niech będzie ellipsa i hiperbola mające spólne ogniska F, F', i przecinające się w punkcie M.

Dwójesieczna MN, kąta FMF' promieni wodzących, jest normalną do ellipsy a styczną do hiperboli. Zatem styczne MT, MN do tych dwóch stożkowych są do siebie prostopadłe; więc te stożkowe przecinają się prostokątnie.

Zagadnienie XIX.

Poprowadzić styczną do hiperboli równoległą do danej prostej.

Rozwiązanie jako w ellipsie, z tą tylko różnicą że zagadnienie

nie zawsze możebne. Trzeba dla możebności żeby równoległa do danej prostej, poprowadzona przez środek hiperboli, nie wpadała w kąty niemaltycznych które obejmują tę krzywę.

Zagadnienie XX.

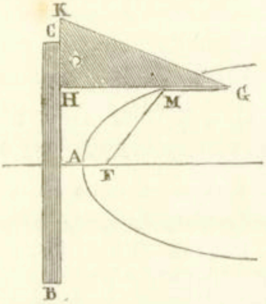
Mając dane ogniska i oś poprzeczną hiperboli, wyznaczyć punkta jej przecięć z daną prostą.

Tak jako w ellipsie.

Wniosek. — Hiperbola jest linią wypukłą.

WŁASNOŚCI FUNDAMENTALNE PARABOLI.

Parabola jestto linia krzywa płaska, której każdy punkt jest równo oddalony od punktu stałego i od prostej stałej.



Ten punkt stały F nazywa się *ogniskiem*, a ta prosta stała BC *kierownicą* paraboli; odległość FG ogniska od kierownicy nazywa się *parametrem* paraboli i oznacza się przez *p*.

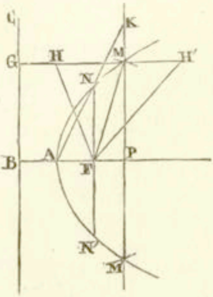
Zatem, łącząc jakikolwiek punkt M paraboli z ogniskiem, i spuszczając prostopadłę MH na kierownicę, będzie MF = MH.

Odległość MF nazywa się *promieniem wodzącym* punktu M.

Powyższe równanie wskazuje sposób kreślenia paraboli *ruchem ciągłym*. W tym celu, weź nić długości boku GH węgielnicy; utkwij jeden koniec w ognisku F, a drugi u wierzchołka G tej węgielnicy. Przystaw do boku HK liniał BC, i posuwaj po nim węgielnicę przy której ołówek M trzyma nić wytężona; ten ołówek nakreśli parabolę, bo będzie ciągle MF = MH.

Określenie paraboli pokazuje że ta linia jest symetryczną względem osi AF prostopadłej do kierownicy i przechodzącej przez ognisko. Ta jedyna oś symetryi jest *osią* paraboli, a jej skrajność A *wierzchołkiem*.

Parabola leży cała z tej samej strony co ognisko względem kierownicy, i składa się z dwóch gałęzi które się nieskończenie oddalają od osi.



Uważajmy punkt H leżący zewnątrz paraboli, i poprowadźmy do osi równoległę HG która przetnie parabolę w punkcie M. Trójkąt FHM daje

$$HF > MF - MH;\ \text{ale}\ MF = MG,\ \text{więc}\ HF > HG.$$

Jeśli weźmiemy punkt H′ wewnętrzny będzie, w trójkącie FMH′,

$$H'F < MF + MH';\quad \text{więc}\quad H'F < H'G.$$

Ztąd wynika że, według jak promień wodzący punktu równa się jego odległości od kierownicy, jest większy albo mniejszy od tej odległości, rzeczony punkt leży na paraboli, jest zewnątrz albo wewnątrz tej krzywej.

Mając dane ognisko i kierownicę, można łatwo nakreślić parabolę, *punktami*; dość poprowadzić, przez punkt P wzięty na osi, prostopadłę PK do tej linii, i, z ogniska F jako środka, promieniem PB równym odległości punktu P od kierownicy, nakreślić łuk koła który przetnie prostopadłę PK w dwóch punktach M i M′ należących do paraboli.

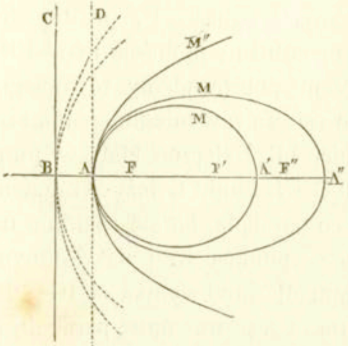
Ale, żeby nakreślone koło i prostopadła PK przecinały się, trzeba żeby punkt P był wewnątrz tego koła, to jest żeby $FP < PB$.

Gdy punkt P przypada we środku A odległości FB, punkta przecięcia M i M′ schodzą się w punkcie A, który jest wierzchołkiem paraboli. Więc promień wodzący *minimum* jest $FA = \frac{1}{2}p$. Niema promienia wodzącego maximum, ponieważ punkta paraboli oddalają się nieograniczenie od ogniska.

Gdy punkt P przypada w ognisku F, wtedy półcięciwa $NF = 2AF$. Ta okoliczność daje sposób wyznaczenia ogniska paraboli której oś jest nakreślona. Dość jest, z punktu jakiegokolwiek P osi, wyprowadzić prostopadłę $PK = 2AP$, poprowadzić prostę AK, i z punktu jej przecięcia N z parabolą spuścić prostopadłę NF na oś; spodek F tej prostopadłej będzie szukanem ogniskiem, albowiem $\dfrac{FN}{AF} = \dfrac{PK}{AP} = 2.$

Twierdzenie XXX.

Granicą ellipsy albo hiperboli, których jedno ognisko i wierzchołek sąsiedni zostają stałe a zaś drugie ognisko oddala się nieograniczenie w kierunku osi ogniskowej, jest parabola mająca ognisko i wierzchołek stały za ognisko i wierzchołek.



Niech będą ellipsy AM, AM′... mające spólny wierzchołek A i spólne ognisko F. Koło kierujące względne do ogniska ruchomego F′ oddalającego się od ogniska F na osi ogniskowej, przecina zawsze tę oś w punkcie B stałym, bo AB = AF. Owoż, ellipsa jest miejscem punktów równooddalonych od ogniska F i od koła kierującego F′; a że to koło, którego promień $2a$ rośnie nieskończenie, ma za granicę prostopadłę BC wyprowadzoną z punktu B do osi ogniskowej; więc granicą ellipsy jest parabola mająca punkta F i A za ognisko i za wierzchołek, a prostopadłę BC za kierownicę.

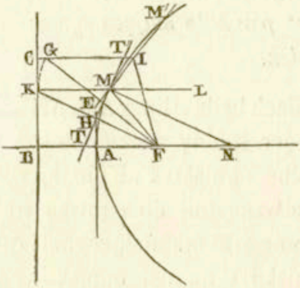
Dowiedzie się podobnie że parabola jest granicą prawej części hiperboli do której należą wierzchołek A i ognisko F.

Uwaga. — Na mocy tego związku paraboli z ellipsą, można, z własności ellipsy które zależą tylko od jej osi, wywieśdź odpowiedające własności paraboli, czyniąc $a = \infty$, $c = \infty$, i bacząc że $a - c = \frac{1}{2}p$.

Twierdzenie XXXI.

Styczna do paraboli czyni kąty równe z promieniem wodzącym punktu zetknięcia i z równoległą do osi.

To twierdzenie wywodzi się łatwo z odpowiedniego twierdzenia ellipsy. Jakoż, gdy ognisko F′ ellipsy oddala się nieskończenie od ogniska F na osi ogniskowej, promień wodzący MF′ dąży do kierunku równoległego do tej osi. Owoż, styczna do ellipsy czyni zawsze kąty równe z promieniami wodzącemi punktu zetknięcia; więc styczna do paraboli czyni kąty równe z promieniem wodzącym punktu zetknięcia i z równoległą do osi.



Oto dowodzenie wprost. Przez punkt M i przez punkt sąsiedni M', poprowadźmy sieczną MM' na którą spuśćmy, z ogniska F, prostopadłę FE i przedłużmy ją ilością EG = EF; po czem poprowadźmy równoległę GI do osi. Ta równoległa spotka kierownicę BC i sieczną MM' w punktach C i I. Punkt G leży względem kierownicy z tej samej strony co parabola, bo się znajduje na okręgu stycznym do kierownicy w punkcie K, i nakreślonym z punktu M jako środka promieniem MF. Ztąd wynika że IG < IC albo IF < IC. Co dowodzi że punkt I jest wewnątrz paraboli, a więc między M i M'.

Teraz uważajmy że sieczna MM' jest dwójsieczną kąta FIG, jakkolwiek blisko punkt M' dochodzi do M. Owoż, gdy punkt M' schodzi się z M, punkt I schodzi się z nim także; wtedy punkt G pada na kierownicy w punkcie K, i sieczna MM' staje się styczną MT; więc *styczna do paraboli jest dwójsieczną kąta* FMK *utworzonego przez promień wodzący punktu zetknięcia i przez prostopadłę spuszczoną z tego punktu na kierownicę*.

A ponieważ kąty wierzchołkiem przeciwległe HMK i LMT' są równe, styczna do paraboli czyni kąty równe z promieniem wodzącym punktu zetknięcia i z równoległą do osi.

Wniosek I. — Jeśli poprowadzimy w punkcie zetknięcia M prostopadłę MN do stycznej MT, kąty NMF i NML będą równe jako dopełnienia kątów równych. Więc *normalna do paraboli jest dwójsieczną kąta utworzonego przez promień wodzący i przez równoległę do osi*.

W wierzchołku paraboli normalna ma kierunek osi, a zaś styczna jest prostopadła do tej osi.

Uwaga. — Promienie światła, ciepła albo głosu, wychodzące z ogniska paraboli, stają się równoległemi po odbiciu się od tej krzywej. Dlatego właśnie używa się zwierciadeł parabolicznych, gdy trzeba rzucić opodal pęk promieni świetlnych, jako w latarniach morskich. Nawzajem, promienie spotykające zwierciadło paraboliczne, równolegle do osi, po odbiciu się, zbiegają się w jego ognisku. Ztąd użycie zwierciadeł parabolicznych w teleskopach, aby zgromadzić jak najwięcej promieni idących od ciała niebiańskiego które obserwujemy.

Wniosek II. — W trójkącie równoramiennym MFK, styczna MT jest dwójsieczną kąta przy wierzchołku; więc, styczna do paraboli jest prostopadła we środku prostej która łączy ognisko ze spodkiem prostopadłej spuszczonej z punktu zetknięcia na kierownicę.

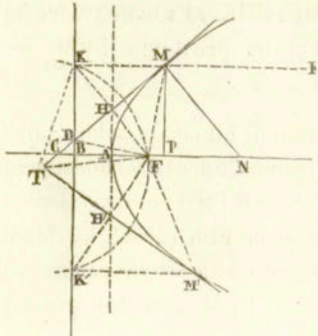
III. — Rzutem ogniska F na stycznej MT jest punkt H, środek prostej FK. Owoż, w trójkącie BFK, styczna w wierzchołku A paraboli, jako prostopadła do osi, jest równoległa do boku BK, i, przechodząc przez środek boku BF, przechodzi temsamem przez środek H boku FK. Więc

Miejscem rzutów ogniska paraboli na stycznych jest styczna w jej wierzchołku.

Co z resztą jest widoczne (30, uw.).

Zagadnienie XXI.

Poprowadzić styczną do paraboli przez punkt dany.



1° Jeśli jest dany punkt M na paraboli, weź punkt C na osi, tak żeby było FC = FM, i poprowadź prostę CM która będzie styczną szukaną; bo, prowadząc równoległę MK do osi, będzie kąt KMC = MCF = CMF.

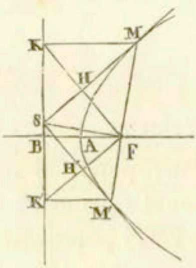
Gdy punkt M jest blisko osi, wtedy trzeba najpierwej poprowadzić równoległę MK do osi, a potem dwójsieczną kąta FMK która będzie styczną żądaną.

2° Jeśli jest dany punkt T zewnątrz paraboli, dość wyznaczyć punkt K w którym równoległa do osi, poprowadzona przez punkt zetknięcia, spotyka kierownicę. W tym celu, z punktu T jako środka, promieniem TF, kreśli się łuk koła który przecina kierownicę w dwóch punktach K i K′; bo odległość punktu zewnętrznego T od ogniska paraboli jest większa niż odległość od kierownicy. Potem, z punktu T spuszcza się na linie proste FK i FK′, prostopadłe TM i TM′ które są stycznemi szukanemi. Punkta zetknięć tych stycznych są na przecięciach z równoległemi do osi, poprowadzonemi przez punkta K i K′. Jako widzimy, to wykreślenie nie wymaga żeby parabola była opisana, dość jest znać jej ognisko i kierownicę.

Zagadnienie ma dwa rozwiązania, albo tylko jedno, ale niema żadnego gdy punkt T jest dany wewnątrz paraboli.

Wniosek I. — *Styczna do paraboli ma z nią jeden tylko punkt spólny.*

Niech będzie jakikolwiek punkt T stycznej MT. Ponieważ ta linia jest prostopadła we środku prostej FK, mamy TF = TK; ale odległość punktu T od kierownicy jest mniejsza od pochyłej TK, więc punkt T jest zewnątrz paraboli.



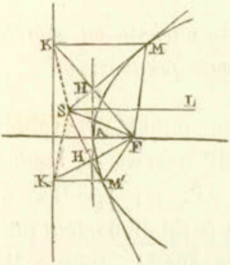
II. — Prosta SF, łącząca ognisko z punktem w którym styczna SM do paraboli przecina kierownicę, jest prostopadła do promienia wodzącego MF punktu zetknięcia. Jakoż, dwa trójkąty SMF, SMK są rowne; więc kąt SFM, równy kątowi prostemu SKM, jest prosty.

Ztąd wynka że kąt opisany na paraboli i mający wierzchołek na kierownicy jest prosty, a cięciwa jego zetknięć przechodzi przez ognisko. Albowiem, ponieważ styczne SM i SM′ są dwójsiecznemi dwóch kątów przyległych spełniających FSK i FSK′, kąt MSM′ jest prosty; nadto, prosta SF jest prostopadła do promieni wodzących FM i FM′, więc trzy punkta M, F, M′ są w linii prostej.

Miejscem wierzchołka kąta prostego, opisanego na paraboli, jest kierownica.

Jakoż, przez punkta zetknięć M i M′, poprowadźmy równoległe MK i M′K′ do osi, i połączmy FK, FK′. Kąt KFK′, mający ramiona odpowiednio prostopadłe do ramion kąta prostego MSM′, jest prosty; a zaś SF=SK=SK′. Więc KK′ jest średnicą koła SF, i wierzchołek kąta S leży na tej średnicy.

III. — *Styczne* SM, SM′, *poprowadzone z punktu zewnętrznego* S *do paraboli, czynią kąty równe z promieniem wodzącym tego punktu i z równoległą do osi. Prosta* SF, *łącząca ognisko z punktem* S, *jest dwójsieczną kąta* MSM′ *promieni wodzących punktów zetknięć, i średnią proporcyonalną między temi promieniami.*



Przez punkt S poprowadźmy równoległe SL do osi. Kąty MSL, FHH′, mające ramiona prostopadłe każde do każdego i jednakowo ułożone, są równe. Owoż, w czworoboku wpisalnym FHSH′, kąty FHH′ i FSH′ wpisane w ten sam odcinek koła są równe; więc kąty M′SF i MSL są równe, to jest: SM, SM′ czynią kąty równe z promieniem wodzącym SF i z równoległę SL do osi paraboli.

Uważajmy teraz że kąty SFM, SKM są równe, i kąty SFM′, SK′M′ także równe. Owoż, kąty SKM i SK′M′ są równe jako dopełnienia kątów równych SKK′ i SK′K; więc kąty SFM SFM′ są równe, czyli że linia FS jest dwójsieczną kąta MFM′ promieni wodzących FM, FM′.

Potem, dwa trójkąty FSM′, FSM, mające kąty SFM′, SFM równe i kąt FSM′=MSL=SMF, są podobne; więc $\frac{FM'}{FS}=\frac{FS}{FM'}$, to jest: linia FS jest średnia proporcyonalną między promieniazetknięć FM, FM′.

Zagadnienie XXII.

Poprowadzić styczną do paraboli równoległą do danej prostej.

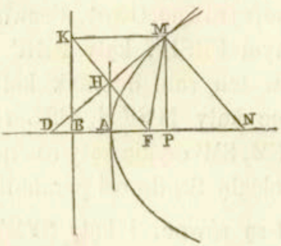
Oczywiście zagadnienie będzie rozwiązane, jeśli znajdziemy punkt K symetryczny ogniska F względem stycznej żądanej. Owoż, poprowadźmy przez ognisko prostopadłę do danej prostej, ta prostopadła przetnie właśnie kierownicę w punkcie szukanym K. Wyznaczywszy punkt K, dość jest ze środka prostej FK wyprowadzić prostopadłę która będzie żądaną styczną.

Punkt zetknięcia jest na przecięciu tej stycznej z równoległą do osi poprowadzoną przez punkt K.

To rozwiązanie nie wymaga żeby parabola była nakreślona. Zagadnienie ma jedno tylko rozwiązanie, które staje się niemożebnem gdy dana prosta jest równoległa do osi.

Twierdzenie XXXII.

W paraboli 1° pod-styczna jest dwa razy większa od odciętej punktu zetknięcia; 2° pod-normalna jest równa perymetrowi.



Niech będzie punkt M paraboli. Prostopadła MP nazywa się *rzędną*, a odległość AP jej spodka od wierzchołka A paraboli *odciętą* punktu M. Poprowadźmy styczną MD i normalną MN w punkcie M paraboli, aż do przecięcia z osią w punktach D i N. Odległość MD nazywa się *długością* stycznej w punkcie M, a odległość MN długością normalnej: rzut DP stycznej DM na osi nazywa się *pod-styczną*, a rzut NP normalnej MN *pod-normalną* punktu M.

1° W trójkącie równoramiennym DFM punkt H jest środkiem podstawy DM. Owoż, w trójkącie DPM, styczna AH jest równoległa do boku MP; więc punkt A jest środkiem boku DP. Co dowodzi że pod-styczna DP jest dwa razy większa od odciętej AP punktu zetknięcia.

2° Czworobok MNFK jest równoległobokiem; co daje bok MN = KF, i kąt MNF = KFB. Zatem dwa trójkąty prostokątne PMN, BKF są równe. Więc bok PN = FB = p, to jest: w paraboli pod-normalna równa się perymetrowi.

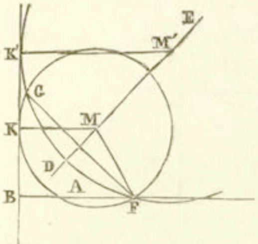
Wniosek. W trójkącie prostokątnym DMN, mamy

$$\overline{MP}^2 = DP \,.\, PN \quad \text{albo} \quad \overline{MP}^2 = 2p \,.\, AP.$$

Więc *kwadrat rzędnej punktu paraboli jest proporcyonalny do odciętej tego punktu.*

Zagadnienie XXIII.

Znając ognisko i kierownicę paraboli wyznaczyć punkta przecięć z daną prostą.



Przypuśćmy zagadnienie rozwiązane, i niech będzie punkt M w którym dana prosta DE spotyka parabolę nienakreśloną. Ponieważ prostopadła MK do kierownicy jest równa promieniowi wodzącemu MF, punkt M jest środkiem koła stycznego do kierownicy, które przechodzi przez ognisko F i przez punkt symetryczny G tego ogniska względem prostej DE. Więc, aby rozwiązać zagadnienie, trzeba wyznaczyć ten punkt G, i nakreślić koło styczne do kierownicy przechodzące przez dwa punkta F i G; co już umiemy. Środek M tego koła będzie szukanym punktem przecięcia danej prostej DE z parabolą.

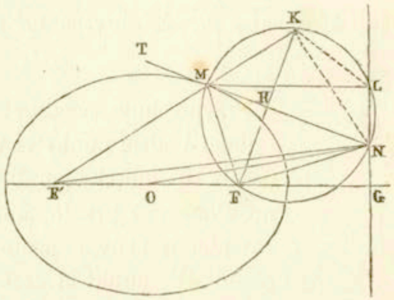
Zagadnienie ma dwa rozwiązania albo tylko jedno, albo nawet nie ma żadnego, według jak punkt G pada z tej samej strony kierownicy co ognisko F, albo jest na kierownicy, albo z innej strony kierownicy względem ogniska. To znaczy że, dana prosta DE spotyka parabolę w dwóch punktach z których jeden może przypadać w nieskończoności, albo jest styczną do paraboli, albo nakoniec jest zewnątrz paraboli.

Wniosek. — Ztąd wynika że parabola jest linią wypukłą.

Wróćmy teraz do ellipsy i hiperboli, aby pokazać że te dwie stożkowe mają także kierownice.

Twierdzenie XXXIII.

Jeśli poprowadzono styczną do ellipsy w punkcie M, *i z ogniska* F *wyprowadzono prostopadłę do promienia wodzącego* FM, *miejscem punktu przecięcia* N *tej prostopadłej ze styczną jest linia prostopadła do wielkiej osi ellipsy.*



Jakoż, z ogniska F spuśćmy prostopadłę FH na styczną MT, przedłużmy ją aż do przecięcia K z promieniem MF' przedłużonym, i połączmy KN. Dwa trójkąty MNF i MNK są równe; zatem kąt K, równy kątowi prostemu MFN, jest prosty, Więc, w trójkącie prostokątnym KNF', mamy

$$\overline{NF'}^2 = \overline{NK}^2 + \overline{KF'}^2 \quad \text{albo} \quad \overline{NF'}^2 - \overline{NF}^2 = 4a^2.$$

Co dowodzi że punkt N leży na linii prostéj NG prostopadłej do osi ogniskowej FF' (III, 21 wn. 2).

Wniosek. — W trójkącie FNF' poprowadźmy ośródkowę ON, będzie $\quad 2FF'.OG = \overline{NF'}^2 - \overline{NF}^2 \quad$ albo $\quad 4c.OG = 4a^2$;

więc
$$OG = \frac{a^2}{c}.$$

Prostopadła GN do wielkiej osi ellipsy, leżąca zewnątrz na *odległość od jej środka równą trzeciej proporcyanalnej do* c i a, nazywa się kierownicą *ellipsy względną do ogniska* F. Ellipsa ma dwie kierownice względne do dwóch ognisk, które łatwo wykreślić można (III, zag. 4).

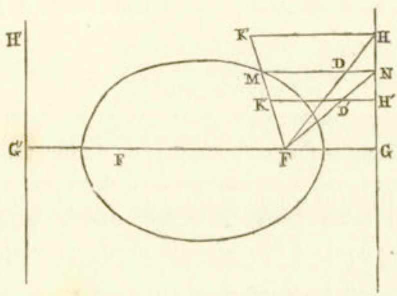
Twierdzenie XXXIV.

Stosunek odległości każdego punktu ellipsy od ogniska i od kierownicy odpowiedającej równa się liczbie $\frac{c}{a}$ (fig. powyższa).

Na figurze poprzedzającego twierdzenia poprowadźmy prostopadłę ML do kierownicy GN. Widzimy łatwo że punkt L leży na okręgu średnicy MN. Owoż, dwa trójkąty KLM i KFF′ są podobne; bo mają kąty KML, KF′F oczywiście równe, a kąty wpisane KLM, FKF′ także równe z przyczyny łuków równych MK, MF. Więc

$$\frac{MK}{ML} = \frac{FF'}{KF'} \qquad \text{albo} \qquad \frac{MF}{ML} = \frac{c}{a}.$$

Wniosek. — Niech będzie punkt K zewnątrz ellipsy. Poprowadźmy prostę FK która przecina ellipsę w punkcie M, i z punktów K, M, spuśćmy prostopadłe KH, MN na kierownicę odpowiedającą ognisku F; nareszcie, poprowadźmy prostę FH która przecina MN w punkcie D; będzie



$$\frac{KF}{KH} = \frac{MF}{MD}.$$

$$\text{Owoż} \quad \frac{MF}{MN} = \frac{c}{a}; \qquad \text{więc} \quad \frac{KF}{KH} > \frac{c}{a}.$$

Uważajmy teraz punkt K′ wewnątrz ellipsy, i połączmy FN; będziemy mieli podobnie

$$\frac{K'F}{K'D'} = \frac{MF}{MN},$$

Owoż $\frac{MF}{MN} = \frac{c}{a}$; więc $\frac{K'F}{K'H'} < \frac{c}{a}$.

Ztąd i z powyższego twierdzenia wynika że *ellipsa jest miejscem punktów których odległości od ogniska i od kierownicy odpowiedającej są w stosunku* $\frac{c}{a}$ MNIEJSZYM OD JEDNOŚCI.

Powtarzając w hiperboli wykreślenia użyte w dwóch powyższych twierdzeniach ellipsy, i rozumując podobnie, znajdziemy najpierwej że hiperbola ma także dwie kierownice, które są prostopadłe do osi poprzecznej w punktach leżących między jej wierzchołkami na odległość $\frac{a^2}{c}$ od jej środka; a następnie że *hiperbola jest miejscem punktów których odległości od ogniska i od kierownicy odpowiedającej są w stosunku* $\frac{c}{a}$ WIĘKSZYM OD JEDNOŚCI.

TWIERDZENIE XXXV.

Miejscem punktów których odległości od danego punktu F *i od danej prostej* GH *są w stosunku stałym* $\frac{c}{a}$, *jest linia stażkowa, mająca punkt* F *za ognisko i prostę* GH *za odpowiadającą kierownicę*.

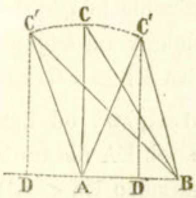
Jakoż, jesli $\frac{a}{c} < 1$, żądane miejsce geometrycznes jest ellipsą; jeśli zaś $\frac{c}{a} > 1$, to miejsce jest hiperbolą, jakośmy dowiedli. A jeśli nakoniec $\frac{c}{a} = 1$, rzeczone miejsce jest parabolą.

MAXIMUM I MINIMUM FIGUR PŁASKICH.

Figura płaska nazywa się *maximum* albo *minimum* co do powierzchni albo obwodu, gdy ma największą albo najmniejszą powierzchnię, największy albo najmniejszy obwód możebny, ze wszystkich figur tego samego rodzaju.

Twierdzenie XXXVI.

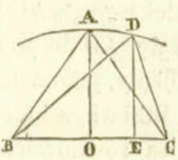
Ze wszystkich trójkątów, mających dwa boki dane, największy jest ten w którym te dwa boki tworzą kąt prosty.



Niech będą AB i AC dwa dane boki trójkąta; jeśli weźmiemy bok AB za podstawę, wierzchołki trójkątów, wystawionych na danych bokach, będą leżały na okręgu który ma punkt A za środek i bok AC za promień. Owoż, w tych trójkątach jako ABC′, wysokość C′D jest mniejsza od boku C′A, i tylko wtedy mu równa gdy ten bok jest prostapadły do AB. Więc trójkąt ABC w którym boki AB i AC tworzą kąt prosty jest maximum.

Twierdzenie XXXVII.

Między wszystkiemi trójkątami równoobwodowemi, które mają tę samą podstawę, trójkąt rownoramienny jest maximum.

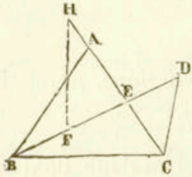


Niech będzie trójkąt DBC mający obwód dany; jego wierzchołek D leży na ellipsie której ogniskami są wierzchołki B i C, a wielką osią wiadoma summa boków BD+DC. Zatem, jeśli ze środka O wyprowadzimy prostopadłę OA, która przecina ellipsę w punkcie A, odległość OA będzie połową małej osi tej ellipsy. Owoż, wysokość DE trójkąta DBC jest oczywiście mniejsza od linii OA, i tylko wtedy jej równa gdy punkt D pada w A; więc trójkąt równoramienny ABC jest maximum między trójkątami równoobwodowemi które mają podstawę BC.

*Inne dowodzenie**. Można wprost dowieśdź tego twierdzenia nie opierając się na ellipsie.

* To i inne dowodzenia twierdzeń o maximum figur są dane wedle metody Steinera. (Zob. *Journal de Crelle*, t. XXV.)

Jakoż, niech będą dwa trójkąty, równoramienny ABC i nierównoramienny D BC, zbudowane na tej samej podstawie BC, w których



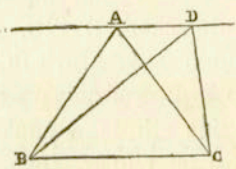
$$AB + AC = DB + DC.$$

Ponieważ te dwa trójkąty mają zawsze część spólną BCE, twierdzenie będzie dowiedzione jeśli okażemy że trójkąt EAB jest większy od trójkąta ECD; dość więc będzie dowieśdź że wieloczyn $EA.EB > EC.ED$.

Owoż, kąt ECB jako równy kątowi ABC jest większy od kąta EBC; zatem bok $EB > EC$. Powiedam teraz że bok EA nie może być mniejszy od boku ED. Albowiem, przypuszczając $EA < ED$, weźmy $EH = ED$ i $EF = EC$; dwa trójkąty EFH, ECD są równe, i dają $FH = CD$. Owoż $BD + DC = BA + AC$ i $FD = CH$; więc byłoby $BF + CH + FH = BA + CH - AH$ albo $BF + FH + AH = BA$; co niedorzeczne. Ztąd wnosimy że wieloczyn $EB.EA > EC.ED$.

Więc trójkąt równoramienny ABC jest większy od trójkąta nierównoramiennego DBC.

Nawzajem, *między wszystkiemi trójkątami równowartemi tej samej podstawy, trójkąt równoramienny ma obwód minimum.*



Jakoż, przez wierzchołek trójkąta ABC, poprowadźmy równoległę AD do podstawy BC; wszystkie trójkąty, jako ABC, DBC, mające podstawę BC i wierzchołek na równoległéj AD są równowarte. Owoż, najkrótsza droga z punktu B do C dotykająca prostej AD tworzy z nią kąty równe (I, *zag.* 3); więc trójkąt równoramienny ma obwód minimum między trójkątami równowartemi tej samej podstawy.

Albo inaczej. Niech będą dwa trójkąty równowarte, G równoramienny i H nierównoramienny, tej samej podstawy; oznaczmy przez G' trójkąt równoramienny mający tę samą podstawę i ten sam obwód z trójkątem H. Na mocy powyższego twierdzenia $G' > H$, zatem $G' > G$. Owoż, dwa trójkąty równoramienne G i G' są zbudowane na tej samej podstawie; więc obwód trójkąta G jest mniejszy od obwodu trójkąta G′, i tem samem jest minimum.

To ogólne rozumowanie posłuży do dowodzenia wzajemnic.

WNIOSEK I. — *Między wszystkiemi trójkątami* RÓWNOOBWODOWEMI, *trójkąt rwnoboczny jest maximum; i* NAWZAJEM, *między wszystkiemi trójkątami* RÓWNOWARTEMI, *trójkąt równoboczny ma obwód minimum.*

Bo trójkąt maximum, mający obwód dany jest równoramienny względem każdego boku wziętego za podstawę; więc jego boki, brane po dwa, muszą być równe; więc wszystkie trzy boki są równe.

Dowiedzie się tak samo wzajemnicy.

II. — *Między wszystkiemi trójkątami których summa dwóch boków jest dana, trójkąt maximum jest ten w którym te dwa boki są równe i prostopadłe do siebie.*

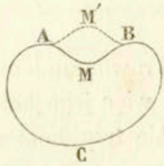
Niech będzie trójkąt ABC w którym summa dwóch boków AB + AC jest dana. Jeśli te boki nie są równe, trójkat równoobwodowy, w którym dwa boki są równe i czynią summę daną, jest większy od trójkąta ABC. Owoż, jakiekolwiek są dwa boki dane, trójkąt maximum będzie zawsze ten który ma te boki prostopadłe do siebie; więc ten ostatni, równoramienny i prostokątny, jest maximum.

TWIERDZENIE XXXVIII.

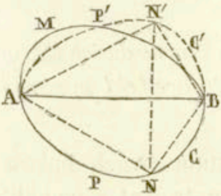
Między wszystkiemi figurami płaskiemi równoobwodowemi, koło jest maximnm; i NAWZAJEM, *między wszystkiemi figurami płaskiemi równowartemi, koło ma obwód minimum.*

Jest nieskończona liczba figur płaskich które, pod równym obwodem mają różne kształty i różne powierzchnie. Pojmuje się łatwo że powierzchnie zamknięte w danym obwodzie mogą być tak małe jak się podoba; nie trudno także rozumieć że one nie mogą przechodzić pewnej granicy, bo wszystkie są oczywiście zawarte w kole nakreślonem z punktu wziętego na obwodzie jako środka, i promieniem równym połowie tego obwodu. Ztąd wynika że między figurami równoobwodowemi jest przynajmniej jedna mająca powierzchnię maximum, albo kilka maximum różnego kształtu.

Owóż, 1° *Figura niewypukła nie może być maximum w danym obwodzie.*



Jakoż, niech będzie figura niewypukła AMBC. Jeśli obrócimy część wklęsłą AMB około jej skrajności A, B, tak żeby zajęła miejsce AM'B, utworzymy figurę AM'BC która ma ten sam obwód co pierwsza, a zawiera powierzchnię widocznie większą.



2° *Wszelka cięciwa* AB, *która dzieli obwód figury maximum* AMC'BCA *na dwie równe części, dzieli zarazem jej powierzchnię na dwie części równowarte.* Bo gdyby jedna część ABMA powierzchni była mniejsza od drugiej ABCA, możnaby zamiast pierwszej wyobrazić część ABC'P'A równowartą drugiej ABCA, i symetryczną z tą drugą względem cięciwy AB; utworzonoby tym sposobem figurę AP'C'BCA któraby miała ten sam obwód co figura maximum AMBCA, a byłaby od niej większa; co niedorzeczne. Więc część ABMA jest równowarta części AMCA.

Ztąd wnosimy że wszelka figura moximum AMBCA jest równowarta figurze równoobwodowej AP'C'BCA, symetrycznej względem cięciwy AB. Uważajmy więc ostatnią figurę, która jest także jedną z figur maximum i zawiera część nieprzekształconą APCB pierwszej. Ponieważ dwie połowy tej figury są symetryczne względem osi AB, każdy punkt N półobwodu ANB ma swój symetryczny N' na półobwodzie AN'B; zatem dwa trójkąty ABN, ABN' są równe. Powiedam teraz że kąty N i N' są proste; albowiem, jeśli tak nie jest, możnaby zamienić kąty N i N' na proste, zmieniając tylko spólną podstawę AB a nie naruszając bynajmniej innych boków, ani odcinków ANP, BNC, BN'C', AN'P' które się na nich opierają. Tym sposobem powierzchnie trójkątow ABN, ABN' zwiększyłyby się, i temsamem cała powierzchnia figury zwiększyłaby się nie zmieniając obwodu; co się sprzeciwia założeniu. Więc kąty N i N' są proste. Owoż, punkt N jest wzięty dowolnie na obwodzie ANB nieprzekształconej połowy figury maximum AMBCH; więc ta połowa jest półokręgiem; a że nadto można wziąć, także dowolnie, półobwód figury maximum który ma zostać niezmienny, więc cała figura maximum jest kołem. Niema tedy kilku figur maximum różnego kształtu; jest tylko samo koło które, w danym obwodzie, zawiera powierzchnię największą możebną.

Wzajemnicy dowodzi się już wiadomem rozumowaniem.

Wniosek. — *Ze wszystkich figur których obwód składa się z danej prostej a i z linii zmiennej* L, *odcinek koła ma największą powierzchnię gdy długości linij zmiennych* L *są równe, a zaś ma najmniejszą linię* L *gdy powierzchnie figur są równe.*

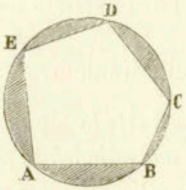
Jakoż, na prostej a, i z tej samej strony co linia L, nakreślmy odcinek koła którego łuk ma długość α równą długości L; po czem dopełnijmy koła łukiem który oznaczymy przez β. Koło mające obwód $\beta + \alpha$, jest większe od powierzchni ograniczonej obwodem $\beta +$ L; a że te powierzchnie mają część spólną, zamkniętą liniami a i β, więc odcinek koła jest większy od powierzchni zawartej między a i L.

Ztąd wynika że *w figurze, której powierzchnia ma być maximum pod warunkami danemi, każda część obwodu, mogąca brać jakikolwiek kształt między dwiema skrajnościami, musi być łukiem koła.*

Twierdzenie XXXIX.

Wielokąt, mający boki dane w porządku jakimkolwiek, jest maximum gdy jest wpisalny w koło.

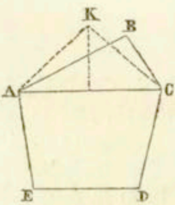
Uważajmy najpierwej że można, mając dane boki $a, b, c, \ldots k$, utworzyć wielokąt wpisalny w koło, byle tylko największy z boków był mniejszy od summy wszystkich innych. Jakoż, można zawsze nakreślić koło O promieniem dostatecznym aby, biorąc cięciwy AB $= a$, BC $= b, \ldots$ KL $= k$, ostatni punkt L niedochodził do pierwszego A, i środek koła znajdował się w odcinku ABCK nad cięciwą AB. To uczyniwszy, jeśli będziemy zmieniali promień koła tak żeby środek O zniżał się na prostopadłej do cięciwy AB, łuk BCKL który jest ilością ciągłą będzie malał ciągle; a że on ma za granicę cięciwę AB mniejszą od summy $b+c+\ldots k$, więc jego skrajność L dosięgnie punktu A i przejdzie przez niego. Jest więc koło i tylko jedno w którem linia łamana ABC...K tworzy wielokąt wpisany.



Niech będzie teraz wielokąt wpisany ABCDE, mający boki $a, b, c\ldots k$. Jeśli przeniesiemy odcinki koła, oparte na bokach tego wielokąta, na odpowiedne boki $a, b,\ldots k$ innego wielokąta niewpisalnego, otrzymamy figurę równoobwodową z kołem; a zatem powierzchni mniejszej od niego. Ztąd wnosimy, odtrącając odcinki koła od obydwóch figur, że powierzchnia wielokąta wpisanego ABCDE jest większa od powierzchni innego wielokąta niewpisalnego.

Twierdzenie XL.

Między wszystkiemi wielokątami równoobwodowemi i równej liczby boków, wielokąt foremny jest maximum; i NAWZAJEM, *między obwodami wszystkich wielokątów równowartych i równej liczby boków, obwód wielokąta foremnego jest minimum.*



Między wielokątami równoobwodowemi, żaden nie może być maximum jeśli nie jest równoboczny; albowiem, przypuszczając że dwa boki po sobie idące, jako AB i BC, nie są równe, możnaby zastąpić srójkąt ACB trójkątem równoramiennym ACK, który ma tę samą podstawę i ten sam obwód; utworzonoby tym sposobem figurę większą od pierwszej Ztąd wynika że boki wielokąta maximum, który ma obwód dany, są równe i wiadowe; a że ten wielokąt, na mocy powyższego twierdzenia, powinien być wpisalny w koło; więc wielokąt maximum, zarazem równoboczny i równokątny jest foremny.

Wzajemnica widoczna.

Wniosek. — *Między wielokątami foremnemi równoobwodowemi ten jest maximum który ma najwięcej boków.* I nawzajem.

Niech będą dwa wielokąty foremne równoobowe, jeden mający n boków a drugi $n + 1$.

Jeśli weźmiemy punkt K na jednym z boków pierwszego, możemy uważać ten wielokąt jako nieforemny mający $n + 1$ boków; więc drugi wielokąt mający także $n + 1$ boków, ale foremny, jest większy od pierwszego.

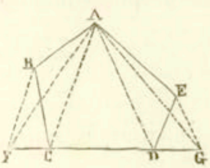
Z całej teoryi figur maximum wynika następująca ustawa.

Powierzchnie wialokątów foremnych równoobwodowycó tworzą szereg rosnący, który się zaczyna ad trójkąta a kończy na kole; a zaś obwody wielokątów równowartych tworzą szereg malejący, który się także zaczyna od trójkąta a kończy na kole.

DALSZY CIĄG ZAGADNIEŃ KSIĘGI CZWARTEJ.

Zagadnienie XXIV.

Zamienić dony wielokąt na trójkąt równowarty.

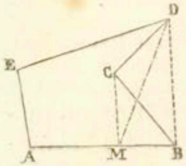


Niech będzie dla utkwienia myśli, pięciokąt wypukły ABCDE, który trzeba zamienić na trójkąt równowarty.

Poprowadź przekątnę AC, i przez wierzchołek B równoległę do niej BF, aż do spotkania F z przedłużeniem boku CD; połącz AF. Dany wielokąt ABCDE będzie równowarty wielokątowi AFDE który ma jeden bok mniej. Jakoż, trójkąty ACB, ACF są równowarte, bo mają spólną podstawę AC, i tę samą wysokość, z przyczyny że wierzchołki B i F leżą na prostej BF równoległej do AC. Więc zamiast trójkąta ACB można wziąć trójkąt równowarty ACF.

Następnie, poprowadź przekątnę AD, i przez E równoległę do niej FG, aż do spotkania G z bokiem CD przedłużonym: połącz AG. Trójkąty AED i ADG są równowarte, zatem czworokąt

AFDE jest równowarty trójkątowi AFG. Więc dany wielokąt ABCDE jest równowarty trójkątowi AFG.



Gdy wielokąt nie jest wypukły, wykreślenie podobne. I tak, w pięciokącie ABCDE, który ma kąt wklęsły BCD, prowadzimy przekątnę BD, i przez wierzchołek C tego kąta, równoległę CM do BD; łączymy DM. Trójkąty BCM i DCM są oczywiście rownowarte ; więc czworokąt AMDE jest równowarty pięciokątowi ABCDE.

Tak samo się postępuje gdy jest więcej kątów wklęsłych, prowadząc tylko przyzwoicie dobrane prostokątne.

Zagadnienie XXV.

Wykreślić kwadrat równowarty danemu wielokątowi.

Przypuśćmy najpierwej że trzeba wykreślić kwadrat równowarty danemu trójkątowi. Niech będą: X bok szukanego kwadratu, B i W podstawa i wysokość żądanego trójkąta. Mamy

$$X^2 = \frac{1}{2}B \,.\, W \qquad \text{albo} \qquad \frac{\frac{1}{2}B}{X} = \frac{X}{W}.$$

Więc bok szukanego kwadratu jest średnią proporcyonalną między połową podstawy i wysokością trójkąta.

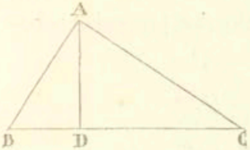
Jeśli jest dany równoległobok, trapez, wielokąt foremny, albo ogólnie figura której powierzchnia wyraża się wieloczynem dwóch linij prostych, dość znaleźć średnię proporckonalną do tych linij, a ona będzie bokiem kwadratu równowartego.

W każdym innym przypadku, dość przekształcić dany wielokąt na trójkąt równowarty, i szukać kwadratu równowartego temu kwadratowi.

Uwaga. — Ponieważ wszelki wielokąt daje się przekształcić na trójkąt równowarty, a ten ostatni na kwadrat, więc można zawsze znaleźć kwadrat równowarty danemu wielokatowi, czyli jako się mówi, *skwadrować* wielokąt albo znaleźć jego *kwadraturę*.

Zagadnienie XXVI.

Znaleźć dwie linie proste proporcyonalne do dwóch wielokątów danych.



1° Jeśli dwa dane wielokąty są kwadratami które mają boki a i b, nakreśl kąt prosty A; na jednem ramieniu weź AB $=a$, a na drugiem AC $=b$; połącz BC, i z punktu A spuść prostopadłę AD na BC; odcinki BD i CD rozwiążą zagadnienie (10 wn. 2).

2° Jeśli są dane dwa prostokąty mające podstawy a i a', wysokości b i b', nazywając x i y dwie proste proporcyonalne do tych prostokątów; będzie

$$\frac{x}{y}=\frac{ab}{a'b'}.$$

Owoż, można wziąć dowolnie jedną z prostych szukanych, *np.* $y=b'$; co daje

$$x=\frac{ab}{a'}$$

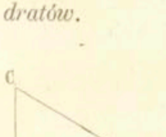
Więc, w tem przypuszczeniu, x jest czwartą proporcyonalną do boków a', a, b, i stosunek tej czwartej proporcyonalnej z linią b' równa się stosunkowi dwóch danych prostokątów.

Tak samo o trójkątach, trapezach etc.

3° Jeśli nakoniec dwa dane wielokąty są jakiekolwiek, to można je najpierwéj przekształcić na kwadraty równowarte, i potem szukać stosunku tych ostatnich.

Zagadnienie XXVII.

Znaleźć kwadrat równowarty summie albo różnicy dwóch kwadratów.



Niech będą a i b boki dwóch kwadratów danych.

1° Nakreśl kąt prosty A; weź ramie AB $=a$, i AC $=b$. Połącz BC; przeciwprostokątna BC będzie bokiem kwadratu równego summie dwóch danych;

bo $$\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = a^2 + b^2.$$

2° Nakreśl kąt prosty A; weź ramie AC równe mniejszemu z danych boków, przypuśćmy b; z punktu C jako środka, promieniem równym większemu bokowi a, zakreśl łuk przecinający ramie AB w punkcie B. Kwadrat zbudowany na prostej AB będzie różnicą dwóch kwadratów danych;

Jakoż, $$\overline{AB}^2 = \overline{BC}^2 - \overline{AC}^2 = a^2 - b^2.$$

Uwaga. — Można tym sposobem, znaleźć kwadrat równowarty summie albo różnicy tylu kwadratów ile się podoba, a nawet summie albo różnicy tylu wielokątów ile chcemy, zamieniwszy najpierwej te ostatnie na kwadraty.

Zagadnienie XXVIII.

Mając dane dwa wielokąty podobne, wykreślić wielokąt podobny któryby się równał ich summie albo różnicy.

Niech będą a, b, x, boki odpowiedne wielokątów danych A, B, i szukanego X. Przypuszczając A $>$ B, mamy:

$$\frac{A}{a^2} = \frac{B}{b^2} = \frac{X}{x^2} = \frac{A \pm B}{a^2 \pm b^2}.$$

Owoż, z założenia X = A $\pm$ B; więc $x^2 = a^2 \pm b^2$.

Znalazłszy bok x, zapomocą poprzedzającego zagadnienia, zbuduj na nim wielokąt podobny danym.

Tak samo znajduje się koło równowarte summie albo różnicy dwóch kół danych.

Jakoż, nazywając R, R′, x promienie tych trzech kół, powinno być

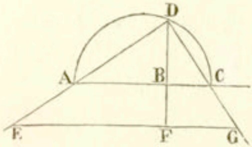
$$\pi R = \pi x^2 \pm \pi R'^2, \quad \text{zkąd} \quad x^2 = R^2 \pm R'^2; \text{ etc.}$$

Zagadnienie XXIX.

Zbudować wielokąt podobny danemu i taki żeby się miał do danego w stosunku dwóch linij prostych m i n.

1° Przypuśćmy najpierwej że dany wielokąt jest kwadratem mającym bok a. Jeśli nazwiemy x bok kwadratu szukanego, będzie

$$\frac{x^2}{a^2} = \frac{m}{n}.$$



Zatem, na prostej nieograniczonej AC, weź AB $= m$, i BC $= n$. Na summie AC jako średnicy, nakreśl półokrąg, iz punktu B wyprowadź prostopadłę BD do AC; przez punkt przecięcia D poprowadź proste DA, DC; weź prostę DG równą bokowi a kwadratu danego, i przez G pociągnij linię EG równoległą do AC. Prosta DE będzie bokiem kwadratu szukanego, który się zbuduje sposobem już wiadomym (II *zag.* XVII).

Jakoż, mamy

$$\frac{\overline{DE}^2}{\overline{DG}^2} = \frac{FE}{FG} = \frac{BA}{BC} \quad \text{albo} \quad \frac{\overline{DE}^2}{a^2} = \frac{m}{n}.$$

Uwaga. — Tym sposobem, znajduje się kwadrat będący ułamkiem $\frac{a}{b}$ danego kwadratu.

2° Niech będzie teraz wielokąt jakikolwiek P; oznaczmy przez p jeden z jego boków, przez x bok odpowiedny wielokąta żądanego X. Powinno być, wedle zagadnienia,

$$\frac{X}{P} = \frac{m}{n} \quad \text{i} \quad \frac{X}{P} = \frac{x^2}{p^2};$$

ztąd

$$\frac{x^2}{p^2} = \frac{m}{n}.$$

Więc zagadnienie przywodzi się do przypadku wyżej rozwiązanego. Wyznaczywszy bok x, odpowiedny bokowi p, buduje się na nim wielokąt podobny danemu P.

3° Gdyby dane było koło, nazywając R jego promień, x promień koła szukanego, powinno być

$$\frac{\pi x^2}{\pi R^2}=\frac{m}{n} \quad \text{albo} \quad \frac{x^2}{R^2}=\frac{m}{n}.$$

co już wiadome.

Uwaga. — Jeśli stosunek $\frac{m}{n}$ jest wyrażony dwiema liczbami, dość wziąć dwie linie proste, jako EF i FG, których stosunek równa się danemu, i wykonać wykreślenia jako wyżej. Gdyby dwie proste m i n były za wielkie, możnaby je zastąpić dwiema mniejszemi, proporcyonalnemi.

Zagadnienie XXX.

Zbudować wielokąt równowarty wielokątowi P *i podobny wielokątowi* Q.

Chodzi tu o przekształcenie wielokąta P na wielokąt równowarty X, któryby był podobny drugiemu wielokątowi Q.

Jeśli nazwiemy q i x boki odpowiedne wielokątów podobnych Q i X, będzie

$$\frac{Q}{X}=\frac{q^2}{x^2};$$

albo, uważając że wielokąt szukany X jest równowarty wielokątowi P,

$$\frac{Q}{P}=\frac{q^2}{x^2}.$$

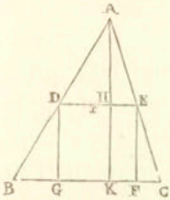
Zamieńmy teraz wielokąty Q i P na kwadraty równowarte a^2 i b^2, będziemy mieli

$$\frac{a^2}{b^2}=\frac{q^2}{x^2} \quad \text{albo} \quad \frac{a}{b}=\frac{q}{x}.$$

Więc bok x jest czwartą proporcyonalną do trzech prostych a, b, q; zbudowawszy na tym boku, jako odpowiednym bokowi q, wielokąt podobny wielokątowi Q, otrzymamy wielokąt równowarty wielokątowi P.

Zagadnienie XXXI.

W dany trójkąt wpisać największy kwadrat możebny.



Niech będzie kwadrat DEFG wpisany w trójkąt ABC, i oparty na boku BC. Oznaczmy przez x bok tego kwadratu, przez a, b, c boki trójkąta, przez a', b', c' wysokości odpowiadające tym bokom.

Wyraźmy najpierwej że kwadrat jest wpisany w trójkąt, to jest wyraźmy że trójkąty ADE i ABC są podobne; będziemy mieli

$$\frac{\mathrm{DE}}{\mathrm{BC}} = \frac{\mathrm{AH}}{\mathrm{AK}} \quad \text{albo} \quad \frac{x}{a} = \frac{a'-x}{a'} = \frac{a'}{a+a'};$$

ztąd

$$x = \frac{aa'}{a+a'}.$$

Trzeba teraz żeby wartość $\frac{aa'}{a+a'}$ boku kwadratu była największa możebna; a ponieważ licznik aa', wyrażający podwójną powierzchnię trójkąta, jest stały, bok x będzie *największy* możebny jeśli summa $a+a'$ jest *najmniejsza* możebna.

Owoż, uważajmy że

$$aa' = bb' = cc',$$

i przypuśćmy że bok a jest najmniejszy ze trzech boków trójkąta, będzie

$$\frac{a}{b} = \frac{b'}{a'} = \frac{a-b'}{b-a'}.$$

Ztąd, ponieważ $a < b$, wynika $\quad a - b' < b - a';$

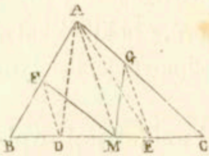
więc $\quad a + a' < b + b'.$

To dowodzi że, ze trzech kwadratów które mogą być wpisane w trójkąt, największy jest ten który się opiera na najmniejszym boku.

Bok tego kwadratu, równy HK, jest czwartą proporcyonalną do trzech linij $a+a'$, a, a'.

Zagadnienie XXXII.

Przez punkt M, *dany na boku trójkąta* ABC, *poprowadzić linie proste któreby podzieliły ten trójkąt na części proporcyonalne do prostych danych m, n, p.*



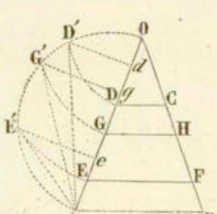
Podziel bok BC, na którym leży punkt dany M, na części proporcyonalne do prostych m, n, p; połącz AM, i przez punkta podziału D, E poprowadź równoległe DF i EG do AM. Proste MF, MG podzielą trójkąt na części żądane.

Jakoż, połącz AD, AE. Trójkąty DFM, DFA są równowarte; bo mają spólną podstawę DF i wierzchołki na linii równoległej do podstawy. Zatem trójkąty MBF, ABD, są równowarte. Dowiedzie się podobnie że figury MFAG, ADE, są równowarte; jako też dwa trójkąty MCG, AEC. Więc wielokąty MFB, MFAG, MGC są proporcyonalne do danych prostych m, n, p.

Uwaga. — Jeśli $m = n = p$, linie MF, MG podzielą trójkąt na trzy części równowarte.

Zagadnienie XXXIII.

Podzielić trapez, równoległemi do podstaw, na części proporcyonalne do linij danych.



Przypuśćmy że trzeba podzielić trapez ABCD na trzy części proporcyonalne do prostych m, n, p, i że równoległe EF, GH rozwiązują zagadnienie. Mamy:

$$\frac{\text{ABFE}}{m} = \frac{\text{EFHG}}{n} = \frac{\text{GHCD}}{p};$$

Zkąd:

$$\frac{\text{ABFE}}{\text{ABCD}} = \frac{m}{m+n+p}, \quad \text{i} \quad \frac{\text{ABHG}}{\text{ABCD}} = \frac{m+n}{m+n+p}.$$

Niech będzie O punkt spotkania boków AD, BC. Jeśli wyrazimy trapezy przez różnice trójkątów, ostatnie równania staną się:

$$\frac{\mathrm{ABO}-\mathrm{EFO}}{\mathrm{ABO}-\mathrm{DCO}}=\frac{m}{m+n+p}, \quad \text{i} \quad \frac{\mathrm{ABO}-\mathrm{GHO}}{\mathrm{ABO}-\mathrm{DCO}}=\frac{m+n}{m+n+p}.$$

Owoż, trójkąty podobne ABO, EFO..., mają się jako kwadraty z boków odpowiednych OA, OE...; więc

$$\frac{\overline{\mathrm{OA}}^2-\overline{\mathrm{OE}}^2}{\overline{\mathrm{OA}}^2-\overline{\mathrm{OD}}^2}=\frac{m}{m+n+p}, \quad \text{i} \quad \frac{\overline{\mathrm{OA}}^2-\overline{\mathrm{OG}}^2}{\overline{\mathrm{OA}}^2-\overline{\mathrm{OD}}^2}=\frac{m+n}{m+n+p}.$$

Na linii AO jako średnicy, nakreślmy półokrąg, a z punktu O jako środka, nakreślmy łuki kół EE′, GG′, DD′; będzie

$$\overline{\mathrm{OA}}^2-\overline{\mathrm{OE}}^2=\overline{\mathrm{AE'}}^2, \quad \overline{\mathrm{OA}}^2-\overline{\mathrm{OG}}^2=\overline{\mathrm{AG'}}^2, \quad \overline{\mathrm{OA}}^2-\overline{\mathrm{OD}}^2=\overline{\mathrm{AD}}^2.$$

Zatem $$\frac{\overline{\mathrm{AE'}}^2}{\overline{\mathrm{AD'}}^2}=\frac{m}{m+n+p}, \quad \frac{\overline{\mathrm{AG'}}^2}{\overline{\mathrm{AD'}}^2}=\frac{m+n}{m+n+p}.$$

Kwadraty z cięciw AE′, AG′, AD′ mają się jako ich rzuty Ae, Ag, Ad na średnicy AO;

więc $$\frac{\mathrm{A}e}{\mathrm{A}d}=\frac{m}{m+n+p}, \quad \frac{\mathrm{A}g}{\mathrm{A}d}=\frac{m+n}{m+n+p};$$

ztąd $$\frac{\mathrm{A}e}{m}=\frac{\mathrm{A}g}{m+n}=\frac{\mathrm{A}d}{m+n+p};$$

więc ostatecznie $$\frac{\mathrm{A}e}{m}=\frac{eg}{n}=\frac{gd}{p}.$$

Wynika ztąd następujące wykreślenie. Przedłuż boki AD, BC, trapezu aż do ich spotkania O, i na średnicy AO nakreśl półokrąg. Z punktu O jako środka, promieniem OD, nakreśl łuk koła DD′, spuść prostopadłę D′d na AO, i podziel Ad na części Ae, eg, gd proporcyonalne do danych linij m, n, p. Z punktów podziału e, g, wyprowadź prostopadłe eE′, gG′, i ze środka O nakreśl łuki kół E′E, G′G; nakoniec, przez punkta E, G, poprowadź, równolegle do podstaw trapezu, proste EF, GH które rozwiążą zagadnienie.

Uwaga. — Jeśli jedna z podstaw staje się *zero*, trapez przechodzi na trójkąt. Zagadnienie powyższe zastosowane do trójkąta nie przedstawia teraz żadnej trudności.

Zagadnienie XXXIV.

Podzielić powierzchnię koła, okręgiem spółśrodkowym, w stosunku średnim i skrajnym.

Niech będą R i x promienie kół danego i szukanego. Powinno być, wedle zadania,

$$\frac{\pi R^2}{\pi x^2}=\frac{\pi x^2}{\pi R^2-\pi x^2}; \qquad \text{ztąd} \qquad x^4+R^2x^2+R^4=0.$$

Rozwiązując to równanie dwukwadratowe, i biorąc sam tylko pierwiastek dodatny, mamy

$$x=\sqrt{R\times\frac{R}{2}(\sqrt{5}-1)}.$$

Więc promień okręgu spółśrodkowego szukanego jest średnią proporcyonalną między promieniem danego koła i bokiem dziesięciokąta foremnego wpisanego.

Uwaga. — Można otrzymać ten sam wynik nie rozwiązując równania.

Jakoż, uczyńmy $x^2=Ry$; proporcya powyższa stanie się $\frac{R}{y}=\frac{y}{R-y}$; to pokazuje że linia y jest bokiem dziesięciokąta foremnego wpisanego w dane koło. Więc promień szukany x jest średnią proporcyonalną między R i y, jako wyżej.

Zagadnienie XXXV.

Biorąc 25 *mil na* 1 *stopień południka ziemskiego, znaleźć jego promień.*

Południk ziemski jest, z małą różnicą, okręgiem koła. Ponieważ na 1 stopień idzie 25 mil, więc południk ma mil $25\times 360=9000$; zatem promień R południka ziemskiego w milach jest $R=\frac{9000}{2\pi}$.

Działając za pomocą logarytmów, znajdujemy

$$log.\ 9000 = 3{,}9542425,$$
$$log.\ 2\pi = 0{,}7981798,$$
$$log.\ R = 3{,}1560627 = log.\ 1432{,}39.$$

Więc promień południka ziemskiego ma okrągło mil 1432.

Zagadnienie XXXVI.

Znaleźć, na mniej niż 0,001 *łuk wycinka mającego powierzchnię* 3,24 *i kąt* 23°28′.

Ponieważ wycinek koła ma za miarę wieloczyn łuku przez połowę promienia, nazywając x długość tego łuku, R jego promień, będzie

$$\frac{Rx}{2} = 3{,}24.$$

Ale długość łuku promienia R, mającego 23°28′, wyraża się przez

$$x = \frac{23°28'}{180°}\pi R;$$

więc, mnożąc stronami, wyrugujemy R i otrzymamy

$$x^2 = \frac{23°28'}{90°} \times 3{,}24\pi.$$

Ztąd, uważając że $\frac{23°28'}{90°} = \frac{23\frac{28}{60}}{90} = \frac{704}{3 \times 900}$, wynika

ostatecznie $x = \sqrt{\frac{704}{100} \times \frac{3{,}24\pi}{3{,}9}} = \frac{1}{100}\sqrt{8448\pi}.$

Teraz, z przyczyny spółczynnika $\frac{1}{100}$, i dlatego że $\sqrt{8448} < 100$, aby otrzymać wartość z przybliżeniem żądanem dość wziąć $\pi = 3{,}1415$; co daje

$$\sqrt{8448 \times 3{,}1415} = \sqrt{26539{,}39} = 162{,}9.$$

Więc długość szukanego łuku jest $x = 1{,}629$ przez niedostatek.

ZADANIA.

441. — Gdyby za jedność powierzchni wzięto trójkąt równoboczny wystawiony na jedności linij, *albo* koło mające za prnmień tę jedność linij, jakby się wtedy wyraziła powierzchnia trójkąta, kwadratu, koła, etc. ?

442. — Nazywając S powierzchnię wielokąta foremnego, R promień koła opisanego, mamy następujące powierzchnie:

1° Trójkąta równobocznego $S = \frac{3}{4} R^2 \sqrt{3}$. 2° Kwadratu $S = 2R^2$. 3° Pięciokąta foremnego $S = \frac{5}{8} R^2 \sqrt{10 + 2\sqrt{5}}$, 4° Sześciokąta foremnego $S = \frac{3}{2} R^2 \sqrt{3}$. 5° Dziesięciokąta foremnego $S = \frac{5}{4} R^2 \sqrt{10 - 2\sqrt{5}}$.

443. — Powierzchnia ośmiokąta foremnego, wpisanego w koło równa się prostokątowi mającemu za boki przyległe boki kwadratów wpisanego i opisanego.

444. — Powierzchnia sześciokąta foremnego wpisanego jest średnią proporcyonalną między powierzchniami trójkątów równobocznych wpisanego i opisanego; i równa się *trzem czwartym* sześciokąta foremnego opisanego.

445. — Powierzchnia czworoboku zarazem wpisalnego i opisalnego równa się pierwiastkowi kwadratowemu z wieloczynu jego czterech boków.

446. — Naśladując dowodzenie Pitagoresa, dowieśdź że:

1° W trójkącie rozwartokątnym, kwadrat wystawiony na przeciwrozwartokątnej równa się summie kwadratów wystawionych na bokach kąta rozwartego, więcej podwójny prostokąt jednego z tych boków przez rzut na nim drugiego.

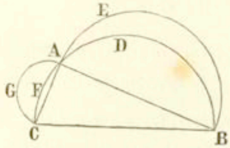
2° W każdym trójkącie, kwadrat wystawiony na boku przeciwległym kątowi ostremu równa się summie kwadratów wystawionych na bokach tego kąta mniej podwójny prostokąt jednego z tych boków przez rzut na nim drugiego.

447. — Na figurze Pitagoresa (10), połączono wierzchołki kwadratów i utworzono sześciokąt; znaleźć powierzchnię tego sześciokąta. Dowieśdź że summa kwadratów zbudowanych na bokach tego sześciokąta jest równowarta *osiem* razy wziętemu kwadratowi na przeciwprostokątnej.

448. — Na bokach trójkąta ABC jakiegokolwiek zbudowano kwadraty, i, łącząc ich wierzchołki po sobie idące, utworzono sześciokąt; dowieśdź że

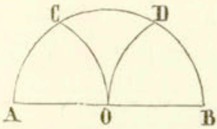
summa kwadratów zbudowanych na bokach tego sześciokąta jest równowarta poczwórnej summie kwadratów zbudowanych na bokach trójkąta ABC. Wywieśdź ztąd poprzedzające twierdzenie.

449. — Na bokach AB, AC trójkąta ABC zbudowano równoległoboki jakiekolwiek ABDE, ACFG, których przedłużono boki DE i FG aż do spotkania w punkcie H. Dowieśdź że summa tych dwóch równoległoboków jest równowarta równoległobokowi mającemu za boki przyległe bok BC i linię prostą równą linii AH i do niej równoległą. Z tego trwierdzenia wywieśdź twierdzenie kwadratu przeciwprostokątnej.



450. — Na trzech bokach trójkąta prostokątnego ABC nakreślono półkola. Dowieśdź że summa powierzchni księżyczków ADBE, AFCG równa się powierzchni tego trójkąta. (*Twierdzenie* Hypokratesa.)

451. — Na bokach prostokąta wpisanego w koło nakreślono półkola na zewnątrz. Dowieśdź że summa czterech księżyczków równa się powierzchni tego prostokąta.



452. — Na prostej AB jako średnicy, nakreślono półkole, z obydwóch skrajności tej średnicy i promieniem koła nakreślono łuki OC i OD; wyrachować po wierzchnię trójkąta krzywolinijnego OCD.

453. — Mając dane trzy równe koła styczne zewnętrznie, wyrachować powierzchnię trójkąta którego bokami są ich łuki.

454. — Mając dane dwa równe koła, styczne między sobą i styczne wewnętrznie do trzeciego, wyrachować powierzchnię trójkąta którego bokami są łuki tych trzech kół.

455. — Dowieśdź że między promieniami R, r, r', r'', r''' kół, opisanego na trójkącie, wpisanego i zawpisanych, jest związek

$$4R = r' + r'' + r''' - r.$$

456. — Okrąg przechodzący przez trzy ze czterech środków kół wpisanego i zawpisanych w trójkąt jest dwa razy większy od okręgu opisanego.

457. — Dowieśdź że powierzchnia trójkąta w funkcyi trzech ośrodkowych α, β, γ, wyraża się przez

$$S = \frac{1}{3}\sqrt{(\alpha + \beta + \gamma)(\beta + \gamma - \alpha)(\alpha + \gamma - \beta)(\alpha + \beta - \gamma)}.$$

458. — Powierzchnia trójkąta równa się wieloczynowi z promienia koła

opisanego przez połowę obwodu trójkąta utworzonego łącząc spodki trzech wysokości.

459. — W kole poprowadzono dwie średnice prostopadłe AB i CD, i ze środka H linii OC nakreślono, promieniem HA, łuk koła przecinający średnicę CD w punkcie K; dowieśdź że OK jest bokiem dziesięciokąta foremnego, a cięciwa AK bokiem pięciokąta foremnego wpisanego.

460. — Na promieniach OA i OB ćwiercianu AOBC opisano półkola OEDA i OFDB. Dowieśdź że trzy punkta A, D, B są w linii prostej; że powierzchnie OEDF i ADBC są równowarte; że każda z powierzchni OFDA, OEBD jest ćwiercią kwadratu zbudowanego na promieniu OA.

461. — Nazywając A i B powierzchnie dwóch wielokątów foremnych podobnych wpisanego i opisanego na kole. Dowieśdź że różnica B — A równa się powierzchni wielokąta foremnego podobnego, wpisanego w koło które ma za średnicę bok wielokąta B; albo też równa się powierzchni wielokąta foremnego podobnego opisanego na kole które ma za średnicę bok wielokąta A.

462. — Jeśli podzielimy średnicę koła AB na n części równych, *np.* na 5, w punktach C, D, E, E..., i na odcinkach AC, AD, AE, AF wykreślimy półokręgi nad średnicą, a zaś na odcinkach BF, BE, BD, BC półokręgi pod średnicą, powierzchnia koła zostanie podzielona temi półokręgami na 5 części równowartych.

463. — Jeśli podzielimy średnicę AB w punkcie C w stosunku $m : n$, i na odcinkach wykreślimy półokręgi na przemian nad i pod średnicą, powierzchnia koła zostanie podzielona linią krzywą tych półokręgów, w stosunku $n : m$.

464. — Średnicę AB podzielono w punkcie C w stosunku średnim i skrajnym, i na odcinkach AC, BC nakreślono półokręgi naprzemian z obu dwóch stron tej średnicy. Dowieśdź że linia krzywa ABC, utworzona z półokręgów, dzieli powierzchnię koła w stosunku średnim i skrajnym.

465. — Przekątne pięciokąta foremnego dzielą się nawzajem w stosunku średnim i skrajnym.

466. — Wpisać kwadrat w pięciokąt foremny.

467. — Pięciokąt równoboczny jest foremny jeśli ma trzy kąty równe.

468. — Ze wszystkich trójkątów które mają równą wysokość i równy kąt przy wierzchołku, trójkąt równoramienny jest najmniejszy możebny.

469. — Ze wszystkich wielokątów równej liczby boków, opisanych na

kole, wielokąt foremny ma najmniejszą powierzchnię i najmniejszy obwód.

470. — Z wielokątów foremnych opisanych na jednem kole najmniejszy co do powierzchni i obwodu jest ten który ma najwięcej boków.

471. — *Wieniec kołowy* (różnica dwóch kół spółśrodkowych) równa się kołu którego średnicą jest cięciwa wielkiego koła, styczna do małego.

472. — Dowieśdź geometrycznie że :

$$1^\circ \quad P' - p' < \frac{P - p}{4}, \qquad 2^\circ \quad A' - B' < \frac{A - B}{4}.$$

473. — Z punktu C, wziętego na półokręgu, spuszczono prostopadłę CD na średnicę AB, i na odcinkach AD, BD, jako średnicach, nakreślono półkola AED, BFD. Dowieśdź że figura ACBFDEA równa się kołu średnicy CD.

474. — Jest dany prostokąt ABCD ; wpisano w trójkąt ABC koło które dotyka boku AB w punkcie E, a boku BC w punkcie F ; potem poprowadzono równoległę EH do AD i równoległę FK do AB. Dowieśdź że prostokąt HK jest połową prostokąta ABCD.

475. — Wpisać w koło prostokąt równowarty danemu kwadratowi.

476. — Podzielić daną prostę na dwa odcinki na którychby wykreślone półkola czyniły summę powierzchni najmniejszą możebną.

477. — W trójkąt *równoboczny* wpisać trzy koła styczne do siebie i styczne, po dwa, do boków trójkąta. Wyrachować stosunek powierzchni tych kół do powierzchni trójkąta.

478. — Znając obwody dwóch wielokątów foremnych wpisanych z których jeden ma n boków, a drugi $2n$, znaleźć obwód wielokąta foremnego wpisanego który ma $4n$ boków.

479. — Znając powierzchnie dwóch wielokątów foremnych wpisanych, z których jeden ma n boków, a drugi $2n$, znaleźć powierzchnię wielokąta foremnego wpisanego który ma $4n$ boków.

480. — Znając promienie R, R$'$ dwóch wielokątów foremnych równoobwodowych, z których jeden ma n boków, a drugi $2n$, znaleźć promień R$''$ wielokąta foremnego równoobwodowego który ma $4n$ boków.

481. — Boki dziesięciokąta foremnego gwiaździstego przecinając się tworzą dwudziestokąt foremny. Wyrachować obwód i powierzchnię tego dwudziestokąta w funkcyi promienia koła opisanego na dziesięciokącie.

482. — Znając długości a, b, c trzech cięciw wpisanych w półkole, znaleźć równanie które daje średnicę x koła.

483. — Wyznaczyć stosunek dwóch sześciokątów foremnych wpisanego i opisanego na jednem kole.

484. — Mając dany trójkąt, poprowadzić równoległę do podstawy tak żeby utworzyła trapez mający obwód równy danej linii.

485. — Jeśli, w trójkącie prostokątnym, jeden bok kąta prostego, jest równy średnicy danego koła a drugi równy połowie średnicy mniej połową boku sześciokąta foremnego opisanego na tem kole; wtedy przeciwprostokątna trójkąta różni się od półokręgu danego koła o mniej niż 0,0001 promienia.

486. — Znaleźć okrąg i powierzchnię koła, wiedząc że dwie cięciwy wpisane w półkole mają długość 0,12, i 1,75.

487. — Powierzchnia trójkąta równobocznego jest 36,4; znaleźć okrąg wpisany i opisany.

488. — Znaleźć kwadrat równowarty wieńcowi kołowemu którego promienie są 1,12 i 2,2.

489. — Znaleźć powierzchnię wycinka którego promień jest 3,3, a podstawa ma 36°.

490. — Znaleźć powierzchnię odcinka koła wiedząc że promień jest 1,1, a podstawa 144°.

491. — Znaleźć powierzchnię odcinka koła którego wysokość ma 0,36 długości, a podstawa 108°.

492. — Przez punkt A okręgu, poprowadzono jako cięciwy, boki AB i AC kwadratu i sześciokąta foremnego wpisanego; potem poprowadzono, przez punkt A i przez środek cięciwy BC, sieczną AD która spotyka okrąg w punkcie D. Dowieśdź że cięciwa AD jest, na mniej niż 0,001 promienia, bokiem kwadratu równowartego danemu kołu.

493. — W Paryżu podwórze pałacu zwanego *Louvre* jest kwadratowe i obejmuje 4 morgi. Ileż bok zawiera metrów?

494. — Znaleźć, na mniej niż millimetr, promień koła którego powierzchnia zwiększa się o jeden metr kwadratowy gdy promień rośnie na jeden centymetr.

495. — Przez punkt A, dany wewnątrz koła, poprowadzić dwie proste AM i AN, tak żeby, spotykając okrąg w punktach M i N, tworzyły trójkąt prostokątny w którym przeciwprostokątna MN jest maximum *albo* minimum.

496. — Koło jest średnią proporcyonalną między dwoma wielokątami foremnemi podobnemi, z których jeden jest opisany na tem kole a drugi jest z nim równoobwodowy.

497. — W wielokącie foremnym, mającym n boków, summa odległości punktu wziętego wewnątrz wielokąta od jego boków równa się n razy wziętej apotemie tego wielokąta.

498. — Z punktu O wziętego wewnątrz wielokąta równobocznego, spuszczono prostopadłe na jego boki; dowieśdź że summa tych prostopadłych jest niezależna od położenia punktu O. Wywieśdź ztąd poprzedzające twierdzenie.

499. — Półokrąg O podzielono na nieparzystą liczbę równych części, *np.* na siedem AC, CD, DE, EF, FG, GH, HB; poprowadzono równoległe EF, DG, GH, promienie OE, OF które je przecinają w odpowiednych punktach K i L. M i N. Dowieśdź że summa odcinków przejętych na tych równoległych, to jest EF + KL + MN, równa się promieniowi koła O.

500. — Dwa koła sieczne są styczne wewnętrznie do trzeciego koła którego promień jest równy summie ich promieni. Oznaczając przez A, B punkta zetknięć a przez C punkt przecięcia dwóch kół najbliższy łuku AB; dowieśdź że w trójkącie ABC, mającym za boki łuki AB, AC, BC trzech kół, bok AB = AC + BC.

501. W wielokącie foremnym mającym n boków, summa kwadratów z odległości punktu jakiegokolwiek od wierzchołków równa się n razy wziętej summie kwadratów z promienia i z odległości tego punktu od środka wielokąta.

502. — Dwa wielokąty foremne podobne są, jeden wpisany a drugi opisany na kole; dowieśdź że okrąg tego koła jest średnim proporcyonalnym między okręgiem wpisanym w pierwszy wielokąt i okręgiem opisanym na drugim wielokącie.

503. — Mając dany sześciokąt foremny ABCDEF, poprowadzono przekątne AC, BD, CE, DF, EA, FB, które przecinając się tworzą sześciokąt. Dowieśdź że ten sześciokąt jest foremny, i wyznaczyć jego stosunek z danym ześciokątem.

504. — Dowieśdź że 1° bok piętnastokąta foremnego wypukłego i bok drugiego piętnastokąta gwiaździstego foremnego są równe pierwszy *summie* a drugi *różnicy* apotemy dziesięciokąta foremnego wypukłego, wpisanego w to samo koło, i wysokości trójkąta równobocznego wystawionego na boku tego dziesięciokąta.

2° Bok pierwszego piętnastokąta gwiaździstego foremnego i trzeciego są równe pierwszy summie a drugi różnicy, wysokości trójkąta równobocznego wystawionego na boku dziesięciokąta gwiaździstego foremnego, wpisanego w to samo koło, i apotemy tego dziesięciokąta.

505. — Przez punkt M, wzięty na łuku AB ćwiercianu AOB, poprowadzono prostopadłę MN do OA, i styczną PMQ do łuku, która spotyka OA w P i OB w Q; dowieśdź że trójkąt AOB jest średnim proporcyonalnym między trójkątami POQ i MNO.

506. — Na łuku AB, ćwiercianu AOB, wzięto dwa punkta C i D równo oddalone od skrajności, i spuszczono na OA prostopadłe CE, DF; dowieśdź że figura BDEF jest równowarta wycinkowi OCD.

507. — W dwóch kołach różnych, wycinki, mające kąty odwrotnie proporcyonalne do kwadratów z promieni, są równowarte.

508. — Na średnicy AB koła wzięto punkt C i, na odcinkach AC i BC jako średnicach, nakreślono półkola; dowieśdź że powierzchnia zawarta między półkolem AB i temi półkolami równa się kołu którego średnicą jest średnia proporcyonalna między odcinkami AC i BC.

509. — W kole O wzięto cięciwę jakąkolwiek AB, i na promieniu OA nakreślono koło; dowieśdź że odcinki kół, podpasane w obydwóch kołach cięciwą AB, są w stosunku 4 do 1.

510. — Znaleźć n kół którychby promienie były proporcyonalne do n prostych danych, a summa ich powierzchni równowarta danemu kołu.

511. — Mając dane n punktów na płaszczyznie opisać najmniejsze koło któreby je zawierało wszystkie.

512. — Zamienić dany trójkąt na równoramienny mający z nim kąt przy wierzchołku spólny.

513. — Zamienić dany trójkąt na równoboczny.

514. — Zbudować trójkąt mając trzy wysokości, i wyrachować boki.

515. — Zbudować trójkąt znając dwie wysokości i promień koła wpisanego.

516. — Zbudować trójkąt znając obwód, powierzchnię i jeden bok *albo* kąt.

517. — Wykreślić trójkąt *maximum* podobny danemu, i któregoby boki przechodziły przez trzy punkta dane.

518. — W dany trójkąt wpisać trójkąt *minimum* podobny innemu.

519. — Na danym trójkącie opisać trójkąt równoboczny największy możebny.

520. — Trzy dane koła opisać trójkątem *maximum* podobnym danemu trójkątowi.

521. — Podzielić trójkąt, sieczną *minimum*, na dwie części proporcyonalne do dwóch prostych danych.

522. — Podzielić trójkąt, równoległą *albo* prostopadłą do podstawy, w stosunku średnim i skrajnym.

523. — Z trójkątów, równej podstawy i obwodu trójkąt równoramienny ma największą powierzchnię.

524. — Z trójkątów, równej podstawy i powierzchni, trójkąt równoramienny ma *najmniejszy* obwód.

525. — Mając dane dwa trójkąty podobne, zbudować trzeci podobny któregoby powierzchnia była średnią proporcyonalną między ich powierzchniami.

526. — Podzielić trójkąt, prostopadłą do podstawy, na dwie części równowarte.

527. — Mając dane trzy punkta A, B, C, znaleźć czwarty M, taki żeby powierzchnie trójkątów MAB, MAC, MBC były w stosunku linij danych.

528. — Wyrachować boki trójkąta prostokątnego którego wiadome są obwód i powierzchnia.

529. — Zbudować trójkąt którego wiadome są: bok, powierzchnia i promień koła opisanego.

530. — Zbudować trójkąt znając kąty i powierzchnię.

531. — Zbudować trójkąt znając obwód *albo* powierzchnię, i dwa ze czterech promieni kół wpisanego i zawpisanych.

532. — Zbudować trójkąt znając *trzy* ze czterech promieni kół wpisanego i zawpisanych.

533. — Zbudować trójkąt znając summę dwóch boków, i promieni kół wpisanego i zawpisanego w ich kąt.

534. — Zbudować trójkąt znając kąty i wieloczyn dwóch boków.

535. — Mając dane boki trójkąta, znaleźć boki trójkąta podobnego któregoby powierzchnia była *n* razy większa.

536. — Zbudować trójkąt *prostokątny* któregoby boki były styczne do koła danego, a obwód minimum.

537. — Zbudować trójkąt znając powierzchnię, jeden kąt i ośródkowę odpowiedającą jednemu z dwóch innych boków.

538. — Zbudować trójkąt znając powierzchnię, kąt i punkt przez który przechodzi bok przeciwległy temu kątowi.

539. — Zbudować trójkąt, znając jeden bok, jeden kąt i powierzchnię.

540. — Ze wszystkich trójkątów, mających kąt dany zawarty między dwoma bokami których summa jest dana, trójkąt równoramienny jest maximum, a jego podstawa minimum.

541. — Zbudować trójkąt równowarty danemu i taki żeby jego wierzchołki znajdowały się na trzech prostych danych.

542. — Są dane dwie równoległe AB i CD przecięte sieczną EF; przez punkt M, wzięty na AB, poprowadzono sieczną MN która przecina sieczną EF w punkcie O. Dowieśdź że summa trójkątów EMO, FNO nie może być ani maximum ani minimum.

543. — Przez punkt O boku AB trójkąta ABC poprowadzić sieczną tak żeby przecinając przedłużony bok AC tworzyła trójkąt równowarty danemu.

544. — Jeśli w trójkącie prostokątnym jeden z kątów ostrych jest $\frac{1}{3}$ kąta prostego, powierzchnia trójkąta równobocznego wystawionego na przeciwprostokątnej równa się summie powierzchni trójkątów równobocznych wystawionych na bokach kąta prostego.

545. — Mając dane trzy punkta A, B, C, znaleźć czwarty M taki, żeby powierzchnie trójkątów MAB, MAC, MBC były w stosunku trzech linij danych. Przypadek szczególny gdy te trzy linie są równe.

546. — Jeśli oznaczymy przez a, b, c boki trójkąta, przez a', b', c' jego wysokości, przez α, β, γ boki trzech kwadratów wpisanych, będzie dla kwadratu wpisanego w kąt A,
$$\frac{1}{\alpha}=\frac{1}{a'}+\frac{1}{a}.$$

547. — Gdy kwadrat jest *zawpisany* w trójkąt ABC, to jest opiera się *np.* na boku a i ma dwa wierzchołki na przedłużeniu ramion kąta A, wtedy
$$\frac{1}{\alpha}=\frac{1}{a'}-\frac{1}{a}.$$
Podobnie dla kwadratów wpisanych i zawpisanych w kąty B i C trójkąta.

548. — Na dwóch bokach AB i AC trójkąta opisano koła które się przecinają na trzecim boku BC albo na jego przedłużeniu. Dowieśdź że okręgi tych kół są proporcyonalne do boków na których je opisano.

549. — W trójkącie ABC prostokątnym przy A, z wierzchołka A spuszczono prostopadłę AD, która dzieli trójkąt na dwa prostokątne; dowieśdź że koło wpisane w cały trójkąt równa się summie kół wpisanych w trójkąty cząstkowe.

550. — W trójkącie jakimkolwiek ABC spuszczono z wierzchołka A prostopadłę AD na podstawę; dowieśdź że ta podstawa ma się do summy dwóch innych boków jako ich różnica ma się do różnicy odcinków podstawy, (albo do ich summy jeśli ta prostopadła jest zewnątrz trójkąta).

551. — W trójkącie ABC bok AC jest połową boku AB; poprowadzono dwójsieczną AD kąta A i dwójsieczną AE jego spełnienia utworzonego przedłużając AB. Dowieśdź że powierzchnie trójkątów ADC, ADB, ABC, ADE są proporcyonalne do liczb 1, 2, 3, 4.

552. — W trójkąt prostokątny wpisano koło którego punkt zetknięcia na przeciwprostokątnej wyznacza dwa odcinki. Dowieśdź że prostokąt mający te odcinki za boki jest równowarty trójkątowi.

553. — Na trójkącie opisano koło, wpisano koło. Dowieśdź że promień koła wpisanego jest średnim proporcyonalnym między odcinkami które te dwa koła przejmują na linii środków.

554. — Przez punkt dany wewnątrz kąta, poprowadzić prostę tak żeby odcięła trójkąt minimum.

555. — W danym kącie poprowadzić prostę, najmniejszą możebną; tak żeby odcięła trójkąt równowarty danemu kwadratowi.

556. — Podzielono boki trójkąta ABC w punktach M, N, P, w stosunku $\frac{n}{1}$, idąc w porządku liter A, B, C; dowieśdź że stosunek powierzchni trójkąta MNP do trójkąta ABC równa się $\frac{n^2-n+1}{(n+1)^2}$.

557. — Punkt P okręgu opisanego na trójkącie równobocznym ABC połączono z wierzchołkami tego trójkąta; dowieśdź że summa $\overline{PA}^2+\overline{PB}^2+\overline{PC}^2$ jest stała.

558. — Mając dany trójkąt ABC równoboczny, przedłużono jego boki w tę samą stronę długością każdego, i połączono skrajności M, N, P. Dowieśdź że trójkąt MNP jest równoboczny. i jego powierzchnia równa się siedem razy wziętej powierzchni trójkąta ABC.

559. — W trójkącie ABC, oznaczając przez a' wysokość odpowiedającą bokowi a, przez r i r', r'', r''' promienie kół wpisanego i zawpisanych w trójkąt; dowieśdź że $\frac{1}{a'}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r'}\right)$, i $\frac{1}{a'}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{r''}+\frac{1}{r'''}\right)$.

560. — Przez wierzchołek A trójkąta ABC poprowadzić prostę MN tak żeby utworzyła, z prostopadłemi spuszczonemi na nią z wierzchołków B, C, i z podstawą BC, trapez równowarty danemu kwadratowi.

561. — Mając dane dwie równoległe i dwa punkta, poprowadzić przez te punkta dwie linie proste, któreby się spotykały na jednej z równoległych, i tworzyły z drugą trójkąt równowarty danemu kwadratowi.

562. — Znaleźć w trójkącie punkt któregoby summa odległości od trzech wierzchołków była najmniejsza możebna.

563. — Dwa trójkąty są opisane na jednem kole i mają boki równoległe po dwa; dowieśdź że wieloczyn powierzchni *ośmiu* trójkątów, utworzonych przez ich boki, jest równy *szesnastej* potędze promienia koła.

564. — Linia prosta, przechodząca przez trzy rzuty punktu A okręgu O na bokach trójkąta równobocznego wpisanego, przechodzi przez środek promienia OA.

565. — Dowieśdź że powierzchnia trójkąta, utworzonego ze trzech ośrodkowych innego trójkąta równa się trzem czwartym powierzchni tego ostatniego.

566. — Wywieśdź ztąd że 1° ze wszystkich trójkątów mających summę ośródkowych stałą, trójkąt równoboczny jest maximum ; 2° ze wszystkich trójkątów równowartych, trójkąt równoboczny ma summę ośródkowych minimum.

567. — Na przeciwprostokątnej BC trójkąta nakreślono półkole BAC, a koła na bokach AB i AC jako średnicach ; dowieśdź że powierzchnia spólna tym dwom kołom równa się summie odcinków kół które boki AB i AC wyznaczają na półkolu, mniej summą odcinków kół które przeciwprostokątna BC wyznacza na dwóch kołach.

568. — W trójkącie prostokątnym ABC spuszczono prostopadłę AD na przeciwprostokątnę; dowieśdź że koła wpisane w trójkąty ADB, ADC są do nich proporcyonalne.

569. — Przez punkt wewnętrzny trójkąta poprowadzono równoległe do trzech jego boków; te równoległe dzielą trójkąt na trzy równoległoboki i trzy trójkąty. Dowieśdź że wieloczyn powierzchni równoległoboków zawiera osiem razy wieloczyn powierzchni trójkątów.

570. — Znaleźć wewnątrz trójkąta punkt taki, żeby linie łączące go z wierzchołkami podzieliły trójkąt na trzy trójkąty równowarte.

571. — Mając dany trójkąt, utworzono drugi łącząc środki boków pierwszego; potem trzeci, łącząc środki boków drugiego; i tak następnie Jaka jest granica summy powierzchni tych trójkątów ?

572. — Mając dane trzy linie proste z wielkości i z położenia, znaleźć

punkt taki, żeby biorąc go za spólny wierzchołek a te linie za podstawy utworzono trzy trójkąty równowarte.

573. — Z trójkątów równowartych mających ten sam kąt przy wierzchołku, trójkąt równoramienny ma obwód minimum, i podstawę minimum.

574. — Znaleźć na płaszczyznie trójkąta ABC punkt taki, żeby okręgi przechodzące przez ten punkt i przez każde dwa wierzchołki trójkąta były w stosunku trzech linij danych.

575. — W dane koło wpisać siedem sześciokątów foremnych równych, tak żeby jeden z nich był spółśrodkowy z kołem a zaś każdy inny miał z nim bok spólny.

576. — Dowieśdź że wielokąt wklęsły, utworzony przez te sześciokąty, jest równowarty sześciokątowi foremnemu wpisanemu w koło.

577. — W dany kwadrat wpisano drugi kwadrat dzieląc boki w stosunku $m : n$; w drugi kwadrat wpisano, tym samym sposobem, trzeci kwadrat; i tak następnie. Po ilu działaniach summa wpisanych kwadratów będzie równa danej powierzchni? Do jakiej granicy dąży summa powierzchni tych kwadratów nieskończenie się ciągnących?

578. — Przez wierzchołek kąta A i przez punkt zewnętrzny poprowadzono szereg kół; dowieśdź że te koła dzielą proporcyonalnie ramiona kąta, i znaleźć miejsce geometryczne środków cięciw objętych między temi ramionami.

579. — Są dane dwa punkta stałe A i B, a trzeci zmienny M leży na okręgu O. Dowieśdź że summa odległości $AM + BM$ jest najmniejsza *albo* największa możebna gdy promień OM jest dwójsieczną kąta AMB.

580. — Dwa czworoboki są równowarte gdy mają obie przekątne równe każda każdej, i pod tym samym kątem.

581. — Z punktu jakiegokolwiek O płaszczyzny równoległoboku ABDC spuszczono prostopadłe OG, OH, OK na boki przyległe AB, AC, i na przekątnę AD. Dowieśdź że $AB . OG + AC . OH = AD . OK$.

582. — W dany trójkąt wpisać prostokąt danej powierzchni.

583. — W dany kwadrat wpisać prostokąt danej powierzchni.

584. — W dany kwadrat wpisać kwadrat minimum.

585. — W dany kwadrat wpisać cztery koła równe, styczne między sobą; wyznaczyć ich promień w funkcyi boku kwadratu, i wyrachować powierzchnię czworoboku krzywolinijnego.

586. — Ze wszystkich prostokątów wpisanych w koło który jest maximum?

587. — W dane koło wpisać trapez maximum mający wysokość daną.

588. — W dane koło wpisać trapez którego wiadome są powierzchnia i wysokość *albo* kąt.

589. — W dane koło wpisać trapez którego wiadome są powierzchnia i boki nierównoległe.

590. — Zbudować czworobok mając dany bok, katy mu przyległe i stosunek boków przyległych, i wiedząc że bok przeciwległy danemu równa się summie *albo* różnicy boków przyległych.

591. — Wyrazić powierzchnię czworoboku jakiegokolwiek w funkcyi dwóch przekątnych i dwóch linij prostych które łączą środki boków przeciwległych.

592. — W czworoboku ABCD, przez środek przekątnej BD poprowadzono równoległę EOF do przekątnej AC; te dwie linie są podstawami trapezu AEFC; dowieśdź że każda przekątna tego trapezu dzieli czworobok na dwie części równowarte.

593. — Podzielić czworobok ABCD na dwie części równowarte prowadząc linię prostą przez jeden z wierzchołków.
Albo ogólniej, przez jeden z wierzchołków czworoboku, poprowadzić linię prostą któraby go podzieliła na dwie części proporcyonalne do dwóch danych linij.

594. — W czworoboku ABCD poprowadzono przez środek każdej przekątnej równoległę do drugiej; dowieśdź że łącząc punkt spotkania tych dwóch równoległych ze środkami boków czworoboku, podzieli się go na cztery części równowarte.

595. — Między trapezami równych podstaw i równej wysokości symetryczny ma obwód minimum.

596. — Zbudować trapez równoramienny maximum znając jedną podstawę i wiedząc że jest summą boków przyległych.

597. — Zbudować trapez równoramienny którego wiadoma powierzchnia, summa podstaw i bok przyległy.

598. — W dane koło wpisać trapez równoramienny, któregoby boki równe były do siebie prostopadłe; wyrachować jego powierzchnię w funkcyi promienia.

Jaka jest powierzchnia tego trapezu gdy boki równe czynią kąt 120°?

599. — Wpisano w koło, z jednej strony środka, dwie cięciwy równoległe, jedną AB równą promieniowi, a drugą CD równą bokowi trójkąta równobocznego wpisanego; pociągnięto cięciwy CA, DB aż do ich spotkania w E. Wyrachować powierzchnię trójkąta ABE i powierzchnię trapezu ABDC.

600. — Dwa koła przecinają się prostokątnie: przypuszczając że odległość środków wiadoma, wyrachować powierzchnię części spólnej tych kół.

601. — W dany trójkąt wpisać równoległobok powierzchni danej, tak żeby miał kąt spólny z tym trójkątem.

602. — Przez punkt O, dany na kierunku boku AB równoległoboku ABCD, poprowadzić sieczną któraby przecinała boki AD, BC, CD w punktach E, F, G, tak żeby trójkąt CFG był równowarty temu równoległobokowi.

603. — W równoległoboku ABCD, wzięto punkt jakikolwiek E na boku BC i punkt jakikolwiek F na boku przyległym CD; dowieśdź że równoległobok ABCD jest równowarty podwójnemu trójkątowi AEF więcej prostokątem mającym za rozmiary odcinki BE i DF.

604. — Wszelki prostokąt jest połową prostokąta który ma za rozmiary przekątne kwadratów zbudowanych na jego bokach przyległych.

605. — Powierzchnia wielokąta *parzystej* liczy boków nie zmienia się gdy wszystkie wierzchołki rzędu parzystego, albo wszystkie wierzchołki rzędu nieparzystego, opisują linie proste równe, równoległe i w jedną stronę idące.

606. — Dwa wielokąty *parzystej* liczby boków są równowarte jeśli ich boki mają te same środki.

607. — Jeśli dwa wielokąty podobne i wewnątrz jeden drugiego mają boki odpowiedne równoległe, powierzchnia wszelkiego wielokąta zarazem wpisanego w jeden i opisanego na drugim jest średnią proporcyonalną między powierzchniami tych dwóch wielokątów.

608. — Przez punkt wzięty na boku wielokąta poprowadzić linie proste któreby podzieliły ten wielokąt na daną liczbę części równowartych.

609 — Podzielić wielokąt na n części równowartych liniami prostemi, wychodzącemi z punktu wewnętrznego.

610. — Powierzchnia czworoboku, w którym dane są kąt i dwa boki przeciwległe, jest maximum gdy wierzchołek tego kąta jest w równej odległości od trzech innych wierzchołków.

611. — Powierzchnia wielokąta, w którym są dane kąt i boki mu nieprzyległe, jest maximum gdy wierzchołek tego kąta jest równo odległy od wszystkich innych wierzchołków.

612. — Powierzchnia wielokąta, w którym dane są wszystkie boki prócz jednego, jest maximum gdy wszystkie wierzchołki są w równej odległości od środka tego boku.

613. — Znając wielkość i położenie dwóch linij prostych, znaleźć miejsce geometryczne punktu takiego żeby, łącząc go ze skrajnościami tych linij, utworzono dwa trójkąty będące w stosunku danym.

614. — Znaleźć miejsce punktów takich, żeby summa kwadratów odległości każdego z nich od n punktów danych równała się danemu kwadratowi.

Uważać szczególny przypadek w którym dane punkta są wierzchołkami wielokąta foremnego.

615.—Miejsce punktów których summa kwadratów z odległości od boków wielokąta foremnego równa się danemu kwadratowi.

616. — Miejsce punktów których summa kwadratów, ze stycznych poprowadzonych do n kół danych, równa się danemu kwadratowi.

617. — Miejsce punktów których różnica kwadratów ze stycznych do dwóch kół danych równa się danemu kwadratowi.

618. — Dowieśdź że miejsce środka kół stycznych do dwóch kół danych jest hiperbola.

Wywieśdź ztąd sposób nakreślenia koła stycznego do trzech kół danych.

619. — Dwa trójkąty mają spólny wierzchołek; jakie miejsce opisuje ten wierzchołek gdy podstawy zostają niezmienne, a summa *albo* rónica powierzchni jest stała? Dyskutować, i wywieśdź ztąd że środki trzech przekątnych czworoboku zupełnego są w linii prostej.

620. — Dowieśdź że $\pi = r \cdot 2^m \sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots\ldots}}}}$.

gdy liczba m równa liczbie pierwiastników umieszczonych pod pierwszym pierwiastnikiem, rośnie nieskończenie.

621. — Jakie jest miejsce punktów równo odległych od dwóch kół zewnętrznych, albo wewnętrznych?

622. — Jakie jest miejsce punktów równoodległych od danej prostej i od danego okręgu?

623. — Jakie jest miejsce punktów których summa *albo* różnica odległości od danego punktu *albo* od danego okręgu i od danej prostej jest stała?

624. — Mając dane dwa punkta zewnątrz albo wewnątrz okręgu, znaleźć

na tym okręgu punkt taki, żeby summa jego odległości od dwóch danych punktów była minimum albo maximum?

625. — Na linii stożkowej mającej ognisko F i kierownicę odpowiedającą GH, poprowadzono sieczną MM′ która spotyka kierownicę w punkcie G. Dowieśdź że prosta FG jest dwójsieczną kąta utworzonego przez jeden z promieni wodzących MF, M′F′, i przedłużenie drugiego.

Wywieśdź ztąd że, gdy MG jest styczną w punkcie M linii stożkowej, wtedy FG jest prostopadłą do FM.

626. — Gdy jedna parabola toczy się po drugiej paraboli równej, mając najpierwej spólny wierzchołek, wtedy ognisko każdej z nich opisuje kierownicę drugiej.

627. — W ellipsie, przez ognisko F poprowadzono sieczną MM′, i, przez punkta przecięć M i M′, normalne MN i M′N, a przez punkt spotkania N tych normalnych poprowadzono równoległę NP do osi. Dowieśdź że ta równoległa przechodzi przez środek siecznej MM′.

628. — Dane są dwa punkta A i B; przez środek O prostej AB poprowadzono prostę OP która tworzy kąt θ z linią AB, i drugą prostę OP′ prostopadłą do OP. Na OP i OP′ wzięto punkta M i M′ takie żeby summa $MA + MB$ i $M'A + M'B$ równała się danej długości $2a$. Dokończono prostokąta MOM′N. Jakiej wartości kąta θ odpowieda maximum albo minimum powierzchni tego prostokąta?

629. — Mając daną parabolę, znaleźć na osi punkt taki, żeby poprowadzone przez niego dwie normalne tworzyły kąt równy danemu.

630. — Dane są punkt A i linia prosta KK′. Połączono punkt A z punktem B tej prostej; przez punkt B poprowadzono prostopadłę BC do KK′, a przez punkt A prostopadłę AC do AB. Jakie jest miejsce środka prostej BC?

631. — Dane są punkt A i prosta KK′; połączono punkt A z punktem B prostej KK′, i poprowadzono w B prostopadłę BC do KK′, a zaś w A prostopadłę AC do AB. Jakie jest miejsce środka M linii BC?

632. — W punkcie M ellipsy albo hiperboli, poprowadzono styczną i normalnę które spotykają drugą oś (oś małą w ellipsie, oś niepoprzeczną w hiperboli) w punktach T i N; dowieśdź że okrąg przechodzący przez trzy punkta M, N, T przechodzi przez ogniska F, F′.

KSIĘGA PIĄTA

WŁASNOŚCI ODCINKOWE.

Widzieliśmy już w księdze III że wprowadzenie znaków + i — zogólnia i ułatwia wysłowienia twierdzeń. W teoryach które teraz wyłożyć mamy, a które stanowią metody geometryi nowoczesnej, użycie tych znaków staje się niezbędnem do wyrażenia kierunku odcinków linijnych.

I tak, mając dane dwa punkta A i B na linii prostej nieogra-

niczonej XX′, można przebiegać odległość która je przedziela, idąc od A do B albo przeciwnie idąc od B do A. Ztąd wynikają dwa różne odcinki AB i BA, mające tę samą długość ale skierowane w strony przeciwne. Więc, aby wyznaczyć odcinek, trzeba dać jego długość, jego początek czyli punkt z którego wychodzi, i stronę w którą idzie; to się wyraża, kładąc znak + przed długością odcinka skierowanego w jedną stronę, a znak — przed długością odcinka skierowanego w stronę przeciwną.

Zatem $AB = -BA$ albo $AB + BA = 0$.

Na mocy tej ugody, trzy punkta O, A, B na linii prostej XX′, jakiekolwiek są ich położenia względne, dają fundamentalną równanie

$$OA + AB + BO = 0\ ;$$

albowiem, wychodząc z któregokolwiek z tych punktów, powracamy do niego tą samą drogą.

Ztąd wynika że, jeśli chcemy wyrazić odcinek AB albo BA, biorąc odległość skrajności A i B od jakiegokolwiek punktu O na ich kierunku, trzeba pisać

$$AB = OB - OA, \quad \text{i} \quad BA = OA - OB.$$

I nawzajem, różnica dwóch odcinków OB i OA, mających spólny początek O, to jest $\dot{O}B - OA$, równa się zawsze odcinkowi AB jakiekolwiek są znaki tych odcinków.
Tak samo $$OA - OB = BA.$$

Oznaczając przez I środek odcinka AB, mamy między trzema punktami A, I, O związek

$$AO + OI + IA = 0$$

Podobnie, trzy punkta B, I, O dają także

$$BO + OI + IB = 0.$$

Z tych równości uważając że $IB = -AI$, wywodzimy dwa ogólne wyniki; najpierwej dodając, otrzymujemy

$$OA + OB = 2OI \qquad \text{albo} \qquad OI = \frac{OA \times OB}{2},$$

a potem

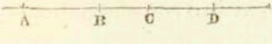
$$OA \,.\, OB = (OI + IA)(OI - IA) = \overline{OI}^2 - \overline{IA}^2.$$

Stosując to prawidło znaków do proporcyi harmonicznej, o której daliśmy tylko wiadomość w księdze trzeciej, mamy

$$\frac{DB}{DC} = -\frac{EB}{EC} \qquad \text{albo} \qquad \frac{DB}{DC} : \frac{EB}{EC} = -1.$$

STOSUNEK NIEHARMONICZNY.

Określenie. — Nazywa się stosunkiem nieharmonicznym czterech punktów A, B, C, D leżących w linii prostej, iloraz stosunków odległości dwóch którychkolwiek z tych punktów od dwóch innych. I tak, ilorazy



$$\frac{CA}{CB} : \frac{DA}{DB}, \quad \frac{DA}{DB} : \frac{CA}{CB}, \quad \frac{BA}{BC} : \frac{DA}{DC}, \ldots$$

są stosunkami nieharmonicznemi, ktore dla skrócenia oznaczają się zwykle przez (ABCD), (ABDC), (ACBD),.

Jako widzimy, ta notacya znaczy że, nazywając *pierwszym* punkt który zaczyna nawias idąc od lewej strony ku prawej, *drugim* ten który idzie po nim, i t. d., trzeba podzielić stosunek odległości *trzeciego* punktu od pierwszego i od drugiego, przez stosunek odległości *czwartego* punktu od tych samych.

Nie trudno teraz pojąć że można ze wzajemnych odległości czterech punktów A, B, C, D leżących w linii prostej, utworzyć *dwadzieścia cztery* stosunków nieharmonicznych, to jest tyle ile cztery litery A, B, C, D dają przemian.

Stosunek nieharmoniczny czterech punktów ABCD *nie zmienia wartości gdy dwa z tych punktów przemieniają się między sobą byle zarazem przemieniono dwa inne.*

I tak :

$$(ABCD)=\frac{CA}{CB}:\frac{DA}{DB}=\frac{CA\,.\,DB}{CB\,.\,DA}=\frac{DB\,.\,CA}{DA\,.\,CB}=\frac{AC\,.\,BD}{AD\,.\,BC}=\frac{BD\,.\,AC}{BC\,.\,AD};$$

więc $$(ABCD)=(BADC)=(CDAB)=(DCBA).$$

To daje *cztery* stosunki nieharmoniczne równe, w których punkt A jest sprzężony z punktem C, i punkt B sprzężony z D.

Biorąc punkt A za sprzężony punktu B, a potem za sprzężony punktu D, otrzymamy podobnie *osiem* innych stosunków nieharmonicznych. Razem tedy dwanaście stosunków nieharmonicznych, które, ze swojemi odwrotnościami, czynią dwadzieścia cztery stosunków nieharmonicznych, jakośmy zwiastowali. W tej liczbie *sześć* tylko jest różnych, *np.*

$$(ABCD),\ (ACDB),\ (ADBC)$$

i ich odwrotności (ABDC), (ACBD), (ADCB).

Ale nawet trzy pierwsze stosunki nieharmoniczne nie są dowolne; i zależą od siebie tak że, gdy jeden z nich jest dany dwa inne są temsamem wyznaczone.

Jakoż, nazwijmy x, y, z te trzy stosunki różne, to jest

$$x=\frac{CA}{CB}:\frac{DA}{DB},\qquad y=\frac{DA}{DC}:\frac{BA}{BC},\qquad z=\frac{BA}{BD}:\frac{CA}{CD};$$

i uważajmy że, biorąc wieloczyn AC . BC dwóch odcinków zakraczających na siebie, mamy tosamość

$$AD . BC = (AB + BC + CD)(BD - CD),$$

z której wynika

$$AD . BC = AC . BD - AB . CD. \qquad (1)$$

Podzielmy teraz obie strony tej równości przez AB . BC; mając wzgląd na znaki odcinków, otrzymamy

$$1 = \frac{CA . DB}{CB . DA} + \frac{BA . DC}{BC . DA} \quad \text{albo} \quad x + \frac{1}{y} = 1. \qquad (2)$$

Dzieląc następnie obie strony równości (1) przez AB . CD, potem przez AC . BD, znajdziemy tak samo,

$$y + \frac{1}{z} = 1 \quad (3), \qquad z + \frac{1}{x} = 1 \quad (4).$$

Więc każdy ze trzech stosunków nieharmonicznych x, y, z, wywodzi się z poprzedzającego wedle tej samej ustawy, która pokazuje ich wzajemną zależność.

Wieloczyn $xyz = -1$.

Trzy powyższe równości (2), (3), (4) dowodzą że, jeśli dwa układy czterech punktów A, B, C, D i A′, B′, C′, D′, leżących w linii prostej, mają jeden stosunek nieharmoniczny równy, to mają także wszystkie inne odpowiedne równe.

Jeśli cztery punkta A, B, C, D, leżące w linii prostej, są oddzielne jeden od drugiego, wtedy żaden z odcinków AB, AC, BD... nie jest *zero*; ztąd wynika że stosunek nieharmoniczny nie może być ani *zero* ani *nieskończenie wielki*. Nie może on także równać się *jedności dodatnej*; bo, gdyby było *np.* $y = 1$, wtedy, na mocy równości (2), byłoby $x = 0$, co niemożebne.

Równości (2) (3) (4) pokazują nadto że dwa ze trzech stosunków nieharmonicznych różnych x, y, z, są dodatne, a trzeci odjemny.

Po tem co poprzedza nie trudno dowieśdź że, mając dany stosunek nieharmoniczny czterech punktów w linii prostej i trzy z tych punktów, można zawsze wyznaczyć czwarty.

Jakoż, niech będzie wartość stosunku nieharmonicznego dana z wielkości i ze znaku, A, B, C trzy punkta dane, D punkt szukany. na linii prostej ABC; mamy

$$\frac{CA}{CB} : \frac{DA}{DB} = \lambda ; \qquad \text{zkąd} \qquad \frac{DA}{DB} = \frac{1CA}{\lambda CB}.$$

Ostatnia równość, której druga strona jest wiadoma co do wielkości i co do znaku, wyznacza oczywiście punkt D (III, *zag*. 2).

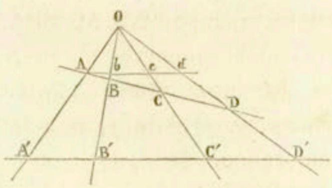
Więc stosunek nieharmoniczny czterech punktów ODDZIELNYCH *w linii prostej, może mieć taką wartość, dodatną albo odjemną, jaką się podoba; wyjąwszy tylko* 0, ∞ i $+1$, *jakośmy już okazali.*

Określenie. — Układ linij prostych leżących na jednej płaszczyznie i wychodzących z jednego punktu nazywa się *pękiem*. Te linie nazywają się *promieniami*, a punkt ich spotkania *środkiem pęku*.

Jako przypadek szczególny można mieć pęk linij równoległych.

Twierdzenie I(*).

Gdy dwie poprzeczne AD i A'D' *spotykają pęk czterech linij prostych* OA, OB, OC, OD, *w punktach* A, B, C, D *i* A', B', C', D', *stosunek nieharmoniczny czterech pierwszych punktów jest równy stosunkowi nieharmonicznemu czterech drugich.*



Ponieważ ilorazy $\frac{CA}{CB}$ i $\frac{C'A'}{C'B'}$ mają te same znaki, i tak samo $\frac{DA}{DB}$ i $\frac{D'A'}{D'B'}$, stosunki nieharmoniczne (ABCD) i (A'B'C'D') mają także te same znaki; dość więc dowieśdź że wartości liczebne tych stosunków są równe.

(*) To fundamentalne twierdzenie znajduje się w *Zbiorach matematycznych* Pappusa, ktory żył w Alexandryi, na końcu IV wieku naszej ery.

Owoż, jeśli przez punkt A poprowadzimy równoległę Ad do A'D', będzie oczywiście $(A'B'C'D')=(Abcd)$.

Teraz, w trójkącie ABb, poprzeczne OC i OD dają

$$\frac{CA}{CB} \times \frac{OB}{Ob} \times \frac{cb}{cA} = 1,$$

$$\frac{DA}{DB} \times \frac{OB}{Ob} \times \frac{db}{dA} = 1;$$

ztąd, dzieląc stronami, wynika

$$\frac{CA}{CB} : \frac{DA}{DB} = \frac{cA}{cb} : \frac{dA}{db}.$$

Więc $(ABCD) = (Abcd) = (A'B'C'D')$.

Twierdzenie jest przez się widoczne w pęku czterech równoległych.

Wniosek. — Jakiekolwiek ma położenie poprzeczna w pęku czterech linij prostych, stosunek nieharmoniczny czterech punktów przecięć jest stały.

Określenie. — Nazywa się *stosunkiem nieharmonicznym pęku* czterech linij prostych *stosunek nieharmoniczny czterech punktów* które ten pęk wyznacza *na poprzecznej* jakiejkolwiek.

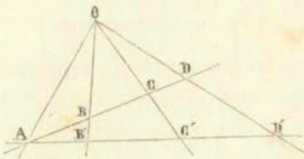
Stosunek nieharmoniczny pęku czterech prostych OA, OB, OC, OD wyraża się notacyą (O . ABCD), (O . ACBD),... która oznacza stosunek nieharmoniczny czterech punktów przecięć A, B, C, D tego pęku z poprzeczną.

Kątami pęku są sześć kątów utworzonych przez cztery promienie, brane po dwa. Dowodzenie powyższego twierdzenia pokazuje że stosunek nieharmoniczny pęku nie zmienia się, gdy zamiast jednego z tych kątów bierze się jego spełnienie.

Dwa pęki, mające kąty równe każdy każdemu, mają oczywiście stosunek nieharmoniczny równy.

Twierdzenie II.

Gdy dwa układy PROSTOLINIJNE *czterech punktów* A, B, C, D, *i* A', B', C', D' *mają stosunek nieharmoniczny równy i jeden punkt odpowiedny spólny* A, *trzy proste* BB', CC', DD', *które łączą inne punkta odpowiedne po dwa schodzą się w jednym punkcie.*



Jakoż, przypuśćmy że proste BB' i CC' spotykają się w punkcie O; oznaczając przez δ punkt w którym OD' spotyka AD, będzie, na mocy powyższego twierdzenia,

$$(A'B'C'D') = (ABC\delta).$$

Ale z założenia $\quad (A'B'C'D') = (ABCD),$

więc $\quad (ABC\delta) = (ABCD).$

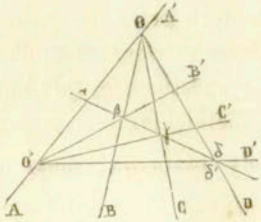
Zatem δ schodzi się z D, i prosta DD' przechodzi przez O.

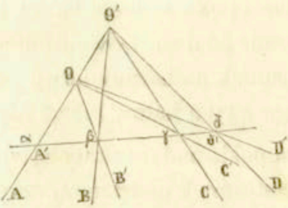
Jeśli proste BB' i CC' są równoległe, dowiedzie się podobnie że prosta DD' jest do nich równoległa.

Twierdzenie III.

Gdy dwa pęki czterech linij prostych mają stosunek nieharmoniczny równy i jeden promień spólny, trzy punkta przecięć innych promieni odpowiednych są w linii prostej.

Niech będą dwa pęki (O.ABCD) i (O'.A'B'C'D') mające stosu-





nek nieharmoniczny równy i promień OO' spólny; powiedam że trzy punkta β, γ, δ, w których się przecinają inne promienie odpowiedne po dwa, są w linii prostej.

Jakoż poprowadźmy poprzeczną $\beta\gamma$, i oznaczmy przez α, δ, δ', punkta w których ona spotyka promienie OO', OD, OD'. Ponieważ z założenia stosunek nieharmoniczny dwóch pęków jest równy, mamy

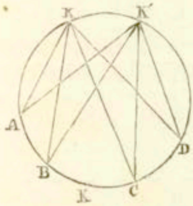
$$(\alpha\beta\gamma\delta) = (\alpha\beta\gamma\delta');$$

więc δ schodzi się z δ', i trzy punkta β, γ δ są w linii prostej.

Uwaga. — Geometrya mało posiada sposobów okazania że trzy punkta' zadość czyniące pewnym warunkom, są w linii prostej, albo że trzy proste schodzą się w jednym punkcie; bo tylko za pomocą kątów wierzchołkiem przeciwległych, albo za pomocą trójkątów podobnych, uczynić to może, a niekiedy za pomocą poprzecznych. Więc w tym względzie dwa powyższe twierdzenia są ważnym nabytkiem geometryi nowoczesnej.

Twierdzenie IV.

Jeśli połączymy punkt K *okręgu ze czterema punktami stałemi* A, B, C, D *tego okręgu, stosunek nieharmoniczny tak utworzonego pęku będzie stały, jakiekolwiek punkt* K *weźmie położenie na okręgu.*



Jakoż, $(K.ABCD) = (K'.ABCD)$;

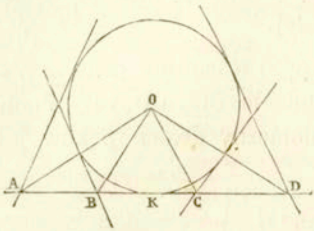
bo kąty AKB i $AK'B$, AKC i $AK'C$, etc. tych pęków są równe albo spełniające, jakiekolwiek punkt K ma położenie na okręgu.

Ten stosunek nieharmoniczny nazywa się stosunkiem nieharmonicznym czterech punktów A, B, C, D koła.

Twierdzenie V.

Jeśli połączymy środek koła O *z punktami* A, B, C, D *w których cztery styczne stałe są przecięte przez piątą ruchomą; stosunek nieharmoniczny tak utworzonego pęku będzie* STAŁY, *jakiekolwiek weźmie położenie styczna ruchoma.*

Albowiem kąty, AOB, AOC, BOC,... pęku, pod któremi widać,



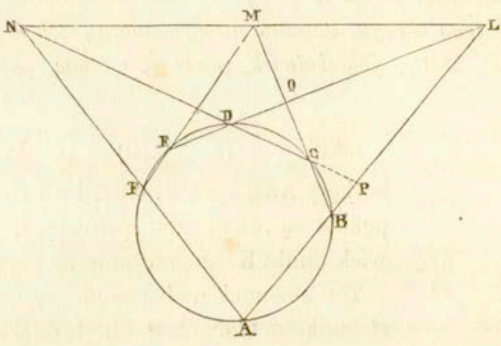
ze środka koła O, odcinki AB, AC, BC. stycznej ruchomej AK, zawarte między stycznemi stałemi, zostają niezmienne (II, 24); więc stosunek nieharmoniczny (ABCD) jest stały.

Ten stosunek nazywa się stosunkiem nieharmonicznym czterech stycznych koła.

SZEŚCIOKĄT WPISALNY I OPISALNY.

Twierdzenie VI.

W każdym sześciokącie ABCDEF *wpisanym w koło, boki przeciwległe* AB *i* DE, BC *i* FE, CD *i* FA *spotykają się we trzech punktach* L, M, N *w linii prostej.*



Jakoż, mamy (4)

$$(A\,.\,BCDF) = (E\,.\,BCDF).$$

Zatem, sieczna CD przecinająca pierwszy pęk w punktach P, C, D, N, i sieczna BC przecinająca drugi pęk w punktach B, C, Q, M dają

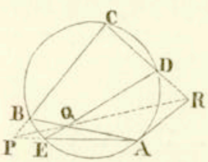
$$(PCDN) = BCQM).$$

Owoż, te dwa układy prostolinijne, których stosunki nieharmoniczne są równe, mają jeden punkt spólny C; zatem proste PB, DQ, NM które łączą inne punkta odpowiedne po dwa, spotykają się w jednym punkcie L (2). Więc trzy punkta L, M, N są w linii prostej.

Uwaga. — To sławne twierdzenie Paskala istnieje w sześciokącie nawet niewypukłym; jako łatwo pokazuje samo dowodzenie.

Ogólnie mówiąc, *sześć* punktów płaszczyzny dają różne sześciokąty; jakoż, jeśli połączymy te punkta liniami prostemi, idąc we wszystkich kierunkach możebnych, ale wracając zawsze do tego samego punktu wyjścia, utworzymy $\frac{1}{2}.5.4.3.2.1=60$ sześciokątów. Twierdzenie *Paskala* stosuje się więc do 60 sześciokątów.

Wniosek I. — Gdy dwa wierzchołki sześciokąta wpisanego w koło schodą się w jeden, linia prosta która je łączy staje się styczną koła w tym punkcie, a sześciokąt staje się pięciokątem. Ztąd twierdzenie



W pięciokącie ABCDE *wpisanym w koło, punkt spotkania stycznej koła w wierzchołku* A *z bokiem przeciwległym* CD, *i punkta spotkania innych boków nie idących po sobie* AB *i* DE, BC *i* EA *są w linii prostej.*

Ten ważny wniosek daje sposób, za pomocą samej linii prostej, prowadzenia stycznej w danym punkcie łuku koła którego *pięć* tylko punktów jest wiadomych.

II. — Dwa boki sześciokąta wpisanego mogą się stać stycznemi koła; więc

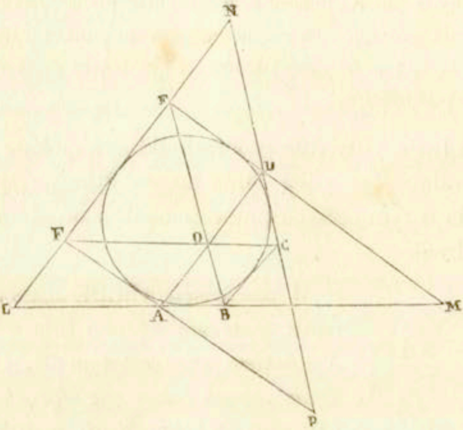
1° *Jeśli w czworoboku* ABCD *wpisanym w koło, poprowadzono styczne przez dwa wierzchołki przyległe, punkta spotkania każdej z nich z bokiem przechodzącym przez punkt zetknięcia drugiej, i punkt spotkania dwóch innych boków są w linii prostej.*

2° *W czworoboku* ABCD *wpisanym w koło, przecięcia się stycznych w wierzchołkach przeciwległych* A *i* C, B *i* D, *i przecięcia się boków przeciwległych* AB *i* CD, AD *i* BC *są czterema punktami w linii prostej.*

III. — *W trójkącie wpisanym w koło, punkta spotkań boków ze stycznemi w wierzchołkach przeciwległych tym bokom są w linii prostej.*

Twierdzenie VII (*).

W każdym sześciokącie ABCDEF *opisanym na kole, trzy przekątne* AD, BE, CF, *łączące wierzchołki przeciwległe, spotykają się w jednym punkcie* O.



Jakoż, uważajmy dwa boki AB, CD niestykające się, przecięte przez cztery inne w puktach odpowiednych L, A, B, M, i N, P, C, D; mamy (5)

$$(LABM) = (NPCD)$$

Zatem $$(E.LABM) = (F.NPCD)$$

Te dwa pęki, których stosunki nieharmoniczne są równe, mają spólny promień LN; więc inne promienie odpowiedne EA, i FP, EB i FC, EM i FD przecinają się we trzech punktach A, O, D w linii prostej (3). Więc trzy przekątne AD, BE, CF spotykają się w jednym punkcie O.

Wniosek I. — Pięciokąt opisany na kole można uważać jako sześciokąt którego szósty kąt, mający wierzchołek w punkcie styczności, równa się dwom kątom prostym. Więc

* Twierdzenie Brianchona.

W pięciokącie ABCDE, *opisanym na kole, linia* D*d łącząca punkt styczności d jednego boku z wierzchołkiem przeciwległym, i przekątne,* AC, BE *łączące inne wierzchołki, schodzą się w jednym punkcie.*

II. — 1° *W czworoboku opisanym na kole, przekątne i linie łączące punkta zetknięć dwóch boków przyległych z wierzchołkami niespólnemi tych boków, i przekątna dwóch innych wierzchołków przecinają się w jednym punkcie.*

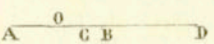
2° *W czworoboku opisanym na kole, przekątne i linie łączące punkta zetknięć przeciwległych schodzą się w jednym punkcie.*

III. — Nakoniec, *w trójkącie opisanym na kole, linie łączące punkt zetknięcia każdego boku z wierzchołkiem przeciwległym schodzą się w jednym punkcie.* Co już wiadome.

Uwaga. — Dwa powyższe twierdzenia pokazują wzajemność własności niektórych figur. I tak, w twierdzeniu VI i jego wnioskach chodzi *o punkta w linii prostej*, a zaś w twierdzeniu VII i jego wnioskach chodzi *o linie proste zbiegające się w jednym punkcie*. Są więc w geometryi, jako widzimy, dwojakiego rodzaju zadania, jedne odnoszące się do punktów, drugie do linij prostych ; te zadania są *spółwzględne*, to jest : odpowiedające sobie wedle pewnej ustawy którą dlatego nazwano *ustawą dwójności*. Ważność stosunku nieharmonicznego zależy na tem właśnie że się stosuje z równą łatwością do zadań spółwzględnych, i daje dowodzenia wprost, oparte zwykle na samych liniach figury ; jako w dwóch poprzedzających twierdzeniach. Pan Chasles, sławny matematyk francuski, uważa stosunek nieharmoniczny za najpotężniejszą metodę Geometryi, którą rozwinął w dwóch mistrzowskich dziełach : *Traité de Géométrie supérieure*, Paris 1852, i *Traité des sections coniques*, Paris 1865.

PODZIAŁ HARMONICZNY.

Mówi się że cztery punkta A, B, C, D w linii prostej, tworzą



układ harmoniczny gdy stosunek nieharmoniczny (ABCD) jest równy — 1, to jest gdy

$$\frac{CA}{CB} : \frac{DA}{DB} = -1.$$

Na mocy tego określenia, proporcya harmoniczna wyraża się ogólnie, mając wzgląd na znaki odcinków, przez

$$\frac{CA}{CB} = -\frac{DA}{DB}.$$

Punkta C i D, jako już wiemy, nazywają się sprzężonemi harmonicznemi względem punktów A i B, i nawzajem; to się wyraża inaczej, mówiąc że punkta C i D dzielą prostę AB harmonicznie; i nawzajem, punkta A i B dzielą prostę CD harmonicznie.

Odległość CD dwóch punktów które dzielą harmonicznie linię AB jest *średnią harmoniczną* między odległościami DA i DB. Tak samo, odległość AB jest średnią harmoniczną między odległościami AC i AD. (*)

Nazywając O środek odcinka AB, będzie

$$\frac{DA + DB}{2} \cdot DC = DA \cdot DB, \quad \text{albo} \quad DO \cdot DC = DA \cdot DB.$$

Starożytni znali proporcyę harmoniczną czyli *stosunek harmoniczny;* dlatego właśnie P. Chasles nazwał ogólnie stosunek (ABCD) *stosunkiem nieharmonicznym.*

Twierdzenie VIII.

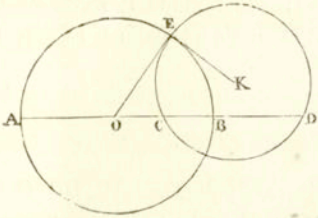
Gdy prosta AB *jest podzielona harmonicznie przez dwa punkta* C *i* D, *połowa tej linii jest średnią propoocyonalną między odległościami* OC *i* OD *jej środka od tych dwóch punktów.* I nawzajem.

Jakoż, proporcya harmoniczna

(*) Określenie średniej harmonicznej może się zogólnić. Niech będzie n punktów A, B, C, D..., w linii prostej; jeśli weźmiemy punkt M tak, żeby odwrotność jego odległości od punktu stałego O tej linii była średnią między odwrotnościami odległości punktów A, B... od tego samego O, to jest

$$\frac{n}{OM} = \frac{1}{OA} + \frac{1}{OB} + \frac{1}{OC} + \cdots$$

i każda odległość OA, OB..., wzięta ze znakiem + albo —, stosownie do swego położenia względem O; wtedy odległość OM nazywa się *średnią harmoniczną* odległości OA, OB, OC..., a punkt M *środkiem średnich harmonicznych* punktów A, B, C...



$$\frac{CA}{CB} = \frac{DA}{DB}.$$

daje
$$\frac{CA + CB}{CA - CB} = \frac{DA + DB}{DA - DB}.$$

albo
$$\frac{AB}{2OC} = \frac{2OD}{AB};$$

więc
$$\overline{OA}^2 = OC \times OD.$$

Nawzajem, *jeśli połowa prostej* AB *jest średnią proporcyonalną między odległościami* OC *i* OD *środka* O *tej prostej od dwóch punktów* C *i* D, *leżących na jej kierunku i z jednej strony jej środka, te punkta* C *i* D *dzielą harmonicznie prostę* AB.

Bo, równanie $\overline{OA}^2 = OC . OD$, które mamy z założenia, daje proporcyę

$$\frac{OA}{OC} = \frac{OD}{OA};$$

zkąd
$$\frac{OA + OC}{OA - OC} = \frac{OD + OA}{OD - OA} \quad \text{albo} \quad \frac{CA}{CB} = \frac{DA}{DB}.$$

Wniosek I. — *Koło, nakreślone na linii* AB *jako średnicy, przecina* prostokątnie *wszelkie koło przechodzące przez dwa punkta* C i D *sprzężone harmoniczne tej średnicy.*

Albowiem, niech będzie E jeden z punktów przecięcia dwóch kół, mamy $OC . OD = \overline{OE}^2$; więc promień OE jest styczny w E do koła K, to jest, dwa koła O i A przecinają się pod kątem prostym OEK.

Nawzajem, *dwa koła przecinające się prostokątnie dzielą harmonicznie wszelką średnicę jednego z nich która spotyka drugie.* Bo, uważając średnicę AB, ponieważ kąt OEK jest prosty, promień OE jest styczny do koła K; więc $OC . OD = \overline{OE}^2 = \overline{OA}^2$.

Uwaga. — Równanie $OC . OD = \overline{OA}^2$, albo $OC = \frac{\overline{OA}^2}{OD}$, pokazuje że każdy punkt C, leżący między A i B, ma swój sprzężony harmoniczny D zewnątrz tych punktów; nadto, gdy punkt C schodzi się z B, jego sprzężony D schodzi się z nim także. Ale, im bardziej punkt C zbliża się do środka O linii AB, tem więcej punkt D od niego się oddala, tak że, gdy C pada w O, wtedy $OC = 0$ i $OD = \frac{\overline{AO}^2}{0} = \infty$; to się wyraża mówiąc że środek O ma za sprzężony punkt nieskończenie odległy.

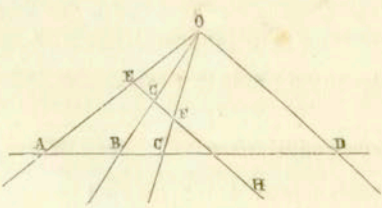
Określenie. — Pęk *czterech* linij prostych OA, OB, OC, OD, którego stosunek nieharmoniczny (ABCD) jest równy -1, nazywa się *harmonicznym*.

Promienie OC i OD są *sprzężonemi harmonicznemi* względem promieni OA i OB, i nawzajem. To się wyraża inaczej, mówiąc że promienie OC i OD dzielą harmonicznie kąt AOB; i nawzajem, promienie OA i OB dzielą harmonicznie kąt COD.

Biegunowa kąta. — Z określenia pęku harmonicznego wynika że, jeśli przez punkt B płaszczyzny kąta AOC (*fig. poniżej*), poprowadzimy różne sieczne, jako ABC, i na każdej weźmiemy punkt D, sprzężony harmoniczny punktu B względem odcinka AC zawartego między ramionami kąta, miejscem geometrycznem punktu D będzie promień OD sprzężony harmoniczny promienia OB względem kąta AOC. Więc, gdy sieczna obraca się około punktu B, sprzężony D tego punktu opisuje linię prostą OD. Dla tej przyczyny, punktowi B dano imie *bieguna* prostej OD, a zaś prostej OD imie *biegunowej* punktu B *względem kąta* AOC.

Twierdzenie IX.

W pęku harmonicznym (O.ACBD) *poprzeczna* EH, *równoległa do jednego z promieni* OD, *jest podzielona przez trzy inne na dwie równe części*. I nawzajem.



Jakoż, w układzie harmonicznym (EFGH) punkt H jest nieskończenie odległy od środka odcinka EF, ponieważ sieczna EH jest równoległa do OD; więc punkt G sprzężony punktu H musi być srodkiem odcinka EF.

Nawzajem, *pęk czterech prostych* OA, OB. OC, OD *jest harmoniczny, jeśli równoległa* EF *do jednej z tych linij jest podzielona przez trzy inne na dwie równe części*. Bo, gdyby sprzężony promienia OG był różny od OD, toby przecinał poprzeczną EF w punkcie sprzężonym z G; więc punkt G nie byłby środkiem odcinka EF (8, *wn*).

Wniosek. — *Ramiona kąta, jego dwójsieczna i dwójsieczna kąta spełniającego tworzą pęk harmoniczny*.

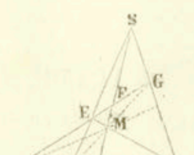
Niech będą (*fig. powyższa*) OB i OD dwójsieczne kąta AOC i jego spełnienia. Prostopadła EF do OB daje odcinki GE i GF równe, i jest równoległa do OD; więc pęk (O.ACBD) jest harmoniczny. Co zresztą widoczne (III, 2).

Nawżajem, *gdy w pęku harmonicznym* O.ABCD *dwa promienie sprzężone* OB *i* OD *tworzą kąt prosty, te promienie są dwójsiecznemi kąta* AOC *dwóch innych promieni i kąta spełniającego*.

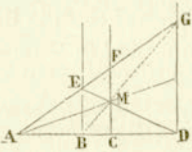
Albowiem, jeśli poprowadzimy prostopadłę EF do OB, ta prostopadła będzie równoległa do OD i odcinki GE, GF będą równe. Więc OB jest dwójsieczną kąta AOC, a OD dwójsieczną jego spełnienia.

Twierdzenie X.

Jeśli przez punkt A *płaszczyzny kąta* BSD *poprowadzimy poprzeczne* AD, AG,... *i połączymy punkta przecięć przeciwległych* B *i* G, D *i* E,... *miejscem punktu* M *skrzyżowań linij* BG *i* DE,... *będzie biegunowa* MS *punktu* A *względem kąta* BSD.



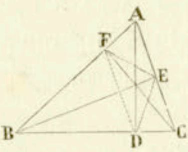
Jakoż, niech będzie C sprzężony harmoniczny punktu A względem odcinka BD. Jeśli połączymy AM, pęk (M.ACBD) będzie harmoniczny; zatem punkt przecięcia F promienia MC i poprzecznej AG, jest sprzężony punktu A, względem odcinka EG. Więc prosta CM jest biegunową punktu A względem kąta BSD.



Uwaga. — To twierdzenie nie przestaje być prawdziwe, gdy wierzchołek kąta S, oddala się nieskończenie, to jest gdy ramiona kąta stają się dwiema równoległemi BE i DG; wtedy równoległa CF jest biegunową punktu A względem dwóch równoległych BE i DG.

Wniosek I. — *W czworoboku zupełnym* ABMEGD, (*dwie fig. powyższe*) *każda ze trzech przekątnych* AM, BE, DG *jest podzielona harmonicznie przez dwie inne.*

Bo punkt A jest biegunem prostej SM względem kąta BSD, a punkt S biegunem prostej AM względem kąta DAG.



II. — Zatem, trzy wysokości trójkąta ABC, są dwójsiecznemi kątów w trójkącie DEF który ma za wierzchołki spodki tych prostopadłych (9, *wn. wzaj.*).

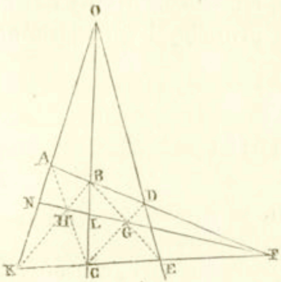
Powyższe twierdzenie nie tylko nastręcza łatwy sposób, za pomocą samego liniału, kreślenia biegunowej danego punktu względem kąta, ale jeszcze pokazuje jak można *wyznacyć czwarty punkt harmoniczny do trzech danych.* I tak, mając dane trzy punkta B, C, D w linii prostej, jeśli chcemy znaleźć sprężony harmoniczny punktu C względem odcinka BD, kreślimy na tym odcinku jakikolwiek kąt BSD i łączymy CS; po czem, przez punkt M wzięty na CS i przez punkta sprzężone B, D, prowadzimy proste BM i DM które przecinają ramiona kąta w punktach G i E; nakoniec prowadzimy prostę EG która przecina BD w punkcie szukanym A.

Opierając się na tem samem twierdzeniu, rozwiążemy jeszcze następujące zagadnienie.

Zagadnienie I.

Przez punkt A *płaszczyzny dwóch danych prostych* BC *i* DE, *poprowadzić linię prostą, któraby przedłużona przechodziła przez* NIEWIDZIALNY *punkt spotkania tych prostych.*

Przez punkt A poprowadź, do danych prostych BC i DE, po-



przeczną AF i z jej punktu F, wziętego przyzwoicie, drugą poprzeczną FEC; po czem, poprowadź proste BE i CD które się przetną w punkcie G; następnie, poprowadź proste AC i FG które się przetną w punkcie H; jeśli nakoniec poprowadzisz prostę BH która przetnie poprzeczną FE w punkcie K, linia prosta KA rozwiąże zagadnienie. Albowiem prosta FH jest biegunową punktu O względem kąta AFK; więc proste AK, BC, DE schodzą się w jednym punkcie O.

Uwaga. — Na gruncie wytyka się linię prostą za pomocą tyczek ze znakami widzialnemi z daleka. Aby więc rozwiązać na gruncie powyższe zagadnienie, trzeba utkwić pionowo tyczki w punktach A, B, D, F, E, C, G, H, K. Tyczki A i K wskażą kierunek szukanej prostej.

Ściśle mówiąc, rozwiązanie stosuje się tylko do gruntu płaskiego; ale za pomocą tyczek mierniczych zagadnienie przywodzi się do figury płaskiej.

Zagadnienie II.

Przedłużyć, po za przeszkodę, linię prostą której dwa punkta są widzialne.

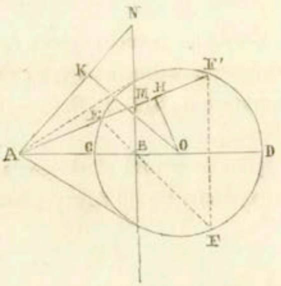
Niech będą (*fig. powyższa*) A i K dwa widzialne punkta linii prostej której chcemy znaleźć punkt O, przypuszczając przeszkodę między A i O. Przez punkt F, wzięty przyzwoicie, poprowadźmy dwie poprzeczne FA i FK, i oznaczmy na nich dwa punkta B i C dowolne, ale takie żeby kierunek CB spotykał po za przeszkodą kierunek KA. Po czem, poprowadźmy proste AC i BK które się skrzyżują w punkcie H, i połączmy FH; następnie, weźmy na AF dowolny punkt D i połączmy go z punktem C, proste DC i FH przetną się w punkcie G; nakoniec poprowadźmy prostę BG która przetnie FK w punkcie E. Otrzymamy tym sposobem dwie linie proste BC i DE przecinające się w punkcie O który należy do kierunku prostej KA.

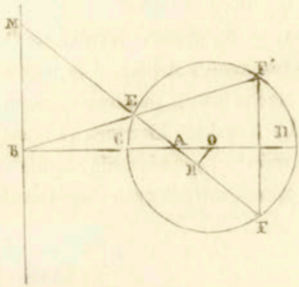
To rozwiązanie jest w tem ważne że się stosuje wtedy nawet gdy punkta A i B są niedostępne na gruncie, i niewidzialne z punktu O.

BIEGUNOWA W KOLE.

TWIERDZENIE XI.

Jeśli przez punkt A *płaszczyzny koła, poprowadzono jakąkolwiek sieczną* AEF, *miejscem geometrycznem punktu* M, *sprzężonego harmonicznego z punktem* A *względem cięciwy* EF, *jest linia prosta, prostopadła do średnicy* CD *przechodzącej przez punkt* A.





Wyznaczmy punkt F′ symetryczny punktu F względem prostej AO, i poprowadzmy prostę EF′ która przetnie AO w punkcie B sprzężonym harmonicznym punktu A względem średnicy CD. Ze środka koła O spuśćmy prostopadłę OH na sieczną AE, i połączmy punkta B, M które, należąc do szukanego miejsca, dają

$$AH.AM = AE.AF \quad \text{i} \quad AO.AB = AC.AD;$$

zatem $$AH.AM = AO.AB.$$

To równanie pokazuje że w kącie BAM proste BM i OH są przeciwrównoległe. Owoż, prosta OH jest prostopadła do AH; więc prosta BM jest prostopadła do AO. Więc miejscem punktu M jest prostopadła MB do średnicy CD przechodzącej przez punkt A.

Równanie AH.AM = AO.AB albo, co jeszcze lepiej, równanie AH.AM = AC.AD wyznacza punkt M niezależnie od punktów przecięć E i F prostej EF; więc daje punkt M wtedy nawet gdy prosta AE nie spotyka koła O. Jakoż, ostatnie równanie pokazuje że punkt M jest przecięciem prostej AH z kołem przechodzącem przez trzy wiadome punkta C, D, H. Dlatego też punkt zewnętrzny N, w którym prosta AK przecina koło C, D, K, należy do tego samego miejsca co punkt wewnętrzny M względem koła O.

Określenie. — Punkt A nazywa się *biegunem* prostej BE, a zaś prosta BM *biegunową* punktu A *względem koła.*

Biegun A i spodek B biegunowej BM dzielą harmonicznie średnicę CD, i są związane, jako wiadomo, równaniem

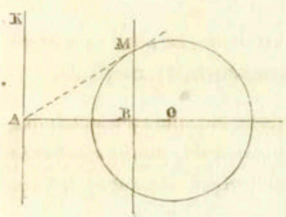
$$AO \, . \, BO = R^2,$$

które dowodzi że biegun i biegunowa względem koła leżą z jednej strony jego środka. Zatem:

1° Jeśli biegun leży zewnątrz koła, jego biegunowa przecina koło, i jest cięciwą zetknięć dwóch stycznych które przez ten punkt przechodzą, jako pokazuje pierwsza figura. Albowiem, gdy poprzeczna AEF staje się styczną, punkta przecięć E i F, a tem samem punkt M między niemi zawarty, schodzą się w punkcie zetknięcia; więc ten punkt należy do biegunowej punktu A.

2° Jeśli biegun leży wewnątrz koła O, jego biegunowa jest zewnątrz, i tem dalej od środka O im bliżej niego ten biegun. Więc *biegunowa środka koła jest od niego nieskończenie oddalona; a biegunową punktu, który się nieskończenie oddala od środka koła w pewnym kierunku, jest średnica koła prostopadła do tego kierunku.* I NAWZAJEM.

3° Jeśli biegun leży na okręgu, jego biegunowa jest styczną koła w tym punkcie; i nawzajem, biegunem stycznej jest punkt zetknięcia.

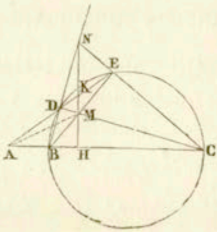


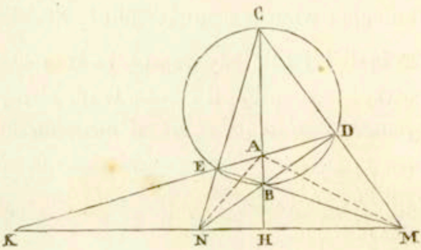
Uwaga. — Opierając się na równaniu $AO \, . \, BO = \overline{R}^2$, łatwo za pomocą stycznych wyznaczyć biegunowę danego punktu, albo biegun danej prostej. I tak, jeśli dany jest biegun A, łączymy go ze środkiem koła O, prowadzimy styczną AM, i z punktu zetknięcia M spuszczamy na AO prostopadłę MB która jest biegunową punktu A. Jeśli zaś punkt B jest danym biegunem, łączymy BO, prowadzimy prostopadłę BM do BO i potem styczną MA która przecina BO w punkcie A; prostopadła AK do BO jest biegunową punktu B. Nawzajem, mając daną biegunowę BM, spuszczamy na nią, ze środka koła O, prostopadłę OB, i wyprowadzamy z punktu przecięcia M styczną MA aż do spotkania A z prostą BO; punkt A jest biegunem prostej BM. Tak samo, mając biegunowę AK, spuszczamy na nią prostopadłę OA, prowadzimy styczną AM, i spuszczamy na OA prostopadłę MB która wyznacza biegun B.

Te wykreślenia, chociaż nie najprostsze, są bardzo użyteczne w dowodzeniach; bo, w części myślą wykonane, wskazują położenie biegunowej albo bieguna.

Twierdzenie XII.

Jeśli przez punkt A *płaszczyzny koła poprowadzono dwie jakiekolwiek poprzeczne* ABC, ADE, *i połączono przecięcia liniami prostemi* BE *i* CD, BD *i* CE, *które się spotykają w punktach* M *i* N, *miejscem geometrycznem punktów* M *i* N *jest biegunowa punktu* A.





Jakoż, w czworoboku zupełnym NDMECB, układy AHBC AKDE są harmoniczne (10, *wn*); więc punkta M i N należą do biegunowej punktu A.

Uwaga.—To twierdzenie daje łatwy sposób kreślenia, za pomocą samego liniału, biegunowej punktu względem koła, a temsamem stycznej koła.

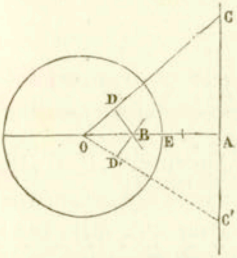
II. — W trójkącie AMN każdy bok jest oczywiście biegunową wierzchołka przeciwległego. Więc, *w czworokącie wpisanym w koło, punkt spotkania przekątnych i punkta spotkań boków przeciwległych stanowią trójkąt którego każdy wierzchołek jest biegunem boku przeciwległego.*

Temu twierdzeniu odpowieda następujące: *w czworoboku zupełnym opisanym na kole, trzy przekątne tworzą trójkąt którego każdy wierzchołek jest biegunem boku przeciwległego.*

Dowiedzie się tego twierdzenia uważając że, jeśli przez punkt płasczyzny koła poprowadzono sieczną i w punktach jej przecięcia styczne, punkt spotkania tych stycznych leży na biegunowej punktu A.

Twierdenie XIII.

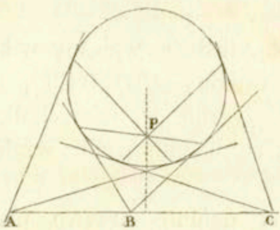
Biegunowe punktów leżących na linii prostej przechodzą przez biegun tej linii. I naodwrót, *bieguny linij prostych przechodzących przez jeden punkt leżą na biegunowej tego punktu.*

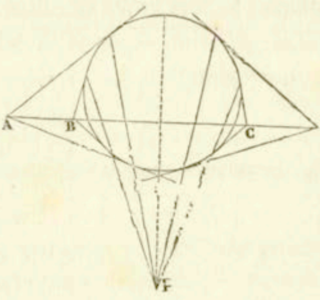


Jakoż, biegun linii prostej jest sprzężony harmoniczny wszystkich jej punktów względem koła. Więc biegunowe punktów prostej AC przechodzą przez jej biegun B; i nawzajem, bieguny linij prostych przechodzących przez punkt B leżą na biegunowej AC tego punktu.

Wniosek I. — *Biegunowa punktu przecięcia dwóch prostych przechodzi przez bieguny tych linij, a biegun linii prostej jest przecięciem biegunowych dwóch jej punktów.*

Wniosek II. — Jeśli z różnych punktów linii prostej poprowadzono dwojany stycznych do koła, cięciwy zetknięć przechodzą przez biegun tej linii.





Nawzajem, jeśli przez jeden punkt poprowadzono różne sieczne do koła, wtedy styczne w punktach przecięć każdej siecznej spotykają się na biegunowej tego punktu.

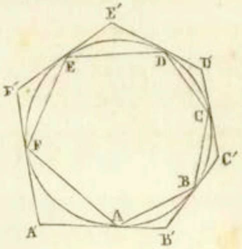
Uwaga. — Punkta i linie proste sprzężone względem koła. Nazywa się *punktami sprzężonemi* względem koła dwa punkta takie, których biegunowa jednego przechodzi przez drugi. Widzimy zaraz że dwa pnnkta sprzężone wzgledem kola są *sprzężone harmoniczne* względnie do dwóch punktów przecięć (rzeczywistych albo urojonych) koła z linią prostą na której te punkta leżą,

Mówi się podobnie że *dwie linie proste są sprzężone* względem koła, gdy biegun jednej znajduje się na drugiej. Ztąd i z określenia pęku harmonicznego wynika że, dwie proste sprzężone względem kola są *sprzężone harmoniczne* względnie do dwóch stycznych koła, poprowadzonych przez punkt spotkania tych prostych.

BIEGUNOWF WZAJEMNE.

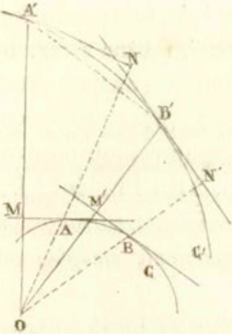
Mając dany wielokąt ABCD, jeśli weźmiemy bieguny A′, B′, C′, D′ boków AB, BC, CD, DA względem jakiegokolwiek koła O. utworzymy drugi wielokąt A′B′C′D′ którego boki A′B′, B′C′, C′D′, D′A′ będą nawzajem biegunowemi wierzchołków A, B, C, D pierwszego wielokąta (13). Można więc uważać drugi wielokąt jako utworzony z pierwszego, biorąc biegunowe jego wierzchołków. Naodwrót, jeśli weźmiemy bieguny boków drugiego wielokąta, albo biegunowe jego wierzchołków, powrócimy do pierwszego wielokąta.

Dwa takie wielokąty nazywają się *biegunowemi wzajemnemi*, względem koła O które nazwano *kołem pomocniczem*.



Wielokąt ABCDEF wpisany w koło i wielokąt opisany A′B′C′D′E′F′, mający boki styczne w wierzchołkach wpisanego, są biegunowemi wzajemnemi.

Uważajmy ogólnie krzywę płaską ABC... i wyznaczmy, względem jakiegokolwiek koła leżącego na jej płaszczyznie, bieguny A′, B′, C′... stycznych AM, BM′... ; otrzymamy



drugą krzywę A'B'C'..., której styczne A'N, B'N'.., będą nawzajem biegunowemi punktów zetknięć A, B,.. pierwszej. Jakoż, biegunową punktu przecięcia M' stycznych AM i BM' jest cięciwa A'B'; a gdy punkt B dąży do punktu sąsiedniego A, punkt M' dąży do niego także, nie przestając być ciągle biegunem cięciwy A'B'. Owoż, gdy punkt B schodzi się z A, punkt M' schodzi się z nim także, i cięciwa A'B' staje się styczną w punkcie A'; zatem styczna w punkcie A' jest biegunową punktu zetknięcia A. Można więc uważać krzywę A'B'C'.. jako otrzymaną biorąc bieguny stycznych albo biorąc biegunowe punktów pierwszej krzywej ABC... W ostatnim razie mówi się że krzywa A'B'C'... jako *miejsce geometryczne stycznych*, jest ich *owłoką*. Naodwrót, jeśli weźmiemy bieguny stycznych albo biegunowe punktów drugiej krzywej, powrócimy do pierwszej.

Dwie takie krzywe nazywają się *biegunowemi wzajemnemi* względem koła pomocniczego O. Ze sposobu jakim się tworzy biegunowe wzajemne wynika że, biegunową wzajemną koła spółśrodkowego z kołem pomocniczem jest inne koło spółśrodkowe; zatem koło pomocnicze jest samo swoją biegunową wzajemną.

Zobaczmy teraz w czem teorya biegunowych wzajemnych może stanowić geometryczną metodę. Otoż, uważajmy że biegunowa wzajemna danej figury jest jej figurą *spółwzględną*, w której *punkta* i *linie* proste zastępują *linie proste* i *punkta* danej; to jest: punktom leżącym w linii prostej w pierwszej figurze odpowieda pęk linij prostych w drugiej, i nawzajem; a ciągowi punktów na linii krzywej w pierwszej figurze odpowieda ciąg stycznych w drugiej; tak że punkt przecięcia dwóch albo kilku krzywych jest zastąpiony przez styczną spólną krzywym odpowiedającym. Zatem, wszelka własność *opisowa*, to jest zależąca od położenia linij nie zaś od ich wielkości, prowadzi odrazu do odpowiedającej własności figury biegunowej wzajemnej, tak że się otrzymuje jej wysłowienie, na mocy tego co poprzedza, prostą zamianą wyrazów *punkt* i *linia* na *linię* i *punkt*.

I tak, wiedząc że *w sześciokącie wpisanym w koło, boki przeciwległe spotykają się we trzech punktach w linii prostej*, można zaraz, bez żadnego dowodzenia, uważając tylko że biegunową wzajemną tego wielokąta jest sześciokąt opisany A'B'C'D'E'F' (*figura powyższa*), którego przekątne A'D', B'E', C'F' są biegunowemi punktów przecięcia boków przeciwległych FA i ED, AB i DE, BC i E'F, wnieść twierdzenie spółwzględne: *w sześciokącie opisanym na kole trzy przekątne łączące wierzchołki przeciwległe spotykają się w jednym punkcie.*

Tym właśnie sposobem Brianchon wywiódł to twierdzenie z twierdzenia Paskala. Oba twierdzenia i ich wnioski są spółwzględnemi nie tylko w kole ale jeszcze w liniach stożkowych.

Jako widzimy, biegunowe wzajemne, są metodą *przekształcenia opisowych* własności figur. Można także przekształcić własności *miarowe*. Wiele takich przekształceń otrzymuje się za pomocą następujących twierdzeń.

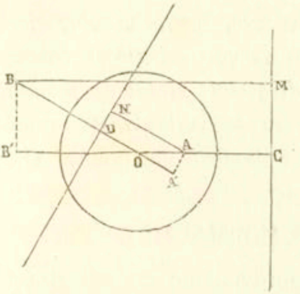
1° *Kąt dwóch linij prostych równa się kątowi dwóch linij które łączą ich bieguny ze środkiem koła pomocniczego.* Bo te kąty mają ramiona odpowiednio prostopadłe.

Ztąd wynika że *stosunek nieharmoniczny czterech stycznych koła równa się stosunkowi nieharmonicznemu czterech punktów zetknięć.* Albowiem punkta zetknięć są biegunami stycznych.

2° *Stosunek nieharmoniczny czterech punktów w linii prostej, w jednej figurze, równa się stosunkowi nieharmonicznemu czterech biegunowych odpowiedających w drugiej figurze.* Bo ten pęk i pęk otrzymany łącząc cztery rzeczone punkta ze środkiem koła pomocniczego mają kąty odpowiednio równe.

3° *Stosunek* $\frac{AO}{BO}$, *odległości dwóch punktów* A *i* B *od środka koła* O, *równa się stosunkowi* $\frac{AN}{BM}$, *odległości każdego z tych punktów od biegunowej drugiego* (*).

(*) Twierdzenie Pa. Salmon znakomitego matematyka angielskiego.



Niech będą CM i DN biegunowe punktów A i B względem koła O. Mamy

$$OA.OC = R^2 = OB.OD;$$

$$\text{zkąd}\quad \frac{OA}{OB} = \frac{OD}{OC}.$$

Owoż, spuśćmy prostopadłę AA′ na OB, i BB′ na OA; dwa trójkąty prostokątne OAA′, OBB′ podobne dają

$$\frac{OA}{OB} = \frac{OA'}{OB'}.$$

Zatem $\dfrac{OA}{OB} = \dfrac{OD}{OC} = \dfrac{OA'}{OB'} = \dfrac{OD + OA'}{OC + OB'}$. Więc $\dfrac{AO}{BO} = \dfrac{AN}{BM}$.

Jeśli teraz chcemy przekształcić twierdzenie: *W trójkącie dwójsieczne kątów spotykają się w jednym punkcie*, uważamy że bieguny tych dwójsiecznych są w linii prostej. Owoż, niech będzie A′B′C′ trójkąt biegunowy wzajemny trójkąta ABC względem koła O; widzimy łatwo że biegun dwójsiecznej AD leży na boku B′C′ jako na biegunowej wierzchołka A, i na dwójsiecznej kąta B′OC′ (1°). Ztąd wnosimy zaraz następujące twierdzenie

Jeśli połączymy punkt O *płaszczyzny trójkąta* A′B′C′ *z jego wierzchołkami, dwójsieczne dwóch kątów jako* A′OB′, B′OC′, *i dwójsieczna spełnienia trzeciego kąta* C′OA′, *przecinają boki przeciwległe we trzech punktach na linii prostej.*

Można za pomocą twierdzenia 2° przekształcić stosunek $\dfrac{CA}{CB}$ dwóch odcinków utworzonych przez trzy punkta A, B, C w linii prostej. Jakoż, wprowadźmy czwarty punkt D, leżący w linii prostej ze trzema danemi, ale nieskończenie oddalony; oznaczając przez $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ punkta w których jakakolwiek poprzeczna przecina biegunowe czterech punktów A, B, C, D (8, wn), będzie

$$\frac{CA}{CB} : 1 = (ABC\infty) = (\alpha\beta\gamma\delta) = \frac{\gamma\alpha}{\gamma\beta} : \frac{\delta\alpha}{\delta\beta}$$

Nakoniec, dla zastosowania twierdzenia 3°, dowiedźmy następującego.

Twierdzenie (*). *W każdym czworoboku wpisanym w koło, wieloczyn odległości jakiegokolwiek punktu okręgu od dwóch boków przeciwległych równa się wieloczynowi odległości tego samego punktu od dwóch innych boków.* Oznaczając przez M jakikolwiek punkt okręgu, a przez ME,MF, MG, MH jego odległości od boków AB, BC, CD, DA, mamy najpierwej tosamość

$$(\mathrm{MA}.\mathrm{MB})(\mathrm{MC}.\mathrm{MD}) = (\mathrm{MB}.\mathrm{MC})(\mathrm{MA}.\mathrm{MD}),$$

w której nawiasy są odpowiednio proporcyonalne do odległości ME, MG, MF, MH (III, 22); więc

$$\mathrm{ME}.\mathrm{MG} = \mathrm{MF}.\mathrm{MH}. \qquad (1)$$

Jeśli teraz chcemy przekształcić to twierdzenie za pomocą biegunowych wzajemnych, uważajmy że czworokątowi wpisanemu ABCD odpowieda czworokąt opisany A′B′C′D′, a punktowi M styczna MT w tym punkcie; i niech będą A′*a*, B′*b*, C′*c*, D′*d* odległości wierzchołków A′, B′, C′, D′ od stycznej MT. Ponieważ A′ jest biegunem boku AB względem koła O, a zaś M biegunem stycznej MT, będzie, na mocy twierdzenia 3°,

$$\frac{\mathrm{MO}}{\mathrm{A'O}} = \frac{\mathrm{ME}}{\mathrm{A'}a}; \qquad \text{zkąd} \qquad \mathrm{ME} = \frac{\mathrm{MO}}{\mathrm{A'O}}\cdot \mathrm{A'}a.$$

Ostatnia równość pokazuje że odległości ME, MF, MG, MH są proporcyonalne do $\frac{\mathrm{A'}a}{\mathrm{A'O}}$, $\frac{\mathrm{B'}b}{\mathrm{B'O}}$, $\frac{\mathrm{C'}c}{\mathrm{C'O}}$, $\frac{\mathrm{D'}d}{\mathrm{D'O}}$; więc, podstawiając te wartości w równaniu (1), otrzymamy

$$\frac{\mathrm{A'}a\,.\,\mathrm{C'}c}{\mathrm{B'}b\,.\,\mathrm{D'}d} = \frac{\mathrm{A'O}\,.\,\mathrm{C'O}}{\mathrm{B'O}\,.\,\mathrm{D'O}}.$$

To równanie dowodzi twierdzenia: *W czworoboku opisanym na kole, wieloczyn odległości dwóch wierzchołków przeciwległych od stycznej jakiejkolwiek, ma się do wieloczynu odległości dwóch innych wierzchołków od tej samej stycznej w stosunku stałym.*

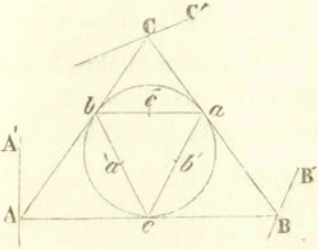
Dowiedziemy później wprost tego twierdzenia.

Teorya biegunowych wzajemnych nastręcza czasem sposób przemiany jednej kwestyi na drugą. I tak, jeśli chcemy

* Twiedzenia *Pappusa.*

Na danem kole opisać trójkąt ABC *którego wierzchołki mają leżeć na trzech prostych danych* AA′, BB′, CC′;

zadanie może się przemienić na następujące :



W dane koło wpisać trójkąt abc *któregoby boki przechodziły przez trzy punkta* a′, b′, c′, bieguny linij danych.

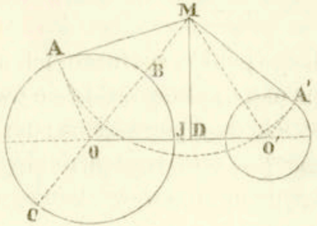
I w samej rzeczy, prosta *bc*, jako biegunowa punktu A, zawiera biegun prostej AA′; podobnie, prosta *ac* zawiera biegun prostej BB′; a nakoniec prosta *ab* zawiera biegun prostej CC′.

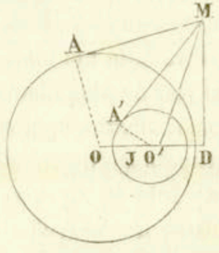
Biegunowe wzajemne, jakkolwiek do pięknych doprowadziły wyników, szczególniej w *liniach stożkowych* (Geometrya analityczna), nie stanowią jednak metody poszukiwań ; bo ani pokazują związku między znalezionemi twierdzeniami i ogólną teoryą figur, ani naprowadzają na sposób dowodzenia wprost tych twierdzeń i ich następstw.

OŚ PIERWIASTNA.

Twierdzenie XIV.

Miejsce geometryczne punktów równej potęgi względem dwóch kół O, O′ *jest linia prosta prostopadła do linii środków* OO′.





Wiemy już co znaczy *potęga punktu względem koła* (III, 21 uw.). Niech będą dwa koła O i O′ promieni R i R′, M punkt szukanego miejsca. Potęgi punktu M względem tych dwóch kół są odpowiednio $\overline{MO}^2 - R^2$ i $\overline{MO'}^2 - R'^2$; więc

$$\overline{MO}^2 - R^2 = \overline{MO'}^2 - R'^2, \quad \text{albo} \quad \overline{MO}^2 - \overline{MO'}^2 = R^2 - R'^2$$

przypuszczając $R > R'$. To pokazuje że miejscem punktu M jest prosta MD prostopadła do linij środków OO′ (III, 19 wn. 2).

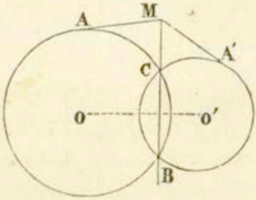
Nadto, odległość prostopadłej MD od środka koła O jest

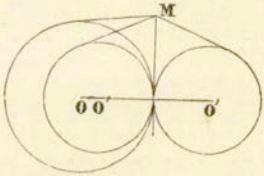
$$OD = \frac{OO'}{2} + \frac{R^2 - R'^2}{2OO'};$$

co dowodzi że prostopadła MD jest bliżej środka O′ koła mniejszego niż środka O koła większego.

Określenie. — *Linię prostą* MD, *miejsce geometryczne punktów równej potęgi względem dwóch kół*, *nazwano osią pierwiastną tych kół.*

Z twierdzenia i powyższych równań wynika że: 1° *Oś pierwiastna dwóch kół albo spotyka oba koła w tych samych punktach, albo nie spotyka żadnego.* 2° *Oś pierwiastna dwóch kół równych przechodzi przez środek linii środków tych kół.* 3° *Oś pierwiastna dwóch kół spółśrodkowych znika w nieskończoności.* Zatem,





Gdy dwa koła nie mają żadnego punktu spólnego, ich oś pierwiastna jest między niemi i zewnątrz każdego. Gdy się dwa koła przecinają, sieczna spólna jest ich osią pierwiastną; bo potęga punktu spólnego dwom okręgom jest zero względem obydwóch. Gdy dwa koła są styczne zewnętrznie albo wewnętrznie, ich osią pierwiastną jest oczywiście styczna w punkcie spólnym.

Wniosek. — Gdy punkt leży zewnątrz koła, jego potęga względem koła równa się kwadratowi stycznej wychodzącej z tego punktu, to jest $\sqrt{MB.MC} = MA$; więc *oś pierwiastna dwóch kół jest miejscem punktów z których można prowadzić styczne równe do tych kół.* Ztąd właśnie pochodzi nazwisko tej linii.

Środki stycznych spólnych dwom kołom leżą oczywiście na osi pierwiastnej tych kół.

Wynika z powyższego wniosku że,

Oś pierwiastna dwóch kół jest miejscem środków kół które je przecinają prostokątnie.

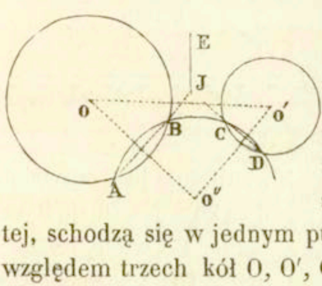
Jakoż, styczne MA i MA′ są równe a kąty A i A′ są proste. Nawzajem, ponieważ koła O i O′ przecinają prostokątnie koła M, M′,.. mające środki na ich osi pierwiastnej, linia środków OO′ jest osią pierwiastną kół M, M′,...

Nadto, jeśli koła O i O′ nie mają punktu spólnego, koła M, M′, spotykają linię środków OO′ w dwóch punktach stałych E i F które dzielą harmonicznie średnicę każdego z kół O i O′ (8, wn.).

Uwaga. — Z tego co poprzedza łatwo wnosimy że biegunowa dwóch kół jest bliżej większego okręgu niż mniejszego.

Twierdzenie XV.

Osie pierwiastne trzech kół, uważanych po dwa, spotykają się w jednym punkcie.



Jakoż, niech będzie EJ oś pierwiastna kół O i O′, a zaś AB oś pierwiastna kół O i O′. Te dwie osie są prostopadłe doodpowiednych linij środków OO′ i OO″, zatem, jeśli trzy środki O, O′, O″ nie są w linii prostej, schodzą się w jednym punkcie J który ma tę samą potęgę względem trzech kół O, O′, O″. Więc punkt J leży na osi pierwiastnej dwóch kół O′ i O″, to jest osie pierwiastne trzech kół przechodzą przez jeden punkt J.

Określenie. — Punkt spotkania osi pierwiastnych trzech kół nazywa się *środkiem pierwiastnym* tych kół.

Gdy środki trzech kół są w linii prostej, ich osie pierwiastne są równoległe, i środek pierwiastny oddala się w nieskończoność.

Środek pierwiastny trzech kół, jeśli leży zewnątrz, jest jedynym punktem z którego można prowadzić styczne równe do tych trzech kół, i przeto jest środkiem jedynego koła które je może przecinać prostokątnie.

Środek pierwiastny służy do wykreślenia osi pierwiastnej dwóch kół danych O, O'. Jakoż, jeśli przetniemy te koła trzeciem O'' ; cięciwy spólne AB, CD spotkają się we środku pierwiastnym J trzech kół. Więc prostopadła EJ do linii środków OO' jest osią pierwiastną kół O, O'.

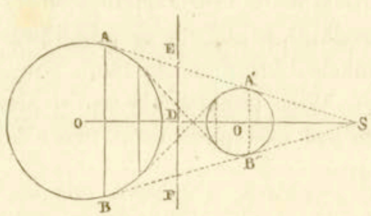
Uwaga. — Jedno z kół może, malejąc, stać się punktem. Aby znaleźć oś pierwiastną punktu i koła, dość nakreślić koło sieczne przechodzące przez ten punkt, i poprowadzić w nim styczną koła, której przecięcie ze spólną sieczną dwóch kół wyznaczy jeden punkt szukanej osi pierwiastnej, etc. Jeśli punkt leży zewnątrz danego koła, dość wyprowadzić z tego punktu styczną do koła ; środek stycznej będzie jednym z punktów szukanej osi pierwiastnej, etc. Zatem osią pierwiastną dwóch punktów jest prostopadła wyprowadzona ze środka linii która je łączy.

Osią pierwiastną koła i linii prostej jest ta sama linia prosta ; bo można uważać linię prostą, w danym punkcie, jako granicę *łuku koła* którego promień, rosnąc coraz bardziej, staje się nieskończenie wielkim.

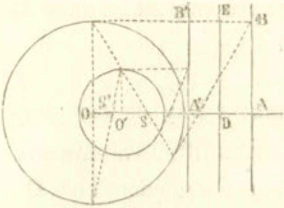
Ztąd wnosimy że oś pierwiastna punktu i linii prostej jest tą samą linią prostą.

Twierdzenie XVI.

Oś pierwiastna dwóch kół jest równo oddalona od dwóch biegunowych którego kolwiek środka podobieństwa.



Twierdzenie jest oczywiste gdy dwa koła dane mają styczne spólne. Bo wtedy oś pierwiastna DE, przechodząc przez środek stycznych AA', BB', jest równo oddalona od biegunowych AB, A'B', środka podobieństwa S ; etc.



Uważajmy dwa koła wewnętrzne O, O'. Niech będzie DE oś pierwiastna; S jeden ze środków podobieństwa, AB i A'B' jego biegunowe względem tych kół. Mamy

$$\mathrm{OD} = \frac{\mathrm{OO'}}{2} + \frac{\mathrm{R}^2 - \mathrm{R'}^2}{2\mathrm{OO'}}, \qquad (14)$$

$$\frac{\mathrm{R}}{\mathrm{SO}} = \frac{\mathrm{R'}}{\mathrm{SO'}}, \quad \text{i} \quad \mathrm{OS} \times \mathrm{OA} = \mathrm{R}^2, \quad \mathrm{O'S} \times \mathrm{O'A'} = \mathrm{R'}^2 \quad (11).$$

Zatem $\frac{\mathrm{R}}{\mathrm{SO}} = \frac{\mathrm{R'}}{\mathrm{SO'}} = \frac{\mathrm{OA}}{\mathrm{R}} = \frac{\mathrm{O'A'}}{\mathrm{R'}}$; zkąd $\frac{\mathrm{R}-\mathrm{R'}}{\mathrm{SO}-\mathrm{SO'}} = \frac{\mathrm{OA}+\mathrm{O'A'}}{\mathrm{R}+}$

albo

$$\frac{\mathrm{R}^2 - \mathrm{R'}^2}{\mathrm{OO'}} = \mathrm{OA} + \mathrm{O'A'}.$$

Więc, podstawiając, otrzymujemy

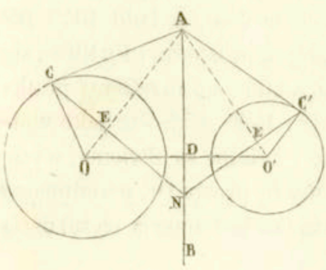
$$\mathrm{OD} + \frac{\mathrm{OO'}}{2} = \frac{\mathrm{OA} + \mathrm{O'A'}}{2} = \frac{\mathrm{OA} + \mathrm{OA'}}{2}.$$

Co dowodzi że oś pierwiastna DE jest równo oddalona od biegunowych AB i A'B' jednego ze środków podobieństwa S.

Uwaga. — Gdy jedno z kół *np.* O' staje się punktem, oś pierwiastna punktu O' i koła O jest równo oddalona od tego punktu i od jego biegunowej względem koła O; bo można uważać punkt O' jako granicę koła O' którego promień maleje aż do zera.

Twierdzenie XVII.

Biegunowe punktu wziętego na osi pierwiastnej dwóch kół przecinają się na tej osi.



Niech będzie AB oś pierwiastna dwóch kół O, O', która przecina linię ich środków w punkcie D. Uważajmy biegunowę EN punktu A osi pierwiastnej względem koła O, i niech będzie N punkt jej przecięcia z tą osią.

W kącie DAO proste DO i EN są przeciwrównoległe, i dają

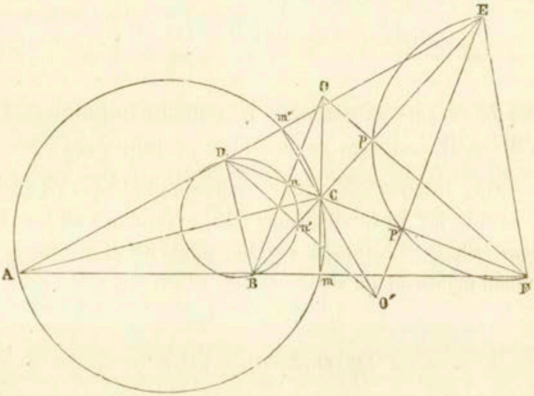
$$AD \,.\, AN = AO \,.\, AE = \overline{AC}^2 = \overline{AO}^2 - R^2.$$

Owoż $\overline{AO}^2 - R^2 = \overline{AO'}^2 - R'^2$, bo punkt A leży na osi pierwiastnej kół O i O′; zatem $AD \,.\, AN = \overline{AO'}^2 - R'^2$. To dowodzi że punkt N należy do biegunowej punktu A względem koła O′. Więc obie biegunowe punktu A spotykają oś pierwiastną AB w jednym punkcie N.

Gdy dwa koła są styczne, twierdzenie jest przez się widoczne.

Twierdzenie XVIII.

Koła, nakreślone na trzech przekątnych czworoboku zupełnego jako średnicach, mają tę samą oś pierwiastną.



Niech będą, w czworoboku zupełnym ABCDEF, trzy koła nakreślone na przekątnych AC, BD, EF jako średnicach, które przecinają boki DE i BF w punktach m i m', a boki BE i DF w punktach n', p, i n, p'. Poprowadźmy proste Bn i Fp które się przetną w punkcie O, i proste Dn', Ep' które się przetną w punkcie O′. Teraz, uważając że kąty BnD i EpF są proste jako wpisane w półkola, widzimy że proste Fn i Bn są dwiema wysokościami trójkąta OBF; ztąd wnosimy że prosta OC przedłużona przechodzi przez punkt m, i prosta Om jest trzecią wysokością trójkąta OBF.

Owoż, w kącie BOF poprzeczne Bp i Fn są przeciwrównoległe i dają
$$OB \,.\, On = OF \,.\, Op.$$
Tak samo w kącie BOm, przeciwrównoległe Bm i Cn dają
$$OB \,.\, On = OC \,.\, Om.$$
Więc
$$OC \,.\, Om = OB \,.\, On = OF \,.\, Op.$$
Co dowodzi że punkt O ma równą potęgę względem trzech kół AC, BD, EF.

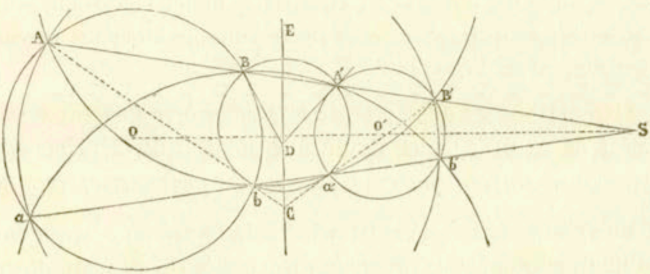
Dowiedzie się podobnie że punkt O′ ma także równą potęgę względem tych samych kół. Więc prosta OO′ jest spólną osią pierwiastną trzech kół AC, BD, EF.

Ztąd wynika że w czworoboku zupełnym, środki trzech przekątnych są w linii prostej. Co już wiemy.

Uwaga. — Można dać inne wysłowienie twierdzenia, mówiąc że: trzy koła, nakreślone na przekątnych czworoboku zupełnego, mają zawsze dwa punkta spólne, rzeczywiste albo urojone.

Twierdzenie XIX.

Jeśli przez jeden ze środków podobieństwa dwóch kół, poprowadzono dwie sieczne, wtedy: 1° każde dwa dwojany punktów przeciwodpowiednych leżą na jednym okręgu; 2° dwie cięciwy przeciwodpowiedne przecinają się na osi pierwiastnej.



Niech będzie S jeden ze środków podobieństwa dwóch kół O, O′; CD ich oś pierwiastna. Punkta A i A′, leżące na promieniu wodzącym SA i na promieniach równoległych OA i O′A′, są odpowiedne: tak samo punkta B i B′ są odpowiedne. Dlatego punkta nieodpowiedne A i B′ nazwano *przeciwodpowiednemi* albo *wzajemnemi* ; podobnie punkta B i A′ są także przeciwodpowiedne. Cięciwa Ab koła O, i cięciwa B′a' koła O′ która łączy punkta przeciwodpowiedne skrajnością pierwszej, nazywają się *cięciwami przeciwodpowiednemi* albo *wzajemnemi ;* tak samo cięciwy Ba i A′b', etc., są przeciwodpowiedne.

1° Nazywając R i R′ promienie dwóch kół O i O′, środek podobieństwa S daje

$$\frac{SA}{S'A'}=\frac{R}{R'}=\frac{SB}{SB'}=\frac{Sa}{Sa'}=\frac{Sb}{Sb'};$$

ale w kole O′ mamy

$$SA'.SB'=Sa'.Sb';$$

więc, mnożąc stronami , otrzymujemy

$$SA.SB'=Sa.Sb'.$$

To pokazuje że dwojany punktów przeciwodpowiednych A i B′, a i b' leżą na jednym okręgu.

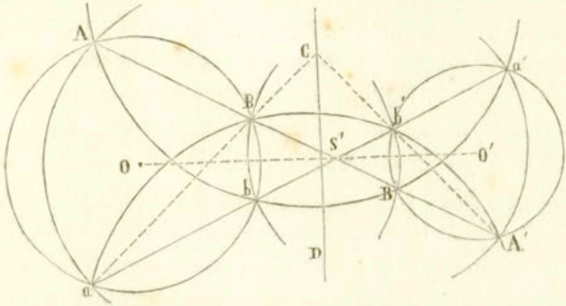
Tak samo dowodzi się że cztery punkta przeciwodpowiedne B, A′, b, a' leżą na jednym okręgu, jako też punkta A, b, a', B′ i a, B, A′, b'.

Te cztery koła nazywają się *kołami wzajemnemi*

2° Cięciwy przeciwodpowiedne Ab i B′a' przecinają się na osi pierwiastnej CD kół O i O′ ; albowiem, będąc cięciwami jednego z kół wzajemnych, przecinają się w punkcie który ma równą potęgę wzgiędem kół O i O′.

Ztąd wynika że *dwie styczne w punktach przeciwodpowiednych dwóch kół* O i O′, będąc granicami położeń dwoch cięciw przeciwodpowiednych, *przecinają się na osi pierwiastnej tych kół.*

Powyższa figura przedstawia koła wzajemne względne do środka podobieństwa prostego dwóch kół O i O′ ; ale dowodzenie jest ogólne, i stosuje się do kół wzajemnych względem środka podobieństwa odwrotnego tych kół. Figura poniżej wskazuje cztery koła wzajemne względem środka S′, to jest AaB′b, BbA′a', AbB′a', aBb'A′.



Wniosek. — Osie pierwiastne czterech kół wzajemnych przechodzą przez jeden środek podobieństwa kół O i O′ (15). Zatem *każdy ze środków podobieństwa dwóch kół jest środkiem pierwiastnym czterech kół wzajemnych które mu odpowiedają.*

II. — *Wszelkie koło styczne* X *do dwóch kół* O *i* O′, *jest jednem z kół wzajemnych.* Jakoż, punkt zetknięcia kół X i O jest ich środkiem podobieństwa; tak samo, punkt zetknięcia kół X i O′ jest także ich środkiem podobieństwa. Więc linia zetknięć koła X z kołami O i O′ jest osią podobieństwa tych trzech kół, to jest przechodzi przez środek pobobieństwa kół O i O′. Więc koło Z, styczne do kół O i O′, jest ich kołem wzajemnem.

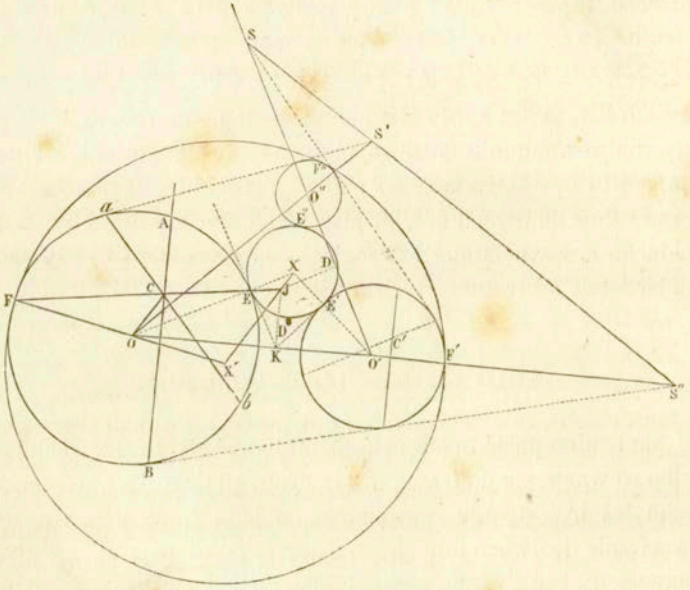
Uwaga. — Trzeba uważać że dwa koła styczne *jednakowo* do dwóch kół, to jest każde styczne zewnętrznie do obydwóch albo styczne wewnętrznie do obydwóch, odpowiedają środkowi podobieństwa prostego tych kół; a zaś przeciwnie, dwa koła styczne *różnie* do dwóch kół, to jest każde styczne zewnętrznie do jednego a wewnętrznie do drugiego, odpowiedają środkowi podobieństwa odwrotnego tych dwóch kół.

KOŁO STYCZNE DO TRZECH KÓŁ.

Nie trudno pojąć że jedno koło może być styczne zewnętrznie albo wewnętrznie do trzech kół danych, co daje dwa położenia; albo też być styczne zewnętrznie do jednego ze trzech a wewnętrznie do dwóch innych, co daje trzy położenia; albo jeszcze, nawzajem, być styczne wewnętrznie do jednego a zewnętrznie do dwóch innych co daje także trzy położenia. To wszystko czyni razem *osiem* kół stycznych, które się rozdzielają na *cztery* następujące *dwojany:* 1° Koło X styczne zewnętrznie do trzech kół danych O, O′, O″, a koło X′ styczne wewnętrznie do tych kół. 2° Koło Y styczne zewnętrznie do kół O i O′ a wewnętrznie do koła O″, i koło Y′ styczne wewnętrznie do kół O i O′ a zewnętrznie do koła O″. 3° Koło Z styczne zewnętrznie do kół O i O″ a wewnętrznie do koła O′, i koło Z′ styczne wewnętrznie do kół O i O″ a zewnętrznie do koła O′. Nakoniec 4° Koło V styczne zewnętrznie do koła O a wewnętrznie do kół O′, O″, i koło V′ styczne wewnętrznie do koła O a zewnętrznie do kół O′, O″.

TWIERDZENIE XX.

Gdy dwa koła, styczne do trzech kół danych, należą do jednego dwojanu, wtedy, cięciwa zetknięć każdego z kół danych, 1° przechodzi przez środek pierwiastny tych kół, i 2° zawiera, względem swego koła, biegun osi podobieństwa odpowiedającej rzeczonemu dwojanowi.



Niech będą dwa koła X i X′ styczne do trzech kół O, O′, O″, pierwsze zewnętrznie w punktach E, E′, E″, a drugie wewnętrznie w punktach F, F′ F″. Powiedam że linia zetknięć EF, koła O z kołami X, X′, przechodzi przez środek pierwiastny J trzech kół O, O′, O″, i przez biegun jednej z ich osi podobieństwa wzięty względem koła O.

Jakoż, oś pierwiastna kół X i X′, z których każde jednakowo styczne do kół O i O′, przechodzi przez środek podobieństwa prostego S″ tych ostatnich; dla podobnej przyczyny ta sama oś pierwiastna przechodzi przez środek S′ podobieństwa prostego kół O i O″; więc oś podobieństwa prostego SS′ trzech kół O, O′, O″ jest osią pierwiastną kół X i X′ które ich dotykają jednakowo.

Nadto, ponieważ punkt zetknięcia E kół O i X jest ich środkiem podobieństwa odwrotnego, a punkt zetknięcia F kół O i X′ ich środkiem podobieństwa prostego, linia zetknięć EF jest osią podobieństwa odwrotnego trzech kół O, X, X′; zatem przechodzi przez środek podobieństwa odwrotnego kół X i X′. Ale oś pierwiastna kół O i O′, które są różnie styczne do kół X i X′, przechodzi także przez ich środek podobieństwa odwrotnego; i tak samo oś pierwiastna kół O i O″, różnie stycznych do kół X i X′, przechodzi przez ten sam środek podobieństwa. Ztąd wnosimy że środek pierwiastny J trzech kół O, O′, O″ leży na linii zetknięć EF, i także na linii środków XX′ która jest prostopadła do osi podobieństwa SS′.

Widzimy teraz że styczne w punktach zetknięć E i F koła O z kołami X i X′, wyznaczając środek pierwiastny tych trzech kół, przecinają się na osi podobieństwa SS′; bo ona jest osią pierwiastną kół X i X′. Ztąd wynika że biegun linii zetknięć EF leży na osi podobieństwa SS′ kół O, O′, O″; zatem nawzajem, biegun C tej osi względny do koła O leży na linii zetknięć EF, a temsamem linie XX′ i CO są równoległe (9).

Więc, jeśli przez biegun C, i przez środek pierwiastny J poprowadzimy linię prostą CJ, jej przecięcia z kołem O wyznaczą punkta zetknięć E i F tego koła z kołami X i X′; a jeśli jeszcze przez środek pierwiastny J poprowadzimy prostopadłę JX do osi podobieństwa SS′, przecięcia tej prostopadłej z promieniami zetknięć OE i OF wyznaczą środki kół X i X′ a następnie ich promienie XE i X'F. Znajdując tym sposobem środek i promień każdego z dwóch kół szukanych X i X', możemy je wykreślić odrazu.

Po tem co poprzedza, łatwo pojmujemy że, jeśli szukane koła jednego dwojanu są różnie styczne do trzech danych, trzeba uważać tę oś podobieństwa odwrotnego która przechodzi przez środek podobieństwa prostego dwóch kół dotkniętych jednakowo.

Zagadnienie III.

Nakreślić koła styczne do trzech kół danych.

Opierając się na powyższem twierdzeniu, przez środek pierwiastny trzech kół danych i przez biegun każdej ze czterech osi podobieństwa względem któregokolwiek z tych kół, poprowadź linie proste które, mówiąc ogólnie, wyznaczą *cztery* dwojany punktów zetknięć; potem, poprowadź jeszcze przez ten środek pierwiastny prostopadłę do każdej ze czterech osi podobieństwa; przecięcia tych prostopadłych z odpowiadającemi promieniami zetknięć wyznaczą środki i następnie promienie *ośmiu* kół stycznych. Jeśli nakoniec połączysz środki znalezionych kół stycznych ze środkami trzech kół danych, liniami prostemi, te linie wyznaczą wszystkie punkta zetknięć, i zagadnienie zostanie zupełnie rozwiązane.

Nie trzeba zapominać że zagadnienie ma tylko ogólnie osiem rozwiązań; ale w szczególnych położeniach kół może mieć mniej, a nawet nie mieć żadnego.

Uwaga. — To rozwiązanie zagadnienia *zupełne* i *wprost*, stosuje się wtedy nawet gdy koła stają się punktami albo liniami prostemi: zważając tylko że koło przywodzi się do punktu, gdy jego promień malejąc staje się nieskończenie małym: a zaś łuk koła staje linią prostą, gdy jego promień staje się nieskończenie wielkim. Na mocy tej uwagi, nie trudno znaleźć środek podobieństwa, oś pierwiastną i biegunowę w tych szczególnych przypadkach.

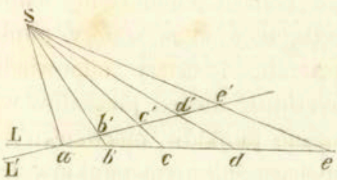
Powyższe rozwiązanie zagadnienia nie stosuje się do trzech kół których środki leżą w linii prostej; w tem położeniu kół trzeba użyć sposobów któreśmy na swojem miejscu podali.

PODZIAŁY JEDNOKREŚLNE.

Gdy dwie proste L i L′ są podzielone przez punkta $a, b, c,..$ i $a', b', c',..$ tak, że stosunek nieharmoniczny czterech jakichkolwiek punktów jednej równa się stosunkowi nieharmonicznemu odpowiedających punktów drugiej, mówi sie że proste L i L′ są podzielone *jednokreślnie* przez te punkta, które się nazywają *odpowiednemi* dwóch *podziałów jednokreślnych*.

Twierdzenie XXI.

Mając daną linię prostą L, *podzieloną w punktach* $a, b, c...$, *można podzielić jednokreślnie drugą prostę* L′ ; *ale tylko jednym sposobem, jeśli trzy punkta drugiej, odpowiedne trzem jakimkolwiek punktom pierwszej, są dane.*



Niech będzie linia prosta L, podzielona w punktach $a, b, c, d....$; jeśli chcemy podzielić jednokreślnie drugą linię L′, możemy wziąć na niej dowolnie trzy punkta a', b', c', za odpowiedne punktom a, b, c, i przystawić pod kątem linię L′ do L, tak żeby punkt a' padł na a; po czem, poprowadzić proste bb', cc', i połączyć punkt spotkania S z punktami d, e; albo, jeśli bb', cc' są równoległe, poprowadzić do nich równoległe przez punkta $d, e,..$ Te linie, w jednym albo w drugim razie, padzielą linię L′ jednokreślnie z linią L; albowiem w obydwóch razach stosunek nieharmoniczny czterech jakichkolwiek punktów $a', b', c', d', e'...$ równa się stosunkowi nieharmonicznemu czterech odpowiednych $a, b, c, d, e,..$ (1).

Powiedam teraz że niema innych punktów któreby dzieliły linię L′ jednokreślnie z linią L. Jakoż, przypuśćmy że w drugim podziale, jeśli istnieje, jest punkt d'' odpowiedny punktowi d; będzie, powtarzając to co poprzedza,

$$(a'b'c'd'') = (abcd) = (a'b'c'd').$$

Więc punkt d'' nie różni się od d'. Ztąd wnosimy że, gdy trzy punkta a', b', c' linii L' są dane za odpowiedne trzem punktom a, b, c linii L, istnieje tylko jeden podział jednokreślny linii L' z linią L. To się wyraża mówiąc że: *trzy dwojany punktów odpowiednych* (a, a'), (b, b'), (c, c') *wyznaczają jednokreślność dwóch podziałów.*

Wniosek I. — *Linie proste wychodzące z jednego punktu, albo równoległe, dzielą jednokreślnie wszelką poprzeczną.*

I nawzajem, *gdy dwie linie proste, podzielone jednokreślnie, mają punkt spólny odpowiedny w dwóch podziałach*, (jako punkt a na figurze powyższej), *wtedy linie łączące inne punkta odpowiedne podziałów schodzą się w jednym punkcie, albo są równoległe.*

II. — Zatem, *dwa podziały jednokreślne z trzecim są jednokreślne między sobą.*

Algebrycznie łatwo wyznaczyć podział jednokreślny dwóch linij prostych. Jakoż, niech będą a, b, c, m, cztery punkta leżące na jednej z dwóch prostych, i cztery odpowiedne a', b', c', m' na drugiej. Jednokreślność dwóch podziałów wymaga żeby stosunki nieharmoniczne punktów pierwszego podziału były równe stosunkom nieharmonicznym punktów drugiego; to jest, żeby było równanie:

$$(abcm) = (a'b'c'm') \qquad albo \qquad \frac{am}{ab} : \frac{cm}{cb} = \frac{a'm'}{a'b'} : \frac{c'm'}{c'b'},$$

które wyznacza jakikolwiek punkt m', gdy jego odpowiedny m i trzy dwojany a, a', b, b', c, c' są wiadome.

To równanie może się znacznie uprościć, jeśli wyrazimy że każdy z dwóch podziałów jednokreślnych ma jeden punkt w nieskończoności.

I tak:

1° Przypuszczając że dwa *punkta nieodpowiedne* b' i c są w nieskończoności, powyższe równanie stanie się

$$\frac{am}{a'm'} = \frac{ab}{c'm'} = \frac{ab - am}{m'a' - m'c'}; \qquad \text{ztąd} \qquad \frac{ab}{c'm'} = \frac{bm}{a'c'},$$

albo $$bm.\ c'm' = ab.\ a'c'.$$

Dla ogólności wyrażenia, oznaczmy przez I i J' dwa punkta których odpowiedne I' i J są w nieskończoności; zastępując b i c' przez I i J', będziemy mieli ogólnie

$$\mathrm{I}m\ .\ \mathrm{J}'m' = a\mathrm{I}\ .\ a'\mathrm{J}'. \qquad (1).$$

To proste równanie wyraża jednokreślność podziału dwóch linij prostych, i daje punkt m' w funkcyi dwojanu a, a' i punktów m, I, J'.

2° Jeśli przypuścimy że dwa *punkta odpowiedne* c i c' są oba w nieskończoności, będzie

$$\frac{am}{a'm'} = \frac{ab}{a'b'} \qquad (2)$$

To równanie znaczy że dwie linie proste są podzielone jednokreślnie na odcinki *proporcyonalne*.

Takie dwa podziały jednokreślne nazywają się *podobnemi*.

W przypadku szczególnym, gdy stosunek $\frac{ab}{a'b'} = \pm 1$, dwie linie proste są podzielone na odcinki odpowiedne *równe*. Wtedy mówi się że dwa podziały *jednokreślne* są *równe*, i idą w tę samą stronę albo w strony przeciwne, według jak stosunek dwóch odcinków odpowiednych jest dodatny albo odjemny.

Dwa równania (1) i (2) które wyznaczają dwa podziały jednokreślne na dwóch liniach prostych, mogą się zawrzeć w jednem równaniu. Jakoż, niech będzie a punkt stały na pierwszej prostej, b' punkt stały na drugiej; odnosząc do tych punktów odpowiedające odcinki Im, J'm', mamy

$$\mathrm{I}m = am - a\mathrm{I}, \qquad \mathrm{J}'m' = b'm' - b'\mathrm{J}'.$$

Jeśli więc podstawimy te wartości w równaniu (1), otrzymamy

$$am\ .\ b'm' - b'\mathrm{J}'.\ am - a\mathrm{I}\ .\ b'm' - a\mathrm{I}\ .\ a'b' = o$$

albo ogólniej

$$am.b'm' + \lambda.\, am + \mu\,.\, b'm' + \nu = o. \qquad (3)$$

Przekształcając tak samo równanie (2), znajdziemy

$$a'b'.\, am = ab\,(b'm' - b'a')$$

albo ogólniej

$$\alpha\,.\, am + \beta\,.\, b'm' + \gamma = o. \qquad (4)$$

Otrzymane równania (3) i (4) są oczywiście szczególnemi tylko przypadkami równania

$$\mathrm{A}\,.\, am\,.\, b'm' + \mathrm{B}\,.\, am + \mathrm{C}\,.\, b'm' + \mathrm{D} = o. \qquad (5)$$

Widzimy tedy że jednokreślność podziału dwóch linij prostych wyraża się równaniem które jest pierwszego stopnia na każdy z dwóch odcinków am i $b'm'$, względnych do jakiegokolwiek dwojanu pónktów odpowiednych m, m'.

Nawzajem. *Jeśli dwa odcinki am, $b'm'$, wzięte na dwóch liniach prostych poczynając od punktów stałych a, b', zadość czynią równaniu*

$$\mathrm{A}\,.\, am\,.\, b'm' + \mathrm{B}\,.\, am + \mathrm{C}\,.\, b'm' + \mathrm{D} = o.$$

dwa punkta m, m' będą tworzyły dwa podziały jednokreślne.

Jakoż, uważając najpierwej przypadek w którym spółczynnik A nie jest zero, możemy podzielić równanie przez A, i będzie

$$am\,.\, b'm' + \lambda\,.\, am + \mu\,.\, b'm' + \nu = o.$$

Przypuśćmy teraz punkt m w nieskończoności na pierwszej prostej, i nazwijmy J' położenie punktu odpowiednego m' na drugiej; dzieląc przez am i czyniąc $am = \infty$, otrzymamy

$$b'\mathrm{J}' + \lambda = o.$$

Przypuszczając podobnie że punkt m drugiej prostej jest w nieskończoności, i nazywając I punkt odpowiedny m' na pierwszej, znajdziemy

$$a\mathrm{I} + \mu = o$$

Aby wyznaczyć spółczynnik ν, uważajmy że, jeśli punkt m staje się a, jego odpowiedny m' staje się a'; wtedy odcinek $am = o$, a zaś $b'm' = b'a'$; zatem

$$\mu\,.\, b'a' + \nu = o \quad \text{albo} \quad \nu - a\mathrm{I}\,.\, b'a' = 0.$$

Jeśli więc podstawimy wartości trzech spółczynników λ, μ, ν, będziemy mieli

$$am \,.\, b'm' - b'J' \,.\, am - a\mathrm{I} \,.\, \mathrm{b'm'} - a\mathrm{I} \,.\, a'b' = o.$$

To równanie można pisać

$$(am - a\mathrm{I})\,(b'm' - b'\mathrm{J}') = a\mathrm{I}\,(b'\mathrm{J}' - b'a'),$$

albo $$\mathrm{I}m \,.\, \mathrm{J}'m' = a\mathrm{I} \,.\, a'\mathrm{J}'.$$

Więc dwa puukta m, m' wyznaczają dwa podziały jednokreślne.

Uważajmy teraz drugi przypadek równania (5) w którem $\mathrm{A} = o$, mamy

$$\mathrm{B} \,.\, am + \mathrm{C} \,.\, b'm' + \mathrm{D} = o.$$

Owóż, jeśli punkt m przystaje do a, jego odpowiedny m' przystaje do a$'$; zatem

$$\mathrm{C} \,.\, b'a' + \mathrm{D} = o.$$

Tak samo, jeśli m' schodzi się z b', jego odpowiedny m schodzi się z b; zatem

$$\mathrm{B} \,.\, ab + \mathrm{D} = o$$

Rugując B i C, znajdziemy

$$\frac{am}{ab} + \frac{b'm'}{b'a'} = 1;$$

zkąd, ponieważ $b'm' = a'm' - a'b'$, wynika

$$\frac{am}{a'm'} = \frac{ab}{a'b'}.$$

Więc dwa punkta m, m' wyznaczają dwa podziały jednokreślne podobne.

Nakoniec, jeśli w równaniu (5), jest $\mathrm{B} = \pm \mathrm{C}$, będzie także, na mocy tego co poprzedza, $ab = \pm b$; więc wtedy dwa podziały podobne są równe.

Ztąd wynika że $\mathrm{A} = o$ jest warunkiem *podobieństwa* dwóch podziałów; a zaś $\mathrm{A} = o$, i $\mathrm{B} = \mathrm{C}$ są dwoma warunkami *równości* tych podziałów.

Równanie

$$A . am . b'm' + B . am + C . b'm' + D = o$$

dowodzi że trzeba i dość jest *trzech* warunków dla jednokreślności dwóch podziałów.

Więc, *trzy dwojany punktów odpowiednych wyznaczają jednokreślność dwóch podziałów*. Co już wiemy.

Uwaga. — W równaniu

$$am . b'm' - b'J' . am - aI . b'm' - aI . a'b' = 0$$

któreśmy powyżej otrzymali, odnieśmy punkta m', J' do punktu stałego a'; aby to uskutecznić, dość tylko zamienić b' na a', i będzie

$$am . a'm' - a'J' . am - aI . a'm' = o.$$

Jeśli teraz chcemy żeby odcinek am był równy swemu odpowiednemu $a'm'$ i tego samego znaku, punkt m wyznaczy się równaniem

$$am = aI + a'I'.$$

A jeśli chcemy żeby odcinek aM był równy swemu odpowiednemu $a'M$ i znaku przeciwnego, będzie

$$aM = aI - a'J'.$$

Ztąd wnosimy że, *gdy dwie linie proste są podzielone jednokreślnie, byle nieproporcyonalnie, można zawsze, poczynając od któregokolwiek punktu a pierwszego podziału, wziąć dwa odcinki równe swym odpowiednym w drugim podziale, ale jeden z tym samym znakiem a drugi ze znakiem przeciwnym.*

Określenie. — Dwa podziały jednokreślne mogą być na jednej linii prostej, mianowanej czasem podstawą podziałów; wtedy nazywa się *punktem podwójnym* wszelki punkt tej prostej, który, należąc do jednego podziału, przystaje do swego odpowiedniego w drugim.

Na mocy tego określenia każdy punkt podwójny daje dwa warunki jednokreślności; zatem

Dwa podziały jednokreślne na linii prostej nie mogą mieć więcej niż dwa punkta podwójne.

Twierdzenie XXII.

Dwa podziały jednokreślne na linii prostej mają zawsze dwa punkta podwójne, rzeczywiste albo urojone.

Uważając dwa podziały jednokreślne na linii prostej jako pochodzące z przystawania dwóch linij prostych podzielonych jednokreślnie, mamy *ogólne* równanie jednokreślności.

$$A \,.\, am \,.\, b'm' + B \,.\, am \,. + C \,.\, b'm' + D = o,$$

w którem a i b są dwa punkta stałe wzięte na tych dwóch prostych. Ale te linie mają teraz jeden kierunek; można tedy, zamiast punktu b' który jest jakikolwiek, wziąć punkt a za *początek* wszystkich odcinków, i będzie

$$A \,.\, am \,.\, am' + B \,.\, am + C \,.\, am' + D = o.$$

Jeśli więc wyrazimy że punkt m' przystaje do swego odpowiedniego m, to jest, jeśli położymy m za m', otrzymamy równanie

$$A \,.\, \overline{am}^2 + (B + C)\, am + D = o$$

które wyznaczy punkt podwójny m.

To równanie daje dwie wartości dla am; zatem dowodzi że dwa podziały jednokreślne na linii prostej mają zawsze dwa punkta podwójne, i tylko dwa, rzeczywiste albo urojone. Summa i wieloczyn odległości tych punktów od punkta a są rzeczywiste.

Teraz, aby znaleźć punkta podwójne których istnienia dowiedliśmy, przypuśćmy najpierwszej spółczynnik A różny od zera, i podzielmy przez A, będziemy mieli

$$\overline{am}^2 + (\lambda + \mu)\, am + \nu = 0\,;$$

po czem, jeśli podstawimy już wiadome wartości spółczynników zamieniając w nich b' na a, otrzymamy

$$\overline{am}^2 - (a\mathrm{I} + a\mathrm{J}')\, am + a\mathrm{I} \,.\, aa' = o\,;$$

Ale, nazywając O środek odcinka IJ', mamy $aI + aJ' = 2aO$; zatem równanie staje się

$$\overline{am}^2 - 2\,aO\,.\,am + aI'.aa' = o.$$

Dla łatwiejszego wykreślenia pierwiastków, przenieśmy początek a odcinków, który jest dowolny, do środka O odcinka IJ', będzie

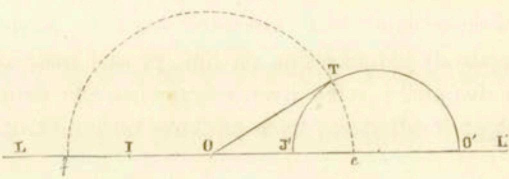
$$aO = o \quad \text{i} \quad aI = OI = -OJ'\,;$$

a jeśli nadto nazwiemy O' odpowiedny punktu O, co daje $aa' = OO'$, znajdziemy ostatecznie proste równanie

$$\overline{Om}^2 - OJ'.\,OO' = o; \quad \text{zkąd} \quad Om = \pm\sqrt{OJ'.\,OO'}.$$

Ten wynik pokazuje że punkta podwójne, które oznaczymy przez e, f, są równo oddalone od punktu O, który jest środkiem odcinka IJ' dwóch punktów odpowiednych punktom w nieskończoności; to jest: $Oe = \sqrt{OJ'.\,OO'}$, $\quad Of = -\sqrt{OJ'.\,OO'}$.

Odległość $\sqrt{OJ'.\,OO'}$ jest średnią proporcyonalną między odcinkami OJ', OO' i łatwo się wykreśla; ale trzeba uważać że te odcinki mogą mieć jednakowe znaki albo znaki różne. Ztąd wynika że punkta podwójne e, f są rzeczywiste albo urojone, według jak punkta J' i O' znajdują się oba z jednej strony albo z dwóch stron przeciwnych punktu O.



Gdy punkta podwójne są rzeczywiste, to jest, gdy punkta J' i O' leżą oba z jednej strony punktu O, prowadzi się styczną OT do koła opisanego na odcinku J'O' jako średnicy; a potem z punktu O jako środka i promieniem OT, kreśli się koło które przecina podstawę LL' w punktach e, f.

Jeśli punkta I i J', odpowiedne punktów w nieskończoności, zbiegają się w jeden, wtedy odcinek OJ' jest zero, i punkta podwójne e, f jednoczą się w punkcie O.

Dwa podziały jednokreślne na linii prostej mogą mieć jeden z punktów podwójnych w nieskończoności. I w samej rzeczy, jeśli przypuścimy $A = o$, równanie

$$A \,.\, am \,.\, b'm' + B \,.\, am + C \,.\, b'm' + D = o$$

wyrażające jednokreślność dwóch podziałów staje się

$$B \,.\, am + C \,.\, b'm' + D = o,$$

i, jakośmy widzieli, przywodzi się do równania

$$\frac{am}{a'm'} = \frac{ab}{a'b'}.$$

Owoż, otrzymaliśmy to ostatnie wyrażając że dwojan c, c' punktów odpowiednych jest w nieskończoności; więc punkt c, który się schodzi ze swoim odpowiednym c' w nieskończoności, jest już jednym z punktów podwójnych f.

Jesli teraz zastąpimy m i m' przez e, będziemy mieli równanie

$$\frac{ae}{a'e} = \frac{ab}{a'b'}$$

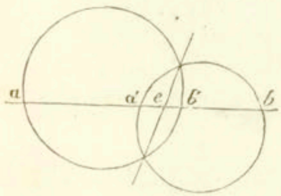
które wyznaczy drugi punkt podwójny e, w funkcyi dwojanu a, a' i stosunku $\dfrac{ab}{a'b'}$.

Z tego równania można wywieśdź inne, dogodniejsze do wykreślenia.

Albowiem, $$\frac{ae}{a'e} = \frac{ab}{a'b'} = \frac{ae - ab}{a'e - a'b'} = \frac{eb}{eb'};$$

zkąd $$ea \,.\, eb' = eb \,.\, ea'.$$

Ostatnie równanie pokazuje że punkt podwójny e ma tę samą potęgę względem dwóch kół jakichkolwiek, nakreślonych na odcinkach ab' i ba' jako cięciwach. Więc punkt e jest przecięciem osi pierwiastnej tych kół z podstawą ab. Co łatwo widać na figurze.



Ale, jako już wiemy, w równaniu $\dfrac{ae}{a'e} = \dfrac{ab}{a'b'}$ odcinki

ab i $a'b'$ mogą być równe i tych samych znaków, albo równe i znaków przeciwnych. W pierwszym przypadku, punkt podwójny e jest w nieskończoności, a w drugim ten punkt przypada we środku odcinka aa'.

Z tego wszystkiego wynika że dwa podziały jednokreślne na linii prostej mają zawsze dwa punkta podwójne, rzeczywiste albo urojone; gdy te punkta są rzeczywiste, jeden z nich albo nawet oba mogą być w nieskończoności.

Uwaga. — Aby sobie wyobrazić co znaczą punkta podwójne w nieskończoności, uważajmy dwa podziały jednokreślne na jednej prostej jako należące do dwóch linij prostych, i obróćmy jedną z tych linij około punktu podwójnego e, pod kątem jakimkolwiek. W tem położeniu, równanie $\frac{ea}{e'a'}=\frac{ab}{a'b'}$ dowodzi że proste aa', bb',... są równoległe, i odcinki eb $e'b'$, ab i $a'b'$,... są proporcyonalne.

Jeśli teraz przypuścimy że punkt podwójny e oddala się w nieskończoność, dwie proste eL i eL', podzielone jednokreślnie, stają się równoległemi, i odcinki ab, $a'b'$ są równe.

Więc, dwa podziały jednokreślne na linii prostej, mające jeden punkt podwójny w nieskończoności, są podobne; a gdy mają dwa punkta podwójne w nieskończoności to są równe. I nawzajem, co już wiadome.

Twierdzenie XXIII.

Gdy dwie proste są podzielone jednokreślnie w punktach a, b, c... *i* a', b', c'..., *linie łączące dwa którekolwiek punkta pierwszej z dwoma naprzemiam odpowiednemi drugiej, jako* ab' *i* ba', ac' *i* ca'.., *przecinają się wszystkie na jednej linii prostej.*

Oznaczmy podwójną literą AB' punkt spotkania dwóch linij danych $ab, a'b'$, i nazwijmy A' punkt linii $a'b'$, odpowiedny punktowi A linii ab, a zaś B punkt linii ab odpowiedny punktowi B' linii $a'b'$. Powiedam że cięciwy ab', ba' przecinają się na prostej BA'.

Jakoż, cztery punkta a, b, A, B prostej ab, i cztery a', b', A', B', prostej a', b', jako odpowiedne w dwóch podziałach jednokreślnych, mają stosunki nieharmoniczne równe; zatem pęk $a.a'b'$ A'B' czterech prostych wychodzących z punktu a, i pęk $a'.ab$ AB czterech prostych wychodzących z punktu a', mają stosunki nieharmoniczne równe. Owoż, te pęki mają promień odpowiedny aa' spólny; więc trzy inne promienie odpowiedne spotykają się we trzech punktach m, A', B, które leżą w linii prostej (3). Zatem punkt spotkania m cięciw ab', ba' leży na linii stałej BA'.

Wniosek I. — Ztąd wynika następujące twierdzenie.

W sześciokącie ab'ca'bc'a *wpisanym we dwie linie proste* AB, A'B', *boki przeciwległe* ab' *i* ba', ac' *i* ca', bc' *i* cb', *przecinają się we trzech punktach w linii prostej.*

Uwaga. — Mając dane trzy dwojany (a, a'), (b, b'), (c, c') dwóch podziałów jednokreślnych na dwóch liniach prostych, i punkt d, można łatwo wyznaczyć odpowiedny d' za pomocą powyższego twierdzenia. Dość poprowadzić proste ab' i ba', bc' i cb' które się przecinają w punktach m, p, i potem, poprowadzić prostę dc' która przetnie mp w punkcie q; prosta cq wyznaczy punkt d'.

PĘKI JEDNOKREŚLNE.

Określenie. — Dwa pęki nazywają się *jednokreślnemi*, gdy stosunek nieharmoniczny czterech którychkolwiek promieni jednego pęku równa się stosunkowi nieharmonicznemu czterech odpowiednych promieni drugiego.

Albo, innemi słowy, dwa pęki są jednokreślne jeśli wyznaczają odpowiednio na dwóch poprzecznych dwa podziały jednokreślne.

Ztąd wynika że: 1° *Dwa pęki, których promienie przechodzą przez te same punkta jednej prostej, są jednokreślne.*

2° *Dwa pęki, których promienie tworzą kąty odpowiedne równe albo spełniające, są jednokreślne.*

3° Dwa pęki O′ i O″ jednokreślne z trzecim O są jednokreślne między sobą.

Albowiem $(O' \,.\, A'B'C'D') = (O \,.\, ABCD) = (O'' \,.\, A''B''C''D'')$.

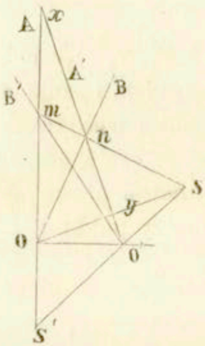
4° *Gdy w dwóch pękach jednokreślnych dwa promienie odpowiednie przystają do siebie, punkta przecięć innych promieni odpowiednych są w linii prostej.*

To jest następstwem twierdzenia III.

Dwa pęki jednokreślne są oczywiście wyznaczone przez trzy dwojany punktów odpowiednych.

Twierdzenie XXIV.

W dwóch pękach jednokreślnych, linie łączące punkt przecięcia dwóch promieni NIEODPOWIEDNYCH *z punktem przecięcia promieni im odpowiednych, przechodzą przez punkt stały.*

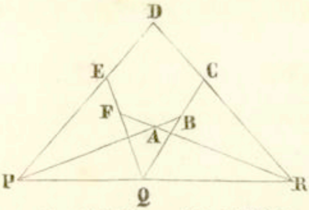


Niech będą dwa pęki jednokreślne $(O' . A'B'...)$ i $(O . AB...)$ w których m jest punktem przecięcia promieni nieodpowiednych OA i O′B′, a zaś n punktem przecięcia promieni O′A′ i OB które są ich odpowiednemi. Połączmy OO′; jeśli dopełnimy jednokreślności pęków $(O . AB...)$ i $(O' . A'B'O)$ biorąc w pierwszym promień OS odpowiedny promieniowi O′O drugiego pęku, a zaś w drugim promień O′S′ odpowiedny promieniowi OO′ pierwszego, powiedam że linia mn przechodzi przez punkt spotkania S promieni OS i O′S′.

Jakoż, dwa pęki $O . ABSO'$ i $O' . A'B'OS'$, jednokreślne z powyższego wykreślenia, wyznaczają na dwóch poprzecznych O′A′ i OA dwa podziały jednokreślne czterech punktów x, n, y, O′ i czterech odpowiednych x, m, O, S′; zatem stosunki nieharmoniczne $(xmOS')$ i $(xnyO')$ są równe. Owoż, te dwa układy czterech punktów mają punkt odpowiedny x spólny; więc proste mn, Oy, S′O′, łączące inne punkta odpowiedne, przechodzą przez jeden punkt S stały, to jest niezależny od promieni OA, O′B.

To twierdzenie jest spółwzględnem twierdzenia XXIII.

Wniosek. — Opierając się na powyższem twierdzeniu, można łatwo dowieśdź już wiadomego twierdzenia Paskala : *W sześciokącie wpisanym w koło trzy punkta przecięć boków przeciwległych są w linij prostej.*



Jakoż, niech będzie sześciokąt ABCDEF *wpisalny* w koło ; dwa pęki A . BCEF i D . BCEF, mające kąty odpowiedne równe albo spełniające, są jednokreślne ; zatem stosunki nieharmoniczne są równe,

$$(A\,.\,BCEF) = (D\,.\,BCEF) \quad \text{albo} \quad (A\,.\,BCEF) = (D.CBFE).$$

Owoż, na mocy ostatniej równości, dwa boki przeciwległe AB i DE, które się przecinają w punkcie P, są dwoma promieniami nieodpowiednemi, a ich odpowiedne promienie DC i AF przecinają się w punkcie R ; więc prosta PR pzzechodzi przez punkt stały. Ale tak samo prosta BC, łącząca punkta w których się spotykają dwa promienie nieodpowiedne AB, DB i ich odpowiedne promienie DC, AC, przechodzi przez ten sam punkt stały. Dla podobnej przyczyny, przechodzi także przez ten punkt prosta EF która łączy punkt spotkania promieni nieodpowiednych AE, DE z punktem spotkania im odpowiednych promieni DF, AF. Ztąd wynika że punkt przecięcia Q linij BC i EF musi leżeć na prostej PR. Więc trzy punkta P, Q, R w których się przecinają boki przeciwległe sześciokąta wpisalnego, są w linii prostej.

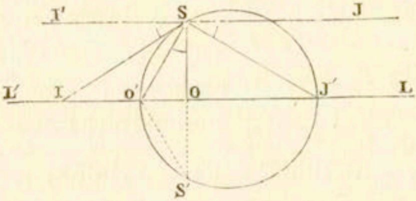
Uwaga. — Powyższe dowodzenie nie wymaga żeby sześciokąt był wpisalny w koło ; dość tylko żeby promienie, poprowadzone z dwóch wierzchołków sześciokąta do czterech innych, tworzyły dwa pęki jednokreślne : co jest niejako zogólnieniem twierdzenia *Paskala*.

Twierdzenie XXV.

Dwa pęki jednokreślne, mające spólny środek, mają zawsze dwa promienie podwójne, *rzeczywiste albo urojone.*

Jakoż, jeśli przetniemy te dwa pęki jedną poprzeczną, punkta przecięć będą tworzyły dwa podziały jednokreślne mające dwa punkta podwójne, rzeczywiste albo urojone : więc dwie proste, łączące punkta podwójne ze środkiem dwóch pęków, będą promieniami podwójnemi, rzeczywistemi albo urojonemi, tych pęków.

Wniosek. — *Gdy kąt obraca się około swojego wierzchołka i na swojej płaszczyźnie, jego ramiona wyznaczają na wszelkiej poprzecznej dwa podziały jednokreślne mające punkta podwójne urojone.*



Niech będzie kąt OSO' który się obraca, na swojej płaszczyznie, około swojego wierzchołka S. Ramiono tego kąta tworzą dwa pęki jednokreślne, bo kąty jednego pęku są odpowiednio równe kątom drugiego; więc stosunki nieharmoniczne czterech jakichkolwiek promieni pierwszego pęku i czterech odpowiednych drugiego są równe. Powiedam teraz że promienie tych dwóch pęków wyznaczają, na poprzecznej jakiejkolwiek LL', dwa podziały jednokreślne mające punkta podwójne urojone.

Jakoż, uważajmy trzy położenia OSO', JSJ', ISI' danego kąta: pierwsze w którem ramie SO jest prostopadłe do poprzecznej LL', drugie w którem to ramie staje się równoległe SJ do LL', a trzecie w którem drugie ramie SO' ma położenie SI' także równoległe do LL'. Widziemy zaraz że punkta przecięć I i J' ramion kąta z poprzeczną LL' są dwoma odpowiednemi punktów I i J' w nieskończoności; zaś punkt O, mający O' za odpowiedny, jest środkiem odcinka IJ', a więc środkiem odcinka punktów podwójnych. Ztąd wnosimy że punkta podwójne znajdują się z obydwóch stron punktu O, na odległość wyrażoną przez $\sqrt{-\mathrm{OJ}'.\mathrm{OO}'}$.

Owoż, kąt OSO', jako równy kątowi JSJ', jest dopełnieniem kąta OSJ'; zatem $\mathrm{OJ}'.\mathrm{OO}'=\overline{\mathrm{OS}}^2$. Więc $\sqrt{-\mathrm{OJ}'.\mathrm{OO}'}=\mathrm{OS}\sqrt{-1}$.

To dowodzi że punkta podwójne dwóch powyższych podziałów są urojone, i ich odległość od punktu O nie zależy od wielkości kąta OSO'.

Nawzajem, *jeśli dwa podziały jednokreślne na linii prostej mają punkta podwójne urojone, istnieje zawsze kąt którego ramiona kreślą te podziały.*

Niech będą na prostej LL′ punkta I i J′ dwóch podziałów jednokreślnych, odpowiedne punktów w nieskończoności; ponieważ te podziały mają punkta podwójne urojone, punkt O′ odpowiedny środka O odcinka IJ′ i punkt J′ leżą z dwóch stron przeciwnych środka O. Na odcinku O′J′ jako średnicy, nakreślmy koło które przetnie w punktach S i S′ prostopadłę wyprowadzoną z punktu O prostej LL′; nakoniec, poprowadźmy przez punkt S równoległę SJ do LL′. Widzimy łatwo że kąt OSO′, obracając się około swego wierzchołka S, kreśli na prostej LL′ dwa podziały jednokreślne, które mają trzy dwojany (O, O′), (∞, J′), (I, ∞) punktów odpowiednych spólne z dwojanami dwóch podziałów linii LL′. Więc dwa pierwsze podziały są tesame co dwa ostatnie.

Ztąd wynika że, *jeśli dwa podziały jednokreślne na linii prostej mają punkta podwójne urojone, jest zawsze dwa punkta* S *i* S′, *symetryczne względem tej prostej, z których widać pod tym samym kątem, odcinek każdego dwojanu punktów odpowiednych.*

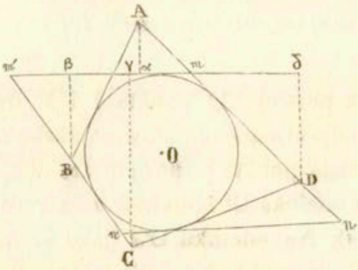
Twierdzenie XXVI.

W czworoboku opisanym na kole, jeśli styczna toczy się po tem kole, wieloczyn jej odległości od dwóch wierzchołków przeciwległych ma się do wieloczynu odległości od dwóch innych wierzchołków w stosunku stałym.

Niech będzie czworobok ABCD opisany na kole O, i dwie jakiekolwiek styczne mm', nn' spotykające jego boki przeciwległe AD i BC, pierwsza w punktach m i m' a druga w punktach n i n'. Linie proste AD i BC są podzielone jednokreślne przez cztery styczne mm', nn', AB i CD; bo stosunki nieharmoniczne dwóch pęków O.ADmn i O.BC$m'n'$ są równe (5), to jest

$$\frac{mA}{mD} : \frac{nA}{nD} = \frac{m'B}{m'C} : \frac{n'B}{n'C}.$$

Owoż, jeśli z wierzchołków czworoboku ABCD spuścimy pros-



topadłe $A\alpha$, $B\beta$, $C\gamma$, $D\delta$ na styczną mm', trójkąty podobne $mA\alpha$ i $mD\delta$, $m'B\beta$ i $m'C\gamma$ dadzą

$$\frac{mA}{mD}=\frac{A\alpha}{D\delta} \quad \text{i} \quad \frac{m'B}{m'C}=\frac{B\beta}{C};$$

podstawiając te wartości w powyższem równaniu, otrzymamy

$$\frac{A\alpha}{D\delta}:\frac{nA}{nD}=\frac{B\beta}{C\gamma}:\frac{n'B}{n'C};$$

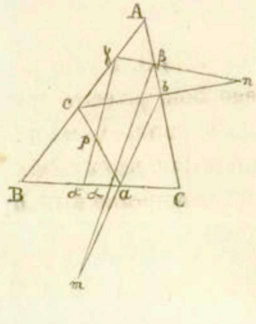
więc

$$\frac{A\alpha\,.\,C\gamma}{D\delta\,.\,B\beta}=\frac{nA\,.\,n'B}{nD\,.\,n'C}.$$

Uwaga. — Dowiedliśmy już tego twierdzenia metodą biegunowych wzajemnych.

Zagadnienie IV.

W dany trójkąt ABC *wpisać trójkąt któregoby boki przechodziły przez trzy dane punkta* m, n, p.



Niech będzie szukany trójkąt *abc* którego boki przechodzą przez trzy punkta *m*, *n*, *p*. Poprowadźmy przez punkt *m* jakąkolwiek prostę $m\alpha$ która przecina boki BC i AC w punktach α i β. Jeśli potem poprowadzimy prostę $n\beta$ która spotyka bok AB w punkcie γ, i prostę $p\gamma$ która spotyka bok BC w punkcie α'; punkta α, α' będą tworzyły na BC dwa podziały jednokreślne. Jakoż, gdy punkt β posuwa się po boku AC, proste $m\beta$ i $n\beta$ obracając się odpowiednio około punktów m i n tworzą dwa pęki jednokreślne; tak samo proste $n\beta$ i $p\gamma$ które się obracają około punktów n i p, i przecinają na boku AB, tworzą dwa pęki jednokreślne. Zatem dwa pęki m (β) i p (γ), jednokreślne z trzecim $n(\beta)$, są jednokreślne między sobą, i wyznaczają na boku BC dwa podziały jednokreślne α, α' w których wierzchołek a szukanego trójkąta jest jednym z punktów podwójnych.

Więc, aby rozwiązać zagadnienie, szukaj dwóch punktów których odpowiedne są w nieskończoności, to jest: nakreśl położenie punktu α na BC gdy promień $p\gamma$ jest równoległy do BC, i położenie punktu α' gdy promień $m\beta$ jest równoległy do BC; po czem, wyznacz punkta podwójne dwóch podziałów jednokreślnych (24); każdy z tych punktów będzie wierzchołkiem a trójkąta abc.

Zagadnienie ma dwa rozwiązania.

INWOLUCYA DWÓCH PODZIAŁÓW.

Określenie. — Mówi się że *dwa podziały jednokreślne na linii prostej są w* inwolucyi, *gdy punkt* a, *uważany następnie jako należący do każdego z podziałów, ma za odpowiedny w obydwóch ten sam punkt* a'.

To określenie opiera się na następującem twierdzeniu.

Twierdzenie XXVII.

Gdy dwa podziały jednokreślne na linii prostej mają jeden punkt a *którego odpowiednym w obydwóch podziałach jest ten sam punkt* a', *wtedy wszystkie inne punkta tych podziałów posiadają taką samą własność.*

Niech będą cztery punkta a, a', b, m pierwszego podziału i cztery odpowiedne a', a, b', m' drugiego, w których punkt a ma za odpowiedny w obydwóch podziałach punkt a'; powiedam że punkt m, uważany jako należący do drugiego podziału, ma za odpowiedny w pierwszym ten sam punkt m'. Albowiem, jednokreślność dwóch podziałów daje

$$(aa'bm) = (a'ab'm') \qquad \text{albo} \qquad \frac{ba}{ba'} : \frac{ma}{ma'} = \frac{b'a'}{b'a} : \frac{m'a'}{m'a}.$$

Owoż, ostatnie równanie można pisać

$$\frac{ba}{ba'} : \frac{m'a}{m'a'} = \frac{b'a'}{b'a} : \frac{ma'}{ma};$$

więc $$(aa'bm') = (a'ab'm).$$

To dowodzi że punkt m pierwszego podziału, mający m' za odpowiedny w drugim, uważany jako należący do drugiego podziału ma za odpowiedny w pierwszym ten sam punkt m'. Więc dwa punkta odpowiedne jakiekolwiek m, m' należą zarazem do obydwóch podziałów, i są odpowiednemi nawzajem w obydwóch.

Wniosek. — Ztąd wynika że, w dwóch podziałach w inwolucyi, dwa punkta w nieskończoności mają za odpowiedny ten sam punkt w obydwóch.

Więc, *aby dwa podziały jednokreślne na linii prostej były w inwolucyi, trzeba i dość jest żeby punkta* I *i* J', *odpowiedne punktów w nieskończoności, schodziły się w jeden.*

Ten punkt w którym się jednoczą punkta I i J', a który oznaczymy przez O, nazywa się *punktem środkowym inwolucyi*.

II. — *Mając dane dwie linie proste podzielone jednokreślnie, można zawsze położyć jedną na drugiej tak żeby dwa podziały były w inwolucyi.*

Jakoż, niech będą a, a' dwa punkta odpowiedne jakiekolwiek; wiemy że można wyznaczyć dwa inne punkta odpowiedne m, m' dające odcinki am i $a'm'$ równe (21, *uw*). Połóżmy więc drugą prostę na pierwszej tak żeby punkt m' padł na a i punkt a' na m. Wtedy dwa podziały będą w inwolucyi; bo punkt a, uważany jako należący następnie do każdego z dwóch podziałów, ma ten sam punkt a' za odpowiedny w obydwóch.

To pokazuje że inwolucya jest tylko szczególnym przypadkiem położenia dwóch podziałów jednokreślnych na linii prostej.

Przykład inwolucyi. — *Linia środków przecina dwa koła* OR, O'R' *w czterech punktach* A *i* B, A' *i* B', *które są w inwolucyi ze środkami podobieństwa* S, S'.

Jakoż,

$$\frac{SA}{SA'}=\frac{R}{R'},\quad \frac{SB}{SB'}=\frac{R}{R'},\quad \text{i}\quad \frac{S'A}{S'B'}=\frac{R}{R'},\quad \frac{S'A'}{S'B}=\frac{R}{R'};$$

ztąd
$$\frac{SA}{SA'}\cdot\frac{SB}{SB'}=\frac{R^2}{R'^2},\quad \frac{S'A}{S'B'}\cdot\frac{S'B}{S'A'}=\frac{R^2}{R'^2}.$$

Zatem
$$\frac{SA}{SA'}\cdot\frac{SB}{SB'}=\frac{S'A}{S'B'}\cdot\frac{S'B}{S'A'}$$

Owoż, ostatnie równanie można pisać

$$\frac{SA}{SA'}:\frac{S'A}{S'A'}=\frac{S'B}{S'B'}:\frac{SB}{SB'};$$

więc
$$(AA'SS')=(BB'S'S).$$

To dowodzi najpierwej że dwa podziały AA'SS i BB'S'S na linii prostej są jednokreślne, a potem że punkt S należący do obydwóch ma w każdym ten sam punkt S' za odpowiedny; więc trzy dwojany punktów odpowiednych A, B, A', B', S, S' są w inwolucyi.

Aby równanie

$$A.am.am'+B.am+C.am+D=0$$

które wyraża jednokreślność dwóch podziałów na linii prostej odniesionych do punktu a, oznaczało że te podziały są w inwolucyi, trzeba żeby, zamieniając m na m', było

$$A.am'.am+B.am'+C.am+D=0;$$

więc
$$(B-C)(am-am')=0$$

jakikolwiek jest dwojan m, m' punktów odpowiednych. Co wymaga żeby $B=C$.

Ten warunek *konieczny i dostateczny inwolucyi dwóch podziałów*, można także otrzymać wyrażając że punkta I i J' schodzą się w jeden.

Zatem mamy równanie

$$A . am . am' + B(am + am') + D = o,$$

które pokazuje że inwolucya dwóch podziałów wymaga *dwóch* warunków.

Ztąd wnosimy że *dwa dwojany punktów odpowiednych wyznaczają dwa podziały w inwolucyi.*

I w samej rzeczy, jeśli trzy dwojany punktów odpowiednych (a, a'), (b, b'), (c, c') tworzą dwa podziały w inwolucyi, stosunki nieharmoniczne czterech punktów *np.* $aa'bc$ i czterech odpowiednych $a'ab'c'$ są równe, to jest $(aa'bc) = (a'ab'c')$. Nawzajem, *aby trzy dwojany punktów* (a, a'), (b, b'), (c, c') *na linii prostej tworzyły inwolucyę, dość jest żeby stosunek nieharmoniczny czterech punktów* $aa'bc$, *należących do trzech dwojanów, był równy stosunkowi nieharmonicznemu czterech odpowiednych* $aa'b'c'$; albowiem, równanie $(aa'bc) = (a'ab'c')$ pokazuje że dwa podziały $aa'bc$ i $a'a'bc'$ są jednokreślne i tworzą inwolucyę; a to równanie wyznacza punkt c' w funkcyi punktu c i dwóch dwojanów (a, a'), (b, b').

Szukajmy teraz punktu środkowego O inwolucyi. Ponieważ początek a odcinków jest dowolny, dla uproszczenia wykreśleń weźmy go w punkcie O, będziemy mieli

$$A . Om . Om' + B(Om + Om') + D = 0.$$

Owoż, wiemy że w punkcie O jednoczą się punkta I i J'; jeśli więc przypuścimy że punkt m przystaje do O, będzie $Om' = \infty$; zatem, dzieląc najpierwej równanie przez Om', i czyniąc potem $Om' = \infty$, $Om = 0$, otrzymamy $B = 0$. Tym sposobem powyższe równanie przywodzi się do

$$A . Om . Om' + D = 0.$$

A że dwojan m, m' jest jakikolwiek, zatem

$$A . Oa . Oa' + D = 0,$$

Więc $$Om . Om' = Oa . Oa' \ldots$$

Symetrya tego równania, które można odrazu wywieśdź z równania (1) (*tw.* 21), dowodzi że punkt środkowy O inwolucyi, mający tę samą potęgę względem każdego dwojanu m, m' punktów odpowiednych, jest na osi pierwiastnej kół nakreślonych na dwóch którychkolwiek odcinkach aa', bb',...

Więc, 1° Jeśli na odcinkach aa', bb', dwojanów punktów odpowiednych, nakreślimy koła przechodzące przez jeden punkt, wzięty zewnątrz podstawy ab, te koła będą miały drugi punkt spólny, i ich cięciwa spólna przetnie podstawę ab w punkcie środkowym O inwolucyi.

2° Koła opisane na odcinkach aa', bb', cc'.. inwolucyi jako średnicach, mają tę samą oś pierwiastną, prostopadłą do podstawy.

Te ostatnie twierdzenia dają łatwy sposób wyznaczenia punktu środkowego inwolucyi, gdy dwa dwojany punktów odpowiednych są wiadome; i nawzajem, wyznaczenia jednego z dwóch punktów odpowiednych, gdy drugi punkt, jeden dwojan i punkt środkowy inwolucyi są wiadome.

Dwa podziały w inwolucyi, jako jednokreślne na linii prostej, mają dwa punkta podwójne e i f, rzeczywiste albo urojone, które są równo oddalone od punktu środkowego O. Aby je otrzymać, dość jest w równaniu $\mathrm{O}m \,.\, \mathrm{O}m' = \mathrm{O}a \,.\, \mathrm{O}a'$ zamiast m i m' położyć e albo f; co daje

$$\overline{\mathrm{O}e}^2 = \mathrm{O}a.\mathrm{O}a' = \overline{\mathrm{O}f}^2\,;$$

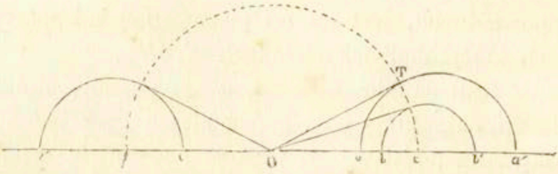
$$\text{ztąd} \qquad \mathrm{O}e = +\sqrt{\mathrm{O}a.\mathrm{O}a'} \quad \text{i} \quad \mathrm{O}f = -\sqrt{\mathrm{O}a.\mathrm{O}a'}.$$

Te wartości są rzeczywiste albo urojone, według jak dwa punkta odpowiedne jakiekolwiek a, a' znajdują się oba z jednej strony punktu O albo z dwóch stron przeciwnych.

Każdy punkt podwójny jest równowarty dwom punktom w inwolucyi; to tłumaczy dlaczego dwa punkta podwójne e, f z jednym dwojanem (a, a') wystarczają do wyznaczenia inwolucyi.

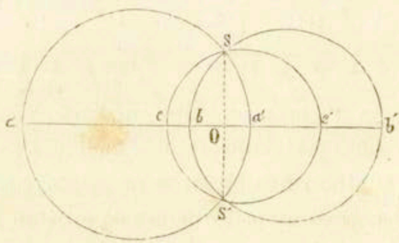
Powyższe równanie pokazuje że *każdy dwojan* (a, a') *punktów odpowiednych dzieli harmonicznie odcinek* ef *punktów podwójnych inwolucyi* (7); *i* NAWZAJEM, *punkta podwójne* e *i* f *dzielą harmonicznie odcinek każdego dwojanu* (a, a'); a gdy jeden z punktów podwójnych *np.* *e* jest w nieskończoności, drugi podwójny *f* jest środkiem wszystkich odcinków *aa'*, *bb'*...

Ztąd wynika że 1° *Jeśli punkta podwójne* e *i* f *są rzeczywiste,*



ponieważ one dzielą harmonicznie wszelki odcinek *aa'*, *bb'*.., punkt środkowy O musi być *zewnątrz* każdego dwojanu (*a*, *a'*) punktów odpowiednych; dlatego wtedy odcinki dwojanów nie mogą zakraczać na siebie, i są albo jeden w drugim jako *aa'* i *bb'*, albo leżą z obydwóch stron punktu środkowego O jako *aa'* i *cc'*. Więc, mając dane dwa dwojany (*a*, *a'*), (*b*, *b'*), które tworzą dwa odcinki *aa'*, *bb'* nie zakraczające na siebie, aby znaleźć punkta podwójne *e* i *f* inwolucyi, trzeba najpierwej wyznaczyć punkt środkowy O, sposobem już wiadomym; potem, na jednym z danych odcinków jako średnicy, nakreślić koło i poprowadzić do niego z punktu O styczną OT; nakoniec, ze środka O i promieniem OT, nakreślić koło które przetnie podstawę inwolucyi w punktach podwójnych *e* i *f*.

2° *Jeśli punkta podwójne są urojone*, wtedy, ponieważ wielo



czyn $Oa.Oa'$ jest odjemny punkt, środkowy O znajduje się *wewnątrz* każdego dwojanu (*a*, *a'*) punktów odpowiednych, i dwa jakiekolwiek odcinki *aa'*, *bb'* tych dwojanów zakraczają na siebie. Zatem, *koła nakreślone na odcinkach aa'*, *bb'*,.. *jako średnicach*, *przecinają się w dwóch punktach* S, S', *symetrycznych względem podstawy inwolucyi; z tych punktów* S *i* S' *widać odcinki dwojanów* aa', bb'... *pod kątem prostym.*

Nadto, $\overline{Oe}^2 = Oa.Oa' = -\overline{OS}^2$; zkąd $Oe = OS\sqrt{-1}$.

Pojmujemy łatwo że,

Nawzajem, *kąt prosty obracający się około swego wierzchołka kreśli, na linii prostej jakiejkolwiek, dwa podziały w inwolucyi mające punkta podwójne urojone, i w których punkt środkowy jest rzutem wierzchołka kąta na tej linii.*

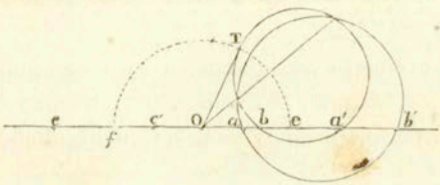
Twierdzenie XXVIII.

Punkta podwójne e *i* f *dwóch podziałów jednokreślnych* abc... $a'b'c'$... *na linii prostej tworzą inwolucyę z dwoma dwojanami punktów takich jako* a, b', *i* b, a'.

Bo $(abef) = (a'b'ef)$ albo $(abef) = (b'a'fe)$.

Owoż, ostatnia równość dowodzi że dwa podziały $abef$ i $b'a'fe$ są jednokreślne, i że punkt e ma w obydwóch ten sam odpowiedny f; więc trzy dwojany (e, f), (a, b'), (b, a') tworzą inwolucyę.

Wniosek. — To twierdzenie daje sposób wykreślenia punktów podwójnych w dwóch podziałach jednokreślnych na linii prostej.



Na odcinkach ab', ba' nakreśl dwa koła przecinające się; ich oś pierwiastna spotka podstawę ab w punkcie O; potem, z punktu O poprowadź do jednego z tych kół styczną OT, i ze środka O promieniem OT, nakreśl koło które przetnie podstawę ab w punktach podwójnych e i f. Bo e i f są punktami podwójnemi inwolucyi trzech odcinków ef, ab', ba'.

Jako zastosowanie tego co poprzedza, uważajmy dwa punkta

a, a', sprzężone harmoniczne dwóch punktów A, A' wktórych linia prosta aa' przecina koło, i niech będzie O środek cięciwy AA'; mamy $\overline{OA}^2 = Oa.Oa'$. Tak samo dwojany b, b', i c, c' punktów sprzężonych z A i A' dają $\overline{OA}^2 = Ob.Ob' = Oc.Oc'$. Zatem *trzy dwojany punktów sprzężonych, wziętych na linii prostej, tworzą inwolucyę sześciu punktów których podwójnemi są dwa punkta przecięć koła z linią prostą.*

PĘKI W INWOLUCYI.

Określenie. — *Dwa pęki jednokreślne, mające spólny środek, są w inwolucyi gdy wyznaczają na spólnej poprzecznej dwa podziały w inwolucyi.*

Zatem, gdy dwa pęki są w inwolucyi, wszelki promień uważany następnie jako należący do każdego z nich ma ten sam odpowiedny w obydwóch.

I nawzajem, dwa pęki jednokreślne, mające spólny środek, są w inwolucyi gdy jeden promień uważany następnie jako należący do każdego z nich ma ten sam odpowiedny w obydwóch.

Dwa pęki w inwolucyi są wyznaczone przez dwa dwojany promieni odpowiednych (25, *wn*).

Aby sześć promieni wychodzących z jednego punktu, i sprzężonych po dwa, tworzyły pęk w inwolucyi, trzeba i dość jest żeby cztery z tych promieni miały stosunek nieharmoniczny taki jaki ich sprzężone.

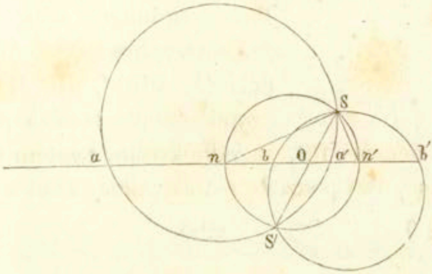
Dwa pęki w inwolucyi mają zawsze dwa promienie podwójne, rzeczywiste albo urojone; promienie podwójne tworzą pęk harmoniczny z dwoma któremikolwiek promieniami odpowiednemi. Bo te pęki wyznaczają na wszelkiej poprzecznej dwa punkta podwójne e, f inwolucyi które dzielą harmonicznie odcinek aa'.

Kąt prosty, obracający się około swego wierzchołka, tworzy oczywiście dwa pęki w inwolucyi, mające promienie podwójne urojone.

Twierdzenie XXIX.

W dwóch pękach w inwolucyi jest zawsze jeden dwojan promieni odpowiednych prostokątnych.

Niech będą a i a', b i b', c i c' dwojany punktów inwolucyi

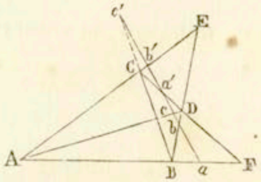


którą dwa pęki w inwolucyi, mające wierzchołek S, wyznaczają na jakiejkolwiek poprzecznej ab.

Wiemy że koła opisane na trójkątach Saa', Sbb', Scc' przecinają się w drugim punkcie S', i cięciwa SS', spotyka poprzeczną ab w punkcie środkowym O inwolucyi. Jeśli więc na cięciwie SS' nakreślimy koło mające środek na poprzecznej ab, to ono przetnie poprzeczną w punktach n i n' które będą dwoma odpowiednemi inwolucyi; albowiem $On \,.\, On' = OS \,.\, OS' = Oa \,.\, Oa'$. Zatem, proste Sn, Sn' są dwoma promieniami odpowiednemi danych pęków S, i kąt nSn' jest prosty jako wpisany w półkole. Więc w dwóch pękach w inwolucyi jest zawsze jeden dwojan promieni odpowiednych prostokątnych. Ten dwojan jest jedyny, gdy dwa kąty $a\,Sa'$, $b\,Sb'$ nie są proste. Jeśli przeciwnie, te dwa kąty są proste, punkta S i S' są symetryczne względem poprzecznej ab, i wszystkie koła nakreślone na cięciwie SS' mają środek na tej poprzecznej; więc wtedy wszystkie dwojany promieni odpowiednych są prostokątne. W tym szczególnym przypadku promienie podwójne są urojone.

Twierdzenie XXX.

W czworoboku poprzeczna spotyka boki przeciwległe i obie przekątne w trzech dwojanach punktów w inwolucyi.



Niech będzie czworobok ABCD; wszelka poprzeczna ac' spotyka boki przeciwległe i obie przekątne w punktach sprzężonych a i a', b i b', c i c', które są w inwolucyi. Albowiem, dwa pęki (A . BDCc'), (D . BACc'), których promienie przechodzą przez te same punkta poprzecznej BD, są jednokreślne; zatem wyznaczają na poprzecznej ac' dwa podziały jednokreślne. Ztąd wynika

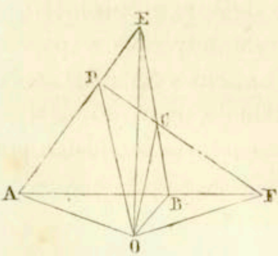
$$(acb'c') = (bca'c') \qquad \text{albo} \qquad (acb'c') = (a'c'bc).$$

Owoż, ostatnie równanie pokazuje że punkt c ma ten sam punkt c' za odpowiedny w obydwóch podziałach; więc trzy odcinki aa', bb', cc' są w inwolucyi.

Uwaga. — Jeśli w czworoboku zupełnym ABCDEF weźmiemy trzecią przekątnę EF za poprzeczną, wtedy wierzchołki E i F będą punktami podwójnemi inwolucyi i podzielą harmonicznie odcinek cc'. Co sprawdza twierdzenie już dowiedzione (10. wn.)

Twierdzenie XXXI.

Sześć prostych OA, OB, OC, OD, OE, OF, *poprowadzonych z jednego punktu* O *płaszczyzny czworoboku zupełnego* ABCDEF *do jego wierzchołków, tworzą pęk w inwolucyi.*



ak oż, boki czworoboku OCED jego przekątne wyznaczają na poprzecznej AF sześć punktów w inwolucyi; więc pęk O . ABCDEF którego promienie przechodzą przez te punkta jest w inwolucyi.

Wniosek I. — Punkt O może się

oddalić w nieskończoność; ztąd wynika że *rzuty sześciu wierzchołków czworoboku zupełnego na prostej jakiejkolwiek są w inwolucyi.*

Albo innemi słowy, *równoległe poprowadzone przez sześć wierzchołków czworoboku zupełnego tworzą pęk w inwolucyi.*

II. — Uważając trójkąt ABE przecięty poprzeczną DC, mamy twierdzenie:

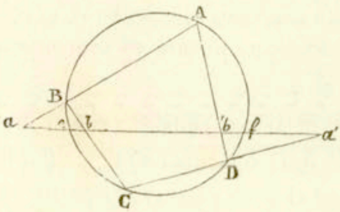
Sześć prostych, poprowadzonych z jednego punktu do trzech wierzchołków trójkąta i do punktów w których poprzeczna jakakolwiek spotyka jego boki, tworzą pęk w inwolucyi.

Jeśli poprzeczna DC oddala się w nieskończoność od punktu O, ale zostaje równoległą do swego kierunku, trzy proste OD, OC, OF stają się równoległemi odpowiednio do boków AE, BE, AB. Ztąd twierdzenie:

Linie proste poprowadzone z jednego punktu do trzech wierzchołków trójkąta, i trzy równoległe poprowadzone z tego punktu do trzech boków, tworzą pęk w inwolucyi.

Twierdzenie XXXII (*).

Gdy czworobok jest wpisany w koło, wszelka poprzeczna spotyka boki przeciwległe i koło w trzech dwojanach punktów w inwolucyi.



Niech będzie czworobok ABCD wpisany w koło; poprzeczna ab spotyka dwojany boków przeciwległych w punktach odpowiednych a i a', b i b', a koło w punktach e i f. Te sześć punktów są w inwolucyi.

Jakoż, pęki $(A.BeDf)$ i $(C.BeDf)$, mające kąty odpowiedne równe albo spełniające, są jednokreślne; zatem wyznaczają na poprzecznej ab dwa podziały jednokreślne których e i f są punktami podwójnemi, i mamy

(*) Twierdzenie znamienitego matematyka francuskiego Desargues z 17° wieku, który podał inwolucyę.

$$(aeb'f) = (bea'f) \qquad \text{albo} \qquad (aeb'f) = (a'fbe).$$

Ostatnie równanie pokazuje że punkt e ma na ten sam odpowiedny f w obydwóch podziałach; więc trzy dwojany (a, a'), (b, b'), (e, f') są w inwolucyi.

Zamiast czworoboku wypukłego ABCD można uważać czworobok krzyżowy ABDCA który jest także wpisany, i daje to samo twierdzenie.

Uwaga. — Gdy sieczna ab staje się styczną do koła, dwa punkta e i f jednoczą się, i stanowią jeden z punktów podwójnych inwolucyi z dwojanami a i a', b i b'.

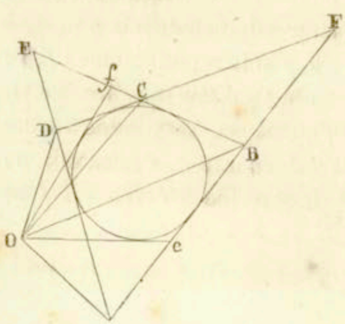
Wniosek. — Jeśli czworobok ABCD wpisany w koło odkształca się tak że trzy boki AB, BC, CD obracają się odpowiednio około trzech punktów a, b, a' linii prostej ab, wtedy czwarty bok AD przechodzi przez punkt stały b' leżący na tej samej prostej ab. Bo, gdy pięć punktów a, a', e, f, b' inwolucyi są dane, szósty b' jest wyznaczony.

II. — Jeden z boków czworoboku ABCD, *np.* CD, może stać się styczną koła w wierzchołku C. Ztąd twierdzenie:

Poprzeczna spotyka boki trójkąta wpisanego w koło, styczną koła w jednym z wierzchołków, i koło w sześciu punktach w inwolucyi.

Twierdzenie XXXIII.

Gdy czworobok jest opisany na kole, dwa dwojany linij prostych poprowadzonych z jednego punktu do wierzchołków przeciwległych, i dwie styczne poprowadzone z tego samego punktu do koła tworzą pęk w inwolucyi.



Niech będzie czworobok ABCD opisany na kole, z punktu O jego płaszczyzny poprowadzono proste OA, OB, OC, OD i styczne koła Oe i Of; te sześć linij prostych tworzą pęk w inwolucyi.

Jakoż, styczne AD i BC są podzielone jednokreślnie przez cztery styczne Oe, Be, CD, Of

zatem dwa pęki $(O \,.\, AeDf)$ i $(O \,.\, BeCf)$ są jednokreślne, i proste Oe i Of są ich promieniami podwójnemi. Ztąd wynika równość stosunków nieharmonicznych

$$(Ae\,Df) = (Be\,Cf) \qquad \text{albo} \qquad (Ae\,Df) = (Cf\,Be).$$

Ostatnia równość pokazuje że promień Oe ma ten sam odpowiedny Of w dwóch pękach jednokreślnych, w których OA i OC, OB i OD, Oe i Of są dwojanami promieni odpowiednych; więc te trzy dwojany są w inwolucyi.

Twierdzenie stosuje sie do czworoboku krzyżowego BEDF który jest także opisany na kole; w tym przypadku dwojany linij prostych OB i OD, OE i OF z dwojanami stycznych Oe i Of tworzą pęk w inwolucyi.

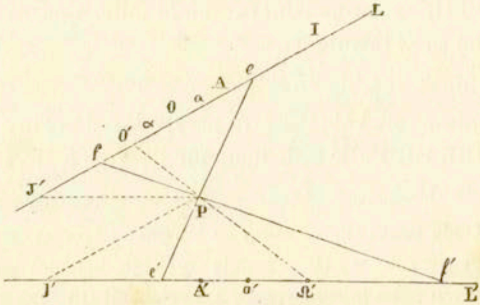
Uwaga. — Gdy punkt O jest wzięty na okręgu na którym czworobok jest opisany, wtedy styczne Oe i Of przystają do siebie, i stanowią jeden z promieni podwójnych pęku inwolucyjnego z dwojanami OA, OC i OB, OD.

Wniosek. — Jeśli czworobok opisany na kole odkształca się tak że trzy jego wierzchołki, *np.* A, B, C posuwają się na trzech liniach prostych OA, OB, OC, przechodzących przez jeden punkt O, wtedy czwarty wierzchołek D opisuje także linię prostą która przechodzi przez ten sam punkt O. Bo, gdy pięć promieni Oe, Of, OA, OB, OC pęku w inwolucyi są dane, szósty promień OD jest wyznaczony.

Zakończymy geometryę płaską rozwiązaniem trzech zagadnień sławnych w starożytności, do których *Apollonius*, jeden z najświetniejszych matematyków greckich, napisał, wedle świadectwa *Pappusa*, trzy dzieła zawierające 388 zadań. Niektóre tylko z tych zadań do nas doszły! Ich wielość nie powinna zadziwiać; albowiem starożytni, nie znając użycia znaków w geometryi, musieli z przypadków szczególnych iść stopniowo do ogólnych; a każde zagadnienie dawało im tyle różnych zagadnień, ile figura przedstawiała częściowych położeń! Wyższość metod geometryi nowoczesnej zależy na tem właśnie że one zogólniają zadania, obejmując przypadki szczególne.

ZAGADNIENIE V.

Mając dane dwie proste AL, A′L′, *przez punkt* P *dany na ich płaszczyźnie, poprowadzić poprzeczną któraby tworzyła na tych prostych, zaczynając od dwóch punktów stałych* A *i* A′, *dwa odcinki* Am, A′m' *będące w stosunku danym.*



Niech będą dwa punkta m, m' zadość czyniące równaniu

$$\frac{\mathrm{A}m}{\mathrm{A}'m'} = \lambda$$

Widzimy zaraz że punkta m, m', uważane jako zmienne, wyznaczają dwa podziały jednokreślne; więc zagadnienie przywodzi się do pytania jak, przez dany punkt P, poprowadzić poprzeczną któraby spotykała dwie proste AL, A′L′ w dwóch punktach odpowiednych m, m' tych podziałów.

Bierzemy tedy punkt dowolny a na prostej AL, i wyznaczamy odpowiedny a' za pomocą równania $\frac{\mathrm{A}a}{\mathrm{A}'a'} = \lambda$; po czem, prowadzimy promień Pa' który spotyka AL w punkcie α. Ten punkt α z pierwszym a tworzą dwa podziały jednokreślne których punkta podwójne rozwiązują zagadnienie.

Żeby znaleźć punkta podwójne, szukamy najpierwej punktów I, J′. Otóż, punkt I jest położeniem punktu zmiennego m gdy jego odpowiedny μ jest w nieskończoności; dość więc poprowadzić przez punkt P równoległę PI′ do AL, która przetnie A′L′ w punkcie I′, i wziąć AI $= \lambda . \mathrm{A'I'}$. Punkt J′, który jest położeniem punktu μ gdy jego odpowiedny m jest w nieskończoności, wyznaczy się odrazu, prowadząc tylko równoległę PJ' do $A'L'$; bo $A'm' = \infty$ daje $Am = \infty$. Niech będzie O środek odcinka IJ'; dla znalezienia punktu O', trzeba wziąć $A'\Omega' = \lambda . AO$, i poprowadzić prostę $P\Omega'$ która przetnie AL w punkcie O'.

Jeśli teraz, z obydwóch stron punktu O, weźmiemy punkta e i f wyznaczone równaniem

$$Oe = Of = \sqrt{OJ'.OO'}$$

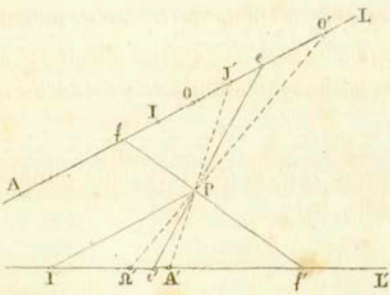
linie proste Pe, Pf rozwiążą zagadnienie, to jest przetną prostę $A'L'$ w punktach e', f' które zadość uczynią równaniu

$$\frac{Ae}{A'e'} = \lambda \quad \text{i} \quad \frac{Af}{A'f'} = \lambda.$$

Jeśli znaki odcinków Am, $A'm'$ nie są dane, zagadnienie ma cztery rozwiązania.

Zagadnienie VI.

Mając dane dwie linie proste AL, $A'L'$ *na których są punkta stałe* A, A', *poprowadzić, przez punkt dany* P, *poprzeczną któraby wyznaczyła na tych prostych odcinki* Am, $A'm'$ *tworzące wieloczyn danej wartości* k.



Niech będą dwa punkta m, m' zadość czyniące równaniu

$$Am.Am' = k.$$

Te punkta, uważane jako zmienne, wyznaczają dwa podziały jednokreślne; chodzi więc o to jak poprowadzić, przez punkt P, linię prostą któraby przechodziła przez dwa punkta odpowiednie tych podziałów.

Owoż, jeśli na prostej AL weźmiemy punkt dowolny m, równanie $Am.A'm' = k$ da punkt m', a prosta Pm' wyznaczy na AL punkt μ; zatem punkta m, μ będą tworzyły na linii Aa dwa podziały jednokreślne, których punkta podwójne rozwiążą zagadnienie.

Aby znaleźć punkta podwójne, uważajmy że prosta PA', odpowiedająca odcinkowi $A'm' = 0$, daje zaraz punkt J'; następnie, prosta PI' równoległa do AL przecina AL' w punkcie I', i równanie $AI.A'I' = k$ wyznacza punkt I. Po czem, jeśli weźmiemy środek O odcinka IJ' i wyznaczymy punkt Ω' za pomocą równarównania $AO.A'\Omega' = k$, prosta $P\Omega'$ przetnie AL w punkcie O'. Nakoniec, biorąc z obydwóch stron punktu O

$$Oe = -Of = \sqrt{OJ'.OO'},$$

otrzymujemy puukta podwójne, i proste Pe, Pf rozwiązują zagadnienie, które, jeśli znak odcinków Am, $A'm'$ nie jest wskazany, ma cztery rozwiązania.

Zagadnienie VII.

Mając dane cztery punkta na linii prostej, wyznaczyć na tej linii piąty punkt taki, żeby wieloczyn jego odległości od dwóch z tych punktów był do wieloczynu odległości od dwóch innych w stosunku danym λ.

Oznaczając przez a, a', b, b' cztery dane punkta, trzeba znaleźć punkt m taki żeby było

$$\frac{am.a'm}{bm.b'm} = \lambda.$$

Widać z samego równania że mogą być dwa punkta zadość czyniące zadanemu warunkowi. Teorya inwolucyi jeszcze dobitniej to pokazuje. Jakoż, jeśli punkt m został wyznaczony, punkt m' z punktem m i z dwojanami a, a', b, b' tworzy inwolucyę która zadość czyni danemu warunkowi; albowiem równanie

$$(abmm') = (a'b'm'm) \quad \text{daje} \quad \frac{ma}{mb} : \frac{m'a}{m'b} = \frac{m'a'}{m'b'} : \frac{ma'}{mb'},$$

$$\text{zkąd} \quad \frac{am \, . \, a'm}{bm \, . \, b'm} = \frac{am' \, . \, a'm'}{bm' \, . \, b'm'}; \quad \text{więc} \quad \frac{am' \, . \, a'm'}{bm' \, . \, b'm'} = \lambda.$$

Uważajmy teraz że zadane równanie $\frac{am \, . \, a'm}{bm \, . \, b'm} = \lambda$ można pisać:

$$\frac{am}{bm} = \lambda \, . \, \frac{b'm}{a'm};$$

Ten kształt zaraz pokazuje że punkta szukane są punktami podwójnemi dwóch podziałów jednokreślnych, wyznaczonych równaniem

$$\frac{am}{bm} = \lambda \, . \, \frac{bm}{a'm'},$$

w którem a i b są punktami pierwszego podziału, a zaś b' i a' ich odpowiednemi w drugim.

Żeby wyznaczyć punkta podwójne, szukamy punktów I i J′. Owoż, przypuszczając m' w nieskończoności, mamy $\frac{a\mathrm{I}}{b\mathrm{I}} = \lambda$; a przypuszczając m w nieskończoności, mamy także $\frac{a'\mathrm{J}'}{b'\mathrm{J}'} = \lambda$. Po czem, nazywając O środek odcinka IJ′, znajdziemy O′ za pomocą równania

$$\frac{\mathrm{O}a}{b\mathrm{O}} = \lambda \, . \, \frac{b'\mathrm{O}'}{a'\mathrm{O}'} \, .$$

Więc, biorąc (22.)

$$\mathrm{O}m = -\mathrm{O}m' = \sqrt{\mathrm{OJ}' . \mathrm{OO}'},$$

otrzymamy punkta podwójne które rozwiążą zagadnienie.

To zagadnienie nie zawsze jest możebne. Jeśli odcinki aa', bb' zakraczają jeden na drugi, punkta m, m' są rzeczywiste; ale, jeśli środek O odcinka IJ′ pada między punkta e i f które, jako wiadomo, dzielą harmonicznie odcinki aa', bb', w tym jedynym przypadku punkta m, m' są urojone.

Możnaby jeszcze szukać wartości *maximum* albo *minimum* stosunku λ; ale w tej rzeczy odsyłamy czytelnika do znamienitego dzieła P[a]. CHASLES « *Traité de Géométrie supérieure* », z którego powyższe rozwiązania trzech zagadnień APOLLONIUSA wyjęte zostały. Zakres tej księgi, która ma na celu dać tylko wiedzę metod geometryi nowoczesnej, nie pozwala rozciągać się dalej.

ZADANIA GEOMETRYI PŁASKIEJ.

633. — Oznaczając przez S liczbę wielokątów (ścian) tworzących figurę płaską, przez W liczbę wierzchołków, przez K liczbę boków (krawędzi), jest zawsze związek

$$S + W = K + 1.$$

634. — W czworoboku wpisanym w koło, jeśli jedna przekątna jest cięciwą zetknięć stycznych koła które wychodzą z punktu leżącego na drugiej, wieloczyny boków przeciwległych są równe.

635. — Mając dany kąt prosty A wpisany w półkole BAC, z punktu jakiegokolwiek D średnicy wyprowadzono prostopadłę DE która spotyka okrąg i ramiona AC, AB, przedłużone jeśli trzeba, wpunktach E, F, G; dowieśdź że $\overline{DE}^2 = DF \cdot DG$.

636. — Cztery linie proste na jednej płaszczyznie, brane po trzy, tworzą cztery trójkąty, w każdym z nich jest punkt spotkania trzech wysokości; dowieśdź że te cztery punkta są w linii prostej.

637. — To samo założenie; dowieśdź że koła opisane na tych czterech trójkątach mają punkt spólny.

638. — Gdy trzy kąty mają spólną cięciwę, wtedy, brane po dwa, mają trzy inne cięciwy spólne; dowieśdź że te trzy cięciwy przecinają się w jednym punkcie.

639. — Mając dane koło i linię prostą MN, znaleźć punkt taki żeby, prowadząc przez niego poprzeczną, i, z punktów A, B, w których przecina koło, spuszczając prostopadłe AC, i BD na MN, summa $\frac{1}{AC} + \frac{1}{BD}$ była stała.

640. — Przez wierzchołek A trójkąta ABC poprowadzić linię prostą tak,

żeby prostopadłe, spuszczone na nią z wierzchołków B i C, tworzyły dwa trójkąty prostokątne ABB′, ACC′ równowarte.

641. — Jeśli trzy boki trójkąta są w postępni arytmetycznej, nazywając a i c boki największy i najmniejszy, R i r promienie kół opisanego i wpisanego; dowieśdź że

$$6Rr = ac.$$

642. — Oznaczając przez a, b, c trzy boki trójkąta, przez $A\alpha$, $B\beta$, $C\gamma$ trzy dwójsieczne kątów; dowieśdź że

$$A\beta \,.\, C\alpha \,.\, B\gamma = \frac{a^2b^2c^2}{(a+b)(b+c)(c+a)}$$

643. — W trójkącie ABC poprowadzono dwójsieczną kąta A i wysokość odpowiedającą AF; z wierzchołków B i C spuszczono na tę dwójsieczną prostopadłę BD i CE. Dowieśdź że koło, przechodzące przez trzy punkta D, E, F, przechodzi przez *środek* podstawy BC, i że powierzchnia trójkąta ABC jest równowarta prostokątowi BD . AE albo CE . AD.

644. — Na okręgu, na którym są dane dwa punkta A i B, znaleźć trzeci punkt C taki, żeby odległości AB i AC oznaczone przez x i y zadość czyniły jednemu ze trzech równań

$$x^2 + y^2 = a^2, \quad xy = b^2, \quad \frac{x+y}{x-y} = \frac{m}{n};$$

linie a, b, m, n są wiadome.

645. — Przez punkt A okręgu O poprowadzono dwie sieczne AB i AC, na AB wzięto zewnątrz odcinek AD = AC, a na AC, wzięto także zewnątrz odcinek AE = AB, i połączono DE; dowieśdź że AO jest prostopadłe do DE.

646. Znaleźć wewnątrz czworoboku ABCD punkt P taki żeby, łącząc go ze czterema wierzchołkami, podzielono ten czworobok w cztery części równowarte.

647. — Jest dane koło OA wewnątrz koła O′A′; z punktu wziętego na linii środków wyprowadzono prostopadłę która spotyka oba okręgi tych kół w punktach M, M′. Dowieśdź że na linii środków istnieje dwa punkta C, D które zadość czynią równaniom

$$\frac{\overline{CM}^2}{\overline{CM'}^2} = \frac{CO}{CO'} \quad \text{i} \quad \frac{\overline{DM}^2}{\overline{DM'}^2} = \frac{DO}{DO'}.$$

648. — Dane są dwa koła spółśrodkowe. Poprowadzono dwa promienie OA′A i OB′B pod kątem prostym; z punktów A i B koła większego spusz-

czono, na średnicę MN, prostopadłe AC i BD, a na te ostatnie spuszczono z punktów A' i B' koła mniejszego odpowiedające prostopadłe A'E i B'F; połączono OE i OF. Jak trzeba poprowadzić promienie prostokątne OA i OB żeby kąt EOF był największy możebny?

649. — Są dane dwa koła *niestyczne* O, O'; przez punkt M koła O i przez każdy ze środków podobieństwa S, S', poprowadzono linię prostą, te dwie proste spotykają okrąg O' w czterech punktach a, b, a', b'. Dowieśdź że dwa z tych punktów leżą na średnicy koła O', a dwa inne na linii prostej która przechodzi przez punkt stały, niezależny od położenia punktu M na okręgu O.

650. — Na płaszczyznie koła są dane dwie równoległe; z punktu M jednej poprowadzono dwie styczne koła, wyznaczające na drugiej odcinek którego środek N połączono z punktem M. Dowieśdź że wszystkie proste MN, odpowiedające różnym punktom M, schodzą się w jednym punkcie.

651. — Mając dany okrąg i linię prostą z położenia i z wielkości, znaleźć na tym okręgu punkta z których widać tę prostę pod kątem największym albo najmniejszym możebnym.

652. — Mając dane trzy odcinki AB, BC, CD na linii prostej, znaleźć punkt z którego je widać pod tym samym kątem.

653. — Mając dany okrąg, poprowadzono dwie cięciwy prostokątne AC, BC; z punktu D wziętego na AC spuszczono prostopadłę na średnicę AB, ta prostopadła spotyka BC w punkcie E; połączono AE i BD. Dowieśdź że te dwie proste spotykają się na okręgu.

654. — Mając dane dwa koła O, O'; z punktu α drugiego koła poprowadzono do środków podobieństwa S, S' linie proste które przecinają pierwsze koło w punktach a i α, b i β; dowieśdź że: 1° prosta $\alpha\beta$ przechodzi przez środek O; 2° prosta ab przecina linię środków w punkcie stałym.

654. — Summa algebryczna prostopadłych spuszczonych z wierzchołków wielokąta foremnego na prostę przechodzącą przez jego środek jest zero, jakiekolwiek ta prosta ma położenie.

655. — Przez dwa punkta dane na okręgu poprowadzić dwie cięciwy równoległe których summa równa się danej długości.

656. — Znaleźć miejsce środka kół które przecinają dwa dane koła pod kątami równemi.

657. — Mając dane dwa koła, znaleźć miejsce punktu zetknięcia dwóch kół stycznych między sobą i stycznych do dwóch pierwszych.

658. — Mając dane dwa koła przecinające się, przez jeden z punktów przecięcia poprowadzono sieczną której podzielono długość w stosunku $\frac{m}{n}$. Znaleźć miejsce punktu podziału.

659. — Koło obraca się około jednego ze swych punktów, w każdem położeniu poprowadzono do niego styczną równoległą do danej prostej ; jakie jest miejsce punktów zetknięć ?

660. — Są dane koło O i dwa punkta A, B na kierunku średnicy BAO ; połączono jakikolwiek punkt M okręgu, z punktami A i B, liniami prostemi MA, MB które przecinają okrąg w punktach A′ i B′ ; po czem, poprowadzono średnicę B′OC, i połączono CA′. Dowieśdź że prosta CA′ przecina BAO w punkcie stałym.

661. — Przez punkt płasczyzny dwóch kół, poprowadzić linię prostą tak żeby, spuszczając na nią prostopadłe ze środków obydwóch kół, części tych prostopadłych zawarte między okręgami i tą prostą były równe. Dyskutować.

662. — Mając dane trzy okręgi, znaleźć na jednym z nich punkt taki, żeby wyprowadzome z niego styczne do dwóch pozostałych okręgów były równe.

663. — Mając dane dwa okręgi i punkt na ich płasczyznie, poprowadzić przez ten punkt sieczną do każdego z tych okręgów, tak żeby cztery styczne przechodzące przez punkta przecięć schodziły się w jednym punkcie.

664. — Znaleźć miejsce środków kół które przecinają jedno koło w punktach średnicowo przeciwległych a drugie prostokątnie.

665. — Podziel średnicę AB koła na n równych części ; z punktów A i B jako środków, promieniem AB, nakreśl dwa łuki kół które się przetną w C. Przez C i przez drugi podział, licząc od A, poprowadź linię prostą która, przedłużona, spotka okrąg w D. Łuk AD będzie, z małą różnicą, $n^{\text{tą}}$ częścią okręgu. (Dokładnie jeśli n równe 2, 3, 4, 6).

666. — Dwa koła równe są styczne między sobą, i każde styczne do jednego z ramion kąta prostego ; jakie miejsce opisuje ich punkt zetknięcia ?

667. — Mając dane koło O styczne do linii prostej, znaleźć na okręgu O punkt taki, żeby summa jego odległości od punktu zetknięcia i od stycznej była równa danej linii.

668. — Mając dane dwa okręgi styczne w punkcie C, przez ten punkt poprowadzono średnicę ACB i dwie cięciwy CE, CF (jedną w każdem kole),

będące w stosunku $\frac{m}{n}$; połączono AE i BF. Znaleźć miejsce punktu przecięcia M linij prostych AE, BF.

669. — Przez punkt A, dany zewnątrz linii prostej MN, poprowadzono do tej linii dwie proste prostokątne AB i AC, na których wzięto punkta D i E tak żeby było $AB . AD = AC . AE$; uczyniono to samo na dwóch innych liniach prostokątnych AB′, AC′. Po czem połączono DE, D′E′. Dowieśdź że dwie ostatnie proste przecinają się w punkcie stałym O.

670. — Na linii prostej wzięto trzy punkta A, B, C; przez A i C poprowadzono jakikolwiek okrąg, i połączono trzeci punkt B ze środkiem K łuku AMC, linią prostą która przecina drugi łuk w punkcie M. Znaleźć miejsce punktu M.

671. — Mając dane trzy punkta A, B, C, poprowadzić przez A i B okrąg taki, żeby styczne poprowadzono do niego z trzeciego punktu C czyniły kąt dany.

672. — Przez punkt P dany na płaszczyznie koła O, poprowadzono sieczną PAB, i przez skrajności cięciwy AB poprowadzono styczne koła AM, BM. Znaleźć miejsce punktu przecięcia M tych stycznych.

673. — Dana jest średnica AB w okręgu O; cięciwa DE posuwa się równolegle do siebie samej, i w każdem jej położeniu połączono DA, EB. Znaleźć miejsce punktów przecięć M tych dwóch prostych DA, EB.

674. — Mając dany okrąg i punkt P, przez ten pnnkt poprowadzono dwie sieczne PAA′ i PBB′ które przecinają okrąg w punktach A i A′, B i B′; potem, opisano okrąg na każdym z trójkątów PAB, PA′B′. Te dwa okręgi, mające punkt P spólny, przecinają się w drugim punkcie M. Znaleźć miejsce punktu M gdy jedna z siecznych zostaje stała a druga się zmienia.

675. — Dane są dwa punkta C i C′ na kierunku średnicy BB′ koła O, którego promień zmienia się ciągle; z punktu C poprowadzono styczną CA i połączono drugą skrajność A′ średnicy AA′ z punktem C′. Znaleźć miejsce punktów przecięć M siecznej A′C′ ze styczną AC.

676. — W trójkącie prostokątnym ABC, z wierzchołka kąta prostego A spuszczono prostopadłę AD na przeciwprostokątnę BC, ze spodka D prostopadłę DE na bok AB, ze spodka E prostopadłę EF na BC, ze spodka F prostopadłę FG na AB, i tak dalej. Dowieśdź że trójkąty ADE, DEF, EFG,... tworzą postępnię geometryczną, i wyrachować summę wszystkich powierzchni.

677. — To samo założenie; dowieśdź że summa prostopadłych AD + DE + ... ma się do boku AB w stosunku AB + BC do AC.

678. — W trójkącie ABC poprowadzić sieczną DE równoległą do podstawy BC, tak żeby summa kwadratów z linii DE i z odcinków BD, CD była równa danemu kwadratowi m^2.

679. — W trójkącie ABC, poprowadzono trzy poprzeczne Aa, Bb, Cc spotykające się w jednym punkcie, i przez spodki a, b, c tych poprzecznych poprowadzono koło które przecina boki w punktach a', b', c'; dowieśdź że poprzeczne Aa', Bb', Cc' spotykają się także w jednym punkcie.

680. — Mając dane koło i trójkąt, znaleźć na okręgu tego koła punkt taki, żeby summa kwadratów z jego odległości od trzech wierzchołków trójkąta była równa danemu kwadratowi.

681. — W punkcie przecięcia A dwóch kół umieszczono wierzchołek kąta którego ramiona przecinają te dwa koła w punktach B i C; dopełniono równoległoboku BACM. Jakie miejsce opisuje punkt M gdy kąt A obraca się około swego wierzchołka?

682. — Oznaczając przez A′, B′, C′ środki boków trójkąta, i biorąc jakikolwiek punkt M na jego płaszczyznie, dowieśdź że

$$\overline{AM}^2 + \overline{BM}^2 + \overline{CM}^2 = \overline{MA'}^2 + \overline{MB'}^2 + \overline{MC'}^2 + \tfrac{1}{4}(\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 + \overline{CA}^2).$$

683. — Oznaczając przez a', b', c' trzy wysokości trójkąta, przez α, β, γ odległości punktu M jego płaszczyzny od trzech boków, dowieśdź że

$$\frac{\alpha}{a'} + \frac{\beta}{b'} + \frac{\gamma}{c'} = 1;$$

jakiekolwiek jest położenie punktu M, byle dano przyzwoite znaki ilościom α, β, γ.

Wywieśdź ztąd promienie kół wpisanego i zawpisanych; punkt spotkania trzech wysokości trójkąta; etc.

684. — Zbudować trójkąt, znając bok, wysokość mu odpowiedającą i summę dwóch innych boków.

685. — Zbudować trójkąt, znając bok, wysokość mu odpowiedającą i różnicę dwóch innych boków.

686. — Zbudować trójkąt, znając wysokość, i różnicę między każdym z dwóch boków przy podstawie i odcinkiem przyległym który ta wysokość wyznacza na podstawie.

687. — Zbudować trójkąt, znając kąt, jego dwójsieczną, i ośrodkowę boku przeciwległego.

688. — Zbudować trójkąt, znając jego kąty i odległości trzech wierzchołków od jednego punktu płaszczyzny.

689. — Zbudować trójkąt równy danemu i mający wierzchołki na trzech okręgach danych.

690. — Zbudować trójkąt, znając stosunek dwóch boków, wysokość i ośrodkowę odpowiedającą trzeciemu bokowi.

691. — Między wszystkiemi trójkątami prostokątnemi równej przeciwprostokątnej, znaleźć taki w którymby summa jednego boku i jego rzutu na przeciwprostokątnej była maximum albo minimum.

692. — Przez wierzchołki trójkąta, poprowadzono linie proste czyniące z bokami kąty których dwójsieczne są równoległe do danego kierunku; dowieśdź że te proste schodzą się w jednym punkcie.

693. — Znaleźć miejsce punktów takich żeby, spuszczając z każdego z nich prostopadłe na boki trójkąta, powierzchnia trójkątów mających za wierzchołki trzy spodki prostopadłych była stała.

694. — W trójkącie ABC podstawa BC jest stała, i summa $AB + AC$ jest także stała; z wierzchołka C wyprowadzono prostopadłę CM do boku AC, i poprowadzono dwójsieczną AM spełnienia kąta BAC. Znaleźć miejsce punktu przecięcia M tych dwóch prostych.

695. — W trójkącie ABC podstawa BC jest stała, i różnica boków AB i AC jest także stała; znaleźć miejsce punktu przecięć dwójsiecznej AN kąta BAC z prostopadłą CN do boku AC.

696. — W trójkącie poprowadzono poprzeczną, i połączono każdy wierzchołek ze środkiem odcinka tej poprzecznej zawartego w kącie odpowiedającym. Dowieśdź że trzy proste tak wyznaczone przecinają boki we trzech punktach w linii prostej.

697. — Połączono punkt M z trzema wierzchołkami trójkąta ABC, i przez M poprowadzono prostopadłe do MA, MB, MC; dowieśdź że trzy punkta, w których te prostopadłe spotykają boki BC, AC, AB, są w linii prostej.

698. — Mając dany punkt P na dwójsiecznej kąta, wzięto ten punkt za wierzchołek kąta który się obraca około swego wierzchołka. Znaleźć miejsce rzutu punktu P na cięciwie którą ramiona kąta ruchomego wyznaczają w danym kącie.

699. — Mając dany trójkąt i punkt na jednym boku, wpisać trójkąt podobny innemu danemu i mający ten punkt za wierzchołek.

700. — Z punktu M wziętego na okręgu opisanym na trójkącie, spuszczono

na boki trzy prostopadłe które je spotykają w punktach P, Q, R; dowieśdź że linia *prosta* PQR jest równo oddalona od punktu M i od punktu spotkania trzech wysokości trójkąta.

701. — Jeśli trzy boki trójkąta obracają się około trzech punktów stałych w linii prostej, a dwa wierzchołki pomykają się każdy na jednej z dwóch linij prostych także stałych; wtedy trzeci wierzchołek opisuje linię prostą.

702. — *Albo ogólnie*, jeśli boki wielokąta obracają się każdy około jednego z punktów leżących na linii prostej, a wszystkie wierzchołki, *oprócz* jednego, posuwają się na liniach prostych także stałych; wtedy ostatni wierzchołek opisuje linię prostą; i tak samo każdy punkt spotkania dwóch boków nieprzyległych opisuje linię prostą.

703. — Jeśli trzy wierzchołki trójkąta posuwają się każdy po jednej ze trzech linij prostych stałych, spotykających się w jednym punkcie, a zaś dwa boki obracają się każdy około jednego z dwóch punktów stałych; wtedy trzeci bok przechodzi przez punkt stały w linii prostej z dwoma pierwszemi punktami.

704. — *Albo ogólnie*. Jeśli wierzchołki wielokąta posuwają się każdy po jednej z linij prostych stałych, spotykających się w jednym punkcie, a wszystkie boki, *oprócz* jednego, obracają się każdy około jednego z punktów stałych na linii prostej; wtedy ostatni bok przechodzi przez punkt stały leżący na tej prostej, i to się stosuje do każdej przekątnej.

705. — Do koła wpisanego w trójkąt ABC poprowadzono jakąkolwiek styczną bc, która spotyka boki AB i AC w punktach c i b. Jakie jest miejsce punktu przecięcia linij prostych Bb i Cc?

706. — Dana jest podstawa BC trójkąta ABC i summa dwóch boków przyległych $AB + AC$; poprowadzono dwójsieczną kąta A, i z wierzchołka B spuszczono na nią prostopadłę BM. Znaleźć miejsce punktu M.

707. W trójkącie ABC podobnym innemu danemu wierzchołek B jest stały, a wierzchołek C znajduje się na linii prostej *albo* na okręgu: jakie miejsce opisuje wierzchołek A?

708. — Mając dany trójkąt ABC, przez punkt D dany na boku BC, poprowadzono poprzeczną EDF, i na trójkątach DBE, DCF opisano koła które się przecinają w drugim punkcie M. Jakie miejsce opisuje punkt M gdy poprzeczna EDF zmienia położenie?

709. — W trójkącie ABC bok BC zostaje stały z wielkości i z położenia, a zaś kąt A zmienia położenie. Znaleźć następujące miejsca:

1° Miejsce punktów przecięć trzech wysokości; 2° miejsce środków ciężkości; 3° miejsce środków kół opisanych; 4° miejsce środków kół wpisanych; 5° miejsce środków kół zawpisanych.

710. — W trójkącie ABC, kąt A zostaje stały, bok przeciwległy BC zmienia się, ale tak żeby obwód trójkąta był stały; poprowadzono dwójsieczną kąta zewnętrznego B i spuszczono na nią prostopadłę CM z wierzchołka C. Znaleźć miejsce punktów M.

711. — Dwa boki AB i AC trójkąta mają długości dane, na trzecim BC wzięto punkt **M** który go dzieli w stosunku danym, gdy bok AB zostaje stały z położenia a bok AC obraca się około punktu A, jakie miejsce opisuje punkt M?

712. — Znaleźć miejsce wierzchołków C, C′, C″... trójkątów które są podobne danemu trójkątowi, i mają wierzchołek A w punkcie danym a wierzchołek B na danej prostej *albo* na danym okręgu.

713. — W trójkącie prostokątnym ABC spuszczono prostopadłę AD na przeciwprostokątnę, i zrzutowano jej spodek D na bokach AB i AC kąta prostego w punktach E i F. Oznaczając przeciwprostokątnę przez a, wysokość AD przez p, odcinek BE przez m, odcinek CF przez n, dowieśdź że:

$$1^\circ,\ p^3 = amn;\quad 2^\circ,\ m^2 + n^2 + 3p^2 = a^2;\quad 3^\circ,\ \sqrt[3]{m^2} + \sqrt[3]{n^2} = \sqrt[3]{a^2}.$$

714. — Mając dane trzy punkta A, B, C, nie w linii prostej, znaleźć miejsce punktów D takich żeby summa kwadratów $\overline{DA}^2 + \overline{DB}^2 + \overline{DC}^2$ równała się danemu kwadratowi k^2.

715. — Mając dane trzy boki trójkąta prostokątnego, wyrachować promienie kół stycznych wewnątrz i zewnątrz, i dowieśdź że jeden z tych promieni jest równy summie trzech innych.

716. — Mając dane dwie linie proste XX′, YY′ które się przecinają w punkcie O, poprowadzić przez dany punkt P poprzeczną tak żeby wyznaczyła trójkąt OAB mający powierzchnię daną.

717. — Jest dany kąt XOY, i punkt A na ramieniu OY; wyznaczyć na ramieniu OX dwa punkta M i N takie, żeby stosunek $\frac{OM}{ON}$ równał się danemu a kąt MAN był maximum.

718. — Przez dwa punkta A i B poprowadzono dwie równoległe AV, BV′ w strony przeciwne, wzięto punkt C na AV i połączono AB. Poprowadzić przez C poprzeczną CXY tak żeby summa trójkątów ACX, BXY była minimum.

719. — Przez wierzchołki A, B, C trójkąta poprowadzono równoległe do boków przeciwległych, te linie tworzą trójkąt A′B′C′ (w którym A′ jest na przeciw BC). Dowieśdź że koło dziewięciu punktów trójkąta ABC, dotyka kół dziewięciu punktów trójkątów A′BC, B′CA, C′AB, we środku boków BC, CA, AB.

720. — W czworoboku opisanym na kole, linia łącząca środki dwóch przekątnych przechodzi przez środek koła. (Twierdzenie Newtona, stosuje się do linij stożkowych).

Nawzajem, czworobok jest opisalny na kole, gdy linia łącząca środki dwóch przekątnych przechodzi przez punkt w którym się spotykają dwójsieczne dwóch kątów przeciwległych.

721. — W trójkącie opisanym na kole, linia łącząca środek boku ze środkiem odległości punktu zetknięcia tego boku od wierzchołka przeciwległego przechodzi przez środek koła. (Twierdzenie Gergonne, stosuje się do linij stożkowych.)

722. — Jeśli dwa czworoboki są wpisane w koło, a trzy boki jednego spotykają odpowiednio trzy boki drugiego we trzech punktach na linii prostej, wtedy czwarte boki tych czworoboków przecinają się na tej prostej.

723. — Jeśli dwa czworoboki są opisane na kole, a linie proste, łączące odpowiednio trzy wierzchołki jednego z wierzchołkami drugiego, spotykają się w jednym punkcie; wtedy prosta przechodząca przez dwa inne wierzchołki przechodzi przez ten sam punkt spotkania.

724. — W czworoboku ABCD, wzięto dowolnie punkt M na boku AB i punkt N na boku przeciwległym DC; potem, poprowadzono proste AN i DM które się przecinają w punkcie P, i proste BM i CN które się przecinają w punkcie Q; dowieśdź że prosta PQ przechodzi przez punkt stały.

725. — Koło, nakreślone na odległości środków dwóch kół jako średnicy, przechodzi przez wierzchołki czworoboku opisanego na tych dwóch kołach.

726. — Czworobok jest wpisany w koło, jego przekątne są pod kątem prostym i przechodzą przez punkt stały K; jakie miejsce opisują środki boków tego czworoboku?

727. — Wpisać w półokrąg trapez którego obwód jest dany.

728. — Wpisać w koło trapez, znając powierzchnię i jeden kąt.

729. — W równoległoboku ABCD poprowadzono dwie poprzeczne EF i GH równoległe do boków, i połączono EG, FH. Znaleźć miejsce spotkań tych prostych.

730. — W dane koło wpisać czworobok którego są wiadome trzy przekątne.

731.—W czworoboku, ABCD opisanym na kole, którego dotyka w punktach E, F, G, H, połączono środek koła O z punktem przecięcia K linij prostych EH i FG; dowieśdź że prosta KO jest prostopadła do przekątnej AC.

732. — Znaleźć miejsce punktów z których widać pod kątem prostym przekątne czworoboku wypukłego opisanego na kole.

733. — Czworobok podzielono na dwa inne sieczną jakąkolwiek; dowieśdź że punkta przecięć przekątnych trzech czworoboków są w lini prostej.

734. — Trzy koła, opisane na trzech przekątnych czworoboku zupełnego jako średnicach, przecinają prostokątnie koło opisane na trójkącie utworzonym przez te trzy przekątne.

735. — W czworoboku ABCD są dane trzy boki AB, BC, CD i przekątna AC; znaleźć: 1° miejsce czwartego wierzchołka D; 2° miejsce środka przekątnej BD; 3° miejsce środka linii łączącej środki dwóch przekątnych.

736. — W czworoboku wpisalnym ABCD poprowadzono przekątne AC i BD. Uważając trójkąty CAB, DAB, i ACD, BCD, mające na podstawy dwa boki przeciwległe; dowieśdź że punkta spotkania trzech wysokości, w każdym z tych trójkątów, są wierzchołkami czworoboku którego boki są równe bokom pierwszego i do nich równoległe.

737. — Mając dany wielokąt, z punktu jakiegokolwiek jego płaszczyzny jako środka, nakreślono w tę samą stronę łuki kół równej liczby stopni wychodzące z wierzchołków tego wielokąta. Dowieśdź że drugie skrajności tych łuków są wierzchołkami drugiego wielokąta równego pierwszemu.

738. — Mając dany sześciokąt foremny ABCDEF, przez jego środek poprowadzono sieczną która spotyka AC i AE w G i H; połączono BG, FH; znaleźć miejsce punktu spotkania prostych BG i FH.

739. — Dany jest ukośnik ABCD; przez wierzchołek C poprowadzono jakąkolwiek prostę która przecina boki AB, AD w punktach E, F; połączono BF, DE. Znaleźć miejsce przecięć M tych dwóch prostych.

740. — Dowieśdź 1° że wszelki równoległobok opisany na kole jest ukośnikiem. 2° Znaleźć minimum jego obwodu i jego powierzchni. 3° Jeśli połączono cztery punkta zetknięć, utworzy się prostokąt; znaleźć maximum jego powierzchni i jego obwodu. 4° Pokazać że, jakikolwiek jest ukośnik, wieloczyn jego powierzchni przez powierzchnię prostokąta jest ilością stałą.

741. — Mając dane dwa koła, poprowadzić sieczną równoległą do danego kierunku, tak żeby summa cięciw przejętych temi okręgami była maximum.

742. — Między wszystkiemi odcinkami koła, mającemi daną powierzchnię i daną cięciwę, znaleźć taki którego łuk jest najmniejszy możebny.

743. — Przez punkt wzięty na okręgu poprowadzono trzy okręgi, i, na trzech cięciwach jako średnicach, opisano okręgi ; dowieśdź że ostatnie trzy okręgi przecinają się we trzech punktach w linii prostej.

744. — Miejsce geometryczne środków kół które widać z dwóch punktów danych pod kątami danemi.

745. — Mając dane pięć linij prostych które, przecinając się po dwie, tworzą pięć czworoboków zupełnych, połączono środki trzech przekątnych każdego z nich. Dowieśdź ze te pięć linij prostych tak otrzymane schodzą się w jednym punkcie.

746. — Mając dane koło, linię prostą i punkt na tej prostej, poprowadzić koło styczne do danej prostej w punkcie danym, i któreby przecinało dane koło pod kątem danym.

747.— Jest dane koło i punkt P wewnątrz, a cięciwę AB widać z punktu P pod kątem stałym. Znaleźć : 1° miejsce środka cięciwy AB ; 2° miejsce rzutu punktu P na cięciwie AB.

748. — Mając dane koło O i punkt A na jego płaszczyznie, poprowadzono do jakiegokolwiek promienia OB styczną BT, i wzięto punkt jej przecięcia M z parabolą, która ma punkt A za ognisko, promień OB za kierownicę. Znaleźć miejsce punktu M.

749. — W ellipsie cięciwę AB widać z ogniska F pod kątem stałym ; dowieśdź że ta cięciwa jest styczną do innej ellipsy która ma to samo ognisko F i kierownicę odpowiedającą pierwszej. (Użyć biegunowej wzajemnej.)

750. — W poprzedzającem zagadnieniu poprowadzono styczne do ellipsy na skrajnościach A i B cięciwy ; znaleść miejsce punktu spotkania tych stycznych.

751. — Dwie ellipsy danej wielkości mają spólne ognisko, jedna z nich zostaje stała a druga obraca się około tego ogniska. Znależć miejsce punktu spotkania M stycznych spólnych.

752. — Mając dany kąt AOB, przez punkt P poprowadzono sieczne które przecinają ramiona OA i OB w punktach a i a', b i b', c i c', ; po czem, posunięto ramię OA na jego kierunku pewną długością, taką że punkta a', b', c', wzięły położenie a'', b'', c'',... Połączono ab'', ba'' ; ac'', ca''... ; powieśdź że punkta skrzyżowań są na jednej linii prostej.

753. — Mając dane dwa trójkąty sprzężone względem koła (to jest, takie w których wierzchołek jednego trójkąta jest biegunem boku w drugim trójkącie), dowieśdź że linie proste łączące wierzchołki odpowiedające spotykają się w jednym punkcie.

754. — Znaleźć punkt który ma tę samą biegunowę względem dwóch kół.

755. — Dowieśdź że istnieje dwa punkta których biegunowemi, względem układu kół mających tę samą oś pierwiastną, są dwie proste stałe.

756. — Znaleźć miejsce punktów zetknięć stycznych, które są poprowadzone z jednego punktu osi pierwiastnéj danego układu kół do tychże kół.

757. — Gdy czworobok jest wpisany w koło, biegunowe jakiegokolwiek punktu płaszczyzny, względne do koła i do dwóch kątów utworzonych przez dwa dwojany boków przeciwległych, spotykają się w jednym punkcie.

758. — W czworoboku, biegunowe jednego punktu płaszczyzny względne do trzech kątów utworzonych, jeden przez dwa boki przeciwległe, drugi przez inne dwa boki przeciwległe, a trzeci przez dwie przekątne, spotykają się w jednym punkcie.

759. — Gdy punkta zetknięć boków trójkąta opisanego na kole są wierzchołkami trójkąta wpisanego, wtedy boki przeciwległe tych trójkątów spotykają się na biegunowej punktu w którym się przecinają linie łączące ich wierzchołki przeciwległé.

760 — Gdy puukta zetknięć czworoboku opisanego na kole są wierzchołkami czworoboku wpisanego, wtedy :

1° Cztery przekątne tych czworoboków przecinają się w jednym punkcie S;

2° Dwa boki przeciwległe jednego czworoboku i jedna przekątna drugiego spotykają się w punkcie leżącym na biegunowej punktu S;

3° Cztery proste łączące punkt S z punktami przecięć boków przeciwległych tworzą pęk harmoniczny.

761. — Cztery punkta a, b, c, d na linii prostej, jakiekolwiek są ich położenia względne, wyznaczają sześć odcinków które dają równanie

$$ab \,.\, cd + ac \,.\, db + ad \,.\, bc.$$

762. — Cztery punkta w linii prostej mają stosunek nieharmoniczny równy stosunkowi nieharmonicznemu ich biegunowych względem koła.

I nawzajem, stosunek nieharmoniczny czterech linij prostych przechodzących przez jeden punkt jest równy stosunkowi nieharmonicznemu ich biegunów względem koła.

763. — Stosunek nieharmoniczny czterech punktów okręgu jest równy

stosunkowi wieloczynów boków przeciwległych czworoboku wpisanego, który ma te punkta za wierzchołki.

764. — Przez dany punkt poprowadzić koło któreby miało daną prostę za oś pierwiastną z danem kołem.

765. — Biegunowe czterech punktów harmonicznych tworzą pęk harmoniczny; *i nawzajem*.

766. — Punkt B jest jakikolwiek na płaszczyznie dwóch kół, B′ jest punktem przecięcia dwóch biegunowych punktu B względem tych kół (B i B′ nazywają się *punktami wzajemnemi*). Dowieśdź że oś pierwiastna tych dwóch kół przechodzi przez środek prostej BB′.

767. — Bieguny osi pierwiastnej dwóch kół, względne do tych kół, dzielą harmonicznie odległość ich środków podobieństwa.

768. — Gdy koła mają spólną oś pierwiastną, wtedy biegunowe jakiegokolwiek punktu ich płaszczyzny, względne do tych kół, przecinają się w jednym punkcie.

769. — Gdy trzy koła mają spólną oś pierwiastną, a z punktu wziętego na jednem z nich poprowadzono styczną do każdego z dwóch innych i połączono oba punkta zetknięć linią prostą, te dwa koła przejmują na tej prostej dwie cięciwy które są w stosunku stałym

770. — Jeśli z jednego punktu osi pierwiastnej dwóch kół poprowadzono styczną do każdego z dwóch innych kół, spółśrodkowych z pierwszemi, różnica kwadratów z tych stycznych jest stała.

771. — W proporcyi harmonicznej $aba'b'$, sprzężony harmoniczny środka odcinka bb' względem a i a' przystaje do sprzężonego harmonicznego środka odcinka aa' względem b i b'; ten punkt jest punktem środkowym inwolucyi wyznaczonej przez dwa dwojany a, a', i b, b'.

772. — Gdy trzy koła, mające środki na linii prostej, przecinają prostokątnie dane koło, prostopadła spuszczona ze środka koła danego na tę prostę jest spólną osią pierwiastną tych trzech kół.

773. — Znaleźć miejsce punktów takich, żeby biegunowe każdego z nich względem trzech kół danych spotykały się w jednym punkcie.

774. — Jeśli, w czworoboku zupełnym, poprowadzono poprzeczną która spotyka jego trzy przekątne, i wzięto na każdej z tych przekątnych punkt który, z poprzeczną, dzieli ją harmonicznie, trzy punkta tak wyznaczone będą w linii prostej.

775. — Biegunowe jednego punktu względem trzech kątów trójkąta spo-

tykają boki przeciwległe tym kątom we trzech punktach w linii prostej.

Co się staje z twierdzeniem gdy punkt dany jest w nieskończoności ?

776. — Przez punkt wzięty na osi pierwiastnej dwóch kół, i przez bieguny tej osi względne do tych samych kół, poprowadzono dwie poprzeczne ; dowieśdź że linia łącząca punkta w których poprzeczne przecinają koła przechodzi przez jeden ze środków podobieństwa.

777. — Mając dane dwa okręgi, jeśli z punktu wziętego na jednym z nich poprowadzono styczną do drugiego, i prostopadłę do osi pierwiastnej, kwadraty ze stycznej i z prostopadłej będą w stosunku stałym.

778. — Mając dane dwa okręgi, i punkt A na jednym a punkt B na drugim; znaleźć na osi pierwiastnej tych okręgów, punkt C taki, żeby linia prosta DE, łącząca punkta D i E w których sieczne CA i CB przecinają okręgi, była prostopadła do osi pierwiastnej.

779. — Mając dane na linii prostej trzy odcinki aa', bb', cc', których środki są α, β, γ, i punkt m jakikolwiek, dowieśdź że funkcya

$$ma\,.\,ma'\,.\,\beta\gamma + mb\,.\,mb'\,.\,\gamma\alpha + mc\,.\,mc'\,.\,\alpha\beta$$

ma zawsze tę samą wartość, jakiekolwiek punkt m bierze położenie.

780. — Mając dane dwa punkta niezmienne A i B, wzięto na kierunku AB jakikolwiek punkt M, i z niego jako środka, nakreślono okrąg promienia R ; ten promień jest wyznaczony równaniem $R\,.\,AB = h\,.\,AM + k\,.\,BM$ w którem h i k są dwie długości dane. Dowieśdź że wszystkie koła tak nakreślone, odpowiedające różnym punktom M linii AB, są styczne do dwóch linii prostych stałych.

781. — Mając dane na linii prostej dwa dwojany odcinków aa', bb' i AA', BB', znaleźć odcinek cc' któryby był w inwolucyi z każdym z tych dwojanów.

782. — Mając dany punkt środkowy inwolucyi, jeden dwojan punktów odpowiednych i środek odcinka drugiego dwojanu, wyznaczyć ten dwojan punktów.

783. — Jeśli ze trzech punktów na linii prostej poprowadzono trzy dwojany stycznych do koła, te styczne wyznaczą na każdej linii stycznej sześć punktów w inwolucyi.

784. — Jeśli z jednego punktu poprowadzono trzy sieczne koła, linie proste łączące sześć punktów przecięć z jednym punktem okręgu, tworzą pęk w inwolucyi. I nawzajem.

785. — Mając dane dwa podziały jednokreślne na dwóch liniach pros-

tych, znaleźć dwa odcinki odpowiedne które widać z dwóch punktów danych pod kątami danemi.

786. — Mając dane dwie proste podzielone jednokreślnie, znaleźć miejsce punktów takich, żeby promienie poprowadzone z każdego z nich do punktów podziałów tworzyły dwa pęki w inwolucyi.

787. — Mając dane dwa pęki jednokreślne, nie mające spólnego środka, i punkt, poprowadzić przez ten punkt linię prostą tak żeby te dwa pęki wyznaczały na niej dwa podziały w inwolucyi.

788. Gdy dwojany punktów a,a', b,b', c,c' są sprzężone względem koła, dwa pęki czterech linij prostych utworzone, łącząc każdy z punktów a,a' ze czterema innemi b,b', c,c', są jednokreślne.

789. — Jeśli wierzchołki dwóch trójkątów ABC, A'B'C' są dwojanami punktów sprzężonych względem koła, dwa boki, *np.* AB, A'B', są podzielone jednokreślnie przez cztery inne.

790. — Mając dane dwa pęki jednokreślne niespółśrodkowe, można zawsze je przeciąć jedną poprzeczną wedle dwóch podziałów w inwolucyi. Wszystkie poprzeczne dopełniające tego warunku przechodzą przez ten sam punkt.

791. — Trzy dwojany punktów leżących na linii prostej i sprzężonych względem koła, tworzą inwolucyę sześciu punktów, w której punktami podwójnemi są dwa punkta przecięć (rzeczywiste albo urojone) tej prostej z kołem.

792. — Jeśli trzy kąty, opisane na kole, mają wierzchołki na linii prostej, ramiona tych kątów spotykają każdą styczną koła w sześciu punktach w inwolucyi.

793. — Trzy dwojany linii prostych przechodzących przez jeden punkt i sprzężonych względem koła tworzą pęk inwolucyjny, w którym promieniami podwójnemi są styczne do koła poprowadzone przez ten punkt.

794. — W dwóch pękach w inwolucyi istnieje zawsze jeden dwojan, i tylko jeden, promieni odpowiednych równo nachylonych na promień dany. Ale, jeśli w dwóch pękach inwolucyjnych, jest dwa dwojany promieni odpowiednych równo nachylonych na jeden promień, wtedy ten promień jest dwójsieczną kątów wszystkich innych dwojanów.

795. — Dane są dwa punkta stałe a, b, i linia prosta LL'. Na LL' wzięto dwa punkta jakiekolwiek m, n, i połączono am, an, bm, bn; te proste przecinają się w punktach o, o'. Dowieśdź że prosta oo' przecina prostę ab w punkcie stałym.

796. — Mając dane dwie proste AL, A'L' i punkt P na ich płaszczyznie, poprowadzić przez P dwie poprzeczne któreby przejmowały na danych prostych dwa odcinki długości danych λ i μ.

797. — Mając dane dwa koła, wpisane w jeden czworobok którego boki przecinają oś pierwiastną w czterech punktach; dowieśdź że można wpisać w drugie koło nieskończoną liczbę czworoboków którychby boki przechodziły przez te same cztery punkta.

798. — Niech będą α, β, γ środki boków BC, CA, AB trójkąta ABC, O środek koła opisanego. Poprowadzono $O\alpha$, $O\beta$, $O\gamma$ i przedłużono te linie aż do A', B', C', tak żeby było

$$OA' = 2O\alpha, \quad OB' = 2O\beta, \quad OC' = 2O\gamma.$$

Dowieśdź że koło dziewięciu punktów trójkąta ABC przechodzi przez punkta przecięć, rzeczywiste albo urojone, okręgu opisanego z okręgiem sprzężonym każdego ze czterech trójkątów OB'C', OC'A', OA'B', A'B'C'.

799. — Mając dane dwie linie proste L, L' umieścić między niemi cięciwę aa' tak, żeby ją było widać z dwóch punktów danych P, P', pod kątami danemi Ω, Ω'.

Uważać przypadki szczególne: *np.* gdy jeden z kątów jest zero, albo gdy dwie dane proste przystają do siebie.

800. — Jest dany wielokąt mający n boków, i są dane n punktów na jego płasczyznie; wpisać w ten wielokąt inny wielokąt któregoby boki przechodziły każdy przez jeden z n punktów danych.

801. — Mając dane trzy punkta m, n, p i dwie linie proste L, L'; poprowadzić przez te trzy punkta boki trójkąta ABC któregoby wierzchołki A, B, znajdowały się na danych prostych L, L', a kąt C rownał się kątowi danemu.

802. — Promień światły wychodzi z punktu stałego i odbija się następnie od kilku linij prostych; wyznaczyć jaki kierunek powinien wziąć promień początkowy aby ostatni promień odbity przecinał go pod danym kątem.

KONIEC GEOMETRYI PŁASKIEJ.

Paryż. — Drukarnia E. MARTINET, ulica Mignon, 2.

GEOMETRYA PRZESTRZENI (*)

KSIĘGA SZÓSTA

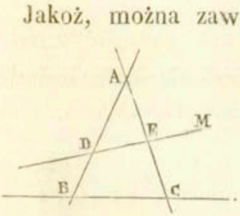
PŁASCZYZNY.

Wiemy już że *płasczyzną* nazywa się taka powierzchnia do której przystaje całkiiem wszelka linia prosta jak tylko ma z nią dwa punkta spólne.

TWIERDZENIE I.

Przez trzy punkta A, B, C, *nie w linii prostej, można zawsze poprowadzić płasczyznę, ale tylko jedną.*

Jakoż, można zawsze wyobrazić linię prostą przechodzącą przez dwa punkta A i B, i przez nią poprowadzić jakąkolwiek płasczyznę; a potem, obracając tę płasczyznę około prostej AB, można oczywiście otrzymać położenie w którem dotyka punktu C. Istnieje więc płasczyzna przechodząca przez trzy dane punkta A, B, C.



Ta płasczyzna jest jedyna. Albowiem, niech będzie, jeśli można, M jeden z punktów drugiej płasczyzny przechodzącej przez te

(*) Geometryę przestrzeni nazywano dawniej SOLIDOMETRYĄ; niewłaściwie, bo solidometrya (mierzenie brył) jest małą tylko częścią geometryi przestrzeni.

same trzy punkta A, B, C. Przez punkt M, i przez punkt D wzięty na prostej AB, poprowadźmy linię prostą MD która spotka prostę AC w punkcie E różnym od D. Owoż, prosta MED, mająca dwa punkta D i E spólne z obydwiema płasczyznami, leży cała na obydwóch; zatem wszelki punkt M drugiej płasczyzny należy do pierwszej, i temsamem druga płasczyzna nie jest różna od pierwszej.

Więc, przez trzy punkta nie leżące w linii prostej można zawsze poprowadzić jedną płasczyznę, i tylko jedną. To wszystko razem wyraża się treściwie mówiąc:

Trzy punkta nie w linii prostej WYZNACZAJĄ *płasczyznę.*

WNIOSEK I. — Ztąd wynika że: *Linia prosta i punkt leżący zewnątrz wyznaczają płasczyznę.*

Dwie proste przecinające się wyznaczają płasczyznę.

II. — *Dwie proste równoległe wyznaczają płasczyznę.* Bo dwie równoległe leżą na tej samej płasczyznie; a przez jedną z nich i przez punkt wzięty na drugiej, jedną tylko płasczyznę poprowadzić można.

UWAGA. — Z tego co poprzedza łatwo wnosimy że:

Miejscem położeń po sobie idących linii prostej, która przechodzi przez punkt stały i opiera się na drugiej prostej, jest płasczyzna wyznaczona przez ten punkt i tę prostę.

Miejscem położeń po sobie idących linii prostej, która zostaje równoległą do siebie samej i spotyka daną prostę, jest płasczyzna wyznaczona przez tę prostę i przez jedno z położeń prostej ruchomej.

TWIERDZENIE II.

Przecięcie się dwóch płasczyzn jest linią prostą.

Bo, gdyby trzy punkta przecięcia dwóch płasczyzn nie były w linii prostej, te dwie płasczyzny, przechodzące prez takie trzy punkta, nie byłyby oddzielne.

WNIOSEK. — *Przecięcie się trzech płasczyzn jest punktem*, w którym przecięcie dwóch pierwszych płaszczyzn spotyka trzecią płaszczyznę.

Płaszczyzna jest powierzchnią nieograniczoną; ale, dla utkwienia myśli, przedstawia się zwykle płaszczyzny ograniczone równoległobokami; jako pokazują figury poniżej.

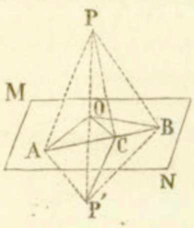
LINIE PROSTE I PŁASCZYZNY PROSTOPADŁE.

Określenie I. — Mówi się że linia prosta jest *prostopadła do płaszczyzny*, gdy jest prostopadła do wszystkich prostych które przechodzą przez jej spodek na tej płaszczyznie. Nawzajem, *płaszczyzna* jest wtedy *prostopadła do tej prostej*.

Nazywa się *pochyłą do płaszczyzny* wszelka prosta która, spotykając tę płaszczyznę, nie jest do niej prostopadła.

Twierdzenie III.

Jeśli linia prosta PO *jest prostopadła do dwóch prostych* OA, OB, *przechodzących przez jej spodek na płaszczyznie* MN, *to jest prostopadła do tej płaszczyzny*.



Jakoż, przez spodek O prostopadłej OP poprowadźmy, na płaszczyznie MN, jakąkolwiek prostę OC i poprzeczną ACB; po czem, przedłużmy OP długością $OP' = OP$, i połączmy punkta P, P′ z punktami A, C, B.

Owoż, prosta AO jest prostopadła we środku prostej PP′, zatem pochyłe AP, AP′ są równe; dla tej samej przyczyny pochyłe BP, BP′ są równe. Więc dwa trójkąty ABP, ABP′, mające trzy boki odpowiednio równe, przystają do siebie, a temsamem proste CP, CP′ przystają także i są równe. Ztąd wynika że w trójkącie równoramiennym CPP′ prosta CO jest prostopadła do podstawy PP′. Więc linia PO, prostopadła do wszelkiej prostej OC przechodzącej przez jej spodek na płaszczyznie MN, jest prostopadła do tej płaszczyzny.

Nawzajem, *wszystkie prostopadłe* OA, OB, OC...... *wyprowadzone z jednego punktu prostej* OP, *leżą na jednej płaszczyznie, prostopadłej do tej linii.*

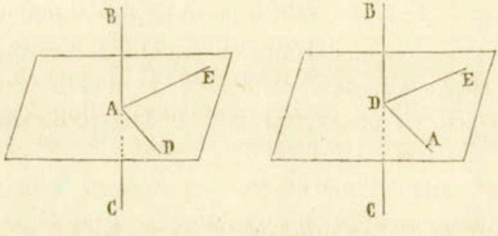
Jakoż, prosta OP, jako prostopadła do OA i OB, jest prostopadła do płaszczyzny AOB; zatem jeśli przez OP i OC poprowadzimy płaszczyznę POC, jej przecięcie z płaszczyzną AOB będzie prostopadłe do OP. Owoż, prosta OC leżąca na płaszczyznie POC jest właśnie prostopadła do OP; więc prosta OC jest przecięciem tych dwóch płaszczyzn, to jest leży na płaszczyznie AOB która jest prostopadła do OP.

Ztąd wnosimy że

Płaszczyzna prostopadła do linii prostej jest miejscem geometrycznem prostopadłych do tej linii przez jeden jej punkt przechodzących.

Twierdzenie IV.

Przez punkt dany A *można zawsze poprowadzić płaszczyznę prostopadłą do linii prostej* BC, *ale tylko jedną.*



1° Jeśli punkt A jest dany na prostej BC, wyobraźmy dwie różne płaszczyzny przechodzące prez tę linię, i na nich poprowadźmy przez punkt A proste AD i AE prostopadłe do BC; płaszczyzna DAE będzie prostopadła do prostej BC w punkcie A.

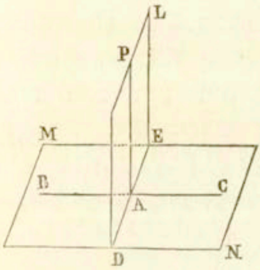
Ta płaszczyzna DAE jest jedyna, jako miejsce prostopadłych wyprowadzonych z jednego punktu A prostej BC (3. *wz.*).

2° Przypuśćmy punkt A dany zewnątrz prostej BC. Na płasczyznie ABC, spuśćmy z punktu A prostopadłę AD na BC, i ze spodka D wyprowadźmy, na innej płasczyznie przechodzącej przez BC, prostopadłę DE do BC; płasczyzna ADE będzie oczywiście prostopadła do danej prostej BC.

Ta płasczyzna jest jedyna; bo płasczyzna przechodząca przez punkt A i prostopadła do prostej BC, zawierając prostopadłę AD do BC, musi przechodzić przez punkt D; owoż przez punkt D prostej BC jedną tylko płasczyznę prostopadłę do tej linii poprowadzić można (1°).

Twierdzenie V.

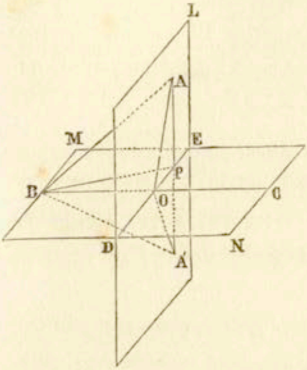
Przez punkt dany A *można zawsze poprowadzić prostopadłę do płasczyzny* MN, *ale tylko jedną.*



1° Jakoż, niech będzie punkt A dany na płasczyznie MN. Można zawsze, na tej płasczyznie i przez ten punkt, poprowadzić jakąkolwiek prostę BC, i w punkcie A wystawić na prostej BC płasczyznę prostopadłą DL która przetnie płasczyznę MN wedle prostej DE. Jeśli więc na płasczyznie DL wyprowadzimy z punktu A prostopadłę AP do DE, ta prosta AP, jako prostopadła do dwóch prostych DE i BC leżących na płasczyznie MN, będzie prostopadła do tej płasczyzny.

Nadto, z punktu A nie można wyprowadzić drugiej prostopadłej do płasczyzny MN; bo wszelka prosta przechodząca przez punkt A, ale różna od AP, albo leży na płasczyznie DL a więc nie jest prostopadła do DE, albo leży zewnątrz płasczyzny DL a więc nie jest prostopadła do BC.

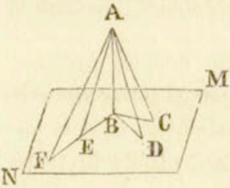
2° Jeśli punkt A jest dany zewnątrz płasczyzny MN, można zawsze, na tej płasczyznie, wziąć jakąkolwiek prostę BC, i poprowadzić do niej przez punkt A płasczyznę prostopadłą DL która przecina BC w punkcie O i płaszczyznę MN wedle prostej DE; potem na płaszczyznie DL spuścić z punktu A prostopadłę AP na DE; ta prosta AP będzie prostopadła do płaszczyzny MN. Jakoż, przedłużmy prostę AP długością PA′ = PA, i połączmy BA, BA′, OA, OA′. Ponieważ pochyłe OA, OA′ są równe, dwa trójkąty prostokątne OBA, OBA′, mające kąty proste BOA, BOA′ zawarte między bokami równemi każdy każdemu, są równe; zatem BA = BA′. Co dowodzi że prosta AP jest prostopadła do PB. Więc prosta AP, prostopadła do dwóch prostych PD i PB leżących na płaszczyznie MN, jest prostopadła do tej płaszczyzny.



Żadna inna prosta przechodząca przez punkt A, jako AB, różna od AP, nie może być prostopadła do płaszczyzny MN; bo w trójkącie ABP bok AP jest prostopadły do BP, więc prosta AB jest pochyłą do BP a temsamem pochyłą do płaszczyzny MN.

Twierdzenie VI.

Jeśli z punktu A, wziętego zewnątrz płaszczyzny MN, spuszczono na tę płaszczyznę prostopadłę AB i pochyłe AC, AD, AE,... wtedy



1° *Prostopadła* AB *jest krótsza od wszelkiej pochyłej* AC.

2° *Dwie pochyłe* AC, AD, *równo oddalone od spodka prostopadłej, są równe.*

3° *Z dwóch pochyłych* AC, AF, *ta jest krótsza która się mniej oddala od spodka prostop dłej.*

I nawzajem.

Co do 1° W trójkącie ABC kąt B jest prosty; więc AB < AC.

2° Ponieważ z założenia BC = BD, trójkąty prostokątne ABC, ABD są równe. Więc pochyłe AC, AD są równe.

3° Jeśli BC < BF, na prostej BF weźmy BE = BC; będzie pochyła AE = AC (2°). A że pochyłe AE, AF i prostopadła AB leżą na jednej płasczyznie, mamy AE < AF; więc AC < AF.

Wzajemnice są oczywiste.

WNIOSEK. — Ztąd wynika że *miejscem spodków, pochyłych równych poprowadzonych z jednego punktu do płasczyzny, jest okrąg mający za środek spodek prostopadłej spuszczonej z tego punktu na płasczyznę.*

OKREŚLENIE II. — ODLEGŁOŚCIĄ *punktu od płasczyzny jest* PROSTOPADŁA *spuszczona z tego punktu na płasczyznę*, jako najkrótsza droga.

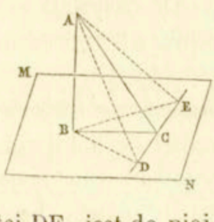
III. — Nazywa się OSIĄ koła prostopadła do płasczyzny tego koła przechodząca przez jego środek.

Więc, na mocy tego co poprzedza, *oś koła jest miejscem punktów równo oddalonych od jego okręgu.*

UWAGA. — Można praktycznie spuścić prostopadłę na płasczyznę. Za pomocą nici wytężonej, której jeden kraniec jest utkwiony w danym punkcie A a drugi zaopatrzony ołówkiem, oznacz na płasczyznie trzy punkta C, D, E. Środek koła przez te punkta przechodzącego będzie spodkiem prostopadłej szukanej.

TWIERDZENIE VII.

Jeśli ze spodka B *prostopadłej* AB *do płasczyzny* MN *spuścimy prostopadłę* BC *na prostę* DE *tej płasczyzny, wszelka prosta* AC *łącząca spodek* C *drugiej prostopadłej z jakimkolwiek punktem* A *pierwszej będzie prostopadła do* DE.

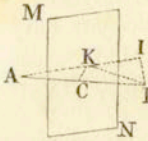


Jakoż, weźmy CE = CD, i połączmy AD, AE, BD, BE, Pochyłe BD i BE, równo oddalone od spodka prostopadłej BC, są równe; zatem pochyłe AD i AE są równe (6). Więc prosta AC, mająca dwa punkta A i C równo oddalone od skrajności D i E prostej DE, jest do niej prostopadła.

Uwaga. — To zadanie znane pod nazwiskiem *twierdzenia trzech prostopadłych*, pokazuje że prosta DE jest prostopadła do płaszczyzny ABC, i temsamem prostopadła do wszelkiej prostej AC leżącej na tej płaszczyznie. Dobrze jest uważać że dwie proste jako AB i DE, nie leżące na jednej płaszczyznie, mają *spólną prostopadłę* BC *która jest ich najkrótszą odległością*. Wszelka albowiem inna prosta AD, łącząca punkta A i D tych dwóch prostych, jest większa od AC a tem bardziej większa od BC. To zarazem dowodzi że w przestrzeni mogą być dwie proste AB i DE, prostopadłe do trzeciej BC, a nie być równoległe, ani się spotykać.

Twierdzenie VIII.

Płaszczyzna prostopadła we środku linii prostej jest miejscem geometrycznem punktów równo oddalonych od obydwóch skrajności tej linii.

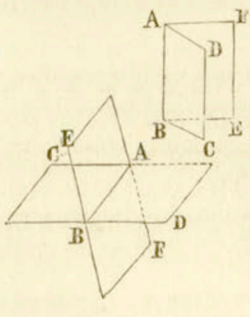


1° Jakoż, niech będzie K punkt płaszczyzny MN prostopadłej we środku C prostej AB. Połączmy KA, KB, KC. Będzie pochyła $KA = KB$.

2° Uważajmy punkt I poza płaszczyzną MN, i niech będzie K punkt jej przecięcia z prostą AI. Mamy widocznie $IB < IA$.

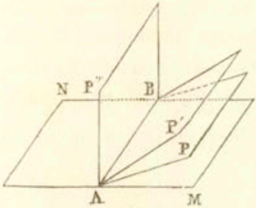
KĄTY DWÓJŚCIENNE, ICH MIARA.

Określenie IV. — Dwie płaszczyzny wychodzące z jednej lini prostej tworzą figurę która się nazywa *kątem dwójściennym* jako DABE.



Te płaszczyzny AC, AE nazywają się *ścianami*, a prosta spólna AB *krawędzią* kąta dwójściennego.

Kąt dwójścienny oznacza się dwiema literami krawędzi, i mówi się kąt dwójścienny AB; ale, gdy kilka kątów mają tę samą krawędź, wtedy należy brać cztery litery, kładąc we środku litery krawędzi a na skrajnościach litery ścian. I tak, cztery kąty drugiej figury czytają się jako następuje: DABE, CABE, CABF, DABF.



Aby mieć wyobrażenie wielkości kąta dwójściennego, dość jest przypuścić że jedna z jego ścian P, najpierwej przyłożona do ściany M, obraca się potem około krawędzi AB, i bierze różne położenia P′, P″... nieprzerwanie po sobie idące; w tym obrocie ściana ruchoma P czyni ze ścianą niezmienną M kąt dwójścienny który, zaczynając od zera, rośnie ciągle. To jasno pokazuje że wielkość kąta dwójściennego nie zależy od rozciągłości jego ścian ale od ich roztworu.

Pojmujemy teraz łatwo co znaczy *dodawać* albo *odciągać* kąty dwójścienne, i widzimy zaraz że kąt dwójścienny MABP′ jest summą kątów MABP i PABP′, a zaś kąt dwójścienny MABP różnicą kątów MABP′ i PABP′.

V. — Dwa kąty dwójścienne, jako MABP i PABP″ mające spólną krawędź i spólną ścianę, a będące zewnątrz jeden drugiego, nazywają się *przyległemi*.

Płaszczyzna BP dzieląca kąt MABP′ na dwie równe części jest płaszczyzną dwójsieczną tego kąta.

Dwa kąty dwójścienne są *krawędzią przeciwległe* gdy obie ściany jednego są przedłużeniem ścian drugiego, jako CABE i DABF (*figura poprzednia*).

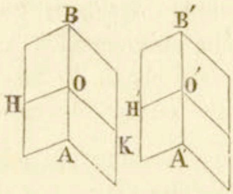
VI. — Gdy jedna płaszczyzna spotykając drugą czyni z nią dwa kąty przyległe równe, każdy z tych kątów nazywa się *kątem dwójściennym prostym*, a te płaszczyzny tworzące kąt dwójścienny prosty są *płaszczyznami prostopadłemi* do siebie.

Płaszczyzna sieczna która nie jest prostopadła do drugiej jest do niej *pochyła*.

VII. — Kąt dwóch prostopadłych, wyprowadzonych z jednego punktu krawędzi na ścianach kąta dwójściennego, nazywa się kątem *prostolinijnym* (albo kątem płaskim) kąta dwójściennego; takim jest kąt HOK odpowiedający kątowi dwójściennemu AB (*figura poniżej*.)

Twierdzenie VIII.

Kąty dwójścienne równe mają kąty prostolinijne równe. I nawzajem.



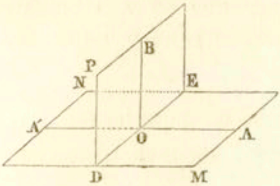
Połóżmy kąt dwójścienny AB na dwójściennym A′B′, tak żeby punkt O padł na O′ i krawędź AB przystała do A′B′. Ponieważ te dwa kąty dwójścienne są równe, ich ściany odpowiedne przystają do siebie; zatem prostopadła OH przystaje do O′H′, i OK do O′K′. Więc kąty prostolinijne HOK, H′O′K′ są równe.

Nawzajem, *gdy kąty prostolinijne są równe, kąty dwójścienne odpowiedające są także równe.* Bo, przenieśmy kąt dwójścienny AB na dwójścienny A′B′, tak żeby kąt prostolinijny HOK przystał do swego równego H′O′K′. Wtedy, krawędzie AB i A′B′ jako prostopadłe odpowiednio do płaszczyzn HOK, H′O′K′, przystaną do siebie (5), a temsamem ściana HOB przystanie do H′O′B′. Więc kąty dwójścienne HABK, H′A′B′K′ są równe.

Wniosek I. — Kąt prostolinijny HOK ma za wierzchołek jakikolwiek punkt O krawędzi AB; więc, na mocy powyższego twierdzenia, *w jednym kącie dwójściennym wszystkie kąty prostolinijne są równe.*

II. — *Gdy kąt dwójścienny jest prosty, kąt prostolinijny jest także prosty*; i nawzajem.

Niech będzie kąt dwójścienny prosty PDEM, to jest równy swojemu przyległemu PDEN który się tworzy z przedłużenia ściany DEM. Ponieważ te dwa kąty dwójścienne są równe, ich kąty prostolinijne BOA i BOA′ są także równe, a że są przyległe i mają ramiona niespólne w linii prostej, więc są kątami pros-



temi.

Nawzajem, jeśli kąty prostolinijne przyległe BOA, BOA' są proste, kąty dwójścienne odpowiedające PDEM, PDEN są także proste; bo są przyległe równe i mają ściany niespólne na jednej płasczyznie.

Więc *kąt dwójścienny prosty ma kąt prostolinijny prosty*, i NAWZAJEM *kątowi prostolinijnemu prostemu odpowieda kąt dwójścienny prosty*.

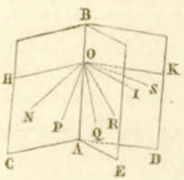
Ztąd wynika że

Wszystkie kąty dwójścienne proste są równe.

Kąt dwójścienny jest *ostry* albo *rozwarty*, według jak jest mniejszy albo większy od kąta dwójściennego prostego.

TWIERDZENIE X.

Dwa kąty dwójścienne mają się jako kąty prostolinijne odpowiedające.



Niech będą dwa kąty dwójścienne CABD, CABE. Poprowadźmy płasczyznę HOK prostopadłą do krawędzi AB, jej przecięcia ze ścianami utworzą kąty prostolinijne odpowiedające HOK, HOI (3).

Trzeba, jako zwykle, uważać dwa przypadki.

1° Kąty prostolinijne spółmierne. Przypuśćmy, dla utkwienia myśli, że te kąty są w stosunku liczb 7 do 5; to jest, że pewny kąt prostolinijny HON mieści się 7 razy w kącie HOK, a 5 razy w HOI.

Przez linie podziału ON, OP... i krawędź AB, poprowadźmy płasczyzny, które podzielą kąt dwójścienny CABD na 7 kątów dwójściennych równych, jako odpowiedających kątom prostolinijnym równym : kąt dwójścienny HOI zawierać będzie 5 z tych kątów dwójściennych. Więc kąty dwójścienne są w stosunku liczb 7 : 5, zatem w stosunku kątów prostolinijnych odpowiedających.

2° Gdy kąty prostolinijne są między sobą niespółmierne, wiadome rozumowanie (II, 14) okazuje że ich stosunek równa się stosunkowi kątów dwójściennych.

Miara kąta dwójściennego. Wynika z dopiero co dowiedzionego twierdzenia, że *kąt dwójścienny ma tę samą miarę co kąt prostolinijny odpowiedający, byle za jedność kąta dwójściennego wzięto kąt dwójścienny któremu odpowieda kąt prostolinijny wybrany za jedność kątów prostolinijnych.*

To się wyraża treściwiej, mówiąc że; KĄT DWÓJŚCIENNY MA ZA MIARĘ KĄT PROSTOLINIJNY ODPOWIEDAJĄCY.

Na mocy tej proporcyonalności kątów dwójściennych i prostolinijnych, można zaraz z własności kątów prostolinijnych, dowiedzionych w geometryi płaskiej, wywieśdź podobne własności kątów dwójściennych. I tak :

Wszelka płaszczyzna spotykająca drugą czyni z nią kąty dwójścienne przyległe spełniające. I nawzajem, *jeśli dwa kąty dwójścienne przyległe są spełniające, ich ściany niespólne są przedłużeniem jedna drugiej.*

Summa wszystkich kątów dwójściennych przyległych, utworzonych z jednej strony płaszczyzny która przechodzi przez ich krawędź, jest równa dwom kątom dwójściennym prostym; a summa wszystkich kątów przyległych na około jednej linii prostej jest równa czterem kątom dwójściennym prostym.

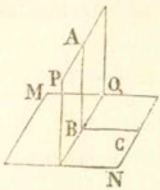
Dwa kąty dwójścienne krawędzią przeciwległe są równe.

PŁASZCZYZNY PROSTOPADŁE MIĘDZY SOBĄ.

Twierdzenie XI.

Wszelka płaszczyzna PQ, *przechodząca przez prostopadłę* AB *do płaszczyzny* MN, *jest prostopadła do tej płaszczyzny.*

Na płaszczyznie MN poprowadźmy prostopadłę BC do przecięcia BQ dwóch płasczyzn. Prostopadła AB do płasczyzny MN jest prostopadłą do prostej BC. Zatem kąt prostolinijny ABC jest prosty. Więc płasczyzny PQ i MN, tworzące kąt dwójścienny prosty ABQC, są prostopadłe do siebie.



Albo innemi słowy: *Płasczyzna* MN, *prostopadła do prostej* AB *jest prostopadła do wszystkich płasczyzn przechodzącyh przez tę linię.*

Wniosek I. — Dowodzenie powyższe okazuje że

Gdy dwie płasczyzny są do siebie prostopadłe, wszelka prosta, poprowadzona na jednej z nich prostopadle do spólnego przecięcia, jest prostopadła do drugiej płasczyzny.

II. — *Gdy dwie płasczyzny są do siebie prostopadłe, wszelka prostopadła do pierwszej płasczyzny, poprowadzona przez punkt drugiej, leży cała na tej drugiej.* Bo nie może być różna od prostopadłej poprowadzonej przez ten punkt do przecięcia dwóch płasczyzn, z przyczyny że ta ostatnia jest prostopadła do pierwszej płasczyzny.

III. — Gdy trzy proste, przez jeden punkt przechodzące, są do siebie prostopadłe, każda z nich jest prostopadła do płasczyzny dwóch innych, i trzy płasczyzny są prostokątne.

Twierdzenie XII.

Przecięcie się dwóch płasczyzn prostopadłych do trzeciej jest prostopadłe do tej ostatniej.

Bo, jeśli przez punkt przecięcia dwóch płasczyzn poprowadzimy prostopadłę do trzeciej płasczyzny, ta prostopadła będzie całkiem leżała na dwóch pierwszych, a więc będzie ich przecięciem.

Nawzajem, *płasczyzna prostopadła do dwóch płasczyzn jest prostopadła do ich przecięcia.*

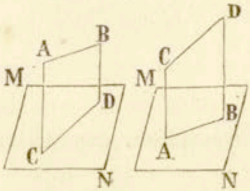
Wniosek I. — Jeśli trzy płasczyzny są prostopadłe do siebie, ich przecięcia są prostokątne.

Uwaga. — Płasczyzny przechodzące przez dwójsieczne kątów trójkąta, i prostopadłe do jego płasczyzny, spotykają się wedle osi koła wpisanego w ten trójkąt.

Płasczyzny prostopadłe we środku boków trójkąta spotykają się wedle osi koła opisanego na tym trójkącie.

Twierdzenie XIII.

Przez linię prostą AB *można zawsze poprowadzić płasczyznę prostopadłą do danej płasczyzny* MN.



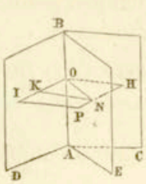
Przez jakikolwiek punkt A prostej AB poprowadźmy prostopadłę AC do płasczyzny MN; płasczyzna BAC będzie prostopadła do płasczyzny MN (11).

Nadto, jeśli prosta AB nie jest prostopadła do płasczyzny MN, nie można przez nią prowadzić drugiej płasczyzny prostopadłej do danej MN. Bo przecięcie AB dwóch płasczyzn prostopadłych do trzeciej MN byłoby prostopadłe do tej ostatniej; co się sprzeciwia założeniu.

Wniosek. — Płasczyzna prostopadła do danej płasczyzny jest miejscem geometrycznem prostopadłych wyprowadzonych ze wszystkich punktów przecięcia tych dwóch płasczyzn.

Twierdzenie XIV.

Płasczyzna dwójsieczna kąta dwójściennego jest miejscem punktów równo oddalonych od ścian tego kąta.



Jakoż, 1° Z punktu N, wziętego na płasczyznie dwójsiecznej BE, spuśćmy prostopadłe NH, NK na ściany kąta dwójściennego. Ponieważ płasczyzna HNK jest prostopadła do krawędzi AB, zatem kąt HOK jest prostolinijny, i prosta ON jego dwójsieczną. Więc NH = NK (I, 15).

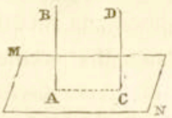
2° Niech będzie punkt P poza płasczyzną dwójsieczną BE. Zrobiwszy wykreślenie jako wyżej, łatwo widzimy że punkt P leży poza dwójsieczną ON kąta prostolinijnego HOI. Więc odległości PH, PI nie są równe.

LINIE PROSTE I PŁASCZYZNY RÓWNOLEGŁE.

Określenie VIII. — Linia prosta i płasczyzna są równoległe gdy się nie mogą spotykać jakkolwiek daleko byłyby przedłużane.

Twierdzenie XV.

Dwie proste AB *i* CD *prostopadłe do jednej płasczyzny* MN *są równoległe.*



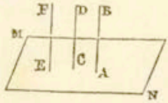
Jakoż, płasczyzna BAC jest prostopadła do płasczyzny MN (11); a prosta CD, prostopadła do płasczyzny MN i przechodząca przez punkt przecięcia C tych dwóch płasczyzn, leży cała na płasczyźnie BAC. Więc dwie proste AB i CD, leżące obie na jednej płasczyźnie BAC i prostopadłe do AC, są równoległe.

Nawzajem. *Gdy jedna prosta* AB *jest prostopadła do płasczyzny* MN, *wszelka równoległa* CD *do tej prostej jest prostopadła do płasczyzny* MN. Albowiem, jeślibyśmy przez punkt przecięcia C prostej CD z płasczyzną MN poprowadzili prostopadłę do tej płasczyzny, ta linia byłaby równoległa do prostej AB; owoż prosta CD jest właśnie równoległa do AB, więc prosta CD jest prostopadła do płasczyzny MN.

Ta wzajemnica może się jeszcze wysłowić jako następuje: *Dwie proste równoległe są obie prostopadłe do tej samej płasczyzny*

Wniosek. — Dwie proste AB i CD równoległe do trzeciej EF są równoległe między sobą.

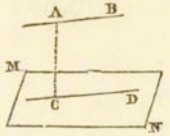
Jakoż, poprowadźmy płasczyznę MN prostopadłą do prostej EF;



ta płasczyzna będzie prostopadła do prostych AB, CD. Więc te ostatnie są równoległe między sobą.

Twierdzenie XVI.

Wszelka prosta AB *równoległa do prostej* CD *leżącej na płasczyznie* MN *jest równoległa do tej płasczyzny, albo leży na niej cała.*



Jakoż, płasczyzna BACD dwóch równoległych AB, CD, albo nie ma na zewnątrz przecięcia CD żadnego punktu spólnego z płasczyzną MN, albo do niej przystaje; w pierwszym przypadku prosta AB jest równoległa do płasczyzny MN, a zaś w drugim leży na niej cała.

Nawzajem, *gdy prosta* AB *i płasczyzna* MN *są równoległe, wszelka prosta* CD *równoległa do* AB *i przechodząca przez punkt* C *płasczyzny* MN *leży na niej cała.* Albowiem, płasczyzna BACD dwóch równoległych AB, CD przecina płasczyznę MN wedle linii prostej która jest oczywiście równoległa do AB; owoż prosta CD jest właśnie równoległa do AB, więc ta prosta CD jest przecięciem płasczyzn BACD i MN, to jest leży na płasczyznie MN.

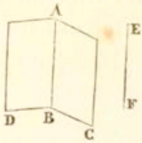
Wniosek. — Ztąd wynika że, *jeśli prosta* AB *jest równoległa do płasczyzny* MN, *i przez tę prostę poprowadzono płasczyznę która przecina pierwszą, przecięcie* CD *tych dwóch płasczyzn jest równoległe do prostej* AB.

Uwaga. — Powyższe twierdzenie zogólnia się w następującem wysłowieniu. *Gdy prosta* AB *i płasczyzna* MN *są równoległe, wszelka prosta równoległa do* AB *jest równoległa do płasczyzny* MN *albo leży na niej cała.*

Twierdzenie XVII.

Przecięcie AB *dwóch płasczyzn* AC, AD, *równoległych do prostej* EF, *jest równoległe do tej linii.*

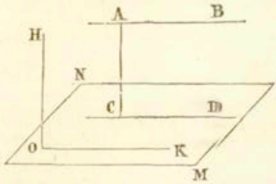
Jakoż, prosta równoległa do EF, poprowadzona przez którykolwiek punkt przecięcia dwóch płaszczyzn, leży cała na tych płaszczyznach, a więc jest ich przecięciem.



Wniosek. — *Przecięcie się dwóch płaszczyzn, przechodzących przez dwie proste równoległe, jest równoległe do tych linij.*

Twierdzenie XVIII.

Linia prosta AB *i płaszczyzna* MN, *obie prostopadłe do jednej linii prostej* AC, *są równoległe.*

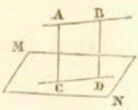


Jakoż, płaszczyzna BAC przecina płaszczyznę MN wedle prostej CD która jest prostopadła do AC i równoległa do AB; więc prosta AB jest równoległa do płaszczyzny MN.

Nawzajem, *gdy prosta* AB *i płaszczyzna* MN *są równoległe, wszelka prosta* GH *prostopadła do płaszczyzny* MN *jest prostopadła do prostej* AB. Albowiem, jeśli przez spodek prostopadłej GH poprowadzimy równoległę GK do prostej AB, ta równoległa będzie leżała na płaszczyznie MN, i temsamem będzie prostopadła do GH. Owoż, chociaż prosta GH nie spotyka prostej AB, mówi się jednak że jest do niej prostopadła, dlatego że tworzy kąt prosty z jej równoległą GK. Więc prostopadła GH do płaszczyzny MN jest prostopadłą do prostej AB.

Twierdzenie XIX.

Równoległe AC, BD, *zawarte między prostą* AB *i płaszczyzną równoległą* MN, *są równe.*



Płaszczyzna dwóch równoległych AC, BD spotyka płaszczyznę MN wedle prostej CD równoległej do AB; więc czworobok ABDC jest równoległobokiem, i AC = BD.

Wniosek. — Dwie proste AC i BD, prostopadłe do płaszczyzny MN, są temsamem prostopadłe do równoległej AB; więc mierzą odległości dwóch którychkolwiek punktów A i B tej prostej od płaszczyzny. Ztąd wynika że prosta równoległa do płaszczyzny jest wszędzie od niej równoodległa.

PŁASZCZYZNY RÓWNOLEGŁE.

Określenie IX. — Dwie płaszczyzny są *równoległe* gdy się nie mogą spotykać, jakkolwiekby daleko je przedłużano.

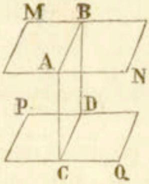
Twierdzenie XX.

Dwie płaszczyzny prostopadłe do jednej linii prostej są równoległe.

Bo, gdyby się spotykały, możnaby z któregokolwiek punktu ich przecięcia spuścić dwie płaszczyzny prostopadłe na jedną linię prostą; co niemożebne (4).

Twierdzenie XXI.

Przecięcia AB, CD, *dwóch płaszczyzn równoległych* MN *i* PQ *przez trzecią* AD, *są równoległe.*

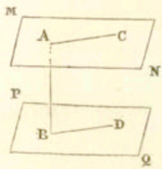


Jakoż, przecięcia AB i CD są dwiema liniami prostemi na jednej płaszczyznie AD, i nie mogą się spotykać dlatego że należą do płaszczyzn MN i PQ które nie mają żadnego punktu spólnego; więc te przecięcia AB i CD są równoległe.

Wniosek. — *Przecięcia dwóch płaszczyzn równoległych przez dwie inne płaszczyzny także równoległe są równoległe między sobą.*

Twierdzenie XXII.

Gdy dwie płasczyzny są równoległe, wszelka prosta prostopadła do jednej z nich jest prostopadła do drugiej.

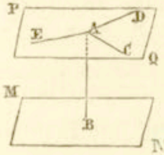


Niech będą dwie płasczyzny równoległe MN i PQ; jeśli z punktu A pierwszej spuścimy prostopadłę AB na drugą, i przez tę linię poprowadzimy jakąkolwiek płasczyznę CABD, przecięcia AC i BD będą równoległe; zatem prosta AB, prostopadła do płasczyzny PQ, jest prostopadła do prostej BD i temsamem prostopadła do jej równoległej AC. Owoż ta ostatnia jest jakakolwiek; więc prosta AB, prostopadła do wszelkiej prostej AC leżącej na płasczyznie MN, jest prostopadła do tej płasczyzny.

Uwaga. — Powyższe twierdzenie można inaczej wyrazić, mówiąc: *Dwie płasczyzny równoległe są prostopadłe obie do tej samej linii prostej*; tak wysłowione jest wzajemnicą twierdzenia XX.

Twierdzenie XXIII.

Przez punkt A, *dany zewnątrz płasczyzny* MN, *można zawsze poprowadzić płasczyznę równoległą do tej płasczyzny; ale tylko jedną.*



Jakoż, z punktu A można zawsze spuścić prostopadłę AB na płasczyznę MN, i przez punkt A poprowadzić płasczyznę PQ prostopadłą do płasczyzny MN. Płasczyzna PQ będzie równoległa do płasczyzny MN (20).

Ta płasczyzna PQ jest jedyną równoległą do płasczyzny MN; bo dwie płasczyzny równoległe są prostopadłe do tej samej prostej, a przez punkt A jedną tylko płasczyznę prostopadłą do prostej AB poprowadzić można.

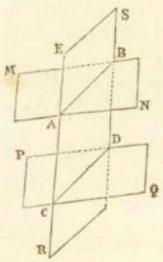
Wniosek. — *Jeśli przez punkt* A, *wzięty zewnątrz płasczyzny* MN, *poprowadzono równoległe* AC, AD, AE,.. *do tej płasczyzny, miejscem* *tych równoległych jest płasczyzna* PQ *równoległa do płasczyzny* MN. Albowiem, jeśli z punktu A spuścimy prostopadłę AB na płasczyznę MN, ta linia będzie prostopadła do każdej z prostych AC, AD, AE... (18, *wz.*); więc miejscem tych prostych jest płasczyzna prostopadła do AB, to jest równoległa do płasczyzny MN.

Twierdzenie XXIV.

Gdy dwie płasczyzny równoległe są przecięte przez trzecią, wtedy :

1° *Kąty dwójścienne odpowiedające, naprzemianległe wewnętrzne, naprzemianległe zewnętrzne są odpowiednio równe.*

2° *Kąty dwójścienne wewnętrzne, albo zewnętrzne, będące z jednej strony płasczyzny siecznej, są spełniające.*



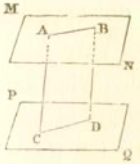
Niech będą dwie płasczyzny równoległe MN i PQ przecięte płasczyzną RS; przecięcia AB i CD tych płasczyzn są równoległe. Poprowadźmy do tych dwóch równoległych płasczyznę prostopadłą ECQ, która przetnie trzy płasczyzny MN, PQ, RS wedle linij AN, CQ, ER prostopadłych do AB i CD. Owoż, równoległe AN, CQ tworzą z sieczną ER kąty prostolinijne, które odpowiedają ośmiu kątom dwójściennym mającym krawędzie AB i CD; a że twierdzenie już jest dowiedzione dla tych kątów prostolinijnych, więc jest także prawdziwe dla kątów dwójściennych. Więc, etc.

Uwaga. — Pięć wzajemnic tego twierdzenia wtenczas tylko są prawdziwe gdy kąty dwójścienne, które porównywamy, mają nadto krawędzie równoległe.

Twierdzenie XXV.

Dwie proste równoległe AC, BD, *zawarte między dwiema płasczyznami równoległemi* MN, PQ, *są równe.*

Płasczyzna dwóch prostych równoległych AC, BD przecina dwie płasczyzny równoległe MN, PQ wedle dwóch prostych

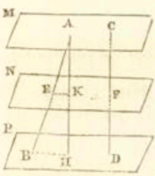


równoległych AB, CD (21). Więc czworobok ABDC jest równoległobokiem i jego boki przeciwległe AC, BD są równe.

Wniosek. — *Dwie płasczyzny równoległe są wszędzie równo od siebie oddalone*. Bo odległością dwóch płasczyzn równoległych jest spólna prostopadła, a dwie takie linie są równoległe i równe.

Twierdzenie XXVI.

Trzy płasczyzny równoległe M, N, P *dzielą dwie jakiekolwiek proste* AB, CD *na części proporcyonalne*.



Niech będą dwie jakiekolwiek proste AB, CD w przestrzeni, przecięte trzema płasczyznami równoległemi M, N, P, w punktach A, E, B i C, F, D. Jeśli przez punkt A poprowadzimy prostę AH równoległą do CD, i wyobrazimy płasczyznę ABH, ta płasczyzna przetnie płasczyzny równoległe N i P wedle dwóch równoległych EK i BH; zatem w trójkącie ABH, będzie

$$\frac{AE}{EB}=\frac{AK}{KH}.$$

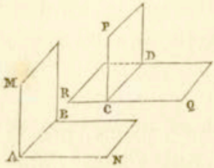
Owoż, odcinek AK = CF, i KH = FD, jako równoległe zawarte między płasczyznami równoległemi; więc

$$\frac{AE}{EB}=\frac{CF}{FD}.$$

Twierdzenie XXVII.

Dwa kąty dwójścienne, mające ściany równoległe, są równe albo spełniające.

Krawędzie AB, CD dwóch kątów dwójściennych MABN, PCDQ, mających ściany równoległe każda do każdej, są równoległe (21 *wn.*). Poprowadźmy do tych krawędzi płasczyznę prostopadłą która przetnie ściany kątów wedle równoległych AM i CP, AN i CQ. Te linie, prostopadłe do krawędzi odpowiednych AB, CD, tworzą kąty prostolinijne równe albo spełniające : więc kąty dwójścienne które im odpowiedają są także równe albo spełniające, to jest kąt dwójścienny ostry równa się dwójściennemu ostremu a jest spełnieniem dwójściennego rozwartego.

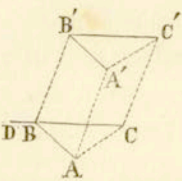


Uwaga. — *Kąty dwójścienne, mające ściany prostopadłe każda do każdej i krawędzie równoległe, są równe albo spełniające.*

Dowodzenie jako wyżej.

Twierdzenie XXVIII.

Dwa kąty ABC, A'B'C' *w przestrzeni, mające ramiona odpowiedne równoległe, są równe albo spełniające, a ich płaszczyzny są równoległe.*



Weźmy na odpowiednych ramionach tych kątów długości BA = B'A', BC = B'C', i połączmy AA', BB', CC', AC, A'C'. Czworobok ABB'A', mający dwa boki przeciwległe AB, A'B' równe i równoległe, jest równoległobokiem ; zatem boki AA', BB' są równe i równoległe. Dla tej samej przyczyny boki BB', CC' są równe i równoległe. Więc dwa boki AA' i CC' są równe i równoległe, i czworobok ACA'C' jest równoległobokiem; przeto bok AC = A'C'. Ztąd wynika że dwa trójkąty ABC, A'B'C' są równoboczne między sobą; więc kąt ABC=A'B'C'.

Z tego co poprzedza wnosimy że dwa kąty ABD, A'B'C', mające ramiona równoległe ale nie ułożone podobnie, są spełniające.

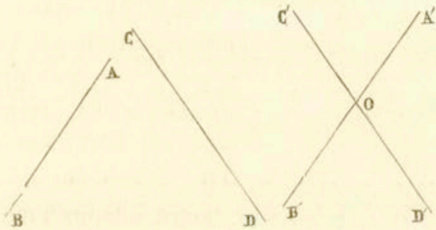
Płaszczyzny dwóch kątów ABC, A'B'C' *mających ramiona równoległe każde do każdego są równoległe.* Bo ramiona B'A', B'C' drugiego kąta, odpowiednio równoległe do ramion pierwszego, są równoległe do płaszczyzny ABC; więc płaszczyzna A'B'C' jest równoległa do płaszczyzny ABC (23 *wn*).

Wniosek I. — *Dwie płasczyzny prostopadłe do trzeciej i przechodzące przez dwie proste równoległe nieprostopadłe do tej płasczyzny, są równoległe.* — Bo są płasczyznami dwóch kątów mających ramiona równoległe każde do każdego.

II. — *Przez dany punkt można zawsze poprowadzić płasczyznę równoległą do dwóch prostych w przestrzeni, ale tylko jedną.*

KĄTY LINIJ PROSTYCH W PRZESTRZENI I PŁASCZYZN. RZUTY.

Wiemy że każda linia prosta jako AB ma dwie strony, jedną AB gdy się idzie od punktu A do B, drugą BA gdy się idzie od B do A.



Mając wzgląd na kierunek i na stronę, nazywa się *kątem dwóch linij prostych w przestrzeni*, kąt który tworzą dwie równoległe do tych linij, poprowodzone w te same strony przez jakikolwiek punkt przestrzeni.

Aby więc otrzymać kąt dwóch prostych AB i CD, prowadzi się, przez punkt O przestrzeni, równoległę OB′ do AB idącą w stronę AB, i równoległę OD′ do CD idącą w stronę CD; kąt B′OD′ jest kątem dwóch prostych AB i CD. Tak samo kąt dwóch prostych AB i DC wyraża się kątem B′OC′; etc.

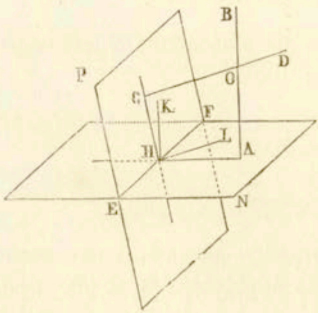
Mówi się że dwie *proste w przestrzeni są prostopadłe gdy ich kąt jest prosty*. Na mocy twierdzenia XXVIII, wielkość kąta utworzonego przez równoległe do dwóch danych prostych nie zależy od położenia punktu O w przestrzeni, ale tylko od kierunku tych dwóch prostych. To usprawiedliwia powyższe określenia.

Uwaga. — Widzimy teraz łatwo że, mając dane dwie jakiekolwiek proste w przestrzeni można zawsze, przez jedną z nich, poprowadzić płaszczyznę *równoległą* do drugiej. Ale nie można, przez jedną z dwóch danych prostych, prowadzić płaszczyzny *prostopadłej* do drugiej prostej, tylko wtedy gdy te proste są do siebie prostopadłe.

Kąt dwóch płaszczyzn może się wyrazić przez kąt dwóch linij prostych w przestrzeni, jako pokazuje następujące twierdzenie.

Twierdzenie XXIX.

Jeśli przez punkt O *przestrzeni poprowadzono dwie proste* AB *i* CD, *prostopadłe każda do jednej z dwóch płaszczyzn* N *i* P, *te linie tworzą cztery kąty odpowiednio równe czterem kątom tych płaszczyzn.*



Jakoż, płaszczyzna AOC, dwóch prostopadłych AB i CD do płaszczyzn N i P, jest prostopadła do przecięcia EF tych płaszczyzn; więc kąt AOC i kąt prostolinijny AHC, leżące oba na jednej płaszczyznie i mające ramiona prostopadłe każde do każdego, są równe albo spełniające (I, 24). Ztąd wynika że cztery kąty utworzone przez dwie prostopadłe AB i CD do płaszczyzn N i P są te same co kąty prostolinijne czterech kątów tych płaszczyzn. Więc zamiast kątów płaszczyzn można uważać kąty linijne które są daleko dogodniejsze.

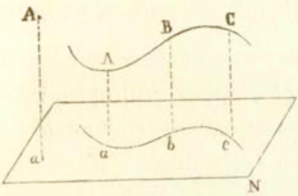
Wniosek I. — Jeśli z punktu H krawędzi kąta dwójściennego NEFP wyprowadzimy do jego ścian prostopadłe HK i HL idące w strony tych ścian, kąt KHL tych prostopadłych będzie spełnieniem kąta dwójściennego. Jakoż, płaszczyzna KHL jest prostopadła do krawędzi EF; więc kąt KHL prostopadłych i kąt prostolinijny AHC, oba na jednej płaszczyznie, mające ramiona prostopadłe każde do każdego ale niejednakowo ułożone, są spełniające.

Dowiedzie się podobnie że kąt AOC, prostopadłych spuszczonych z punktu O wziętego *wewnątrz* kąta dwójściennego NEFP na jego ściany, jest spełnieniem tego kąta.

II. — Wynika z powyższego twierdzenia że :

Dwie płaszczyzny odpowiednio prostopadłe do dwóch prostych nierównoległych przecinają się. I NAWZAJEM, dwie proste odpowiednio prostopadłe do dwóch płaszczyzn przecinających się nie są równoległe.

OKREŚLENIE X. — Nazywa się *rzutem* punktu A na płaszczyznie N spodek *a* prostopadłej spuszczonej z tego punktu na płaszczyznę.

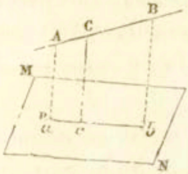


Płaszczyzna N jest *płaszczyzną rzutu* a prostopadła A*a* jest *rzutująca* punktu A.

Rzutem jakiejkolwiek linii ABC... na płaszczyznie N jest *miejsce rzutów abc.. wszystkich punktów tej linii.*

TWIERDZENIE XXX.

Rzut linii prostej na płaszczyznie MN *jest linią prostą.*



Jakoż, prostopadłe A*a*, B*b*,... spuszczone z różnych punktów prostej AB na płaszczyznę MN, leżą na płaszczyznie AB*b* prostopadłej do tej płaszczyzny (11, *wn.* 2); więc miejscem spodków *a*, *b*, *c*,... tych prostopadłych jest linia prosta *ab* wedle której te dwie płaszczyzny się przecinają.

OKREŚLENIE XI. — Punkt w którym prosta AB przebija płaszczyznę rzutów nazywa się jej *śladem*.

Gdy linia prosta jest, jako A*a*, prostopadła do płaszczyzny rzutów MN, wtedy jej rzutem jest jej ślad *a*.

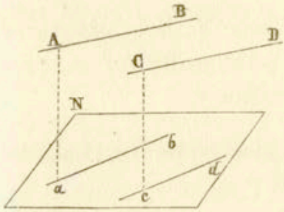
Rzut linii prostej jest oczywiście od niej mniejszy, i tylko wtedy jej równy gdy ta prosta jest równoległa do płaszczyzny rzutów : w tem szczególnem położeniu mówi się że linia prosta *rzutuje się w prawdziwej wielkości*.

Rzutem linii krzywej na płaszczyznie jest linia krzywa; ale, jeśli linia krzywa leży na płaszczyznie prostopadłej do płaszczyzny rzutów, wtedy jej rzut jest linią prostą.

Rzuty linii jakiejkolwiek na dwóch płaszczyznach równoległych są oczywiście równe.

Twierdzenie XXXI.

Gdy dwie proste AB, CD *są równoległe ich rzuty ab, cd na jednej płaszczyznie są równoległe.*



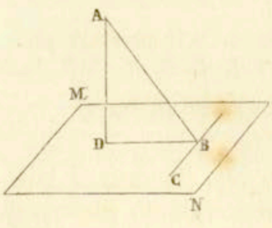
Jakoż, płaszczyzny rzutujące BA*a*, DC*c* dwóch prostych równoległych AB, CD są równoległe (28); więc przecięcia *ab*, *cd* tych płaszczyzn z płaszczyzną rzutów MN są równoległe.

Wniosek. — Jeśli rzuty dwóch prostych są równoległe, te proste leżą na dwóch płaszczyznach równoległych.

Uwaga. — Gdy dwie proste są prostopadłe, ich rzuty nie są koniecznie prostopadłe; ani nawzajem. Ale jest szczególny przypadek tych linij o którym dobrze jest wiedzieć; to jest:

Rzut kąta prostego na płaszczyznie równoległej do jednego z ramion jest kątem prostym. I nawzajem.

Chociaż to zadanie nie różni się od *twierdzenia trzech prostopadłych* tylko samem wysłowieniem, dowiedziemy go jednak wprost, aby jaśniej pokazać na czem polega tosamość tych dwóch zadań.

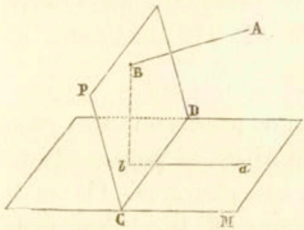


Rzuty jednej figury na dwóch płaszczyznach równoległych są równe; jeśli więc, przez ramie BC kąta prostego ABC, poprowadzimy płaszczyznę MN i spuścimy na nią prostopadłę AD, kąt DBC będzie rzutem kąta prostego ABC, na płaszczyznie równoległej do ramienia BC. Owoż, prosta BC jest prostopadła do AD, a jeśli nadto jest prostopadła do BA albo do BD, to będzie temsamem prostopadła do płasczyzny ABD. Więc rzut DBC kąta prostego ABC jest kątem prostym; i nawzajem, kąt ABC jest prosty jeśli jego rzut DBC na płasczyznie równoległej do jednego z ramion jest kątem prostym.

Ztąd, zogólniając, wynika że: *Jeśli dwie proste w przestrzeni są prostopadłe, ich rzuty na płasczyznie równoległej do jednej z nich są także prostopadłe między sobą.*

Twierdzenie XXXII.

Jeśli linia prosta jest prostopadła do płasczyzny, jej rzut jest prostopadły do śladu tej płasczyzny.

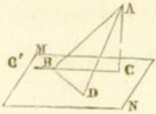


Niech będzie prosta AB prostopadła do płasczyzny P; powiedam że rzut *ab* tej prostej i ślad CD płasczyzny P na płasczyznie M są do siebie prostopadłe. Jakoż, prosta AB, prostopadła do płasczyzny P, jest prostopadła do jej śladu CD; więc rzuty *ab* i CD tych dwóch prostych prostopadłych, na płasczyznie M przechodzącej przez CD, są do siebie prostopadłe.

Wniosek. — Jeśli rzut *ab* prostej AB jest prostopadły do śladu CD płasczyzny P, ta prosta AB leży na płasczyznie prostopadłej do płasczyzny P (11, *wn.*).

Twierdzenie XXXIII.

Pochyła AB *tworzy ze swoim rzutem* BC, *na płasczyznie* MN, *kąt* ABC *mniejszy niż z wszelką inną prostą* BD *tej płasczyzny*



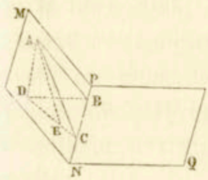
Spuśćmy prostopadłę AC na płasczyznę MN, weźmy BD = BC i połączmy AD. Prostopadła AC < AD. Zatem dwa trójkąty ABC, ABD mają dwa boki równe każdy każdemu, a trzeci bok AC < AD. Więc kąt ABC < ABD.

Wniosek. — Ponieważ kąt ostry ABC jest najmniejszy, czyli jako się mówi, *minimum* między kątami jakie pochyła AB do płaszczyzny MN czyni z liniami prostemi tej płaszczyzny, kąt rozwarty ABC′ będzie kątem *maximum*.

Określenie XII. — Nazywa się *kątem linii prostej i płaszczyzny* kąt minimum który ta prosta czyni ze swoim rzutem na płaszczyznie.

Twierdzenie XXXIV.

Gdy dwie płaszczyzny MN i PQ *przecinają się, ze wszystkich prostych przechodzących przez punkt* A *na płaszczyznie* MN, *ta która czyni największy kąt z płaszczyzną* PQ *jest* AB *prostopadła do spólnego przecięcia* NP *tych płaszczyzn.*



Niech będzie, na płaszczyznie MN, jakakolwiek pochyła AC do NP poprowadzona przez punkt A, a na płaszczyznie PQ rzut D punktu A. Połączmy DB, DC; te linie będą rzutami prostych AB, AC na płaszczyznie PQ. Aby dowieśdź że kąt ABD jest większy od kąta ACD, uważajmy że, na mocy twierdzenia trzech prostopadłych, rzut DB jest prostopadły do NP; przeto $DB < DC$. Jeśli więc na DC weźmiemy $DE = DB$ i połączymy AE, dwa trójkąty prostokątne ADB, ADE będą równe; zatem kąty ABD, AED są równe. Ale w trójkącie ACD, kąt zewnętrzny AED jest większy od wewnętrznego ACD; więc kąt ABD jest większy od kąta ACD.

Wniosek. — Kąt ABD jest kątem prostolinijnym dwóch płaszczyzn MN, PQ. Gdy płaszczyzna PQ jest *pozioma*, wtedy pochyła AB nazywa się *linią największej spadzistości płaszczyzny* MN.

Przez każdy punkt płaszczyzny przechodzi linia jej największej spadzistości, ale tylko jedna.

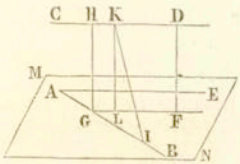
NAJKRÓTSZA ODLEGŁOŚĆ DWÓCH LINIJ PROSTYCH W PRZESTRZENI.

Twierdzenie XXXV.

Gdy dwie proste AB, CD *nie leżą na jednej płaszczyznie,* wtedy :

1° *Istnieje zawsze spólna prostopadła do tych prostych, ale tylko jedna.*

2° *Ta spólna prostopadła jest najkrótszą odległością tych dwóch prostych.*



Niech będzie GH spólna prostopadła do dwóch prostych AB i CD nie leżących na jednej płaszczyznie. Jeśli przez spodek G poprowadzimy równoległę GF do CD, prosta GH będzie prostopadła do GF i temsamem prostopadła do płasczyzny BGF która jest równoległa do CD. To pokazuje że spólna prostopadła do dwóch prostych w przestrzeni powinna leżeć na dwóch płasczyznach, które przechodzą każda przez jedną z tych prostych i są prostopadłe do płasczyzny równoległej do obydwóch prostych. Owóż, te dwie płasczyzny prostopadłe przecinają się; bo ich ślady AB i GF na płasczyznie BGF spotykają się w punkcie G, z przyczyny że proste AB i CD nie są równoległe. Więc istnieje spólna prostopadła, i tylko jedna, do dwóch prostych nie równoległych w przestrzeni.

2° Ta spólna prostopadła GH do prostych AB, CD jest mniejsza od wszelkiej prostej KI która łączy dwa którekolwiek ich punkta. Bo prostopadłe HG i KL, spuszczone z punktów prostej CD na płasczyznę równoległą BAE, są równe, a oczywiście KL $<$ KI.

Uwaga. — Jeśli poprowadzimy najpierwej, przez jakikolwiek punkt przestrzeni, dwie płaszczyzny prostopadłe do prostych AB, CD, ich przecięcie będzie prostopadłe do tych prostych; a jeśli potem poprowadzimy prostę równoległą do tego przecięcia i opierającą się na AB i CD, ta równoległa będzie spólną prostopadłą do tych dwóch prostych.

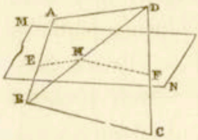
Powyższa uwaga, która także dowodzi istnienia spólnej prostopadłej do dwóch jakichkolwiek prostych AB, CD w przestrzeni, daje w *Geometryi opisującej* łatwe wykreślenie najkrótszej odległości tych dwóch prostych.

CZWOROBOK SPACZONY.

Określenie XIV. — Nazywa się *czworobokiem spaczonym albo skośnym* figura zamknięta ABCD którą tworzą cztery linie proste nie leżące na jednej płasczyznie.

Twierdzenie XXXVI.

Wszelka płasczyzna równoległa do dwóch boków przeciwległych czworoboku spazonego dzieli proporcyonalnie dwa inne boki.



Niech będzie czworobok spaczony ABCD i płasczyna MN, równoległa do boków AD, BC, która przecina dwa inne boki w punktach E, F. Boki AD i BC leżą na płasczyznach równoległych do płasczyzny MN (23, wn); więc

$$\frac{AE}{EB} = \frac{DF}{FC}.$$

Uwaga. — Można wprost dowieśdź tego twierdzenia, uważając że EH jest równoległe do AD a zaś FH równoległe do BC.

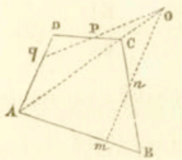
Nawzajem, wszelka prosta EF dzieląca proporcyonalnie dwa boki przeciwległe czworoboku spaczonego leży na płasczyznie równoległej do dwóch innych boków.

Dowodzenie jako zwykle.

Twierdzenie XXXVII.

Płaszczyzna spotykająca cztery boki czworoboku spaczonego wyznacza cztery stosunki odcinkowe, których wieloczyn równa się jedności dodatniej.

I nawzajem.



Poprowadźmy przekątnę AC; płaszczyzna poprzeczna $m\,n\,p\,q$ spotka ją, mówiąc ogólnie, w punkcie O, i będzie:

w trójkącie ABC, $\dfrac{mA}{mB} \cdot \dfrac{nB}{nC} \cdot \dfrac{OC}{OA} = 1;$

a w trójkącie ACD $\dfrac{pC}{pD} \cdot \dfrac{qD}{qA} \cdot \dfrac{OA}{OC} = 1.$

Więc $\dfrac{mA}{mB} \cdot \dfrac{nB}{nC} \cdot \dfrac{pC}{pD} \cdot \dfrac{qD}{qA} = 1.$

Nawzajem, *jeśli cztery punkta m, n, p, q, leżące na kierunkach czterech boków czworoboku spaczonego, dają wieloczyn stosunków odcinkowych równy jedności dodatniej, te cztery punkta są na jednej płaszczyźnie.*

Przez trzy punkta m, n, p poprowadźmy płaszczyznę która spotka bok AD w punkcie q', i będzie

$$\frac{mA}{mB} \cdot \frac{nB}{nC} \cdot \frac{pC}{pD} \cdot \frac{q'D}{q'A} = 1;$$

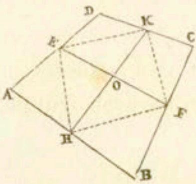
ale z założenia $\dfrac{mA}{mB} \cdot \dfrac{nB}{nC} \cdot \dfrac{pC}{pD} \cdot \dfrac{qD}{qA} = 1.$ Więc $\dfrac{q'D}{q'A} = \dfrac{qD}{qA}.$

Ostatnie równanie pokazuje że dwa stosunki odcinkowe są tego samego znaku, to jest punkta q', q leżą oba na boku AD, albo oba zewnątrz; zkąd wynika $\dfrac{AD}{q'A} = \dfrac{AD}{qA}$; a zatem $q'A = qA$.

Więc płaszczyzna trzech punktów m, n, p przechodzi przez q.

Uwaga. — Przypuściliśmy w dowodzeniu że płaszczyzna poprzeczna spotyka przekątnę AC; gdyby ta płaszczyzna była równoległą do AC, poprzeczne *mn*, *pq* byłyby także równoległe do AC; wtedy równanie odcinkowe otrzymałoby się jeszcze prościej niż poprzednio.

WNIOSEK. *W czworoboku spaczonym* ABCD, *dwie proste* EF, HK, *które dzielą boki przeciwległe na odcinki proporcyonlne, dzielą się nawzajem na części proporcyonalne do tych odcinków.*



Jakoż, z założenia

$$\frac{\mathrm{EA}}{\mathrm{ED}} = \frac{\mathrm{FB}}{\mathrm{FC}} \quad (1) \qquad \text{i} \qquad \frac{\mathrm{HA}}{\mathrm{HB}} = \frac{\mathrm{KD}}{\mathrm{KC}} \quad (2).$$

Z tych dwóch proporcyj wynika równanie

$$\frac{\mathrm{EA}}{\mathrm{ED}} \cdot \frac{\mathrm{KD}}{\mathrm{KC}} \cdot \frac{\mathrm{FC}}{\mathrm{FB}} \cdot \frac{\mathrm{HB}}{\mathrm{HA}} = +1,$$

które dowodzi że czworobok EHFK jest płaski; więc jego przekątne EF i HK przecinają się w punkcie O.

Nadto, proporcya (1) pokazuje że prosta EF leży na płasczyznie równoległej do boków AB i DC. Więc, w czworobokach spaczonych HKDA, HKCB prosta EF dzieli proporcyonalnie boki przeciwległe AD, HK, BC, to jest daje

$$\frac{\mathrm{OH}}{\mathrm{OK}} = \frac{\mathrm{EA}}{\mathrm{ED}} = \frac{\mathrm{FB}}{\mathrm{FC}}.$$

I tak samo czworoboki spaczone EFBA i EFCD dają

$$\frac{\mathrm{OE}}{\mathrm{OF}} = \frac{\mathrm{HA}}{\mathrm{HB}} = \frac{\mathrm{KD}}{\mathrm{KC}}.$$

Ztąd wynika że, w czworoboku spaczonym, śródki boków są wierzchołkami równoległoboku.

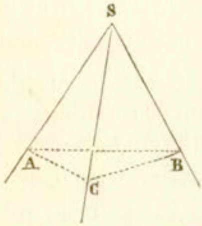
UWAGA. — Gdy płasczyzna poprzeczna staje się równoległą do dwóch boków przeciwległych AB i CD, punkta m i p oddalają się w nieskończoność i stosunki $\frac{m\mathrm{A}}{m\mathrm{B}}$, $\frac{\mathrm{PC}}{\mathrm{PD}}$, przywodzą się do jedności; więc wtedy wieloczyn stosunków odcinkowych staje się

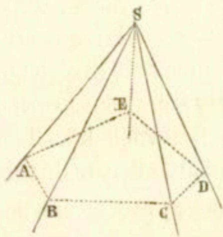
$$\frac{n\mathrm{B}}{n\mathrm{C}} \cdot \frac{q\mathrm{D}}{q\mathrm{A}} = 1 \quad \text{albo} \quad \frac{q\mathrm{D}}{q\mathrm{A}} = \frac{n\mathrm{C}}{n\mathrm{B}}.$$

Co daje twierdzenie XXXVI jako szczególny przypadek powyższego.

KĄTY WIELOŚCIENNE.

OKREŚLENIE XV. — Figura utworzona z wielu płaszczyzn przechodzących przez jeden punkt S i zawartych między ich przecięciami SA, SB... nazywa się *kątem wielościennym* albo bryłowym.





Punkt S jest *wierzchołkiem*, przecięcia SA, SB..., *krawędziami* a płaszczyzny zawarte w kątach ASB, BSC... są *ścianami* kąta wielościennego SABCDE.

Oznacza się kąt wielościenny literą wierzchołka, po której kładzie się litery wszystkich ścian, i mówi się kąt SABCD. Ale, jeśli niema wątpliwości, można oznaczać kąt wielościenny samą literą jego wierzchołka, i mówić kąt wielościenny S.

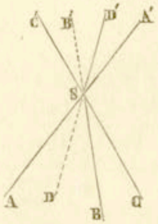
Kąt wielościenny jest *trójścienny*, *czworościenny*..., według jak ma *trzy*, *cztery*... ściany.

Najprostszy z kątów wielościennych jest kąt trójścienny SABC; albowiem trzeba przynajmniej trzech płaszczyzn do utworzenia kąta wielościennego. W kącie trójściennym jest sześć części do uważania: trzy ściany ASB, BSC, CSA, i trzy kąty dwójścienne SA, SB, SC.

UWAGA. — Dla skrócenia mówi się często *trójścian* zamiast kąt trójścienny, a czasem *dwójścian* zamiast kąt dwójścienny. Ale nie można mówić *czworościan*. *pięciościan*,... zamiast kąt czworościenny, pięciościenny, etc.; bo czworościan, pięciościan... oznaczają figury zamknięte przestrzeni o których później będzie mowa.

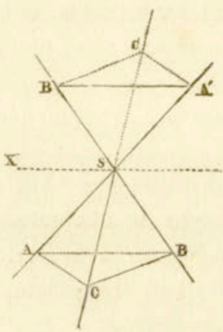
Kąt wielościenny jest *wypukły* gdy leży całkiem z jednej strony płasczyzny każdej ściany. Kąt trójścienny jest oczywiście wypukły.

Dwa kąty wielościenne SABCD, SA′B′C′D′ są *wierzchołkiem*



przeciwległe, gdy krawędzie jednego są przedłużeniami krawędzi drugiego. Takie kąty nazywają się *symetrycznemi* jeden drugiego. Dwa *kąty symetryczne* SABCD, SA′B′C′D′ są *równe we wszystkich częściach;* bo ich ściany ASB i A′SB′, BSC i B′SC′,... są równe między sobą, jako zawarte w kątach wierzchołkiem przeciwległych, a ich kąty dwójścienne SA i SA′, SB i SB′,... są także równe między sobą jako krawędzią przeciwległe.

Ale w tych dwóch kątach symetrycznych, części równe są w porządku odwrotnym ułożone. Jakoż, widz oparty na krawędzi SA, mający głowę w S a nogi w A, i patrzący wewnątrz kąta SABCD, spostrzega jego krawędzie, idące od prawej ręki ku lewej, w porządku SB, SC, SD; gdy tymczasem drugi widz, mający podobną postawę w drugim kącie SA′B′C′D′, to jest głowę w S a nogi w A′, spostrzega krawędzie idące od prawej ręki ku lewej w porządku odwrotnym SD′, SC′, SB′.



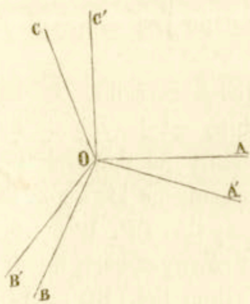
Ztąd wynika że w ogólności *dwa kąty wielościenne symetryczne nie są przystawalne.* Na dowodzenie tego, uważajmy naprzykład dwa trójściany symetryczne SABC, SA′B′C′, i przypuśćmy że krawędź SC wystaje nad płasczyzną ASB, a temsamem że jej przedłużenie SC′ jest pod tą płasczyzną. Jeśli więc, dla wykonania przystawania dwóch trójścianów, położymy ścianę A′SB′ na ścianie ASB tak, żeby krawędź SA′ przystała do SA i krawędź SB′ padła na SB, jako gdybyśmy obrócili trójścian SA′B′C′ na 180 stopni około osi prostopadłej do płasczyzny ASB w punkcie S, wtedy krawędź SC′ zostanie ciągle pod płasczyzną ASB, i trójścian SA′B′C′ nie przystanie do SABC

Jeśli zaś wykonamy przystawanie tych dwóch trójścianów, przykładając przewróconą ścianę A′SB′ na ścianę ASB, jako gdybyśmy dali trójścianowi SA'B'C' pół obrotu około dwójsiecznej SX kąta ASB'; wtedy krawędź SA' przystanie do SB, i krawędź SB' do SA. Ale krawędź SC', chociaż tą razą przypada nad płasczyzną ASB, nie pójdzie po krawędzi SC, bo płasczyzna ściany B'SC' nie przystaje do płasczyzny ASC, z przyczyny że kąty dwójścienne SA i SB są ogólnie nierówne, a temsamem i kąty dwójścienne SA i SB' także nierówne. Więc dwa trójściany symetryczne SABC, SA'B'C' nie przystają do siebie.

Jednakże, to co poprzedza pokazuje że, gdyby kąty dwójścienne SA i SB były równe, płasczyzna A'SC' przystałaby do BSC i płasczyzna B'SC' do ASC; zatem krawędź SC' padłaby na SC. Więc wtedy dwa trójściany symetryczne byłyby równe.

Twierdzenie XXXVIII.

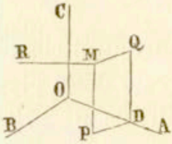
Jeśli z wierzchołka kąta trójściennego OABC *wyprowadzimy do jego ścian prostopadłe* OA', OB', OC', *każdą z tej samej strony ściany co krawędź nieleżąca na niej, otrzymamy kąt trójścienny* OA'B'C' SPEŁNIAJĄCY *pierwszego*, to jest taki którego ściany są spełnieniami kątów dwójściennych przeciwległych w pierwszym, a jego kąty dwójścienne spełnieniami ścian tego kąta.



Jakoż, uważajmy w trójścianie OABC kąt dwójścienny OA. Prostopadła OB' do ściany AOC, z tej samej strony co krawędź OB, idzie w stronę ściany AOB, a zaś prostopadła OC' do ściany AOB, z tej samej strony co krawędź OC, idzie w stronę ściany AOC; więc ściana B'OC' czyli kąt B'OC' jest spełnieniem kąta dwójściennego OA (29 *wn.*). Tak samo ściana A'OC' jest spełnieniem kąta dwójściennego OB, a ściana A'OB' spełnieniem kąta dwójściennego OC.

Nadto, ponieważ prosta OA' jest prostopadła do płasczyzny BOC, a prosta OC' prostopadła do płasczyzny BOA, zatem krawędź OB jest prostopadła do ściany A'OC'; podobnie krawędź OC jest prostopadła do ściany A′OB′. Owoż, w trójścianie OA′B′C′ krawędzie OB, OC są prostopadłe do ścian kąta dwójściennego OA′; więc kąt BOC, czyli ściana BOC trójścianu OABC, jest spełnieniem kąta dwójściennego OA′. Tak samo ściany AOC i AOB są odpowiednio spełnieniami kątów dwójściennych OB′ i OC′.

Dla tej wzajemnej własności dwa powyższe trójściany nazywają się *spełniającemi*.



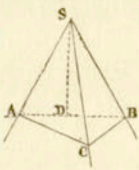
Wniosek. — *Jeśli z punktu* M, *wziętego wewnątrz kąta trójściennego* OABC, *spuścimy prostopadłe* MP, MQ, MR *na jego ściany, otrzymamy trójścian* MPQR *spełniający pierwszego.*

Uwaga. — Trzy płaszczyzny, spotykające się w jednym punkcie O, tworzą osiem kątów trójściennych; łatwo widzieć że tylko dwa z tych kątów są spełniającemi trójścianu M, jakiekolwiek jest położenie jego wierzchołka w przestrzeni.

Twierdzenie XXXIX.

W kącie trójściennym, każda ściana jest mniejsza od summy dwóch innych, a większa od ich różnicy.

Dosyć jest dowieśdź że największa ściana jest mniejsza od summy dwóch innych.



Niech będzie ASB największa ściana w kącie trójściennym S. Zróbmy na tej ścianie kąt BSD = BSC, i poprowadźmy jakąkolwiek poprzeczną AB; po czem, weźmy na krawędzi SC długość SC = SD, i połączmy CA, CB. Dwa trójkąty BSC, BSD, mające kąt równy zawarty między dwoma bokami równemi, są równe; zatem bok BC = BD. Owoż, w trójkącie ABC

$$AD + DB < AC + BC; \quad \text{więc} \quad AD < AC.$$

Uważając teraz że dwa trójkąty ASD, ASC mają bok AS spólny, bok SD równy SC, a trzeci bok AD mniejszy od AC, widzimy że

$$\text{kąt } ASD < ASC.$$

Więc, dodając do pierwszej strony kąt BSD a do drugiej kąt równy BSC, otrzymujemy

$$ASB < ASC + BSC.$$

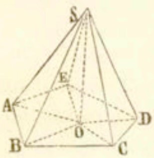
Z nierówności

$ASC + BSC > ASB$ wynika $ASC > ASB - BSD$.

Wniosek. — *W jakimkolwiek kącie wielościennym każda ściana jest mniejsza od summy wszystkich innych.* Aby tego dowieśdź, dość rozłożyć kąt wielościenny na trójściany, prowadząc płaszczyzny przez krawędzie tego kąta.

Twierdzenie XL.

W każdym trójścianie, a ogólnie w kącie wielościennym WYPUKŁYM, *summa ścian (kątów płaskich) jest mniejsza od czterech kątów prostych.*



Niech będzie kąt wielościenny SABCDE. Ponieważ ten kąt jest wypukły z założenia, wszystkie jego krawędzie SA, SB, SC,... leżą z jednej strony każdej ściany. Jeśli więc przez jakąkolwiek poprzeczną AB, wziętą naprzykład na ścianie ASB, poprowadzimy płaszczyznę i będziemy ją obracali około AB tak żeby, zaczynając od wierzchołka S w którym spotyka wszystkie krawędzie, weszła wewnątrz kąta wielościennego, ta płaszczyzna może oczywiście wziąć różne położenia, w których przecina wszystkie ściany kąta i daje wielokąty wypukłe jako ABCDE. Łącząc teraz jakikolwiek punkt wewnętrzny O tego wielokąta z jego wierzchołkami, utworzymy tyle trójkątów ile jest ścian w kącie wielościennym. Ztąd wynika że summa kątów w trójkątach mających wierzchołek w S jest ta sama co summa kątów w trójkątach mających wierzchołek w O

Owoż, w trójścianie ABES, mamy (39)

$$BAE < SAB + SAE, \quad \text{albo} \quad OAB + OAE < SAB + SAE;$$

tak samo, w trójścianach B, C,...

$$OBA + OBC < SBA + SBC$$
$$OCB + OCD < SCB + SCD$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

To pokazuje że summa kątów przy podstawie w trójkątach mających wierzchołek w O jest mniejsza od summy kątów przy podstawie w trójkątach mających wierzchołek w S; zatem dla zrównania, summa kątów przy wierzchołku S musi być mniejsza od summy kątów przy wierzchołku O. Ale wielokąt ABCDE jest wypukły, z przyczyny że kąt wielościenny S jest wypukły; przeto kąty AOB, BOC,... około wierzchołka O nie zachodzą jeden na drugi, i ich summa czyni cztery kąty proste. Więc summa kątów płaskich które tworzą kąt wielościenny S *wypukły* jest mniejsza od czterech kątów prostych.

Twierdzenie XLI.

W każdym trójścianie, 1° *summa kątów dwójściennych jest zawarta między* DWOMA *i* SZEŚCIOMA *kątami prostemi*, 2° *Każdy kąt dwójścienny powiększony dwoma prostemi jest większy od summy dwóch innych.*

Jeśli nazwiemy A, B, C kąty dwójścienne kąta trójściennego SABC, ściany (to jest kąty płaskie) trójścianu spełniającego będą $2^p - A$, $2^p - B$, $2^p - C$. Zatem

1° Ponieważ w trójścianie spełniającym summa ścian jest mniejsza od *czterech* kątów prostych, mamy

$$2 - A + 2 - B + 2 - C < 4; \quad \text{więc} \quad A + B + C > 2^p.$$

Do tego, każdy kąt dwójścienny trójścianu jest mniejszy od dwóch kątów prostych; więc

$$A + B + C < 6^p.$$

2° Każda ściana trójścianu jest mniejsza od summy dwóch innych (39); ztąd wynika że w trójścianie spełniającym jest

$$2 - A < 2 - B + 2 - C; \quad \text{więc} \quad A + 2P > B + C.$$

Wniosek. — *W trójścianie kąt dwójścienny zewnętrzny jest większy od różnicy dwóch kątów dwójściennych wewnętrznych nieprzyległych.* Jakoż, na mocy 2° mamy

$$2P + C > A + B; \text{ więc } 2P - A > B - C.$$

przypuszczając $B > C$.

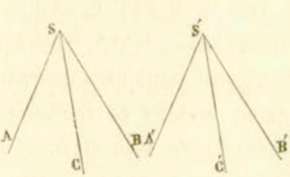
Uwaga. — Należy uważać że w trójścianie summa kątów dwójściennych nie jest stała jako w trójkącie, i tylko się zawiera między 2 i 6 kątami prostemi.

Zatem, trójścian może mieć *jeden*, *dwa* a nawet *trzy* kąty dwójścienne proste albo rozwarte. I tak, gdy trzy krawędzie trójścianu są prostopadłe między sobą, trójścian ma trzy kąty dwójścienne proste, i nazywa się *trójprostokątnym*; gdy jedna krawędź jest prostopadła do dwóch innych, trójścian jest *dwójprostokątny*; nareszcie trójścian mający jeden tylko kąt dwójścienny prosty nazywa się *prostokątnym*.

RÓWNOŚĆ KĄTÓW TRÓJŚCIENNYCH.

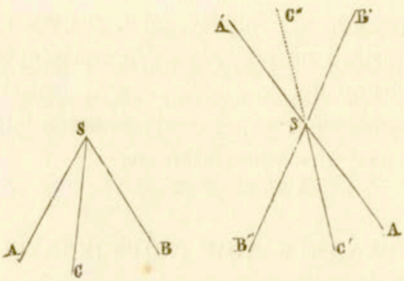
Twierdzenie XLII.

Dwa kąty trójścienne są równe gdy mają ścianę równą PRZYLEGŁĄ *dwom kątom dwójściennym równym każdy każdemu i podobnie ułożonym.*



Niech będą dwa trójściany SABC, S'A'B'C', w których ściana ASB jest równa ścianie A'S'B', kąty dwójścienne SA, S'A' równe między sobą, i kąty dwójścienne SB, S'B' także równe między sobą. Przypuszczamy nadto że układ części równych jest jednakowy w obydwóch trójścianach, to jest: że widz, oparty na ścianie ASB mając głowę w S i patrząc wewnątrz trójścianu SABC, spotrzega ścianę ASC na prawo a ścianę BSC na lewo; tak samo, widz mający podobną postawę w trójścianie S′A′B′C, spostrzega ścianę A′S′C′ na prawo a ścianę B′S′C′ na lewo. Powiedam że takie trójściany są przystawalne, to jest równe.

Jakóż, połóżmy trójścian S′A′B′C′ na trójścianie SABC tak, żeby ściana A′S′B′ przystała do swej równej ASB, i krawędź S′A′ padła na SA a krawędź S′B′ na SB; wtedy, płasczyzna A′S′C′ przystanie do ASC, bo kąty dwójścienne S′A′ i SA są równe; i tak samo, płasczyzna B′S′C′ przystanie do BSC, bo kąty dwójścienne S′B′, SB są równe. Więc krawędź S′C′ pada na SC, i dwa trójściany przystają do siebie



Niech będą teraz dwa trójściany SABC, S′A′B′C′ w których ściana ASB = A′S′B′, i kąty dwójścienne przyległe równe SA = S′A′, SB = S′B′, ale niejednakowo ułożone w obydwóch trójścianach; to jest: widz oparty na ścianie ASB ma kąt dwójścienny SA na *prawo;* a zaś widz, podobnie oparty na ścianie A′S′B′, ma kąt dwójścienny odpowiedny S′A′ na *lewo*. Powiedam że te dwa trójściany, mające części równe każda każdej ale w porządku odwrotnym ułożone, są symetrycznie. Jakoż, trójścian S′A′B′C′ i jego symetryczny S′A″B″C″ mają te same części równe ale w porządku odwrotnym ułożone; ztąd wynika że trójściany SABC i S′A″B″C″ czyniące zadość powyższemu twierdzeniu, są przystawalne. Więc trójściany SABC, S′A′B′C′ są symetryczne.

TWIERDZENIE XLIII.

Dwa kąty trójścianu są równe, albo symetryczne, gdy mają kąt dwójścienny równy zawarty między dwiema ścianami równemi każda każdej.

Dowodzenie jako wyżej: te trójściany są przystawalne albo symetryczne, według jak części równe są albo nie są podobnie ułożone.

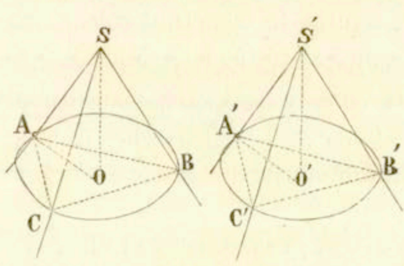
UWAGA. — Powtarzając wiadome dowodzenie geometryi płaskiej (I, 11), przyzwoicie zastosowane, nie trudno okazać następujące twierdzenie:

Gdy dwa trójściany mają dwie ściany równe każda każdej, zawierające kąt dwójścienny nierówny, wtedy naprzeciw kąta dwójściennego mniejszego jest ściana mniejsza. I NAWZAJEM.

TWIERDZENIE XLIV.

Dwa kąty trójścienne są równe gdy mają ściany równe między sobą i w tym samym porządku.

Niech będą dwa trójściany S, S′, mające kąty płaskie równe i



w tym samym porządku idące. Możnaby, opierając się na ostatniej uwadze, dowieśdź tego twierdzenia rozumowaniem któregośmy w geometryi płaskiej użyli (I, 12). Ale wolimy dać następujące dowodzenie wprost.

Weźmy sześć krawędzi równych SA, SB, SC, S'A', S'B', S'C'; wyobraźmy podstawy ABC, A'B'C', i z wierzchołków S, S' spuśćmy na nie odpowiedające prostopadłe SO, S'O', których spodki O, O' będą środkami kół opisanych na tych podstawach.

Teraz, uważajmy że dwa trójkąty równoramienne ASB, A'S'B', mające kąty przy wierzchołku równe z założenia, są równe; zatem bok AB = A'B'. Dla tej samej przyczyny bok AC = A'C' i BC = B'C'. Więc dwa trójkąty ABC, A'B'C' są równe. Ztąd wynika że promienie OA, O'A' kół opisanych są równe, a następnie że trójkąty prostokątne AOS, A'O'S' są równe.

Jeśli więc położymy trójścian SABC na S'A'B'C' tak żeby podstawa ABC przystała do swej równej A'B'C', wtedy środek koła O padnie na O', wysokość OS przystanie do O'S' (5), i wierzchołek S padnie na S'. Więc dwa trójściany są przystawalne, to jest równe.

Wniosek. — *Dwa trójściany mające ściany równe każda każdej, ale w porządku odwrotnym ułożone, są symetryczne.*

Twierdzenie XLV.

Dwa kąty trójścienne są równe albo symetryczne, gdy mają kąty dwójścienne równe każdy każdemu.

To twierdzenie, spółwzględne poprzedzającego, jest jego następstwem. Jakoż, dwa trójściany spełniające trójścianów zadanych mają ściany równe każda każdej; więc są równe albo symetryczne. Ztąd wynika że trójściany zadane mają ściany równe każda każdej; więc są równe albo symetryczne.

Uwaga. — Wynika z poprzedzających twierdzeń że, gdy dwa trójściany są równe albo symetryczne, naprzeciw ścian odpowiednych równych są kąty dwójścienne równe, i nawzajem.

Twierdzenie XLVI.

W każdym trójścianie, 1° naprzeciw ścian równych są kąty dwójścienne równe, 2° naprzeciw ściany mniejszej jest kąt dwójścienny mniejszy. I nawzajem.

1° Niech będzie trójścian SABC (*fig.* 1), w którym dwie ściany

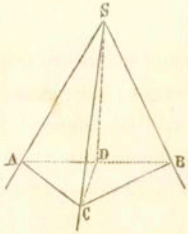


Fig. 1.

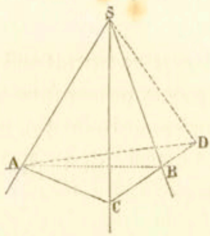


Fig. 2.

ASC i BSC są równe; powiedam że kąty dwójścienne SB i SA naprzeciw tych ścian leżące są równe. Jakoż, przez dwójsieczną SD kąta ASB i przez krawędź SC poprowadźmy płaszczyznę DSC. Dwa trójściany SDCA i SDCB majace ściany równe każda każdej ale w porządku odwrotnym ułożone, są symetryczne (44). Więc kąty dwójścienne SA i SB są równe.

Uwaga. — Z symetryi dwóch trójścianów SACD, SBCD, wynika że kąty dwójścienne ASCD i BSCD ṡą równe, i kąty dwójścienne ASDC, BSDC spełniające także równe między sobą. Więc w trójścianie który ma dwie ściany równe ASC, BSC, płaszczyzna przechodząca przez krawędź spólną SC i przez dwójsieczną SD ściany ASB dzieli kąt dwójścienny SC na dwie równe części, i jest prostopadła do ściany przeciwległej ASB.

2° Jeśli w trójścianie SABC (*fig.* 2), ściana ASC jest większa od ściany BSC, kąt dwójścienny CBSA jest większy od dwójściennego CASB. Jakoż, na płaszczyznie ściany mniejszej BSC weźmy kąt CSD = CSA, i poprowadźmy płaszczyznę ASD; otrzymamy trojścian SACD, w którym kąty dwójścienne SD i CASD, przeciwległe ścianom równym, są równe. Owoż, w trójścianie SABD

$$\text{kąt} \quad ABSC > SD - BASD\,;$$

więc, podstawiając zamiast kąta dwójściennego SD jego równy CASD, będzie

$$ABSC > CASD - BASD, \quad \text{albo} \quad ABSC > BASC.$$

Wzajemnice są oczywiste.

WNIOSEK. — *Trójścian równoramienny jest równokątny,* I NAWZAJEM.

UWAGA. — Powyższe twierdzenia pokazują że między trójkątami i trójścianami jest pewne podobieństwo własności; tak że z jednych można przejść do drugich, podstawiając tylko zamiast boków i kątów trójkąta ściany i kąty dwójścienne trójścianu; albo na odwrot.

I tak, w trójkącie *każdy bok jest większy od summy dwóch innych*; a w trójścianie, *każda ściana jest mniejsza od summy dwóch innych.* Ale niema potrzeby dodawać że ta odpowiedność własności jest ograniczona. *Kąt zewnętrzny trójkąta równa się summie dwóch kątów wewnętrznych nieprzyległych*; gdy tymczasem *kąt dwójścienny zewnętrzny trójścianu jest większy od różnicy dwóch kątów wewnętrznych nieprzyległych*, i nie ma stałego związku z summą tych kątów.

TWIERDZENIE XLVII.

W kącie wielościennym WYPUKŁYM *mającym n ścian,* 1° *summa kątów dwójściennych jest zawarta między* $2(n-2)$ *i* $2n$ *kątów prostych;* 2° *każdy kąt dwójścienny jest większy od różnicy między summą wszystkich innych i summą* $2(n-2)$ *kątów prostych.*

Albowiem, prowadząc płaszczyzny przez jedną krawędź i przez każdą z innych, można rozłożyć ten kąt wielościenny *wypukły* na $2(n-2)$ trójścianów.

Owoż, 1° w trójścianie, summa kątów dwójściennych jest większa od dwóch kątów prostych; więc summa kątów dwójściennych kąta wielościennego jest większa od $2(n-2)$ kątów dwójściennych prostych.

2° W kącie wielościennym *wypukłym* każdy kąt dwójścienny jest mniejszy od *dwóch* kątów prostych; więc summa wszystkich jego kątów dwójściennych jest mniejsza od $2n$ kątów dwójściennych prostych.

WNIOSEK. — *W kącie wielościennym* WYPUKŁYM, *summa kątów dwójściennych zewnętrznych jest mniejsza od* CZTERECH *kątów dwójściennych prostych.* Bo, przy każdej krawędzi, kąt dwójścienny zewnętrzny jest spełnieniem dwójściennego wewnętrznego; zatem summa wszystkich kątów dwójściennych zewnętrznych i wewnętrznych czyni $2n$ kątów dwójściennych prostych. Ale summa samych kątów dwójściennych wewnętrznych jest większa od $2n-4$ kątów dwójściennych prostych; więc summa kątów dwójściennych zewnętrznych jest mniejsza od *czterech* kątów dwójściennych prostych.

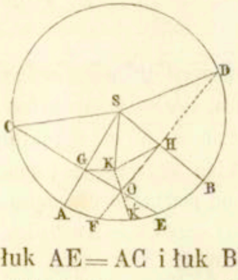
Ztąd wynika że, *kąt wielościenny* WAPUKŁY *nie może mieć więcej niż trzy kąty dwójścienne wewnętrzne ostre*; bo nie może mieć więcej niż trzy kąty dwójścienne zewnętrzne rozwarte.

UWAGA. — Dla uzupełnienia teoryi kątów wielościennych, trzebaby tutaj dać twierdzenia ich równości, i powiedzieć jak się mierzy te kąty za pomocą kąta trójściennego trójprostokątnego wziętego za jedność. Ale o tych rzeczach lepiej będzie mówić po wielokątach sferycznych którym kąty wielościenne odpowiedają.

ZAGADNIENIE.

Zbudować trójścian którego trzy ściany są dane.

Żeby można zbudować trójścian ze trzech ścian danych, *trzeba*, jako wiemy, żeby największa ściana była mniejsza od summy dwóch innych, i żeby summa trzech ścian była mniejsza od czterech kątów prostych. Następujące rozwiązanie dowodzi że te wa runki są *dostateczne*.



Nakreślmy na płaszczyznie kąt ASB równy kątowi największej ze trzech ścian danych, i kąty przyległe ASC, BSD równe dwom innym ścianom; z wierzchołka S jako środka, promieniem dowolnym, opiszmy koło które przetnie ramiona tych kątów w punktach A, B, C, D; weźmy łuk AE = AC i łuk BD = BF, i poprowadźmy cięciwy CE, DF które będą prostopadłe odpowiednio do promieni SA, SB.

Ponieważ z założenia ściana ASB jest mniejsza od summy dwóch innych ASC, BSD, będzie łuk $AB < AE + BF$; zatem punkta E i F leżą oba na łuku AB, i punkt E przypada między

B i F. Nadto, ponieważ summa trzech ścian ASB, ASC, BSD jest mniejsza od czterech kątów prostych, summa łuków AB + AC + BD jest mniejsza od okręgu; zatem punkt C znajduje się zewnątrz łuku ABD. Dla tych dwóch przyczyn punkta C i E leżą osobno na obydwóch łukach cięciwy DF; więc cięciwy CE i DF przecinają się wewnątrz koła w punkcie O.

Teraz z punktu O wyprowadźmy do płasczyzny ASB prostopadłę OK, i na płasczyznie GOK nakreślmy z punktu G jako środka, promieniem GC, łuk koła który przetnie prostopadłę OK w dwóch punktach K i K′, bo promień GC jest większy od GO; nakoniec, jeśli połączymy przecięcie K z wierzchołkiem S, trójścian SABK będzie miał ściany dane. Jakoż, poprowadźmy KG, KH; te proste są prostopadłe odpowiednio do SA, SB na mocy twierdzenia trzech prostopadłych. Zatem dwa trójkąty SGK, SGC, mające kąty proste przy G zawarte między dwoma bokami równemi każdy każdemu, są równe. Ztąd wynika że ściana ASK jest równa danej ASC, i bok SK = SC = SD. Więc dwa trójkąty SHK, SHD prostokątne przy H, mające przeciwprostokątnę równą i bok spólny, są równe; to dowodzi że trzecia ściana SHK jest równa danej SHD.

Zagadnienie ma drugie rozwiązanie, trójścian SABK′, który się otrzymuje łącząc wierzchołek S z drugim punktem przecięcia K′. Te dwa trójściany SABK, SABK′, mające ściany równe każda każdej, ale w porządku odwrotnym ułożone, są symetryczne.

Uwaga. — Na figurze przypuszczono że kąty przyległe ASC, BSD są ostre; gdy jedna ze ścian *np.* ASC jest rozwartokątna, dowiedzie się równości ścian ASK i ASC, uważając trójkąty mające spełnienia kątów tych ścian. Gdy jedna ze ścian jest prostokątna, wtedy równość ścian wykreślonej i danej jest widoczna; a gdy dwie ściany są prostokątne, natenczas prostopadła wyprowadzona z punktu S do płasczyzny ASB jest oczywiście trzecią krawędzią żądanego trójścianu, który jest dwójprostokątny albo nawet trójprostokątny.

Zbudować trójścian którego trzy kąty dwójścienne A, B, C *są dane.* To zagadnienie jest *spółwzględne* poprzedzającego; aby je rozwiązać, dość zbudować trójścian spełniający którego ściany są : $2-A$, $2-B$, $2-C$ (biorąc kąt prosty za *jedność kątową*), i wyznaczyć jego kąty dwójścienne które będą ścianami szukanego.

Owoż, aby trójścian spełniający był możebny, trzeba i dość jest żeby, przypuszczając $A < B < C$, było :

$$2-A < 2-B+2-C \quad \text{i} \quad 2-A+2-B+2-C < 4$$

albo $$A+2 > B+C \quad \text{i} \quad 6 > A+B+C > 2.$$

Więc *aby, mając dane trzy kąty dwójścienne* A, B, C, *można było zbudować trójścian, trzeba i dość jest żeby najmniejszy z tych kątów powiększony dwoma prostemi przewyższał summę dwóch innych, i żeby summa trzech kątów dwójściennych była zawarta między dwoma i sześcioma kątami prostemi.* Wiemy już że te warunki są *konieczne* (41), teraz widzimy że są *dostateczne.*

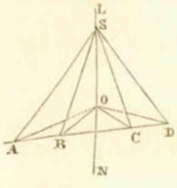
PĘK CZTERECH PŁASCZYZN.

Płasczyzny przechodzące przez jedną linię prostą stanowią *pęk płasczyzn.*

Twierdzenie XLVIII.

Gdy pęk czterech płasczyzn, przechodzących przez jedną linię prostą SN, *jest przecięty płasczyzną poprzeczną jakąkolwiek* SAD, *stosunek nieharmoniczny czterech linij przecięć* SA, SB, SC, CD *jest stały, niezależny od położenia płasczyzny poprzecznej.*

Jakoż, do prostej SD poprowadźmy płasczyznę prostopadłą OAD, która przetnie cztery płasczyzny pęku i płasczyznę poprzeczną wedle prostych OA, OB, OC, OD, i AD. Pęki (S . ABCD) i (O . ABCD), przecinając poprzeczną AD w tych samych punktach A, B, C, D, mają ten sam stosunek nieharmoniczny. Ale stosunek nieharmoniczny pęku (O . ABCD) jest stały, bo promienie tego pęku tworzą kąty prostolinijne czterech płasczyzn danego pęku;



więc stosunek nieharmoniczny pęku (S . ABCD) jest także stały, jakiekolwiek płaszczyzna poprzeczna bierze położenie.

Na mocy tego twierdzenia, nazwano *stosunkiem nieharmonicznym pęku czterech płaszczyzn* stosunek nieharmoniczny czterech linij przecięć tego pęku przez płaszczyznę poprzeczną.

UWAGA. — To wszystko staje się oczywistem jeśli użyjemy trygonometryi; albowiem wartość stosunku nieharmonicznego pęku czterech linij prostych zależy tylko od samych kątów tych linij. I w samej rzeczy, w pęku (O . ABCD) mamy

$$\frac{\text{CA}}{\text{wst COA}} = \frac{\text{AO}}{\text{wst C}}, \quad \text{i} \quad \frac{\text{CB}}{\text{wst COB}} = \frac{\text{BO}}{\text{wst C}}; \quad \text{ztąd} \quad \frac{\text{CA}}{\text{CB}} = \frac{\text{AO wst COA}}{\text{BO wst COB}}.$$

Znajdziemy tak samo

$$\frac{\text{DA}}{\text{DB}} = \frac{\text{AO wst DOA}}{\text{BO wst DOB}}.$$

Więc $$(\text{O . ABCD}) = \frac{\text{CA}}{\text{CB}} : \frac{\text{DA}}{\text{DB}} = \frac{\text{wst COA}}{\text{wst COB}} : \frac{\text{wst DOA}}{\text{wst DOB}}.$$

Widzimy teraz jasno co znaczy stosunek nieharmoniczny pęku czterech linij prostych, albo pęku czterech płaszczyzn.

WNIOSEK. — *Gdy jakakolwiek poprzeczna* AD *spotyka pęk czterech płaszczyzn*, SOA, SOB, SOC, SOD, *stosunek nieharmoniczny czterech punktów przecięć* A, B, C, D *jest równy stosunkowi nieharmonicznemu tych płaszczyzn.* Bo oba stosunki nieharmoniczne są równe stosunkowi nieharmonicznemu czterech linij przecięć SA, SB, SC, SD, wyznaczonych przez płaszczyzny pęku na płaszczyznie poprzecznej która przechodzi przez AD.

Pęk czterech płaszczyzn nazywa się *harmonicznym* gdy jego stosunek nieharmoniczny jest —1. Wtedy, wszelka płaszczyzna poprzeczna albo wszelka sieczna wyznacza układ harmoniczny czterech linij prostych albo czterech punktów.

ZADANIA.

803. — Linia prosta jest prostopadła do płaszczyzny jeśli czyni kąty równe ze trzema liniami prostemi które leżą na tej płaszczyznie.

804. — Jakie jest miejsce geometryczne punktów płaszczyzny które są równo oddalone od dwóch punktów danych zewnątrz tej płaszczyzny?

805. — Jakie jest miejsce geometrycne spodków linij prostopadłych, spuszczonych z punktu danego zewnątrz płaszczyzny, na linie proste które przechodzą na tej płaszczyznie przez jeden z jej punktów?

806. — Dwie płaszczyzny jedna prostopadła a druga pochyła do trzeciej spotykają się.

807. — Znaleźć miejsce środka linii prostej która, mając długość zmienną, opiera się na ścianach kąta dwójściennego prostego i porusza się równolegle do danego kierunku.

808. — W kącie trójściennym, summa kątów utworzonych przez krawędzie ze ścianami przeciwległemi, jest mniejsza od summy ścian, (a równa w trójścianie trójprostokątnym).

809. — Gdy dwie płaszczyzny są prostokątne, wszelka sieczna tworzy z niemi dwa kąty których summa jest mniejsza od kąta prostego, a najwięcej mu równa.

810. — Przez trzy punkta A, B, C linii prostej, poprowadzono trzy równoległe które spotykają płaszczyznę M w punktach P, Q, R; dowieśdź że

$$AB \cdot CR = AC \cdot BQ \pm BC \cdot AP;$$

znak + albo — według jak punkt C jest między A i B albo zewnątrz.

811. — W kącie trójściennym,

1° Płaszczyzny dwójsieczne kątów dwójściennych spotykają się wedle linii prostej, która jest miejscem punktów równo oddalonych od ścian tego trójścianu.

2° Płaszczyzny poprowadzone przez krawędzie, prostopadle do ścian przeciwległych, przecinają się wedle jednej linii prostej.

3° Płaszczyzny poprowadzone przez dwójsieczne ścian, prostopadle do tych ścian, spotykają się wedle linii prostej, która jest miejscem punktów równo oddalonych od trzech krawędzi trójścianu.

4° Płaszczyzny poprowadzone przez krawędzie i przez dwójsieczne ścian przeciwległych spotykają się wedle linii prostej.

Uwaga. — Te cztery twierdzenia są prawdziwe, gdy wierzchołek kąta trójściennego oddala się w nieskończoność, to jest gdy trzy krawędzie stają się równoległemi.

812. — Linia prosta równo nachylona na dwie płaszczyzny spotyka je w dwóch punktach równo oddalonych od ich precięcia. I nawzajem.

813. — Wszelkie przcięcie trójścianu prostokątnego przez płaszczyznę prostopadłą do jednej z krawędzi jest trójkątem prostokątnym.

814. — Przecinając trójścian prostokątny płaszczyzną spotykającą wszystkie krawędzie, otrzymuje się trójkąt w którym punkt spotkania wysokości jest rzutem wierzchołka trójścianu na tej płaszczyznie.

815. — Przez punkt dany poprowadzić linię prostą któraby spotykała dwie proste nie leżące na jednej płaszczyznie.

816. — Poprowadzić linię prostą równoległą do danej, i któraby spotykała dwie dane proste nie leżące na jednej płaszczyznie.

817. — Przeciąć kąt czworościenny wypukły płaszczyzną tak żeby przecięcie było równoległobokiem.

818. — Przez punkt dany w przestrzeni poprowadzić linię prostą któraby czyniła kąty równe ze trzema liniami prostemi danemi, albo ze trzema płaszczyznami danemi.

819. — Przez dany punkt poprowadzić płaszczyznę któraby czyniła kąty równe ze trzema liniami prostemi danemi : — albo ze trzema płaszczyznami danemi.

820. — Między dwiema liniami prostemi, nie leżącemi na jednej płaszczyznie, poprowadzić linię prostą długości danej, równoległą do płaszczyzny danej.

821. — Są dane w przestrzeni dwa punkta i linia prosta. Poprowadzić przez tę linię płaszczyznę taką, żeby prostopadłe na nią spuszczone z tych dwóch punktów miały się w stosunku $m : n$.

822. — Są dane cztery punkta A, B, C, D w przestrzeni ; przez punkt D poprowadzić płaszczyznę taką, żeby prostopadłe na nią spuszczone z punktów A, B, C były proporcyonalne do liczb m, n, p.

823. — Poprowadzić płaszczyznę taką, żeby prostopałe na nią spuszczone ze czterech danych punktów A, B, C, D, były proporcyonalne do liczb m, n, p, q.

824. Znaleźć miejsce geometryczne punktów, 1° równo oddalonych od trzech punktów danych ; albo 2° równo oddalonych od trzech prostych które leżą na jednej płaszczyznie : albo jeszcze 3° równo oddalonych od trzech płaszczyzn.

825. — Miejsce punktów równo oddalonych od dwóch prostych nie leżących na jednej płaszczyznie.

826. — Miejsce punktów takich żeby summa prostopadłych spuszczonych na dwie płasczyzny dane równała się linii danej.

Zamiast summy wziąć różnicę.

827. — Miejsce punktów takich żeby summa prostopadłych spuszczonych na n płasczyzn danych równała się linii danej.

828. — Miejsce punktów których stosunek odległości od dwóch płasczyzn danych jest ilością daną.

829. — Miejsce punktów których odległości od trzech płasczyzn danych są proporcyonalne do m, n, p.

830. — Znaleźć na płasczyznie miejsce geometryczne punktów takich, żeby summa kwadratów odległości każdego z nich od dwóch punktów danych zewnątrz tej płasczyzny była ilością stałą.

831. — Znaleźć na płasczyznie miejsce geometryczne punktów takich, żeby różnica kwadratów odległości każdego z nich od dwóch punktów danych zewnątrz tej płasczyzny była ilością stałą.

832. — Znaleźć miejsce geometryczne środka linii prostej, mającej długość daną, której skrajności pomykają się po dwóch prostych prostokątnych nie leżących na jednej płasczyznie.

833. — Dane są dwie płasczyzny jakiekolwiek i punkt zewnętrzny przez który poprowadzono poprzeczną do tych płasczyzn; znaleźć miejsce punktów harmonicznie sprzężonych z danym, względem dwóch punktów spotkania poprzecznej z danemi płasczyznami.

834. — Znaleźć miejsce punktów których summa odległości od dwóch płasczyzn danych równa się linii danej.

835. — Zogólnić za pomocą znaków $+$ i $-$, miejsce punktów których summa odległości od trzech płasczyzn danych równa się linii danej.

836. — Znaleźć na danej prostej punkt taki, żeby summa jego odległości od dwóch płasczyzn przecinających się była minimum.

837. — Mając dane trzy proste w przestrzeni, nie leżące po dwie na jednej płasczyznie; poprowadzić poprzeczną taką, żeby jej odcinki zawarte między temi liniami były proporcyonalne do liczb danych.

838. — Mając dane dwa punkta A i B zewnątrz płasczyzny, znaleźć na tej płasczyznie punkt taki, żeby summa jego odległości od punktów A i B była minimum.

839. — Mając dane dwa punkta A i B, zewnątrz płasczyzny P, znaleźć

na tej płaszczyźnie punkt taki, żeby różnica jego odległości od punktów A i B była maximum.

840 — Linia prosta, opierająca się na dwóch prostych danych w przestrzeni, zmienia ciągle położenie, ale zostając równoległą do danej płaszczyzny; jakie jest miejsce geometryczne punktów które dzielą tę prostę ruchomą w stosunku danym?

841. — Jeśli zrzutujemy punkt przestrzeni na dwóch płaszczyznach przecinających się, prostopadłe spuszczone z tych dwóch rzutów na spólne przecięcie płaszczyzn spotykają się w jednym punkcie. I nawzajem, dwa punkta leżące na dwóch płaszczyznach przecinających się są rzutami jednego punktu przestrzeni, jeśli prostopadłe spuszczone z tych punktów na spólne przecięcie płaszczyzn spotykają się w jednym punkcie.

842. — Mając dany czworobok spaczony i linię prostą która dzieli dwa boki przeciwległe na części proporcyonalne, znaleźć drugą prostę któraby była prostopadła do pierwszej i dzieliła także proporcyonalnie dwa inne boki czworoboku.

843. — W czworoboku spaczonym, trzy linie łączące środki przekątnych i środki boków przeciwległych przecinają się zobopólnie na równe części.

844. — Jeśli linia prosta EF posuwa się po dwóch bokach przeciwległych AB i CD czworoboku spaczonego tak żeby było

$$\frac{EA}{ED} = \frac{\lambda FB}{FC},$$

λ jest ilością stałą, ta linia ruchoma spotyka zawsze trzy proste niezmienne.

845. — Płaszczyzna poprzeczna spotykająca boki wielokąta spaczonego ABCD... w punktach a, b, c,... daje

$$\frac{aA}{aB} \cdot \frac{bB}{bC} \cdot \frac{cC}{cD} \ldots\ldots = +1.$$

846. — W sześciokącie spaczonym, mającym boki przeciwległe równe i równoległe, środki boków są na jednej płaszczyźnie.

Albo ogólniej. W wielokącie spaczonym *parzystej* liczby boków, mającym boki przeciwległe równe i równoległe, linie które łączą wierzchołki przeciwległe i linie które łączą środki boków przeciwległych spotykają się w jednym punkcie.

KSIĘGA SIÓDMA

WIELOŚCIANY.

Określenie I — *Wielościan* jestto część przestrzeni zamknięta płaszczyznami. Ale czasem nazywa się także wielościanem wszelka powierzchnia zamknięta utworzona z wielokątów.

Te wielokąty nazywają się *ścianami*, linie spotkania ścian *krawędziami* albo *bokami*, a punkta spotkania krawędzi *wierzchołkami* wielościanu.

Summa wszystkich ścian wielościanu stanowi jego *powierzchnię*.

Wielościan jest *czworościanem*, *pięciościanem*, *sześciościanem*,... według jak ma *cztery*,, *pięć*, *sześć*,... ścian.

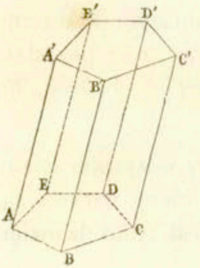
Czworościan jest najjprostszy z wielościanów; albowiem trzema płaszczyznami nie można zamknąć przestrzeni.

Nazywa się *przekątną* wielościanu wszelka prosta która łączy dwa wierzchołki nie należące do jednej ściany; a *płaszczyzną przekątną*, wszelka płaszczyzna która przechodzi przez trzy wierzchołki nie należące wszystkie do jednej ściany.

Wielościan jest wypukły jeśli leży cały z jednej strony każdej ściany.

Między wielościanami odróżnia się szczególniej *graniaston i piramidę*.

II. — Graniaston (graniastosłup) jestto wielościan mający dwie ściany równoległe i równe a wszystkie inne równoległoboczne.



Można wyobrazić graniaston utworzony następującym sposobem:

Z wierzchołka A wielokąta ABCDE prowadzi się, zewnątrz jego płaszczyzny, prostę AA' i przez jej skrajność A' płaszczyznę równoległą do płaszczyzny ABCDE; potem, przez wszystkie inne wierzchołki B, C, D, E prowadzi się, aż do spotkania z tą płaszczyzną równoległą, proste BB', CC', DD',.. równoległe do AA'. Te równoległe są wszystkie równe prostej AA' (23); zatem wszystkie boczne ściany ABB'A', BCC'B',... są równoległobokami; wielokąty ABCDE, A'B'C'D'E' są równoległe i równe, bo mają boki odpowiedne równe i równoległe. Więc wielościan tak otrzymany jest graniastonem.

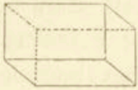
Te dwa wielokąty ABCDE, A'B'C'D'E' równe i równoległe nazywają się *podstawami* graniastonu, a ich odległość jest jego *wysokością*.

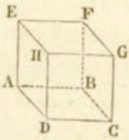
Proste AA', BB'... są *krawędziami bocznemi* graniastonu, a summa równoległoboków ABB'A', BCC'B'... stanowi jego *powierzchnię boczną*.

Graniaston jest *prosty* albo *pochyły*, według jak krawędzie boczne są prostopadłe albo pochyłe do podstaw.

Graniaston nazywa się *foremnym* gdy jest prosty i ma za podstawy wielokąty foremne.

Graniaston jest *trójkątny*, *czworokątny*, *pięciokątny* gdy ma za podstawę *trójkąt*, *czworokąt*, *pięciokąt*,...

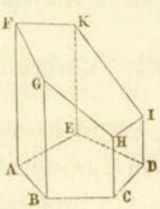




III. — Graniaston mający za podstawy *równoległoboki* nazywa się RÓWNOLEGŁOŚCIANEM.

Równoległościan może być *prosty* albo *pochyły*. Równoległościan prosty, mający za podstawy *prostokąty*, jest równoległościanem *prostokątnym*. Wszystkie ściany równoległościanu prostokątnego są prostokątami.

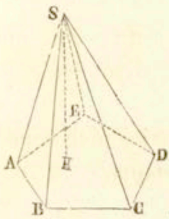
Nazywa się SZEŚCIANEM równoległościan którego podstawy i ściany boczne są kwadratami.



IV. — Jeśli zetniemy graniaston płaszczyzną nierównoległą do podstawy, część pozostała ABCDEFGHIK będzie *pniem graniastonu* albo *graniastonem ściętym*.

V. — Wielościan mający wszystkie ściany równe i wszystkie kąty równe nazywa się *foremnym*, jako sześcian. Jest tylko dziewięć wielościanów foremnych, pięć wypukłych a cztery gwiaździste, jako później zobaczymy.

VI. — PIRAMIDA (niewłaściwie *ostrosłup*) jestto wielościan którego jedna ściana jest wielokątem jakimkolwiek ABCDE, a wszystkie inne ściany są trójkątami mającemi boki tego wielokąta za podstawy, i punkt S przestrzeni za spólny wierzchołek.



Ten wielokąt ABCDE jest *podstawą*, a punkt S *wierzchołkiem* piramidy.

Wysokością piramidy jest prostopadła SF spuszczona z wierzchołka S na podstawę ABCDE.

Proste SA, SB,... są *krawędziami bocznemi* piramidy, a summa ścian trójkątnych SAB, SBC,... stanowi jej *powierzchnię boczną*.

Piramida jest wielościanem którego wszystkie wierzchołki, prócz jednego, są na jednej płaszczyźnie.

Przecinając kąt wielościenny S płaszczyzną spotykającą wszystkie krawędzie, otrzymujemy wielościan SABCDE który jest piramidą.

Piramida nazywa się *foremną*, gdy ma za podstawę wielokąt foremny którego środkiem jest spodek wysokości. Krawędzie boczne piramidy foremnej są równe jako pochyłe równo oddalone od spodka wysokości; zatem jej ściany boczne są trójkątami równoramiennemi równemi. Wysokość jednego z tych trójkątów nazywa się *apotemą* piramidy foremnej.

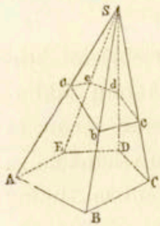
Piramida jest *trójkątna*, *czworokątna*, *pięciokątna*,... według jak ma za podstawę *trójkąt*, *czworokąt*, *pięciokąt*,...

Piramida trójkątna, mająca *cztery* ściany, nazywa się zwykle *czworościanem*.

W czworościanie można wziąć każdą ścianę za podstawę, a wierzchołek przeciwległy za jego wierzchołek.

Czworościany w przestrzeni grają rolę trójkątów na płaszczyznie. I tak, wyznacza się położenie punktu na płaszczyznie wiążąc go z *dwoma* danemi punktami tej płaszczyzny za pomocą trójkąta; podobnie, wyznacza się położenie punktu w przestrzeni wiążąc go za pomocą czworościanu ze *trzema* punktami danemi także w przestrzeni.

VII. — Jeśli od piramidy SABCDE odetniemy, jakąkolwiek płaszczyzną, piramidę S*abcde*, wielościan pozostały ABCDE*abcde* będzie *pniem piramidy* albo *piramidą ściętą*.



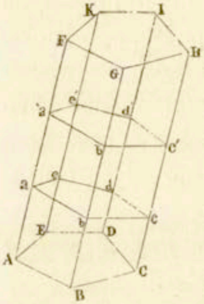
Wielokąty ABCDE, *abcde* są *podstawami* pnia piramidy; gdy te podstawy są równoległe ich odległość jest *wysokością* pnia.

Jeśli piramida jest foremna, jej pień o podstawach równoległych jest pniem piramidy *foremnym*.

GRANIASTONY, ICH RÓWNOŚĆ.

TWIERDZENIE I.

Przecięcia powierzchni bocznej graniastonu przez dwie płaszczyzny równoległe są wielokątami równemi.



Jakoż, równoległe aa', bb'..., zawarte między płaszczyznami równoległemi, są równe; więc czworoboki $abb'a'$, $bcc'b'$..., są równoległobokami. Zatem, bok $ab = a'b'$, $bc = b'c'$, etc. i kąt $abc = a'b'c'$, kąt $bcd = b'c'd'$...

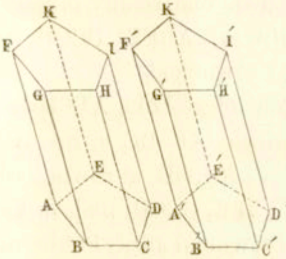
Więc dwa wielokąty $abcde$, $a'b'c'd'e'$, są równe.

OKREŚLENIE VIII. — Nazywa się *przecięciem prostem* graniastonu przecięcie wyznaczone w tym graniastonie przez płaszczyznę prostopadłą do jego krawędzi bocznych.

TWIERDZENIE II.

Dwa graniastony są równe, gdy mają kąt dwójścienny równy ZAWARTY *między podstawą i ścianą równą każda każdej, i w tym samym porządku.*

Niech będą dwa graniastony ABCDEF, A'B'C'D'E'F', w których kąt dwójścienny AB = A'B', podstawa ABCDE = A'B'C'D'E', i ściana ABGF = A'B'G'F'.



Połóżmy pierwszy graniaston na drugim, tak żeby punkt A padł na A', i podstawa ABCDE przystała do swej równej A'B'C'D'E'. Ponieważ kąt dwójścienny AB = A'B', ściana ABGF przystanie do swej równej A'B'G'F' i wierzchołki F, G padną na F', G'. Zatem, płaszczyzna FGH przystanie do płaszczyzny równoległej F'G'H', a następnie podstawa FGHIK do swej równej F'G'H'I'K'. Więc dwa graniastony przystają do siebie i są równe.

Wniosek I. — *Dwa graniastony są równe gdy mają podstawę i dwie ściany przytykające równe każda każdej i podobnie ułożone.*

Bo mają kąt trojścienny równy; a zatem kąt dwójścienny równy zawarty między podstawą i ścianą równą każda każdej, i w tym samym porządku.

II. — *Dwa graniastony* PROSTE *są równe gdy mają równe podstawy i równe wysokości.* Bo są oczywiście przystawalne.

III. — *Dwa równoległościany* PROSTOKĄTNE *są równe gdy mają trzy krawędzie przyległe równe każda każdej.*

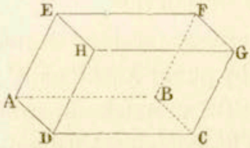
Dwa sześciany mające bok równy są równe.

Uwaga. — Jako widać z powyższego twierdzenia, równość dwóch graniastonów, których podstawy mają n boków, wymaga $2n$ oddzielnych warunków. Ta liczba warunków, potrzebna do wyznaczenia graniastonów, czyni $\frac{2}{3}$ liczby krawędzi. Ale, żeby wielościan, ograniczony dwiema podstawami o n bokach a bocznie czworobokami w liczbie n, był graniastonem, jego podstawy muszą być równoległe i krawędzie boczne równoległe między sobą. To wszystko potrzebuje n warunków które, dodane do poprzedzających, czynią liczbę $3n$ równą liczbie krawędzi graniastonu.

Twierdzenie III.

W każdym równoległościanie: 1° *ściany przeciwległe są równe i równoległe*; 2° *kąty dwójścienne przeciwległe są równe.*

1° Niech będzie równoległościan ABCDF mający za podstawy dwa równoległoboki ABCD, EFGH równe i równoległe. Trzeba



dowieśdź że dwie inne ściany przeciwległe jakiekolwiek, ABFE, DCGH, są także równe i równoległe.

Owoż, w równoległoboku ABCD dwa boki przeciwległe AB, DC są równe i równoległe; dla podobnej przyczyny boki AE, DH są równe i równoległe; więc dwa równoległoboki ABFE, DCGH, mające kąt równy zawarty między dwoma bokami równemi każdy każdemu, są równe i równoległe.

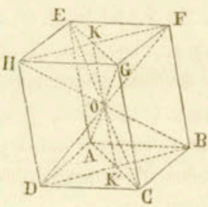
2° W równoległościanie kąty dwójścienne przeciwległe, jako AD i FG, są równe; bo są oba spełnieniem kąta dwójściennego BC.

Wniosek. — *Przecięcie równoległościanu płaszczyzną spotykającą cztery krawędzie równoległe jest równoległobokiem* (VI, 21).

Uwaga. — Z tego twierdzenia wynika że w równoległościanie można brać dwie którekolwiek ściany przeciwległe za podstawy, i że cztery krawędzie przyległe podstawie są równe i równoległe między sobą.

Twierdzenie IV.

W równoległościanie przekątne i linie łączące środki ścian przeciwległych spotykają się w jednym punkcie, który jest spólnym ich środkiem.



Jakoż, połączmy AC, EG. Czworobok ACGE, mający dwa boki przeciwległe AE, CG równe i równoległe, jest równoległobokiem. Zatem, przekątne AG, CE, i prosta KK′ łącząca środki boków przeciwległych AC, EG, spotykają się we spólnym środku O. Więc wszystkie cztery przekątne równoległościanu, i cztery proste łączące środki ścian przeciwległych, spotykają się we środku O przekątnej AG który jest spólnym środkiem tych linij.

Określenie VIII. — Punkt O nazywa się *środkiem* równoległościanu, dlatego że dzieli na dwie równe części wszelką prostę która przezeń przechodzi (I, 30 *określ.*).

Twierdzenie V.

W każdym równoległościanie summa kwadratów z przekątnych równa się summie kwadratów z krawędzi (Figura poprzednia).

W równoległoboku ACGE, $\overline{AG}^2 + \overline{CE}^2 = \overline{2AC}^2 + \overline{2AE}^2$;

W równoległoboku BDHF, $\overline{BH}^2 + \overline{DF}^2 = \overline{2BD}^2 + \overline{2BF}^2$;

W równoległoboku ABCD, $\overline{2AC}^2 + \overline{2BD}^2 = \overline{4AB}^2 + \overline{4AD}^2$.

Dodając stronami, zważając że BF = AE i redukując, otrzymujemy

$$\overline{AG}^2 + \overline{BH}^2 + \overline{CE}^2 + \overline{DF}^2 = 4\,(\overline{AB}^2 + \overline{AD}^2 + \overline{AE}^2).$$

Wniosek I. — Jeśli równoległościan jest prostokątny, wszystkie jego równoległoboki są prostokątami. I tak, równoległobok BCHE jest prostokątem; bo bok BC, prostopadły do płaszczyzny DCG, jest prostopadły do boku CH. Owoż, w prostokącie przekątne są równe; zatem wszystkie cztery przekątne równoległościanu są równe.

Na mocy tej uwagi, ostatnie równanie staje się

$$\overline{AG}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AD}^2 + \overline{AE}^2;$$

Więc *kwadrat z przekątnej równoległościanu prostokątnego równa się summie kwadratów ze trzech krawędzi przyległych.*

Ten ważny wynik łatwo się wprost otrzymuje.

II. — W sześcianie wszystkie boki są równe; zatem

$$\overline{AG}^2 = \overline{3AB}^2, \qquad \text{zkąd} \qquad \frac{AG}{AB} = \sqrt{3};$$

więc, *w sześcianie stosunek przekątnej do boku jest niespółmierny, i równa się pierwiastkowi kwadratowemu z* 3.

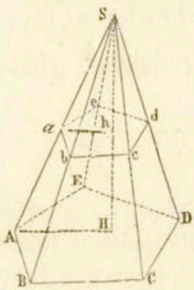
PIRAMIDY, ICH RÓWNOŚĆ.

Twierdzenie VI.

Jeśli piramida jest przecięta płaszczyzną równoległą do podstawy, wtedy :

1° *Krawędzie boczne i wysokość są podzielone proporcyonalnie.*

2° *Przecięcie jest wielokątem podobnym podstawie.*



Niech będzie piramida SABCDE i jej wysokość SH, przecięte płaszczyzną *abd* równoległą do podstawy ABD. Połączmy AH, *ah*.

1° Proste AH i *ah*, AB i *ab*..., są równoległe (VI, 21); więc

$$\frac{SH}{Sh} = \frac{SA}{Sa} = \frac{SB}{Sb} = \frac{SC}{Sc} = \text{etc.}$$

2° Wielokąty *abcde*, ABCDE mają boki proporcyonalne, bo trójkąty podobne S*ab* i SAB, S*bc* i SBC..., dają

$$\frac{ab}{AB} = \frac{sb}{SB} = \frac{bc}{BC} = \frac{Sc}{SC} = \frac{cd}{CD} = \ldots.$$

Nadto, kąty odpowiednie *abc* i ABC, *bcd* i BCD..., są równe jako mające ramiona równoległe i skierowane w te same strony,

Więc przecięcie *abcde* i podstawa ABCDE, mające boki proporcyonalne i kąty między niemi zawarte równe, są wielokątami podobnemi.

Wniosek I. — Ponieważ wielokąty *abcde* i ABCDE są podobne, mamy

$$\frac{abcde}{ABCDE} = \frac{\overline{ab}^2}{\overline{AB}^2}.$$

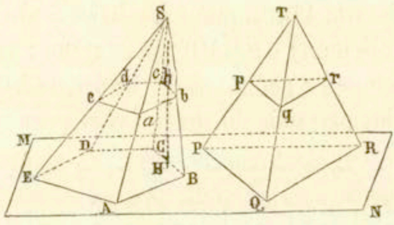
Owoż, trójkąty podobne S*ab*, SAB dają $\frac{ab}{AB} = \frac{Sa}{SA}$, albo, na mocy tego co poprzedza, $\frac{ab}{AB} = \frac{Sh}{SH}$;

więc $$\frac{abcde}{ABCDE} = \frac{\overline{Sh}^2}{\overline{SH}^2},$$

to jest, w piramidzie przecięcia równoległe do podstawy i ta podstawa są proporcyonalne do kwadratów z ich odległości od wierzchołka piramidy.

II. — *Gdy dwie piramidy równej wysokości, i mające podstawy na jednej płaszczyźnie, są przecięte płaszczyzną równoległą do podstaw, przecięcia są proporcyonalne do tych podstaw.*

Niech będą dwie piramidy SABCDE, TPQR, równej wyso-



kości SH, postawione na płasczyznie MN. Mamy, według poprzedzającego wniosku,

$$\frac{abcde}{ABCDE} = \frac{\overline{Sh}^2}{\overline{SH}^2} \quad \text{i} \quad \frac{pqr}{PQR} = \frac{\overline{Sh}^2}{\overline{SH}^2};$$

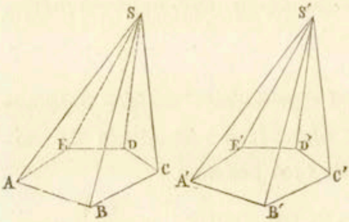
więc $$\frac{abcde}{ABCDE} = \frac{pqr}{PQR};$$

Ztąd wynika że, *jeśli podstawy dwóch piramid równej wysokości są równowarte, przecięcia abcde, pqr są także równowarte.*

Uwaga. — Jeśli piramidę foremną przetniemy płaszczyzną równoległą do podstawy, otrzymamy pień piramidy o podstawach foremnych, w którym ściany boczne będą trapezami równoramiennemi i równemi. Wysokość ednego z tych trapezów jest *apotemą* pnia piramid y.

Twierdzenie VII.

Dwie piramidy są równe gdy mają kąt dwójścienny równy ZAWARTY *między podstawą i ścianą równą każda każdej i podobnie ułożoną.*



Niech będą dwie piramidy SABCDE, S'A'B'C'D'E', w których kąt dwójścienny AB = A'B', podstawa ABCDE = A'B'C'D'E', i ściana ABS = A'B'S'.

Połóżmy piramidę S na piramidzie S' tak, żeby punkt A padł na A' i podstawa ABC... przystała do swej równej A'B'C'... Ponieważ kąt dwójścienny AB=A'B', płaszczyzna SAB przystanie do S'A'B'; wierzchołek S padnie na S', bo ściana ABS = A'B'S'. Więc dwie piramidy przystają do siebie i są równe.

WNIOSEK. — *Dwa czworościany są równe gdy mają ściany równe każda każdej, i w tym samym porządku ułożone.*

Twierdzenie VIII.

Dwie piramidy są równe gdy mają podstawę równą PRZYLEGŁĄ *trzem kątom dwójściennym równym i w tym samym porządku.*

Dowodzenie przez przystawanie.

WNIOSEK. — *Dwie piramidy są równe gdy mają podstawę równą przyległą trzem krawędziom równym i w tym samym porządku.*

Bo czworościany które mają za krawędzie te trzy krawędzie boczne i przekątne łączące ich spodki, są równe; więc, etc.

Twierdzenie IX.

Dwie piramidy równokątne między sobą są równe, gdy mają dwie odpowiednie krawędzie równe.

Dowodzenie przez przystawanie.

Z tego twierdzenia wynika że dwie piramidy są równokątne między sobą, gdy mają, *prócz jednego*, wszystkie kąty dwójścienne, albo wszystkie kąty płaskie, równe każdy każdemu i podobnie ułożone.

WNIOSEK. — *Dwie piramidy są równe gdy mają kąt wielościenny przy wierzchołku równy i zawarty między trzema krawędziami równemi każda każdej.*

UWAGA. — Dwa powyższe twierdzenia pokazują że równośc dwóch piramid, których podstawy mają n krawędzi, wymaga $2n$ warunków. Zatem na wyznaczenie piramidy trzeba i dość tyle oddzielnych warunków ile jest krawędzi.

MIARA WIELOŚCIANÓW.

OKREŚLENIE IX. — Dwa wielościany mające tę samą objętość nazywają się *równowarttemi*.

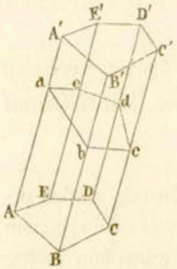
Dwa wielościany równe są temsamem równowarte; ale dwa wielościany równowarte mogą nie być równe, bo, nie mając koniecznie tego samego kształtu, nie są przystawalne.

TWIERDZENIE X.

Powierzchnia boczna graniastonu prostego ma za miarę wieloczyn z obwodu podstawy przez wysokość.

Jakoż, powierzchnia boczna graniastonu składa się z prostokątów, których spólną wysokością jest wysokość tego graniastonu a podstawami boki jego podstawy. A że powierzchnia prostokąta ma za miarę wieloczyn z podstawy przez wysokość, więc summa powierzchni tych prostokątów ma za miarę summę wieloczynów ze spólnej wysokości przez każdą podstawę, czyli wieloczyn z summy podstaw tych prostokątów przez wysokość, to jest wieloczyn z obwodu podstawy graniastonu przez jego wysokość.

WNIOSEK. — *Powierzchnia boczna graniastonu jakiegokolwiek ma za miarę wieloczyn z obwodu przecięcia prostego przez krawędź boczną.*



Niech będzie graniaston ABCDEA' i jego przecięcie proste *abcde*. Równoległoboki ABB'A', BCC'B',..., składające powierzchnię boczną graniastonu, mają za podstawy krawędzie boczne a za wysokość boki przecięcia prostego. Więc powierzchnia boczna tego graniastonu równa się

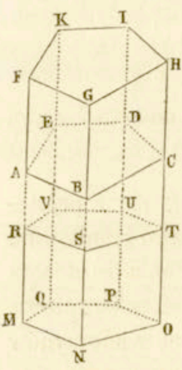
$$AA' . ab + BB' . bc + \ldots EE' . ea = (ab + bc + \ldots + ea) AA'.$$

UWAGA. — Powierzchnia cała graniastonu jest summą jego powierzchni bocznej i obydwóch podstaw.

TWIERDZENIE XI.

Graniaston pochyły jest równowarty graniastonowi prostemu który ma jego przecięcie proste za podstawę i krawędź boczną za wysokość.

Niech będzie graniaston pochyły ABCDEFGHIK; przedłużmy

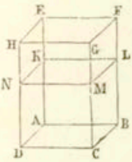


ściany boczne, i zróbmy zewnątrz graniastonu przecięcie proste RSTUV takie któreby nie spotykało podstawy ABCDE; weźmy potem krawędź RM równą AF, i poprowadźmy płasczyznę MNOPQ prostopadłą do MR, otrzymamy graniaston prosty MNOPQR, mający za podstawę przecięcie proste graniastonu pochyłego ABCDEF a za wysokość jego krawędź boczną.

Ztąd wynika że dwa pnie graniastonne RSTUVFH i MNOPQAC, mające podstawy równe a krawędzie boczne prostopadłe i odpowiednio równe, są oczywiście równe jako przystawalne. Owoż, jeśli od całej figury odejmiemy graniaston ścięty MNORQAC, zostanie graniaston pochyły ABCDEFH, a jeśli od tej samej całej figury odejmiemy graniaston ścięty RSTUVFH zostanie graniaston prosty MNOPQRT; więc te dwa graniastony pochyły i prosty są równowarte.

Twierdzenie XII.

Dwa równoległościany prostokątne równej podstawy są proporcyonolne do swych wysokości.



Niech będą dwa równoległościany *prostokątne* ABCDE i ABCDK mające równe podstawy, albo raczej spólną podstawę ABCD. Aby dowieśdź że te równoległościany są proporcyonalne do wysokości AE, AK, trzeba odróżnić, jako zwykle, dwa przypadki.

1° Wysokości spółmierne. Dajmy nato że wysokości AE, AK są w stosunku liczb 5 do 3, to jest $\frac{AE}{AK}=\frac{5}{3}$.

Podzielmy wysokość AE na 5 równych części; wysokość AK będzie zawierała 3 z tych części. Jeśli więc, przez punkta podziału, poprowadzimy płaszczyzny równoległe do podstawy, rozłożymy równoległościan AG na 5 równoległościanów równych, z których trzy będą się mieściły w równoległościanie AM; zatem stosunek równoległościanów będzie $\frac{AG}{AM}=\frac{5}{3}$.

Więc stosunki równoległościanów i wysokości, oba wyrażone tą samą liczbą, są równe.

2° Jeśli stosunek wysokości jest niespółmierny, wiadome dowodzenie okaże że i wtedy stosunki równoległościanów i wysokości są równe.

Wniosek. —Długości trzech krawędzi przyległych graniastonu prostokątnego są jego *rozmiarami*; więc

Dwa równoległościany prostokątne mające dwa rozmiary spólne mają się jako ich trzecie rozmiary.

Twierdzenie XIII.

Stosunek dwóch równoległościanów prostokątnych równa się wieloczynowi stosunków ze trzech krawędzi przyległych.

Niech będą a, b, c rozmiary równoległościanu prostokątnego R, i a', b', c' rozmiary drugiego równoległościanu prostokątnego R'. Wyobraźmy dwa inne równoległościany prostokątne R'' i R''' mające rozmiary a, b, c', i a, b', c'.

Równoległościany R i R'', mające dwa rozmiary spólne a, b, dają

$$\frac{R}{R''} = \frac{c}{c'}.$$

Podobnie R'' i R''' dają także

$$\frac{R''}{R'''} = \frac{b}{b'}.$$

Nakoniec R''' i R' dają

$$\frac{R'''}{R'} = \frac{a}{a'}.$$

Ztąd, mnożąc stronami i redukując, otrzymujemy

$$\frac{R}{R'} = \frac{a}{a'} \cdot \frac{b}{b'} \cdot \frac{c}{c'}. \qquad (1)$$

To równanie pokazuje że, jakiekolwiek są *jedności linijne* któremi wymierzono wyrazy każdego stosunku, zawsze *stosunek dwóch równoległościanów prostokątnych równa się wieloczynowi stosunków trzech krawędzi przyległych.*

Ale, jeśli trzy krawędzie przyległe są wymierzone tą samą jednością linijną w obydwóch równoległościanach, powyższe równanie może się pisać

$$\frac{R}{R'} = \frac{abc}{a'b'c'}; \qquad (2)$$

to znaczy że wtedy *dwa równoległościany prostokątne jakiekolwiek mają się jako wieloczyny ich trzech rozmiarów.*

Jeśli do tego jeszcze, za *jedność powierzchni* która dotąd zostaje dowolną, weźmiemy *kwadrat* wystawiony na jedności linij, w tem przypuszczeniu, uważając c za wysokość równoległościanu, wieloczyn $a \cdot b$ mierzy powierzchnię podstawy, i ostatnie równanie wyraża że:

Dwa równoległościany prostokątne jakiekolwiek mają się jako wieloczyny z podstaw przez wysokości.

Niech będą dwa równoległościany prostokątne R, R′ mające rozmiary: $a = 15$ metrów, $b = 6$ łokci, $c = 4$ stopy; $a' = 16$ metrów, $b' = 5$ łokci, $c' = 3$ stopy. Aby znaleźć stosunek tych dwóch równoległościanów, niema potrzeby przywodzić wszystkich rozmiarów do tej samej jedności, dość napisać

$$\frac{R}{R'} = \frac{15m}{16m} \cdot \frac{6ł}{5ł} \cdot \frac{4s}{3s} = \frac{15}{16} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{4}{3} = \frac{3}{2}. \qquad \text{Ztąd} \qquad R = \frac{3}{2} R'.$$

Ten wynik nie mógłby się otrzymać za pomocą równania (2) które wymaga żeby wszystkie rozmiary były wyznaczone tą samą jednością linijną.

Miara objętości równoległościanu prostokątnego. — Jeśli, za *jedność objętości*, weźmiemy *sześcian wystawiony na jedności linij*, równanie (1) da

$$\frac{R}{1^s} = \frac{a}{1^1} \cdot \frac{b}{1^1} \cdot \frac{c}{1^1}; \qquad \text{zkąd} \qquad R = abc.$$

Otrzymane równania znaczą że, stosunek równoległościanu prostokątnego do sześcianu wziętego za jedność objętości, to jest *miara objętości równoległościanu prostokątnego*, równa się wieloczynowi liczb które mierzą trzy krawędzie przyległe. To się wyraża krócej, mówiąc: *Objętość równoległościanu prostokątnego równa się wieloczynowi jego trzech rozmiarów.*

Jeśli weźmiemy za jedność objętości *sześcian* i za jedność powierzchni *kwadrat*, obie figury wystawione na jedności linij, wtedy wyrazimy miarę objętości równoległościanu wysłowieniem ogólniejszem i treściwszem od pierwszego, mówiąc:

Objętość równoległościanu prostokątnego równa się wieloczynowi z jego podstawy przez wysokość.

WNIOSEK. — *Objętość sześcianu równa się trzeciej potędze jego krawędzi*, bo $a.a.a = a^3$. Ztąd pochodzi że trzecią potęgę liczby nazwano jej sześcianem.

UWAGA. — Okazaliśmy w Geometryi płaskiej jak, *mając dany kwadrat, wykreślić kwadrat dwa razy większy*. Zastosujmy podobne pytanie do sześcianu. Nazywając x bok sześcianu dwa razy większego od danego a^3, mamy $x^3 = 2a^3$, zkąd $x = a\sqrt[3]{2}$.

Jest dowiedzione że nie można za pomocą Geometryi elementarnej, to jest, kreśląc same tylko linie proste i koła, wyrazić pierwiastku sześciennego danej iczby; jako równie nie można takim sposobem znaleźć dwóch średnich geometrycznych między dwiema liniami prostemi, ani *podzielić kąta na trzy równe części*. Ale, kreśląc pewne linie krzywe, Starożytni dawno już rozwiązali te niegdyś sławne kwestye, które dla dzisiejszej umiejętności są więcej ciekawe niż trudne.

TWIERDZENIE XIV.

Objętość równoległościanu jakiegokolwiek ma za miarę wieloczyn z podstawy przez wysokość.

1° Uważajmy najpierwej równoległościan prosty ABCDE (fig. 1)

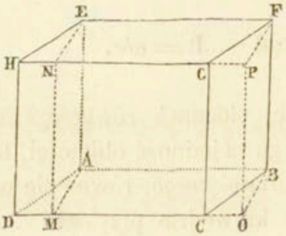


Fig. 1.

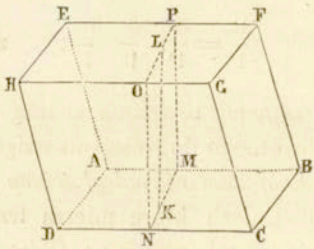


Fig. 2.

mający za podstawę równoległobok ABCD a za wysokość krawędź AE. Jeśli przez wierzchołki A i B poprowadzimy płaszczyzny AN, BP prostopadłe do krawędzi AB, otrzymamy równoległościan prostokątny ABOME równowarty danemu AG. Jakoż, dwa graniastony trójkątne proste ADMEHN i BCOFGP, mające równe podstawy i równe wysokości, są równe; więc, jeśli odejmiemy je kolejno od całej figury ABODEFPH, reszty, to jest równoległościan prostokątny AP i równoległościan prosty AG, będą równowarte.

Owoż, objętość równoległościanu prostokątnego ABOME ma za miarę wieloczyn AB . AM . AE; więc objętość równoległościanu prostego AG ma tę samą miarę AB . AM . AE, to jest, równa się wieloczynowi z podstawy ABCD przez wysokość AE.

2° Niech będzie teraz równoległościan jakikolwiek ABCDE (*fig.* 2) mający podstawę ABCD i wysokość KL. Jeśli przez punkt M krawędzi AB poprowadzimy do niej płaszczyznę prostopadłą MO, dany równoległościan AG będzie równowarty równoległościanowi prostemu który ma za podstawę przecięcie proste MNOP, i za wysokość krawędź AB. Owoż, na mocy 1°, miarą objętości ostatniego równoległościianu jest wieloczyn MN . KL . AB, albo AB . MN . KL; więc, poniieważ wieloczyn AB . MN mierzy podstawę ABCD, objętość ró)wnoległościanu jakiegokolwiek ABCDE ma za miarę wieloczyn z]podstawy ABCD przez wysokość KL.

Twierdzenie XV.

Objętość graniastonu ma za miarę wieloczyn z podstawy przez wysokość.

1° Uważajmy najpierwej graniaston trójkątny ABCDEF (*fig.* 1).

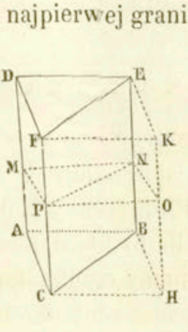


Fig. 1.

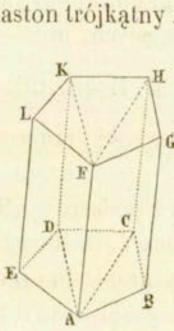


Fig. 2.

Na jego podstawie ABC dopełnijmy równoległoboku ABHC, i przez boki BH, HC poprowadźmy płaszczyzny równoległe do krawędzi AD, aż do spodkania z płaszczyzną podstawy DEF; utworzymy, na krawędziach AB, AC, AD, równoległościan AK którego dany graniaston ABCDEF będzie połową. Jakoż, jeśli graniaston ABCDEF jest prosty, graniaston BCHEFK jest także prosty, i te dwa graniastony, oczywiście równe, są połowami równoległościanu AK. A jeśli dany graniaston ABCDEF jest pochyły, poprowadźmy przecięcie proste MNOP; graniastony pochyłe ABCDEF, BCHEFK będą równowarte graniastonom prostym które mają odpowiednio za podstawy trójkąty równe MNP, NOP, i za wysokość krawędź AD. Owoż, te dwa graniastony proste są równe; zatem, graniastony pochyłe im równowarte są równowarte między sobą, i każdy z nich jest połową graniastonu AK.

Więc, ponieważ objętość równoległościanu AK ma za miarę wieloczyn z podstawy ABHC przez wysokość H, objętość graniastonu trójkątnego ABCDEF będzie miała za miarę połowę tego wieloczynu, to jest wieloczyn z podstawy ABC, która jest połową równoległoboku ABHC, przez wysokość H.

2° Niech będzie graniaston jakikolwiek ABCDEF (*fig.* 2). Można go rozłożyć na graniastony trójkątne, prowadząc płaszczyzny przekątne przez krawędzie boczne. Te graniastony trójkątne mają wysokość danego graniastonu za spólną wysokość, a ich podstawy ABC, ACD,... składają jego podstawę ABCDE. Ztąd wynika że miara objętości graniastonu ABCDEF, równa summie miar graniastonów składających, jest

$$ABC\,.\,H + ACD\,.\,H + ADE\,.\,H + \ldots \quad \text{albo} \quad ABCDE\,.\,H,$$

nazywając H wysokość graniastonu.

Więc objętość graniastonu jakiegokolwiek ABCDEF ma za miarę wieloczyn z podstawy ABCDE przez wysokość H.

Oznaczając przez V, B, H trzy liczby które mierzą *objętość*, *podstawę* i *wysokość* graniastonu, mamy ogólną formułę objętości graniastonu jakiegokolwiek, a temsamem wszelkiego równoległościanu,

$$V = BH.$$

Ta formuła pokazuje że: *dwa graniastony mające podstawy* *równowarte i tę samą wysokość są równowarte;* zatem, dwa graniastony mają się jako wieloczyny z podstaw przez wysokości. Ztąd wynika że: *dwa graniastony podstaw równowartych są proporcyonalne do swych wysokości; a dwa graniastony równej wysokości są proporcyonalne do podstaw.*

Wniosek I. — Graniaston pochyły jest równowarty graniastonowi prostemu, który ma jego przecięcie proste za podstawę i krawędź boczną za wysokość.

Więc *objętość wszelkiego graniastonu* ABCDEA′ (*figura stronicy* 500) *równa się wiloczynowi z przecięcia prostego* abcde *przez krawędź boczną* AA′.

Ztąd wynika że *podstawa graniastonu ma się do przecięcia prostego jako krawędź boczna do wysokości.*

II. — Widzieliśmy że graniaston trójkątny jest połową równoległościanu tej samej wysokości i podwójnej podstawy. Więc *objętość graniastonu trójkątnego ma za miarę połowę wieloczynu ze ściany bocznej przez jej odległość od krawędzi przeciwległej.*

Zastosowanie. — *Sadzawka, mająca kształt graniastonu sześciokątnego foremnego, jest napełniona wodą na* $1^{m},2$ *głębokości, a bok podstawy zawiera* 4 *metry. Wyrachować ilość wody, przypuszczając że jej powierzchnia jest zupełnie płaska.*

Apotema podstawy równa się $\sqrt{4^2-2^2}=2^{m}\sqrt{3}$, a powierzchnia tej podstawy ma $24^{mk}\sqrt{3}$. Więc objętość wody w sadzawce, na mocy formuły $V = B.H$, jest

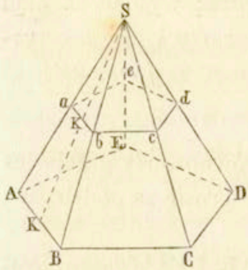
$$V = 24\sqrt{3}\times 1,2 = \sqrt{2488,32} = 49^{ms}, 883$$

na mniej niż litr, przez niedostatek.

Twierdzenie XVI.

Powierzchnia boczna piramidy foremnej ma za miarę połowę wieloczynu z obwodu podstawy przez apotemę.

Niech będzie piramida foremna SABCDE. Jej powierzchnia boczna składa się z trójkątów równoramiennych i równych, które



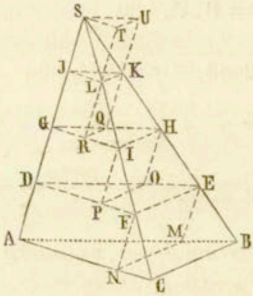
mają za podstawy boki AB, BC, CD.... podstawy tej piramidy, a za wysokość jej apotemę SK. Owoż, summa powierzchni tych trójkątów równa się wieloczynowi summy ich podstaw przez połowę apotemy SK; więc powierzchnia boczna piramidy foremnej ma za miarę połowę wieloczynu z podstawy przez apotemę.

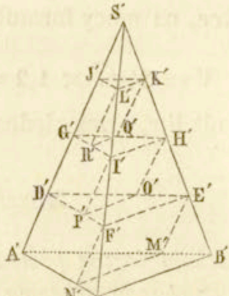
Wniosek. — *Powierzchnia boczna pnia piramidy foremnej, o podstawach równoległych, ma za miarę wieloczyn z połowy summy obwodów podstaw przez apotemę tego pnia.*

Jakoż, trapezy równoramienne i równe, składające powierzchnię pnia piramidy foremnej, mają za boki odpowiedne boki AB i *ab*, BC i *bc*..., a za spólną wysokość jego apotemę K*k*. A że summa powierzchni tych trapezów równa się wieloczynowi z połowy summy ich podstaw przez spólną wysokość K*k*; więc powierzchnia rzeczonego pnia ma za miarę wieloczyn z połowy summy obwodów jego podstaw przez apotemę.

Twierdzenie XVII.

Dwie piramidy trójkątne mające podstawy równowarte i wysokości równe są równowarte.





Niech będą dwie piramidy trójkątne (dwa czworościany) SABC, S'A'B'C' mające podstawy ABC, A'B'C' równowarte i wysokości równe.

Podzielmy spólną wysokość tych piramid na n równych części, czyli, co wychodzi na jedno, podzielmy dwie krawędzie AS i A'S', każdą na n części równych, *np* na *cztery*, i przez punkta podziałów poprowadźmy płaszczyzny równoległe do podstaw, które wyznaczą odpowiednie przecięcia DEF i D'E'F', GHI i G'H'I',... Ponieważ dwie piramidy mają podstawy równowarte i wysokości równe, ich przecięcia odpowiednie, jako DEF i D'E'F', zrobione przez płaszczyzny równoległe do tych podstaw i równo od nich oddalone, są równowarte (6. wn. 2).

Wystawmy teraz na przecięciach odpowiednych DEF i D'E'F' graniastony wpisane, prowadząc przez EF płaszczyznę równoległą do krawędzi DA a przez E'F' płaszczyznę równoległą do krawędzi D'A', otrzymamy dwa graniastony wpisane DEFAMN i D'E'F'A'M'N'. Wykreślmy podobnie wszystkie inne. Te graniastony, brane po dwa odpowiedne, są równowarte, bo mają podstawy równowarte i wysokości równe z wykreślenia.

I tak, graniaston DEFAMN jest równowarty graniastonowi D'E'F'A'M'N', ponieważ przecięcia odpowiedne DEF, D'E'F' są równowarte, a wysokość każdego z tych graniastonów jest ntą cześcią spólnej wysokości dwóch piramid. Ztąd wynika że summa graniastonów wpisanych w piramidę SABC jest równa summie graniastonów wpisanych w piramidę S'A'B'C'.

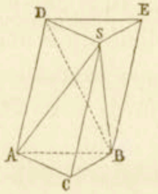
Owoż, jeśli podzielimy krawędź SA na coraz większą liczbę równych części, summa graniastonów wpisanych w piramidę SABC będzie się coraz bardziej zbliżała do jej objętości, którą ma za granicę. Albowiem, zaniedbując piramidę SJKL popełniamy błąd oczywiście mniejszy od graniastonu JKLSTU czyli od graniastonu JKLGQR; a zaniedbując następnie wielościan HKQILR, będzie summa dwóch błędów mniejsza od pnia GHIJKL, a tem bardziej mniejsza od graniastonu GHIDEF. I tak dalej postępując, widzimy że summa wszystkich błędów jest mniejsza od ostatniego pnia piramidy ABCDEF, a tem bardziej mniejsza od graniastonu mającego podstawę tej piramidy za podstawę i ntą część jej wysokości za wysokość. A ponieważ liczba n rośnie nieskończenie, ostatni graniaston maleje aż do zera, to jest różnica między piramidą SABC i summą graniastonów wpisanych może stać się mniejszą od wszelkiej wielkości naznaczonej; więc ta summa graniastonów ma za granicę objętość piramidy SABC. Tak samo objętość piramidy S'A'B'C' jest granicą summy graniastonów wpisanych D'E'F'A'M'N', G'H'I'D'O'P',... A że te summy graniastonów wpisanych w obie piramidy są ciągle równe, więc ich granice czyli objętości piramid SABC i S'A'B'C' są równe.

Twierdzenie XVIII.

Objętość piramidy ma za miarę trzecią część wieloczynu z podstawy przez wysokość.

1° Niech będzie najpierwej piramida trójkątna SABC, Na jej podstawie ABC i na krawędzi CS wystawmy graniaston trójkątny ABCDES.

Dana piramida mająca z tym graniastonem spólną podstawę i wysokość jest jego trzecią częścią.

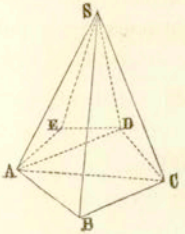


Jakoż, jeśli poprowadzimy płaszczyznę przez trzy wierzchołki B, D, S, rozłożymy graniaston trójkątny ABCDES na trzy piramidy trójkątne SABC, SABD, SBDE.

Dwie ostatnie piramidy SABD, SBDE są równowarte, bo mają tę samą wysokość, i podstawy równowarte jako połowy równoległoboku ABED. Ale piramida SBDE albo BDES może być uważana jako mająca podstawę DES i wierzchołek B; więc dwie piramidy BDES i SABC, mające podstawy i wysokość graniastonu ABCDES za podstawę i wysokość, są równowarte.

To pokazuje że trzy piramidy na które się rozkłada graniaston ABCDES są równowarte; zatem każda z nich jest trzecią częścią tego graniastonu. A że objętość graniastonu ma za miarę wieloczyn z podstawy przez wysokość, więc objętość piramidy trójkątnej SABC ma za miarę trzecią część wieloczynu z jej podstawy przez wysokość.

2° Niech będzie piramida jakakolwiek SABCDE. Można rozłożyć podstawę ABCDE na trójkąty ABC, ACD,... przekątnemi ; po czem, prowadząc płaszczyzny przez te przekątne i przez wierzchołek S, rozłożyć piramidę wielokątną na piramidy trójkątne SABC, SACD... mające za podstawy trójkąty ABC, ACD,.. składające jej podstawę, a za wysokość jej wysokość. Owoż, każda z tych piramid trójkątnych ma za miarę trzecią część wieloczynu ze swej podstawy przez wysokość piramidy wielokątnej ; więc objętość piramidy jakiejkolwiek SABCDE równa się trzeciej części wieloczynu z summy podstaw składających jej podstawę przez wysokość ; to jest, wszelka piramida ma za miarę trzecią część wieloczynu z podstawy przez wysokość.



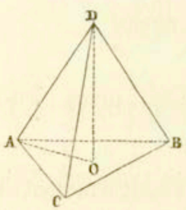
Oznaczając przez V, B, H trzy liczby które mierzą *objętość*, *podstawę* i *wysokosć* piramidy, mamy ogólną formułę

$$V = \frac{1}{3} BH$$

która pokazuje że *każda piramida jest trzecią częścią graniastonu tej samej podstawy i wysokości.*

Dwie piramidy podstawy równowartej i wysokości równej są równowarte. Zatem, dwie piramidy mają się jako wieloczyny z podstaw przez wysokości; *dwie piramidy mające podstawy równowarte są proporcyonalne do swych wysokości ; a dwie piramidy równej wysokości są proporcyonalne do podstaw.*

Wniosek. — Objętość czworościanu foremnego wyraża się w funkcyi jego krawędzi a.



Jakoż, wszystkie ściany czworościanu foremnego DABC są trójkątami równobocznemi równemi. Zatem, podstawa ABC tego czworościanu równa się $\frac{a^2}{4}\sqrt{3}$ (IV, 5 *uw.*).

Jego wysokość DO jest bokiem kąta prostego w trójkącie ADO który ma za drugi bok tego kąta promień OA koła opisanego na podstawie, to jest $\frac{a}{\sqrt{3}}$, a za przeciwprostokątnę krawędź $AD = a$. Ta wysokość wyraża się tedy

przez $$\sqrt{a^2 - \frac{a^2}{3}} = a\sqrt{\frac{2}{3}}.$$

Więc objętość V czworościanu foremnego jest

$$V = \frac{a^2}{12}\sqrt{3} \,.\, a\sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}.$$

Przykład. — *Wyrachować objętość piramidy pięciokątnej foremnej, której krawędź boczna ma* 1 *metr, a bok podstawy* 2 *decymetry.*

Nazywając R promień koła opisanego na podstawie, mamy

$$\frac{1}{2}R\sqrt{10 - 2\sqrt{5}} = \frac{2}{10} \qquad \text{(IV, } zag. \text{ 3);}$$

zkąd $$R = \frac{1}{10}\sqrt{\frac{10 + 2\sqrt{5}}{5}}.$$

Następnie, apotema podstawy wyraża się przez $\frac{1}{10}\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{5}}$, a wysokość piramidy przez $\frac{1}{10}\sqrt{\frac{490 - 2\sqrt{5}}{5}}$. Więc objętość tej piramidy równa się

$$\frac{2\,.\,5}{10} \cdot \frac{1}{20}\sqrt{\frac{5 + 2\sqrt{5}}{5}} \cdot \frac{1}{30}\sqrt{\frac{490 - 2\sqrt{5}}{5}}$$

$$= \frac{1}{3000}\sqrt{2430 + 970\sqrt{5}} = 0^{m.s},02260.$$

na mniej niż jedną setną decymetra sześciennego, przez niedostatek.

Uwaga. — Znając miarę objętości graniastonu, można samym rachunkiem otrzymać miarę objętości piramidy. Jakoż, podzielmy wysokość H piramidy na n części równych; przez punkta podziału poprowadźmy płaszczyzny równoległe do podstawy B, i na $n-1$ przecięciach wystawmy graniastony trójkątne, jako na *figurze tw.* XVII. Widzimy łatwo że, w graniastonie rzędu k, licząc od wierzchołka, podstawa wyraża się przez $B\left(\frac{k}{n}\right)^2$ (6, *wn.* 1), a objętość przez $B.H\frac{k^2}{n^3}$ Więc, nazywając Σ summę wszystkich graniastonów otrzymanych kładąc za k liczby 1, 2, 3..., aż do $n-1$, będzie

$$\Sigma\frac{B.H}{n^2}k^2=\frac{B.H}{n^3}\left\{1+2^2+3^2+\ldots(n-1)^2\right\}.$$

Ale ilość w nawiasach, jako wiadomo z Algebry, równa się $\frac{1}{6}(n-1)n(2n-1)$; podstawiając tę wartość, znajdziemy

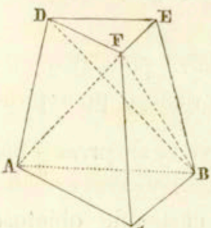
$$\Sigma\frac{B.H}{n^2}k^2=\frac{B.H}{6n^2}(n-1)(2n-1,\ \text{albo}\ \Sigma\frac{B.H}{n^2}k^2=\frac{1}{6}B.H\left(2-\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}\right).$$

Owoż, im większe jest n tem bardziej ilość w nawiasie zbliża się do 2, a temsamem summa objętości graniastonów dąży do swej granicy $\frac{1}{3}B.H.$ Więc

$$\textit{granica}\ \ \Sigma\frac{B.H}{n^2}k^2,\ \text{czyli objętość piramidy równa się}\ \frac{1}{3}B.H.$$

Twierdzenie XIX.

Objętość pnia piramidy, o podstawach równoległych, ma za miarę trzecią część wieloczynu z wysokości przez summę dwóch podstaw i średniej proporcyonalnej między temi podstawami.



1° Niech będzie najpierwej pień piramidy trójkątnej ABCDEF o podstawach równoległych.

Jeśli poprowadzimy płaszczyzny ABF i BDF, rozłożymy ten pień na trzy piramidy trójkątne FABC, FBDE i FABD. Dwie pierwsze, to jest piramidy FABC i FBDE czyli BDEF mają, za podstawy i wysokość, podstawy ABC i DEF pnia i jego wysokość.

Co do trzeciej piramidy FABD, uważajmy że piramidy FBDE i

FABD, mające śpólny wierzchołek F, i podstawy BDE, ABD na jednej płasczyznie, mają spólną wysokość, zatem są proporcyonalne do swych podstaw; te zaś podstawy BDE, ABD, mając równą wysokość, są proporcyonalne do boków DE i AB. Więc

$$\frac{\mathrm{FBDE}}{\mathrm{FABD}} = \frac{\mathrm{DE}}{\mathrm{AB}}.$$

Ale piramidy FABD i FABC, mogą także być uważane jako mające za wierzchołek punkt B i za podstawy trójkąty AFD, AFC trapezu ACFD; zatem, mając spolną wysokość są proporcyonalne do swych podstaw, a te ostatnie są proporcyonalne do boków DF i AC; więc

$$\frac{\mathrm{FABD}}{\mathrm{FABC}} = \frac{\mathrm{DF}}{\mathrm{AC}}.$$

Owoż, z założenia, podstawy DEF, ABC pnia piramidy są trójkątami podobnemi, i dają

$$\frac{\mathrm{DE}}{\mathrm{AB}} = \frac{\mathrm{DF}}{\mathrm{AC}};$$

ztąd wnosimy że pierwsze stosunki dwóch powyższych proporcyj są równe, i mamy

$$\frac{\mathrm{FBDE}}{\mathrm{FABD}} = \frac{\mathrm{FABD}}{\mathrm{FABC}}.$$

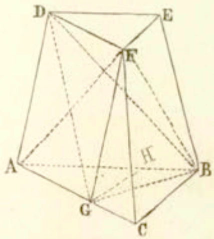
Więc trzecia piramida FABD jest średnią proporcyonalną między dwiema pierwszemi FABC i FBDE.

Oznaczając przez B, b, h, liczby które mierzą podstawę niższą ABC, podstawę wyższą DEF, i wysokość danego pnia piramidy, widzimy że objętość piramidy FABC wyraża się przez $\frac{1}{3}\mathrm{B}h$; objętość piramidy BDEF przez $\frac{1}{3}bh$, a następnie objętość piramidy FABD przez $\sqrt{\frac{1}{3}\mathrm{B}h \cdot \frac{1}{3}bh} = \frac{h}{3}\sqrt{\mathrm{B}b}.$

Więc objętość V pnia ABCDEF piramidy trójkątnej, o podstawach równoległych, ma za miarę

$$V=\frac{1}{3}Bh+\frac{1}{3}bh+\frac{1}{3}h\sqrt{Bb} \qquad \text{albo} \quad V=\frac{1}{3}h\,(B+b+\sqrt{Bb}).$$

Inne dowodzenie. — Niech będzie pień piramidy trójkątnej ABCDEF o podstawach równoległych. Jeśli poprowadzimy płasczyznę ABF, odetniemy piramidę trójkątną FABC która ma za podstawę i wysokość podstawę niższą ABC i wysokość pnia; po czem, prowadząc płasczyznę BDF, podzielimy zostającą piramidę czworokątną FABED na dwie piramidy trójkątne FBDE i FABD. Pierwsza piramida FBDE może się uważać jako mająca trójkąt DEF za podstawę i punkt B za wierzchołek; a więc ma za podstawę i wysokość podstawę wyższą i wysokość pnia. Aby znaleźć czemu się równa druga piramida FABD, poprowadźmy, przez wierzchołek F, równoległę FG do krawędzi DA; prosta FG będzie równoległa do płasczyzny ADB (V, 16). Połączmy GD i GB. Widzimy łatwo że piramida FABD jest równowarta piramidzie GABD, bo obie mają tę samą podstawę ABD, i wierzchołki F i G na równoległej FG do tej podstawy. Owóż, piramida GABD może się uważać jako mająca podstawę ABC i wierzchołek w punkcie D; a więc jej wysokość jest równa wysokości pnia. Co do podstawy ABG, jeśli poprowadzimy przez punkt G równoległę GH do CB a temsamem do FE, trójkąty DEF i AGH będą równe, bo mają boki DF i AG równe jako równoległe zawarte między równoległemi, kąty D i A równe z założenia a kąty G i F równe z wykreślenia. Teraz, dwa trójkąty ABC i ABG, mające spólny wierzchołek B i podstawy AC, AG na jednej prostej, są proporcyonalne do swych podstaw, to jest



$$\frac{ABC}{ABG}=\frac{AC}{AG}.$$

Tak samo, dwa trójkąty ABG i AGH, mające spólny wierzchołek

G i podstawy AB, AH na jednej prostej, są proporcyonalne do swych podstaw, i mamy

$$\frac{ABG}{AGH} = \frac{AB}{AH}.$$

Ale, w trójkącie ABC, prosta GH równoległa do boku BC daje proporcyę

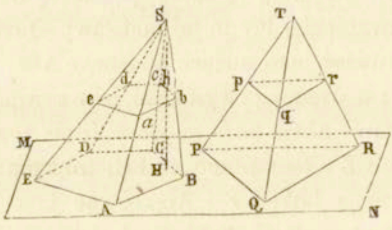
$$\frac{AC}{AG} = \frac{AB}{AH};$$

zatem $\quad \frac{ABC}{ABG} = \frac{ABG}{AGH}, \quad$ albo $\quad \frac{ABC}{ABG} = \frac{ABG}{DEF}.$

To pokazuje że podstawa ABG jest średnią proporcyonalną między podstawami ABC i DEF uważanego pnia piramidy.

Znajdujemy więc, jako wyżej, że *objętość pnia piramidy trójkątnej, o podstawach równoległych, równa się summie trzech piramid które mają wysokość tego pnia za wysokość, a za podstawy jego podstawę niższą, podstawę wyższą i średnią proporcyonalną między temi dwiema podstawami.*

2° Niech będzie teraz pień piramidy jakiejkolwiek ABCDE*abcde*



o podstawach równoległych. Dopełnijmy piramidy SABCDE; na płaszczyznie jej podstawy weźmy trójkąt PQR równowarty tej podstawie, i wystawmy na nim piramidę trójkątną TPQR równej wysokości; po czem, przedłużmy płaszczyznę *abc* która da przecięcie *pqr*. Ponieważ dwie piramidy SABCDE i TPQR, mające podstawy równowarte i tę samą wysokość, są równowarte, ich przecięcia *abcde* i *pqr* są także równowarte (6 wn. 2). Więc dwie piramidy S*abcde* i T*pqr* są równowarte. Ztąd wynika że pień ABCDE*abcde* piramidy jakiejkolwiek jest równowarty pniowi PQR*pqr* piramidy trójkątnej. Owoż, pień piramidy trójkątnej o podstawach równoległych ma za miarę trzecią część wieloczynu z wysokości przez summę obydwóch podstaw i ich średniej proporcyonalnej; to wyrażenie objętości stosuje się do pnia piramidy wielokątnej, o podstawach równoległych, który jest równowarty pniowi piramidy trójkątnej i ma z nim te same podstawy i wysokość. Więc oznaczając przez V, B, b, h, objętość, obie podstawy i wysokość pnia piramidy jakiejkolwiek, o podstawach równoległych, mamy ogólną formułę jego objętości,

$$V = \frac{1}{3}h\,(B + b + \sqrt{Bb}).$$

Ta formuła pokazuje że pień piramidy jakiejkolwiek, o podstawach równoległych, jest równowarty summie trzech piramid mających za spólną wysokość jego wysokość, a za podstawy jego obie podstawy i średnią proporcyonalną tych dwóch podstaw.

Wniosek. — Znając stosunek $\frac{a}{A}$ dwóch odpowiednych boków pnia piramidy o podstawach równoległych, można uniknąć rachunku jednej z dwóch podstaw.

Jakoż, proporcya $\frac{b}{B} = \frac{a^2}{A^2}$ daje $b = \frac{a^2}{A^2}.B$; podstawiając tę wartość, otrzymujemy formułę dogodną do liczebnych zastosowań,

$$V = \frac{1}{3}Bh\left(1 + \frac{a}{A} + \frac{a^2}{A^2}\right).$$

Zastosowanie. — *Wyrachować objętość pnia piramidy w którym wysokość zawiera 3 metry, a podstawy równoległe są dwunastokątami foremnemi mającemi 1 metr i 2 metry za boki.*

Apotema dwunastokąta foremnego którego bok mierzy 2 metry, jest $\sqrt{7+4\sqrt{3}} = 2 + \sqrt{3}$ (IV *zag* 6); zatem podstawa $B = 12\ (2+\sqrt{3})$. Podstawiając te wartości w powyżej danej formule, znajdujemy że szukana objętość pnia jest

$$12\,(2+\sqrt{3})\,\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right) = 21\,(2+\sqrt{3}) = 78^{\text{ms}},\ 373066$$

na mniej niż 1 centymetr sześcienny.

Uwaga I. — Nie trudno otrzymać wprost wyrażenie objętości pnia piramidy o podstawach równoległych, uważając ten pień jako różnicę dwóch piramid. Jakoż, nazwijmy B, b, h podstawy i wysokość danego pnia piramidy ABCDE*abcde*, i, dopełniając piramidy SABCDE, oznaczmy przez x jej wysokość, przez y wysokość piramidy S*abcde*; będziemy mieli

$$V = \frac{1}{3}Bx - \frac{1}{3}by.$$

Owoż (VI, *wn.* 1),

$$\frac{B}{x^2} = \frac{b}{y^2} = \frac{\sqrt{B.b}\ (^*)}{xy} = \frac{B.x}{x^3} = \frac{by}{y^3} = \frac{B.x - by}{h(x^2+xy+y^2)},$$

a te stosunki dają także $$\frac{B}{x^2} = \frac{B+b+\sqrt{B.b}}{x^2+xy+y^2};$$

ztąd wynika $$\frac{Bx-by}{h(x^2+xy+y^2)} = \frac{B+b+\sqrt{Bb}}{x^2+xy+y^2};$$

więc $$V = \frac{1}{3}h(B+b+\sqrt{Bb}).$$

Znając objętość pnia piramidy trójkątnej, o podstawach równoległych, można łatwo otrzymać wyrażenie objętości pnia piramidy wielokątnej, o podstawach równoległych, rozkładając go na pnie trójkątne. Jakoż, oznaczając przez V, B, b, h, objętość, obie podstawy i wysokość tego pnia, przez B$'$, B$''$, B$'''$,... podstawy niższe, przez b', b'', b''',... odpowiedające podstawy wyższe pni piramid trójkątnych, mamy, ograniczając się na trzech pniach trójkątnych,

$$V = \frac{1}{3}h\left(B'+b'+\sqrt{B'b'}\right) + \frac{1}{3}h\left(B''+b''+\sqrt{B''b''}\right) + \frac{1}{3}h\left(B'''+b'''+\sqrt{B'''b'''}\right),$$

albo $$V = \frac{1}{3}h\left(B+b+\sqrt{B'b'}+\sqrt{B''b''}+\sqrt{B'''h'''}\right).$$

(*) Zobacz naszą Arytmetykę, rozdział Stosunki.

Owoż, wiemy że trójkąty B', B'', B''',... i b', b'', b''',... są odpowiednio podobne i podobnie ustawione (III, 12); co daje

$$\frac{B'}{b'}=\frac{B''}{b''}=\frac{B'''}{b'''}=\frac{B}{b}$$

Ztąd wynika

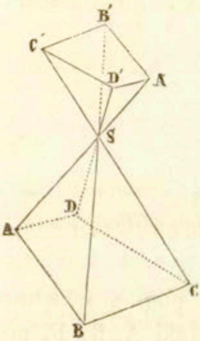
$$\frac{\sqrt{B'b'}}{b'}=\frac{\sqrt{B''b''}}{b''}=\frac{\sqrt{B'''b'''}}{b'''}=\frac{\sqrt{B'b'}+\sqrt{B''b''}+\sqrt{B'''b'''}}{b}=\frac{\sqrt{Bb}}{b};$$

więc $$\sqrt{B'b'}+\sqrt{B''b''}+\sqrt{B'''b'''}=\sqrt{Bb}.$$

Podstawiając tę wartość, znajdujemy wiadomy wynik

$$V=\frac{1}{3}h\left(B+b+\sqrt{B.b}\right).$$

Można zogólnić znaczenie wyrazu *pień* piramidy o podstawach równoległych, uważając za pień drugiego gatunku summę dwóch piramid SABCD i SA′B′C′D′, które są wierzchołkiem przeciwległe i mają podstawy równoległe. Wyrażenie objętości tego pnia znajduje się sposobem podobnym powyższemu. Jakoż, oznaczając przez h wysokość zadanego pnia piramidy, to jest odległość dwóch podstaw ABCD i A′B′C′D′, przez x i y wysokości dwóch piramid które składają ten pień,



mamy $$V=\frac{1}{3}Bx+\frac{1}{3}by.$$

Owoż, $$\frac{B}{x^2}=\frac{b}{y^2}=\frac{\sqrt{Bb}}{xy}=\frac{Bx+By}{x^3+y^3}=\frac{3V}{h(x^2-xy+y^2)};$$

ale te stosunki dają jeszcze

$$\frac{B}{x^2}=\frac{B-\sqrt{Bb}+b}{x^2-xy+y^2};$$

więc $$\frac{3V}{h(x^2-xy+y^2)}=\frac{B-\sqrt{Bb}+b}{x^2-xy+y^2},$$

ztąd $V=\frac{1}{3}h\left(B-\sqrt{Bh}+b\right)$, i także $V=\frac{1}{3}Bh\left(1-\frac{a}{A}+\frac{a^2}{A^2}\right)$.

Dwie ostatnie formuły różnią się od poprzedzających tylko znakami średniej proporcyonalnej dwóch podstaw, i znakiem boku a.

To zogólnienie pnia piramidy tłumaczy dlaczego następujące zagadnienie ma dwa rozwiązania.

Zagadnienie. — *Mając dane: objętość* V, *wysokość* h, *i bok* A *podstawy niższej pnia piramidy o podstawach równoległych, znaleźć odpowiedny bok podstawy wyższej.*

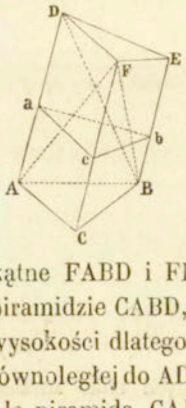
Nazywając x bok szukany, i kładąc x zamiast a, w formule objętości pnia piramidy, będzie.

$$\frac{1}{3}\mathrm{B}.h\left(1+\frac{x}{\mathrm{A}}+\frac{x^2}{\mathrm{A}^2}\right)=\mathrm{V} \quad \text{albo} \quad \frac{x^2}{\mathrm{A}^2}+\frac{x}{\mathrm{A}}+1-\frac{3\mathrm{V}}{\mathrm{B}.h}=0.$$

Równanie pokazuje że, gdy $\mathrm{V} > \frac{1}{3}\mathrm{B}h$, pień pierwszego gatunku i pień drugiego rozwiązują zagadnienie; gdy ilość V jest zawarta między $\frac{1}{4}\mathrm{B}h$ i $\frac{1}{3}\mathrm{B}h$, dwa pnie drugiego gatunku są dwoma rozwiązaniami, które się przywodzą do jednego jeśli $\mathrm{V}=\frac{1}{4}\mathrm{B}h$, albo $\mathrm{V}=\frac{1}{3}\mathrm{B}h$; nakoniec, jeśli $\mathrm{V}<\frac{1}{4}\mathrm{B}h$ zagadnienie jest niemożebne.

Twierdzenie XX.

Pień graniastonu trójkątnego jest równowarty summie trzech piramid mających jedną z jego podstaw za spólną podstawę i wierzchołki drugiej podstawy za wierzchołki.



Niech będzie ABCDEF pień graniastonu trójkątnego. Przez wierzchołki A, B, F, poprowadźmy płasczyznę; otrzymamy piramidę FABC która ma podstawę ABC danego pnia za podstawę, i wierzchołek F podstawy przeciwległej za wierzchołek. Jeśli potem poprowadzimy płasczyznę BDF, rozłożymy piramidę czworokątną FABED na dwie piramidy trójkątne FABD i FBDE. Owoż, piramida FABD jest równowarta piramidzie CABD, bo mają obie tę samą podstawę ABD, i równe wysokości dlatego że ich wierzchołki F i C leżą na krawędzi FC równoległej do AD a temsamem równoległej do podstawy ABD. Ale piramida CABD może być uważana jako mająca podstawę ABC pnia graniastonu za podstawę, i wierzchołek D podstawy przeciwległej za wierzchołek. Tak samo, piramida FBDE jest równowarta piramidzie CABE, bo mają podstawy BDE, ABE równowarte, a ich wierzchołki F, C leżą na krawędzi FC równoległej do płaszczyzny tych podstaw ; ostatnia zaś piramida CABD może być uważana jako mająca podstawę ABC i wierzchołek E.

Więc pień graniastonu trójkątnego ABCDEF jest równowarty summie trzech piramid FABC, DABC, EABC które mają jego podstawę ABC za spólną podstawę i wierzchołki D, E, F drugiej podstawy za wierzchołki.

Wniosem. — Jeśli nazwiemy B, h, h', h'', liczby które mierzą odpowiednio podstawę niższą ABC pnia graniastonu trójkątnego, i wysokości wierzchołków D, E, F podstawy wyższej nad płaszczyzną podstawy niższej, objętość tego pnia wyrazi się przez

$$V = B\left(\frac{h+h'+h''}{3}\right).$$

II. — *Pień graniastonu trójkątnego ma za miarę wieloczyn z przecięcia prostego przez średnią arytmetyczną krawędzi bocznych.*

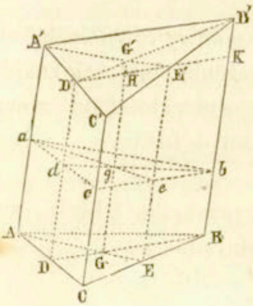
Niech będzie *abc* (fig. powyższa) przecięcie proste graniastonu trójkątnego ABCDEF. Na mocy poprzedzającego wniosku

objętość graniastonu ściętego *abc*DEF jest $abc\left(\frac{aD+bE+cF}{3}\right)$,

objętość graniastonu ściętego *abc*ABC jest $abc\left(\frac{aA+bB+cC}{3}\right)$;

ztąd, dodając, wynika

$$\text{Objętość ABCDEF} = abc\left(\frac{AD+BE+CE}{3}\right).$$



III. — Można jeszcze mieć inne wyrażenie objętości pnia graniastonu trójkątnego. Jakoż, nazwiejmy G i G′ środki ciężkości podstaw ABC i A′B′C′ ; te dwa środki jako też środki ciężkości wszystkich przecięć bocznych graniastonu ściętego, leżą na jednej linii prostej równoległej do krawędzi bocznych ; bo leżą na płaszczyznach ośrodkowych BDD′B′ i AEE′A′, a więc na ich przecięciu GG′ które jest równoległe do AA′. Owoż, jeśli przez punkt D′ poprowadzimy, równoległe do ośrodkowej DB, prostę D′K która spotka GG′ w punkcie H; dwa trójkąty podobne D′G′H i D′B′K dadzą:

$$\frac{HG'}{KB'} = \frac{D'G'}{D'B'} = \frac{1}{3}; \quad \text{zkąd} \quad 3HG' = KB'.$$

Ale $3GH = BK + 2DD' = BK + AA' + CC'$;

więc $3GH + 3HG'$ czyli $3GG' = AA' + BB' + CC'$.

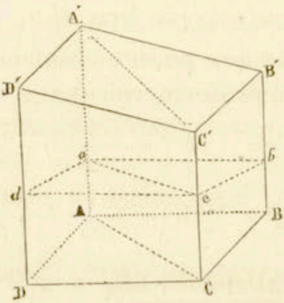
Ztąd wnosimy że

$$\text{objętość } ABCA'B'C' = abc \, . \, GG'.$$

Wysłowia się ten znakomity wynik mówiąc: *objętość pnia graniastonii trójkątnego równa się wieloczynowi z przecięcia prostego przez odległość środków ciężkości dwóch podstaw.*

Twierdzenie XXI.

Objętość pnia równoległościanu ma za miarę wieloczyn z przecięcia prostego przez średnią arytmetyczną krawędzi bocznych.



Niech będzie ABCDA′B′C′D′ pień równoległościanu, i *abcd* jego przecięcie proste. Jeśli poprowadzimy płaszczyznę przekątną ACC′A′, rozłożymy ten pień na dwa pnie graniastonne ABCA′B′C′ i ACDA′C′D′, których objętości, na mocy wniosku II poprzedzającego twierdzenia, wyrażą się przez

$$abc\left(\frac{AA' + BB' + CC'}{3}\right) \quad \text{i} \quad acd\left(\frac{AA' + CC' + DD'}{3}\right).$$

Ale trójkąty *abc* i *acd* są równe jako połowy równoległoboku *abcd*; zatem, dodając dwa powyższe wyrażenia objętości, znajdujemy że miara pnia ABCDA′B′C′D′ równoległościanu równa się

$$\frac{1}{2} abcd\left(\frac{2AA' + 2CC' + BB' + DD'}{3}\right).$$

Gdybyśmy poprowadzili płaszczyznę przekątną DBB′D′, znaleźlibyśmy podobnie że miarą tego samego pnia jest

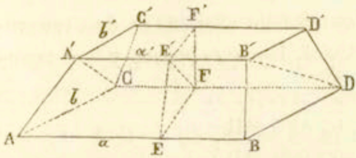
$$\frac{1}{2} abcd\left(\frac{AA' + CC' + 2BB' + 2DD'}{3}\right).$$

Ztąd wnosimy że objętość pnia ABCDA'B'C'D' równoległościanu ma za miarę połowę summy dwóch znalezionych wyrażeń, to jest, jakośmy zwiastowali,

$$\text{objętość}\ \ (\mathrm{ABCDA'B'C'D'}) = abcd\left(\frac{\mathrm{AA'+BB'+CC'+DD'}}{4}\right).$$

Uwaga ogólna. — Aby wyrachować objętość jakiegokolwiek wielościanu, dość jest rozłożyć go na piramidy, albo na części którychby umiano wyrachować objętość; po czem, obliczyć objętość każdej części i dodać liczby tak otrzymane, ich summa będzie miarą objętości uważanego wielościanu.

Zastosowanie. — Na bitych gościńcach wzdłuż rowów, leżą zwykle kupy tłuczonych kamieni; te kupy, mające dwa prostokąty równoległe za podstawy i trapezy równoramienne za ściany, są pniami graniastonnemi czworobocznemi. *Mając dane rozmiary* a *i* b, a' *i* b' *dwóch podstaw i wysokość* h *tak określonej kupy, wyrachować jej objętość.*



Niech będzie ABCDA'B'C'D taka kupa kamieni. Płaszczyzna poprowadzona przez krawędzie równoległe A'B' i CD rozkłada ją na dwa pnie graniastonów trójkątnych AA'CBB'D i A'C'CB'D'D. Pierwszy ma za miarę wieloczyn ze swego przecięcia prostego EFE' przez średnią arytmetyczną krawędzi bocznych AB, CD, A'B'. Owoż, powierzchnia trójkąta EFE' ma za miarę $\frac{1}{2}bh$; więc objętość pnia graniastonnego AA'CBB'D wyraża się przez $\frac{1}{6}bh(2a+a')$. Dowiedzie się podobnie że miara pnia graniastonnego A'C'CB'D'D jest $\frac{1}{6}b'h(2a'+a)$. Więc objętość kupy kamieni ma za miarę

$$\frac{1}{6}bh(2a+a')+\frac{1}{6}b'h(2a'+a).$$

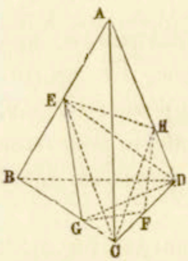
Przypuszczając $a=2^{\mathrm{m}}$, $b=0^{\mathrm{m}},80$; $a'=0^{\mathrm{m}},90$, $b'=0^{\mathrm{m}},45$; $h=0^{\mathrm{m}},60$; będzie

$$V = \frac{0,60}{6}(2 \times 0,80 + 0,90 \times 0,40)\,1^{ms} = 0^{ms},2005.$$

To czyni 200 decymetrów sześciennych i pół.

Twierdzenie XXII.

Wszelka płaszczyzna EGFH *przechodząca przez środki* E,F *dwóch krawędzi przeciwległych czworościanu dzieli go na dwie części równowarte.*



Wielościan EGFHAC składa się z piramidy czworokątnej CEGFH i czworościanu CAEH. Tak samo wielościan EGFHBD składa się z piramidy czworokątnej DEGFH i czworościanu DBEG.

Te dwie piramidy czworokątne, mające spólną podstawę EGFH, i wierzchołki C, D równo oddalone od tej podstawy ponieważ FC = FD z założenia, są równowarte.

Pozostaje więc tylko do okazania że dwa czworościany CAEH i DBEG są równowarte. Owoż, biorąc za podstawy tych czworościanów trójkąty AEC, BEG, mamy

$$\frac{\text{czwor. HAEC}}{\text{czwor. DBEG}} = \frac{\text{tr. AEC}}{\text{tr. BEG}} \cdot \frac{AH}{AD};$$

ale dwa trójkąty AEC, BEG, których podstawy AE, BE są równe z założenia, mają się jako ich wysokości albo jako BC do BG;

więc $$\frac{\text{czwor. HAEC}}{\text{czwor. DBEG}} = \frac{BC}{BG} \cdot \frac{AH}{AD}.$$

Uważajmy teraz że, w czworoboku skośnym ABCD, płaszczyzna poprzeczna EGFH daje $\frac{EA}{EB} \cdot \frac{GB}{GC} \cdot \frac{FC}{FD} \cdot \frac{HD}{HA} = 1$ (VI, 37);

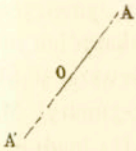
ten wieloczyn, z przyczyny $\frac{EA}{EB} = 1 = \frac{FD}{FC}$, przywodzi się do $\frac{GB}{GC} \cdot \frac{HD}{HA} = 1$,

albo do $\frac{GB}{GC} = \frac{HA}{HD}$; ztąd wynika $\frac{BC}{BG} = \frac{AD}{AH}$ albo $\frac{BC}{BG} \cdot \frac{AH}{AD} = 1$.

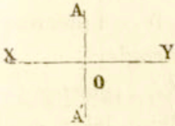
Więc $$\frac{\text{czwor. HAEC}}{\text{czwor. DBEG}} = 1.$$

Co było do dowodzenia.

SYMETRYA.

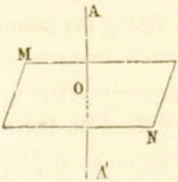


Określenie X. — Dwa punkta A, A′ są *symetryczne względem trzeciego* O, zwanego środkiem symetryi, gdy ten punkt jest we środku prostej AA′ która je łączy.



Dwa punkta A, A′ są *symetryczne wsględem linii prostej* XY, zwanej osią symetryi, gdy ta oś jest prostopadła we środku prostej AA′ która je łączy.

Dwa punkta A, A′ są *symetryczne względem płaszczyzny* MN, zwanej płaszczyzną symetryi, gdy ta płaszczyzna jest prostopadła we środku prostej AA′ która je łączy.

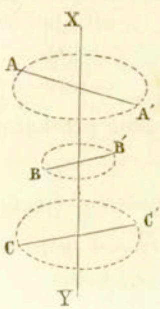


Dwie figury są symetryczne względem punktu, osi, płaszczyzny, gdy każdy punkt pierwszej ma swój symetryczny w drugiej.

Przedmiot i jego obraz odbity we źwierciadle płaskiem mogą służyć za przykład dwóch figur symetrycznych.

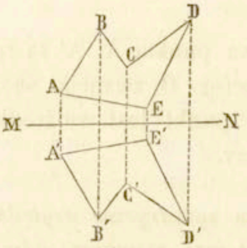
Twierdzenie XXIII.

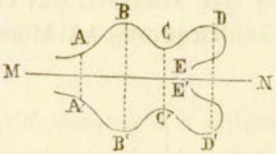
Dwie figury symetryczne względem osi są równe.



Niech będą A, B, C..., punkta pierwszej figury, i A′, B′, C′... ich symetryczne w drugiej, względem osi XY.

Poprowadźmy linie proste AA′, BB′...; wedle określenia, oś XY jest prostopadła we środku każdej z tych linij. Jeśli przeto obrócimy około osi jedną z dwóch figur, wszystkie jej punkta opiszą łuki podobne; zatem, gdy punkt A, opisując pół okręgu, padnie na swój symetryczny A′, wszystkie inne punkta pierwszej figury padną na symetryczne drugiej. Więc te dwie figury są równe.





Jeśli dwie figury płaskie, jako ABCDE i A'B'C'D'E', są symetryczne względem osi MN, aby okazać ich równość, dość jest dać pierwszej figurze pół obrotu około osi symetryi MN; wtedy, każdy punkt A, B,.. padnie na swój symetryczny A', B',.. i pierwsza figura przystanie do drugiej.

Dwie figury płaskie symetryczne względem punktu są równe. Jakoż, jeśli damy jednej z nich pół obrotu około środka symetryi, wszystkie jej punkta padną na odpowiedne punkta drugiej, i te dwie figury przystaną do siebie.

Ztąd wynika że na płaszczyznie dwie figury są symetryczne nie same przez się, ze swojego kształtu, ale tylko z położenia jednej względem drugiej; tak że każde dwie figury równe mogą być ustawione symetrycznie.

Figura złożona z dwóch części symetrycznych względem osi nazywa się *symetryczną*.

I tak, *trójkąt równoramienny* jest *symetryczny* względem swojej wysokości która jest *osią symetryi*. Zatem *trójkąt równoboczny* ma *trzy* osie symetryi.

Trapez równoramienny jest *symetryczny* względem linii która łączy środki podstaw.

W *prostokącie* osiami symetryi są linie łączące środki boków przeciwległych.

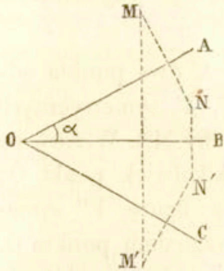
W *ukośniku* obie przekątne są osiami symetryi.

Kwadrat ma *cztery* osie symetryi, któremi są obie przekątne i linie łączące środki boków przeciwległych.

Twierdzenie. — W *kole każda średnica jest osią symetryi* (II, 4).

Twierdzenie. — *Gdy figura płaska posiada dwie osie symetryi* OA *i* OB *czyniące kąt* α *niespółmierny z* π, *ta figura jest kołem.*

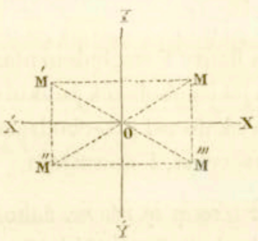
Niech będą dwa punkta M i N symetryczne względem osi OA; weźmy ich symetryczne M' i N' względem osi OB. Jeśli zegniemy



całą figurę według OB, punkta M i N padną na M' i N', i oś OA weźmie położenie OC które będzie osią symetryi dwóch punktów jakichkolwiek M', N' figury. To dowodzi że obracając oś OB pod kątem α około punktu O, otrzymuje się trzecią oś symetryi OC; następujący obrót pod kątem α dałby czwartą oś, i t. d. Owoż, α i π są niespółmierne; niema więc liczb całkowitych n i k któreby zadość czyniły równaniu $n\alpha = 2k\pi$, i żadne położenie osi OB nie może padać na oś już otrzymaną. Ztąd wnosimy że uważana figura płaska, mając nieskończoną liczbę osi przechodzących przez jeden punkt, jest kołem.

To twierdzenie jest wzajemnicą ostatniego.

Twierdzenie. — *Jeśli figura płaska ma dwie osie prostokątne* XX' *i* YY', *punkt przecięcia* O *tych osi jest środkiem figury.*

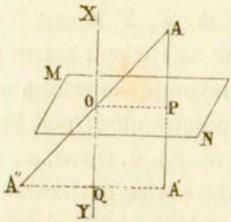


Jakoż, punkt M tej figury ma symetryczny M' względem osi YY', a punkt M' ma symetryczny M'' względem osi XX'. Więc OM = OM' = OM'', i MM'' jest średnicą koła opisanego na trójkącie prostokątnym MM'M''. To dowodzi że każdy punkt M danej figury ma swój symetryczny względem punktu O. Więc punkt O jest środkiem figury.

Graniaston foremny i równoległościan prosty są symetryczne względem linii łączącej środki ich podstaw. *Równoległościan prostokątny* ma *trzy* osie symetryi, któremi są linie łączące środki ścian przeciwległych. A jeśli podstawy równoległościanu prostokątnego są kwadratami, wtedy ten równoległościan ma jeszcze dwie inne osie symetryi przechodzące przez środki krawędzi bocznych przeciwległych. Zatem *sześcian* ma *dziewięć osi* symetryi.

TWIERDZENIE XXIV.

Dwie figury symetryczne względem płaszczyzny są symetryczne względem punktu.

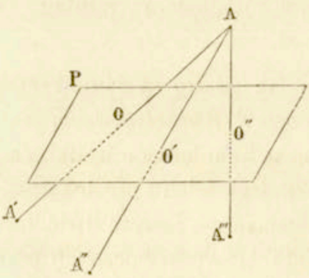


Niech będą A i A' dwa punkta odpowiedne figur F, F' symetrycznych względem płaszczyzny MN. Weźmy na tej płaszczyznie jakikolwiek puukt O; wyobraźmy trzecią figurę F'' symetryczną figury F względem punktu O, i niech będą A'' i A dwa punkta odpowiedne tych dwóch figur. Połączmy A'A'', i przez punkt O poprowadźmy oś XY prostopadłą do płasczyzny MN.

W trójkącie AA'A'', prosta OP, łącząca środki dwóch boków, jest równoległa do trzeciego boku A'A'' i równa jego połowie. Owoż, oś XY, prostopadła do płasczyzny MN a temsamem do prostej OP, jest równoległa do boku AA' i przechodzi przez środek boku AA''; więc ta oś jest prostopadła do boku A'A'' i przechodzi przez jego środek. A zatem punkta A' i A'' są symetryczne względem osi XY, i figury F', F'' są równe.

Ztąd wnosimy że figura F', symetryczna figury F względem płasczyzny, staje się jej symetryczną względem jakiegokolwiek punktu O tej płasczyzny, zrobiwszy tylko półobrotu około osi przechodzącej przez ten punkt i prostopadłej do tej płasczyzny. I nawzajem.

WNIOSEK.—*Dwie figury symetryczne z trzecią są równe.* Jakoż, niech będą dwie figury A' i A'' symetryczne z figurą A względem środków O i O'. Przez te dwa środki poprowadźmy jakąkolwiek płasczyznę P, i weźmy figurę A''' symetryczną figury A, względem płasczyzny P. Na mocy powyższego twierdzenia, figury A' i A'', są równe każda figurze A'''; więc



figury A' i A'', obie symetryczne z figurą A, są równe. To znaczy innemi słowy że *wszelka figura ma tylko jedną symetryczną.*

To co poprzedza jasno dowodzi że jedna tylko jest symetrya figur, względem punktu albo względem płaszczyzny, co to samo, zależąca od kształtu układu części tych figur, nie zaś od położenia jednej względem drugiej, ani od położenia środka symetryi albo płaszczyzny symetryi. I tak, dwie ręce, dwie rękawiczki są symetryczne same przez się, nie z położenia względem siebie. Jeśli przewrócimy rękawiczkę prawej ręki, wtedy można ją wdziać na lewą. Co pokazuje jakby trzeba przewrócić jedną z dwóch figur symetrycznych żeby przystała do drugiej. Dla tych przyczyn nazywać będziemy dwie takie figury poprostu *symetrycznemi*, nie wyrażając ani punktu ani płaszczyzny symetryi.

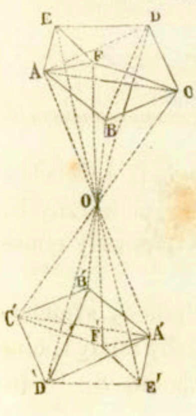
Figura, złożona z dwóch części symetrycznych względem spólnej płaszczyzny nazywa się SYMETRYCZNĄ. Taką jest naprzykład postać ciała ludzkiego, pięknych świątyń, gmachów, etc.

Graniaston prosty, a temsamem równoległościan prosty, jest symetryczny względem płaszczyzny prostopadłej do krawędzi bocznych i przechadzącej przez ich środki. *Równoległościan prosty*, którego podstawa *jest ukośnikiem*, ma nadto jeszcze dwie inne płaszczyzny symetryi które przechodzą przez krawędzie boczne przeciwległe.

Sześcian ma *dziewięć płaszczyzn* symetryi.

TWIERDZENIE XXV.

Dwa wielościany symetryczne mają ściany odpowiednie równe, kąty dwójścienne odpowiednie równe, i kąty wielościenne odpowiednie symetryczne.



Niech będą A, B, C,... i A', B', C',... wierzchołki odpowiednie wielościanów symetrycznych względem jakiegokolwiek środka O.

Z równości trójkątów ABO i A'B'O', ACO i A'C'O',.. wynika że: dwie *proste symetryczne*, (to jest dwie proste które łączą dwa punkta symetryczne), jako dwie krawędzie symetryczne AB, A'B', dwie przekątne symetryczne

AC, A′C′,... są *równe i równoległe*. Zatem dwie ściany odpowiedne ABCF, A′B′C′F′,... mając boki odpowiedne równe i kąty między niemi zawarte równe, są *równe* i *symetryczne*. Płasczyzny tych ścian są równoległe i równo od środka symetryi oddalone.

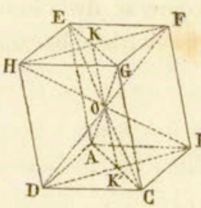
Aby pokazać że kąty dwójścienne odpowiedne AB, A′B′ są równe, i kąty wielościenne A i A′ symetryczne, dość wziąć za środek symetryi wierzchołek A, to jest przypuścić $AO = o$; wtedy przy punkcie A będą dwa kąty wielościenne A i A′ wierzchołkiem przeciwległe; to dowodem że kąty dwójścienne odpowiedne są równe, i kąty wielościenne odpowiedne są symetryczne.

Wniosek. — Wynika z tego twierdzenia że

Dwa wielościany złożone z tej samej liczby piramid symetrycznych i w porządku odwrotnym ustawionych są symetryczne.

I nawzajem, *dwa wielościany symetryczne rozkładają się na tę samą liczbę piramid symetrycznych i w porządku odwrotnym ustawionych.*

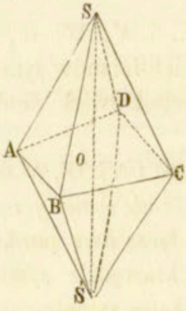
Wniosek. — *Płasczyzna, przechodząca przez dwie krawędzie przeciwne równoległościanu, dzieli go na dwa graniastony trójkątne symetryczne.*



Jakoż, dwa graniastony trójkątne ABCEFG, ACDEGH, mające wierzchołki symetryczne względem środka O równoległościanu, są symetryczne.

Twierdzenie XXVI.

Dwa wielościany symetryczne są równowarte.



Dwa wielościany symetryczne rozkładają się na równą liczbę piramid symetrycznych; dość więc okazać że dwie piramidy symetryczne są równowarte.

Niech będą tedy dwie piramidy symetryczne, które ustawiamy tak żeby miały spólną podstawę ABCD, a wierzchołki S, S′ po bydwóch stronach płaszczyzny tej podstawy. Ponieważ wierzchołki S, S′ są dwoma punktami symetrycznemi względem płaszczyzny ABC, wysokości SO, S′O tych piramid są równe. Więc dwie piramidy symetryczne są równowarte.

PODOBIEŃSTWO WIELOŚCIANÓW.

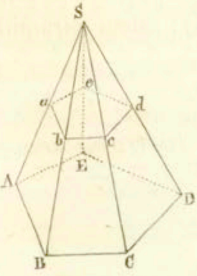
Określenie XI. — *Dwa wielościany nazywają się* PODOBNEMI *gdy mają ściany podobne zawierające kąty wielościenne równe.*

Ściany podobne, kąty dwójścienne albo wielościenne, krawędzie, wierzchołki,.. które mają *odpowiedające położenia* w dwóch wielościanach podobnych, nazywają się *odpowiednemi.*

Istnienia wielościanów podobnych dowodzi następujące twierdzenie.

Twierdzenie XXVII.

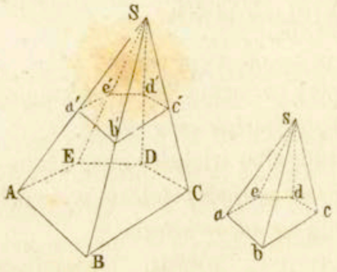
Płaszczyzna sieczna równoległa do podstawy piramidy wyznacza drugą piramidę podobną pierwszej.



Niech będzie piramida SABCDE. Płaszczyzna sieczna równoległa do podstawy, dająca przecięcie *abcde*, wyznacza piramidę S*abcde* podobną piramidzie SABCDE. Jakoż, przecięcie *abcde* jest wielokątem podobnym podstawie (6), a ściany boczne S*ab* i SAB, S*bc* i SBC..., są oczywiście trójkątami podobnemi. Zatem kąty wielościenne odpowiedne, jako A i *a* ,... są równe; bo mają kąty płaskie równe i kąty dwójścienne równe każdy każdemu, i podobnie ułożone. Więc piramidy S*abcde*, SABCDE, mające ściany podobne i kąty wielościenne między niemi zawarte równe, są podobne.

TWIERDZENIE XXVIII.

Dwie piramidy są podobne gdy mają kąt dwójścienny równy ZAWARTY *między podstawą i ścianą podobną każda każdej, i podobnie ułożoną.*



Niech będą dwie piramidy SABCDE i *sabcde*, mające kąty dwójścienne AB i *ab* równe, podstawy ABCDE i *abcde* podobne, i ściany ABS, *abs* podobne.

Na krawędzi SA weźmy długość $Sa' = sa$, i przez punkt a' poprowadźmy płasczyznę $a'b'c'$ równoległą do podstawy ABCDE. Piramidy $Sa'b'c'd'e'$, SABCDE są podobne.

Ztąd wynika że ściana $Sa'b'$, podobna ścianie SAB, jest podobna ścianie *sab*, i jest jej równa ponieważ bok $Sa' = sa$; następnie, podstawa $a'b'c'd'e'$, podobna podstawie ABCDE, jest równa podstawie *abcde*; i kąt dwójścienny $a'b'$, równy dwójściennemu AB, jest równy kątowi dwójściennemu *ab*. Więc dwie piramidy S*abcde*, $Sa'b'c'd'e'$ są *równe* (7); zatem piramidy SABCDE i S*abcde* są podobne.

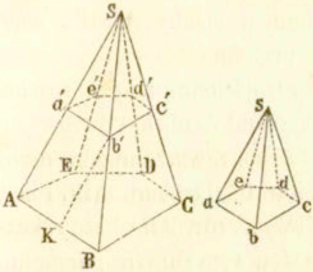
WNIOSEK. — *Dwie piramidy są podobne gdy mają kąt wielościenny przy wierzchołku równy, zawarty między trzema krawędziami odpowiednemi proporcyonalnemi.*

TWIERDZENIE XXIX.

Dwie piramidy są podobne gdy mają podstawę podobną PRZYLEGŁĄ *trzem kątom dwójściennym równym każdy kazdemu, i w tym samym porządku.*

Niech będą dwie piramidy SABCDE, *sabcde*, mające podstawy podobne ABCDE, *abcde*, i dwójściany AB = *ab*, CD=*cd*, DE = *de*.

Na krawędzi AB, weźmy długość AK $=$ *ab*; poprowadźmy



przez punkt K prostę Kb' równoległą do krawędzi AS, aż do spotkania b' z krawędzią BS, i przez punkt b' poprowadźmy płaszczyznę równoległą do podstawy ABCDE.

Piramidy SABCDE i S$a'b'c'd'e'$ są podobne; zatem podstawy *abcde*, ABCDE, $a'b'c'd'e'$ są podobne. Ztąd wynika że podstawy *abcde*, $a'b'c'd'e'$ są równe, ponieważ bok $ab =$ AK $= a'b'$. Nadto, dwójścian $ab =$ AB $= a'b'$, dwójścian $cd =$ CD $= c'd'$, i dwójścian $de =$ DE $= d'e'$. Więc piramidy *sabcde* i S$a'b'c'd'e'$, mające podstawę równą przyległą trzem kątom dwójściennym równym każdy każdemu i wtym samym porządku, są równe. Więc dwie piramidy SABCDE i *sabcde* są podobne.

Twierdzenie XXX.

Dwie piramidy równokątne między sobą są podobne.

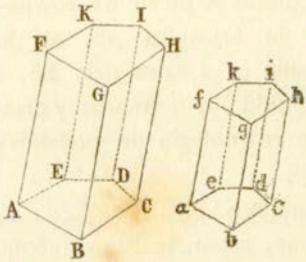
Niech będą dwie piramidy SABCDE i *sabcde* równokątne między sobą (fig. powyższa).

Na krawędzi SA weźmy długość Sa' $=$ *sa*, i przez punkt a' poprowadźmy płaszczyznę równoległą do podstawy ABCDE; piramida S$a'b'c'd'e'$ będzie równokątna z piramidą SABCDE, i temsamem równokątna z piramidą *sabcde*. Ztąd wynika że piramidy *sabcde* i S$a'b'c'd'e'$, równokątne między sobą i mające dwie krawędzie odpowiedne równe S*a* i Sa', są równe (9); więc piramidy SABCDE i S*abcde* równokątne między sobą są podobne.

Twierdzenie XXXI.

Dwa *graniastony są podobne gdy mają kąt dwójścienny równy* ZAWARTY *między podstawą i ścianą podobną każda każdej i podobnie ułożoną.*

Niech będą dwa graniastony ABCDEF, *abcdef*, w których kąty dwójścienne AB i *ab*, są równe, podstawy ABCDE i *abcde* są podobne, i ściany ABGF, *abgf*, także podobne.



Kąty trójścienne B i *b* są równe, bo mają z założenia kąt dwójścienny AB = *ab*, zawarty między dwoma kątami płaskiemi ABC i *abc*, ABG i *abg*, równemi każdy każdemu i w tym samym porządku. Zatem kąt dwójścienny BC = *bc*, kąt dwójścienny BG = *bg*, i kąt płaski CGB= *cbg*.

Nadto
$$\frac{BG}{bg} = \frac{AB}{ab} = \frac{BC}{bc}.$$

Więc dwa równoległoboki BCGH, *bcgh* są podobne (III, 16 wn.) Ztąd wynika że kąty trójścienne C, *c* są równe, a następnie dwa równoległoboki CDIH, *cdih* są podobne; i tak dalej. Owoż, kąty dwójścienne FG i *fg*, etc. są równe jako spełnienia kątów równych. Więc dwa graniastony zadane są podobne.

Wniosek I. — Dwa graniastony *proste* są podobne, gdy mają podstawę i ścianę podobną każda każdej i podobnie ułożone.

II. — Dwa równoległościany są podobne, gdy mają kąt wielościenny równy zawarty między trzema krawędziami proporcyonalnemi i w tym samym porządku.

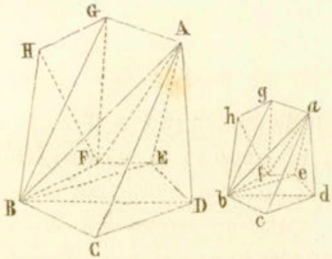
Zatem, dwa równoległościany *prostokątne* są podobne, gdy mają trzy krawędzie przyległe proporcyonalne.

Wszystkie sześciany są podobne.

Uwaga. — Widzimy łatwo że podobieństwo dwóch graniastonów i podobieństwo dwóch piramid, których podstawy mają n boków, wymaga $2n - 1$ warunków, to jest jednego mniej niż równość.

Twierdzenie XXXII.

Dwa wielościany złożone z równej liczby piramid trókątnych, czyli czworościanów, podobnych i podobnie ustawionych są podobne. I nawzajem.

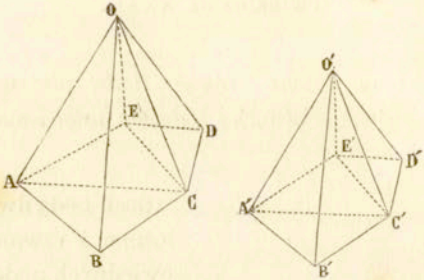


Niech będą dwa wielościany łożone z czworościanów odpowiednych podobnych ABCD i *abcd*, ABDE i *abde*, ABEF i *abef*, etc. Uważajmy przede wszystkiem że, jeśli ściany przyległe BCD i BDE, dwóch czworościanów ABDC i ABDE, znajdują się na jednej płasczyznie, ściany odpowiedne *bcd* i *bde* leżą także na jednej płasczyznie; bo kąty dwójścienne *abdc* i *abde* są spełniające, jako równe dwom kątom dwójściennym spełniającym ABDCi ABDE. Zatem, w tych dwóch wielościanach, 1° ściany odpowiedne ABC i *abc*, BCD i *bcd*, etc są podobne i podobnie ustawione, bądź jako ściany odpowiedne czworościanów podo dobnych, bądź też jako złożone z równej liczby trójkątów podobnych i podobnie ustawionych. 2° Kąty wielościenne, jako C i *c*, D i *d*, E i *e*.., zawarte między ścianami podobnemi są równe, bądź jako kąty odpowiedne czworościanów podobnych, bądź też jako złożone z równej liczby kątów trójściennych równych każdy każdemu i podobnie ustawionych. Więc dwa zadane wielościany są podobne.

Nawzajem, *dwa wielościany podobne rozkładają się na równą liczbę piramid trójkątnych, czyli czworościanów, podobnych każda każdej i podobnie ustawionych.*

1° Jeśli dwa dane wielościany podobne W i W′ są *wypukłe*, można zawsze rozłożyć wielościan W na czworościany, dając im jakikolwiek punkt wewnętrzny O za spólny wierzchołek. Niech będzie OABC jeden z tych czworościanów; przez krawędź A′B′

wielościanu W′ odpowiedną AB poprowadźmy płasczyznę A′B′O′



tak żeby czyniła ze ścianą A′B′C′ kąt dwójścienny O′A′B′C′ równy dwójściennemu OABC, i na tej płasczyznie wystawmy trójkąt A′B′O′ podobny trójkątowi ABO; po czem, biorąc tak wyznaczony punkt O′ za wierzchołek, rozłóżmy wielościan W′ na czworościany O′A′B′C′, O′A′C′E′,... które będą podobne odpowiedającym czworościanom OABC, OACE,... pierwszego wielościanu W.

Jakoż, uważajmy dwa czworościany odpowiedne OACE i O′A′C′E′ przyległe czworościanom podobnym OABC i O′A′B′C′. Ściany OAC, O′A′C′ są podobne, jako ściany odpowiedne dwóch czworościanów podobnych OABC, O′A′B′C′; a zaś ściany ACE, A′C′E′ są podobne, jako trójkąty odpowiedne które składają ściany podobne dwóch wielościanów. Teraz, jeśli trójkąty ACB, ACE są na jednej płasczyznie, dwa kąty dwójścienne OACE i O′A′C′E′ są równe, jako spełnienia kątów dwójściennych równych OACB i O′A′C′B′; a jeśli trójkąty ACB, ACE nie leżą na jednej płasczyznie, wtedy, ponieważ kąty dwójścienne BACE i B′A′C′E′ są równe jako kąty odpowiedne wielościanów podobnych, i kąty dwójścienne OACB, O′A′C′B′ także równe jako kąty odpowiedne czworościanów podobnych OABC, O′A′B′C′, różnice tych kątów, to jest kąty dwójścienne OACE, O′A′C′E′, są równe. Więc dwa czworościany OACE, O′A′C′E′ są podobne.

Rozumując tak samo, dowiedzie się następnie podobieństwa wszystkich innych czworościanów odpowiednych.

2° Jeśli dwa wielościany podobne nie są wypukłe, byle tylko ich kąty wielościenne nie przebijały ścian, można zawsze, płasczyznami przyzwoicie prowadzonemi, rozłożyć te wielościany na wielościany wypukłe, a te ostatnie na czworościany podobne i podobnie ustawione.

Uwaga. — Dwa punkta O i O′ nazywają się *odpowiednemi*, względem dwóch wielościanów podobnych, jeśli, łącząc każdy z nich ze trzema wierzchołkami po sobie idącemi jako A, B, C i A′, B′, C′, otrzymuje się dwa czworościany OABC i O′A′B′C′ podobne i podobnie ustawione.

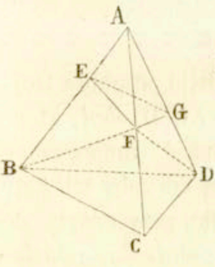
Dwie linie proste, które łączą punkta odpowiedne dwóch wielościanów podobnych, nazywają się *odpowiednemi*, jako *np* dwie przekątne łączące wierzchołki odpowiedne.

W dwóch wielościanach podobnych, stosunek dwóch linij odpowiednych równa się stosunkowi podobieństwa dwóch ścian odpowiednych.

Dowodzenie podobne do tego któreśmy dali w księdze IIIej *tw.* XVI.

Twirdzenie XXXIII.

Dwa czworościany, mające kąt trójścienny równy, mają się jako wieloczyny z trzech krawędzi tego kąta.



Niech będą dwa czworościany ABCD i AEFG mające kąt trójścienny A spólny. Poprowadźmy płasczyznę BDF.

Czworościany ABCD, ABDF, mające spólny wierzchołek B, mają się jako podstawy ADC, ADF, a te ostatnie są proporcyonalne do krawędzi AC, AF; zatem

$$\frac{\mathrm{ABCD}}{\mathrm{ABDF}}=\frac{\mathrm{AC}}{\mathrm{AF}}.$$

Podobnie, czworościany ABDF, AEFG, mające spólny wierzchołek F, mają się jako podstawy ABD, AEG, a te ostatnie mają się jako prostokąty AB . AD, AE . AG;

$$\text{więc} \qquad \frac{ABDF}{AEFG} = \frac{AB}{AE} \cdot \frac{AD}{AG}.$$

Ztąd, mnożąc te równości stronami, otrzymujemy

$$\frac{ABCD}{AEFG} = \frac{AB}{AE} \cdot \frac{AC}{AF} \cdot \frac{AD}{AG} = \frac{AB \, . \, AC \, . \, AD}{AE \, . \, AF \, . \, AG}.$$

WNIOSEKI. — *Dwa czworościany, mające kąt bryłowy symetryczny mają się jako wieloczyny ze trzech krawędzi tego kąta.*

II. — *Dwa graniastony trójkątne mające kąt trójścienny równy albo symetryczny mają się jako wieloczyny ze trzech krawędzi tego kąta.*

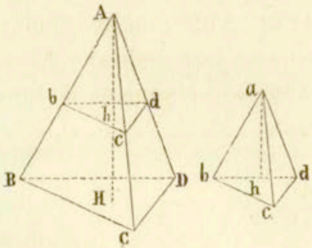
Bo każdy z dwóch graniastonów jest trzy razy większy od czworościanu wystawionego na tym kącie i jego krawędziach.

Zatem, *dwa równoległościany, mające kąt bryłowy równy albo symetryczny, mają się jako wieloczyny ze trzech krawędzi tego kąta.*

Co jest zogólnieniem twierdzenia XIII.

TWIERDZENIE XXXIV.

Dwie piramidy podobne mają się jako sześciany z krawędzi odpowiednich.



Niech będą dwie piramidy trójkątne podobne ABCD, *abcd*, które można przypuścić umieszczone jedna w drugiej tak żeby ich kąty przy wierzchołku przystawały do siebie. W tem położeniu, podstawy BCD, *bcd* dwóch piramid są równoległe, i wysokości AH, A*h* są na jednej prostej.

Teraz, ponieważ objętości piramid są proporcyonalne do wieloczynów z podstaw przez wysokość, mamy

$$\frac{Obj.\ \mathrm{ABCD}}{Obj.\ \mathrm{A}bcd} = \frac{\mathrm{BCD}.\mathrm{AH}}{bcd.\mathrm{A}h} = \frac{\mathrm{BCD}}{bcd}\cdot\frac{\mathrm{AH}}{\mathrm{A}h}.$$

Ale płaszczyzna bcd jest równoległa do podstawy BCD; zatem (6, wn.)

$$\frac{\mathrm{BCD}}{bcd} = \frac{\overline{\mathrm{AH}}^2}{\mathrm{A}h^2},\quad \text{i}\quad \frac{\mathrm{AH}}{\mathrm{A}h} = \frac{\mathrm{BC}}{bc}.$$

Więc, podstawiając te wartości, otrzymujemy

$$\frac{Obj.\ \mathrm{ABCD}}{Obj.\ \mathrm{A}bcd} = \frac{\overline{\mathrm{AH}}^3}{\overline{\mathrm{A}h}^3}\quad \text{albo}\quad \frac{Obj.\ \mathrm{ABCD}}{Obj.\ \mathrm{A}bcd} = \frac{\overline{\mathrm{BC}}^3}{\overline{bc}^3}.$$

Uwaga. — Powyższe dowodzenie stosuje się do piramid podobnych jakichkolwiek.

Jeśli piramidy podobne są trójkątne, można dowieśdź twierdzenia inaczej. Jakoż, dwa czworościany ABCD, $abcd$, mające kąty trójścienne A i a równe, dają (33).

$$\frac{\mathrm{obj.\ ABCD}}{\mathrm{obj.}\ abcd} = \frac{\mathrm{AB}}{ab}\cdot\frac{\mathrm{AC}}{ac}\cdot\frac{\mathrm{AD}}{ad}.$$

Owoż, podobieństwo tych dwóch czworościanów daje

$$\frac{\mathrm{AB}}{ab} = \frac{\mathrm{AC}}{ac} = \frac{\mathrm{AD}}{ad};$$

więc

$$\frac{Obj.\ \mathrm{ABCD}}{Obj.\ abcd} = \left(\frac{\mathrm{AB}}{ab}\right)^3 = \frac{\overline{\mathrm{AB}}^3}{\overline{ab}^3}.$$

Twierdzenie XXXV.

Dwa wielościany podobne mają się jako sześciany z krawędzi odpowiednych.

Wiemy że dwa wielościany podobne W i W' mogą się rozłożyć na równą liczbę czworościanów podobnych i podobnie ustawionych. Więc, oznaczając przez C, C_1, C_2,... czworościany wielościanu W, przez C', C'_1, C''_2,... czworościany odpowiedne wielościanu W', przez a i a' dwie krawędzie odpowiedne, będzie

$$\frac{C}{C'}=\frac{a^3}{a'^3},\quad \frac{C_1}{C'_1}=\frac{a^3}{a'^3},\quad \frac{C_2}{C'_2}=\frac{a^3}{a'^3},\ldots$$

Zatem
$$\frac{C}{C'}=\frac{C_1}{C'_1}=\frac{C_2}{C'_2}=\ldots=\frac{a^3}{a'^3}.$$

Ztąd, na mocy wiadomego twierdzenia, wynika

$$\frac{C+C_1+C_2+}{C'+C'_1+C'_2+}=\frac{a^3}{a'^3}\quad \text{albo}\quad \frac{V}{V'}=\frac{a^3}{a'^3}.$$

Uwaga. — *Powierzchnie wielościanów podobnych są proporcyonalne do kwadratów z krawędzi odpowiednych.*

Zastosowanie. — *Wyrachować krawędzie i objętość równoległościanu prostokątnego, którego powierzchnia ma 4 metry kwadratowe, a rozmiary są proporcyonalne do liczb* 2, 3, 6.

Oznaczmy przez a, b, c trzy krawędzie przyległe tego równoległościanu; jego powierzchnia wyrazi się przez $2(ab+ac+bc)=4$, i będzie

$$\frac{a^2}{2^2}=\frac{b^2}{3^2}=\frac{c^2}{6^2}=\frac{ab}{2.3}=\frac{ac}{2.6}=\frac{bc}{3.6}=\frac{2}{36}.$$

Ztąd wynika
$$\frac{a}{2}=\frac{b}{3}=\frac{c}{6}=\sqrt{\frac{2}{36}}=\frac{1}{6}\sqrt{2}.$$

Więc wartości krawędzi, wyrażone w metrach, są:

$$a=\frac{1}{3}\sqrt{2},\qquad b=\frac{1}{2}\sqrt{2},\qquad c=\sqrt{2};$$

a następnie objętość danego równoległościanu

$$V=\frac{1}{3}\sqrt{2}=0^{ms},471404$$

na mniej niż centymetr sześcienny.

WŁASNOŚCI OGÓLNE WIELOŚCIANÓW.

Twierdzenie XXXVI (*).

W każdym wielościanie liczba ścian S *więcej liczba wierzchołków* W *równa się liczbie krawędzi* K *więcej* 2, *to jest*

$$S + W = K + 2.$$

Dowiedziemy najpierwej że ilość $S + W - K$ jest stała, a potem że się równa liczbie 2. Połączmy tedy jakikolwiek punkt S przestrzeni ze wszystkiemi wierzchołkami jednej ściany ABCD. Przystawiając piramidę SABCD, której odejmujemy podstawę, tworzymy nowy wielościan w którym ilość $S + W - K$ staje się $S' + W' - K'$. Ale nie wszystkie przystawione ściany są różne od dawnych; albowiem, niektóre z nich mogą być przedłużeniem tych ostatnich; tak samo, niektóre z nowych krawędzi mogą być także przedłużeniem dawnych. Uważając że każde przedłużenie ściany niszczy jedną krawędź a każde przedłużenie krawędzi niszczy jeden wierzchołek, jeśli oznaczymy przez n liczbę boków odjętej ściany, przez s liczbę przedłużonych ścian, przez w liczbę straconych wierzchołków, znajdziemy łatwo

$$S' = S - 1 + n - s$$

$$W' = W + 1 - w$$

$$K' = K + n - s - w$$

Ztąd wynika równość

$$S' + W' - K' = S + W - K$$

która pokazuje że ilość $S + W - K$ nie zmienia się przez przystawienie piramidy do jednej ze ścian wielościanu. Ta ilość nie zmienia się także gdy odejmujemy piramidę od wielościanu; bo, gdyby się zmieniała przez odjęcie piramidy, toby się musiała

(*) Twierdzenie sławnego matymatyka Eulera.

zmienić przez jej przystawienie na powrót; co nie jest. Więc ilość S + W — K jest stała w wielościanach.

Owoż, odejmując piramidy od wielościanu albo je dodając, możemy dojść aż do czworościanu, w którym ilość S + W — K równa się oczywiście liczbie 2; więc w każdym wielościanie liczba *ścian więcej liczba wierzchołków równa się liczbie krawędzi więcej* 2.

Uwaga. — Powyższe dowodzenie pokazuje że twierdzenie stosuje się do wszelkiego wielościanu, byle tylko żadna ściana nie przenikała innej, jako w wielościanach gwiaździstych, o których później mówić będziemy.

Wniosek I. — Oznaczmy przez a, b, c, d,... liczbę trójkątów, czworokątów, pięciokątów,...; przez α, β, γ, δ,... liczbę kątów trójściennych, czworościennych, pięciościennych,... Ponieważ każda krawędź należy do dwóch ścian i do dwóch wierzchołków, będzie

$$2K = 3a + 4b + 5c + 6d + \qquad (1).$$
$$2K = 3\alpha + 4\beta + 5\gamma + 6\delta + \qquad (2).$$

To dowodzi że w każdym wielościanie 1° *liczba ścian mających nieparzystą liczbę boków*, jako trójkąty, pięciokąty,.. *jest parzysta*; 2° *liczba kątów wielościennych mających nieparzystą liczbę krawędzi*, jako kąty trójścienne, kąty pięciościenne,... *jest parzysta*.

II. *Nie istnieje żaden wiolościan któryby nie miał ani ściany trójkątnej ani kąta trójściennego*.

Mamy

$$S = a + b + c + d + \quad (3), \qquad W = \alpha + \beta + \gamma + \delta + \quad (4);$$

owoż, jeśli w formule Eulera, którą można pisać

$$4S + 4W = 4K + 8,$$

wyrugujemy S, W, i podstawimy zamiast 4K summę wartości (1) i (2), otrzymamy równanie

$$a + \alpha = 8 + (c + \gamma) + 2(d + \delta) + 3(e + \epsilon) +$$

które dowodzi że summa $a + \alpha$ nie może być zero, ani mniejsza od liczby 8.

W czworościanie $a + \alpha = 8$.

III. *Nie istnieje żaden wielościan w którymby wszystkie ściany miały więcej niż pięć boków, ani wielościan w którymby wszystkie kąty wielościenne miały więcej niż pięć ścian.*

Jakoż,

1° Z porównania formuł (2) i (4) wynika że $2K \geq 3W$; a jeśli w formule *Eulera* podstawimy za K i S ich wartości (1) i (3), będzie

$$2W = 4 + a + 2b + 3c + \qquad (5);$$

zatem, podstawiając tę wartość i wartość (1) w powyższej nierówności, otrzymamy nierówność

$$3a + 2b + c \geq 12 + d + 2e + \ldots,$$

która dowodzi że a, b, c nie mogą zarazem być zero.

2° Z symetryi formuły *Eulera* względem S i W, i z formuł (1) i (2), (3) i (4), wynika że jest także

$$2S = 4 + \alpha + 2\beta + 3\gamma + \qquad (6)$$

a następnie $$3\alpha + 2\beta + \gamma \geq 12 + \delta + 2\varepsilon + \ldots$$

Co dowodzi że α, β, γ, nie mogą zarazem być zero.

Liczba warunków koniecznych do wyznaczenia wielościanu.

Uważajmy układ n punktów w przestrzeni, albo wielościan *gatunku nieokreślonego* mający n wierzchółków. Na wyznaczenie *trzech* wierzchołków trzeba *trzech oddzielnych* warunków; wyznaczy się położenie w przestrzeni pozostałych $n-3$ wierzchołków dając *np.* odległość każdego z nich od trzech pierwszych, co uczyni $3(n-3)$ różnych warunków; więc liczba warunków koniecznych do wyznaczenia wielościanu mającego n wierzchołków, albo ogólniej, *liczba warunków koniecznych do wyznaczenia układu* n *punktów w przestrzeni jest* $3 + 3(n-3)$ czyli $3n - 6$.

Pojmujemy łatwo że liczba warunków koniecznych do wyznaczenia wielościanu zmniejsza się w miarę ścisłości jego określenia; albowiem niektóre wierzchołki mogą leżeć na jednej płaszczyznie albo nawet na jednej linii prostej z innemi. I tak, wyznaczenie czworościanu wymaga $3.4-6=6$ warunków; gdy tymczasem wyznaczenie piramidy, której podstawa ma n boków, potrzebuje mniej warunków niż $3(n+1)-6=3n-3$.

Uważajmy teraz wielościan *danego gatunku*, i weźmy za podstawę jedną ze ścian mającą n boków. Trzeba $2n-3$ warunków do wyznaczenia tej ściany. Zostaje tedy $W-n$ wierzchołków poza podstawą; położenie każdego z nich w przestrzeni wymaga trzech warunków, co czyni $3(W-n)$; dodając $2n-3$ warunki podstawy, będzie razem $3W-n-3$. Ale ta liczba warunków jest, ogólnie mówiąc, za wielka, i trzeba ją zmniejszyć liczbą warunków które wyrażają że wierzchołki jednej ściany znajdują się na jej płaszczyznie. Owóż, trzy punkta wyznaczają płaszczyznę; jeśli więc nazwiemy $n', n'', n''',\ldots$ liczbę boków ścian będących zewnątrz podstawy, przewyżka każdej z tych liczb nad 3 wyrazi ile trzeba warunków żeby wierzchołki należące do jednej ściany były na jej płaszczyznie. Odejmując summę tych przewyżek od poprzednio znalezionej liczby warunków, otrzymujemy $\quad 3W-n-3-(n'-3)-(n''-3)-\ldots,$

albo $\quad 3W-6-(n-3)-(n'-3)-(n''-3)-.$

Ale ostatnie wyrażenie jest to samo co $3W-6-2K+3S$; to zaś, z przyczyny $S+W-A=2$, przywodzi się do K. Więc *liczba warunków koniecznych do wyznaczenia wielościanu równa się liczbie* K *jego krawędzi*.

Twierdzenia II, VII, VIII, i IX mogą tu służyć za sprawdzenie.

Jeden bok i $K-1$ kątów wyznaczają wielościan; inny bok, dany dowolnie, i te same kąty wyznaczają drugi wielościan oczywiście podobny pierwszemu. Więc, *żeby dwa wielościany tego samego gatunku były podobne, trzeba* $K-1$ *warunków*.

Jeśli dwa wielościany nie są określonego gatunku i mają tylko równą liczbę W wierzchołków, trzeba $3W-7$, warunków dla ich podobieństwa.

To dowodzi że podobieństwo dwóch wielościanów wymaga jednego warunku mniej niż ich równość.

TWIERDZENIE XXXVII.

W każdym wielościanie, summa kątów wszystkich ścian równa się czterem kątom prostym wziętym tyle razy ile jest wierzchołków mniej 2.

Wiadomo że, biorąc kąt prosty za jedność kątów, summa kątów wewnętrznych wielokąta mającego n boków wyraża się przez $2n - 4$; zatem, jeśli oznaczymy przez n, n', n''... liczby boków ścian danego wielościanu, summa kątów wszystkich ścian będzie

$$(2n - 4) + (2n' - 4) + (2n'' - 4) +$$

Owoż, ta summa zewiera S wyrazów, a zaś $n + n' + n'' + \ldots = 2K$; więc summa kątów wszystkich ścian wielościanu ma za miarę

$$\Sigma = 4(K - S) \qquad \text{albo} \qquad \Sigma = 4(W - 4) \quad (36).$$

ZAGADNIENIA KSIĘGI SIÓDMEJ.

ZAGADNIENIE I.

Znaleźć powierzchnię boczną i objętość piramidy sześciokątnej foremnej, mając daną jej wysokość H *i promień* R *podstawy.*

Nazwijmy S powierzchnię boczną, V objętość piramidy zadanej.

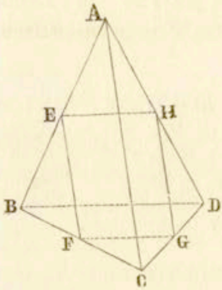
1° Apotema podstawy wyraża się przez $\frac{1}{2}R\sqrt{3}$; a wysokość jednego z sześciu trójkątów równoramiennych które składają powierzchnię boczną piramidy, przez $\sqrt{H^2 + \frac{3}{4}R^2}$; zatem powierzchnia boczna tej piramidy jest

$$S = 6R \cdot \tfrac{1}{2}\sqrt{H^2 + \tfrac{3}{4}R^2} = \tfrac{3}{2}R\sqrt{4H^2 + 3R^2}.$$

2° Podstawa piramidy ma za miarę $\frac{3}{2}R^2\sqrt{3}$; więc objętość piramidy jest $\qquad V = \frac{1}{2}HR^2\sqrt{3}.$

ZAGADNIENIE II.

Przeciąć czworościan ABCD *płaszczyzną równoległą do dwóch krawędzi przeciwległych* AC, BD, *tak żeby przecięcie* EFGH *miało powierzchnię największą możebną.*



Ponieważ płaszczyzna sieczna ma być równoległa do dwóch krawędzi przeciwległych AC i BD, przecięcie EFGH jest równoległobokiem, w którym kąt E jest stały jako równy kątowi krawędzi AC i BD. Ztąd wynika że maximum powierzchni tego równoległoboku zależy od maximum wieloczynu EF. EH dwóch boków przyległych (IV, 7).

Owoż, $\frac{EF}{AC} = \frac{BE}{BA}$ i $\frac{EH}{BD} = \frac{AE}{AB}$;

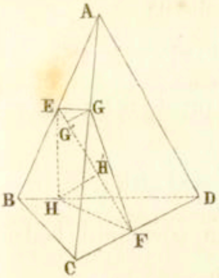
więc $EF \,.\, EH = \frac{AC \,.\, BD}{\overline{AB}^2} \times AE \,.\, BE.$

Teraz uważajmy że spółczynnik $\frac{AC \,.\, BD}{\overline{AB}^2}$ jest stały, a summa dwóch czynników zmiennych AE i BE równa się krawędzi AB. Więc wieloczyn AE . BE jest maximum gdy te czynniki zmienne są równe. Ztąd wnosimy że w czworościanie płaszczyzna równoległa do dwóch krawędzi przeciwległych wyznacza przecięcie maximum gdy jest równo oddalona od tych krawędzi.

ZAGADNIENIE III.

Przeciąć czworościan ABCD *płaszczyzną przechodzącą przez środki* E *i* F *dwóch krawędzi przeciwległych tak, żeby przecięcie miało powierzchnię najmniejszą możebną.*

Niech będzie EGFH czworobok wyznaczony przez jedną z płasczyzn siecznych. Poprowadźmy przekątnę EF i spuśćmy na nią,



z wierzchołków G, H, prostopadłe GG', HH'.

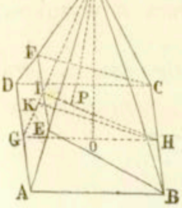
Czworobok EGFH ma za miarę wieloczyn $\frac{1}{2}$EF (GG' + HH'), w którym czynnik EF jest stały; więc ten czworobok będzie miał powierzchnię minimum gdy summa prostopadłych GG', HH' będzie minimum.

Owoż, jeśli przez punkt E poprowadzimy płasczyznę, równoległą do dwócó krawędzi przeciwległych AC, BD, ta płasczyzna przejdzie przez punkt F (VI, 36), i proste GG', HH', równoległe między sobą, będą do niej pochyłe. Te pochyłe są równe, bo rzeczona płasczyzna jest równo oddalona od krawędzi AC, BD. Ztąd wynika że summa GG' + HH' będzie minimum gdy proste GG' i HH' będą prostopadłe do tej płasczyzny. Wtedy, prosta GG' będzie spólną prostopadłą do prostych EF, AC, a zaś HH' spólną prostopadłą do prostych EF, BD.

Więc, aby rozwiązać zagadnienie, poprowadź przez punkt E płasczyznę równoległą do krawędzi przeciwległych AC, BD, i potem do tej płasczyzny poprowadź, przez prostę EF, płasczyznę prostopadłą która wyznaczy przecięcie najmniejszej powierzchni.

Zagadnienie IV.

Podzielić piramidę, która ma podstawę równoległoboczną, na dwie części równowarte, płasczyzną przechodzącą przez jeden z boków podstawy.



Niech będzie BCFE płasczyzna szukana; SO wysokość danej piramidy równoległobocznej SABCD, i SP wysokość piramidy odciętej SBCFE której podstawa jest trapezem. Płasczyzna OSP, prostopadła do dwóch podstaw, jest prostopadła do ich przecięcia BC i spotyka te podstawy wedle prostych HG, HI, odpowiednio prostopadłych do prostych AD, EF.

Wedle zagadnienia, piramida SBCEF powinna być połową danej SABCD; więc, wyrażając ich objętość, mamy

$$AD \,.\, GH \,.\, SO = (BC + EF) \,.\, HI \,.\, SP.$$

Owoż, jeśli spuścimy prostopadłę HK na prostę SG, powierzchnie trójkątów SHG i SHI dadzą

$$GH \,.\, SO = SG \,.\, HK \quad \text{i} \quad HI \,.\, SP = SI \,.\, HK;$$

zatem, podstawiając te wartości w powyższem równaniu, będzie

$$AD \,.\, SG = (BC + EF) \,.\, SI,$$

zkąd
$$\frac{BC + EF}{SG} = \frac{AD}{SI} = \frac{EF}{GI}.$$

Nakoniec, jeśli w ostatniej równości zamiast AD i EF podstawimy ilości proporcyonalne SG i SI, otrzymamy proporcyę

$$\frac{SG}{SI} = \frac{SI}{GI},$$

która pokazuje że płasczyzna szukana BCFE *dzieli w stosunku średnim i skrajnym wysokość* SG ściany ADS równoległej do krawędzi BC przez którą przechodzi.

Uwaga. — Rozwiązać zagadnienie gdy dwa boki równoległe AB i BC są nierówne.

Zagadnienie V.

Podzielić całą powierzchnię piramidy czworokątnej foremnej na dwie części równowarte, płasczyzną przechodzącą przez jeden z boków podstawy.

Przypuśćmy zagadnienie rozwiązane, i niech będzie BCFE płasczyzna szukana (*fig. powyższa*); połączmy BE, i oznaczmy przez k *apotemę* piramidy, przez a bok jej podstawy, przez x wysokość trapezu ADFE; będzie

$$\text{trój. ABE} = \frac{1}{2}ax, \quad \text{i} \quad EF = \frac{a}{k}(k - x);$$

zatem
$$\text{trapez ADFE} = \frac{ax}{2k}(2k - x).$$

Wedle zadania, summa powierzchni 2ABE + ADFE + ABCD powinna być połową całej powierzchni piramidy; więc

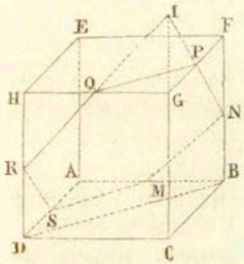
$$2ax + \frac{ax}{k}(2k - x) + 2a^2 = 2ak + a^2$$

albo $$x^2 - 4kx + 2k^2 - ak = o.$$

To równanie ma dwa pierwiastki rzeczywiste i dodatne, ponieważ $2k > a$, bez czego piramida foremna nie mogłaby istnieć; ale pierwiastek większy od $2k$ nie odpowieda na pytanie. Więc zagadnienie ma tylko jedno rozwiązanie.

Zagadnienie VI.

Przeciąć sześcian płaszczyzną tak, żeby przecięcie było sześciokątem foremnym.



Przypuśćmy zagadnienie rozwiązane, i niech będzie płaszczyzna MNQ której przecięcie z sześcianem jest sześciokątem foremnym MNPQRS. Płaszczyzna sieczna przecina oczywiście krawędź CG w punkcie I. Owoż, kąt NPQ sześciokąta foremnego równa się $\frac{4}{3}$ kąta prostego; więc trójkąt IPQ jest równoboczny, bo jego kąty P i Q, jako spełnienia kątów sześciokąta, są każdy $\frac{2}{3}$ kąta prostego. Ztąd wynika że

$$IP = PQ = PN, \quad i \quad IQ = QR; \quad \text{zatem} \quad PQ = \tfrac{1}{2}NR.$$

Co dowodzi że bok PQ szukanego sześciokąta foremnego jest równoległy do przekątnej FH i równy jej połowie. Więc wierzchołki P i Q tego sześciokąta są środkami krawędzi GF i GH sześcianu; i tak samo o innych. Ztąd wnosimy że w sześcianie płaszczyzna poprowadzona przez środki trzech krawędzi, po sobie idących ale nie na jednej płaszczynie, wyznacza przecięcie które jest sześciokątem foremnym jako MNPQRS. Jest cztery takich płaszczyzn zadość czyniących zagadnieniu.

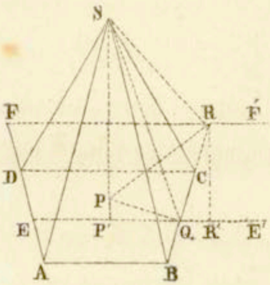
Uwaga. — Niech będzie $M'N'P'Q'R'S'$ sześciokąt wyznaczony płaszczyzną równoległą do płaszczycny BDG, a temsamem równoległą do płaszczyzny MNP. Widzimy łatwo że $\frac{M'S'}{BD} = \frac{AS'}{AD}$, i $\frac{P'Q'}{FH} = \frac{GP'}{GF}$ albo $\frac{P'Q'}{BD} = \frac{GP'}{AD}$.

Ale GP' i DS' są równe, jako dwie równoległe zawarte między dwiema płaszczyznami równoległemi; zatem $GP' + AS' = AD$. Więc $M'S' + P'Q' = BD$. Ztąd wynika że sześciokąty wyznaczone płaszczyznami równoległemi do płaszczyzny BDG są równoobwodowe z trójkątem równobocznym BDG. Owoż, między wielokątami równoobwodowemi i równej liczby boków największy jest foremny.

Więc, *Sześciokąt foremny* MNPQRS *jest największy ze wszystkich szesciokątów pochodzących z przecięcia sześcianu przez płaszczyzny równoległe do płaszczyzny* BDG.

Zagadnienie VII.

W piramidzie SABCD *mającej za podstawę trapez, są dane: 1° wysokość* SP, *2° ściana* SAD, *3° kąty ściany przeciwległej* SBC *4° kierunki podstaw* AB i DC *trapezu; zbudawać tę piramidę.*



Przypuśćmy zagadnienie rozwiązane, i ze spodka P wysokości SP piramidy szukanej spuśćmy prostopadłę PQ na bok BC; prosta SQ będzie wysokością ściany SBC.

Teraz, ponieważ kąty tej ściany są dane, stosunek odcinków BQ, CQ jest wiadomy; zatem, jeśli podzielimy w tym stosunku bok AD w punkcie E, punkt Q będzie leżał na równoległej EE' do AB.

Stosunek $\frac{BQ}{SQ}$ jest także wiadomy; więc, jeśli weźmiemy $QR = QS$, punkt R będzie się znajdował na linii FF', równoległej do AB i przechodzącej przez punkt F który się wyznaczy za pomocą proporcyi

$$\frac{BQ}{QR} = \frac{AE}{EF}.$$

Po czem, połączmy RS, RP; będzie

$$\overline{RS}^2 = \overline{2QR}^2, \text{ i } \overline{RS}^2 = \overline{PS}^2 + \overline{PR}^2 = \overline{PS}^2 + \overline{PQ}^2 + \overline{QR}^2;$$

ztąd $$\overline{QR}^2 - \overline{QP}^2 = \overline{PS}^2.$$

Więc wykreślenie żądanej piramidy przywodzi się do następującego zagadnienia Geometryi płaskiej:

Wykreślić trójkąt prostokątny PQR *w którym, różnica kwadratów wystawionych na ramionach* QR, QP *kąta prostego równa się kwadratowi z danej linii* SP, *wierzchołek* P *jest dany, a dwa inne wierzchołki* Q, R *leżą na danych równoległych* EE′, FF′.

Aby rozwiązać to zagadnienie, spuśćmy prostopadłe PP′, RR′ na EE′, będzie

$$\overline{QR'}^2 = \overline{QR}^2 - \overline{RR'}^2 \text{ i } \overline{QP'}^2 = \overline{QP}^2 - \overline{PP'}^2;$$

ztąd wynika $$\overline{QR'}^2 - \overline{QP'}^2 = \overline{SP}^2 + \overline{PP'}^2 - \overline{RR'}^2.$$

Druga strona równania jest ilością wiadomą.

Nadto, trójkąty QPP′, QRR′, mające boki prostopadłe, są podobne i dają,

$$\frac{PP'}{QR'} = \frac{QP'}{RR'} \quad \text{albo} \quad QP' \times QR' = PP' \times RR'.$$

Mamy wieloczyn odcinków QR′, QP′ i różnicę ich kwadratów; więc te odcinki są wynaczone, i rozwiązanie zagadnienia łatwo się uzupełnia.

Zagadnienie VIII.

Przeciąć dany graniaston trójkątny płaszczyzną tak żeby przecięcie było trójkątem podobnym danemu.

Można zawsze przypuścić że płaszczyzna sieczna przechodzi przez jeden z wierzchołków podstawy; wtedy ta płaszczyzna odcina od graniastonu piramidę mającą trapez za podstawę, i zagadnienie przywodzi się do poprzedzającego.

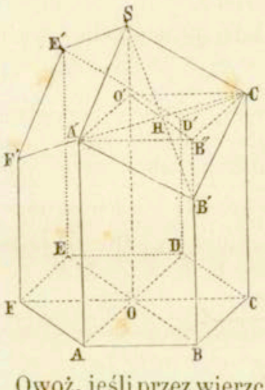
Dobrze jest szukać wprost algebrycznie rozwiązania które, prócz długości rachunku, nie przedstawia wielkiej trudności.

Uwaga — Powyższe rozwiązanie może się zastosować do następującego zagadnienia.

Na danej płaszczyznie wyznaczyć rzut jednego trójkąta podobny drugiemu trójkątowi.

Zagadnienie IX.

Na bokach sześciokąta foremnego ABCDEF *wystawiono sześć prostopadłych ścian* ABB'A', BCC'B', etc. *i wzięto trzy krawędzie równe* AA', CC', EE', *nie idące po sobie; po czem, przez punkt* S *osi sześciokąta, i, przez każdą ze trzech prostych* A'C', A'E', C'E', *poprowadzono płaszczyzny* SA'B'C', SA'F'E', SC'D'F' *które zamykają wielościan. Jak trzeba wziąć punkt* S *żeby cała powierzchnia tego dziesięciościanu była najmniejsza możebna?*



Widać z samego wykreślenia że krawędzie BB', DD', FF' są równe; zatem powierzchnia tego dziesięciościanu składa się z sześciu trapezów równych ABB'A',... z sześciu trójkątów równych SA'B',... i z podstawy ABCDEF; a ponieważ ta podstawa jest stała, trzeba i dość jest dla minimum całej powierzchni wielościanu żeby tylko summa trapezu ABB'A' i trójkąta przyległego SA'B' była minimum.

Owoż, jeśli przez wierzchołek A' poprowadzimy płaszczyznę prostopadłą do krawędzi AA', to ona spotka krawędzie BB', CC',... SB',.. w punktach B'', C',.. H,... oś OS w punkcie O', tak że piramidy SA'C'O' i B''A'C'B',... będą symetryczne, i prosta A'C' będzie prostopadła do krawędzi SB' w jej środku H; zatem, oznaczając przez x odległość O'S=B'B'', przez a bok podstawy, przez b krawędź AA',

$$\text{będzie } \mathrm{HS} = \sqrt{x^2 + \frac{1}{4}a^2} \quad \text{i} \quad \mathrm{HA'} = \frac{1}{2}\mathrm{AC} = \frac{1}{2}a\sqrt{3};$$

a następnie powierzchnia trapezu $ABB'A'$ wyrazi się przez $\frac{1}{2}a(2b-x)$, i powierzchnia trójkąta $SA'B'$ przez $\frac{1}{2}a\sqrt{3x^2+\frac{3a^2}{4}}$.

Więc ilość którą trzeba uczynić minimum jest wieloczyn

$$\frac{1}{2}a\left(2b-x+\sqrt{3x^2+\frac{3a^2}{4}}\right).$$

Ten wieloczyn ma jeden czynnik $\frac{1}{2}a$ stały, a w drugim ilość zmienna $\sqrt{3x^2+\frac{3a^2}{4}}-x$ jest dodatna; więc dość uczynić minimum ilość

$$\sqrt{3x^2+\frac{3}{4}x^2}-x.$$

Żeby nie wychodzić z granic matematyki elementarnej, oznaczmy przez m szukaną wartość minimum, będzie

$$\sqrt{3x^2+\frac{3a^2}{4}}-x=m, \text{ zkąd } 2x^2-2mx+\frac{4}{3}a^2-m^2=0.$$

Owoż, pierwiastki tego równania powinny być rzeczywiste; co wymaga żeby było $m^2 \geq 2\left(\frac{3}{4}a^2-m^2\right)$ albo $m^2 \geq \frac{1}{2}a^2$.

Ztąd wynika że najmniejsza wartość jaką można wziąć dla m jest równa $\frac{1}{2}a\sqrt{2}$, i tej wartości odpowieda $x=\frac{1}{4}a\sqrt{2}$.

Więc, *powierzchnia zadanego dziesięciościanu będzie najmniejsza możebna, jeśli różnica krawędzi* AA' i BB' *jest czwartą częścią przekątnej kwadratu wystawionego na boku a podstawy.*

Uwaga.—Dziesięciościan, o którym mowa, przewrócony stanowi budowę komórek woskowych w których pszczoły miód składają. Kąty bryłowe B'', D'', F'' są równościenne, ich ściany mają około 109° 28′ 16″, a kąty dwójścienne 120° (według *Maclaurina*).

Symetrya piramid $SA'C'O'$ i $B'A'C'B''$, etc., pokazuje że ten dziesięciościan jest równowarty graniastonowi $ABCDEFA'B'C'D'E'F'$; zatem jego objętość, niezależna od punktu S, ma za miarę wielozyn z podstawy ABCDEF przez wysokość AA′. Widzimy tedy że pszczoły, dla tej samej objętości miodu, budują komórki z ilości wosku najmniejszej możebnej.

ZADANIA.

847. — W czworościanie mającym kąt bryłowy trójprostokątny,

1° Każda ściana tego kąta jest średnią proporcyonalną między swoim rzutem na ścianie przeciwległej kątowi i tą ścianą.

2° Kwadrat ze ściany przeciwległej kątowi bryłowemu trójprostokątnemu równa się sumie kwadratów ze trzech jego ścian.

848. — Dowieśdź że objętość czworościanu, w którym dwie krawędzie przeciwległe tworzą kąt prosty, ma za miarę szóstą część wieloczynu tych dwóch krawędzi przez ich najkrótszą odległość.

Uwaga. — Twierdzenie jest szczególnym przypadkiem następującego: *Objętość czworościanu ma za miarę szóstą część wieloczynu dwóch krawędzi przeciwległych przez ich najkrótszą odległość i przez wstawę ich kąta.*

849. — Jaka byłaby miara graniastonu i piramidy, gdyby za jedność objętości wzięto czworościan foremny zbudowany na jedności linij?

850. — Zbudować piramidę biorąc taką linię za jedność żeby objętość i powierzchnia miały za miarę tę samą liczbę.

851. — W piramidzie czworokątnej foremnej SABCD wiadomy jest stosunek $\frac{AB}{AS}$; wyznaczyć kąt dwójścienny AS.

852. — Jeśli dwa trójkąty w przestrzeni mają wierzchołki na liniach prostych które się schodzą w jednym punkcie, wtedy przecięcia boków odpowiednych są w linii prostej. *I nawzajem.*

853. — Jeśli przez punkt O przestrzeni poprowadzono do wierzchołków A, B, C, D czworościanu linie proste które spotykają ściany przeciwległe w punktach A′, B′, C′, D′, będzie

$$\frac{OA'}{AA'} + \frac{OB'}{BB'} + \frac{OC'}{CC'} + \frac{OD'}{DD'} = 1.$$

854. — W czworościanie linie łączące środki krawędzi przeciwległych, i linie łączące wierzchołki ze środkami ciężkości ścian przeciwległych, spotykają się w jednym punkcie. Ten punkt, który dzieli pierwsze linie na po-

łowy, i leży na $\frac{1}{4}$ części każdej z ostatnich licząc od ścian, nazywa się *środkiem ciężkości* czworościanu.

855. — Jeśli przez środek ciężkości czworościanu poprowadzono jakąkolwiek płaszczyznę, i spuszczono na nią prostopadłe ze wszystkich wierzchołków tego czworościanu, wtedy summa prostopadłych które są z jednej strony tej płaszczyny równa się summie prostopadłych które są po drugiej stronie.

856. — Miejscem środka ciężkości czworościanów, mających tę samą podsiawę i wysokości równe, jest płaszczyzna równoległa do podstawy.

857. — Czworościan SABC jest przecięty płasczyzną poprzeczną abc; wierzchołek S i punkta A′, B′, C′ skrzyżowań przekątnych Bc i Cb (na ścianie SBC), Ac i Ca (na ścianie SAC), Ba i Ab (na ścianie SAB), połączono liniami prostemi które spotykają krawędzie BC, AC, AB, w punktach α, β, γ. Dowieśdź że :

1° Linie Aα, Bβ, Cγ schodzą się w jednym punkcie S′ podstawy ABC.

2° Cztery poprzczne SS′, AA′, BB′, CC′ schodzą się w jednym punkcie przestrzeni.

3° Trzy płasczyzny ABC, abc, A′B′C′ przechodzą przez jedną linię prostą.

4° Przez wierzchołek S czworościanu poprowadzono, do podstawy ABC, linię prostą SD tak żeby tworzyła kąty równe ze ścianami bocznemi, i połączono DA, DB, DC. Dowieśdź że trójkąty DAB, DAC, DBC, są proporcyonalne do ścian SAB, SAC, SBC.

858. — W czworościanie płasczyzna dwójsieczna kąta dwójściennego, albo jego spełnienia, dzieli ścianę przeciwległą na dwa trójkąty proporcyonalne do ścian przyległych.

Ta płasczyzna dzieli także krawędź przeciwległą na dwa odcinki proporcyonalne do ścian przyległych.

859. — W czworościan wpisano drugi czworościan mający za wierzchołki środki ciężkości ścian pierwszego. Dowieśdź że te dwa czworościany są podobne, i wyrachować stosunek ich objętości.

860. — Dowieśdź że czworościan mający trzy kąty płaskie równe nie może mieć wszystkich ścian równowartych jeśli nie jest foremny, to jest, jeśli kąty płaskie równe nie mają każdy 60°.

861. — Przez dwa punkta dane na dwóch krawędziach czworościanu, poprowadzić płaszczyznę któraby podzieliła ten czworościan ne dwie części w stosunku liczb $m : n$.

862. — W czworościanie poprowadzić płasczyznę tak żeby przecięcie było ukośnikiem.

863. — W czworościanie mającym trzy ściany równowarte, summa trzech prostopadłych spuszczonych na te ściany z jakiegokolwiek punktu czwartej ściany jest stała.

864. — Są dane dwa czworościany ABCD, A′B′C′D′, w których linie łączące wierzchołki odpowiedne, AA′, BB′, CC′, DD′, schodzą się w jednym punkcie. Dowieść że, jeśli ściany odpowiadające tych czworościanów przecinają się, ich cztery linie przecięć leżą na jednej płaszczyznie.

865. — W piramidzie foremnej, z punktu wewnętrznego podstawy wyprowadzono prostopadłę która spotyka ściany boczne przedłużone, jeśli trzeba, dowieść że summa odległości punktów spotkań od podstawy jest ilością stałą.

Uwaga. — Twierdzenie stosuje się także do piramidy mającej podstawę prostokątną.

866. — W piramidzie foremnej, z punktu podstawy spuszczono prostopadłe na ściany boczne; dowieść że summa tych prostopadłych jest stała.

867. — Poprowadzić płaszczyznę równoległą do podstawy pnia piramidy, o podstawach równoległych, tak żeby przecięcie było średnią proporcyonalną między temi podstawami.

Zastosować to zagadnienie do piramidy.

868. — Dany jest pień piramidy o podstawach równoległych w którym wysokość ma $1^{m},12$, a stosunek dwóch odpowiednych boków podstaw równa się 3. Podzielić ten pień na dwa pnie równowarte.

869. — Wyznaczyć rozmiary równoległościanu prostokątnego którego wiadoma jest przekątna, pawierzchnia cała, i w którym jedna z krawędzi jest średnią arytmetyczną dwóch innych.

870. — Między równoległościanami prostokątnemi równej powierzchni, jaki jest maximum?

I nawzajem, między równoległościanami prostokątnemi równej objętości, jaki ma powierzchnię minimum?

871. — Znaleźć objętość pontonu. (Ponton jest sześciościanem, który ma za podstawy dwa prostokąty równoległe a za ściany boczne trapezy równoramienne).

872. — Ze wszystkich graniastonów równej podstawy i równej wysokości graniaston prosty ma największą powierzchnię.

873. — Ze wszystkich graniastonów mających n ścian, graniaston foremny ma:

1° Najmniejszą powierzchnię, gdy podstawy są równowarte i wysokości równe.

2° Największą objętość i największą podstawę, gdy powierzchnie są równowarte i wysokości równe.

3° Największą objętość i największą wysokość, gdy powierzchnie są równowarte i podstawy równowarte.

4° Najmnejszą podstawę i największą wysokość, gdy powierzchnie są równowarte i objętości równowarte.

874. — Z dwóch graniastonów foremnych ten który ma najwięcej ścian posiada cztery własności wysłowione w poprzedzającym numerze.

875. — Przez linię prostą poprowadzić płasczyznę któraby podzieliła równoległościan na dwie części równowarte.

876. — W graniastonie czworokątnym, summa kwadratów ze czterech przekątnych równa się summie kwadratów z dwunastu krawędzi, więcej *osiem* razy kwadrat z linii która łączy oba punkta spotkania tych przekątnych.

877. — Jest dany ciąg nieograniczony wielościanów podobnych, których krawędzie odpowiedne maleją w postępni geometrycznej $1, \left(\frac{2}{3}\right), \left(\frac{2}{3}\right)^2, \ldots$ i krawędź pierwszego jest k; czemu się równa krawędź wielościanu podobnego który jest równowarty summie tych wszystkich wielościanów?

878. — Mając dany graniaston trójkątny, znaleźć miejsce geometryczne takiego punktu żeby, biorąc go za wierzchołek a ściany boczne za podstawy, trzy piramidy czworokątne były równowarte. Wyznaczyć stosunek objętości tych piramid z graniastonem.

879. — Znaleźć na płasczyznie miejsce punktów takich, żeby summa kwadratów odległości każdego z nich od ośmiu wierzchołków równoległościanu była równa danemu kwadratowi.

880. — Mając dane trzy linie proste, nie leżące po dwie na jednej płasczyznie, wystawić równoległościan któregoby trzy krawędzie znajdowały się na tych liniach.

881. — Wyznaczyć *graficznie* wysokość piramidy której są wiadome: podstawa, jedna ściana boczna i kąt między niemi zawarty.

882. — Przecięto daną piramidę trójkątną SABC płasczyzną która spotyka krawędzie boczne w punktach A', B', C'; znaleźć objętość pnia $ABCA'B'C'$ tej piramidy.

883. — W czworościanie SABC, przez punkt O ściany SBC poprowadzono, równolegle do krawędzi SA, AB, AC, proste OD, OF, OE aż do ścian ABC, SAC, SAB; dowieśdź że

$$\frac{OD}{SA} + \frac{OE}{AB} + \frac{OF}{AC} = 1,$$

884. — Summa odległości wierzchołków równoległościanu od płaszczyzny zewnętrznej jest równa *osiem* razy wziętej odległości jego środka od tej płaszczyzny.

885. — Płaszczyzny prostopadłe we środkach krawędzi czworościanu spotykają się w jednym punkcie, który jest równo oddalony od czterech wierzchołków.

886. — Płaszczyzny dwójsieczne kątów dwójściennych czworościanu spotykają się w jednym punkcie który jest równo oddalony od czterech ścian.

Uwaga. — Uważając kąty dwójścienne zewnętrzne, łatwo się przekonamy że jest *osiem* punktów równo oddalonych od ścian przedłużonych czworościanu ale trzy z tych punktów nie istnieją gdy ściany czworościanu są równowarte.

887 — Poprowadzić płaszczyznę równoległą do podstawy czworościanu tak, żeby wyznaczyła drugi czworościan któregoby powierzchnia cała była połową powierzchni danego czworościanu.

888. — Zbudować czworościan, znając:

1° Trzy proste łączące środki krawędzi przeciwległych i kąty tych trzech linij.

2° Podstawę i długość trzech prostych łączących środki krawędzi przeciwległych.

3° Podstawę i odległości jej wierzchołków od środków ciężkości ścian bocznych.

889. — Mając dane trzy równoległe nie leżące na jednej płaszczyznie, na jedną z nich poniesiono długość AB równą danej, i wzięto dowolnie punkt C na drugiej, punkt D na trzeciej. Dowieśdź 1° że objętość czworościanu ABCD jest stała, jakiekolwiek są położenia punktów C i D i długości AB. 2° że ta objętość jest proporcyonalna do długości AB.

890. — Podstawa piramidy foremnej jest sześciokątem mającym 3 metry boku; wyrachować wysokość tej piramidy, wiedząc że jej powierzchnia boczna jest dziesięć razy większa od podstawy.

891. — W każdym czworościanie w którym krawędzie przeciwległe są

prostopadłe między sobą, najkrótsze odległości tych krawędzi i cztery wysokości czworościanu spotykają się w jednym punkcie.

892. — Przeciąć kąt trójścienny płaszczyzną tak, żeby trzy ściany przy wierzchołku utworzonej piramidy były równowarte.

893. — Przeciąć piramidę płaszczyzną równoległą do podstawy tak, żeby powierzchnia piramidy wyznaczonej tą płaszczyzną i powierzchnia danej piramidy były w stosunku $m : n$.

894. — Podzielić piramidę, płaszczyzną równoległą do podstawy, na dwie części proporcyonalne do liczb $m : n$.

895. — W pniu piramidy trójkątnej o podstawach nierównoległych, punkta spotkania przedłużonych boków tych podstaw i punkta spotkania przekątnych trzech ścian bocznych są na jednej płaszczyznie.

896. — Gdy dwie wysokości czworościanu spotykają się, to i dwie inne wysokości spotykają się także.

897. — Wysokość czworościanu foremnego równa się summie prostopadłych spuszczonych z punktu wewnętrznego na cztery ściany.

898. — Jeśli w czworościanie dwa ze trzech dwojanów krawędzi przeciwległych są prostokątne, trzeci dwojan tych krawędzi jest także prostokątny.

899. — Przez dwa punkta, dane na krawędziach graniastonu trójkątnego, poprowadzić płaszczyznę tak żeby podzieliła ten graniaston na dwie części proporcyonalne do liczb m, n : a w szczególności na dwie części równowarte.

900. — Na dwóch liniach prostych nie leżących na jednej płaszczyznie wzięto, na jednej dwa punkta stałe A i B, a na drugiej odcinek ruchomy CD ; znaleźć położenie odcinka CD takie żeby powierzchnia czworościanu ABCD była minimum.

901 — Prowadząc przez wierzchołki jednego czworościanu płaszczyzny równoległe do ścian przeciwległych, utworzono drugi czworościan ; znaleźć stosunek objętości tych dwóch czworościanów.

902. — Wyrazić stosunek dwóch sześcianów w dwóch liniach prostych.

903. — W czworościanie foremnym ze środka ciężkości podstawy spuszczone prostopadle na ściany boczne; dowiśdź że czworościan mający te prostopadłe za krawędzie boczne jest foremny, i wyrachować jego objętość.

904. — Czworościan, którego summa trzech ścian bocznych jest dana, ma objętość maximum gdy te ściany są trójkątami prostokątnemi równoramiennemi i prostopadłemi między sobą.

905. — Ze wszystkich piramid tej samej wysokości i podstaw równowartych z jednakową liczbą boków, piramida foremna ma powierzchnię boczną minimum. A ze wszystkich piramid których powierzchnie boczne złożone z tej samej liczby ścian są równowarte, piramida foremna ma objętość maximum.

906. — Piramida której podstawa jest podobna danemu wielokątowi i czyni summę stałą z jedną ścianą boczną, ma objętość maximum gdy ta ściana jest dwa razy większa od podstawy i do niej prostopadła.

Symetrya układu punktów. — Nazywa się *osią symetryi* układu punktów taka linia prosta około której, obróciwszy ten układ pod pawnym kątem, otrzymuje się nowe położenie w którem każdy punkt zabiera miejsce jednego z punktów układu. Najmniejszy kąt pod jakim trzeba obrócić układ około osi aby każdy jego punkt powrócił na swoje miejsce, jest częścią *podwielowną* $\frac{1}{k}$ z 360°. Według jak k równa się liczbom 2, 3, 4,... oś symetryi nazywa się *dwoistą*, *troistą*, *czwórną*,... To zrozumiawszy, dowieśdź że :

907. — Każdy układ punktów mający środek symetryi i płasczyznę symetryi posiada oś symetryi, która przechodzi przez ten środek i jest prostopadła do tej płasczyzny.

908. — Układ punktów mający dwie płasczyzny symetryi nieprostokątne ma zarazem i trzecią.

909. — Gdy układ punktów ma dwie płasczyzny symetryi, ich przecięcie jest osią symetryi.

910. — Gdy układ punktów ma płasczyznę symetryi i oś symetryi nieprostopadłą do tej płasczyzny, wtedy ma drugą oś symetryi która jest odpowiedną pierwszej względem płasczyzny symetryi.

911. — Układ punktów mający trzy osie czwórne, prostopadłe między sobą, ma zarazem cztery osie troiste.

912. — Wiadomo że liczba ziaren przenicy, którą Szach Perski miał dać matematykowi *Sessa*, za wynalezienie gry szachów, jest 18 446 744 073 709 551 615 (*). Owoż, metr sześcienny czyni 10 hektolitrów a hektolitr przenicy zawiera średnio 1 587 000 ziaren; gdyby więc usypano z tej ilości zboża piramidę trójkątną foremną, jaka byłaby długość boku piramidy? *Odp.* 21 445 metrów (licząc przez logarytmy), przeszło 4 mile krajowe!

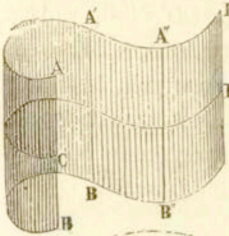
(*) *Zob.* w naszej Arytmetyce *postępnię geometryczną.*

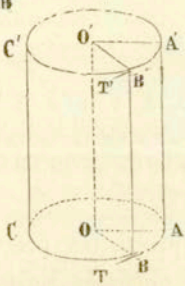
KSIĘGA ÓSMA

WALEC, STOŻEK, SFERA.

W tej księdze powiemy tylko słów kilka o powierzchniach walcowej, stożkowej i obrotowej, a zajmiemy się ogólnie własnościami opisowemi sfery i wielokątów sferycznych.

Powierzchnia walcowa. — Jeśli linia prosta AB posuwa się równoległe do prostej stałej GH, opierając się ciągle na danej linii CD, miejsce geometryczne położeń AB, A'B',... linii ruchomej nazywa się *powierzchnią walcową*.





Linia ruchoma, jako AB, która tworzy powierzchnię nazywa się *linią rodzącą*, a dana linia CD która kieruje ruch linii rodzącej bierze nazwisko *kierownicy*.

Przestrzeń zawarta między powierzchnią walcową i dwiema płaszczyznami równoległemi nazywa się WALCEM. Te płaszczyzny są *podstawami* a ich odległość *wysokością* walca. Linia rodząca jest *krawędzią* walca.

Powierzchnia walcowa utworzona przez krawędź AA', stanowi powierzchnię boczną walca. Dla skrócenia mowy daje się zwykle imie walca nawet powierzchni walcowej.

Walec jest *kołowy*, *elliptyczny*,... gdy ma za kierownicę koło, ellipsę,... jest *prosty* albo *pochyły*, według jak jego krawędź jest prostopadła albo pochyła do podstawy.

Nazywa się *przecięciem prostem* walca wszelkie przecięcie przez płaszczyznę prostopadłą do jego krawędzi

Płaszczyzna jest szczególnym przypadkiem powierzchni walcowej; albowiem, jeśli kierownica jest linią prostą, albo krzywą płaską której płaszczyzna jest równoległa do kierunku linii rodzącej, wtedy powierzchnia walcowa staje się płaszczyzną.

Twierdzenie I.

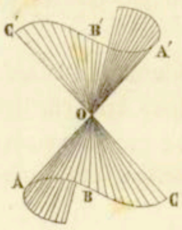
Przecięcia ABC, A'B'C',... *powierzchni walcowej jakiejkolwiek* ABC A'B'C' *przez płaszczyzny równoległe są liniami krzywemi równemi* (figura powyższa).

Jakoż, przez jakikolwiek punkt O płaszczyzny przecięcia ABC poprowadźmy prostę OO' równoległą do linii rodzącej. Wszelka płaszczyzna AA'O'O, przechodząca przez linię OO' i linię rodzącą jakąkolwiek AA', spotyka płaszczyzny przecięć ABC, A'B'C' wedle dwóch prostych OA i O'A' równoległych i równych. Jeśli więc położymy płaszczyznę ABC, na A'B'C' tak żeby punkt O padł na O', i punkt A na A', linia krzywa ABC przystanie do krzywej A'B'C'; bo wszystkie promienie równoległe jako OB i O'B',... są równe.

Wniosek I. — *Podstawy walca jakiegokolwiek są równe między sobą jako przystawalne.*

II. — Styczne BT, B'T' w punktach odpowiednych B, B' dwóch przecięć ABC, A'B'C', są równoległe, jako granice położeń dwóch siecznych odpowiednych które są równoległe.

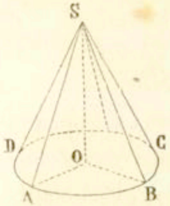
Powiezchnia stożkowa. — Jeśli linia prosta OA przechodzi przez punkt stały O i porusza się ciągle opierając się na linii stałej ABC, miejsce geometryczne jej położeń OA, OB, OC,... nazywa się *powierzchnią stożkową.*



Punkt stały O jest *środkiem* albo *wierzchołkiem* powierzchni stożkowej i przedziela ją na dwie części OABC i OA'B'C',. zwane *płachtami.* Linia stała ABC jest kierownicą powierzchni stożkowej.

Przestrzeń zamknięta między jedną płachtą powierzchni stożkowej i płaszczyzną nazywa się

STOŻKIEM (niewłaściwie *ostrokręgiem*), jako SABCD. Ta płaszczyzna



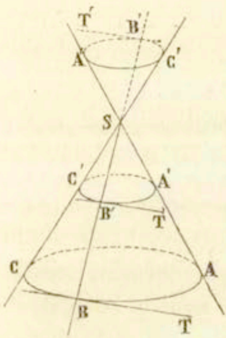
ABC jest podstawą, środek S powierzchni stożkowej *wierzchołkiem*, a linie rodzące SA, SB... *krawędziami* albo *bokami* stożka. Ale, dla skrócenia mówi się *stożek* zamiast *powierzchnia stożkowa*.

Stożek jest *kołowy*, *elliptyczny*... gdy ma za kierownicę koło, ellipsę...; jest *prosty* albo *pochyły* według jak linia łącząca wierzchołek ze środkiem podstawy jest prostopadła albo pochyła do tej podstawy.

Gdy kierownica jest linią prostą, albo krzywą płaską której płaszczyzna przechodzi przez wierzchołek S, wtedy powierzchnia stożkowa staje się płaszczyzną.

Twierdzenie II.

Przecięcia ABC, A'B'C' *powierzchni stożkowej jakiejkolwiek, przez płaszczyzny równoległe, są liniami krzywemi podobnemi.*



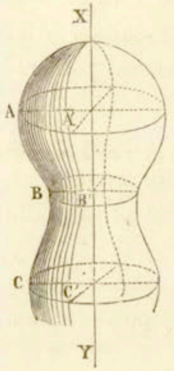
Jakoż, jeśli przez środek S powierzchni stożkowej poprowadzimy płaszczyznę równoległą do płaszczyzn siecznych ABC, A'B'C', te trzy płaszczyzny podzielą linie rodzące SA, SB, SC..., na części proporcyonalne, i będzie (VI, 26).

$$\frac{SA'}{SA} = \frac{SB'}{SB} = \frac{SC'}{SC} = \text{etc.}$$

Więc linie krzywe ABC, A'B'C' są jednokładne (III, 35.) i punkt S jest ich środkiem podobieństwa, *prostego* albo *odwrotnego* według jak dwie krzywe odpowiednie leżą na jednej płachcie albo na dwóch płachtach stożka.

Wniosek. — Styczne BT, B'T' w punktach odpowiednich B, B' dwóch przecięć ABC, A'B'C' są równoległe, jako granice siecznych równoległych które przechodzą przez dwa punkta odpowiednie.

Powierzchnia obrotowa. — Jeśli jakakolwiek linia ABC obraca się około osi stałej XY z którą jest niezmiennie związana, miejsce geometryczne jej położeń ABC, A'B'C',... nazywa się *powierzchnią* obrotową.



Punkta A, B... linii rodzącej ABC opisują okręgi kół które się nazywają *równoleżnikami*, dlatego że ich płaszczyzny, prostopadłe do osi XY, są równoległe między sobą.

Przecięcie ABC powierzchni obrotowej, przez płaszczyznę przechodzącą przez jej oś XY nazywa się *południkiem*.

Południki są prostopadłe do równoleżników, bo ich płaszczyzny przechodzą przez oś tych ostatnich.

Wszystkie południki są oczywiście równe, i każdy z nich może się uważać za linię rodzącą powierzchni obrotowej.

Można także uważać powierzchnię obrotową jako *miejsce geometryczne koła prostopadłego do osi*, *którego środek przebiega tę oś*, *a promień się zmienia tak że okrąg opiera się ciągle na linii stałej*. Wtedy południk ABC jest kierownicą, a koło ruchome linią rodzącą zmienną z położenia i wielkości.

Ten sposób tworzenia się powierzchni obrotowej jest nader użyteczny w zastosowaniach.

Aby dać przykład figury obrotowej, przypuśćmy że prostokąt ABCD obraca się około boku AD jako osi. W tym obrocie, podstawy AB i DC prostokąta tworzą koła BEB' i CDC' równe i równoległe; bok BC, równoległy do osi AD, tworzy *powierzchnię* boczną albo wypukłą walca, a prostokąt ABCD tworzy walec obrotowy BEB'CHC'G.

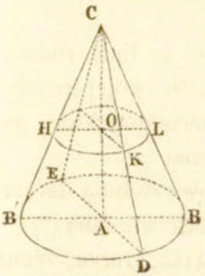
Więc *walec obrotowy jest figurą utworzoną obrotem prostokąta około jednego z boków jako osi.*

Walec prosty o podstawie kołowej jest walcem obrotowym.

Widzimy łatwo że *przecięcia proste powierzchni walcowej obrotowej są okręgami równemi,* których spólnym promieniem jest odległość linii rodzącej od osi.

Ztąd wynika że *miejscem punktów przestrzeni, które leżą w danej odległości od linii prostej stałej, jest powierzchnia walcowa obrotowa mająca tę prostę za oś i daną odległość za promień.*

Płaszczyzna równoległa do osi walca obrotowego zawiera dwie linie rodzące tej powierzchni, albo tylko jedną, albo nie ma z nią żadnego punktu spólnego, według jak odległość tej płaszczyzny od osi jest mniejsza od promienia powierzchni, albo mu równa albo od niego większa.



Przypuśćmy teraz, na drugi przykład że trójkąt prostokątny ABC obraca się około AC jednego z boków kąta prostego; w tym obrocie, drugi bok AB kąta prostego opisuje koło, przeciwprostokątna BC tworzy powierzchnię stożkową, a trójkąt ABC tworzy stożek obrotowy CBDB'.

Więc *stożek obrotowy jest figurą utworzoną obrotem trójkąta prostokątnego około jednego z ramion kąta prostego jako osi.*

Stożek prosty o podstawie kołowej jest stożkiem obrotowym.

W stożku obrotowym CBDB' powierzchnia utworzona obrotem przeciwprostokątnej BC jest *powierzchnią boczną* albo WYPUKŁĄ stożka; koło utworzone przez bok AB jest *podstawą*, oś AC *wysokością*, a przeciwprostokątna BC *bokiem* albo *apotemą* tego stożka.

W takim stożku wszelkie przecięcie równoległe do podstawy jest kołem, bo płaszczyzna przecięcia prostopadła do osi obrotu.

Z resztą, można tego wprost dowieśdź. Jakoż, niech będzie HKL płaszczyzna równoległa do podstawy stożka; dwa trójkąty podobne COK, CAD dają

$$\frac{OK}{AD} = \frac{OC}{AC}; \quad \text{zkąd} \quad OK = \frac{OC}{AC}.AD.$$

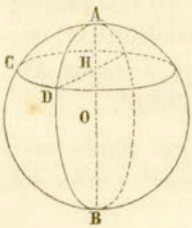
Owoż, odległości OC, AC, AD są stałe, niezależne od punktu K;

zatem odległość OK jest ilością stałą. Więc linia krzywa HKL jest okręgiem mającym środek O na osi stożka i odległość OK za promień.

Przecięcie stożka obrotowego przez płaszczyznę przechodzącą przez oś jest trójkątem równoramiennym którego kąt wierzchołkowy BCB' nazywa się *kątem stożka.* Gdy ten trójkąt jest równoboczny, wtedy stożek nazywa się równobocznym.

Z tego co poprzedza wynika że, *miejscem geometrycznem linii prostej która, przechodząc przez dany punkt* S, *czyni z daną prostą* L *kąt równy danemu, jest powierzchnia stożkowa obrotowa, mająca za wierzchołek punkt* S, *a za oś linię równoległą do prostej* L *poprowadzoną przez* S.

Powierzchnia sferyczna. Weźmy nakoniec za linię rodzącą półokrąg ACB. Ten półokrąg, obracając się około swojej średnicy AB jako osi, tworzy powierzchnię którą nazwano *powierzchnią sferyczną.*



Przestrzeń zamknięta powierzchnią sferyczną nazywa się *sferą* (niewłaściwie kulą (*)).

Trzy figury obrotowe walec, stożek, sfera nazywają się w geometryi Starożytnych *trzema ciałami okrągłemi.*

WŁASNOŚCI FUNDAMENTALNE SFERY.

Chociaż sfera należy do figur obrotowych, trzeba jednak dać jej określenie właściwe i niezależne, jako następujące :

Określenie I. — Sfera jestto część przestrzeni zamknięta powierzchnią krzywą której wszystkie punkta są równo oddalone od punktu wewnętrznego zwanego *środkiem.*

Ta powierzchnia krzywa nazywa się *powierzchnią sferyczną*; ale często daje się imie sfery nawet powierzchni sferycznej.

(*) Mówi się wzniośle : *Sfera pojęć* człowieka,.., *sfera działań*..., a nie można powiedzieć, *kula pojęć*, *kula działań*.. Sfera jest częścią przestrzeni, a zaś kula ciałem. Geometrya nie zajmuje się ciałami.

Sfera jest najprostszą z powierzchni krzywych.

II. — *Promieniem sfery* jest wszelka linia prosta łącząca środek z punktem powierzchni.

Wszystkie promienie sfery są oczywiście równe. Zatem
Dwie sfery tego samego promienia są równe.

III. — Gdy punkt uważany jest *zewnątrz* danej sfery, jego odległość od środka tej sfery jest większa od promienia; a gdy jest *wewnątrz* sfery, ta odległość jest mniejsza od promienia.

Ztąd wynika że, *Powierzchnia sferyczna jest miejscem geometrycznem punktów równo oddalonych od jej środka.*

IV. — *Cięciwą sfery* jest wszelka prosta łącząca dwa punkta jej powierzchni.

V. — Cięciwa przechodząca przez środek sfery nazywa się *średnicą.*

Wszystkie średnice sfery są równe jako dwa razy większe od promienia.

VI. — *Płasczyzna* jest *styczna* do sfery gdy ma jeden tylko punkt spólny z jej powierzchnią.

VII. — Dwie *sfery* są *styczne* do siebie, gdy mają jeden tylko punkt spólny; albo, co to samo, gdy mają płasczyznę styczną spólną.

VIII. — *Normalną* w punkcie danym powierzchni sferycznej jest prostopadła do płasczyzny stycznej w tym punkcie.

IX. — Wielościan jest *wpisany w sferę* gdy wszystkie jego wierzchołki leżą na powierzchni sferycznej. Wtedy, nawzajem, sfera jest *opisana na wielościanie.*

Wielościan jest *opisany na sferze* gdy wszystkie jego ściany są styczne do powierzchni sferycznej. Wtedy, nawzajem, *sfera* jest *wpisana w wielościan.*

Twierdzenie III.

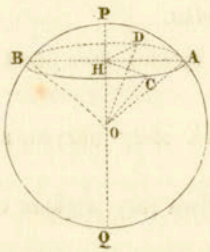
Linia prosta nie może spotykać powierzchni sferycznej w więcej niż dwóch punktach.

Bo, gdyby linia prosta mogła spotykać powierzchnię sferyczną w więcej niż dwóch punktach, łącząc te punkta ze środkiem sfery, możnaby z jednego punktu poprowadzić do linii prostej więcej niż dwie pochyłe równe; co niemożebne.

WNIOSEK.— Powierzchnia sferyczna jest powierzchnią wypukłą.

TWIERDZENIE IV.

Przecięcie sfery przez płaszczyznę jest kołem.



Niech będzie ACBD linia wedle której płaszczyna przecina sferę. Wszystkie punkta A, C, B,... tego przecięcia są równo oddalone od środka O sfery; więc przecięcie jest kołem które ma za środek spodek H prostopadłej spuszczonej ze środka sfery na płaszczyznę sieczną (VI, 6, *wn.* I).

WNIOSEK. — Trójkąt prostokątny AOH daje równość

$$\overline{AH}^2 = \overline{AO}^2 - \overline{OH}^2,$$

która dowodzi że promień HA jest tem większy im mniejsza prostopadła OH, czyli że koło HA jest tem większe im jego środek bliżej środka sfery O.

Dla tej przyczyny nazwano *wielkiem kołem* wszelkie koło którego płaszczyzna przechodzi przez środek sfery, a *małemi kołami* wszystkie te których płaszczyzny nie zawierają środka sfery.

Ztąd wynika że w jednej sferze, albo we dwóch sferach równych,

Wszystkie koła wielkie są równe, jako mające promień sfery za promień.

Dwa wielkie koła dzielą się nawzajem na dwa półkoła równe, bo ich przecięcie się przechodząc przez środek sfery jest ich spólną średnicą.

Dwa małe koła równo od środka sfery oddalone są równe; a z dwóch małych kół to jest większe które bliżej środka sfery.

Każde wielkie koło dzieli sferę i jej powierzchnię na dwie równe części. Jakoż, jeśli przyłożymy jedną z tych dwóch części do drugiej na spólnej podstawie, obracając wypukłości w jedną stronę, dwie powierzchnie przystaną do siebie; ponieważ wszystkie ich punkta są w równej odległości od środka sfery.

Określenie X. — Mianowano *biegunami koła* ACB skrajności P i Q średnicy PQ prostopadłej do tego koła. To nazwisko pochodzi ztąd że średnica PQ może być uważana jako oś obrotu danej powierzchni sferycznej.

Środek H koła ACB, jego bieguny P i Q, i środek O sfery leżą na osi tego koła.

Dwa koła równoległe mają tę samą oś i te same bieguny.

Uwaga. — Trzeba *trzech* warunków do wyznaczenia małego koła na sferze, bo trzeba trzech punktów do wyznaczenia jego płaszczyzny. Ale *dwa* warunki są dostateczne do wyznaczenia wielkiego koła, dlatego że jego środek jest wiadomy. Ztąd wynika że przez dwa punkta dane na sferze można zawsze poprowadzić okrąg wielkiego koła, i tylko jeden. Jednakże, jeśli dwa dane punkta na sferze są w linii prostej z jej środkiem, wtedy wielkie koło przechodzące przez te punkta, mając tylko daną średnicę, nie jest wyznaczone z położenia.

Określenie XI. — Nazywa się *kątem dwóch linij krzywych*, przechodzących przez jeden punkt, kąt ich stycznych w tym punkcie.

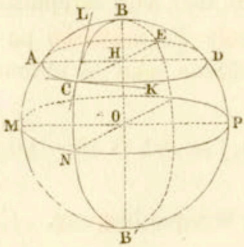
Dwie krzywe tworzące kąt prosty nazywają się *prostokątnemi* albo *prostopadłemi*.

Kąt utworzony przez dwa łuki kół wielkich jest *kątem sferycznym*.

Kąt dwóch jakichkolwiek krzywych na sferze równa się kątowi płaszczyzn przechodzących przez styczne do tych krzywych w punkcie spólnym i przez środek sfery. Albowiem, te styczne są prostopadłe do promienia sfery w punkcie spólnym, jako styczne do wielkiego koła w tym punkcie; więc tworzą właśnie kąt prostolinijny kąta dwójściennego rzeczonych płaszczyzn.

Twierdzenie V.

Łuki kół wielkich które łączą biegun koła z jego okręgiem są równe między sobą, i prostopadłe do tego okręgu.



Niech będzie na sferze jakikolwiek okrąg ACD mający bieguny B, B′. Cięciwy BA, BC... są równe, jako pochyłe równo oddalone od spodka H prostopadłej BH; więc łuki BA, BC,... kół wielkich niemi podpasane są równe.

Aby dowieśdź że łuk BC koła wielkiego jest prostopadły do łuku koła CD, poprowadźmy styczne CL i CK do tych łuków. Płaszczyzna wielkiego koła BC, przechodząca przez biegun B koła ACD, jest prostopadła do jego płaszczyzny; owoż, styczna CK, prostopadła do promienia CH, jest prostopadła do płaszczyzny CHB (VI, 10, *wn.* 1), i temsamem prostopadła do stycznej CL; więc łuk BC jest prostopadły do okręgu ACD.

Z dwóch biegunów B i B′ koła ACD uważając bliższy B jego płaszczyzny, nazwano *odległością biegunową* cięciwę BA która mierzy odległość prostolinijną bieguna od okręgu; a zaś łukowi BA koła wielkiego który łączy biegun z punktem okręgu dano imie *promienia sferycznego* tego okręgu.

Promień sferyczny wielkiego koła jest równy ćwierci jego okręgu, czyli *ćwiercianowi;* a zaś odległość biegunowa jest równa cięciwie jego ćwiercianu, to jest bokowi kwadratu wpisanego w wielkie koło.

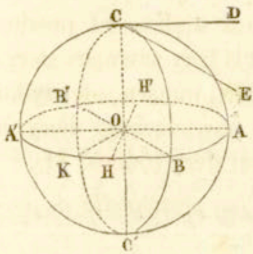
Powyższe twierdzenie daje sposób kreślenia łuków kół na sferze z taką samą łatwością jako na płaszczyznie, za pomocą cyrkla zakrzywionego. Przypuśćmy, dla utkwienia myśli, że chcemy nakreślić okrąg mający biegun B, i odległość biegunową BA. Bierzemy otwartość cyrkla równą odległości BA, i, stawiając jedną nóżkę tego cyrkla w punkcie B, drugą zakreślamy linię która będzie szukanym okręgiem ACD. Można to łatwo sprawdzić.

Jakoż, z punktu A spuśćmy prostopadłę AH na oś BB′, i połączmy CH; jeśli obrócimy półkole BCB′ około osi BB′ tak żeby przystało do półkola BAB′, punkt C padnie na A i prosta CH przystanie do AH: więc kąt CHB jest prosty. Co dowodzi że punkta A, C, D,... leżą na jednej płaszczyznie prostopadłej do osi BB′ w punkcie H. Zatem linia ACD... jest okręgiem.

Biegun B koła ACD jest punktem przecięcia dwóch łuków kół wielkich prostopadłych do jego okręgu. Ztąd sposób wyznaczenia tego bieguna.

TWIERDZENIE VI.

Kąt ACB *dwóch łuków kół wielkich* CAC′, CBC′ *ma za miarę łuk koła wielkiego* AB *nakreślony z jego wierzchołka* C *jako bieguna i zawarty między jego ramionami* CA, CB.



Poprowadźmy styczne CD i CE do ramion kąta. Ponieważ punkt C jest biegunem łuku koła wielkiego AB, łuki CA, CB są ćwiercianami i kąty COA, COB są proste; zatem kąt stycznych DCE jest równy kątowi AOB. Ale ten ostatni jako środkowy ma za miarę łuk AB wielkiego koła; więc łuk AB jest także miarą kąta sferycznego ACB.

WNIOSEK I. — Jeśli na okręgu wielkiego koła ABA′ weźmiemy łuki AH i BK, idące oba w jedną stronę i równe każdy ćwiercianowi, punkt H będzie biegunem łuku CA a punkt K biegunem łuku CB; i łuki HK i AB będą równe. Więc *kąt sferyczny* ACB *ma za miarę łuk* HK *mniejszy z dwóch łuków koła wielkiego które łączą bieguny ramion tego kąta*.

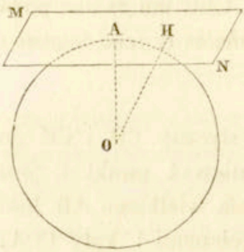
II. — Miejscem geometrycznem biegunów kół wielkich tworzących z danem kołem wielkiem AC kąt równy danemu kątowi ACB, jest okrąg opisany z bieguna H koła danego, i promieniem sferycznym równym łukowi koła wielkiego który mierzy kąt dany.

A miejscem geometrycznem osi tych kół jest powierzchnia stożkowa obrotowa, mająca punkt O za środek prostę OH za oś obrotu i prostę OK za linię rodzącą.

Uwaga. — Dwa okręgi kół wielkich ACA′ i BCB′, przecinające się w punkcie C, tworzą kąty przyległe BCA, BCA′ spełniające, i kąty wierzchołkiem przeciwległe ACB, A′CB′ równe.

Twierdzenie VII.

Płaszczyzna prostopadła na skrajności promienia jest styczna do sfery. I nawzajem.



Niech będzie MN płaszczyzna prostopadła na skrajności A promienia sfery OA.

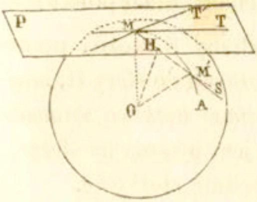
Ponieważ wszelka pochyła OH do płaszczyzny MN, jest większa od prostopadłej OA, punkt H leży zewnątrz sfery. Więc płaszczyzna MN, mająca jeden tylko punkt spólny z powierzchnią sfery a wszystkie inne zewnątrz, jest styczna do tej sfery (*Określ.* VI).

Nawzajem, *płaszczyzna styczna do sfery jest prostopadła do promienia przechodzącego przez punkt zetknięcia.*

Niech będzie A punkt zetknięcia. Ponieważ wszelki inny punkt H płaszczyzny stycznej MN leży zewnątrz sfery, odległość $OA < OH$. Więc promień styczności OA, najkrótsza droga ze środka sfery O do płaszczyny MN, jest prostopadły do tej płaszczyzny, i temsamem płaszczyzna styczna MN jest prostopadła do promienia w punkcie zetknięcia A.

Płaszczyzna styczna do sfery w danym punkcie jest miejscem geometrycznem stycznych do linij krzywych na sferze, które przez ten punkt poprowadzić można.

Niech będzie na sferze O jakakolwiek krzywa MA przechodząca przez punkt M; weźmy na tej krzywej punkt sąsiedni M′, poprowadźmy sieczną MM′ i spuśćmy na nią ze środka sfery O



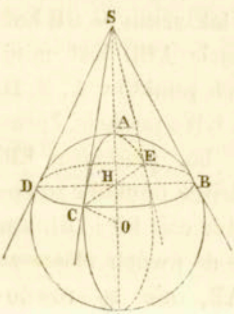
prostopadłę OH. Ponieważ trójkąt MOM′ jest równoramienny, spodek H prostopałej OH jest we środku cięciwy MM′, jakkolwiek blizko punkt M′ dochodzi do M. Owoż, gdy punkt M′ schodzi się z M, punkt H schodzi się z nim także, i temsamem prostopadła OH przystaje do promienia OM; ale wtedy sieczna MM′ staje się styczną do krzywej MA w punkcie M; więc ta styczna jest prostopadła do promienia OM. To dowodzi że wszystkie styczne w punkcie M do krzywych poprowadzonych na sferze przez ten punkt, będąc prostopadłe do promienia w punkcie zetknięcia, znajdują się na płasczyznie stycznej do sfery; więc ta płasczyzna jest ich miejscem geometrycznem.

Wniosek I. — *Przez punkt dany na powierzchni sferycznej można zawsze poprowadzić płasczyznę styczną do tej powierzchni; ale tylko jedną.*

II. — Normalna do powierzchni sferycznej przechodzi przez jej środek; i *nawzajem.*

Twierdzenie VIII.

Miejscem geometrycznem stycznych poprowadzonych do sfery O *przez punkt zewnętrzny* S *jest powierzchnia stożkowa obrotowa; linią punktów zetknięć tej powierzchni ze sferą jest okrąg którego oś przechodzi przez punkt* S.



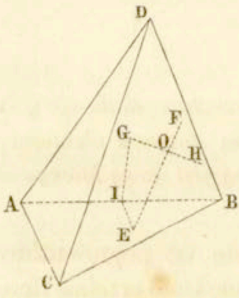
Jakoż, przez prostę OS poprowadźmy jakąkolwiek płasczyznę która przetnie sferę O wedle wielkiego koła ABGD. Jeśli teraz poprowadzimy przez punkt S styczną SB do tego koła, i obrócimy figurę SBG około prostej SO jako osi; w tym obrocie, półkole ABG tworzy daną sferę O; styczna SB, która nie zmienia ani swej długości ani nachylenia na oś SO, tworzy powierzchnię stożkową obrotową; a nakoniec, puukt zetknięcia B kreśli linię zetknięć stożka ze sferą, i ta linia jest oczywiście okręgiem którego oś przechodzi przez punkt S.

Widzimy łatwo że przez punkt zewnętrzny S można poprowadzić nieskończoną liczbę płaszczyzn stycznych do sfery O; *miejscem przecięć tych płaszczyzn jest powierzchnia stożkowa obrotowa.* Mówi się że ta powierzchnia stożkowa jest *opisana* na sferze, i nawzajem sfera jest *wpisana* w tę powierzchnię stożkową.

Wniosek. — Jeśli przypuścimy że punkt S oddala się w nieskończoność na linii prostej AG, stożek staje się walcem; więc Miejscem geometrycznem stycznych do sfery, równoległych do danej prostej, jest powierzchnia walcowa obrotowa *opisana na sferze*; a linią zetknięć tych dwóch powierzchni jest okrąg wielkiego koła prostopadłego do linij rodzących.

Twierdzenie IX.

Przez cztery punkta nie leżące na jednej płaszczyznie mozna zawsze poprowadzić powierzchnię sferyczną; ale tylko jedną.



To znaczy że istnieje punkt, i tylko jeden, równo oddalony od czterech punktów A, B, C, D, danych nie na jednej płaszczyznie.

Jakoż, uważajmy że oś EF koła opisanego na trójkącie ABC jest miejscem punktów równo oddalonych od trzech punktów A, B, C; i tak samo oś GH koła opisanego na trójkącie ABD jest miejscem punktów równo oddalonych od trzech punktów A, B, D. Owoż, te osie mogą się przecinać w jednym tylko punkcie, i przecinają się istotnie w pewnym punkcie O; bo, płaszczyzna EIG prostopadła we środku prostej AB, jako miejsce punktów równo oddalonych od skrajności A i B, zawiera obie osie EF i GH, a te dwie linie, będąc odpowiednio prostopadłe do dwóch płaszczyzn przecinających się z założenia wedle AB, nie są równoległe (VI, 29, wn 2.). Więc istnieje punkt O, i tylko jeden, równo oddalony od czterech punktów A, B, C, D nie leżących na jednej płaszczyznie.

Zatem, sfera nakreślona z punktu O jako środka i promieniem OA przechodzi przez cztery rzeczone punkta A, B, C, D; i jest jedyna.

To twierdzenie dowodzi że

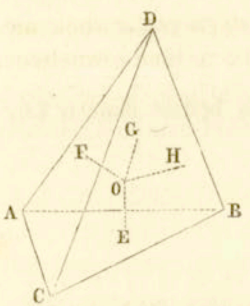
Cztery punkta nie leżące na jednej płaszczyznie wyznaczają sferę.

Gdy cztery punkta znajdują się na jednej płaszczyznie, wtedy nie wyznaczają sfery. Bo, jeśli są na jednym okręgu, to można przez te punkta poprowadzić tyle sfer różnych ile się podoba; a jeśli nie są wszystkie na jednym okręgu, to widocznie niema żadnej sfery którąby przez takie cztery punkta przechodzić mogła.

WNIOSEK. — Płaszczyzny prostopadłe we środkach krawędzi czworościanu spotykają się w jednym punkcie, który jest środkiem sfery opisanej.

TWIERDZENIE X.

Na każdym czworościanie można opisać sferę, i wpisać w niego sferę.



Poprzedzające twierdzenie dowodzi pierwszej części obecnego.

Co do drugiej części, uważajmy że płaszczyzny dwójsieczne kątów dwójściennych DA i DB przecinają się, wewnątrz czworościanu, wedle linii prostej która, będąc miejscem punktów równo oddalonych od trzech ścian DAB, DAC, DBC, leży na płaszczyznie kąta dwójściennego DC. Owoż, płaszczyzna dwójsieczna kąta dwójściennego BC, czyniąc kąt ostry z podstawą ABC czworościanu, spotyka oczywiście tę linię przecięcia, i tylko w jednym punkcie O, który jest równo oddalony od wszystkich ścian czworościanu. Więc istnieje wewnątrz czworościanu sfera, ale tylko jedna która, mając punkt O za środek i jego odległość OE od ścian za promień, dotyka każdej ściany w jednym punkcie, czyli jest *sferą wpisaną* w czworościan.

Wniosek I. — Płaszczyzny dwójsieczne wszystkich kątów dwójściennych czworościanu spotykają się w jednym punkcie, który jest środkiem sfery wpisanej.

II. — Jeśli połączymy wierzchołki czworościanu DABC ze środkiem O sfery wpisanej, rozłożymy ten czworościan na cztery inne, mające jego ściany za podstawy i promień OE sfery wpisanej za wysokość.

Oznaczając przez V objętość czworościanu DABC, przez S jego powierzchnię, i przez r promień sfery wpisanej, będzie

$$V = \frac{1}{3} Sr, \qquad \text{zkąd} \qquad r = \frac{3V}{S}.$$

To pokazuje że znając powierzchnię i objętość czworościanu można mieć promień sfery wpisanej.

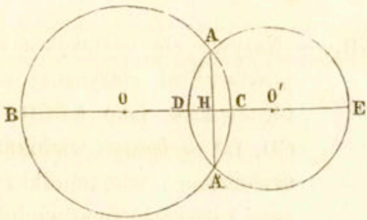
Uwaga. — Gdyby zadano ogólne zagadnienie : *Znaleźć sferę styczną do czterech płaszczyzn które się spotykają po dwie*, otrzymanoby nietylko *sferę wpisaną* w czworościan utworzony temi płaszczyznami, ale jeszcze *siedem* innych sfer stycznych zewnętrznie, to jest *cztery* zawpisane w czworościan i *trzy* inne zewnętrzne.

Rozwiązanie tego ogólnego zagadnienia będzie dane w księdze X.

Twierdzenie XI.

Przecięcie się dwóch sfer O i O′ *jest okręgiem który ma za oś linię ich środków.*

Jakoż, cztery którekolwiek punkta przecięcia są na jednej płasczyznie, bo inaczej dwie sfery O i O′ nie byłyby oddzielne (9); więc to przecięcie jest okręgiem (4).



Nadto, środki O i O′ dwóch sfer, każdy równo oddalony od punktów okręgu przecięcia, są na osi tego okręgu.

Można tego wszystkiego dowieśdź odrazu, uważając że, jeśli przetniemy dwie sfery O i O′ płasczyzną przechodzącą przez ich środki, i obrócimy figurę BAE około osi BE, punkt C spólny obydwom sferom opisze okrąg mający za oś linię środków BOO′E.

Wniosek I. — Okrąg przecięcia dwóch sfer może malejąc przywieśdź się do jednego punktu; wtedy dwie sfery mające tylko ten punkt spólny stają się stycznemi. Więc, *gdy dwie sfery są styczne, punkt zetknięcia znajduje się na linii ich środków, i sfery mają w tym punkcie spólną płasczyznę styczną.*

II. — Gdy trzy sfery przecinają się po dwie, płasczyzna ich trzech środków jest prostopadła do prostej wedle której spotykają się płasczyzny trzech kół przecięć.

Dwie sfery w przestrzeni, jako dwa koła na płasczyznie, mogą tylko *pięć* różnych mieć położeń, to jest być: 1° *zewnątrz* jedna drugiej, 2° *styczne zewnętrznie*, 3° sieczne, 4° *styczne wewnętrznie*, 5° wewnątrz jedna drugiej.

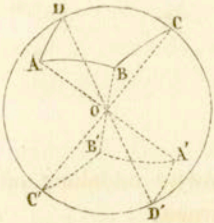
Oznaczając przez d odległość środków dwóch sfer, przez R i R′ ich promienie, i przypuszczając $R > R'$, łatwo widzimy że:

$$1^\circ\ d > R + R',\ 2^\circ\ d = R + R',\ 3^\circ\ R + R > d > R - R',$$
$$4^\circ\ d = R - R',\ 5^\circ\ d < R - R'.$$

Wzajemnice są prawdziwe.

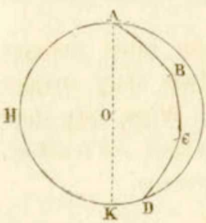
WIELOKĄTY SFERYCZNE.

Określenie XII. — Nazywa się *wielokątem sferycznym* część powierzchni sferycznej zamknięta *łukami kół wielkich*, jako ABCD. Te łuki AB, BC, CD, DA są *bokami* wielokąta, a kąty niemi utworzone i wierzchołki tych kątów są *kątami* i *wierzchołkami* wielokąta sferycznego.



Wielokąt sferyczny nazywa się *wypukłym* gdy leży cały na jednem półsferzu względem każdego ze swoich boków.

W wielokącie sferycznym wypukłym, każdy bok jest mniejszy od półokręgu koła wielkiego.



Jakoż, niech będzie wielokąt ABCD w którym bok AHD jest większy od półokręgu. Jeśli weźmiemy na tym boku łuk AHK równy półokręgowi, widzimy łatwo że okrąg do którego należy bok AB ma za średnicę linię AK; zatem ten okrąg ABK przedziela dany wielokąt na dwie części, z których jedna leży z jednej strony boku AB a druga z drugiej. Więc taki wielokąt sferyczny nie jest wypukły.

Wielokąt sferyczny mający trzy boki jest *trójkątem sferycznym.*

Uważać będziemy same tylko trójkąty sferyczne wypukłe, jako najprostsze, których *wszystkie boki są mniejsze od półokręgu.* Trójkąty sferyczne niewypukłe, mając kąty większe od dwóch prostych byłyby niedogodne; i nawet niepotrzebne; bo, znając trójkąt wypukły na danej sferze, łatwo wyznaczyć inne.

Trójkąt sferyczny jest *równoramienny*, *równoboczny*, *równokątny*, *prostokątny* tak jako trójkąt prostolinijny.

Czworobok sferyczny równoboczny nazywa się *ukośnikiem* sferycznym.

Wielokąt sferyczny zarazem równoboczny i równokątny jest *foremny*.

Czworobok sferyczny *foremny* nazywa się KWADRATEM SFERYCZNYM.

Płaszczyzny boków wielokąta sferycznego ABCD (*figura przedostatnia*) wyznaczają we środku sfery O kąt wielościenny OABCD, którego kąty dwójścienne są kątami tego wielokąta, a jego ściany AOB, BOC,... mają za miary boki AB, BC,... odpowiedające wielokąta sferycznego.

Ten związek wielokąta sferycznego z kątem wielościennym pokazuje że, *na każde twierdzenie kąta wielościennego odpowieda twierdzenie wielokąta sferycznego*, i NAWZAJEM. Zatem, z własności jednej figury można wywieśdź własności drugiej; co ułatwia poszukiwania.

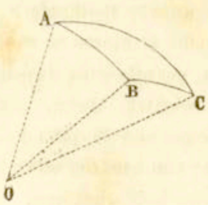
Jeśli przedłużymy krawędzie kąta wielościennego OABCD, utworzymy kąt wielościenny OA′B′C′D′ symetryczny, który wyznaczy na sferze wielokąt A′B′C′D′ symetryczny wielokąta ABCD.

Jako widzimy, dwa wielokąty sferyczne symetryczne mają boki i kąty równe każdy każdemu, ale w porządku odwrotnym ułożone, i dlatego takie wielokąty nie są, w ogólności przystawalne.

Aby trójkąt sferyczny mógł przystać do swego symetrycznego, trzeba i dość jest żeby był *równoramienny*.

TWIERDZENIE XII.

W trójkącie sferycznym, każdy bok jest mniejszy od summy dwóch innych, a większy od ich różnicy.



Jeśli połączymy wierzchołki trójkąta sferycznego ABC ze środkiem O sfery, utworzymy trójścian OABC, którego ściany AOB, AOC, BOC mają za miary boki AB, AC, BC tego trójkąta. Owoż, w trójścianie OABC ciana AOB jest mniejsza od summy dwóch innych AOC i BOC, a większa od ich różnicy; więc

$AB < AC + BC$, a $AB > AC - BC$ i $AB > BC - AC$.

Wniosek. — Jeśli w trójkącie sferycznym ABC połączono punkt wewnętrzny D ze skrajnościami boku BC łukami kół wielkich BD i CD, będzie

$$BD + DC < BA + AC.$$

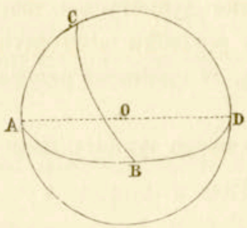
Dowodzenie jako w geometryi płaskiej

Twierdzenie XIII.

Obwód trójkąta sferycznego, a ogólnie obwód wielokąta sferycznego WYPUKŁEGO, *jest mniejszy od okręgu koła wielkiego.*

Bo summa ścian kąta wielościennego odpowiedającego jest mniejsza od czterech kątów prostych (VI, 40).

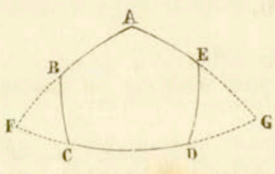
Uwaga. — Można wprost dowieśdź tego twierdzenia.



1° W trójkącie sfezycznym ABC przedłużmy dwa boki AB, AC aż do spotkania D. Łuki ABD, ACD, są półokręgami (4 *wn.*). Owoż, w trójkącie BCD, bok $BC < BD + CD$; więc, dodając po obydwóch stronach summę $BA + AC$, otrzymamy

$$AB + AC + BC < ABD + ACD.$$

Co dowodzi że obwód trójkąta sferycznego ABC jest mniejszy od okręgu koła wielkiego.



2° Niech będzie wielokąt sferyczny *wypukły* ABCDE.

Jeśli przedłużymy dwa boki AB i DC, przyległe bokowi BC, aż do punktu spotkania F, będzie w trójkącie BCF, $BC < BF + CF$. To dowodzi że, biorąc w wielokącie sferycznym wypukłym, zamiast jednego boku, przedłużenia dwóch przyległych, otrzymuje się wielokąt mający obwód większy. Owoż, tak działając dochodzi się aż do trójkąta sferycznego którego obwód, jako dowiedziono, jest mniejszy od okręgu koła wielkiego; więc tem bardziej obwód wielokąta sferycznego wypukłego jest mniejszy od okręgu koła wielkiego.

Twierdzenie XIV.

Najkrótszą drogą z jednego punktu do drugiego na sferze jest łuk mniejszy koła wielkiego który je łączy.

Między liniami które na powierzchni sferycznej poprowadzić można z jednego punktu A do drugiego B, jest oczywiście przy-

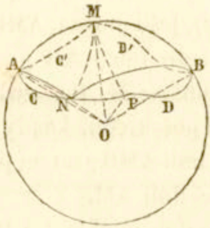


Fig. 1.

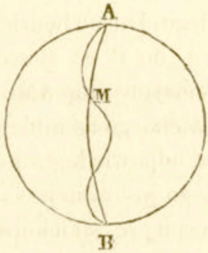


Fig. 2.

najmniej jedna od której niema krótszej. Przypuśćmy tedy że tą jedną z najkrótszych jest linia ACDB, różna od łuku AB koła wielkiego.

Na łuku AB weźmy punkt M nie należący do linii ACDB, i z punktu A jako bieguna, promieniem sferycznym AM, nakreślmy łuk koła który przetnie linię ACDB w punkcie N; po czem, poprowadźmy łuki wielkich kół AN i BN, Będzie, w trójkącie sferycznym ABN,

$$AB < AN + BN \quad \text{albo} \quad AM + BM < AN + BN.$$

Owoż, łuki AM i AN kół wielkich są równe (5), odejmując je od obydwóch stron powyższej nierówności, zostaje $BM < BN$; jeśli więc, z punktu B jako bieguna i promieniem sferycznym BM, nakreślimy koło, jego okrąg przetnie linię BDN w punkcie P między B i N.

Teraz uważajmy że, ponieważ łuki AN i AM kół wielkich są równe, i łuki BP, BM kół wielkich są także równe, można, obracając te łuki około ich biegunów A i B, przywieśdź punkta

N i P do M; tym sposobem linie ACN i BDP wezmą położenia AC'M i BD'M. Więc linia AC'MD'B, łącząca punkta A i B na sferze jest krótsza łukiem NP od linii ACNPDB którąśmy wzięli za jedną z najkrótszych. Ztąd wynika że wszystkie punkta łuku AB koła wielkiego muszą należeć do najkrótszej drogi z punktu A do B na sferze; więc temsamem łuk AB jest tą najkrótszą drogą.

Dowodzenie przypuszcza że łuk AB koła wielkiego jest mniejszy od półokręgu.

Uważajmy teraz przypadek w którym ten łuk jest półokręgiem koła wielkiego, i niech będzie (*fig.* 2), jeśli można, AMB najkrótsza droga od A do B na sferze. Przez średnicę AB poprowadźmy okrąg przecinający linię AMB w punkcie M. Ponieważ łuki AM i BM koła wielkiego są mniejsze od półokręgu, każdy z nich jest mniejszy od odpowiedającej części linii AMB; zatem półokrąg AB koła wielkiego jest mniejszy od całej linii AMB.

Ztąd wnosimy że, jakiekolwiek są dwa punkta A i B na sferze, najkrótszą drogą z jednego do drugiego jest mniejszy z dwóch łuków koła wielkiego które je łączą. Ale, gdy punkta A i B są *średnicowo* przeciwległe (to jest skrajnościami jednej średnicy), wtedy jest nieskończona liczba najkrótszych dróg od jednego z tych punktów do drugiego na sferze, i te najkrótsze drogi są półokręgami kół wielkich.

Określenie XIII. — Mniejszy z dwóch łuków koła wielkiego które łączą dwa punkta na sferze, jest odległością sferyczną *tych dwóch punktów.*

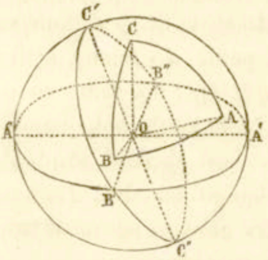
Powyższe twierdzenie pokazuje że łuki kół wielkich są tem na sferze czem linie proste na płaszczyźnie. To widać z resztą *a priori*; albowiem, jeśli promień sfery rośnie do nieskończoności, sfera staje się płaszczyzną, a łuki kół wielkich liniami prostemi.

Na mocy tej uwagi, *styczną sferyczną do krzywej sferycznej w danym punkcie* jest ostatnie położenie jakie bierze łuk koła wielkiego poprowadzony przez ten punkt i przez punkt sąsiedni, gdy ten drugi dążąc do pierwszego z nim się schodzi.

Podobnie, sieczną sferyczną, cięciwą sferyczną, prostopadłą sferyczną,... są łuki kół wielkich.

Linia sferyczna jest *wypukła* gdy leży cała na jednem półsferzu względem stycznej sferycznej każdego jej punktu. Okrąg koła wielkiego nie może spotykać krzywej sferycznej wypukłej w więcej niż dwóch punktach, i jego łuk mniejszy łączący dwa punkta przecięć jest *wewnątrz* tej krzywej.

Jeśli z wierzchołków trójkąta sferycznego jako biegunów nakreślimy okręgi kół wielkich, te okręgi podzielą powierzchnię sferyczną na *osiem* trójkątów sferycznych takich, że wierzchołki każdego z nich będą biegunami boków tego trójkąta. I tak, niech będzie trójkąt sferyczny ABC; z jego wierzchołków A, B, C jako biegunów, nakreślmy okręgi kół wielkich B′C′B″C″, C′A′C″A″, A′B′A″B″; te linie podzielą powierzchnię sferyczną na osiem trójkątów sferycznych, z których cztery są nad płasczyzną A′B′A″ a cztery inne pod nią; to jest trójkąty C′A′B′, C′B′A″, C′A″B″, C′B″A′, i C″A′B′, C″B′A″, C″A″B″, C″B″A′.



Wierzchołki tych ośmiu trójkątów są biegunami boków trójkąta ABC. Jakoż, uważajmy na przykład dwa trójkąty ABC i A′B′C′. Ponieważ wierzchołek B jest biegunem koła wielkiego A′C′, odległość sferyczna BA′ jest ćwiercianem; tak samo, ponieważ wierzchołek C jest biegunem koła wielkiego A′B′, odległość sferyczna CA′ jest także ćwiercianem; więc wierzchołek A′, odległy na ćwiercian od każdego z wierzchołków B i C, jest biegunem boku BC. Dowiedzie się podobnie że wierzchołek B′ jest biegunem boku AC, i wierzcołek C′ biegunem boku AB.

Z wyłuszczonych ośmiu trójkątów sferycznych najważniejszy jest trójkąt A′B′C′, który się tem odróżnia od innych że, względem trójkąta ABC, jego wierzchołek A′ jest z tej samej strony boku BC co wierzchołek A, i podobnie wierzchołki B′, C′ z tej samej strony odpowiedających boków AC, AB co wierzchołki B, C.

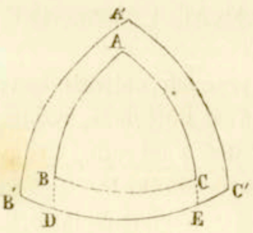
Nawzajem, wierzchołki trójkąta ABC są z tej samej strony odpowiedających boków trójkąta A′B′C′ co wierzchołki A′, B′, C′. Jakoż, uważajmy dwa wierzchołki C i C′. Ponieważ przypuszczamy że te dwa wierzchołki są oba z jednej strony boku AB, to jest oba na jednem półsferzu, wyznaczonem przez wielkie koło AB które ma za biegun wierzchołek C′, odległość sferyczna CC′ jest mniejsza od ćwiercianu. Więc wierzchołki C i C′ są oba z jednej strony okręgu koła wielkiego A′B′ która ma za biegun wierzchołek C. Dowiedzie się podobnie że wierzchołki A i B są z tej samej strony odpowiedających boków B′C′ i A′C′ co wierzchołki A′ i B′.

Dla tej cechującej własności, nazwano dwa trójkąty sferyczne ABC i A′B′C′ *trójkątami biegunowemi*, wyłączając inne które to imie zdawałoby się oznaczać.

Dwa trójściany OABC, OA′B′C′, odpowiedające trójkątom biegunowym ABC, A′B′C′, są spełniające. Albowiem, z przyczyny że punkt C′ jest biegunem łuku AB i odległość CC′ jest mniejsza od ćwiercianu, krawędź OC′ jest prostopadła do ściany AOB i skierowana w tę samą stronę co krawędź OC; tak samo co do krawędzi OB′ i OA′ (VI, 40). Ztąd wynika że każdy bok jednego z trójkątów biegunowych ABC, A′B′C′ jest spełnieniem kąta przeciwległego w drugim trójkącie. Dlatego też dwa trójkąty biegunowe są *trójkątami spełniającemi*. Ta główna własność trójkątów biegunowych stanowi następujące twierdzenie.

Twierdzenie XV.

Gdy dwa trójkąty ABC, A′B′C′ *są biegunowe, każdy kąt jednego z nich ma za miarę przewyżkę półokręgu koła wielkiego nad bokiem przeciwległym drugiego.*



Uważając naprzykład kąt A, przedłużmy jego ramiona aż do spotkań D i E z bokiem B′C′. Ponieważ wierzchołek A jest biegunem łuku B′C′, kąt A ma za miarę łuk DE (6). Owoż, łuki B′E i C′D są ćwiercianami, dlatego że B′ jest biegunem łuku AC i C′ biegunem łuku AB; zatem

$$DE = B'E + DC' - B'C' = \tfrac{1}{2} \text{ okrąg} - B'C'.$$

Dowiedzie się podobnie że każdy z dwóch innych kątów B i C trójkąta ABC ma za miarę półokrąg koła wielkiego zmniejszony bokiem przeciwległym w trójkącie A'B'C'.

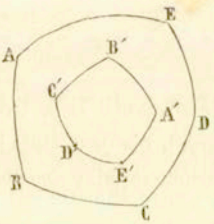
Trójkąty biegunowe ABC i A'B'C' otrzymują się jeden z drugiego jednakowem wykreśleniem; ztąd wynika że własność dowiedziona w jednym jest temsamem dowiedziona w drugim. Więc, nawzajem, każdy z kątów A', B', C', ma za miarę półokrąg zmniejszony bokiem przeciwległym w trójkącie ABC. Czego z resztą nie trudno wprost dowieśdź.

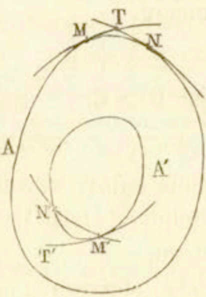
Powyższa własność trójkątu A'B'C' należy także do jego symetrycznego A''B''C''; ale nie należy do innych sześciu niby biegunowych. Co widoczne.

Uwaga. — Własności trójkątów biegunowych rozciągają się do wielokątów sferycznych i do linij krzywych sferycznych.

Jakoż, niech będzie wielokąt sferyczny wypukły ABCDE; jeśli z dwóch biegunów łuku AB koła wielkiego weźmiemy biegun będący na tem samem półsferzu co wielokąt ABCDE, i tak samo bieguny B', C', D', E' boków BC, CD, DE, EA, otrzymamy *wielokąt* A'B'C'D'E' *biegunowy* danego ABCDE. Powtarzając wiadome rozumowanie, dowiedzie się że, *nawzajem*, wielokąt ABCDE jest wielokątem biegunowym otrzymanego A'B'C'D'E'; nadto, *w dwóch wielokątach biegunowych, każdy kąt jednego z nich ma za miarę spełnienie boku mającego za biegun wierzchołek tego kąta w drugim.*

Niech będzie teraz AM krzywa sferyczna *wypukła*; jeśli, w jakimkolwiek





jej punkcie M, poprowadzimy styczną sferyc zną MT (Określ. XIII) i weźmiemy biegun M' tej stycznej, będący na tem samem półsferzu co krzywa AM. miejscem geometrycznem punktu M' będzie *krzywa biegunowa* A'M' krzywej AM. I *nawzajem*, krzywa AM jest *krzywą biegunową linii* A′M′. Bo, ponieważ punkt M′ jest biegunem stycznej sferycznej MT, jeśli punkt N′, sąsiedni punktu M′, jest biegunem stycznej sferycznej NT do krzywej AM, w punkcie N sąsiednim punktu M, wtedy punkt T jest biegunem siecznej sferycznej M′N′; a gdy punkt N schodzi się z M, punkt T schodzi się z nim także, i sieczna M′N′ staje się styczna sferyczną M′T′ w punkcie M′ do krzywej A′M′. Więc punkt M jest biegunem stycznej M′T′, i temsamem krzywa AM jest *krzywą biegunową* krzywej A¹M′.

Dwie figury sferyczne biegunowe są figurami spółwzględnemi, to jest na każdy punkt ſednej odpowieda łuk koła wielkiego w drugiej, i nawzajem; tak że, jeśli trzy punkta pierwszej są na okręgu koła wielkiego, trzy łuki kół wielkich odpowiedające w drugiej przechodzą przez jeden punkt, biegun tego okręgu. Tym sposobem każde twierdzenie jednej figury daje zaraz odpowiedające twierdzenie w drugiej.

Twierdzenie XVI.

W trójkącie sferycznym, 1° *Summa trzech kątów jest zawarta między* DWOMA i SZEŚCIOMA *kątami prostemi.* 2° *Każdy kąt powiększony dwoma prostemi jest większy od summy dwóch innych.*

Dowodzenie za pomocą trójkąta biegunowego, jako w trójścianie za pomocą trójścianu spełniającego.

Wniosek. — *Kąt zewnętrzny trójkąta sferycznego jest większy od różnicy dwóch kątów wewnętrznych nieprzyległych.* Albowiem, na mocy 2° mamy

$$C + 2 > A + B; \qquad \text{więc} \qquad 2p - A > B - C;$$

przypuszczając $B > C$.

Uwaga. — Powyższe twierdzenie dowodzi że w trójkącie sferycznym summa kątów wewnętrznych nie jest stała jako w trójkącie prostolinijnym, i tylko jest zawarta między *dwoma* i *sześcioma* kątami prostemi.

Zatem, trójkąt sferyczny, podobnie jako trójścian, może być *prostokątny*, *dwójprostokątny*, albo *trójprostokątny*; to jest, mieć jeden, dwa albo trzy kąty proste; i może nawet mieć wszystkie trzy kąty rozwarte.

W trójkącie dwójprostokątnym, boki kąta prostego są ćwiercianami a jego wierzchołek biegunem boku przeciwległego (5).

W trójkącie trójprostokątnym wszystkie boki są ćwiercianami.

RÓWNOŚĆ WIELOKĄTÓW SFERYCZNYCH.

TWIERDZENIE XVII.

Dwa trójkąty sferyczne, leżące na jednej sferze albo na dwóch sferach równych, *są równe* albo *symetryczne :*

1° *Gdy mają bok równy* PRZYLEGŁY *dwom kątom równym każdy każdemu.*

2° *Gdy mają kąt równy* ZAWARTY *między dwoma bokami równemi każdy każdemu.*

3° *Gdy mają trzy boki równe każdy każdemu.*

4° *Gdy mają trzy kąty równe każdy każdemu.*

Te twierdzenia są następstwem podobnych twierdzeń w trójścianach.

Ale można ich wprost dowieśdź. I tak, jeśli części równe dwóch trójkątów są podobnie ułożone, dowiedzie się paragrafów 1° i 2° przez przystawanie; można nawet przywieśdź paragraf 2° do 1° posługując się trójkątem biegunowym. Aby dowieśdź paragrafu 3°, najprościej jest, powtarzając rozumowanie geometryi płaskiej, okazać najpierwej twierdzenie :

Gdy dwa trójkąty sferyczne mają dwa boki równe każdy każdemu, ZAWIERAJĄCE *kąt nierówny, wtedy naprzeciw kąta mniejszego leży bok mniejszy;* I NAWZAJEM.

Po czem, dowodzenie paragrafu 3° nie przedstawia żadnej trudności. Co do paragrafu 4°, przywodzi się go do 3° za pomocą trójkąta biegunowego.

Jeśli części równe dwóch trójkątów są odwrotnie ułożone, trzeba wziąć trójkąt symetryczny jednego z tych trójkątów, aby mieć dwa trójkąty przystawalne; wtedy dwa zadane trójkąty będą symetryczne.

Takim samym sposobem dowodzi się następujących, ogólnych twierdzeń.

Twierdzenie XVIII.

Dwa wielokąty sferyczne mające n boków, na jednej sferze albo na dwóch sferach równych, są *równe* albo *symetryczne* :

1° *Gdy mają* $n-2$ *boki równe* PO SOBIE IDĄCE I PRZYLEGŁE $n-1$ *kątom równym każdy każdemu.*

2° *Gdy mają* $n-1$ *boków równych* ZAWIERAJĄCYCH $n-2$ *kątów równych każdy każdemu.*

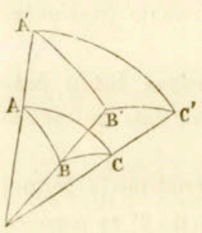
3° *Gdy są* RÓWNOBOCZNE *między sobą i mają* $n-3$ *kątów równych każdy każdemu.*

4° *Gdy są* RÓWNOKĄTNE *między sobą i mają* $n-3$ *boków równych każdy każdemu.*

Ostatni paragraf przywodzi się do poprzedzającego przez wielokąt biegunowy.

Wniosek. — Powyższe cztery twierdzenia mają odpowiedające w kątach wielościennych którym służą za dowód.

Trójkąty sferyczne podobne. — Dwa trójkąty sferyczne które, leżąc na dwóch sferach *nierównych*, mają boki proporcyonalne zawierające kąty równe, nazywają się *podobnemi*.



Kąt trójścienny OABC, mający wierzchołek we środku O dwóch sfer spółśrodkowych, wyznacza na ich powierzchniach dwa trójkąty podobne ABC, A'B'C'.

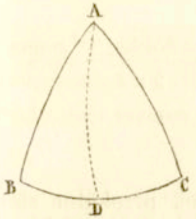
Bo te trójkąty są oczywiście równokątne między sobą; a ich boki, jako łuki podobne, są proporcyonalne do promieni OA, OA', i temsamem proporcyonalne między sobą; co daje

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'}.$$

Ztąd wynika że dwa trójkąty sferyczne *równokątne między sobą* są równe albo podobne, według jak należą do jednej sfery albo do dwóch sfer nierównych.

Twierdzenie XIX.

W trójkącie sferycznym równoramiennym ABC, *kąty* B i C *przeciwległe bokom równym są równe.* Inawzajem.



Połączmy wierzchołek A ze środkiem D podstawy BC łukiem koła wielkiego AD. Dwa trójkąty sferyczne ADB, ADC, mające trzy boki równe każdy każdemu, są symetryczne; więc kąty B i C są równe.

Nawzajem, *trójkąt sferyczny mający dwa kąty równe ma boki przeciwległe tym kątom równe, i jest równoramienny.*

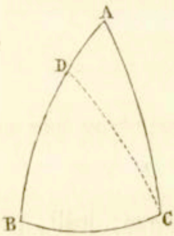
Dowodzenie jako w geometryi płaskiej, albo przez trójkąt biegunowy.

Wniosek. — Trójkąt sferyczny równoboczny jest zarazem równokątny, i nawzajem.

Uwaga. — Z symetryi dwóch trójkątów sferycznych ADB, ADC wynika że kąty przy D są *proste*, i kąty przy wierzchołku A są równe. *Więc, w trójkącie sferycznym równoramiennym, łuk koła wielkiego łączący wierzchołek ze środkiem podstawy jest prostopadły do tej podstawy, i dzieli kąt wierzchołkowy na dwie równe części.*

Twierdzenie XX.

W trójkącie sferycznym, na przeciw kąta mniejszego leży bok mniejszy; i nawzajem.



Jeśli w trójkącie sferycznym ABC, kąt B jest mniejszy od kąta ACB, bok AC jest także mniejszy od boku AB.

Jakoż, zróbmy kąt BCD równy kątowi B, trójkąt BCD będzie równoramienny; więc boki CD i BD są równe.

Owoż, w trójkącie ACD; $AC < AD + DC$; więc $AC < AB$.

Wzajemnica oczywista.

Uwaga. — Możnaby złączyć w jedno dwa powyższe twierdzenia, i dowieśdź sposobem użytym w *księdze* VI, *tw.* 46.

Twierdzenie XXI.

W wielokącie sferycznym WYPUKŁYM *mającym n boków*, 1° *summa kątów wewnętrznych jest zawarta między* $2(n-2)$ *i* $2n$ *kątami prostemi; 2° każdy kąt jest większy od różnicy między summą wszystkich innych i summą* $2(n-2)$ *kątów prostych.*

Co do 1°. Prowadząc przez jeden wierzchołek przekątne sferyczne do wszystkich innych, rozłożymy wielokąt sferyczny na $n-2$ trójkątów sferycznych. Owoż, w każdym z tych trójkątów summa kątów jest większa od dwóch kątów prostych; więc summa wszystkich kątów wewnętrznych wielokąta sferycznego wypukłego jest większa od $2(n-2)$ kątów prostych.

Co do 2°; ponieważ wielokąt sferyczny jest wypukły, każdy jego kąt jest mniejszy od *dwóch* kątów prostych; więc summa wszystkich n kątów wewnętrznych jest mniejsza od $2n$ kątów prostych.

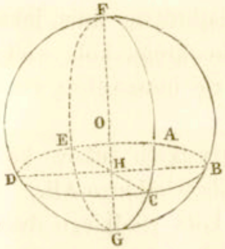
Wniosek. — *W wielokącie sferycznym* WYPUKŁYM, *summa kątów zewnętrznych jest mniejsza od* CZTERECH *kątów prostych.* Dowodzenie jako w wielokątach prostolinijnych.

Ztąd ważne wynika następstwo : *Żaden wielokąt sferyczny* WYPUKŁY *nie może mieć więcej niż* TRZY *kąty ostre.*

Twierdzenie XXII.

Przez punkt A *sfery można zawsze poprowadzić okrąg koła wielkiego prostopadły do danego okręgu* BCD.

Niech będzie jakikolwiek okrąg BCD na sferze; jeśli, przez punkt A i przez biegun G tego okręgu, poprowadzimy koło wiel-



kie, jego okrąg AFG będzie prostopadły do okręgu BCD w punktach C i E (5).

Ten okrąg AFG koła wielkiego, prostopadły do okręgu BCD, jest oczywiście jedyny, jeśli punkt A nie jest biegunem okręgu BCD.

UWAGA. — Z punktu danego na okręgu koła wielkiego, można zawsze wyprowadzić prostopadłę sferyczną, i tylko jedną. Ale, z punktu danego zewnątrz okręgu koła wielkiego, można spuścić na ten okrąg dwie prostopadłe sferyczne które są łukami jednego koła.

TWIERDZENIE XXIII.

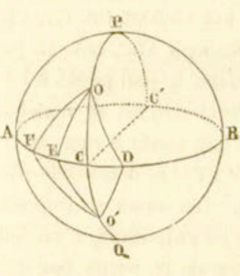
Jeśli z punktu O sfery spuścimy, na okrąg koła wielkiego AB, łuk OC, koła wielkiego prostopadły i *mniejszy od ćwiercianu*, i różne łuki kół wielkich pochyłe OD, OE, OF, wtedy

1° *Dwa łuki pochyłe* OD i OE, *równo oddalone od spodka* C *łuku prostopadłego, są równe.*

2° *Luk prostopadły* OC *jest mniejszy od wszelkiego łuku pochyłego* OD.

3° *Z dwóch łuków pochyłych* OD, OF *ten jest mniejszy który się mniej oddala od spodka łuku prostopadłego.*

I NAWZAJEM.



Na łuku prostopadłym OC weźmy długość CO′ = CO, i poprowadźmy łuki kół wielkich DO′, EO′, FO′, będzie:

Co do 1°, dwa trójkąty sferyczne COD i COE, mające kąty przy C proste, bok CO spólny i bok CD = CE z założenia, są symetryczne; więc łuki pochyłe OD i OE są równe.

Co się tyczy dwóch innych paragrafów i wzajemnic, dowodzenie jako w geometryi płaskiej; trzeba tylko co do 3° oprzeć się na wniosku *tw.* XII.

Wniosek I. — Łuk prostopadły OC jest najkrótszą linią, jaką na sferze poprowadzić można z punktu O do okręgu koła wielkiego AB; dlatego *długość łuku* OC *nazywa się* ODLEGŁOŚCIĄ SFERYCZNĄ *punktu* O *od tego okręgu*.

Zatem, łuk OPC′ jest najdłuższy ze wszystkich łuków kół wielkich które idą od punktu O do okręgu koła wielkiego AB.

Na sferze z jednego punktu do okręgu koła wielkiego dwa tylko łuki pochyłe równe poprowadzić można.

II.— *Miejscem geometrycznem punktów sfery, równo oddalonych od dwóch punktów jej powierzchni, jest łuk koła wielkiego prostopadły we środku odległości sferycznej tych dwóch punktów.*

Twierdzenie XXIV.

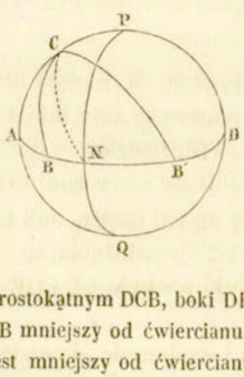
Dwa trójkąty sferyczne prostokątne, leżące na jednej sferze, albo na dwóch sferach równych, są *równe* albo *symetryczne* :

1° *Gdy mają przeciwprostokątnę równą i bok równy.*

2° *Gdy mają przeciwprostokątnę równą i kąt pochyły równy.*

Dowodzenie jako w geometryi płaskiej.

Uwaga. — 1° *W trójkącie sferycznym prostokątnym jest zawsze jeden bok mniejszy od ćwiercianu, albo wszystkie trzy.* Jakoż, niech będą trzy koła



wielkie ABD, ACD, PNQ prostopadłe między sobą; na ćwiercianie AP weźmy punkt C, i poprowadźmy łuki kół wielkich CB, CN, CB′. W trójkącie prostokątnym ABC, bok AC jest mniejszy od ćwiercianu i, jeśli puukt B leży między A i N, oba boki AB, CB są mniejsze od ćwiercianu; a jeśli punkt B staje się B′, wtedy oba boki AB′ i CB′ są oczywiście większe od ćwiercianu. Tak samo w trójkącie prostokątnym DCB, boki DB i DC są oba większe od ćwiercianu, a zaś bok CB mniejszy od ćwiercianu; ale jeśli punkt B staje się B′, wtedy bok DB′ jest mniejszy od ćwiercianu, a zaś boki DC i Cb′ są oba większe od ćwiercianu. Widzimy więc że w trójkącie sferycznym prostokątnym liczba boków większych od ćwiercianu jest *parzysta*.

2° *W trójkącie sferycznym prostokątnym każdy kąt pochyły jest tego samego gatunku co bok przeciwległy.* Jakoż, w trójkącie sferycznym prostokątnym ABC, kąt ACB i bok przeciwległy AB są oba mniejsze od 90°; a zaś w trójkącie sferycznym prostokątnym ACB′, kąt ACB′ i bok przeciwległy AB′ są oczywiście oba większe od 90°.

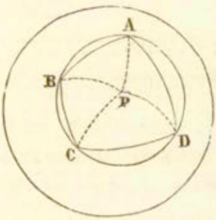
Twierdzenie XXV.

Łuk koła wielkiego dwójsieczny kąta sferycznego jest miejscem geometrycznem punktów równo oddalonych od jego ramion.

Dowodzenie jako w geometryi płaskiej. *Zob.* Ks. I, *tw.* 15.

Twierdzenie XXVI.

W czworoboku sferycznym wpisanym w koło, summa dwóch kątów przeciwległych równa się summie dwóch innych. I nawzajem.



Niech będzie P biegun małego koła w które jest wpisany czworobok sferyczny ABCD. Poprowadźmy łuki kół wielkich PA, PB, PC, PD, tworzymy cztery trójkąty sferyczne równoramienne. Więc będzie
Kąt PAB + PCB = B, kąt PAD + PCD = D;
zkąd, dodając, otrzymujemy

$$A + C = B + D.$$

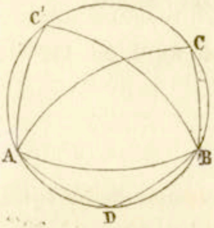
Nawzajem, *czworobok sferyczny* ABCD, *w którym summa dwóch kątów przeciwległych równa się summie dwóch innych, jest wpisalny.*

Jakoż, przez trzy wierzchołki A, B, C czworoboku, poprowadźmy okrąg koła i promienie sferyczne PA, PB, PC; połączmy punkta P i D łukiem koła wielkiego. Trójkąty równoramienne PBA, PBC dają

kąt PAB = PBA, PCB = PBC; zatem PAB + PCB = B.
Ale z założenia A + C = B + D, więc kąt PAD + PCD = ADC.

To równanie pokazuje że łuk PD nie może być ani mniejszy ani większy od promienia sferycznego PA; bo, w pierwszym razie byłby kąt $PAD < PDA$ i kąt $PCD < PDC$, ztąd $PAD + PCD < ADC$; a w drugim byłoby $PAD + PCD > ADC$, co niemożebne z przyczyny ostatniego równania. Więc $PD = PA$, to jest koło ABC przechodzi przez wierzchołek D.

Wniosek. — *Jeśli trójkąty sferyczne* ABC, ABC′,... *wpisane w jedno koło mają spólną podstawę, różnica summy kątów przy podstawie i kątem przy wierzchołku, to jest* $BAC + ABC - C$, *jest stała.*



Jakoż, połączmy punkt D łuku AB ze skrajnościami podstawy łukami kół wielkich DA, DB; będzie, w czworoboku sferycznym wpisanym ABCD,

$$BAD + BAC + ABD + ABC = C + D,$$

zkąd

$$BAC + ABC - C = D - BAD - ABD.$$

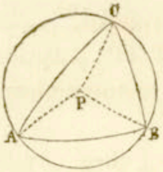
Tak samo w czworoboku ADBC′,

$$BAC' + ABC' - C' = D - BAD - ABD.$$

Więc $$BAC + ABC - C = BAC' - ABC' - C'.$$

Twierdzenie XXVII.

Miejscem geometrycznem wierzchołka C *trójkątów sferycznych* ABC, *mających spólną podstawę* AB, *i tę samą różnicę między summą kątów* $A + B$ *przy podstawie i kątem* C *przy wierzchołku, jest łuk koła małego które przechodzi przez skrajności podstawy.*



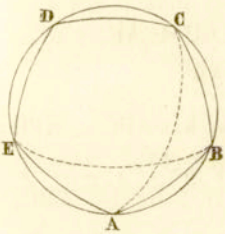
To twierdzenie jest wzajemnicą wniosku twierdzenia poprzedzającego; ale można go łatwo wprost dowieśdź. Niech będzie ABC trójkąt zadość czyniący zadaniu, i P biegun koła opisanego. Trójkąty PAB, PAC, PBC są równoramienne; zatem różnica

$$(A + B) - C = PAB + PBA = 2PAB.$$

To dowodzi że kąt PAB jest stały; więc trójkąt ABP równoramienny jest stały, i jego wierzchołek P także stały, a temsamem odległość PC = PA jest stała. Ztąd wynika że wierzchołek C jest na okręgu mającym punkt P za biegun i odległość PA za promień sferyczny.

Uwaga. — To twierdzenie ma pewne podobieństwo z Tw. 20, Ks. II; albowiem, gdy w trójkącie prostolinijnym dany jest kąt przy wierzchołku C, wtedy wiadoma jest summa A + B i temsamem różnica A + B — C.

Wielokąty sferyczne foremne. — *Istnieją wielokąty sferyczne foremne wszelkiej liczby boków*. Jakoż, wyobraźmy okrąg małego koła podzielony na *n* równych części, i przez punkta podziału poprowadzimy łuki kół wielkich, utworzymy wielokąt foremny mający *n* boków. Wszystkie boki są równe, jako cięciwy sferyczne podpasujące łuki równe jednego koła. Wszystkie kąty są także równe; bo, jeśli poprowadzimy łuki AC i BE kół wielkich, dwa trójkąty ABC, ABE będą równe; zatem kąt B=A.



Są także wielokąty sferyczne *gwiazdziste foremne;* etc.

Twirdzenie XXVIII.

Jeśli z punktu A sfery spuścimy na okrąg koła małego BCD łuki kół wielkich : normalne AB, AB′, i pochyłe AC, AD, AE, wtedy :

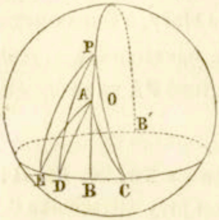
1° *Dwa łuki pochyłe* AC *i* AD, *równo oddalone od łuku normalnego są równe.*

2° *Luk pochyły* AC *jest większy od łuku normalnego mniejszego* AB, *ale mniejszy od łuku normalnego większego* AB′.

3° *Z dwóch łuków pochyłych* AC, AE *ten jest mniejszy który się mniej oddala od łuku normalnego mniejszego.*

I nawzajem.

Połączmy biegun P koła CBD z punktami C, D, E, łukami kół wielkich.



1° Ponieważ łuki BC i BD małego koła, są równe z założenia, łuki BC i BD wielkich kół są także równe. Zatem dwa trójkąty sferyczne PBC, PBD mające trzy boki równe, są symetryczne; co dowodzi że kąty APC i APD są równe. Ztąd wynika że dwa trójkąty sferyczne ACP, ABP są symetryczne; więc łuki pochyłe AC, AD są równe.

2° W trójkącie sferycznym ACP,

$$AC > CP - AP \quad \text{i} \quad AC < CP + AP;$$

więc $$AC > AB \quad \text{i} \quad AC < AB'.$$

3° Dwa trójkąty sferyczne ACP, AEP mają kąt APC < APE; bok AP spólny i bok PC = PE; więc AC < AE (17).

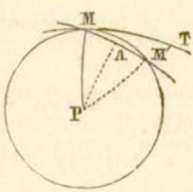
Wzajemnice widoczne.

Wniosek. — Na sferze, odległością punktu od okręgu jest łuk normalny mniejszy który łączy ten punkt z okręgiem; odległością dwóch łuków kół jest mniejszy łuk normalny spólny.

ZETKNIĘCIE KÓŁ NA SFERZE.

Twierdzenie XXIX.

Łuk wielkiego koła MT *styczny do małego koła* PM *jest prostopadły do promienia sferycznego w punkcie zetknięcia.*



Przez punkt M i punkt sąsiedni M′ poprowadźmy sieczną sferyczną MM′, i połączmy środek A cięciwy sferycznej MM′ z biegunem P małego koła, łukiem koła wielkiego PA. Łuk PA jest prostopadły do cięciwy MM′, jakkolwiek blizko punkt M′ dochodzi do M. Owoż, gdy punkt M′ schodzi się z M, punkt A schodzi się z nim także, i sieczna MM′ staje się styczną sferyczną MT ; więc ta ostatnia jest prostopadła do promienia sferycznego PM.

Wniosek. — Normalna sferyczna do małego koła przechodzi przez jego biegun.

Twierdzenie. — *W małem kole, średnica sferyczna przostopadła do cięciwy sferycznej dzieli tę cięciwę i oba jej łuki na dwie równe części.*

Dowodzenie jako w geometryi płaskiej.

Twierdzenie XXX.

1° *Gdy dwa małe koła przecinają się na sferze, łuk wielkiego koła który przechodzi przez ich bieguny jest prostopadły we środku cięciwy sferycznej spólnej.*

2° *Gdy dwa koła na sferze są styczne, punkt zetknięcia leży na łuku koła wielkiego który przechodzi przez ich bieguny, i w tym punkcie dwa koła mają styczną sferyczną spólną.*

Dowodzenia jako w geometryi płaskiej.

Opierając się na tych twierdzeniach, i oznaczając przez R i R′, promienie sferyczne dwóch kół małych, przez d *odległość sferyczną* ich biegunów, łatwo widzimy że :

Jeśli dwa koła są zewnętrzne względem siebie, będzie

$$d > \mathrm{R} + \mathrm{R}'.$$

Jeśli dwa koła są styczne zewnętrznie, będzie

$$d = \mathrm{R} + \mathrm{R}'.$$

Jeśli dwa koła przecinają się, będzie

$$\mathrm{R} + \mathrm{R}' > d > \mathrm{R} - \mathrm{R}',$$

przypuszczając $\mathrm{R} > \mathrm{R}'$.

Jeśli dwa koła są styczne wewnętrznie, będzie

$$d = \mathrm{R} - \mathrm{R}'.$$

Nakoniec, *jeśli jedno koło jest wewnątrz drugiego*, będzie

$$d < \mathrm{R} - \mathrm{R}'.$$

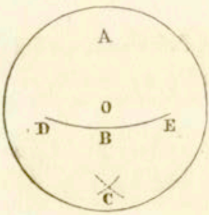
I nawzajem.

Ale przede wszystkiem trzeba żeby summa $d + R + R'$ była *mniejsza* od okręgu koła wielkiego; ten warunek jest przez się widoczny.

ZAGADNIENIA KSIĘGI ÓSMEJ.

Zagadnienie I.

Mając daną sferę znaleźć jej promień.

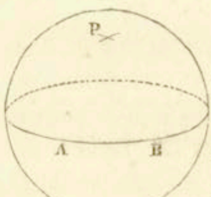


Z jakiegokolwiek punktu A sfery, jako bieguna, nakreślmy łuk koła DE, i weźmy na nim łuk BD = BE; potem, z punktów D i E jako biegunów, nakreślmy jednym promieniem dwa łuki kół przecinające się w punkcie C. Trzy punkta A, B, C leżą na okręgu wielkiego koła, bo płaszczyzna ABC tych trzech punktów równo oddalonych od D i E przechodzi przez środek O sfery (VI, 8).

Jeśli więc zbudujemy trójkąt mający za boki trzy cięciwy prostolinijne AB, AC, BC, promień koła opisanego na tym trójkącie będzie szukanym promieniem sfery.

Zagadnienie II.

Przez dwa punkta A, B *na sferze poprowadzić okrąg koła wielkiego.*



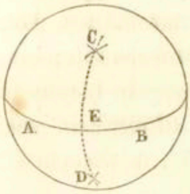
Z danych punktów A, B jako biegunów, otwartością cyrkla równą cięciwie ćwiercianu koła wielkiego, kreślimy dwa łuki kół przecinające się w punkcie P; po czem, z punktu P jako bieguna i tą samą otwartością cyrkla, kreślimy okrąg który jest oczywiście szukanym okręgiem wielkiego koła.

Uwaga I — Jeśli dane punkta A i B są skrajnościami jednej średnicy sfery, zagadnienie jest niewyznaczone; bo łuki kół wielkich, kreślone z punktów A i B jako biegunów, przypadają na okręgu koła wielkiego, którego każdy punkt jest biegunem jednego z wielkich kół mających średnicę AB.

II. — Wykreślenie powyższego zagadnienia daje sposób znalezienia bieguna łuku AB koła wielkiego.

Zagadnienie III.

Podzielić łuk AB *koła wielkiego na dwie równe części.*

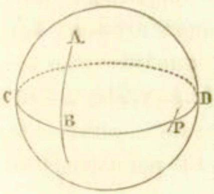


Z punktów A i B jako biegunów i tą samą otwartością cyrkla, nakreśl dwa łuki kół przecinające się w punktach C i D; po czem, przez punkta C i D, poprowadź łuk wielkiego koła który przejdzie przez środek E łuku AB.

Uwaga. — Łuk CD koła wielkiego jest prostopadły do łuku AB koła jakiegokolwiek (28); więc powyższe wykreślenie daje sposób prowadzenia łuku koła wielkiego, prostopadłego we środku łuku koła AB jakiegokolwiek, i podzielenia tego łuku na dwie równe części.

Zagadnienie IV.

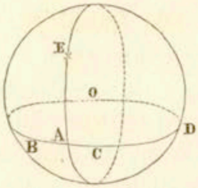
Przez punkt A *na sferze poprowadzić łuk koła wielkiego prosto padły do okręgu koła wielkiego* BC.

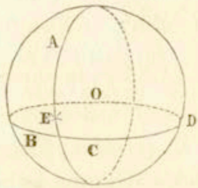


Z punktu A jako bieguna kreślimy łuk koła wielkiego aż do spotkania P z okręgiem danym BC; po czem, z punktu P jako bieguna kreślimy łuk koła wielkiego AB. Ten łuk jest prostopadły do danego okręgu koła wielkiego BC; bo ostatni przechodzi przez biegun pierwszego.

Zagadnienie V.

Przez punkt A *dany na sferze poprowadzić łuk koła wielkiego prostopadły do danego okręgu* BCD.





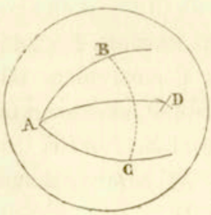
1° *Jeśli punkt* A *jest na danym okręgu* BCD, weź łuk AB = AC i z punktów B i C jako biegunów, tym samym promieniem, nakreśl dwa łuki koła przecinające się w punkcie E; po czem, poprowadź przez punkta A i E łuk koła wielkiego który będzie prostopadły do danego okręgu BCD.

2° *Jeśli punkt* A *jest zewnątrz okręgu* BCD, z punktu A jako bieguna, nakreśl łuk koła przecinający dany okrąg BCD w dwóch punktach C i D; z tych punktów jako biegunów jedną otwartością cyrkla, nakreśl dwa łuki koła przecinające się w punkcie E; nakoniec, przez punkta A i E poprowadź łuk koła wielkiego który będzie prostopadły do danego okręgu BCD.

Uwaga. — Jeśli dany punkt A jest biegunem okręgu BCD, zagadnienie zostaje niewyznaczone; bo wtedy wszelki łuk koła wielkiego przechodzący przez punkt A jest prostopadły do okręgu BCD.

Zagadnienie VI.

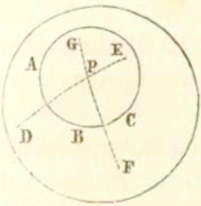
Wykreślić łuk dwójsieczny kąta sferycznego.



Z wierzchołka A kąta sferycznego BAC, nakreśl łuk koła przecinający ramiona kąta w punktach B i C. Z tych punktów jako biegunów i tą samą otwartością cyrkla, nakreśl dwa łuki kół przecinające się w punkcie D; po czem, przez punkta A i D poprowadź łuk wielkiego koła który będzie dwójsieczną sferyczną kąta BAC. Bo, dwa trójkąty sferyczne ADB i ADC, mające trzy boki równe każdy każdemu, są równe we wszystkich częściach; więc kąt DAB = DAC.

Zagadnienie VII.

Poprowadzić okrąg przez trzy dane punkta A, B, C *na sferze.*

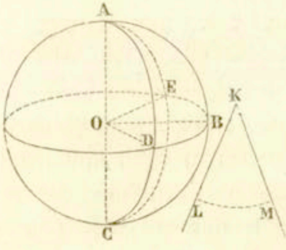


Biegun P żądanego koła, jako równo oddalony od trzech punktów A, B, C, jest na przecięciu łuków kół wielkich DE i FG, prostopadłych we środku łuków AB i BC (*zag*. 3, *uw*.). Wyznaczywszy biegun P, kreśli się żądane koło otwartością cyrkla równą odległości sferycznej PA.

Uwaga. — Takim samym sposobem znajduje się biegun danego łuku koła małego, biorąc tylko trzy przyzwoite punkta A, B, C na tym łuku.

Zagadnienie VIII.

Przez punkt A, *dany na łuku wielkiego koła* ABC, *poprowadzić łuł wielkiego koła któryby z nim czynił kąt równy danemu* K.

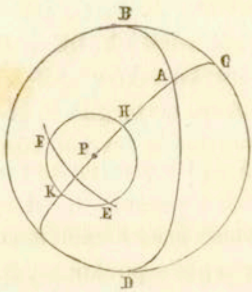


Z wierzchołka kąta danego K jako środka, promieniem sfery, nakreśl łuk koła LM. Z punktu A jako bieguna nakreśl wielkie koło BDE przecinające dany łuk ABC w punkcie B. Z punktu B jako bieguna, cięciwą łuku LM, nakreśl łuk koła spotykający okrąg BDE w dwóch punktach D i E. Nakoniec, poprowadź łuki wielkich kół AD i AE które rozwiążą zagadnienie (6).

Uwaga. — Jeśli dany kąt K jest sferyczny, wtedy rozwiązanie jako w geometryi płaskiej *Ks.* II. *zag.* 3.

Zagadnienie IX.

Przez dany punkt A *na sferze poprowadzić okrąg koła wielkiego któryby czynił z danym okręgiem koła wielkiego* BCD *kąt równy danemu.*



Niech będzie BAD okrąg koła wielkiego który rozwiązuje zagadnienie.

Aby nakreślić ten okrąg, wyznacz najpierwej biegun P danego koła wielkiego BCD; po czem, opisz okrąg EFH, miejsce biegunów okręgów kół wielkich które czynią z okręgiem BCD kąt równy danemu ostremu (6, wn.); nakoniec, z danego punktu A jako bieguna, nakreśl łuk koła wielkiego który przetnie, mówiąc ogólnie, okrąg EFH w dwóch punktach E i F. Każdy z tych punktów będzie oczywiście biegunem okręgu koła wielkiego które zadość czyni zagadnieniu.

Aby wiedzieć warunki możebności zagadnienia, poprowadźmy przez punkt A i przez biegun P, łuk koła wielkiego który przecina okrąg BCD w punkcie C, a okrąg EFH w punktach H i K. Owoż, łuk AC jest prostopadły do okręgu BCD, a łuki AH, AK prostopadłe do okręgu EFH; więc, aby zagadnienie było możebne, trzeba żeby łuk AH był mniejszy a łuk AK większy od ćwiercianu, który jest promieniem sferycznym łuku koła wielkiego nakreślonego z bieguna A. Pierwszemu warunkowi staje się zawsze zadość; aby dopełnić drugiego, trzeba żeby było

$$AP + PK > PA + AC \quad \text{albo} \quad PK > AC.$$

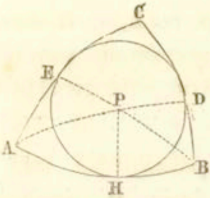
Więc możebność zagadnienia wymaga tylko żeby łuk PK, który mierzy dany kąt ostry, nie był mniejszy od najmniejszej odległości AC punktu A od okręgu BCD.

Zagadnienie ma dwa rozwiązania, albo jedno, albo nie ma żadnego, według jak łuk PK jest większy od odległości AC, albo jej równy, albo od niej mniejszy.

Uwaga. — To zagadnienie służy do zbudowania trójkąta sferycznego w którym wiadome są dwa kąty i bok przeciwległy jednemu z nich.

Zagadnienie X.

Wpisać małe koło w trójkąt sferyczny dany.



Poprowadź łuki AD i BE dwójsieczne kątów A i B; punkt ich przecięcia P, jako równo oddalony od trzech boków trójkąta (25), jest biegunem koła wpisanego które ma za promień sferyczny łuk PH prostopadły do boku AB. Więc koło, nakreślone z punktu P jako bieguna otwartością cyrkla równą cięciwie łuku PH, będzie styczne do trzech boków trójkąta sferycznego ABC, czyli będzie wpisane w ten trójkąt,

Uwaga. — Gdyby zadano zagadnienie: *nakreślić małe koło styczne do trzech wielkich kół*, ponieważ te koła, przecinając się po dwa, tworzą osiem trójkątów sferycznych, znalezionoby osiem kół stycznych wpisanych w te trójkąty.

Zagadnienie XI.

Na danej sferze wykreślić czworobok wpisalny którego dane są boki.

Dość zbudować na płaszczyznie czworobok wpisalny mający za boki cięciwy danych boków czworoboku sferycznego (III,27); po czem, wykreślić na sferze koło opisane na czworoboku płaskim, i oznaczyć na niem wierzchołki tego czworoboku; nakoniec, poprowadzić przez te wierzchołki łuki kół wielkich, które utworzą szukany czworobok sferyczny.

Zagadnienie jest zawsze możebne; byle tylko, ma się rozumieć, summa czterech danych łuków była mniejsza od okręgu koła wielkiego sfery, i największy łuk był mniejszy od summy trzech innych.

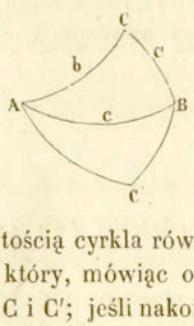
Zagadnienie XII.

Zbudować trójkąt sferyczny, mając dane trzy którekolwiek z jego części (boki i kąty).

Zagadnienie ma sześć przypadków które stanowią trzy dwojany; to jest mogą być dane: I. Trzy boki albo trzy kąty; II. dwa boki i kąt zawarty, albo jeden bok przyległy dwom kątom; III. dwa boki i kąt przeciwległy jednemu z boków, albo dwa kąty i bok przeciwległy jednemu z kątów.

Każdy dwojan zawiera dwa zagadnienia *spółwzględne*, takie że, rozwiązawszy jedno z nich, znajduje się drugie za pomocą trójkąta biegunowego. Mamy więc tylko trzy zagadnienia do rozwiązania.

I. *Dane są trzy boki a, b, c,*



Nakreślmy łuk koła wielkiego, na którym weźmy długość AB równą jednemu z danych boków np *c*.

Z punktu A jako bieguna otwartością cyrkla równą cięciwie łuku *b*, nakreślmy łuk koła, i z pnnktu B jako bieguna otwartością cyrkla równą cięciwie boku *a*, nakreślmy drugi łuk koła który, mówiąc ogólne, przetnie pierwszy w dwóch punktach C i C′; jeśli nakoniec połączymy AC, BC i AC′, BC′ łukami kół wielkich, dwa trójkąty symetryczne ABC i ABC′ rozwiążą zagadnienie.

Aby trójkąt był możebny, trzeba i dość jest żeby dwa nakreślone koła przecinały się; to wymaga, przypuszczając boki a, b, c wyrażone w stopniach i w porządku wielkości $a < b < c$, żeby było (30)

$$c < a + b; \quad c > b - a \quad \text{i} \quad a + b + c < 360^\circ.$$

Drugiemu warunkowi staje się zadość, na mocy założenia; *więc, aby można zbudować trójkąt sferyczny, mając dane trzy boki, trzeba i dość jest żeby największy z tych boków był mniejszy od summy dwóch innych, i żeby summa trzech boków była mniejsza od okręgu koła wielkiego*. Widzieliśmy już że te warunki są *konieczne* (12 i 13), niniejsze wykreślenie pokazuje że są *dostateczne*.

Zagadnienie, *Zbudować trójkąt sferyczny znając jego trzy kąty* A, B, C, rozwiązuje się za pomocą trójkąta biegnnowego, to jest: kreśli się najpierwej trójkąt sferyczny którego boki są wyrażone liczbami 2 — A, 2 — B, 2 — C (biorąc kąt prosty za jedność kątową); po czem, kreśląc trójkąt biegunowy tego trójkąta otrzymuje się trójkąt żądany.

To zagadnienie ma oczywiście dwa rozwiązania, dwa trójkąty symetryczne. Możebność zagadnienia wymaga żeby, przypuszczając $A < B < C$, było

$$2-A < 2-B + 2-C \quad \text{i} \quad 0 < 2-A + 2-B + 2-C < 4.$$

$$\text{albo} \quad A + 2 > B + C \quad \text{i} \quad 6 > A + B + C > 2.$$

Więc, aby można zbudować trójkąt sferyczny mający trzy dane kąty A, B, C, trzeba i dość jest żeby summa tych kątów była zawarta między *dwoma* i *sześcioma* kątami prostemi, i żeby najmniejszy kąt powiększony *dwoma* prostemi przewyższał summę dwóch innych kątów.

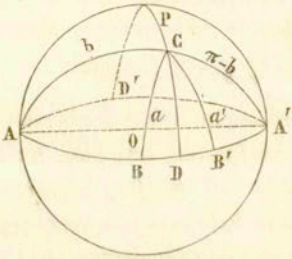
Można było przewidzieć warunki możebności tego i poprzedzającego zagadnienia, uważając odpowiedający trójścian i jego spełniający.

II. *Są dane dwa boki* a *i* b *i kąt zawarty* C, albo *jeden bok* a *przyległy dwom kątom* B i C.

Rozwiązanie jako w geometryi płaskiej.

III. *Są dane dwa boki* a *i* b *i kąt* A *przeciwległy bokowi* a.

Nakreślmy na sferze dwa łuki kół wielkich czyniące kąt równy danemu A (*zag.* VIII); weźmy ramie AC $= b$, i z punktu C jako bieguna otwartością cyrkla równą cięciwie boku a, nakreślmy łuk koła; jeśli ten łuk przecina w punkcie B drugie ramie kąta A, trójkąt ABC rozwiązuje dane zagadnienie.



Dyskussya. — Przedłużmy ramiona kąta A aż do ich spotkania A′, i z punktu C spuśćmy łuk prostopadły CD na ramie AB. Uważajmy że w trójkącie sferycznym prostokątnym ACD *łuk prostopadły* CD *jest mniejszy albo większy od ćwiercianu, według jak kąt przeciwległy* A *jest ostry albo rozwarty*. W pierwszym razie łuk CD jest *najmniejszym*, a w drugim ten łuk jest *największym* łukiem koła wielkiego jaki z punktu C do półokręgu ADA′ poprowadzić można (23, wn.).

Na tej uwadze opiera się cała dyskussya trzech głównych przypadków zagadnienia. Biorąc promień sfery za jedność linijną, będzie:

1° *Gdy bok* a *zawiera się między bokiem* b *i jego spełnieniem* $\pi - b$, *zagadnienie jest zawsze możebne jakikolwiek jest kąt* A, *i ma tylko jedno rozwiązanie*. Bo okrąg, nakreślony z punktu C jako bieguna promieniem sferycznym a, przecina jeden z łuków CA albo CA′ i przedłużenie drugiego; więc przecina półokrąg ADA′ w jednym punkcie B.

2° *Gdy bok* a *nie jest zawarty między* b *i* $\pi - b$, *i zarazem bok* a *z kątem przeciwległym* A *nie są oba jednakowego gatunku, zagadnienie jest niemożebne*. Bo, jeśli $a < b$ i $a < \pi - b$, musi być $a < \frac{1}{2}\pi$ i $A > 90°$, a temsamem $a <$ CD; jeśli zaś $a > b$ i $a > \pi - b$, musi być $a > \frac{1}{2}\pi$ i $A < 90°$, a temsamem $a >$ CD.

W pierwszym razie, łuk a mniejszy od prostopadłej sferycznej większej i mniejszy od łuków pochyłych CA i CA′, nie może mieć spodka na półokręgu ADA′; w drugim razie, ten łuk a, większy od prostopadłej sferycznej mniejszej i zarazem większy od dwóch pochyłych CA i CA′, nie może także mieć spodka na półokręgu ADA′. Więc zadany trójkąt sferyczny nie istnieje.

Jeśli $a = b$ albo $a = \pi - b$ i bok a z kątem A nie są oba jednakowego gatunku, dowiedzie się tak samo że trójkąt sferyczny jest niemożebny.

3° *Gdy bok* a *nie jest zawarty miedzy* b *i* π — b, *ale ten bok* a *z kątem* A *są oba jednakowego gatunku, zagadnienie ma dwa rozwiązania albo tylko jedno; albo nawet nie ma żadnego.*

Jakoż, przypuszczając $a < b$ i $a < \pi - b$, musi być $a < \frac{1}{2}\pi$ i $A < 90°$; przypuszczając zaś $a > b$ i $a > \pi - b$ musi być $a > \frac{1}{2}\pi$ i $A > 90°$.

W pierwszym razie CD jest prostopadłą sferyczną mniejszą, w drugim prostopadłą sferyczną większą. Więc, jeśli bok a, większy albo mniejszy od obydwóch łuków pochyłych CA i CA′, jest zawarty między mniejszą i większą prostopadłą sferyczną, okrąg nakreślony z punktu c jako bieguna promieniem sferycznym a, przecina półokrąg ADA′ w dwóch punktach B i B′, i trójkąty ACB i ACB′ rozwiązują zagadnienie. Ta okoliczność stanowi tak zwany *przypadek wątpliwy*.

Widzimy teraz łatwo że, jeśli bok a jest równy jednej z dwóch prostopadłych sferycznych, wtedy zagadnienie ma tylko jedno rozwiązanie, trójkąt prostokątny ACD. A jeśli bok a jest mniejszy albo większy od obydwóch prostopadłych sferycznych, żądany trójkąt jest oczywiście niemożebny.

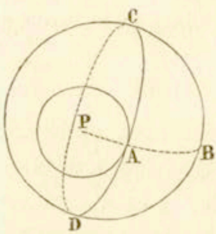
Gdy $a = b$ albo $a = \pi - b$, i zarazem bok a z kątem A są oba jednakowego gatunku, powyższe rozumowanie pokazuje że zagadnienie ma jedno tylko rozwiązanie.

Nakoniec, trzeba uważać szczególny przypadek $a = b = \frac{1}{2}\pi$, w którym, jeśli kąt A jest prosty, szukany trójkąt sferyczny jest dwójprostokątny, i *zagadnienie jest niewyznaczone*; a jeśli kąt A nie jest prosty, zagadnienie jest niemożebne.

Zagadnienie spółwzględne powyższego, to jest: *zbudować trójkąt sferyczny mając dwa kąty* A *i* B *i bok a przeciwległy jednemu z nich*, rozwiązuje się przez trójkąt biegunowy, albo wprost za pomocą zagadnienia IX.

Zagadnienie XIII.

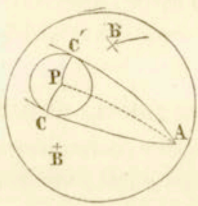
Przez dany punkt A *na sferze poprowadzić styczną sferyczną do małego koła* P.



1° Jeśli dany punkt A jest na okręgu danego koła P, dość paprowądzić, przez ten punkt, łuk koła wielkiego CAD prostopadły do promienia sferycznego PA. Łuk CAD będzie styczną sferyczuą szukaną (29).

2° Dany punkt A jest zewnątrz okręgu danego koła P.

Przypuśćmy zagadnienie rozwiązane, i niech będzie AC szukana



styczna sferyczna. Biegun B tej stycznej jest oczywiście na kierunku średnicy sferycznej koła P, prostopadłej w punkcie zetknięcia C, i na okręgn koła wielkiego które ma dany punkt A za biegun. Więc, z punktu A jako bieguna, kreślimy łuk koła wielkiego; a potem, z bieguna P, otwartością cyrkla równą cięciwie różnicy między ćwiercianem i promieniem sferycznym koła P, kreślimy drugi łuk koła który przecina pierwszy w dwóch punktach B i B'. Te punkta są biegunami żądanych stycznych sferycznych które się otrzymuje kreśląc z biegunów B i B' łuki kół wielkich.

Aby znaleźć warunki możebności zagadnienia, weźmy promień sfery za jedność linijną, i oznaczmy przez R promień sferyczny danego koła P. Uważając teraz że promienie sferyczne dwóch kół kreślonych wyrażają się przez $\frac{1}{2}\pi$ i $\frac{1}{2}\pi - \mathrm{R}$, widzimy że przecięcie się tych kół wymaga żeby było (30) :

$$\mathrm{AP} < \tfrac{1}{2}\pi + \tfrac{1}{2}\pi - \mathrm{R}, \mathrm{AP} > \tfrac{1}{2}\pi - (\tfrac{1}{2}\pi - \mathrm{R}), \mathrm{AP} + \tfrac{1}{2}\pi + \tfrac{1}{2}\pi - \mathrm{R} < 2\pi.$$

albo $$\mathrm{AP} + \mathrm{R} < \pi, \quad \mathrm{AP} > \mathrm{R}, \quad \mathrm{AP} - \mathrm{R} < \pi.$$

Ostatnia nierówność jest oczywista. Druga pokazuje że dany punkt A musi być zewnątrz danego koła, to jest zewnątrz krymki sferycznej PA; co także widoczne. Ale ten warunek, dostateczny w geometryi płaskiej, na sferze nie wystarcza, i trzeba jeszcze żeby pierwszemu warunkowi $\mathrm{AP} + \mathrm{R} < \pi$ stało się zadość, to jest trzeba żeby dany punkt A i dane koło P były oba na jednem półsferzu. Jeśli tym warunkom zadość uczyniono, dwie styczne sferyczne AC i AC′ rozwiążą zagadnienie.

Te dwie styczne zlewają się w jedną w przypadku szczególnym $\mathrm{AP} + \mathrm{R} = \pi$, albo $\mathrm{AP} = \mathrm{R}$.

Wniosek. — Dwa trójkąty sferyczne prostokątne APC, APC′, mające przeciwprostokątnę równą i bok równy, są symetryczne. Więc *dwie styczne sferyczne* AC i AC′, *poprowadzone z jednego punktu* A *do danego koła* P *na sferze, są równe*, i łuk AP jest dwójsieczną sferyczną kątów sferycznych CAC′ i CPC′.

Uwaga. — Powyższy wniosek prowadzi do twierdzenia :

W czworoboku sferycznym opisanym na kole summa dwóch boków przeciwległych równa się summie dwóch innych; I NAWZAJEM ; którego się dowodzi jako w geometryi płaskiej.

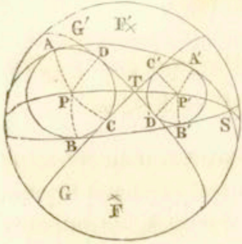
Zagadnienie XIV.

Poprowadzić styczną sferyczną spólną dwom małym kołom danym.

Przypuśćmy zagadnienie rozwiązane, i niech będzie :

1° Styczna sferyczna AA′ spólna dwom małym kołom P, P′, których promienie oznaczamy przez R, R′, przypuszczając

$R > R'$, Biegun F tej stycznej, leżący na kierunkach promieni sferycznych PA i PA′ które przechodzą przez punkta zetknięć A i A′, jest punktem przecięcia dwóch kół nakreślonych z biegunów P i P′ promieniami sferycznemi $\frac{1}{2}\pi - R$ i $\frac{1}{2}\pi - R'$. Wszystko więc przywodzi się do zbudowania trójkąta sferycznego którego trzy boki są wiadome. Możebność tego trójkąta wymaga żeby było



$$PP' < \pi - RR', \quad PP' > R - R' \quad \text{i} \quad PP' - RR' < \pi.$$

Ostatnia nierówność ma zawsze miejsce. Druga pokazuje że dwa dane koła na sferze nie powinny być wewnątrz jedno drugiego; ten warunek wystarcza w geometryi płaskiej, ale na sferze trzeba jeszcze dopełnić pierwszego $PP' + R + R' < \pi$, który wymaga żeby dwa dane koła były oba na jednem półsferzu.

Jeśli tym warunkom zadość uczyniono, dwie styczne sferyczne *zewnętrzne* AA′, i BB′ rozwiązują zagadnienie. Ale te styczne zlewają się w jedną w dwóch przypadkach szczególnych, to jest: gdy $PP' + R + R' = \pi$, albo gdy $PP' = R - R'$.

2° Niech będzie teraz DD′ styczna sferyczna *wewnętrzna* do kół P i P′. Biegun G tej stycznej, leżący na kierunkach promieni sferycznych PD i P′D′ które przechodzą przez punkta zetknięć D i D′, jest punktem przecięcia dwóch kół nakreślonych z biegunów P i P′ promieniami sferycznemi $\frac{1}{2}\pi R$ i $\frac{1}{2}\pi + R'$. Więc cała rzecz przywodzi się do zbudowania trójkąta sferycznego którego trzy boki są wiadome. Możebność tego trójkąta wymaga żeby było

$$PP' < \pi - R + R', \quad PP' > R + R' \quad \text{i} \quad PP' - R + R' < \pi.$$

Nierówność $PP' > R + R'$ pokazuje że dwa dane koła P i P′ muszą być *zewnątrz* jedno drugiego. Ten warunek jest dostateczny w geometryi płaskiej, ale tu nie wystarcza; i trzeba jeszcze, wedle pierwszej i ostatniej nierówności, żeby dane koła zadość czyniły warunkowi $PP' + (R - R') < \pi$.

Jeśli tych warunków dopełniono, dwie styczne sferyczne wewnętrzne DD′ i EE′ rozwiązują zagadnienie. Te styczne zlewają się w jedną w szczególnych przypadkach :

$$PP' = R + R', \quad PP' + R - R' = \pi \text{ albo } PP' - R + R' = \pi.$$

Uważając że koła, kreślone dla wyznaczenia biegunów stycznych sferycznych, mogą się przecinać w dwóch punktach, albo być styczne, albo się nie spotykać, widzimy łatwo że zagadnienie ma ogólnie cztery rozwiązania, albo tylko trzy, dwa, jedno, albo nawet nie ma żadnego.

Uwaga. — Styczne sferyczne zewnętrzne AA′ i BB′ są symetryczne względem linii biegunów PP′ dwóch kół danych, i spotykają się na niej w dwóch punktach zewnątrz tych kół. Punkt spotkania S tych dwóch stycznych, który jest bliższy koła mniejszego, nazywa się *środkiem podobieństwa prostego kół P i P′*. Styczne sferyczme wewnętrzne CC′ i DD′ są także symetryczne względem linii biegunów PP″, i spotykają się na tej linii między danemi kołami i poza niemi. Punkt spotkania T tych stycznych, leżący między kołami P i P′, nazywa się ich *środkiem podobieństwa odwrotnego*. O tych dwóch środkach podobieństwa później mówić będziemy.

ZADANIA.

913. — Dwie figury równe leżą na jednej sferze. Dowieśdź że można sprowadzić jedną z figur na drugą, obracając ją około pewnego punktu powierzchni sferycznej.

914. — Przez dany punkt poprowadzić płaszczyznę styczną do dwóch sfer danych.

915. — Poprowadzić płaszczyznę styczną do trzech sfer.

916. — Nakreślić na sferze, promieniem sferycznym danym koło styczne do dwóch kół danych.

917. — Nakreślić na sferze koło przechodzące przez dwa dane punkta i styczne do koła danego.

918. — Nakreślić na sferze koło przechodzące przez punkt dany i styczne do dwóch kół wielkich danych.

919. — Biegun koła opisanego na trójkącie sferycznym jest wewnątrz albo zewnątrz tego trójkąta, albo pada na największym boku, według jak największy z kątów jest mniejszy albo większy od summy dwóch innych, albo jej równy.

920. — Trzy płaszczyzny prostopadłe między sobą, poprowadzone przez punkt *wewnętrzy* sfery, wyznaczają na tej sferze trzy koła których summa powierzchni jest stała.

921. — Poprowadzić przez linię prostą płaszczyznę któraby podzieliła dwie sfery tak, żeby promienie przecięć były proporcyonalne do promieni tych sfer.

922. — Poprowadzić przez punkt płaszczyznę któraby podzieliła trzy sfery tak, żeby promienie przecięć były proporcyonalne do promieni tych sfer.

923. — Summa kwadratów odległości wierzchołka kąta trójściennego od sześciu punktów, w których trzy krawędzie tego kąta spotykają powierzchnię sfery, jest stała.

924. — Wykreślić sferę styczną do czterech krawędzi czworościanu.

925. — Znaleźć punkt taki żeby widziano z niego trzy dane sfery pod kątem równym.

926. — Znaleźć miejsce punktów w przestrzeni równo oświeconych przez dwa punkta światłe.

927 — Znaleźć miejsce punktów przestrzeni które są na odległość a od punktu A i na odległość b od punktu B.

928. — Miejsce punktów z których widać jedną sferę, albo dwie sfery, albo trzy sfery dane, pod kątem danym.

929. — Miejsce punktów których summa kwadratów z odległości od dwóch danych punktów jest stała.

930. — Mając dane trzy punkta, znaleźć miejsce punktów których summa odległości jest stała względem pierwszego i drugiego punktu, i zarazem względem pierwszego i trzeciego.

931. — Miejsce punktów z których widać daną prostę pod kątem danym, *albo* dwie dane proste wychodzące z jednego punktu, pod danemi kątami.

932. — Miejsce środków sfer które przecinają wedle wielkich kół *dwie sfery* albo *trzy sfery* dane.

933. — Miejsce środka przecięć danej sfery przez płaszczyzny przechodzące przez punkt dany, *albo* przez prostę daną.

934. — Miejsce punktów w przestrzeni których odległości od dwóch punktów danych są w stosunku stałym.

935. — Miejsce rzutów punktu, zewnętrznego względem płaszczyzny, na liniach prostych przechodzących na tej płaszczyznie przez jeden punkt.

936. — Wystawić czworościan, mając podstawę i odległości jej wierzchołków od trzech ścian bocznych.

937. — Wykreślić trójkąt sferyczny, znając kąt, bok mu przyległy i summę, *albo* różnicę, dwóch innych boków.

938. — Wykreślić trójkąt sferyczny, znając kąt, bok przyległy i summę, *albo* różnicę dwóch innych boków, *albo* kątów.

939. — Wykreślić trójkąt sferyczny. znając podstawę, wysokość i kąt.

940. — Wykreślić trójkąt sferyczny, znając dwa boki i wysokość odpowiedającą jednemu z nich.

941. — Wykreślić trójkąt sferyczny, znając bok, kąt i obwód.

942. — Wykreślić trójkąt sferyczny, znając obwód i dwa kąty.

943. — Wykreślić trójkąt sferyczny, znając obwód, kąt i wysokość.

944. — Wykreślić trójkąt sferyczny, znając bok, kąt, i koło wpisane, *albo* zawpisane, względem tego kąta.

945. — Wykreślić trójkąt sferyczny, znając kąt i promienie dwóch kół, wpisanego i zawpisanega względem tego kąta.

946. — Wykreślić trójkąt sferyczny, znając bok i promienie dwóch kół, wpisanego i zawpisanego, stycznych do tego boku.

947. — Wykreślić trójkąt sferyczny, znając bok, kąt przeciwległy i różnicę promieni dwóch kol wpisanego i zawpisanego względem tego kąta.

948. — W czworoboku sferycznym mającym wszystkie boki przeciwległe równe, kąty przeciwległe są równe, i przekątne przecinają się na połowy.

Nawzajem, czworobok sferyczny ma wszystkie boki przeciwległe równe jeśli ma wszystkie kąty przeciwległe równe, *albo* jeśli jego przekątne przecinają się na połowy.

949. — W czworoboku sferycznym równokątnym boki przeciwległe są równe i przekątne są równe; a cięciwy boków tworzą prostokąt.

40

950. — W ukośniku sferycznym, przekątne przecinają się na połowy pod kątem prostym, i są dwójsiecznemi kątów przeciwległych.

951. — W kwadracie sferycznym, przekątne przecinają się na połowy pod kątem prostym, są równe, i są dwójsiecznemi kątów przeciwległych.

952. — Linia przecięć dwóch kół na sferze jest miejscem z których poprowadzone styczne do tych kół są równe.

953. — Rozdzielić powierzchnię sfery na wielokąty sferyczne foremne i równe.

954. — Przez daną prostę poprowadzić do danej sfery płaszczyznę sieczną, któraby wyznaczyła przecięcie mające promień równy danemu.

955. — Gdy się trzy sfery przecinają po dwie, płaszczyzny trzech kół przecięć spotykają się wedle linii prostej, prostopadłej do płaszczyzny wyznaczonej przez trzy środki tych sfer.

956. — Jeśli z punktu wziętego na sferze jako bieguna, nakreślono koło promieniem sferycznym równym jednej trzeciej *albo* jednej piątej ćwiercianu, wtedy promień koła otrzymanego jest połową promienia sfery, albo większym odcinkiem tego promienia podzielonego w stosunku średnim i skrajnym.

957. — Jeśli z jednego punktu poprowadzono różne sieczne do sfery, wieloczyn odległości tego punktu od dwóch punktów przecięć każdej siecznej ze sferą jest stały.

958. — Jeśli środki dwóch kół są rzutami jednego punktu przestrzeni, i jeśli styczne poprowadzone z jednego punktu przecięcia się ich płaszczyzn są równe, te dwa koła należą do jednej sfery.

959. — Summa kwadratów z rzutów trzech promieni sfery, prostopadłych między sobą, na jakiejkolwiek płaszczyznie, jest równa podwójnemu kwadratowi promienia sfery.

960. — Summa kwadratów ze trzech cięciw, które dana sfera przejmuje na trzech prostych prostokątnych i przechodzących przez jeden punkt, jest stała.

961. — Jeśli w trójkąt prostokątny, którego każdy kąt ma 120°, wpisano trzy małe koła tak, żeby były styczne między sobą i styczne do boków tego trójkąta, wtedy ich promień sferyczny ma 30°, i ich środki są wierzchołkami trójkąta biegunowego który odpowieda danemu.

962. — Jeśli w trójkącie sferycznym ABC punkt P jest biegunem koła wielkiigo DE przechodzącego przez środki D i E boków AB i AC, kąt BPC jest dwa razy większy od kąta DPE.

KSIĘGA DZIEWIĄTA

MIARA TRZECH CIAŁ OKRĄGŁYCH, WIELOŚCIANY FOREMNE.

Określenie I. — Graniaston jest *wpisany* w walec gdy jego podstawy są wpisane w podstawy walca. Nawzajem, walec jest wtedy *opisany* na graniastonie.

Graniaston jest *opisany* na walcu gdy jego podstawy są opisane na podstawach walca. Nawzajem, walec jest wtedy *wpisany* w graniaston.

II. — Piramida jest *wpisana* w stożek gdy ma z nim spólny wierzchołek, i jej podstawa jest wpisana w podstawę stożka. Nawzajem, stożek jest wtedy *opisany* na piramidzie.

Piramida jest *opisana* na stożku gdy ma z nim spólny wierzchołek, i jej podstawa jest opisana na podstawie stożka. Nawzajem, stożek jest wtedy *wpisany* w piramidę.

III. — *Piramidą sferyczną* OABCD (*zob.* figurę na stronicy 578) nazywa się część objętości sfery, zawarta między kątem wielościennym, mającym wierzchołek w jej środku ,i wielokątem sferycznym który jest *podstawą* tej piramidy.

Dwie piramidy sferyczne są symetryczne gdy mają za podstawy wielokąty sferyczne symetryczne.

Dwie piramidy sferyczne są podobne gdy mają podstawy podobne.

IV. — Dwa walce *obrotowe*, albo dwa stożki *obrotowe*, są *podobne* gdy ich wysokości są proporcyonalne do promieni podstaw.

V. — Część BDELKH stożka (*zob.* figurę na stronicy 565) zawarta między jego podstawą BDB′E i przecięciem HKL, wyznaczonem przez jakąkolwiek płaszczyznę która spotyka wszystkie krawędzie, nazywa się *pniem stożka*.

To przecięcie i podstawa stożka stanowią podstawy jego pnia. Gdy podstawy pnia stożka są równoległe ich *odległość* jest *wysokością* tego pnia.

Pień stożka kołowego prostego o podstawach równoległych może być uważany jako figura obrotowa, utworzona obrotem trapezu ABLO, około boku AO wziętego za oś. Ta oś AO jest *wysokością* a bok BL, tworzący powierzchnię, *bokiem* albo *apotemą* tego pnia.

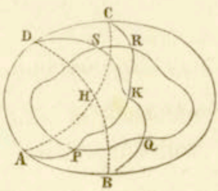
VI. — Powierzchnia krzywa nazywa się *wypukłą*, jeśli leży cała z jednej strony każdej płaszczyzny z którą ma jeden tylko punkt spólny albo jedną linię prostą spólną. Ta płaszczyzna jest płaszczyzną styczną do powierzchni (*). Powierzchnie sfery, walca kołowego, stożka kołowego, parabolicznego, etc. są wypukłe.

MIARA POWIERZCHNI.

Twierdzenie I.

Powierzchnia WYPUKŁA HABCD *jest mniejsza od wszelkiej powierzchni otaczającej* KABCD *która ma z nią ten sam obwód.*

Uważamy za oczywiste że *płaszczyzna jest mniejsza od wszelkiej powierzchni mającej z nią spólny obwód.*



Niech będzie powierzchnia wypukła HABCD, otoczona z jednej strony powierzchnią jakąkolwiek KABCD która ma z nią spólny obwód ABCD. Między powierzchniami które otaczają powierzchnię wypukłą i mają z nią spólny obwód, jest przynajmniej jedna od której niema już mniejszej. Przypuśćmy tedy jeśli można, że tą

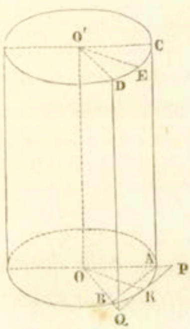
(*) Dla ścisłości określenia, czytelnik zechce zobaczyć twierdzenie I, księgi X.

jedną z najmniejszych jest powierzchnia otaczająca KABCD, i poprowadźmy płaszczyznę styczną do powierzchni wypukłej, w jej punkcie H który nie należy do powierzchni otaczającej. Ta płaszczyzna odcina od powierzchni otaczającej część KPQRS oczywiście większą niż powierzchnia płaska HPQRS. Więc, tym sposobem, otrzymanoby powierzchnię otaczającą HPQRSABCD mniejszą od otaczającej KABCD która ma z nią spólny obwód ABCD; co przeciw założeniu. Ztąd wynika że, między powierzchniami otaczającemi, niema żadnej któraby była jedną z najmniejszych. Więc powierzchnia wypukła jest mniejsza od wszelkiej powierzchni otaczającej która ma z nią spólny obwód.

Wniosek. — Powierzchnia wypukła jest mniejsza od wszelkiej powierzchni która ją ze wszech stron otacza.

Twierdzenie II.

Powierzchnia boczna walca obrotowego *ma za miarę wieloczyn z okręgu podstawy przez wysokość.*



Wyobraźmy dwa graniastony foremne równej liczby ścian, jeden wpisany w walec a drugi na nim opisany. Powierzchnia cała walca, otaczająca zewsząd powierzchnię wypukłą graniastonu wpisanego, jest od niej większa; ale powierzchnia cała walca, jako wypukła i zewsząd otoczona powierzchnią całą graniastonu opisanego, jest mniejsza od tej ostatniej. Zatem, nazywając S powierzchnię boczną walca obrotowego, H jego wysokość, R promień podstawy, b i B podstawy dwóch graniastonów wpisanego i opisanego, p i P obwody tych podstaw; będzie (VII, 10, wn.)

$$pH + 2b < S + 2\pi R^2 < P.H + 2B.$$

Owoż, wiemy że różnica liczb które mierzą całe powierzchnie dwóch graniastonów, to jest $(P - p)H + 2(B - b)$, może stać się mniejszą od wszelkiej ilości naznaczonej; więc powierzchnia cała walca jest spólną granicą całych powierzchni tych graniastonów; co daje

$$S + 2\pi R^2 = gr.\ (pH + 2b) = 2\pi RH + 2\pi R^2.$$

Więc
$$S = 2\pi RH.$$

WNIOSEK I. — Oznaczając przez T powierzchnię całą walca obrotowego, będzie

$$T = 2\pi RH + 2\pi R^2 = 2\pi R\,(H + R).$$

II. — Niech będą S i S′ powierzchnie boczne, T i T′ powierzchnie całe, R i R′ promienie, H i H′ wysokości dwóch walców obrotowych podobnych; mamy

$$\frac{S}{S'} = \frac{R.H}{R'.H'} = \frac{R}{R'}.\frac{H}{H'},$$

i
$$\frac{T}{T'} = \frac{R\,(H+R)}{R'\,(H'+R')} = \frac{R}{R'}.\frac{H+R}{H'+R'}.$$

Owoż, podobieństwo tych dwóch walców daje

$$\frac{R}{R'} = \frac{H}{H'} = \frac{H+R}{H'+R'};$$

Więc
$$\frac{S}{S'} = \frac{R^2}{R'^2} = \frac{H^2}{H'^2} = \frac{T}{T'}.$$

Co dowodzi że *powierzchnie boczne i powierzchnie całe dwóch walców obrotowych podobnych mają się jako kwadraty z promieni podstaw, albo jako kwadraty z wysokości.*

III. — Opierając się na twierdzeniu : *Powierzchnia boczna graniastonu równa się wieloczynowi z obwodu przecięcia prostego przez krawędź boczną* (VII, 7), i modyfikując dane wyżej rozumowanie, dowodzi się łatwo, że

Powierzchnia boczna walca jakiegokolwiek ma za miarę wieloczyn z obwodu przecięcia prostego przez krawędź.

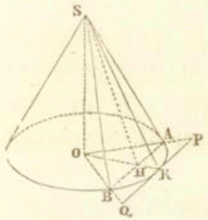
Uwaga. — Płaszczyzna sieczna ABD przechodząca przez dwie krawędzie walca oddziela część jego powierzchni ABKCDE którą nazywają *wrzecieniem walcowem*. Oznaczając przez s powierzchnię tego wrzecienia, będzie

$$\frac{s}{\mathrm{S}} = \frac{łuk\ \mathrm{AB}}{2\pi.\mathrm{OK}} = \frac{łuk\ \mathrm{AB.H}}{2\pi\mathrm{R.H}}; \quad \text{zkąd} \quad s = łuk\ \mathrm{AB.H}.$$

Więc *powierzchnia wrzecienia walcowego obrotowego ma za miarę wieloczyn z łuku podstawy przez wysokość.*

Twierdzenie III.

Powierzchnia boczna stożka obrotowego, *ma za miarę wieloczyn z okręgu podstawy przez połowę boku.*



Wyobraźmy dwie piramidy foremne równej liczby boków, jedną opisaną na stożku a drugą wpisaną. Powierzchnia cała stożka jest oczywiście zawarta między powierzchniami całemi tych dwóch piramid; zatem będzie (VII, 16).

$$\tfrac{1}{2}p.\mathrm{SH} + b < \mathrm{S} + \pi\mathrm{R}^2 < \tfrac{1}{2}\mathrm{P.SK} + \mathrm{B}.$$

Owoż, różnica $\frac{1}{2}(\mathrm{P.SK} - p.\mathrm{SH}) + \mathrm{B} - b$ dwóch liczb które mierzą powierzchnie całe piramid może stać się mniejszą od wszelkiej ilości naznaczonej, ponieważ różnice $\mathrm{P} - p$, $\mathrm{SK} - \mathrm{SH}$ czynników dwóch wieloczynów i różnica podstaw $\mathrm{B} - b$ mają za granicę zero. Więc powierzchnia cała stożka jest spólną granicą całych powierzchni dwóch piramid, wpisanej i opisanej, a temsamem jej miara jest granicą miary tych powierzchni, to jest

$$\mathrm{S} + \pi\mathrm{R}^2 = gra.\ (\tfrac{1}{2}p.\mathrm{SH} + b) = 2\pi\,\mathrm{R}.\tfrac{1}{2}\mathrm{SK} + \pi\mathrm{R}^2.$$

Ztąd, nazywając a bok SK, otrzymujemy

$$\mathrm{S} = \pi\mathrm{R}a.$$

Wniosek. — Nazywając T powierzchnię całą stożka *obrotowego*, mamy

$$\mathrm{T} = \pi\mathrm{R}a + \pi\mathrm{R}^2 = \pi\mathrm{R}\,(a + \mathrm{R}).$$

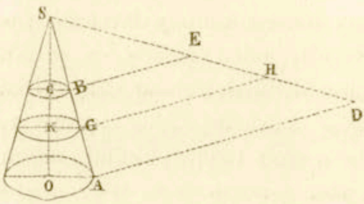
II. — Dowiedzie się łatwo, wiadomem już rozumowaniem, że

Powierzchnie boczne i powierzchnie całe dwóch stożków OBROTOWYCH *podobnych mają się jako kwadraty z promieni albo z boków albo z wysokości.*

UWAGA. — *Powierzchnia wrzeciena* SAKB STOŻKA OBROTOWEGO *ma za miarę wieloczyn z łnku podstawy przez połowę krawędzi.*

TWIERDZENIE IV.

Powierzchnia pnia stożka OBROTOWEGO, *o podstawach równoległych, ma za miarę wieloczyn z połowy summy okręgów podstaw przez bok.*



Ze skrajności A krawędzi SA wyprowadźmy prostopadłę AD równą okręgowi podstawy stożka. Połączmy SD i poprowadźmy prostę BE równoległą do AD.

Trójkąty podobne SAD i SBE, SAO i SBC dają

$$\frac{AD}{BE}=\frac{SA}{SB}, \quad i \quad \frac{AO}{BC}=\frac{SA}{SB}; \qquad ztąd \qquad \frac{AD}{BE}=\frac{AO}{BC}=\frac{2\pi OA}{2\pi CB}.$$

Ale z wykreślenia $AD = 2\pi OA$, więc $BE = 2\pi CB$.

Uważajmy teraz że powierzchnia boczna stożka obrotowego SOA, mając za miarę *ok*. OA . $\frac{1}{2}$SA, równa się powierzchni trójkąta SAD którego miarą jest AD . $\frac{1}{2}$SA. Dla tej samej przyczyny, powierzchnia boczna stożka SCB równa się powierzchni trójkąta SBE. Zatem powierzchnia boczna pnia tego stożka jest równowarta trapezowi ADEB. Owoż, trapez ma za miarę wieloczyn z połowy summy podstaw przez wysokość, to jest $\frac{1}{2}$ (AD + BE).AB; więc, oznaczając przez S liczbę która mierzy powierzchnię boczną pnia stożka obrotowego, będzie

$$S = \tfrac{1}{2}\,(ok.\ OA + ok.\ CB)\ .\ AB.$$

A jeśli nazwiemy R i r promienie dwóch podstaw, a *apotemę* czyli bok tego pnia, będziemy mieli formułę dogodną do rachunku,

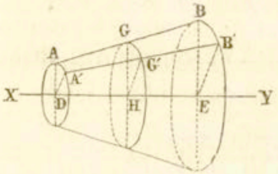
$$S = \pi (R + r) a.$$

Wniosek. — Jeśli, przez środek G boku AB, poprowadzimy prostę GH równoległą do AD, i płaszczyznę GK równoległą do podstaw pnia stożka obrotowego, prosta GH będzie równa okręgowi KG. A że powierzchnia trapezu ABED równa się wieloczynowi GH . AB; więc *powierzchnia boczna pnia stożka obrotowego ma za miarę wieloczyn z boku przez okrąg równoleżnika równo oddalonego od podstaw*, to jest

$$S = 2\pi KG . AB.$$

Uwaga I. — Z tego co poprzedza wynika ogólniejsze twierdzenie.

Powierzchnia utworzona obrotem linii prostej, około osi leżącej na jej płaszczyznie, ma za miarę wieloczyn z linii rodzącej przez łuk nakreślony jej środkiem.



Jakoż, ze środka G linii rodzącej AB spuśćmy prostopadłę GH na oś XY. Oznaczając przez S całą powierzchnię obrotową, przez S′ powierzchnię ABB′A′, będzie

$$\frac{S'}{S} = \frac{\text{łuk } GG'}{ok.\ HG} = \frac{\text{łuk } GG' . AB}{2\pi HG . AB}.$$

Owoż, $S = 2\pi HG . AB$; więc $S' = \text{łuk } GG' . AB$

Jeśli linia rodząca AB jest równoległa do osi XY, łuk GG′ równa się łukowi BB′ i powierzchnia ABB′A′ staje się wrzecieniem walcowem; co sprawdza już wiadome twierdzenie.

Uwaga II. — Twierdzenie IV wywodzi się łatwo algebrycznie z twierdzenia III. Jakoż, jeśli dopełnimy stożka S, i nazwiemy x bok małego stożka SCB, powierzchnia boczna pnia stożka obrotowego wyrazi się przez

$$S = \pi R(a + x) - \pi r x = \pi R a + \pi(R - r)x.$$

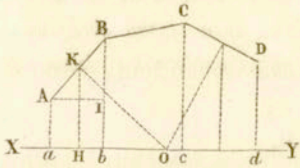
Owoż, $$\frac{x}{r} = \frac{x + a}{R} = \frac{a}{R - r};$$

ztąd $$(R - r)x = ar.$$

Więc $$S = \pi R a + \pi r a = \pi(R + r)a.$$

Twierdzenie V.

Powierzchnia utworzona obrotem łamanej FOREMNEJ ABCD, *około średnicy koła wpisanego która jej nie przecina, ma za miarę wieloczyn z okręgu tego koła przez rzut tej łamanej na osi obrotu* XY.



Niech będzie OK promień koła wpisanego. Z wierzchołków linii rodzącej ABCD i ze środka boku AB, spuśćmy na oś XY prostopadłe Aa, Bb, Cc, Dd, i KH.

Bok AB, swoim obrotem około osi XY, tworzy powierzchnię pnia stożka ; oznaczając tę powierzchnię przez *Pow.* (AB), mamy, na mocy wniosku twierdzenia poprzedzającego,

$$\textit{Pow.}\ (\mathrm{AB}) = 2\pi \mathrm{HK} \,.\, \mathrm{AB}.$$

Owoż, poprowadźmy równoległę AI do XY ; trójkąty ABI, HOK, mające boki prostopadłe każdy do każdego, są podobne i dają

$$\frac{\mathrm{HK}}{ab} = \frac{\mathrm{OK}}{\mathrm{AB}}; \qquad \text{zkąd} \qquad \mathrm{HK}\,.\,\mathrm{AB} = \mathrm{OK}\,.\,ab.$$

Zatem $$\textit{Pow.}\ (\mathrm{AB}) = 2\pi \mathrm{OK}\,.\,ab.$$

Tak samo

$$\textit{Pow.}\ (\mathrm{BC}) = 2\pi \mathrm{OK}\,.\,bc,$$
$$\textit{Pow.}\ (\mathrm{CD}) = 2\pi \mathrm{OK}\,.\,cd\,;$$

Ztąd, dodając, wynika

$$\textit{Pow.}\ (\mathrm{AB}) + \textit{Pow.}\ (\mathrm{BC}) + \textit{Pow.}\ (\mathrm{CD}) = 2\pi \mathrm{OK}\,(ab+bc+cd).$$

Więc $$\textit{Pow.}\ (\mathrm{ABCD}) = 2\pi \mathrm{OK}\,.\,ad.$$

Wniosek. — Powierzchnia utworzona obrotem półobwodu wielokąta foremnego, parzystej liczby boków, około średnicy przechodzącej przez skrajności tego półobwodu, ma za miarę wieloczyn z okręgu wpisanego przez średnicę okręgu opisanego, to jest $S = 4\pi r\mathrm{R}$.

Określenie VII. — Część powierzchni sferycznej zawarta między dwiema płasczyznami równoległemi nazywa się *strefą sferyczną* albo *pasem sferycznym.* Okręgi wyznaczone temi płasczyznami są *podstawami strefy*, a odległości dwóch płasczyzn *wysokością.*

Gdy jedna z płasczyzn równoległych jest styczna do sfery, wtedy strefa ma tylko jedną podstawę, i nazywa się *krymką sferyczną.*

Strefa i krymka sferyczna mogą się uważać jako figury obrotowe utworzone przez łuki kół wielkich.

Dwie krymki należące do dwóch sfer są *podobne* gdy mają łuki rodzące podobne; wtedy, łuki rodzące, promienie sfer, promienie podstaw, i wysokości są proporcyonalne między sobą.

Dwie strefy należące do dwóch sfer różnych są podobne gdy są różnicami krymek podobnych.

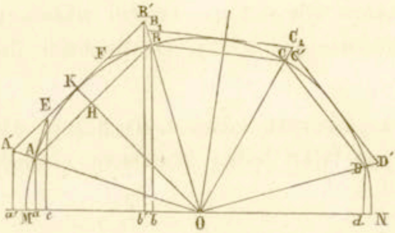
Twierdzenie VI.

Powierzchnia strefy sferycznej ma za miarę wieloczyn z okręgu koła wielkiego przez wysokość.

Niech będzie strefa sferyczna utworzona obrotem łuku koła AD około średnicy MN. Dowiedziemy najpierwej że ta strefa jest granicą powierzchni utworzonej obrotem linii łamanej wpisanej w łuk AD, jakakolwiek jest ustawa wedle której liczba boków tej łamanej rośnie nieskończenie i każdy bok dąży do zera.

Wpiszmy w łuk AD jakąkolwiek linię łamaną ABCD, i poprowadźmy styczne koła $A'B'$, B_1C_1, $C'D'$ równoległe do jej boków, i zawarte między normalnemi które przechodzą przez jej wierzchołki. Te styczne, jakośmy już widzieli (IV, 20), nie stanowią konieczne linii ciągłej opisanej. Poprowadźmy jeszcze styczne AE i BF, i spuśćmy na oś MN prostopadłe $A'a'$, Aa, Ee, Bb, $B'b'$.

Powierzchnia utworzona obrotem boku AB i łuku BN koła



około osi MN, jako wypukła, jest mniejsza od powierzchni otaczającej utworzonej przez łuki kół AB i BDN; bo obie mają ten sam obwód uakreślony przez punkt A. Dla tej samej przyczyny, ostatnia powierzchnia *pow. łuk* (AB + BN), także wypukła, jest mniejsza od powierzchni otaczającej, *pow.* (AEFBDN), utworzonej obrotem łamanej AEFB i łuku koła BDN. Odejmując, od tych trzech powierzchni, część spólną *pow.* (BDN) utworzoną przez łuk koła BDN, widzimy jasno że powierzchnia strefy (AB) jest większa od *pow.* (AB) utworzonej przez bok AB, ale mniejsza od *pow.* (AEFB). Uważajmy nadto że *pow.* (AE), utworzona obrotem stycznej AE około osi MN, stanowiąc powierzchnię boczną pnia stożka obrotowego, ma za miarę $\pi(a\mathrm{A} + e\mathrm{E})\,\mathrm{AE}$; tak samo *pow.* $(\mathrm{EA}') = \pi\,(a'\mathrm{A}' + e\mathrm{E})\,\mathrm{EA}'$. A że prostopadła EA jest mniejsza od pochyłej EA', i prosta $a\mathrm{A} < a'\mathrm{A}'$ dlatego że $\frac{a\mathrm{A}}{a'\mathrm{A}'} = \frac{\mathrm{OA}}{\mathrm{OA}'}$; zatem *pow.* (EA) < *pow.* (EA'). Dowiedzie się podobnie że *pow.* (FB) < *pow.* (FB'). Więc *strefa* (AB) jest większa od *pow.* (AB), ale mniejsza od *pow.* (A'B'). Ztąd wynika oczywiście że

$$pow.\ (\mathrm{ABCD}) < strefy\ (\mathrm{AD}) < pow.\ (\mathrm{A'B'} + \mathrm{B_1\,C_1} + \mathrm{C'D'}).$$

To otrzymawszy, poprowadźmy promień OH prostopadły do cięciwy AB, będzie

$$\frac{pow.\,(\mathrm{AB})}{pow.\,(\mathrm{A'B'})} = \frac{2\pi\mathrm{OH}\,.\,ab}{2\pi\mathrm{OK}\,.\,a'b'} = \frac{\mathrm{OH}}{\mathrm{OK}}\cdot\frac{ab}{a'b'}.$$

Ale podobieństwo trójkątów daje widocznie

$$\frac{Oa}{Oa'} = \frac{OA}{OA'} = \frac{OH}{OK} = \frac{OB}{OB'} = \frac{Ob}{Ob'} = \frac{Oa - Ob}{Oa' - Ob'} = \frac{ab}{a'b'}.$$

Ztąd
$$\frac{ab}{a'b'} = \frac{OH}{OK}.$$

Podstawiając tę wartość, znajdujemy

$$\frac{pow.(AB)}{pow.(A'B')} = \frac{\overline{OH}^2}{\overline{OK}^2}.$$

Jeśli więc oznaczymy przez r_1 i r_2 najmniejszą i największą apotemę boków łamanej wpisanej, przez R promień sfery, będziemy mieli, na mocy wiadomego twierdzenia arytmetyki,

$$\frac{r_1^2}{R^2} < \frac{pow\,(AB) + pow\,(BC) + pow\,(CD)}{pow\,(A'B') + pow\,(B_1C_1) + pow\,(C'D')} < \frac{r_2^2}{R^2},$$

albo
$$\frac{r_1^2}{R^2} < \frac{pow\,(ABCD)}{pow\,(A'B' + B_1C_1 + C'D')} < \frac{r_2^2}{R^2}.$$

Owoż, gdy boki łamanej wpisanej w łuk AD dążą do zera,

wiemy już że $gr.\frac{r_1^2}{R^2} = 1$ i $gr.\frac{r_2^2}{R^2} = 1$;

więc $gr.\,pow\,(ABCD) = gr.\,pow\,(A'B' + B_1C_1 + C'D')$.

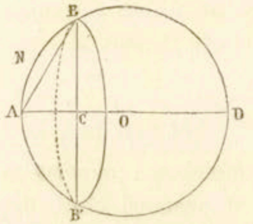
Te dwie powierzchnie, jakośmy dowiedli, zawierają między sobą *strefę* (AD); ztąd wnosimy że, jakakolwiek jest ustawa wedle której wszystkie boki łamanej wpisanej w łuk AD dążą do zera, powierzchnia utworzona przez tę łamaną ma zawsze tę samą granicę którą jest właśnie *strefa* AD.

Aby teraz znaleźć miarę powierzchni *strefy* (AD), dość wpisać w łuk AD linię łamaną foremną, przypuścić że liczba jej boków rośnie nieskończenie i wziąć granicę *pow*. (ABCD). Nazywając r apotemę tej łamanej, h wysokość powierzchni utworzonej, S miarę powierzchni strefy sferycznej, będzie

$$S = gr.\,(2\pi rh); \quad \text{więc} \quad S = 2\pi Rh.$$

Wniosek. — Dwie strefy na jednej sferze są proporcyonalne do swych wysokości; zatem są równowarte gdy mają wysokości równe.

Dwie *strefy podobne* mają się jako kwadraty z promieni sfer do których należą



Uwaga. — Uważajmy krymkę sferyczną utworzoną obrotem łuku ANB około średnicy AD. Oznaczając przez S jej powierzchnię, będzie

$$S = 2\pi OA.AC = \pi AD.AC = \pi \overline{AB}^2.$$

Więc, *powierzchnia krymki sferycznej jest równowarta kołu którego promień równa się cięciwie łuku rodzącego.*

Twierdzenie VII.

Powierzchnia sfery ma za miarę wieloczyn z okręgu koła wielkiego przez średnicę; albo, co to samo, *równa się powierzchni czterech kół wielkich.*

Jakoż, (*fig.* powyższa), można uważać powierzchnię sfery jako złożoną z dwóch krymek sferycznych, utworzonych obrotem łuków kół ANB i BD około średnicy AD.

Więc, nazywając R promień sfery, będzie

$$2\pi R.AC + 2\pi R.CD = 2\pi R.AD,$$

albo $$S = 4\pi R^2.$$

Uwaga. — Ten wynik, godny uwagi, pokazuje że powierzchnia *krzywa* sfery jest równowarta powierzchni *płaskiej* koła, chociaż nie można ani rozpostrzeć powierzchni sferycznej na płaszczyznie, ani z powierzchni płaskiej zrobić powierzchni sferycznej.

Wniosek. — Nazywając D średnicę sfery, mamy

$$S = \pi(2R)^2 = \pi D^2.$$

Więc, *powierzchnie dwóch sfer mają się jako kwadraty z promieni, albo jako kwadraty ze średnic.*

ZASTOSOWANIE. — *Znaleźć powierzchnię ziemi w miryametrach kwadratowych, przypuszczając że jest sferyczną.*

Wiemy że okrąg południka ziemskiego zawiera 40 000 000 metrów, czyli 4000 miryametrów. Biorąc południk za wielkie koło sfery, powierzchnia ziemi, wyrażona w miryametrach kwadratowych, będzie

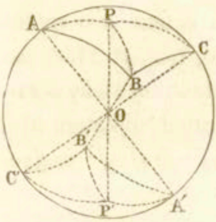
$$4\pi R^2 = \frac{1}{\pi}(2\pi R)^2 = 16\ 000\ 000 \times \frac{1}{\pi} = 5\ 092\ 958 \text{ mir. kw.}$$

na mniej niż miryametr kwadratowy.

MIARA WIELOKĄTÓW SFERYCZNYCH.

TWIERDZENIE VIII.

Dwa trójkąty sferyczne symetryczne, ABC, A'B'C', *są równowarte.*



Niech będzie P biegun małego koła opisanego na trójkącie ABC.

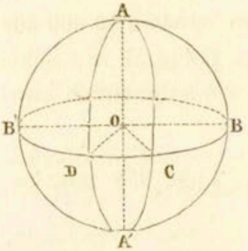
Poprowadźmy średnicę POP', i łuki kół wielkich PA = P'A', PB = P'B', PC = P'C'.

Trzy łuki PA, PB, PC są równe jako promienie sferyczne; zatem trzy łuki P'A', P'B', P'C' są także równe, i punkt P' jest biegunem małego koła opisanego na trójkącie A'B'C'. Owoż, dwa trójkąty APB, A'P'B', równoboczne między sobą, są równe jako równoramienne; i tak samo są równe trójkąty ACP i A'C'P', BCP i B'C'P'. Więc trójkąty sferyczne symetryczne ABC i A'B'C', złożone z części równych każda każdej, są równowarte.

Gdyby biegun P padał zewnątrz trójkąta ABC, wtedy ten trójkąt byłby różnicą trójkątów równoramiennych.

UWAGA. — Dowiedzie się podobnie że *dwie piramidy sferyczne symetryczne są równowarte.*

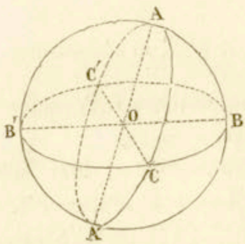
Wniosek I. — Dwa wielokąty sferyczne symetryczne są równowarte; bo się rozkładają na równą liczbę trójkątów sferycznych symetrycznych.



Określenie VIII. — Część CADA' powierzchni sferycznej, zawartą między dwoma półokręgami kół wielkich, nazywać będziemy *wrzecieniem* (*); kąt CAD albo CA'D tych dwóch półokręgów jest *kątem wrzecienia*.

IX. — Część CAA'D objętości sfery, zawarta między dwoma półkolami wielkiemi nazywa się *klinem sferycznym*; kąt dwójścienny CAA'D utworzony przez płaszczyzny tych dwóch półkol jest kątem klina.

Wniosek II. — Gdy się dwa półokręgi kół wielkłch BAB', CAC' przecinają na jednem półsferzu, summa trójkątów sferycznych wierzchołkiem przeciwległych ABC, AB'C' równa się wrzecieniu którego kątem jest spólny kąt BAC. Albowiem, trójkąt AB'C' jest równowarty trójkątowi symetrzycznemu A'BC, a ten ostatni z trójkątem ABC tworzy wrzecienie BACA' mające kąt BAC.



Dowiedzie się tak samo, opierając się na uwadze ostatniego twierdzenia, że dwie piramidy sferyczne trójkątne OABC, OAB'C', mające podstawy wierzchołkiem przeciwległe, tworzą klin sferyczny którego kątem jest spólny kąt dwójścienny BAA'C.

(*) Niemcy nazywają tę figurę *dwukątem*; ten wyraz nie może się stosować do walca i stożka w których, jakośmy widzieli, są także *wrzecienia* walcowe i stożkowe. Nazwano też wrzecienie *czółenkiem sferycznem*, *taśmą śpiczastą*,... Rozsądny czytelnik pojmuje łatwo dlaczego, nie mogąc użyć żadnego z tych nazwisk, musiałem wziąć wyraz wrzecienie.

Twierdzenie IX.

Wrzecienie ma za miarę swój kąt podwojony; jeśli za jedność kątów wzięto kąt prosty a za jedność powierzchni trójkąt trójprostokątny.

Jakoż, widzimy łatwo że :

1° *Na jednej sferze, albo na dwóch sferach równych, dwa wrzecienia mające kąt równy są równe*, jako przystawalne.

2° *Stosunek wrzecienia do powierzchni sfery równa się stosunkowi jego kąta do czterech kątów prostych.*

Zatem, oznaczając przez S powierzchnię sfery, przez W powierzchnię wrzecienia, przez A jego kąt, mamy

$$W = \frac{A}{4^p} . S.$$

Owoż, powierzchnia sfery składa się z *ośmiu* trójkątów *trójprostokątnych*; jeśli więc za jedność kątów weźmiemy kąt prosty, i za jedność powierzchni trójkat trójprostokątny, będzie

$$S = 8 \qquad i \qquad W = 2A.$$

Co usprawiedliwia wysłowienie twierdzenia.

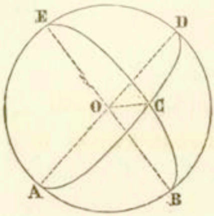
Wniosek. — Dwa wrzecienia jednej sfery są proporcyonalne do swych kątów.

Twierdzenie X.

Powierzchnia trójkąta sferycznego ma za miarę przewyżkę summy jego trzech kątów nad dwoma kątami prostemi.

Niech będzie trójkąt sferyczny ABC; dopełnijmy koła wielkiego AB, i przedłużmy boki AC i BC aż do punktów spotkania D i E z tem kołem.

Dwa trójkąty sferyczne ABC i BCD składają wrzecienie mające kąt A; zatem, na mocy poprzedzającego twierdzenia, mamy



$$ABC + BCD = \frac{A}{4} . S.$$

Podobnie $$ABC + ACE = \frac{B}{4} . S,$$

i (8, *wn.* 2.) $$ABC + CDE = \frac{C}{4} . S.$$

Dodając te równania, i uważając że summa czterech trójkątów sferycznych $ABC + BCD + CDE + ECA$ czyni połowę powierzchni S sfery, otrzymujemy

$$2ABC + \tfrac{1}{2}S = \frac{S}{4}(A + B + C);$$

zkąd $$ABC = \frac{S}{8}(A + B + C - 2).$$

Ten wynik pokazuje że, *powierzchnia trójkąta sferycznego równa się ósmej części powierzchni sfery pomnożonej przez przewyżkę summy trzech kątów tego trójkąta nad dwoma kątami prostemi.*

Jeśli więc, obierając kąt prosty za jedność kątów, weźmiemy trójkąt trójprostokątny za jedność powierzchni, będzie $S = 8$, i powierzchnia trójkąta sferycznego, którą nazwiemy T, wyrazi się przez

$$T = A + B + C - 2.$$

Uwaga. — Liczba $A + B + C - 2$ nazywa się *przewyżką sferyczną* trójkąta.

W kwadracie sferycznym kąty są rozwarte, bo powierzchnia tego kwadratu ma za miarę $A + B + C + D - 4$.

Kładąc za S wartość $4\pi R^2$, otrzymujemy kwadraturę trójkąta sferycznego,

$$T = \tfrac{1}{2}\pi R^2 (A + B + C - 2).$$

Zastosowanie. — Jaka jest, na sferze promienia $2^{m},40$, powierzchnia trójkąta sferycznego którego kąty są $120°20'$, $75°27'$, $36°43'$?

Mamy kąt $A = \frac{120°20'}{90°}$, $B = \frac{75°27'}{90°}$, $C = \frac{36°43'}{90°}$,

$$A + B + C - 2 = \frac{232°31' - 180°}{90°} = \frac{3150}{90.60} = \frac{7}{12}.$$

Więc szukana powierzchnia trójkąta sferycznego w *metrach kwadratowych* jest

$$T = \frac{7}{12} \cdot \tfrac{1}{2}\pi(2,40)^2 = 1^{mk},68\pi = 5^{mk},2778$$

na mniej niż centymetr kwadratowy.

Zwykle, dla skrócenia, wyraża się wielkość kątów biorąc za *jedność kątową* kąt obejmujący łuk koła równy swemu promieniowi (IV, 23). Oznaczając przez α, β, γ liczby które mierzą kąty A, B, C, odniesione do tej nowej jedności, będzie oczywiście $A = \frac{\alpha}{\frac{1}{2}\pi}$, albo $A = \frac{2\alpha}{\pi}$; tak samo $B = \frac{2\beta}{\pi}$, $C = \frac{2\gamma}{\pi}$. Wtedy powierzchnia trójkąta sferycznego równa się

$$T = R^2(\alpha + \beta + \gamma - \pi).$$

Twierdzenie XI.

Powierzchnia wielokąta sferycznego ma za miarę przewyżkę summy jego kątów nad tyle razy 2 kąty proste ile jest boków mniej dwa.

Prowadząc przekątne sferyczne można rozłożyć wszelki wielokąt sferyczny na tyle trójkątów sferycznych ile jest boków mniej dwa. Owoż, jeśli weźmiemy kąt prosty za jedność kątów a trójkąt trójprostokątny za jedność powierzchni, każdy trójkąt sferyczny będzie miał za miarę swoją przewyżkę sferyczną. Więc powierzchnia wielokąta sferycznego ma za miarę summę tych przewyżek; co właśnie czyni przewyżkę summy kątów wielokąta nad tyle razy 2 kąty proste ile jest boków mniej dwa.

Uwaga. — To twierdzenie stosuje się do wielokątów sferycznych wypukłych i niewypukłych; byle tylko w tych ostatnich uważano kąt wklęsły jako dopełnienie kąta sterczącego do czterech kątów prostych.

Wniosek I. — Jeśli, biorąc kąt prosty za jedność kątów i trójkąt trójprostokątny za jedność powierzchni, nazwiemy Σ summę kątów wewnętrznych wielokąta sferycznego mającego n boków, powierzchnia tego wielokąta będzie miała za miarę

$$\Sigma - 2(n - 2) \quad \text{albo} \quad \Sigma - 2n + 4.$$

Powierzchnia S wielokąta sferycznego wyrażona w kwadratach równa się

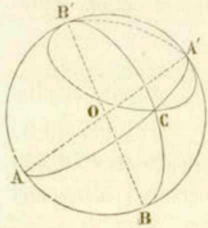
$$S = \tfrac{1}{2}\pi R^2(\Sigma - 2n + 4).$$

Zatem, *dwa wielokąty sferyczne podobne mają się jako kwadraty z promieni sfer do których należą, albo jako kwadraty z boków odpowiednych.*

Bo $$\frac{S}{S'} = \frac{\pi R^2(\Sigma - 2n + 4)}{\pi R'^2(\Sigma - 2n + 4)} = \frac{R^2}{R'^2} = \frac{a^2}{a'^2}.$$

Twierdzenie XII (*).

Miejscem wierzchołka trójkątów sferycznych spólnej podstawy i równej powierzchni jest łuk małego koła które przechodzi przez punkta średnicowo przeciwległe skrajnościom podstawy.



Niech będzie ABC jeden z trójkątów sferycznych mających tę samą podstawę AB i równowartą powierzchnię. Przedłużmy boki AC, BC aż do spotkania okręgu AB w punktach A', B', które są średnicowo przeciwległe skrajnościom A, B podstawy.

Kąty A' i B' trójkąta $CA'B'$ są odpowiednio spełnieniami kątów A i B trójkąta CAB; zatem

$$A' + B' - C = 4 - A - B - C.$$

(*) Twierdzenie uczonego Lexell.

Ale liczba $A + B + C - 2$ jest stała, jako miara danej powierzchni trójkąta ABC; więc różnica $A' + B' - C$ jest także stała.

To dowodzi (VIII, 27) że wierzchołek C trójkąta ABC jest na okręgu małego koła przechodzącego przez punkta A′ i B′.

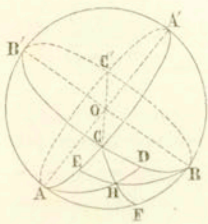
Uwaga. — Można łatwo wyznaczyć trzeci punkt C małego koła które przechodzi przez A′ i B′. Jakoż, między trójkatami A′B′C, uważajmy ten w którym bok $A'C = A'B'$; wtedy $B' - C = 0$, i powyższe równanie daje

$$A' = 4 - A - B - C = 2 - (A + B + C - 2).$$

Więc, dla znalezienia punktu C, dość jest wykreślić trójkąt sferyczny równoramienny, którego wiadomy jest kąt A′ i jego ramiona równe A′C, A′B′.

Twierdzenie XIII.

Trzy łuki kół wielkich, z których każdy przechodząc przez wierzchołek trójkąta sferycznego dzieli jego powierzchnię na dwie części równowarte, schodzą się w jednym punkcie.



Niech będą AD, BE, CF łuki wielkich kół dzielące powierzchnię trójkąta sferycznego ABC na dwie części równowarte. Oznaczmy przez A′, B′, C′ punkta średnicowo przeciwległe wierzchołkom A, B, C.

Dwa trójkąty równowarte ABD, ABE mają spólną podstawę; więc cztery punkta D, E, A′, B′ leżą na jednem małem kole (12). Dla tej samej przyczyny, cztery punkta D, F, A′, C′, jakoteż E, F, B′, C′, leżą także na małych kołach. Płaszczyzny tych trzech kół spotykają się wedle trzech linij prostych DA′, EB′, FC′, które, leżąc po dwie na jednej płaszczyznie i nie będąc równoległe, schodzą się w pewnym punkcie K; więc płaszczyzny ADA′, BEB′, CEC′ trzech łuków dwójsiecznych powierzchni trójkąta przechodzą przez ten punkt K. Owoż, ostatnie płaszczyzny, przechodząc także przez środek sfery O, spotykają się wedle linii prostej OK która przebija sferę w punkcie H; więc łuki AD, BE, CF przecinają się w punkcie H.

MIARA OBJĘTOŚCI.

Twierdzenie XIV.

Objętość walca jakiegokolwiek ma za miarę wieloczyn z podstawy przez wysokość.

Walec jest oczywiście zawarty między graniastonem wpisanym i opisanym. Oznaczając przez B, b, b' podstawy walca i dwóch graniastonów, przez H spólną wysokość, różnica objętości tych graniastonów wyrazi się przez

$$b'\mathrm{H} - b\mathrm{H} = (b' - b)\mathrm{H}.$$

Owoż, im większą weźmiemy liczbę boków coraz mniejszych, podstawy wpisanej i opisanej, tem bardziej różnica tych podstaw, $b' - b$, a następnie różnica objętości odpowiedających graniastonów dążyć będzie do zera. Więc walec jest spólną granicą graniastonów wpisanego i opisanego, w których liczba boków podstawy rośnie nieskończenie i każdy bok dąży do zera. Ztąd wynika że miara objętości walca równa się granicy miary każdego z tych graniastonów; tak że, nazywając V objętość walca, mamy

$$\mathrm{V} = gr.\,(b\,.\mathrm{H});\qquad \text{więc}\qquad \mathrm{V} = \mathrm{B}\,.\,\mathrm{H},$$

Wniosek I. — Jeśli walec jest kołowy, oznaczając jako zwykle przez R promień jego podstawy, objętość walca wyrazi się przez

$$\mathrm{V} = \pi\mathrm{R}^2\mathrm{H}.$$

Zatem, dwa walce kołowe równej podstawy mają się jako wysokości, a dwa walce kołowe równej wysokości mają się jako kwadraty z promieni podstaw.

II. — *Objętość walca jakiegokolwiek ma za miarę wieloczyn z przecięcia prostego przez krawędź* (VII, 15, wn.).

III. — Dwa walce *obrotowe podobne* mają się jako *sześciany* z wysokości albo z promieni podstaw.

Zastosowanie.—Wiadomo że litr do mierzenia cieczy jest walcem obrotowym, objętości jednego decymetra sześciennego, którego wysokość jest dwa razy większa od średnicy podstawy. *Wyrachować rozmiary tego litra na mniej niż milltmetr.*

Jeśli weźmiemy decymetr za jedność linijną i nazwiemy x wysokość litra, promień podstawy wyrazi się przez $\frac{x}{4}$, i będzie

$$\pi\left(\frac{x}{4}\right)^2 . x = 1, \quad \text{zkąd} \quad x = \sqrt[3]{\frac{16}{\pi}} .$$

Żeby szukana wartość była przybliżona na mniej niż millimetr błędu, dość wziąć $\frac{1}{\pi} = 0{,}31830$; co daje

$$x = \sqrt[3]{5{,}09280} = 1{,}720.$$

Więc wysokość litra zawiera 172 milimetrów, a promień podstawy 43 millimetrów, na mniej niż millimetr, przez niedostatek.

Twierdzenie XV.

Objętość stożka jakiegokolwiek ma za miarę trzecią część wieloczynu z podstawy przez wysokość.

Stożek jest oczywiście zawarty między piramidą wpisaną i opisaną. Nazywając b i b' podstawy, H spólną wysokość tych piramid, różnica ich objętości wyrazi się przez

$$\tfrac{1}{3}B . H - \tfrac{1}{3}b . H = \tfrac{1}{3}H(B - b).$$

Owoż, im większą weźmiemy liçzbę boków coraz mniejszych, podstawy wpisanej i opisanej, tem bardziej różnica tych podstaw, $b' - b$, a następnie różnica objętości piramid odpowiednych, dążyć będzie do zera. Ztąd wynika że stożek jest spólną granicą tych piramid, i ma za miarę granicę miary ich objętości.

Więc oznaczając przez B, H, V, liczby które mierzą podstawę, wysokość, i objętość stożka, mamy

$$V = gr. (\tfrac{1}{3}b . H), \qquad \text{albo} \qquad V = \tfrac{1}{3}B . H.$$

Wniosek. — Gdy stożek ma za podstawę koło promienia R, jego objętość wyraża się przez

$$V = \tfrac{1}{3}\pi R^2 . H.$$

Zatem, dwa stożki *kołowe* równej podstawy są proporcyonalne do swych wysokości, a dwa stożki kołowe równej wysokości są proporcyonalne do kwadratów z promieni podstaw.

Dwa stożki *obrotowe podobne* mają się jako *sześciany* z wysokości albo z promieni podstaw.

Uwaga. — Niech będzie piramida foremna przecięta płaszczyzną pochyłą do osi. Jeśli przez oś i krawędzie boczne piramidy odciętej wyobrazimy przechodzące płaszczyzny, pojmiemy łatwo że powierzchnia boczna takiej piramidy pochyłej równa się jej objętości podzielonej przez trzecią część odległości ściany bocznej od punktu spotkania osi z podstawą. Ztąd wiadomem rozumowaniem wnosimy że

Powierzchnia boczna stożka pochyłego, ale takiego tylko KTÓRY JEST CZĘŚCIĄ STOŻKA OBROTOWEGO, *równa się jego objętosci podzielonej przez trzecią część odległości krawędzi od punktu spotkania osi z podstawą.*

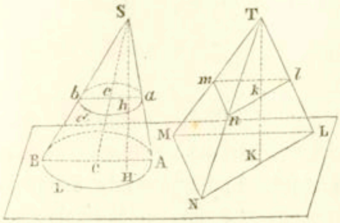
Kwadratura powierzchni bocznej stożka nieobrotowego do *Rachunku całkowego* należy.

Twierdzenie XVI.

Objętość pnia stożka, o podstawach równoległych, równa się summie trzech stożków mających wysokość pnia za spólną wysokość, a za podstawy, pierwszy podstawę niższą pnia, drugi podstawę wyższą, a trzeci średnią proporcyonalną między temi dwiema podstawami.

Niech będzie ADB*adb* pień stożka o podstawach równoległych.

Dopełnijmy stożka S, i wyobraźmy piramidę trójkątną TLMN mającą wysokość tego stożka, i której podstawa, równowarta jego podstawie, jest z nią na jednej płasczyznie.



Piramida T jest równowarta stożkowi S, bo oboje mają tę samą wysokość i podstawy równowarte.

Jeśli teraz przedłużymy płasczyznę podstawy wyższej *abd* stożka, wyznaczymy w piramidzie przecięcie *lmn* równowarte tej podstawie.

Jakoż (VII, 6, wn).

$$\frac{podst.\ lmn}{podst.\ \mathrm{LMN}} = \frac{\overline{\mathrm{T}k}^2}{\overline{\mathrm{TK}}^2}, \quad \text{i} \quad \frac{podst.\ abd}{podst.\ \mathrm{ABD}} = \frac{\overline{\mathrm{S}h}^2}{\overline{\mathrm{SH}}^2},$$

ale
$$\frac{\overline{\mathrm{T}k}^2}{\overline{\mathrm{TK}}^2} = \frac{\overline{\mathrm{S}h}^2}{\overline{\mathrm{SH}}^2};$$

zatem
$$\frac{podst.\ lmn}{podst.\ \mathrm{LMN}} = \frac{podst.\ abd}{podst.\ \mathrm{ABD}}.$$

Padstawy LMN i ABD są równowarte z założenia; więc podstawy *lmn* i *abd* są także równowarte. Ztąd wynika że stożek S*abd* i piramida T*lmn*, mając podstawy równowarte i tę samą wysokość, są równowarte; a następnie pień ABD*abd* stożka jest równowarty pniowi LMN*lmn* piramidy. Owoż, ten ostatni ma za miarę $\frac{1}{3}\mathrm{K}k\ (\mathrm{LMN} + lmn + \sqrt{\mathrm{LMN}\,.\,lmn})$; więc, oznaczając przez H, B, b, wysokość i podstawy pnia stożka, które są równowarte odpowiedającym wielkościom pnia piramidy, znajdujemy że objętość pnia stożka o podstawach równoległych ma za miarę

$$\mathrm{V} = \tfrac{1}{3}\,\mathrm{H}\,(\mathrm{B} + b + \sqrt{\mathrm{B}\,.\,b}).$$

Jeśli pień stożka jest kołowy, nazywając R i r promienie jego podstaw, będzie $B = \pi R^2$ i $b = \pi r^2$; zatem

$$V = \tfrac{1}{3}\pi H\,(R^2 + r^2 + Rr).$$

Uwaga. — Powyższe rozumowanie stosuje się do pnia stożkowego *drugiego gatunku*, którego formuła objętości wywodzi się z dopiero co otrzymanej, uważając tylko że, w wyrażeniu objętości pnia piramidy *drugiego gatunku*, pierwiastnik ma znak —. Więc objętość pnia stożka kołowego drugiego gatunku ma za miarę

$$V = \tfrac{1}{3}\pi H(R^2 + r^2 - Rr).$$

Można z resztą otrzymać obie formuły, uważając pień stożka jako granicę pnia piramidy wpisanego w pień stożka; albo lepiej analitycznie, uważając pień stożka jako różnicę albo summę dwóch stożków (VII, 19, *uw.*).

Obliczanie objętości drzewa ściętego. Uważa się kloc jako walec mający za wysokość swoją długość, a za podstawę przecięcie proste równo oddalone od obydwóch podstaw; co daje przybliżoną formułę

$$V = \pi H\left(\frac{R + r}{2}\right)^2.$$

Błąd jaki się popełnia, biorąc objętość walcową zamiast objętości pnia stożkowego, jest $\tfrac{1}{3}\pi H\left(\frac{R - r}{2}\right)^2$. Gdy można ten błąd zaniedbać, użyje się powyższej formuły którą się jeszcze uprości jeśli, zamiast promienia $\frac{R + r}{2}$, położymy jego wartość $\frac{C}{2\pi}$ w funkcyi okręgu przecięcia kloca. Tym sposobem przybliżona objętość kloca wyraża się formułą

$$V = \frac{H \cdot C^2}{4\pi},$$

która jest łatwa w zastosowaniu, zważając że wartości dla H i C mogą się wyznaczyć sznurkiem metrycznym.

Obliczanie objętości beczek. — Gdyby, uważając beczkę jako summę dwóch pni stożkowych równych, mających spólną podstawę przy szpuncie, wzięto formulę $\frac{1}{3}\pi H\,(R^2 + Rr + r^2)$, w której H oznacza *wysokość* beczki, R promień koła przy *szpuncie*, r promień *dna*; otrzymanoby objętość beczki oczywiście za małą. Gdyby w nawiasie zastąpiono $\mathrm{R}r$ przez R^2, mianoby formułę $\frac{1}{3}\pi\mathrm{H}\,(2\mathrm{R}^2 + r^2)$ która daje objętość beczki za wielką.

Oblicza się zwykle objętość beczek za pomocą następującej przybliżonej formuły

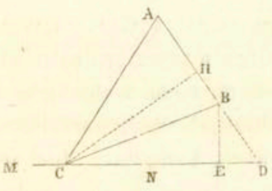
$$\mathrm{V} = \pi\mathrm{H}\left\{\mathrm{R} - \tfrac{1}{4}(\mathrm{R} - r)\right\}^2$$

która, dogodna do rachunku, daje objętość mało różną od prawdziwej.

Biorąc $\mathrm{H} = 0^{\mathrm{m}},75$; $\mathrm{R} = 0^{\mathrm{m}},326$; $r = 0^{\mathrm{m}},302$; objętość beczki byłaby 236,7 litrów. Pierwsza formuła daje 232,4 a druga 238,5.

Twierdzenie XVII.

Objętość utworzona CAŁYM *obrotem trójkąta* ABC *około osi* MN, *leżącej na jego płaszczyznie i przechodzącej przez wierzchołek* C, *ma za miarę wieloczyn z powierzchni którą opisuje bok przeciwległy* AB *przez trzecią część odpowiedającej wysokości* CH.



Przedłużmy bok AB aż do spotkania D osi MN, i spuśćmy prostopadłę BE na tę oś. Trójkąt CBD swoim obrotem około osi MN, wyznacza dwa stóżki utworzone przez trójkąty CBE i DBE. Oznaczając, dla skrócenia, przez *obj*. (CBD) objętość utworzoną obrotem trójkąta CBD, mamy

$$Obj.\,(\mathrm{CBD}) = \tfrac{1}{3}\pi\overline{\mathrm{EB}}^2 . \mathrm{CE} + \tfrac{1}{3}\pi\overline{\mathrm{EB}}^2 . \mathrm{DE} = \tfrac{1}{3}\pi\overline{\mathrm{EB}}^2 . \mathrm{CD}.$$

Ale
$$\mathrm{EB} . \mathrm{CD} = \mathrm{BD} . \mathrm{CH};$$

bo te dwa wieloczyny wyrażają podwójną powierzchnię trójkąta CBD.

Zatem.

$$Obj.\,(\mathrm{CBD}) = \tfrac{1}{3}\pi\mathrm{EB} . \mathrm{BD} . \mathrm{CH}.$$

Owoż, $\pi\mathrm{EB} . \mathrm{BD} = pow.\,(\mathrm{BD})$ (3);

więc $$Obj.\ (CBD) = pow.\ (BD)\ .\ \frac{CH}{3}.$$

Dowiedzie się podobnie że

$$Obj.\ (CAD) = pow.\ (AD)\ .\ \frac{CH}{3}.$$

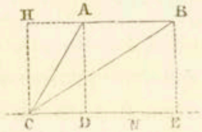
Odejmując stronami, otrzymamy

$$Obj.\ (CAD) - obj.\ (CBD) = \left\{ pow.\ (AD) - pow.\ (BD) \right\} .\ \frac{CH}{3}.$$

Więc ostatecznie

$$obj.\ (CAB) = pow.\ (AB)\ .\ \frac{CH}{3}.$$

Gdy bok AB jest równoległy do osi obrotu MN, powyższe dowodzenie nie stosuje się; ale wtedy znaleziony wynik wprost się otrzymuje. Jakoż, objętość utworzona obrotem trójkąta CAB jest



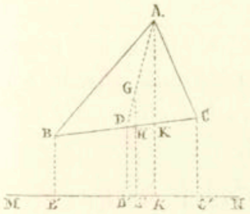
różnicą objętości utworzonych obrotem trójkątów CBH i CAH. Owoż, objętość utworzona przez trójkąt CAH równa się *dwom trzecim* walca utworzonego przez prostokąt CDAH; bo objętość utworzona przez trójkąt CDA jest *jedną trzecią* tego walca. Taksamo, objętość utworzona przez trójkąt CBH równa się dwom trzecim walca utworzonego przez prostokąt CEBH. Więc objętość utworzona przez trójkąt CAB równa się *dwom trzecim* objętości walca utworzonego przez prostokąt DEBA; co daje

$$Obj.(CAB) = \tfrac{2}{3}\pi\overline{DA}^2\ .\ DE = 2\pi DA\ .\ AB\ .\ \frac{CH}{3} = pow.\ (AB)\ .\ \frac{CH}{3}.$$

Trójkąt CAB może być *summą* dwóch innych, zamiast różnicą jako wyżej; ale dowodzenie oczywiście to samo.

Twierdzenie XVIII.

Objętość utworzona obrotem trójkąta ABC *około osi* MN, *leżącej na jego płaszczyznie, ma za miarę wieloczyn z powierzchni tego trójkąta przez okrąg nakreślnony jego środkiem ciężkości* G (*punkt spotkania ośrodkowych trójkąta*).



Na oś MN spuśćmy prostopadle AA′, BB′, CC′, GG′, i uczyńmy, dla skrócenia, $AA' = a$, $BB' = b$, $CC' = c$, $A'B' = \alpha$, $A'C' = \beta$.

Objętość utworzona przez trójkąt ABC równa się summie dwóch pni stożkowych utworzonych przez trapezy ABB′A′, ACC′A′, mniej pień stożkowy utworzony przez trapez BCC′B′. Więc

$$Obj.\,ABC = \tfrac{1}{3}\pi\left\{(a^2+b^2+ab)\alpha + (a^2+c^2+ac)\beta - (b^2+c^2+bc)(\alpha+\beta)\right\}$$
$$= \tfrac{1}{3}\pi\left\{(a^2-c^2+ab-bc)\alpha + (a^2-b^2+ac-bc)\beta\right\}.$$

Ilości w nawiasach mogą się wyrazić jako następuje:

$$a^2-c^2+ab-bc = (a-c)(a+c)+(a-c)b = (a-c)(a+b+c),$$
$$a^2-b^2+ac-bc = (a-b)(a+b)+(a-b)c = (a-b)(a+b+c)$$

Zatem

$$Obj.\,(ABC) = \tfrac{1}{3}\pi(a+b+c)\left\{(a-c)\alpha+(a-b)\beta\right\}.$$

Owoż, uważajmy że trójkąt ABC równa się summie trapezów ABB′A′ i ACC′A′ mniej trapez BCC′B′; więc jego powierzchnia S wyraża się przez

$$S = \tfrac{1}{2}\left\{(a+b)\alpha+(a+c)\beta-(b+c)(\alpha+\beta)\right\} = \tfrac{1}{2}\left\{(a-c)\alpha+(a-b)\beta\right\}.$$

Ztąd $$(a-c)\alpha+(a-b)\beta = 2S.$$

Aby wiedzieć co wyraża czynnik $\tfrac{1}{3}(a+b+c)$, przez spodek D ośródkowej AD poprowadźmy równoległę DK do osi MN. Trójkąt ADK, w którym $AG = \tfrac{2}{3}AD$ i prosta GH jest równoległa do AK, daje

$$GH = \tfrac{2}{3}AK, \qquad \text{albo} \qquad GG' - DD' = \tfrac{2}{3}(AA' - DD').$$

Ztąd $$GG' = \tfrac{1}{3}(AA' + 2DD') = \tfrac{1}{3}(AA' + BB' + CC').$$

Więc, podstawiając te wartości, otrzymujemy ostatecznie

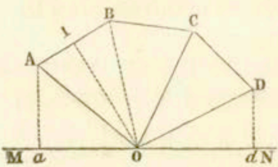
$$Obj.\ (\mathrm{ABC}) = \mathrm{S}.2\pi \mathrm{GG}'.$$

Uwaga. — Poprzedzające twierdzenie jest szczególnym przypadkiem obecnego.

Twierdzenie XIX.

Objętość utworzona obrotem wycinka wielokątnego foremnego OABCD, *około średnicy koła wpisanego która nie przecina tego wycinka, ma za miarę wieloczyn z powierzchni utworzonej podstawą* ABCD *przez trzecią część apotemy* OI.

Jakoż, wycinek wielokątny foremny OABCD rozkłada się na trójkąty równoramienne równe OAB, OBC... które, obrotem swoim około osi MN, dają następujące objętości (16):



$$Obj.\ (\mathrm{OAB}) = pow.\ (\mathrm{AB}).\ \tfrac{1}{3}\,\mathrm{OI},$$

$$Obj.\ (\mathrm{OBC}) = pow.\ (\mathrm{BC}).\ \tfrac{1}{3}\,\mathrm{OI},$$

$$Obj.\ (\mathrm{OCD}) = pow.\ (\mathrm{CD}).\ \tfrac{1}{3}\,\mathrm{OI}.$$

Ztąd, dodając, otrzymujemy

$$Obj.\ (\mathrm{OABCD}) = pow.\ (\mathrm{ABCD}).\ \tfrac{1}{3}\,\mathrm{OI}.$$

Wniosek I. — Jeśli oznaczymy przez r apotemę łamanej foremnej ABCD, przez h wysokość powierzchni którą tworzy; będzie

$pow.\ (\mathrm{ABCD}) = 2\pi rh.$ Więc $obj.\ (\mathrm{OABCD}) = {}_{3}\pi r^2 h$

Wniosek II. — Powyższe dowodzenie pokazuje że *objętość utworzona całym obrotem wycinka wielokątnego opisanego na kole, około jego średnicy, ma za miarę wieloczyn z powierzchni którą tworzy podstawa tego wycinka przez trzecią część promienia.*

Określenie X. — Figura utworzona obrotem wycinka kołowego ACD około średnicy która go nie przecina nazywa się *wycinkiem sferycznym*. Podstawą wycinka sferycznego jest strefa utworzona przez jego łuk AD, a wysokością promień sfery.

XI. — Część sfery zawarta między dwiema płaszczyznami równoległemi nazywa się *odcinkiem sferycznym*. Te płaszczyzny są *podstawami* odcinka; a ich odległość wysokością.

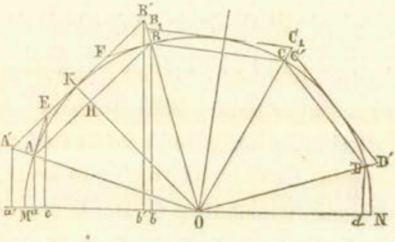
Jedna z płaszczyzn może stać się styczną do sfery; wtedy mówi się że odcinek sferyczny ma tylko jedną podstawę.

XII. — Dwa wycinki sferyczne, albo dwa odcinki sferyczne są podobne gdy odpowiedają strefom podobnym.

Twierdzenie XX.

Wycinek sferyczny ma za miarę wieloczyn ze strefy która mu służy za podstawę przez jedną trzecią promienia sfery.

Niech będzie wycinek sferyczny utworzony obrotem wycinka



kołowego AOD około średnicy MN. W łuk AD wpiszmy jakąkolwiek łamanę ABCD, i poprowadźmy styczne koła A′B′, B_1C_1,... równoległe do jej boków, a zawarte między normalnemi które przechodzą przez jej wierzchołki. Oczywiście objętość wycinka sferycznego jest większa od objętości utworzonej przez wycinek wielokątny OABCD, ale mniejsza od objętości utworzonej przez summę wycinków trójkątnych OA′B′, OB_1C_1,... to jest

$$Obj.\ (OABCD) < obj.\ (AOD) < obj.\ (OA'B' + OB_1C_1 +).$$

Owoż, nazywając r_1 i r_2 najmniejszą i najwiekszą apotemę boków łamanej wpisanej, wiemy (6) że

$$\frac{r_1^2}{R^2} < \frac{pow.\,(AB) + pow.\,(BC) + }{pow.\,(A'B') + pow.\,(B_1C') + } < \frac{r_2^2}{R^2};$$

jeśli więc pomnożymy każdą z tych *powierzchni* przez trzecią część odpowiedającej apotemy, stosunki skrajne przez najmiejszy i największy stosunek $\frac{r_1}{R}$ i $\frac{r_2}{R}$, będzie tem bardziej

$$\frac{r_1^3}{R^3} < \frac{pow.\,(AB)\,.\,\frac{1}{3}\,r' + pow.\,(BC)\,.\,\frac{1}{3}\,r'' + }{pow.\,(A'B')\,.\,\frac{1}{3}\,R + pow.\,(B_1C_1)\,.\,\frac{1}{3}\,R + } < \frac{r_2^3}{R^3}.$$

albo, co to samo,

$$\frac{r_1^3}{R^3} < \frac{obj.\,(OABCD)}{obj.\,(OA'B' + OB_1C_1 +)} < \frac{r_2^3}{R^3}.$$

Ale, gdy boki łamanej wpisanej w łuk AD dążą do zera, stosunki $\frac{r_1^3}{R^3}$ i $\frac{r_2^3}{R^3}$ dążą do jedności którą mają za granicę;

więc $\quad gr.\,obj.\,(OABCD) = gr.\,obj.\,(OA'B' + OB_1C' + \ldots).$

Te dwie objętości, jakośmy dowiedli, zawierają między sobą objętość wycinka sferycznego; ztąd wnosimy że, jakakolwiek jest ustawa wedle której liczba boków łamanej wpisanej AB...D rośnie nieskończenie, i każdy bok dąży do zera, objętość utworzona przez wycinek wielokątny OAB...D ma zawsze tę samą granicę, którą jest właśnie wycinek sferyczny utworzony przez wycinek kołowy AOD.

Aby teraz, znaleźć miarę objętości wycinka sferycznego, którą oznaczamy przez V, dość jest wziąć granicę miary objętości utworzonej przez wycinek wielokątny foremny, w którym liczba boków podstawy rośnie nieskończenie; co daje

$$V = gr.\,\left\{pow.\,(ABCD)\,.\,\tfrac{1}{3}\,r\right\} = gr.\,pow.\,(ABCD) \times gr.\,\tfrac{1}{3}\,r;$$

więc $\quad V = stref.\,(ABCD)\,.\,\frac{1}{3}\,R.$

Wniosek. — Ponieważ powierzchnia strefy (ABCD) ma zamiarę $2\pi Rh$, objętość wycinka sferycznego wyraża się przez

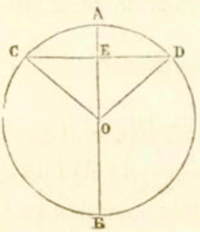
$$V = \frac{2}{3}\pi R^2 h.$$

Więc, w jednej sferze dwa wycinki sferyczne są proporcyonalne do wysokości swych podstaw.

Twierdzenie XXI.

Objętość sfery ma za miarę wieloczyn z powierzchni przez jedną trzecią promienia.

Można uważać sferę jako summę dwóch wycinków sferycznych, utworzonych przez wycinki kołowe COA i COB. Więc objętość sfery równa się



$$V = \textit{strefa}\ (AC) \cdot \frac{1}{3}OA + \textit{strefa}\ (BC) \cdot \frac{1}{3}OA.$$

albo

$$V = \left\{\textit{strefa}\ (AC) + \textit{strefa}\ (BC)\right\} \cdot \frac{1}{3}OA$$

$$= \textit{pow. sfery}\ OA \cdot \frac{1}{3}OA.$$

Wniosek. — Powierzchnia sfery wyraża się przez $4\pi R^2$; zatem objętość sfery ma za miarę

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3.$$

Jeśli nazwiemy D średnicę sfery, będzie $R = \frac{D}{2}$; więc objętość sfery, w funkcyi średnicy, wyraża się przez,

$$V = \frac{4}{3}\pi\frac{R^3}{8} = \frac{1}{6}\pi D^3.$$

Ztąd wynika że *objętości dwóch sfer są proporcyonalne do sześcianów z promieni albo ze średnic.*

Zastosowanie. — 1° *Wyrachować objętość ziemi.*

Biorąc formułę $V = \frac{1}{6}\pi D^3$, i uważając że średnica $D = \frac{4000}{\pi}$ miryametrów, znajdziemy, mając wzgląd na przybliżenia, że objętość ziemi, gdyby była sferyczną, zawierałaby 1 080 744 625 miryametrów sześciennych, na mniej niż miryametr sześcienny.

2° *Wiedząc że gęstość lanego żelaza jest* 7, 2 *wyrachować grubość bomby mającej* 40 *centymetrów średnicy i ważącej* 100 *kilogramów.*

Weźmy decymetr za jedność linijną i nazwijmy x średnicę wewnętrzną bomby, będzie

$$\frac{1}{6}\pi(4^3 - x^3) \,.\, 7,2 = 100; \qquad \text{zkąd} \quad x^3 = 64 - \frac{250}{3}\cdot\frac{1}{\pi}.$$

Owoż, biorąc $\frac{1}{\pi} = 0{,}31831$ (przez zbytek), znajdujemy $x^3 = 37{,}4732$ na mniej niż 0,001 przez niedostatek;

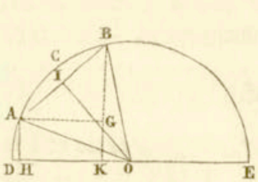
zatem $$x = \sqrt[3]{37{,}4732} = 3{,}346$$

na mniej niż 0,001 przez niedostatek.

Więc grubość bomby jest mniejsza od $4 - 3{,}346 = 0{,}654$, ale większa od $4 - 3{,}347 = 0{,}653$; to jest, zawiera 65 millimetrów, na mniej niż millimetr, przez niedostatek.

Twierdzenie XXII.

Objętość utworzona obrotem odcinka kołowego ABC, *około średnicy zewnętrznej* DE, *równa się jednej szóstej walca mającego za promień cięciwę odcinka i za wysokość rzut* HK *tej cięciwy na osi.*



Poprowadźmy promienie OA, OB, i apotemę OI. Objętość utworzona przez odcinek ABC jest różnicą wycinka sferycznego AOB i objętości utworzonej przez trójkąt ABO, to jest:

$$Obj.\ (ABC) = \frac{1}{3}\pi\overline{OA}^2 . HK - \frac{1}{3}\pi\overline{OI}^2 . HK = \frac{1}{3}\pi(\overline{OA}^2 - \overline{OI}^2)HK$$

Ale, w trójkącie prostokątnym AIO, $\overline{OA}^2 - \overline{OI}^2 = \overline{AI}^2 = \frac{1}{4}\overline{AB}^2$.

Więc $$Obj.\ (ABC) = \frac{1}{6}\pi\overline{AB}^2 . HK.$$

Wniosek. — Gdy cięciwa AB odcinka tworzącego jest równoległa do osi, objętość utworzona nazywa się *obręczą sferyczną*;

wtedy rzut $HK = AB$, i $obj.\ (ABC) = \frac{1}{6}\pi\overline{AB}^3$.

Więc obręcz sferyczna jest równowarta sferze mającej cięciwę AB za średnicę.

Twierdzenie XXIII.

Objętość odcinka sferycznego jest równowarta objętości sfery mającej jego wysokość za średnicę, więcej połową summy objętości dwóch walców mających za wysokość i podstawy wysokość i podstawy tego odcinka.

Niech będą (*fig. powyższa*) HA i KB promienie dwóch kół które są podstawami odcinka sferycznego, HK jego wysokość. Ten odcinek sferyczny, który można uważać jako utworzony obrotem figury HACBK około średnicy DE, jest summą objętości utworzonych przez odcinek kołowy ABC i przez trapez prostokątny HABK.

Owoż, poprzedzające twierdzenie daje

$$obj.\ (ABC) = \frac{1}{6}\pi\overline{AB}^2 . HK\ ;$$

a zaś trapez HABK tworzy pień stożka obrotowego, i daje (15)

$$obj.\ (HABK) = \frac{1}{3}\pi HK\ (\overline{AH}^2 + \overline{BK}^2 + AH . BK).$$

Więc $$obj.\ (DACBK) = \frac{1}{6}\pi HK\ (\overline{AB}^2 + 2\overline{AH}^2 + 2\overline{BK}^2 + 2AH . BK).$$

Aby wyrugować cięciwę AB, uważajmy że, prowadząc równoległę AG do HK, mamy

$$\overline{AB}^2 = \overline{AG}^2 + \overline{BG}^2 = \overline{HK}^2 + (BK - AH)^2$$

albo $$\overline{AB}^2 = \overline{HK}^2 + \overline{AH}^2 + \overline{BK}^2 - 2AH \,.\, BK.$$

Podstawiając tę wartość, otrzymujemy

$$\textit{Obj.}\ (HACBK) = \frac{1}{6}\pi HK(\overline{HK}^2 + \overline{3AH}^2 + \overline{3BK}^2);$$

więc ostatecznie

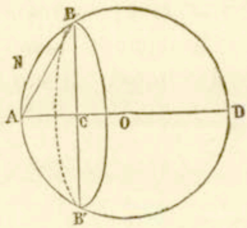
$$\textit{obj.}(HACBK) = \frac{1}{6}\pi\overline{HK}^3 + \frac{1}{2}HK\,(\pi\overline{AH}^2 + \pi\overline{BK}^2).$$

Wniosek. — Gdy podstawa AH odcinka sferycznego staje się zerem, to jest gdy punkt A jest skrajnością średnicy DE, wtedy odcinek sferyczny ma tylko jedną podstawę i stanowi krymkę sferyczną.

Więc objętość krymki sferycznej jest

$$V = \frac{1}{6}\pi\overline{DK}^3 + \frac{1}{2}\pi\overline{BK}^2 \,.\, DK.$$

Można wprost otrzymać ten wynik. Jakoż, odcinek kołowy ABN i trójkąt ABC, obracając się około średnicy AD, tworzą krymkę sferyczną.



Więc, nazywając V objętość tej krymki, będzie

$$V = \frac{1}{6}\pi\overline{AB}^2 \,.\, AC + \frac{1}{3}\pi\overline{BC}^2 \,.\, AC$$
$$= \frac{1}{6}\pi AC\,(\overline{AB}^2 + 2\overline{BC}^2);$$

zkąd, podstawiając wartość $\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2$,

wynika $$V = \frac{1}{6}\pi\overline{AC}^3 + \frac{1}{2}\pi\overline{BC}^2 \,.\, AC.$$

Objętość krymki sferycznej może się wyrazić w funkcyi jej wysokości AC $= h$ i promienia R sfery. Albowiem, jeśli z ostatniego równania wyrugujemy $\overline{BC}^2$, uważając że

$$\overline{BC}^2 = AC\ CD = (2R - h)\,h\,;$$

otrzymamy

$$V = \frac{1}{6}\pi h^3 + \frac{1}{2}\pi h^2\,(2R - h) = \pi h^2\,R - \frac{1}{3}h^3 = \pi h^2\,(R - \frac{1}{3}h).$$

Uwaga. — Z objętości odcinka sferycznego o dwóch podstawach, wyprowadziliśmy objętość krymki sferycznej; nie źle teraz będzie pokazać jak, nawzajem, z ostatniej wywodzi się pierwsza. Otóż, odcinek sferyczny jest różnicą dwóch krymek sferycznych; zatem, oznaczając, przez r i r' podstawy, przez h wysokość, przez V objętość tego odcinka; przez H i H' wysokości dwóch krymek, $H' - H = h$; przez R promień sfery; i wyrażają cobjętość krymki sferycznej w funkcyi jej wysokości i promienia sfery, mamy, na mocy powyższej formuły,

$$V = \pi H'^2(R - \frac{1}{3}H') - \pi H^2(R - \frac{1}{3}H)$$

$$= \pi Rh(H + H') - \frac{1}{3}\pi h(H^2 - HH' + H'^2)$$

Ale, (*fig. tw.* 22) $2R.H = \overline{AD}^2 = r^2 + H^2$ i $2R.H' = r'^2 + H'^2$.

Rugując zatem R.H i R.H', będzie

$$V = \frac{1}{2}\pi h(r^2 + r'^2) + \frac{1}{6}\pi h(H^2 - 2H.H' + H'^2)\,;$$

więc

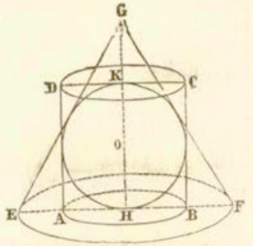
$$V = \frac{1}{2}h(\pi r^2 + \pi r'^2) + \frac{1}{6}\,\pi h^3.$$

C.*b.d.d.*

Twierdzenie XXIV.

Jeśli na sferze opisano walec prosty i stożek równoboczny, powierzchnia całkowita walca jest średnią proporcyonalną między powierzchnią całkowitą sfery i stożka; objętość walca jest średnią proporcyonalną między objętością sfery i stożka. Te trzy powierzchie i trzy objętości są w stosunku tych samych liczb 4, 6, 9.

Wyobraźmy że walec i stożek równoboczny, oba opisane sferze, mają podstawy na jednej płasczyznie. Przez oś stożka GH



poprowadźmy płasczyznę która przetnie sferę wedle wielkiego koła OH; a zaś walec i stożek wedle kwadratu ABCD i trójkąta równobocznego EFG, opisanych na tem kole. Będzie

1° Powierzchnia sfery $R = 4\pi R^2$.

Powierzchnia cała walca $ABCD = 2\pi R \,.\, 2R + 2\pi R^2 = 6\pi R^2$.

Powierzchnia cała stożka $EFG = \pi HF \,.\, FG + \pi \overline{HF}^2 = 3\pi \overline{HF}^2$.

Ale $EF = 2R\sqrt{3}$ (IV, *zag.* 5, *uw.*); zkąd $HF = R\sqrt{3}$; podstawiając tę wartość, będzie *pow. cał. stoż.* $= 9\pi R^2$.

$$\text{Więc} \qquad \frac{\textit{pow. sfery}}{4} = \frac{\textit{pow. cał. wal.}}{6} = \frac{\textit{pow. cał. stożka}}{9}.$$

$$2^\circ \ \textit{Obj. sfery} = \frac{4}{3}\pi R, \qquad \textit{obj. walca}\ (ABCD) = 2\pi R^3,$$

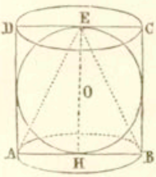
$$\textit{obj. stoż.}\ (EFG) = \frac{1}{3}\pi(R\sqrt{3})^2 \,.\, 3R = 3\pi R^3.$$

$$\text{Więc} \qquad \frac{\textit{Obj. sfery}}{4} = \frac{\textit{Obj. walca}}{6} = \frac{\textit{Obj. stoka.}}{9}.$$

Dwa otrzymane wyniki pokazują że: 1° powierzchnia *cała* walca prostego opisanego na sferze jest średnią proporcyonalną między powierzchnią sfery i powierzchnią *całą* stożka równobocznego opisanego; 2° objętości tych trzech figur są także w tej samej proporcyi.

Wniosek. — Powierzchnia sfery jest równowarta powierzchni bocznej walca prostego opisanego.

Uwaga I. — Jeśli w sferę wpiszemy walec i stożek, oba równoboczne, powierzchnia walca będzie średnią proporcyonalną między objętością sfery i stożka, objętość walca i będzie także średnią proporcyonalną miądzy objętością sfery i stożka. Ale stosunki tych trzech powierzchni i objętości nie są wyrażone temi samemi liczbami.



II. — Jeśli w walec równoboczny wpiszemy sferę i stożek prosty, objętości tych trzech figur będą w stosunku liczb 1, 2, 3.

Mówią że ta figura była wyryta na grobie ARCHIMEDESA.

TWIERDZENIE XXV.

Klin sferyczny ma za miarę podwójną liczbę która mierzy jego kąt.

Jakoż, rozumowanie użyte w *tw.* IX dowodzi że, oznaczając przez V objętość sfery, przez A kąt klina sferycznego, (*okr.* IX), jest

$$Obj.\ \text{klina} = \frac{A}{4^{p}} . V.$$

Jeśli więc za jedność kątów weźmiemy *kąt prosty*, i za jedność objętości *piramidę trójprostokątną* która jest *ósmą częścią objętości sfery*, będzie

$$Obj.\ \text{klina} = 2A.$$

Co usprawiedliwia wysłowienie twierdzenia.

TWIERDZENIE XXVI.

Objętość piramidy sferycznej ma za miarę wieloczyn z podstawy przez trzecią część promienia sfery.

Niech będzie najpierwej piramida sferyczna trójkątna której podstawa ma kąty A, B, C; jeśli oznaczymy przez *obj. pir.* objętość tej piramidy, przez V i R objętość i promień sfery, powtarzając rozumowanie *tw.* X, i kładąc w niem zamiast wrzecienia klin sferyczny, znajdziemy

$$Obj.\ pir. = \frac{V}{8}(A + B + C - 2),$$

albo, podstawiając za V jego wartość $\frac{4}{3}\pi R^3$, będzie

$$Obj.\ pir. = \frac{1}{6}\pi R^3 (A + B + C - 2) = \frac{1}{2}\pi R^2 (A + B + C - 2) . \frac{R}{3}.$$

Owoż, $\frac{1}{2}\pi R^2(A + B + C - 2)$ wyraża powierzchnię trójkąta sferycznego ABC który jest podstawą piramidy sferycznej; więc objętość tej piramidy ma za miarę wieloczyn z podstawy przez jedną trzecią promienia sfery.

Twierdzenie stosuje się do piramidy sferycznej wielokątnej; dowodzi się go łatwo rozkładając podstawę piramidy na trójkąty sferyczne.

Miara kątów wielościennych. — W jednej sferze, objętości dwóch piramid sferycznych są proporcyonalne do podstaw, te zaś podstawy są proporcyonalne do odpowiednych wielokątów sferyczuych na sferze spółśrodkowej z pierwszą. Owoż, gdy promień pierwszej sfery rośnie do nieskończoności, piramidy stają się kątami wielościennemi; ztąd wynika że przestrzenie dwóch kątów wielościennych, mających wierzchołek we środku jednej sfery, są proporcyonalne do wielokątów sferycznych objętych między ich ścianami na tej sferze.

Więc, jeśli za jedność kątów płaskich wzięto kąt prosty, za jedność kątów wielościennych kąt trójścienny trójprostokątny, a za jedność powierzchni sferycznej trójkąt trójprostokątny, wtedy *kąt wielościenny, którego wierzchołek jest we środku sfery, ma za miarę wielokąt sferyczny objęty między jego ścianami*, to znaczy że liczba $\Sigma - 2n + 4$, która wyraża stosunek tego wielokąta do trójkąta trójprostokątnego, daje stosunek kąta wielościennego do kąta trójprostokątnego.

TWIERDZENIE XXVII.

W wielościanie WYPUKŁYM *summa kątów wielościennych równa się podwójnej przewyżce summy kątów dwójściennych nad tyle razy* 2 *kąty dwójścienne proste ile jest ścian mniej dwie.*

Miarą kąta wielościennego jest liczba $\Sigma - 2n + 4$, w której Σ oznacza summę kątów dwójściennych, biorąc za jedność kąt dwójścienny prosty, n znaczy liczbę krawędzi. Owoż, w wielościanie każdy kąt dwójścienny i każda krawędź należą do dwóch kątów wielościennych; więc, jeśli wielościan jest wypukły, tojest mający wszystkie kąty wielościenne sterczące których liczba jest W, otrzymamy summę tych kątów zastępując w powyższej formule Σ przez 2Σ, n przez 2K, 4 przez 4W; co daje $2\Sigma - 4K + 4W$. Ale, na mocy twierdzenia EULERA, $4W - 4K = 8 - 4S$; więc summa wszystkich kątów bryłowych wielościanu wypukłego wyraża się przez

$$2\Sigma - 4(S - 2).$$

MAXIMUM I MINIMUM FIGUR W PRZESTRZENI.

TWIRDZENIE XXVIII.

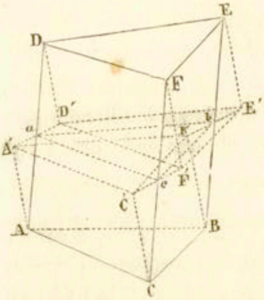
Ze wszystkich figur zamkniętych równej powierzchni sfera ma największą objętość; I NAWZAJEM, *ze wszystkich figur równej objętości sfera ma najmniejszą pawierzchnię.*

Dowodzenie tego twierdzenia opiera się na następującem które najpierwej okażemy.

Jeśli przez środki a, b, c *krawędzi bocznych* AD, BE, CF *pnia graniastonu trójkątnego poprowadzimy płaszczyznę, wtedy:* 1° *dwa odcinki pnia będą równowarte*; 2° *przecięcie* abc *będzie mniejsze od połowy summy podstaw* ABC *i* DEF.

Pierwsza część tego zadania jest oczywista (VII, 20. Wn. 2).

Co do drugiej, niech będą A′B′C′ i D′E′F′ rzuty dwóch podstaw ABC i DEF na płaszczyznie abc; proste A′D′, B′E′, C′F′ są równoległe, i punkta a, b, c są ich środkami. Mamy widocznie



$$abc = A'B'C' + abB'A' - acC'A' - bcC'B'$$

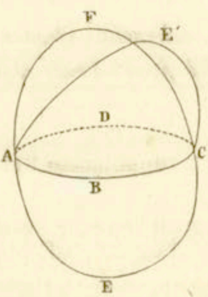
$$abc = D'E'F' + acF'D' + bcF'E' - abE'D'.$$

Ale te sześć trapezów są równowarte dwojanami, np. abB′A′ i abE′D′, jako mające tę samą wysokość i równe podstawy;

więc
$$abc = \frac{A'B'C' + D'E'F'}{2} < \frac{ABC + DEF}{2}.$$

Ztąd wynika że, *jeśli w figurze zamkniętej powierzchnią wypukłą, poprowadzono szereg cięciw równoległych, powierzchnia będąca miejscem środków tych cięciw dzieli objętość figury na dwie części równowarte, i jest mniejsza od połowy powierzchni tej figury.*

Wyobraźmy sobie teraz figurę która ma największą objętość między figurami równej powierzchni. Powiedam że ta figura maximum ma nieskończoną liczbę płaszczyzn symetryi. Jakoż, istnieje oczywiście w każdym kierunku pewna płaszczyzna dzieląca powierzchnię tej figury na dwie części równowarte. Niech będzie ABC jedna z tych płaszczyzn; ona dzieli właśnie objętość figury maximum na dwie części równowarte i symetryczne. Albowiem, gdyby część wyższa F była mniejsza od części niższej E, możnaby zastąpić pierwszą przez figurę E′ symetryczną drugiej; owoż powierzchnie figur E′, E i F są równowarte, więc tym sposobem objętość całej figury zwiększyłaby się nie zmieniając powierzchni; co niemożebne.



Jeśli połowa wyższa F nie jest symetryczna niższej E, weźmy symetryczną E′ tej ostatniej. Powierzchnie F i E′ mają spólną podstawę ABCD, są równowarte i zawierają objętości równowarte. Więc jeśli poprowadzimy szereg cięciw zawartych między powierzchniami F i E′, miejscem środków tych cięciw będzie, jakośmy wyżej okazali, pewna powierzchnia S mniejsza od $\frac{F+E'}{2}$, to jest mniejsza od F; ale objętość zawarta między powierzchnią S i jej podstawą ABCD będzie równowarta objętości zawartej między tą samą podstawą i powierzchnią F. Ztąd wynika że objętość maximum pod daną powierzchnią $E+F$ mogłaby się zawrzeć powierzehnią mniejszą $E+S$; co pzzeciw założeniu. Więc każde dwie połowy figury maximum są symetryczne; i temsamem wszelka płasczyzna która dzieli powierzchnię figury maximum na dwie części równowarte jest jej płasczyzną symetryi.

To ustaliwszy, poprowadźmy w przestrzeni dwie płasczyzny jakiekolwiek czyniące kąt dwójścienny α niespółmierny z π. Figura maximum posiada oczywiście dwie płasczyzny symetryi równoległe do ścian kąta α; zatem jej przecięcie przez płasczyznę prostopadłą do krawędzi kąta α, ma za osie symetryi dwie linie proste które, leżąc na tych dwóch płasczyznach symetryi, czynią kąt α; a ponieważ kąt α jest niespółmierny z π, to przecięcie jest kołem (VII, 23, *tw.*). Owoż, krawędź kąta dwójściennego α jest dowolna w przestrzeni; ztąd wnosimy że wszelka płasczyzna przecina figurę maximum wedle koła; więc ta figura jest sferą.

Dowiedźmy nakoniec wzajemnicy.

Ze wszystkich figur równej objętości sfera ma najmniejszą powierzchnię.

Gdyby jakakolwiek figura zamknięta, różna od sfery ale tej samej objętości, miała powierzchnię mniejszą, możnaby ją przekształcić na sferę powierzchni równowartej; objętość tej sfery, na mocy powyższego twierdzenia, byłaby większa od objętości figury nieprzekształconej. Więc druga sfera miałaby objętość większą od pierwszej a powierzchnię mniejszą; co niemożebne.

WIELOŚCIANY FOREMNE.

Twierdzenie XXIX.

Pięć tylko wielościanów foremnych wypukłych istnieć może.

To twierdzenie jest następstwem ogólniejszego:

Może istnieć tylko pięć gatunków wielościanów wypukłych w których wszystkie ściany mają tę samą liczbę boków, i wszystkie kąty wielościenne tę samą liczbę ścian.

Oznaczmy przez n liczbę boków każdej ściany, przez m liczbę ścian każdego kąta wielościennego. Ponieważ każda krawędź należy do dwóch ścian i łączy dwa wierzchołki, mamy

$$2K = nS = mW. \qquad (1)$$

Rugując K i W między temi równaniami i formułą *Eulera*, otrzymujemy

$$S = \frac{4m}{2(m+n) - mn}. \qquad (2)$$

Uważajmy teraz że liczby S, m, n są całkowite i dodatne, więc musi być

$$2(m+n) > mn; \qquad \text{zkąd} \qquad n > \frac{2m}{m-2}.$$

Owoż, najmniejsza wartość jaką można dać dla m jest 3; więc $n < 6$. Z przyczyny symetryi wnosimy że $m < 6$,

Więc niema żadnego wielościanu w którymby wszystkie ściany miały więcej niż *pięć* boków, albo wszystkie kąty wielościenne miały więcej niż *pięć* ścian. Co już wiadome (VII, 36, *wn.*).

Ztąd wynika że ścianą wielościanu foremnego może być tylko:

trójkąt równoboczny, kwadrat i pięciokąt foremny; a jego kątem wielościennym tylko kąt trójścienny czworościenny i pięcio-ścienny.

Jeśli weźmiemy *trójkąty równoboczne* na ściany wielościanu foremnego, będzie $n = 3$ i $S = \frac{4m}{6 - m}$; kładąc za m liczby 3, 4, 5, otrzymamy dla S liczby 4, 8, 20.

Więc trójkąt równoboczny może służyć do utworzenia trzech wielościanów foremnych, to jest: CZWOROŚCIANU, OŚMIOŚCIANU i DWUDZIESTOŚCIANU.

Biorąc teraz *kwadrat*, mamy $n = 4$ i $S = \frac{2m}{4 - m}$.

Zatem jedyna wartość dla m jest 3, i daje $S = 6$.

To dowodzi że z kwadratu jeden tylko wielościan foremny utworzyć można, to jest SZEŚCIAN.

Nakoniec, weźmy *pięciokąt foremny*;

będzie $n = 5$ i $S = \frac{4m}{10 - 3n}$.

Jedyna wartość możebna dla m jest 3, i daje $S = 12$.

Więc z pięciokąta foremnego można utworzyć tylko DWUNASTO-ŚCIAN FOREMNY.

Powyższe wartości, do których dołączamy wartości K i W (1), przedstawiają następujący obraz wielościanów foremnych (*).

Wielośc. foremne	S	W	K	*n*	*m*
CZWOROŚCIAN	4	4	6	3	3
OŚMIOŚCIAN	8	6	12	3	4
DWUDZIESTOŚCIAN	20	12	30	3	5
SZEŚCIOŚCIAN	6	8	12	4	3
DWUNASTOŚCIAN	12	20	30	6	3

(*) Na samo spójrzenie na ten obraz widać zaraz że, w sześcianie i ośmic-

Te pięć wielościanów foremnych istnieją rzeczywiście, jako pokazują następujące wykreślenia.

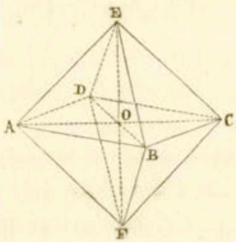
ZAGADNIENIE.

Zbudować wielościan foremny znając jego krawędź a.

Istnienie sześcianu i czworościanu foremnego nie potrzebuje dowodzenia. Zajmiemy się więc tylko ośmiościanem, dwunastościanem, i dwudziestościanem.

Ośmiościan foremny.

Wystawmy kwadrat ABCD mający bok AB $= a$. Przez środek O tego kwadratu, poprowadźmy do jego płaszczyzny prostopadłę OE, na której weźmy, z obydwóch stron, długości OE i OF równe promieniowi OF kwadratu. Jeśli połączymy E i F z wierzchołkami A, B, C, D, otrzymamy ośmiościan foremny EABCDF. Jakoż, trójkąty prostokątne i równoramienne AOB, AOE, AOF są równe; zatem AE $=$ AF $=$ AB $= a$. Co dowodzi że wszystkie ściany są trójkątami równobocznemi równemi. Nadto, czworoboki ABCD, AECF, BEDF są kwadratami równemi; więc kąty wielościenne, na przykład kąty A i B, są równe jako kąty przy wierzchołku dwóch piramid ABEDF, BAECF foremnych równych.

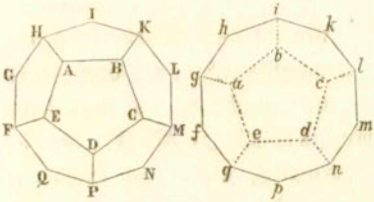


Widzimy łatwo że: 1° gdy trzy proste równe AC, BD, EF przecinają się na połowy i pod kątem prostym, ich skrajności są

ścianie, liczba krawędzi jest ta sama, a liczby ścian i wierzchołków są nawzajem te same, jako też liczby m i n. Można więc przejść z sześcianu do ośmiościanu albo na odwrót, zamieniając tylko liczbę ścian S na liczbę wierzchołków W, i nawzajem. Podobnie co do dwunastościanu i dwudziestościanu. Z przyczyny tej własności, mówi się czasem że wielościany foremne są *sprzężone po dwa*; czworościan mając tyle ścian ile wierzchołków jest sam swoim sprzężonym.

wierzchołkami ośmiościanu foremnego. 2° W ośmiościanie foremnym ściany przeciwległe są równoległe między sobą.

Dwunastościan foremny.

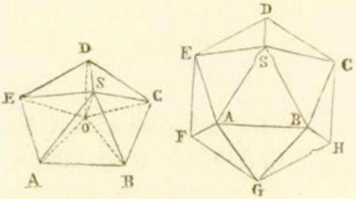


Niech będzie pięciokąt foremny ABCDE danego boku a. Przy wierzchołku A można utworzyć, z tego pięciokąta i z dwóch innych równych, kąt trójścienny który będzie foremny, bo jego ściany są równe i temsamem kąty dwójścienne równe. Zatem, kąty trójścienne A, B, H są równe, jako mające kąt dwójścienny równy zawarty między dwiema ścianami równemi każda każdej i w tym samym porządku. To dowodzi że kąty trójścienne B i H są także foremne, i kąt GHI jest kątem pięciokąta foremnego. Więc, złożywszy kąt trójścienny A ze trzech pięciokątów foremnych równych, można wstawić czwarty taki pięciokąt w kąt CBK, potem piąty w kąt DCM, i tak dalej. Otrzymuje się tym sposobem powierzchnię złożoną z sześciu pięciokątów foremnych równych i równo nachylonych. Ta powierzchnia, stanowiąca połowę powierzchni dwunastościanu, jest otwarta przy obwodzie dziesięciokąta FGHI...QR. Ten zaś dziesięciokąt jest spaczony; bo, gdyby cztery punkta GHIK były na jednej płaszczyznie, ponieważ punkt A leży na niej także, nie byłoby trójścianu A.

Zbudujmy teraz, takim samym sposobem, drugą połowę *abc...q* dwunastościanu, i przystawmy do niej pierwszą tak, żeby kąt sterczący HIK przystał do wklęsłego równego *hik*. Wtedy, utworzy się kąt trójścienny foremny I równy kątowi A; punkt K padnie na *k*, i kąt IKL przystanie do równego *ikl*, bo kąt trójścienny K jest także foremny równy kątowi A. I tak dalej.

Więc dwie powierzchnie złączone, tworząc wielościan złożony z dwunastu ścian równych i równo nachylonych, dają dwunastościan foremny.

Dwudziestościan foremny.



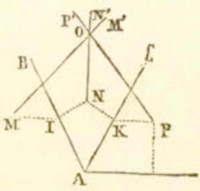
Weźmy najpierwej pięciokąt foremny ABCDE mający bok AB $= a$. Ze środka O tego pięciokąta wyprowadźmy do jego płasczyzny prostopadłę OS, na której weźmy punkt S tak żeby było AS=AB; co zawsze możebne, ponieważ AB $>$ AO (IV, *zag.* 3, wn.). Jeśli dopełnimy piramidy SABCDE, która jest foremna, jej kąt pięciościenny S będzie kątem dwudziestościanu foremnego.

To uczyniwszy, możemy, przy wierzchołku A, wystawić piramidę równą piramidzie foremnej SABCD tak żeby z nią miała dwie ściany spólne ABS, AES; i, przy wierzchołku B, wystawić trzecią piramidę, równą pierwszej, taką żeby z nią miała dwie ściany spólne ABS i BCS. Te trzy piramidy mają spólną ścianę ABS, a dwie przystawione piramidy mają spólną ścianę ABG. Otrzymujemy tym sposobem, powierzchnię wielościenną, złożoną z dziesięciu trójkątów równych i równo nachylonych. Ta powierzchnia stanowiąca połowę powierzchni dwudziestościanu, jest otwarta przy obwodzie sześciokąta CDEFGH. Rzeczony sześciokąt jest spaczony; bo, gdyby cztery punkta F, E, D, C były na jednej płasczyznie, ponieważ punkt A leży na niej także, nie byłoby piramidy foremnej A. Kąty tego sześciokąta są równe, na przykład kąty CDE i DEF, dlatego że każdy z nich jest równy kątowi CSE.

Jeśli więc zbudujemy, tym samym sposobem, drugą połowę S′B′C′D′...H′ powierzchni dwudziestościanu, i przystawimy dwie krymki wielościenne brzegami tak, żeby kąt sterczący D obwodu CDE... przystał do równego kąta wklęsłego E′ obwodu C′D′E′F′..., wszystkie inne punkta tych obwodów przystaną do siebie. A ponieważ płasczyzny trójkątów przy obwodzie mają między sobą nachylenia jakich trzeba do utworzenia, w każdym wierzchołku obwodu, kąta pięciościennego równego kątowi S, te dwie powierzchnie złączone utworzą dwudziestościan mający wszystkie ściany równe i równo nachylone, to jest dwudziestościan foremny.

Twierdzenie XXX.

Na każdym wielościanie foremnym wypukłym można opisać sferę, i wpisać w niego sferę.



Niech będzie AB spólna krawędź dwóch ścian przyległych wielościanu foremnego. Poprowadźmy osie MM', NN' kół opisanych na tych ścianach, i ze spodków M, N spuśćmy na krawędź AB prostopadłe które się spotkają w jej środku I. Ponieważ płaszczyzna M N jest prostopadła we środku krawędzi AB, osie MM', NN' spotykają się w punkcie O równo oddalonym od skrajności A i B.

Uważajmy teraz trzecią ścianę która ma z poprzedzającą krawędź AC spólną; dowiedziemy podobnie że osie NN', PP' tych dwóch ścian spotykają się w pewnym punkcie O' równo oddalonym od skrajności A i C. Owoż, dwa czworoboki NIMO i NKPO' są równe, jako mające bok IM = IN = NK = KP, kąt I = K, i kąty przy M, N, P proste; zatem NO' = NO, i punkt O' pada w O a temsamem OP = OM. Dowiedzie się podobnie że osie następujących ścian przechodzą przez ten sam punkt O, który jest równo oddalony od skrajności wszystkich krawędzi i także równo oddalony od wszystkich ścian.

Więc sfera mająca środek O i promień OA przechodzi przez wszystkie wierzchołki wielościanu foremnego, czyli jest na nim *opisana;* a zaś sfera mająca ten sam środek O i promień OM jest styczna do wszystkich ścian wielościanu w ich środkach, czyli jest *wpisana* w ten wielościan. Te dwie sfery są oczywiście jedyne.

Punkt O nazywa się *środkiem* wielościanu foremnego, OA jest jego *promieniem*, OM *apotemą*.

Wniosek I. — Łącząc środek z wierzchołkami, można rozłożyć wszelki wielościan foremny na tyle piramid foremnych równych ile jest ścian.

Ściany tych piramid, przedłużone jeśli trzeba, wyznaczają na sferze wpisanej albo opisanej tyle wielokątów sferycznych foremnych i równych ile wielościan foremny ma ścian.

II. — *Objętość wielościanu foremnego, albo tylko* opisalnego *na sferze, ma za miarę wieloczyn z powierzchni przez trzecią część apotemy.*

Twierdzenie XXXI.

Dwa wielościany foremne równej liczby ścian są podobne.

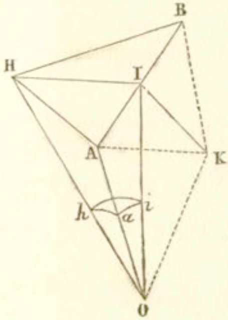
Bo ich ściany są wielokątami podobnemi, a zaś kąty wielościenne zawarte między temi ścianami są równe jako foremne złożone z równej liczby ścian. Zresztą, twierdzenie jest oczywiste jeśli będziemy zważali na liczbę warunków do wyznaczenia wielościanu.

Wniosek. — *Powierzchnie, dwóch wielościanów foremnych podobnych mają się jako kwadraty z promieni albo z apotem, a ich objętości jako sześciany z tych linij.*

Zagadnienie.

Mając dany wielościan foremny wypukły, znaleźć : 1° nachylenie dwóch ścian przyległych, 2° promienie sfer wpisanej i opisanej.

Niech będą : O spólny środek sfer wpisanej i opisanej, AB krawędź wielościanu foremnego, spólna dwom ścianom przyległym



których środki są H i K; punkt I środek krawędzi AB. Kąt HIK jest nachyleniem dwóch ścian.

Ponieważ krawędź AB jest prostopadła do płaszczyzny HIK, płaszczyzny ABO i HIK są prostopadłe między sobą. Jeśli więc z punktu O jako środka, opiszemy sferę która przetnie krawędzie trójścianu OAHI, otrzymamy trójkąt sferyczny *ahi* którego kąty będą wiadome. Jakoż, kąt i jest prosty; co do kątów h i a, oznaczmy przez n liczbę boków każdej ściany, przez m liczbę ścian każdego kąta wielościennego, będziemy mieli

$$\text{kąt } h = \text{kąt AHI} = \frac{1}{2}.\frac{2\pi}{n} = \frac{\pi}{n}.$$

Podobnie, ponieważ przy wierzchołku A naokoło jest m ścian kąta wielościennego A, będzie

$$\text{kąt } a = \text{kąt HAOI} = \frac{1}{2}.\frac{2\pi}{m} = \frac{\pi}{m}.$$

Teraz, 1° aby znaleźć nachylenie I, uważajmy że IO jest dwójsieczną kąta HIK; zatem, w trójkącie prostokątnym HIO, mamy

$$\text{wst}\,\frac{1}{2}\text{I} = \text{dos HOI}, \quad \text{albo} \quad \text{wst}\,\frac{1}{2}\,\text{I} = \text{dos}\,hi.$$

Owoż, trójkąt sferyczny prostokątny *iah* daje

$$\text{dos}\,a = \text{dos}\,hi\ \text{wst}\,h, \quad \text{albo} \quad \text{dos}\,\frac{\pi}{m} = \text{wst}\,\frac{1}{2}\,\text{I wst}\,\frac{\pi}{n};$$

więc
$$\text{wst}\,\frac{1}{2}\,\text{I} = \frac{\text{dos.}\,\frac{\pi}{m}}{\text{wst.}\,\frac{\pi}{n}}. \qquad (1)$$

Stosując tę formułę do pięciu wielościanów foremnych wypukłych, łatwo się znajduje dla nachylenia I dwóch ścian przyległych następujące wartości :

Czworościan foremny	$I = 70^\circ 31'43'',6$ przybliżone.
Sześcian	$I = 90^\circ$
Ośmiościan foremny	$I = 109^\circ 28'16'',4$ przybliżone.
Dwunastościan foremny	$I = 116^\circ 33'54'',2$ przybliżone.
Dwudziestościan foremny	$I = 138^\circ 11'22'',75$.

Widzimy że nachylenia ścian w czworościanie i ośmiościanie są nawzajem spełnieniem jedno drugiego.

2° Niech będzie a bok wielościanu foremnego wypukłego, r jego apotema i R promień. Aby wyznaczyć r i R w funkcyi boku a, uważajmy że, w trójkącie prostokątnym HIO, jest

$$\mathrm{HO} = \mathrm{HI}\ \mathrm{sty}\ \dot{\mathrm{HIO}} \quad \text{albo} \quad r = \mathrm{HI}\ \mathrm{sty}\ \frac{1}{2}\,\mathrm{I}.$$

Ale trójkąt prostokątny IAH daje

$$\mathrm{HI} = \mathrm{AI}\ \mathrm{dot}\ \mathrm{AHI} = \frac{a}{2}\ \mathrm{dot}\ \frac{\pi}{n}.$$

Więc
$$r = \frac{a}{2}\ \mathrm{dot}\ \frac{\pi}{n}\ \mathrm{sty}\ \frac{1}{2}\,\mathrm{I}. \tag{2}$$

Nadto, w trójkącie prostokątnym HAO, jest

$$\frac{\mathrm{OH}}{\mathrm{OA}} = \mathrm{dos}\ \mathrm{AOH}, \quad \text{albo} \quad \frac{r}{\mathrm{R}} = \mathrm{dos}\ ah.$$

Owóż, trójkąt sferyczny prostokątny iah daje

$$\mathrm{dos}\ ah = \mathrm{dot}\ a\ \mathrm{dot}\ h = \mathrm{dot}\frac{\pi}{m}\,\mathrm{dot}\frac{\pi}{n};$$

zatem
$$\frac{\mathrm{R}}{r} = \mathrm{sty}\ \frac{\pi}{n}\ \mathrm{sty}\ \frac{\pi}{m}.$$

Więc
$$\mathrm{R} = \frac{a}{2}\ \mathrm{sty}\ \frac{\pi}{m}\ \mathrm{sty}\ \frac{1}{2}\mathrm{I}. \tag{3}$$

Jeśli w formułach (2) i (3), wyrugowawszy sty $\frac{1}{2}$I, podstawimy, za n i m, liczby odpowiedające każdemu wielościanowi, otrzymamy wartości dla r i R.

I tak :

Czworościan foremny daje $\quad r = \frac{a\sqrt{6}}{12}, \qquad R = \frac{a\sqrt{6}}{4}.$

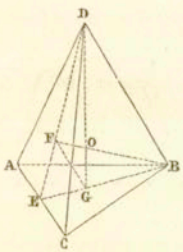
Sześcian $\quad r = \frac{a}{2}, \qquad R = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$

Ośmiościan foremny $\quad r = \frac{\sqrt{6}}{6}, \qquad R = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$

Dwunastościan foremny $r = \frac{a}{2}\sqrt{\frac{25+11\sqrt{5}}{10}}, \; R = \frac{a}{4}(\sqrt{3}+\sqrt{15})$

Dwudziestościan for. $r = \frac{a}{12}(3\sqrt{3}+\sqrt{15}), \; R = \frac{a}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}.$

Uwaga. — Można, i nie źle jest umieć, za pomocą samej geometryi, wyznaczyć promienie r i R sfer wpisanej i opisanej, w funkcyi danego boku a wielościanu foremnego wypukłego.



Czworościan. — Niech będą DG i BF osie kół opisanych na trójkątach równobocznych ACB i ACD; te osie spotykają się w punkcie O, spólnym środku sfer, opisanej i wpisanej, mających promienie OD $=$ R, OG $= r$.

Zatem,

$$\frac{R}{r} = \frac{BD}{FG} = \frac{3}{1}; \qquad \text{zkąd} \qquad R = 3r.$$

Teraz, trójkąt prostokątny DFO daje

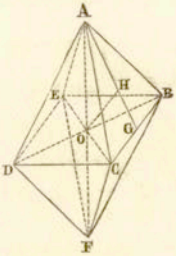
$$\overline{OD}^2 - \overline{OF}^2 = \overline{DF}^2, \qquad \text{albo} \qquad R^2 - r^2 = \frac{4}{9}\overline{DE}^2 = \frac{a^2}{3}.$$

Z tych dwóch równań otrzymujemy

$$R=\frac{1}{4}a\sqrt{6},\qquad r=\frac{1}{12}a\sqrt{6}.$$

Sześcian. — Mamy oczywiście $\quad R=\frac{a}{2}\sqrt{3},\qquad r=\frac{a}{2}.$

Ośmiościan. — Trzy proste, OA, OB, OC są prostopadłe między sobą i równe promieniowi R. Więc



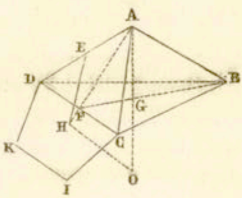
$$a^2=2R^2,\qquad \text{zkąd}\qquad R=\frac{a}{2}\sqrt{2}.$$

Prostopadła OH do ściany ABC jest promieniem sfery wpisanej w ośmiościan, i daje widocznie

$$R^2-r^2=\frac{a^2}{3}.$$

Zatem $\qquad r=\frac{a}{6}\sqrt{6}.$

Dwunastościan. — Niech będzie ABCD kąt trójścienny dwunastościanu foremnego, którego jedną ze ścian jest pięciokąt foremny ACIKD. Prostopadła AO do trójkąta równobocznego BCD i oś HO ściany BCIKD spotykają się w punkcie O, spólnym środku sfer, opisanej i wpisanej, mających promienie $AO=R$, i $HO=r$.



Trójkąty prostokątne podobne AHO, AFG dają

$$\frac{R}{r}=\frac{AF}{FG}.$$

Ale $\quad AF=\sqrt{\overline{AD}^2-\overline{DF}^2}=\sqrt{a^2-\overline{DF}^2},\qquad FG=\frac{1}{3}BF=\frac{1}{3}DF\sqrt{3};$

zatem
$$\frac{R}{r}=\sqrt{3\left(\frac{a}{DF}\right)^2-3}.$$

Aby znaleźć stosunek $\frac{a}{DF}$, poprowadźmy apotemę HE ściany ACIKD; dwa trójkąty podobne ADF, AEH dadzą

$$\frac{AD}{DF}=\frac{AH}{EH}\qquad\text{albo}\qquad\frac{a}{DF}=\frac{AH}{EH};$$

owoż w pięciokącie foremnym stosunek promienia do apotemy jest

$$\frac{\mathrm{AH}}{\mathrm{EH}}=\frac{4}{\sqrt{5}+1}=\sqrt{5}-1.$$

Więc $$\frac{\mathrm{R}}{r}=\sqrt{3(\sqrt{5}-1)^2-3}=\sqrt{15-6\sqrt{5}}.$$

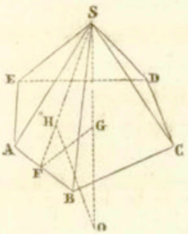
Teraz, w trójkącie prostokątnym AHO, mamy

$$\mathrm{R}^2-r^2=\overline{\mathrm{AH}}^2=\frac{2a^2}{5-\sqrt{5}} \quad (\text{IV}, \textit{zag. } 3, \textit{wn.})$$

Z tych dwóch równań wywodzimy

$$r=\frac{a}{2}\sqrt{\frac{25+11\sqrt{5}}{10}}, \qquad \mathrm{R}=\frac{a}{2}\sqrt{\frac{9+3\sqrt{5}}{2}}=\frac{a}{4}(\sqrt{3}+\sqrt{15}).$$

Dwudziestościan. — Niech będzie SABCDE kąt pięciościenny dwudziestościanu foremnego, mający za ściany trójkąty równoboczne SAB, SBC,... Oś HO ściany SAB i prostopadła SG do pięciokąta foremnego ABCDE, spotykają się w punkcie O, spólnym środku sfer, opisanej i wpisanej, mających promienie OS = R i OH = r.



Spuśćmy prostopadłę SF na AB, i połączmy FG. Dwa trójkąty podobne SOH, SFG dają

$$\frac{\mathrm{R}}{r}=\frac{\mathrm{SF}}{\mathrm{FG}}.$$

Ale $\mathrm{SF}=\frac{a}{2}\sqrt{3}$, a w pięciokącie foremnym ABCDE

apotema $$\mathrm{FG}=\frac{a(1+\sqrt{5})}{2\sqrt{10-2\sqrt{5}}}.$$

Więc $$\frac{\mathrm{R}}{r}=\frac{\sqrt{30-6\sqrt{5}}}{1+\sqrt{5}}=\sqrt{15-6\sqrt{5}}.$$

Do tego, w trójkącie prostokątnym OHS, mamy

$$R^2 - r^2 = \overline{SH}^2 = \frac{a^2}{3}.$$

Z tych dwóch równań otrzymujemy

$$r = \frac{a}{2}\sqrt{\frac{7+3\sqrt{5}}{6}} = \frac{a}{12}(3\sqrt{3}+\sqrt{15}), \qquad R = \frac{a}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}.$$

Uwaga. — Nie trudno teraz wyznaczyć, w funkcyi promienia sfery R, bok a i apotemę r wielościanu foremnego wpisanego, jego powierzchnię S i objętość V.

Jakoż, rozwiązując na a i na r powyższe formuły, i nazywając s powierzchnię jednej ściany, otrzymujemy następujące wyniki :

Czworościan. $\quad a = \frac{2R}{3}\sqrt{6}, \quad r = \frac{R}{3}. \quad s = \frac{a^2}{4}\sqrt{3} = \frac{2R^2}{3}\sqrt{3};$

$$S = \frac{8R^2}{3}\sqrt{3}, \qquad V = S.\frac{r}{3} = \frac{8R^3}{27}\sqrt{3}.$$

Sześcian. $\quad a = \frac{2R}{3}\sqrt{3}, \quad r = \frac{R}{3}\sqrt{3}, \quad s = a^2 = \frac{4R^2}{3};$

$$S = 6s = 8R^2, \qquad V = 8R^2.\frac{R}{3}\sqrt{3} = \frac{8R^3}{9}\sqrt{3}.$$

Ośmiościan. $\quad a = R\sqrt{2}, \quad r = \frac{R}{3}\sqrt{3}, \quad s = \frac{a^2}{4}\sqrt{3} = \frac{R^2}{2}\sqrt{3};$

$$S = 4R^2\sqrt{3}, \qquad V = \frac{4R^3}{3}.$$

Dwunastościan. $\quad a = \frac{R}{3}(\sqrt{15}-\sqrt{3}), \quad r = R\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{15}}$

$$s = \frac{5a^2}{4}\,\frac{1+\sqrt{5}}{\sqrt{10-2\sqrt{5}}} = \frac{R^2}{6}\sqrt{10(5-\sqrt{5})}; \; S = 2R^2\sqrt{10(5-\sqrt{5})},$$

$$V = S.\frac{r}{3} = \frac{2R^3}{9}\sqrt{30(3+\sqrt{5})}.$$

WIELOŚCIANY FOREMNE GWIAŹDZISTE (*).

Widzieliśmy już wielokąty foremne *niewypukłe* które nazwano gwiaździstemi, są także wielościany foremne gwiaździste. *Rzędem* wielokąta jest liczba n jego boków, *gatunkiem* liczba k pierwsza do n i mniejsza od n, która wskazuje ile razy trzeba przebiedz okrąg, przechodząc przez wszystkie wierzchołki, żeby opisać wielokąt foremny gwiaździsty. Zatem, gatunkiem wielokąta gwiaździstego jest liczba razy jaką rzuty jego boków na okręgu pokrywają ten okrąg; tak że $4k$ wyraża summę kątów środkowych tego wielokąta.

Rzędem kąta wielościennego jest liczba jego ścian; *gatunkiem* liczba która wyraża gatunek wielokąta otrzymanego z przecięcia tego kąta wielościennego przez płaszczyznę. I tak, w piramidzie foremnej mającej za podstawę pięciokąt foremny gwiaździsty, kąt wielościenny przy wierzchołku jest *drugiego gatunku*, a jego ściany zrzutowane na podstawie tej piramidy zapełniają *dwa razy* cztery kąty proste.

Określając wielościany foremne niewypukłe jako wielościany mające ściany równe i równo nachylone, widzimy łatwo że dowodzenie *twierdzenia* XXX do nich się stosuje; więc te nowe wielościany, jeśli istnieją, są wpisalne w sferę i na niej opisalne. Jedyna różnica między niemi i wielościanami foremnemi wypukłemi jest w tem że, jeśli zrzutujemy ściany jednych i drugich, za pomocą promieni, na sferze opisanej (albo wpisanej), wielokąty sferyczne ztąd wynikłe pokrywają w tych ostatnich *raz* tylko powierzchnię sfery, gdy tymczasem w tamtych odpowiedające wielokąty sferyczne pokrywają, zupełnie i jednostajnie, *dwa*, *trzy*,.. razy powierzchnię sfery.

Rzędem wielościanu foremnego jest liczba jego ścian, a *gatunkiem* liczba razy jaką rzuty wszystkich ścian na sferze pokrywają powierzchnię tej sfery. W wielościanach foremnych zwyczajnych, wielościan i jego kąt wielościenny są oba pierwszego gatunku; w wielościanach foremnych gwiaździstych, wielościan i jego kąt wielościenny mogą niebyć tego samego gatunku.

(*) Podług PP. Poinsot, Cauchy i Bertrand, *Journal de l'École Polytechnique*, tom IV i IX; i *Comptes rendus de l'Académie des sciences*. Rok 1842.

Twierdzenie XXXII.

Jeśli jest dany wielościan foremny A *jakiegokolwiek gatunku, istnieje także wielościan wypukły* X *mający z nim wszystkie wierzchołki spólne*

Jakoż, gdy są dane jakiekolwiek punkta w przestrzeni, można oczywiście znaleźć zawsze wielościan wypukły, mający za wierzchołki punkta wzięte z pomiędzy danych i zawierający wszystkie inne wewnątrz; chyba że dane punkta są już wszystkie wierzchołkami takiego wielościanu.

Owoż, wielościan wypukły, mający wierzchołki wzięte z pomiędzy wierzchołków wielościanu A, które leżą na jednej sferze, nie może zawierać wewnątrz innych wierzchołków tego wielościanu; więc istnieje wielościan wypukły X mający wszystkie te same wierzchołki co wielościan A.

Ten wielościan X jest foremny. Albowiem, oznaczmy przez P figurę utworzoną z dwóch wielościanów A i X mających *te same* wierzchołki, przez Q inną figurę równą figurze P. Ponieważ wielościan A jest foremny z przypuszczenia, można wykonać przystawanie figur P i Q, kładąc jakikolwiek wierzchołek figury Q na obranym wierzchołku figury P, i przystawiając do siebie ściany dwóch wielościanów A należących do P i Q. To przystawienie może się odbyć przynajmniej trojakim sposobem, dlatego że kąty wielościenne dwóch figur są przynajmniej trójścienne, czworościenne albo pięciościenne. Przystawanie figur P i Q pokazuje że kąty wielościenne dwóch wielościanów X są równe każdy każdemu. A że te kąty przystają do siebie sposobem trojakim, czworakim albo pięciorakim, według jak są trójścienne, czworościenne, pięciościenne; więc ich ściany są równe i równo nachylone.

Ztąd wynika że ściany dwóch wielościanów X są równokątne i równo nachylone, i mogą przystać do siebie jakikolwiek przystawiono wierzchołek figury Q do obranego wierzchołka figury P; co dowodzi że te ściany są wielokątami foremnemi równemi. Więc wielościan wypukły X, mający ściany foremne i kąty wielościenne równe, jest foremny.

Opierając się na tem twierdzeniu, żeby znaleźć wielościany foremne wyższego gatunku, trzeba wziąć, na każdym z wielościanów foremnych wypukłych, jeden wierzchołek i szukać czy inne wierzchołki mogą z nim tworzyć wielokąt foremny, i czy istnieje przynajmniej trzy takie wielokąty które, mając spólny wierzchołek, tworzą kąt wielościenny foremny.

Jeśli zastosujemy to poszukiwanie do czworościanu foremnego, do ośmiościanu foremnego i do sześcianu, zobaczymy łatwo że te wielościany nie prowadzą do żadnego wielościanu foremnego gwiaździstego. Rozpatrując dwunastościan foremny wypukły, spostrzegamy że mu odpowieda *dwunastościan foremny gwiaździsty*. Dwunastościan foremny wypukły daje trzy wielościany foremne gwiaździste, to jest : *dwudziestościan*, *dwunastościan* ze ścianami *wypukłemi*, i *dwunastościan* ze ścianami *gwiaździstemi*. Jest przeto, jako widzimy, *cztery* wielościany foremne gwiaździste, to jest trzy dwunastościany i jeden dwudziestościan. Więc, ze wszystkiem, istnieje *dziewięć* tylko wielościanów foremnych, i więcej ich być nie może (*).

Rozwiążmy teraz następujące zagadnienie.

Znaleźć gatunek wielościanu foremnego gwiaździstego. — Aby otrzymać formułę ogólniejszą od formuły *Eulera*, to jest taką któraby się mogła stosować do wszystkich wielościanów foremnych, trzeba wprowadzić do rachunku gatunek wielościanu, gatunek jego ścian przypuszczając wszystkie jednego gatunku, i gatunek kątów wielościennych przypuszczając także wszystkie jednego gatunku. Mając wzgląd na te szczegóły, zrzutujmy powierzchnię wielościanu na sferze opisanej, albo wpisanej, biorąc za środek rzutu środek tej sfery.

Niech będzie n liczba boków jednej ściany wielościanu foremnego, g liczba oznaczająca gatunek tej ściany, a i s powierzchnia i summa kątów wielokąta sferycznego będącego jej rzutem na sferze. Rozłóżmy ten wielokąt na trójkąty sferyczne, łącząc jego wierzchołki z rzutem środka ściany uważanej. Jeśli nazwiemy α i β kąty przy podstawie, σ kąt przy spólnym wierzchołku w jednym z trójkątów, powierzchnia tego trójkąta będzie miała za miarę $\alpha+\beta+\sigma-2$ (10). Zatem powierzchnia a wielokąta sferycznego który ma n takich trójkątów, będąc summą Σ ich powierzchni, wyraża się przez

$$a = \Sigma(\alpha+\beta+\sigma) - 2n.$$

Ale $\Sigma(\alpha+\beta+\sigma)$ równa się summie s kątów wielokąta sferycznego, powiększonej summą kątów σ przy spólnym wierzchołku trójkątów składających. Owoż, ostatnia summa równa się liczbie $4g$, dlatego że trójkąty

(*) Kepler w swoim dziele *Harmonices mundi*, mówi o jednym dwunastościanie i dwudziestościanie gwiaździstym, i nadto opisuje wielościany *półforemne* zwane *ciałami Archimedesa*. Są to wielościany *wpisalne w sferę i na niej opisalne*, mające ściany foremne ale nie wszystkie jednego gatunku. *Zobacz Table des diviseurs des nombres, etc.*, par Lidonne, Paris, 1808.

składające wielokąt sferyczny, który jest rzutem stożkowym sciany gwiaździstej, zachodzą na siebie g razy ; więc

$$a = s + 4g - 2n.$$

Wszystkie inne ściany dają podobnie

$$a' = s' + 4g - 2n'$$
$$a'' = s'' + 4g - 2n''.$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Oznaczmy teraz przez G gatunek wielościanu, to jest liczbę która wskazuje ile razy rzut powierzchni tego wielościanu pokrywa sferę, przez γ gatunek kąta wielościennego. Uważając że powierzchnia sfery wyraża się tu przez 8, mamy $a + a' + a'' + \ldots = 8G$; następnie, ponieważ $s + s' + s'' + \ldots$ jest summą wszystkich kątów wielokątów sferycznych, a przy każdym z wierzchołków, których liczba jest W, summa tych kątów czyni 4 kąty proste wzięte γ razy, mamy $s + s' + s'' + = 4\gamma W$; nakoniec, wiemy że $n + n' + n'' + \ldots = 2K$. Więc, dodając rzuty na sferze wszystkich ścian wielościanu foremnego których liczba jest S, otrzymujemy ostatecznie:

$$8G = 4\gamma W + 4gS - 4K,$$

albo $$2G + K = gS + \gamma W.$$

Czyniąc $G = 1 = g = \gamma$, wyprowadzamy formułę *Eulera*, której obecna jest pewnem zogólnieniem co do wielościanów foremnych.

Jeśli teraz w powyższej formule podstawimy wartości za K, S, W, g, γ, znajdziemy gatunek G wielościanu foremnego gwiaździstego.

I tak :

1° Dwudziestościan foremny gwiaździsty otrzymuje się z *trójkątów* równobocznych, które tworzą kąty pięciościenne *drugiego* gatunku około każdego wierzchołka dwudziestościanu foremnego wypukłego. W tym wielościanie $S = 20$, $W = 12$, $K = 30$, $g = 1$, $\gamma = 2$; co daje

$$2G + 30 = 1.20 + 2.12 \qquad \text{albo} \qquad G = 7.$$

Więc dwudziestościan foremny gwiaździsty jest *siódmego* gatunku.

2° dwunastościan foremny gwiaździsty otrzymuje się z *pięciokątów* foremnych *gwiaździstych*, które tworzą kąty trójścienne *pierwszego* gatunku, około każdego wierzchołka dwunastościanu foremnego wypukłego. W tym wielościanie $S=12$, $W=20$, $K=30$, $g=2$, $\gamma=1$; podstawiając te wartości, otrzymujemy

$$2G+30=2.12+20, \qquad \text{zkąd} \qquad G=7.$$

Więc pierwszy dwunastościan foremny gwiaździsty z kątami trójściennemi jest *siódmego* gatunku.

3° Dwunastościan foremny gwiaździsty ze ścianami wypukłemi, otrzymuje się z *pięciokątów* foremnych zwyczajnych, które tworzą kąty pięciościenne *drugiego* gatunku około każdego wierzchołka dwudziestościanu foremnego zwyczajnego. W tym wielościanie $S=12$, $W=12$, $K=30$, $g=1$, $\gamma=2$; co daje

$$2G+30=1.12+2.12, \qquad \text{zkąd} \qquad G=3.$$

Więc ten nowy drugi dwunastościan foremny gwiaździsty jest *trzeciego* gatunku.

4° Dwunastościan foremny ze ścianami gwiaździstemi, otrzymuje się z pięciokątów foremnych *gwiaździstych*, które tworzą kąty pięciościenne *pierwszego* gatunku około każdego wierzchołka dwudziestościanu foremnego zwyczajnego. W tym nowym wielościanie $S=12$, $W=12$, $K=30$, $g=2$, $\gamma=1$; co daje

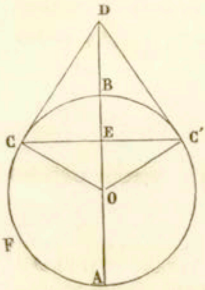
$$2G+36=2.12+1.12 \qquad \text{albo} \qquad G=3.$$

Więc trzeci dwunastościan foremny gwiaździsty jest *trzeciego* gatunku.

ZAGADNIENIA KSIĘGI DZIEWIĄTEJ.

Zagadnienie I.

Do półokręgu ACB *poprowadzono styczną* CD; *po czem, obrócono całą figurę* AFCD *około osi* ABD. *Jak trzeba wziąć styczną* CD, *żeby powierzchnia stożkowa utworzona przez tę prostę była w stosunku danym* k *z powierzchnią krymki utworzonej przez łuk* AFC?



Według zagadnienia powinno być

$$\frac{\pi EC \,.\, CD}{2\pi R \,.\, AE} = k$$

Trójkąty pododne CDO, CEO dają $\frac{CD}{R} = \frac{CE}{OE}$;

a zaś $\overline{CE}^2 = AE \,.\, BE$.

Więc $$\frac{BE}{OE} = 2k.$$

To pokazuje że trzeba podzielić promień OB na dwa odcinki BE i EO w stosunku $2k : 1$, z punktu E wyprowadzić do promienia OB prostopadłę EC która wyznaczy punkta styczności C, C'; etc.

Zagadnienie II.

Jaką rozciągłość S *powierzchni ziemi może widzieć osoba która się wzniosła balonem na wysokość* h ? (Figura poprzednia).

Wyobraźmy stożek DCC' opisany na sferze ziemskiej, mający wierzchołek D w oku osoby obserwującej; wtedy małe koło CC' oddzieli krymkę widzialną CBC' od niewidzialnej CAC'. Jeśli więc nazwiemy R promień sfery ziemskiej, x wysokość BE szukanej krymki, będzie

$$S = 2\pi Rx.$$

Ale trójkąt prostokątny CDO daje

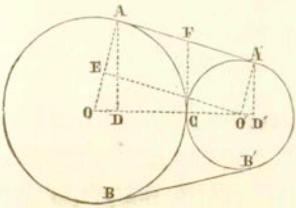
$$R^2 = (R + h)(R - x), \quad \text{zkąd} \quad x = \frac{Rh}{R + h}.$$

Więc $$S = \frac{2\pi R^2 h}{R + h}.$$

Uwaga. — Powyższe równanie, rozwiązane na h, daje odpowiedź na pytanie: *do jakiej wysokości trzeba się wznieść balonem żeby można ujrzeć krymkę ziemską równowartą danemu krajowi?*

Zagadnienie III.

Stożek jest opisany na dwóch sferach promieni R i R′, *stycznych zewnętrznie. Jaka jest objętość przestrzeni zawartej między trzema powierzchniami?*



Przez linię środków OO′ poprowadźmy płasczyznę która przetnie te dwie sfery wedle kół OC, O′C stycznych w punkcie C, a stożek wedle stycznych AA′, BB′.

Szukana objętość V może być uważana jako utworzona obrotem figury ACA′. Jeśli więc spuścimy prostopadłe AD, A′D′ na linię środków, odejmując od pnia stożka utworzonego przez ADD′A dwa odcinki sferyczne utworzone przez ACD, A′C′D′, będziemy mieli

$$V = \frac{1}{3}\pi DD'(\overline{AD}^2 + \overline{A'D'}^2 + AD\,.\,A'D') - \frac{1}{2}\pi(\overline{AD}^2\,.\,CD + \overline{A'D'}^2\,.\,CD')$$
$$- \frac{1}{6}\pi(\overline{CD}^3 + \overline{C'D'}^3).$$

Owoż, spólna styczna CF daje FA = FC = FA, zatem CD = CD′. A jeśli przez punkt O′ poprowadzimy równoległę O′E do spólnej stycznej AA′, trójkąty prostokątne OAD, O′A′D′, OEO′ będą podobne, i dadzą

$$\frac{OD}{OA} = \frac{O'D'}{O'A'} = \frac{OE}{OO'} \qquad \text{albo} \qquad \frac{OD}{R} = \frac{O'D'}{R'} = \frac{R - R'}{R + R'}.$$

Ztąd wynika:

$$CD = R - OD = \frac{2RR'}{R + R'} = CD', \quad DD' = 2CD = \frac{4RR'}{R + R'};$$

$$\overline{AD}^2 = R^2 - \overline{OD}^2 = \frac{4R^3R'}{(R + R')^2}, \quad A'D'^2 = \frac{4RR'^3}{(R + R')^2}.$$

Więc, podstawiając te wartości, będzie

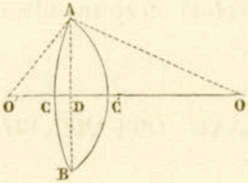
$$V=\frac{16}{3}\pi\frac{R^2R'^2}{(R+R')^3}(R^2+R'^2+RR')-4\pi\frac{R^2R'^2}{(R+R')^3}(R^2+R'^2)$$
$$-\frac{8\pi}{3}\cdot\frac{R^3R'^3}{(R+R')^3};$$

a ostatecznie

$$V=\frac{4}{3}\pi\frac{R^2R'^2}{R+R'}.$$

Zagadnienie IV.

Wyrachować objętość soczewki dwuwypukłej, znając jej grubość $CC'=g$ *i promienie* $OC=R$, $O'C=R'$ *sfer tworzących.*



Ta soczewka, jako pokazuje figura, jest różnicą między summą dwóch wycinków sferycznych i objętością utworzoną obrotem trójkąta AOO' około osi OO'. Zatem objętość soczewki jest

$$V=\frac{2}{3}\pi R\,.\,CD+\frac{2}{3}\pi R'^2\,.\,DC'-\frac{1}{3}\pi\,\overline{AD}^2\,.\,OO'.$$

Dla skrócenia uczyńmy $OO'=d$, będzie $d=R+R'-g$. Uważając że kwadrat powierzchni trójkąta AOO' ma za miarę

$$\frac{1}{4}\overline{AD}^2\,.\,d^2=\frac{1}{16}(R+R'+d)\,(R+R'-d)\,(R+d-R')\,(R'+d-R),$$

znajdujemy

$$\overline{AD}^2\,.\,OO'=\frac{g}{4d}(2R+2R'-g)\,(2R-g)\,(2R'-g).$$

Ten sam trójkąt AOO' daje także

$$\overline{AO'}^2=\overline{OO'}^2+\overline{AO}^2-2OO'\,.\,OD \text{ albo } R'^2=d^2+R^2-2d(R-CD),$$

$$\text{zkąd } CD = \frac{R'^2 - (d-R)^2}{2a} = \frac{(R'+d-R)(R+R'-d)}{2a} = \frac{g(2R'-g)}{2d}$$

Tak samo $$DC' = g\,\frac{(2R-g)}{2d}.$$

Więc, podstawiając te wartości, będzie

$$V = \frac{\pi g}{3d}\left\{R^2(2R'-g) + R'^2(2R-g) - \frac{1}{4}(2R+2R'-g)(2R-g)(2R'-g)\right\}$$

Wykonawszy wskazane mnożenia i uprościwszy, otrzymujemy

$$V = \frac{\pi}{12}\cdot\frac{g^2}{R+R'-g}\left\{g^2 - 4(R+R')\,g + 12RR'\right\}.$$

Uwaga. — Następujące zagadnienie

Z punktu wziętego na powierzchni sfery promienia R, *jako środka, opisać drugą sferę taką, żeby część zawarta między powierzchniami dwóch sfer miała objętość daną,*

przywodzi się do powyższego. Jakoż, ta część spólna objętości dwóch sfer, zawarta między ich powierzchniami, jest oczywiście soczewką dwuwypukłą, której grubość g jest promieniem R' sfery szukanej. Zatem, nazywając k stosunek objętości soczewki do objętości danej sfery, mamy

$$\frac{\pi}{12}\cdot\frac{g^2}{R}\left[g^2 - 4(R+g)g + 12Rg\right] = \frac{4}{3}\pi k R^3,$$

albo $$3g^4 - 8Rg^3 + 16kR^4 = 0.$$

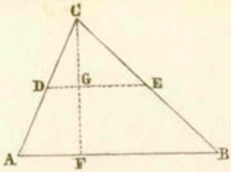
To równanie 4° stopnia ma dwa pierwiastki urojone, jako pokazuje prawidło Deskarta; i dwa *dodatne*, jeden mniejszy a drugi większy od 2R. Więc zagadnienie ma zawsze jedno rozwiązanie, byle tylko $k < 1$.

Zagadnienie V.

Przeciąć trójkąt ABC *równoległą* DE *do podstawy* AB *tak, żeby objętości utworzone obrotem trójkąta* CDE *i trapezu* ABED *około tej podstawy były równowarte.*

Nazwijmy h i x wysokości CF i CG trójkątów ABC i CDE.

Wiadomo że objętość utworzona przez trójkąt, który się obraca około osi leżącej na jego płaszczyźnie, ma za miarę wieloczyn z powierzchni tego trójkąta przez okrąg nakreślony jego środkiem ciężkości (18). Na mocy tego twierdzenia mamy :



$$Obj.\,(ABC)=tr.\,ABC\times 2\pi\frac{h}{3},\quad Obj.(CDE)=tr.\,CDE\times 2\pi\left(h-x+\frac{x}{3}\right).$$

Więc, wedle wysłowienia zagadnienia, powinno być

$$\frac{tr\acute{o}j.\,ABC\times h}{tr\acute{o}j.\,CDE\times(3h-2x)}=2.$$

Owoż, trójkąty podobne ABC, CDE mają się jako kwadraty z wysokości h, x; zatem

$$\frac{h^3}{x^2(3h-2x)}=2,\qquad \text{albo}\qquad 4x^3-6hx^2+h^3=0.$$

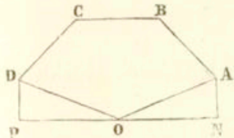
Nie trudno widzieć że $x=\frac{h}{2}$ zadość czyni temu równaniu 3° stopnia. To pokazuje że *szukana równoległa* DE *do podstawy* AB *przechodzi przez środek wysokości* CF.

Uwaga. — Dwa inne pierwiastki powyższego równania, $x=\frac{h}{2}(1\pm\sqrt{3})$, jeden dodatny większy od wysokości h, drugi odjemny nie mogą zadość czynić zagadnieniu.

Zagadnienie VI.

Półośmiokąt foremny, którego bok jest a, *obraca się około średnicy koła wpisanego. Jaka jest objętość* V *figury utworzonej ?*

Ta figura obrotowa składa się z figury utworzonej obrotem wycinka foremnego OABCDO i z dwóch stożków równych utworzonych obrotem trójkątów AON i DOP, około średnicy NP jako osi;



więc

$$V = \frac{2}{3}\pi\overline{ON}^2 . NP + \frac{2}{3}\pi\overline{AN}^2 . ON = \frac{4}{3}\pi\overline{ON}^3 + \frac{1}{6}\pi\overline{AB}^2 . ON.$$

Owoż, w ośmiokącie foremnym stosunek apotemy ON do boku AB $= a$ jest (IV, *zag.* VI).

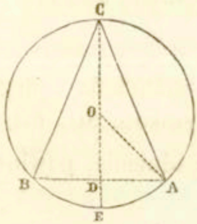
$$\frac{ON}{a} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2\sqrt{2-\sqrt{2}}} = \frac{1}{2}\sqrt{3+2\sqrt{2}} = \frac{1}{2}(1+\sqrt{2});$$

więc

$$V = \frac{\pi a^3}{6}(1+\sqrt{2})^3 + \frac{\pi a^3}{12}(1+\sqrt{2}) = \frac{\pi a^3}{12}(15+11\sqrt{2}).$$

Zagadnienie VII.

Wpisać w daną sferę stożek największy możebny.



Niech będzie DA $= x$ promień podstawy stożka wpisanego ABC, i strzała DE $= y$. Mamy $x^2 = y(2R - y)$.

Zatem, objętość stożka ABC jest

$$V = \frac{1}{3}\pi y(2R - y)^2.$$

Owoż, wiadomo z Algebry że wieloczyn potęg, mających summę pierwiastków stałą, jest największy możebny gdy te pierwiastki są proporcyonalne do wykładników; więc powyższy wieloczyn, w którym summa pierwiastków, $y + (2R - y) = 2R$, jest stała, będzie największy możebny jeśli uczynimy

$$\frac{y}{1} = \frac{2R - y}{2}.$$

Ztąd $y=\frac{2}{3}R$, a następnie $x=\frac{2R}{3}\sqrt{2}.$

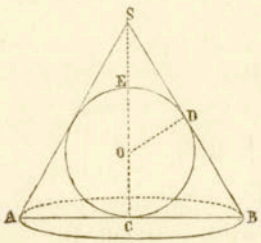
Te wartości podstawione dają objętość *maximum* stożka wpisanego, $V=\frac{32}{81}\pi R^3.$

Kończąc, uważajmy że $V : Obj.\ sf. :: 2^3 : 3^3.$

Uwaga. — Takim samym sposobem rozwiązuje się zagadnienie *Wpisać w sferę walec największy możebny.*

Zagadnienie VIII.

Opisać na danej sferze stożek prosty któregoby cała powierzchnia równała się powierzchni danego koła.



Jeśli przez oś stożka poprowadzimy płaszczyznę, przecięciem będzie trójkąt równoramienny SAB i wielkie koło OD w niego wpisane. Przeto powierzchnia sfery i szukana powierzchnia stożka są figurami obrotowemi około osi SC.

Owoż, nazywając R promień sfery, k promień koła danego, x promień CB podstawy stożka, y jego wysokość SC, mamy $BS=\sqrt{x^2+y^2}$; więc, wedle warunków zagadnienia, powinno być

$$\pi x\sqrt{x^2+y^2}+\pi x^2=\pi k^2$$

albo $$x\left(x+\sqrt{x^2+y^2}\right)=k^2 \qquad (1).$$

Ale dwa trójkąty podobne BSC, DSO dają

$$\frac{BC}{DO}=\frac{SB}{SO}=\frac{SC}{SD}, \quad \text{a zaś} \quad \overline{SD}^2=SC\,.\,SE=y\,(y-2R);$$

Ztąd $\qquad \dfrac{x}{R} = \dfrac{\sqrt{x^2+y^2}}{y-R} = \dfrac{y}{\sqrt{y(y-2R)}} = \dfrac{x+\sqrt{x^2+y^2}}{y},$

a następnie $\qquad \dfrac{x(x+\sqrt{x^2+y^2})}{Ry} = \dfrac{y}{y-2R}.$

Rugując tym sposobem x, będzie, na mocy równania (1),

$$\frac{Ry^2}{y-2R} = k^2 \quad \text{albo} \quad y\left(\frac{k^2}{R} - y\right) = 2k^2.$$

Ostatnie wyrażenie pokazuje że summa dwóch czynników niewiadomych jest $\dfrac{k^2}{R}$, a ich wieloczyn równa się $2k^2$. Więc, aby otrzymać wysokość y stożka, trzeba wystawić prostokąt równowarty kwadratowi $(k\sqrt{2})^2$ i w którymby dwa boki przyległe czyniły summę $\dfrac{k^2}{R}$; co już wiadome.

Uwaga. — Możebność zagadnienia wymaga żeby było $k^2 \gtreqless 8R^2$. Gdy $k^2 = 8R^2$, będzie $y = \dfrac{k^2}{2R} = 4R$, i $x = R\sqrt{2}$; wtedy, jako wiadomo z Algebry, powierzchnia cała stożka, $\dfrac{\pi R y^2}{y-2R}$, jest minimum $8\pi R^2$, i widocznie dwa razy większa od powierzchni sfery.

Zagadnienie IX.

Opisać na sferze najmniejszy stożek możebny.

Między stożkami nierównoramiennemi opisanemi na sferze niema oczywiście żadnego minimum. Uważajmy tedy stożek opisany równoramienny (*fig. powyższa*), i oznaczmy przez x promień jego podstawy, przez y jego wysokość; będzie

$$V = \frac{1}{3}\pi x^2 y.$$

Wyraźmy teraz że nasz stożek jest opisany na sferze promienia R; to daje proporcyę

$$\frac{BC}{DO} = \frac{SC}{SD},$$

która, z przyczyny $\overline{SD}^2 = y\,(y - 2R)$, staje się

$$\frac{x}{R} = \frac{y}{\sqrt{y\,(y - 2R)}}.$$

Zatem $$V = \frac{1}{3}\pi R^2 . \frac{y^2}{y - 2R}.$$

Żeby znaleźć wartość dla $y$którąby czyniła minimum ilość zmienną $\frac{y^2}{y - 2R}$, uważajmy że tę ilość można pisać $\frac{1}{\frac{1}{y}\left(1 - \frac{2R}{y}\right)}$

albo $\frac{1}{\frac{1}{2R} . \frac{2R}{y}\left(1 - \frac{2R}{y}\right)}$. Więc dość jest, dla minimum objętości V, uczynić maximum wieloczyn $\frac{2R}{y}\left(1 - \frac{2R}{y}\right)$; to wymaga, jako już wiemy, żeby było

$$\frac{2R}{y} = 1 - \frac{2R}{y}, \qquad \text{zkąd} \qquad y = 4R.$$

Więc stożek prosty opisany na sferze ma objętość najmniejszą możebną. gdy jego wysokość jest dwa razy większa od średnicy sfery. Wtedy objętość tego stożka minimum, równa $\frac{8}{3}\pi R^3$, jest dwa razy większa od objętości sfery.

Zagadnienie X.

Mając dany bok a *stożka obrotowego i promień* R *jego podstawy, znaleźć kąt wycinka będącego rozwinięciem powierzchni stożkowej na płaszczyznie.*

Łuk wycinka kołowego, będąc rozwinięciem okręgu podstawy stożka, ma długość $2\pi R$, i promień a; więc, nazywając x kąt tego wycinka, będzie

$$x = \frac{2\pi R}{a}, \quad \text{(IV, 23 wn.)}.$$

Zagadnienie XI.

Z koła promienia R *wyjęto wycinek i utworzono z niego stożek obrotowy. Ile stopni powinien mieć łuk tego wycinka żeby objętość stożka była największa mozebna?*

Bokiem szukanego stożka jest R. A jeśli, biorąc za jedność kątową kąt mający łuk równy swemu promieniowi, oznaczymy przez x kąt wycinka kołowego, wtedy, nie trudno widzieć, promień podstawy stożka wyrazi się przez $\frac{Rx}{2\pi}$, jego wysokość przez $\frac{R}{2\pi}\sqrt{4\pi^2 - x^2}$. Zatem objętość stożka będzie

$$V = \frac{R^3x^2}{24\pi^2}\sqrt{4\pi^2 - x^2}.$$

Dla maximum tej objętości trzeba żeby było

$$\frac{x^2}{2} = 4\pi^2 - x^2; \qquad \text{ztąd} \qquad x = \frac{2}{3}\pi\sqrt{6}.$$

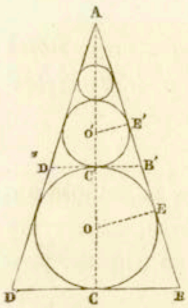
Więc liczba stopni łuku która rozwiązuje zagadnienie jest

$$\frac{180^\circ x}{\pi} = 120^\circ\sqrt{6} = 293^\circ 56' 19''$$

na mniej niż jedną sekundę.

Zagadnienie XII.

W stożek obrotowy A *wpisano jedną sferę* O ; *potem, w przestrzeń zawartą między tą sferą i powierzchnią stożkową, wpisano drugą sferę* O′ *styczną do pierwszej; i tak następnie. Jaka jest granica wszystkich objętości sfer wpisanych?*



Środki tych sfer leżą oczywiście na osi stożka; jeśli więc przez tę oś poprowadzimy płasczyznę, przecięcia sfer będą okręgami kół wielkich, stycznemi między sobą i do boków trójkąta równoramiennego ABD. Poprowadźmy promienie zetknięć OE=R, O′E′ = R′..., summa objętości sfer wpisanych będzie

$$V = \frac{4}{3}\pi\,(R^3 + R'^3 + R''^3 + \ldots).$$

Aby wyrazić tę objętość w funkcyi boków trójkąta tworzącego ABC, uczyńmy, dla skrócenia, $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$.

Mamy $\dfrac{OE}{BC} = \dfrac{AO}{AB}$, albo $\dfrac{R}{a} = \dfrac{b - R}{c} = \dfrac{b}{a + c}$;

zatem $$R = \frac{ab}{a + c}.$$

Uważajmy teraz że promienie sfer O, O′ wpisanych w stożki podobne ABD, AB′D′ są proporcyonalne do wysokości AC, AC′; albowiem,

$$\frac{R'}{R} = \frac{AO'}{AO} = \frac{AC'}{AC} = \frac{b - 2R}{b}.$$

Jeśli więc nazwiemy k stosunek podobieństwa dwóch trójkątów AB′C′, ABC, ostatnia proporcya da, podstawiając wartość dla R,

$$\frac{R'}{R} = k = 1 - \frac{2a}{a + c} = \frac{c - a}{c + a}; \quad \text{zkąd} \quad R' = kR.$$

Owoż, boki trójkąta AB′C′ są ka, kb, kc; zatem mamy tak samo dla promieni R″ i R′ sfer wpisanych w stożki podobne AB″C″ i AB′C′, równości

$$\frac{R''}{R'} = \frac{kc - ka}{kc = ka} = \frac{c - a}{c + a} = k.$$

Ztąd wynika $R'' = kR' = k^2R$; a następnie $R''' = k^3R$, etc. Więc objętość wszystkich sfer wpisanych wyraża się przez

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3 (1 + k^3 + k^6 + k^9 + \ldots$$

Wyrazy nawiasu tworzą postępnię geometryczną malejącą do nieskończoności, w której stosunkiem liczba k^3, a granicą summy jest $\frac{1}{1 - k^3}$. Więc, podstawiając za R i k ich wartości, znajdujemy

$$V = \frac{4}{3}\pi\left(\frac{ab}{a + c}\right)^3 \frac{1}{1 - \left(\frac{c - a}{c + a}\right)^3} = \frac{2}{3}\pi \cdot \frac{a^2b^3}{a^2 + 3c^2}.$$

A nakoniec, z przyczyny $c^2 = a^2 + b^2$, otrzymujemy

$$V = \frac{4}{3}\pi\frac{a^2b^3}{4a^2 + 3b^2}.$$

ZADANIA.

963. — **Jak się wyrazi objętość piramidy, gdyby wzięto sferę za jedność objętości, koło wielkie za jedność powierzchni i jego promień za jedność linij?**

934. — **Wyrachować promień wewnętrzny rurki szklannej walcowej, wiedząc że ta rurka próżna waży 90 grammów, a zaś 200 grammów gdy wprowadzono do niej kolumnę merkuryuszu wysokości 9 centymetrów. (Gęstość merkuryuszu jest 13,568.)**

965. — Aby wyciągnąć wodę ze studni, użyto pompy której rura ma średnicę wewnętrzną d, a jej tłok przebiega drogę h. Średnica studni jest D, a H głębokość wody. Po ilu razach poruszeń tłoku studnia będzie próżna?

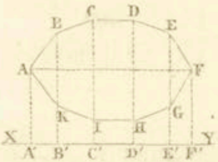
966. — Jeśli w półkole wpisano półwielokąt foremny parzystej liczby boków, i opisano na niem półwielokąt podobny, powierzchnia sfery utworzona obrotem półkoła około jego średnicy jest średnią proporcyonalną między powierzchniami utworzonemi przez dwa półwielokąty.

967. — Stożek obrotowy jest wpisany w walec obrotowy. Przeciąć całą figurę płaszczyzną równoległą do podstawy tak, żeby powierzchnie pnia stożka i walca tej samej wysokości były równowarte.

968. — Wpisać w sferę stożek prosty któregoby powierzchnia wypukła była równowarta powierzchni krymki sferycznej mającej ze stożkiem spólną podstawę.

969. — Wpisać w sferę walec prosty któregoby summa dwóch podstaw była równowarta jego powierzchni wypukłej.

970. — Stożek równoboczny jest wpisany w sferę; wyznaczyć między jakiemi granicami może się zmieniać różnica przecięć tych dwóch figur przez płaszczyznę równoległą do podstawy stożka.



971. — Powierzchnia obrotowa, utworzona przez linię płaską ACFI symetryczną względem prostej AF, około osi XY równoległej do AF, ma za miarę wieloczyn z długości linii tworzącej przez okrąg nakreślony środkiem ciężkości który leży na osi symetryi AF.

972. — Objętość utworzona przez powierzchnię płaską ACFI, symetryczną względem prostej AF, ma za miarę wieloczyn z powierzchni tworzącej przez okrąg nakreślony środkiem ciężkości który leży na osi symetryi AF.

Te dwa twierdzenia są szczególnym przypadkiem sławnego twierdzenia Guldina które już było znane Starożytnym.

973. — Środki ścian wielościanu foremnego są wierzchołkami innego wielościanu foremnego, sprzężonego z pierwszym.

Wierzchołki wielościanu foremnego są środkami ścian innego wielościanu foremnego, sprzężonego z pierwszym.

974. — Środki krawędzi czworościanu foremnego są wierzchołkami ośmiościanu foremnego.

975. — W każdy sześcian można wpisać czworościan foremny, którego

wierzchołki i krawędzie należą do wierzchołków sześcianu i do przekątnych jego ścian.

976. — W każdy dwunastościan foremny można wpisać sześcian którego wierzchołki i krawędzie należą do wierzchołków tego dwunastościanu i do przekątnych jego ścian.

Uwaga. — Można tym sposobem wpisać 5 sześcianów w dwunastościan foremny.

977. — Na danej sferze wykreślić cztery koła równe i styczne między sobą.

Biorąc te koła za podstawy czterech stożków równych i stycznych do sfery, wyrachować objętość całej figury.

978. — Wyrachować objętość utworzoną obrotem pięciokąta foremnego około jednego z boków.

979. — Litr do mierzenia rzeczy sypkich jest walcem obrotowym którego wysokość równa się średnicy podstawy, a objętość zawiera 1 decymetr sześcienny. Jakie są rozmiary tego naczynia?

980. — Poprowadzić równoległę do podstawy trójkąta tak, żeby objętości utworzone przez dwie części trójkąta obracającego się około tej równoległej były równowarte.

981. — Przeciąć trójkąt ABC sieczną AD tak, żeby objętości utworzone obrotem dwóch części ADB i ADC, około osi XY danej na ich płaszczyznie, były równowarte.

982. — W stosie trójkątnym kul poprowadzono płaszczyzny styczne które zamykają ten stos w czworościan foremny. Wyrachować stosunek między częścią *pełną* i częścią *próżną* tego czworościanu.

983. — Gdy półokrąg podzielony na 3 równe części, obraca się około swej średnicy, wtedy: 1° Strefa utworzona przez łuk środkowy równa się summie stref skrajnych. 2° Wycinek sferyczny mający strefę środkową za podstawę równa się summie dwóch innych. 3° Odcinek sferyczny środkowy jest $\frac{11}{5}$ summy objętości dwóch krymek przyległych.

984. — Jaka jest krymka sferyczna zawierająca objętość maximum pod tą samą powierzchnią? I na odwrót, jaka jest krymka sferyczna mająca powierzchnię minimum z tą samą objętością?

985. — W trójkącie sferycznym kąt $A = 60°9'50''$, $B = 75°40'20''$, $C = 50°30'30''$; promień sfery 0^m05. Znaleźć powierzchnię S na mniej niż

1 millim. kwad. błędu. (Działając za pomocą logarytmów powinno się otrzymać S = 0,0003495...)

986. — Dwa trójkąty sferyczne są równowarte gdy ich trójkąty biegunowe mają ten sam obwód ; i nawzajem.

987. — Jeśli weźmiemy kąt prosty za jedność kątów i trójkąt trójprostokątny za jedność powierzchni, *powierzchnia wielokąta sferycznego wypukłego* wyrazi się przez *liczbę 4 mniej obwód wielokąta biegunowego*.

988. — Ze wszystkich trójkątów sferycznych mających dwa boki dane, trójkąt powierzchni maximum jest ten w którym kąt zawarty między temi bokami jest równy summie dwóch innych kątów.

989. — Ze wszystkich trójkątów sferycznych równoobwodowych i równej podstawy, trójkąt równoramienny jest maximum.

990. — Podzielić trójkąt sferyczny na dwie części będące w stosunku danym ; prowadząc łuk koła wielkiego przez jeden wierzchołek.

991. — Wyrachować kąty trójkąta sferycznego, wiedząc że są proporcyonalne do liczb 1, 2, 3, i że powierzchnia tego trójkąta jest ćwiercią trójkąta trójprostokątnego.

992. — Wykreślić ukośnik sferyczny równowarty danemu trójkątowi sferycznemu.

993. — Wykreślić trójkąt sferyczny znając jego powierzchnię, wielkość i położenie jednego kąta, i punkt przez który ma przechodzić bok przeciwległy.

994. — Zamienić wielokąt sferyczny na trójkąt sferyczny równowarty.

995. — Znaleźć promień R sfery złotej wartającej 100^{zł}; wiedząc że ciężar gatunkowy złota jest 19,258, a 1 gram złota kosztuje 5^{zł},166.

Odp. R = 6,21 millimetrów.

996. — Wpisać w daną sferę graniaston trójkątny foremny mający objętość największą możebną.

997. — W dany stożek kołowy prosty wpisać walec danej powierzchni. Maximum tej powierzchni.

998. — W daną sferę wpisać stożek prosty mający powierzchnię wypukłą maximum.

999. — Znając trzy objętości, utworzone obrotem trójkąta około każdego ze trzech boków, wyrachować te boki.

1000. — Około którego ze trzech boków trzeba obrócić trójkąt żeby utworzył objętość największą możebną?

1001. — Przypuszczając że ziemia jest sferą, wyrachować jej powierzchnię, objętość i ciężar, wiedząc że promień ziemi ma 1232 mil, a jej gęstość jest 4,5 jako okazał Cavendish.

1002. — Przypuszczając że słońce i księżyc są sferami, i wiedząc że słońce jest 65 milionów razy większe od księżyca; w jakim stosunku są odległości środków tych dwóch ciał od środka ziemi? gdy je widzimy z powierzchni ziemi pod tym samym kątem, to jest, gdy ich *średnice pozorne* są równe.

1003. — Promienie ziemi, księżyca i słońca są proporcyonalne do liczb $1, \frac{27}{100}, 110$. Wyrachować powierzchnię i objętość księżyca i słońca w stosunku do powierzchni i objętości ziemi.

1004. — Przeciąć sferę płaszczyzną taką, żeby powierzchnia przecięcia była równowarta różnicy dwóch krymek sferycznych na które ta płaszczyzna rozdziela sferę.

1005. — Przeciąć sferę płaszczyzną taką, żeby powierzchnia wielkiego koła była średnią proporcyonalną między dwiema krymkami wyznaczonemi przez tę płaszczyznę.

1006. — Przeciąć sferę płaszczyzną taką, żeby powierzchnia przecięcia była równa różnicy dwóch stref które ta płaszczyzna wyznacza.

1007. — Przeciąć sferę dwiema płaszczyznami równo oddalonemi od środka sfery, tak żeby summa powierzchni dwóch przecięć była równa strefie zawartej między temi płaszczyznami.

1008. — Przeciąć sferę płaszczyzną taką, żeby podzieliła na dwie równe części wycinek sferyczny, mający za podstawę mniejszą z dwóch krymek sferycznych które ta płaszczyzna wyznacza.

1009. — W daną sferę wpisać walec któregoby powierzchnia cała była największa możebna.

1010. — W daną sferę wpisać stożek prosty któregoby powierzchnia cała była największa możebna.

1011. — Wpisać w sferę stożek któregoby powierzchnia boczna była równowarta powierzchni krymki sferycznej przyległej.

1012. — Wyznaczyć kąt południków Paryża i Londynu, wiedząc że wrzecienie ziemskie które tworzą zawiera 3367 miryametrów kwadratowych.

1013. — Podzielić sferę na dwa odcinki w stosunku $m : n$, przez płaszczyznę prostopadłą do danej średnicy.

1014. — Wpisać w sferę stożek równowarty odcinkowi sferycznemu przyległemu.

1015. — Wpisać w półsferze walec największy możebny.

1016. — Wpisać w półsferze walec taki, żeby krymka sferyczna stojąca na podstawie wyższej była jego trzecią częścią.

1017. — Jakie powinno być położenie trójkąta ABC, żeby, mając wierzchołek A na osi leżącej na jego płaszczyźnie, utworzył swoim obrotem około tej osi objętość największą możebną ?

1018. — Na danej sferze opisać stożek któregoby powierzchnia cała równała się danemu kołu πa^2.

1019. — Jakie położenie powinien mieć kwadrat żeby, obrotem swoim około osi która przechodzi przez jeden z jego wierzchołków i leży na jego płaszczyznie, utworzył objętość największą możebną ?

1020. — Znaleźć na kierunku średnicy półkoła AB, punkt P taki żeby, poprowadziwszy styczne BM, objętość utworzona obrotem całej figury około tej średnicy miała wielkość daną πa^3.

1021. — To samo, żeby objętość utworzona obrotem figury AMP *albo* BMP, równała się ćwierci objętości sfery.

To samo, żeby powierzchnie utworzone przez łuk AM i przez styczne PM były w stosunku danym.

1022. — Są dane dwa koła O, O'; znaleźć na linii środków OAA'O', punkt P taki żeby, poprowadziwszy styczne PC i PC' do tych kół, i obracając całą figurę około linii środków jako osi, summa dwóch stref utworzonych przez łuki AC i A'C' była największa możebna.

1023. Podzielić strefę w stosunku średnim i skrajnym płaszczyzną równoległą do jej podstaw.

1024. — Podzielić sferę w stosunku średnim i skrajnym sferą spółśrodkową.

1025. — Znaleźć maximum objętości walca obrotowego którego powierzchnia cała jest dana.

1026. — Znaleźć maximum objętości stożka obrotowego którego powierzchnia cała jest dana.

1027. — Znaleźć objętość utworzoną obrotem połowy dziesięciokąta foremnego około jednej z jego średnic.

1028. — Przeciąć sferę płaszczyzną tak, żeby powierzchnia stożka opisanego wedle okręgu przecięcia, więcej m razy powierzchnia krymki sferycznej zawartej w tym stożku, równała się danej powierzchni koła.

1029. — Podzielić powierzchnię sfery w stosunku średnim i skrajnym, płaszczyzną prostopadłą do danej średnicy.

1030. — Wyrachować promienie podstaw pnia stożka prostego wpisanego w daną sferę, znając objętość i wysokość tego pnia.

1031. — Wyrachować powierzchnię wypukłą, powierzchnię całą i objętość stożka równobocznego w funkcyi jego boku. Na jaką wartość tego boku powierzchnia cała stożka równa się metrowi kwadratowemu a jego objętość metrowi sześciennemu?

1032. — Podzielić powierzchnię boczną stożka obrotowego na n części równych.

1033. — W dany stożek wpisać walec danej objętości.

Na danym walcu opisać stożek danej objętości.

Dyskutować możebność tych dwóch zagadnień.

1034. — Jaka jest objętość maximum stożka obrotowego którego bok jest dany?

1035. — W ciecz, której ciężar gatunkowy jest d, zanurzono pień stożka obrotowego mającego gęstość δ; promienie podstaw pnia są R i r, a wysokość h. Wyrachować wysokość części zanurzonej i promień przecięcia wyznaczonego przez powierzchnię poziomu cieczy.

1036. — Wyrachować promienie podstaw stożka obrotowego, znając wysokość, bok i powierzchnię *albo* objętość tego stożka.

1037. — Jaki jest stosunek objętości utworzonych przez równoległobok obracający się kolejno około dwóch boków przyległych?

1038. — Znaleźć promień sfery opisanej na piramidzie trójkątnej której jeden z kątów trójściennych jest trójprostokątny.

1039. — Wyrachować promienie podstaw pnia stożka obrotowego którego wiadome są: wysokość, bok i powierzchnia *albo* objętość.

1040. — Strefa, którą dwie dane sfery spółśrodkowe przejmują na sferze zmiennej przechodzącej przez ich środek, jest stała.

1041. — Wyznaczyć na danej sferze krymkę sferyczną, którejby powierzchnia była podwójną powierzchni utworzonej przez cięciwę łuku rodzącego tej krymki.

1042. — Znając długość osi kotła walcowego zakończonego półsferzami, wyznaczyć rozmiary części walcowej tak, żeby objętość kotła była równa danej.

1043. — Jeśli z każdego wierzchołka równoległościanu jako środka, opisano sfery równe, te wszystkie sfery wzięte razem przejmują część objętości równoległościanu równą jednej z nich.

1044. — Objętość sześcianu jest równa sześć razy wziętej objętości ośmiościanu foremnego, który ma wierzchołki we środkach ścian sześcianu.

1045. — Mając dane dwa trójkąty i punkt na ich płasczyznie, poprowadzić przez ten punkt taką prostę żeby objętości utworzone przez dwa trójkąty, obracające się około tej prostej, były w stosunku danym.

1046. — Znaleźć krawędź czworościanu foremnego, wiedząc że gdy objętość zwiększa się ilością v, krawędź zwiększa się ilością k.

1047. — Objętość utworzona obrotem sześciokąta foremnego około boku jest równowarta sferze której średnica jest potrójną tego boku.

1048. — Znaleźć wysokość strefy równowartej swym równym podstawom.

1049. — Znaleźć promień sfery, wiedząc że jej objętość V powiększa się ilością v gdy promień R powiększa się ilością r.

1050. — Na sferze owłoką podstaw trójkątów sferycznych, mających kąt spólny i ten sam obwód, jest koło.

1051. — Jeśli powierzchnia małego koła jest $\frac{1}{6}$ powierzchni sfery na której leży, wtedy, średnica, boki kwadratu i trójkąta równobocznego wpisane w to koło są krawędziami trzech wielościanów foremnych : czworościanu, sześcianu i ośmiościanu, wpisanych w tę sferę.

1052. — Jeśli powierzchnia małego koła jest $\frac{1}{5}$ powierzchni sfery na której leży, wtedy boki dwóch pięciokątów foremnych wpisanych w to koło są krawędziami : 1° dwóch dwudziestościanów foremnych, wypukłego i gwiazdzistego ; 2° dwóch dwudziestościanów foremnych gwiaździstych z kątami pięciościennemi.

1053. — W każdym z dwóch dwudziestożcianów foremnych krawędzie przecinają się, po trzy, w dwudziestu punktach, ktore są wierzchołkami dwóch dwunastościanów foremnych z kątami trójściennemi, wypukłego i gwiaździstego.

1054. — Wiedząc że ciężar jednego decymetra sześciennego żelaza lanego jest $7^{k},2$ wyrachować, z największem przybliżeniem możebnem, średnicę kuli ważącej 12 kilogr.

KSIĘGA DZIESIĄTA

O POWIERZCHNIACH KRZYWYCH W OGÓLNOŚCI.

Widzieliśmy na początku księgi VIII że płaszczyzna, powierzchnie walcowa i stożkowa, powierzchnie obrotowe są miejscem położeń linij prostych albo krzywych, zwanych *liniami rodzącemi*, które się posuwają w przestrzeni opierając się na innych liniach, mianowanych *kierownicami*.

Zogólniając to wyobrażenie, łatwo pojmujemy że

Wszelka powierzchnia jest miejscem geometrycznem położeń linii rodzącej, która się porusza w przestrzeni, sposobem ciągłym, zmieniając nawet kształt jeśli trzeba, wedle ustawy wyznaczonej.

Do tego cośmy już powiedzieli o powierzchniach obrotowych, dodajemy tylko że te powierzchnie biorą nazwisko od krzywych południkowych które są ich liniami rodzącemi.

I tak, powierzchnia utworzona obrotem ellipsy około jednej z dwóch osi nazywa się ELLIPSOIDĄ OBROTOWĄ.

Ellipsoida obrotowa jest *przydłużona* albo *spłasczona* według jak ellipsa rodząca obraca się około wielkiej osi albo około małej.

Powierzchnia ziemi ma kształt ellipsoidy obrotowej trochę spłasczonej przy biegunach.

Nazywają także ziemię i inne planety *sferoidami*.

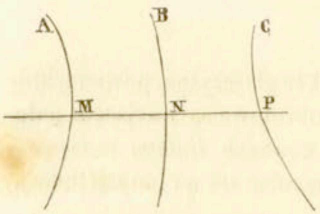
Powierzchnia utworzona obrotem hiperboli około osi *ogniskowej* nazywa się HIPERBOLOIDĄ OBROTOWĄ *o dwóch płachtach*.

Powierzchnia utworzona obrotem hiperboli około osi *urojonej* (niepoprzecznej) nazywa się HIPERBOLOIDĄ OBROTOWĄ *o jednej płachcie*.

Powierzchnia utworzona obrotem paraboli około osi nazywa się PARABOLOIDĄ OBROTOWĄ.

Powierzchnie mające linię prostą za linię rodzącą, nazwano PROSTORODNEMI.

Trzy linie jakiekolwiek A, B, C, *wzięte za kierownice wyznaczają powierzchnię prostorodną.*



Jakoż, niech będzie jakikolwiek punkt M na linii A ; można zawsze wyobrazić dwa stożki mające ten punkt za wierzchołek i linie B i C za kierownice.

Ogólnie mówiąc, te dwa stożki przecinają się wedle jednej albo kilku krawędzi, jako MNP, które przechodzą przez spólny wierzchołek M, i opierają się na kierownicach B i C. Owoż, gdy punkt M posuwa się po linii A, punkta N i P posuwają się po liniach B i C ; więc linia prosta MNP tworzy powierzchnię wyznaczoną.

Z tego twierdzenia wynika że wszelka powierzchnia prostorodna może być uważana jako mająca za kierownice trzy pewne linie A, B, C; bo oczywiście można wziąć za kierownice trzy jakiekolwiek linie leżące na tej powierzchni, które spotykają wszystkie jej rodzące prostolinijne.

Można zastąpić kierownice prostolinijne albo krzywolinijne przez powierzchnie na których muszą leżeć linie rodzące, albo przez płaszczyzny do których linie rodzące muszą zostawać równoległemi. Te płaszczyzny biorą wtedy nazwisko *płaszczyzn kierowniczych.*

Powierzchnie prostorodne nazywają się *rozwijalnemi*, jeśli się mogą rozpościerać na płaszczyznie bez rozdarcia ani fałdów.

Wszystkie inne powierzchnie prostorodne nie rozwijalne nazywają sie ogólnie *powierzchniami skośnemi.*

Powierzchnie walcowa i stożkowa są najprostszym przykładem powierzchni rozwijalnych. Jakoż, uważając powierzchnię walcową jako granicę powierzchni bocznej graniastonu, którego krawędzie boczne po sobie idące są nieskończenie do siebie zbliżone, otwórzmy ją wedle jednej z tych krawędzi; ponieważ dwie krawędzie sąsiednie są na tej samej płaszczyznie, można, obracając około spólnej krawędzi, sprowadzić płaszczyznę pierwszej ściany na płaszczyznę drugiej; potem płaszczyznę dwóch pierwszych ścian na płaszczyznę trzeciej; i tak dalej.

Podobne rozumowanie stosuje się do powierzchni stożkowej.

Powierzchnie rozwijalne są rozmaite. *Miejsce geometryczne stycznych do danej krzywej skośnej* (linia o dwóch krzywiznach) *jest powierzchnią rozwijalną.* Dowodzi się tego, uważając krzywę skośną jako granicę wielokąta skośnego, w którym kierunki boków nieskończenie malejących dążą do stycznych tej krzywej. Taka powierzchnia składa się z dwóch różnych części, przedzielonych tą krzywą skośną której sławny Monge dał imie *krawędzi zwrotu* (*).

Między powierzchniami skośnemi najznamienitsze są:

Hiperboloida o jednej płachcie, mająca za kierownice trzy linie proste nie równoległe do jednej płaszczyzny.

Powierzchnia utworzona obrotem linii prostej około osi nie leżącej na jej płaszczyznie jest hiperboloidą o jednej płachcie.

Paraboloida hiperboliczna, albo płaszczyzna spaczona, która ma za kierownice trzy linie proste równoległe do jednej płaszczyzny, albo ogólniej, dwie linie proste za kierownice i płaszczyznę kierowniczą.

Walec skośny, który ma dwie linie krzywe za kierownice i płaszczyznę kierowniczą.

Stożkowiec, mający linię prostą i linię krzywą za kierownice i płaszczyznę kierowniczą.

Stożkowiec jest *prosty* gdy kierownica prostolinijna jest prosto-

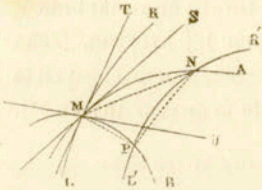
(*) Można dowieśdź że każda powierzchnia rozwijalna ma swoją krawędź zwrotu. Walec i stożek zdają się być wyjątkiem; ale ten wyjątek usunie się, jeśli będziemy uważali że w stożku krawędzią zwrotu jest punkt, wierzchołek stożka, a zaś w walcu krawędzią zwrotu jest linia prosta w nieskończoności.

padła do płaszczyzny kierowniczej; wtedy ta kierownica nazywa się osią stożkowca. Powierzchnia spodnia kręconych schodów jest takim stożkowcem który się nazywa *helicoidą skośną*.

Własności tych wszystkich powierzchni są przedmiotem GEOMETRYI ANALITYCZNEJ I GEOMETRYI OPISUJĄCEJ, do których odsyłamy.

TWIERDZENIE I.

Miejscem stycznych poprowadzonych przez jeden punkt powierzchni, do różnych krzywych które na niej przez ten punkt przechodzą, jest płaszczyzna.



Niech będzie dany punkt M na powierzchni której rodzącą w tym punkcie jest linia LMR. Poprowadźmy przez punkt M dwie jakiekolwiek krzywe MA i MB na powierzchni, i niech będą MT, MS, MU styczne do tych trzech linij. Możemy uważać linie MA i MB jako kierownice danej powierzchni utworzonej przez linię LR, która zmienia swoje położenie i nawet kształt, jeśli trzeba. Niech będzie L'R' położenie linii rodzącej dostatecznie zbliżone do LR, tak żeby przecinało linie MA i MB w punktach N i P. Poprowadźmy cięciwy MN, MP, NP. Te trzy proste są ciągle na jednej płaszczyznie, jakkolwiek blizko linia L'R' dosięga do LR. Owoż, gdy L'R' schodzi się z LR, punkta N i P jednoczą się w punkcie M, i sieczne MN, MP stają się stycznemi MS, MU; więc, jeśli sieczna NP staje się styczną MT do MR, co zawsze ma miejsce byle punkt M nie był punktem *osobliwym*, wtedy trzy styczne MS, MT, MU leżą na jednej płaszczyznie. Ale krzywa MA jest jakakolwiek; ztąd wynika że wszystkie styczne w pnnkcie M do linij leżących na powierzchni są na jednej płaszczyznie.

Płaszczyzna, będąca miejscem stycznych do linij które na powierzchni przez dany punkt poprowadzić można, nazywa się *płaszczyzną styczną do powierzchni w tym punkcie*.

Uwaga. — Powyższe twierdzenie, jakośmy zastrzegli, może nie być prawdziwe gdy dany punkt M jest *osobliwy*, jako na przykład wierzchołek stożka. W tym punkcie, miejscem stycznych nie jest płaszczyzna, ale sama powierzchnia stożkowa. Ta okoliczność zdarza się także przy biegunie powierzchni obrotowej, jeśli linia południkowa spotyka oś pod kątem nie prostym. Jednakże, gdy jest dana linia na stożku przechodząca przez jego wierzchołek, wtedy płaszczyzna styczna do stożka w każdym punkcie tej linii jest wyznaczona; a więc także wyznaczona w punkcie który przypada w wierzchołku tego stożka.

Wniosek I. — Aby otrzymać płaszczyznę styczną do powierchni w danym punkcie, dość poprowadzić, przez ten punkt, styczne do dwóch jakichkolwiek linij nakreślonych na tej powierzchni. Jeśli powierzchnia jest prostorodna, ponieważ linia rodząca, jako prosta, jest sama swoją styczną, trzeba tylko poszukać drugiej stycznej w danym punkcie aby mieć płaszczyznę styczną.

II. — Gdy się dwie powierzchnie przecinają, styczna do tego przecięcia w danym punkcie jest przecięciem płaszczyzn stycznych w tym punkcie.

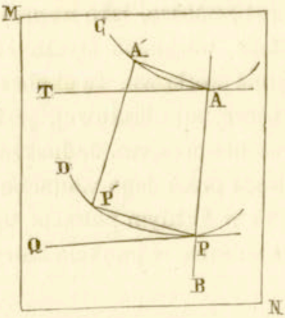
Zatem, jeśli chcemy mieć styczną do przecięcia jakiejkolwiek powierzchni z płaszczyzną w danym punkcie, prowadzimy do powierzchni w tym punkcie płaszczyznę styczną, której przecięcie z daną płaszczyzną wyznacza szukaną styczną.

Określenie. — Normalną do powierzchni w punkcie M jest prostopadła do płaszczyzny stycznej w tym punkcie.

Twierdzenie II.

Płaszczyzna styczna MN *do powierzchni rozwijalnej w danym punkcie* A *jest styczna wzdłuż całej linii rodzącej* AB *która przechodzi przez ten punkt.*

Przez punkt P linii rodzącej AB, która przechodzi przez dany punkt A, poprowadźmy jakąkolwiek krzywę PD na powierzchni i styczną PQ do tej krzywej.



Ponieważ płaszczyzna MN, styczna w punkcie A do powierzchni, zawiera linię rodzącą AB, dość będzie okazać że styczna PQ leży na tej płaszczyznie. Owoż, przez punkt A poprowadźmy na powierzchni dowolną krzywę AC której styczna AT będzie oczywiście na płasczyznie MN, i uważajmy położenie A′P′ linii rodzącej nieskończenie blizkie położenia AP. Proste AP i A′P′ leżą na jednej płasczyznie, bo powierzchnia jest rozwijalna; zatem sieczne AA′ i PP′ są na tej samej płasczyznie. A że, gdy prosta A′P′ schodzi się z AP, sieczne AA′ i PP′ stają się stycznemi AT i PQ, więc te styczne są obie na płasczyznie MN która dlatego jest płasczyzną styczną wzdłuż całej krawędzi AB.

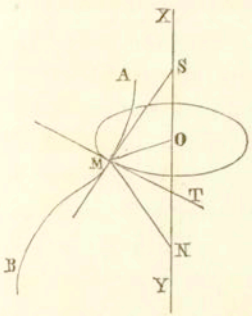
Wniosek. — Płasczyzna styczna do walca albo do stożka w danym punkcie jest styczna wzdłuż krawędzi przechodzącej przez ten punkt.

Uwaga. — Płasczyzna styczna do powierzchni skośnej w danym punkcie zawiera linię rodzącą która przez ten punkt przechodzi, ale nie jest styczna wzdłuż tej całej linii; bo w takiej powierzchni dwa położenia sąsiednie linii rodzącej, jakkolwiek blizkie, nie są nigdy na jednej płasczyznie.

Twierdzenie III.

Płasczyzna styczna do powierzchni obrotowej jest prostopadła do płasczyzny południka przechodzącego przez punkt zetknięcia.

Jakoż, płasczyzna styczna do powierzchni obrotowej w punkcie M zawiera styczną MS do południka AMB, i styczną MT do równoleżnika OM. Owoż, płaszczyzny południka i równoleżnika są do siebie prostopadłe, i styczna MT, prostopadła do promienia OM, jest prostopadła do płaszczyzny południka AMB; więc płaszczyzna styczna do powierzchni obrotowej jest prostopadła do płaszczyzny południka w punkcie zetknięcia.



Wniosek. — Normalna MN do powierzchni obrotowej leży na płaszczyznie południka punktu zetknięcia, i spotyka oś w punkcie N który jest spodkiem wszystkich normalnych odpowiedających punktom zetknięcia na jednym równoleżniku. Ztąd wynika że:

Normalne do powierzchni obrotowej, w punktach jednego równoleżnika, tworzą stożek obrotowy mający wierzchołek w punkcie N *osi powierzchni.*

Styczne do południków w punktach jednego równoleżnika tworzą także stożek obrotowy mający wierzchołek w punkcie S *osi powierzchni.*

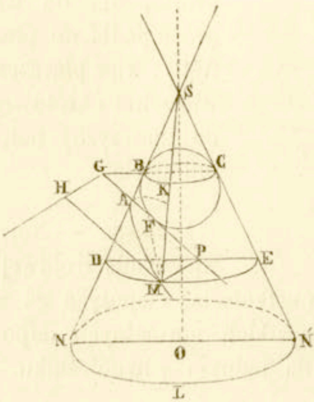
Kąt NMS, który mierzy w punkcie M kąt płaszczyzn stycznych do dwóch powyższych stożków, jest prosty; więc powierzchnie tych stożków są *prostokątne*.

PRZECIĘCIA STOŻKOWE.

Twierdzenie IV.

Przecięcie stożka kołowego prostego przez płaszczyznę jest ellipsą albo hiperbolą albo parabolą.

Niech będzie AM linia krzywa wyznaczona na stożku obrotowym S przez płaszczyznę sieczną jakąkolwiek. Poprowadźmy przez oś SO płaszczyznę SOA prostopadłą do płaszczyzny linii krzywej AM; ta płasczyzna południkowa przetnie płasczyznę sieczną



wedle prostej AP, a zaś stożek wedle dwóch linij rodzących SN i SN', których kąt NSN' nazywa się kątem stożka. Po czem, wpiszmy w stożek sferę styczną do płasczyzny siecznej; albo, co to samo, na płasczyznie południkowej NSN' wpiszmy w kąt stożka okrąg BCF styczny wewnętrznie do prostej AP, i obróćmy całkiem tę płasczyznę około osi SO. W tym obrocie, krawędź SN utworzy daną powierzchnię stożkową, a zaś okrąg BCF utworzy sferę, która będzie styczna do tej powierzchni wedle równoleżnika BKC i styczna do płasczyzny siecznej w punkcie F.

Uważajmy teraz jakikolwiek punkt M przecięcia AM, i poprowadźmy przez M płasczyznę DME równoległą do podstawy NLN' stożka; ta płasczyzna przetnie płasczyznę sieczną wedle prostej MP prostopadłej do AP. Po czem, przedłużmy prostę AP i średnicę BC równoleżnika aż do spotkania G, i na płasczyznie siecznej wyprowadźmy prostopadłę GH do AP; nakoniec, połączmy MF, i spuśćmy prostopadłę MH na GH. Chodzi teraz o to aby znaleźć wartość stosunku $\frac{MF}{MH}$.

Owoż, jeśli poprowadzimy linię rodzącą SM która spotka w K równoleżnik BC, będzie $MF = MK = DB$; a zaś $MH = PG$.

Zatem
$$\frac{MF}{MH} = \frac{DB}{PG}.$$

Ale dwa trójkąty podobne ABG, ADP dają
$$\frac{AB}{AG} = \frac{AD}{AP} = \frac{AB + AD}{AG + AP} = \frac{DB}{PG}.$$

Więc
$$\frac{MF}{MH} = \frac{AB}{AG}.$$

Ostatnie równanie pokazuje że, na płaszczyznie siecznej AMP, odległości MF i MH jakiegokolwiek punktu M krzywej AM od punktu stałego F i od prostej stałej GH są w stosunku stałym; więc przecięcie stożkowe AM jest ellipsą albo hiperbolą albo parabolą (IV, 35), mającą punkt F za ognisko i prostę GH za kierownicę.

Jeśli $\frac{AB}{AG} < 1$, w trójkącie ABG kąt G jest mniejszy od kąta ABG i temsamem mniejszy od spełnienia kąta BCE; wtedy proste AP i SE przecinają się na płachcie SNLN′ stożka, to jest, płaszczyzna sieczna AMP spotyka wszystkie położenia linii rodzącej SM. Więc w tym przypadku przecięcie stożkowe AM jest linią zamkniętą która się nazywa *ellipsa*.

Jeśli $\frac{AB}{AG} > 1$, kąt AGB jest większy od kąta ABG i temsamem większy od spełnienia kąta BCE; wtedy prosta AP spotyka przedłużenie krawędzi SE, to jest, płaszczyzna sieczna AMP przecina obie płachty stożka. Więc w tym przypadku przecięcie stożkowe składa się z dwóch części oddzielnych i nieskończenie rozległych które stanowią *hiperbolę*.

Jeśli $\frac{AB}{AG} = 1$, kąt AGB, równy kątowi ABG, jest spełnieniem kąta BCE; wtedy proste AP i SE są równoległe. To pokazuje że płaszczyzna sieczna AMP spotyka wszystkie linie rodzące stożka prócz jednej SE. Więc w tym przypadku przecięcie stożkowe AM jest linią krzywą otwartą, rozciągającą się nieskończenie na dwie strony, która się nazywa *parabola*.

Uwaga. — Jeśli płaszczyzna sieczna AM przestaje być styczną do sfery wpisanej w stożek i przecina ją wedle pewnego koła, wtedy odległość MF, zawsze równa odległości MK, jest styczna do tego koła. Powtarzając powyższe rozumowanie, łatwo znajdujemy następujące twierdzenie :

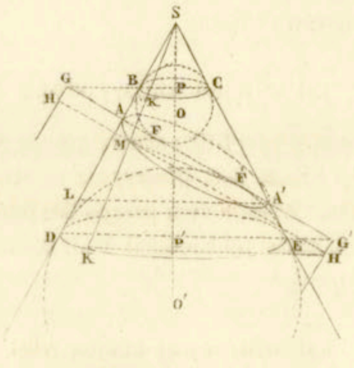
Miejscem punktów, z których poprowadzone styczne do koła stałego zostają z odległościami tych punktów od prostej stałej w stosunku stałym, jest linia stożkowa.

Zagadnienie.

Umieścić daną ellipsę, albo hiperbolę, albo parabolę, na danym stożku obrotowym.

Przypuśćmy zagadnienie rozwiązane, i niech będzie :

1° Ellipsa AMA′ umieszczona na stożku obrotowym mającym



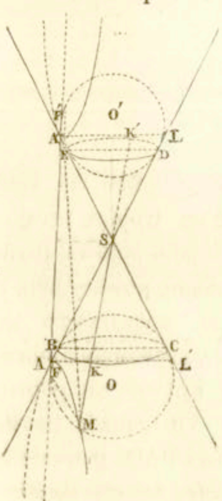
kąt $S=2\beta$. Sama figura jasno pokazuje że na płaszczyznie ellipsy, ślad AA′ płaszczyzny południkowej prostopadłej jest *wielką osią* tej ellipsy; ogniskami są punkta F i F′ w których koła, wpisane O i zawpisane O′, dotykają wielkiej osi, a kierownicami prostopadłe GH i GH′ do tej osi.

Ztąd wynika że AF′ = AD; ale DL = EA′ = A′F′.

$$\text{Zatem} \qquad AL = FF', \quad \text{i} \quad \frac{MF}{MH} = \frac{AB}{AG} = \frac{AL}{AA'} = \frac{c}{a}.$$

Więc w trójkącie AA′L wiadome są dwa boki AA′, AL, i kąt L jako dopełnienie połowy kąta S stożka. Tym sposobem zadane zagadnienie przywodzi się do zbudowania trójkąta którego *znane są dwa boki i kąt przeciwległy jednemu z nich*. A ponieważ dany kąt ALA′ jest przeciwległy większemu z dwóch danych boków, trójkąt jest zawsze możebny i wyznaczony. Zbudowawszy ten trójkąt, wyprowadzi się ze środka boku LA′, prostopadłę która przetnie prostę LA w punkcie S; tak że powierzchnia stożkowa, utworzona obrotem prostej SL około tej prostopadłej, będzie równa danej, i płaszczyzna poprowadzona wedle AA′, prostopadle do płaszczyzny trójkąta AA′L, przetnie tę powierzchnię wedle danej ellipsy. *Więc można zawsze umieścić daną ellipsę na danym stożku obrotowym.*

2° Dana hiperbola jest umieszczona na danym stożku obrotowym. Figura pokazuje że w trójkącie AA′L wiadome są: oś poprzeczna $AA' = 2a$, odległość ogniskowa $FF' = AL = 2c$, i kąt L jako dopełnienie połowy kąta $S = 2\beta$. A że ten kąt jest przeciwległy mniejszemu z dwóch boków, zagadnienie może mieć dwa rozwiązania albo tylko jedno, a nawet nie mieć żadnego. Możebność zagadnienia wymaga żeby bok AA′ nie był mniejszy od prostopadłej spuszczonej z wierzchołka A na bok LA′. Za pomocą trygonometryi, wielkość tej prostopadłej wyraża się przez $2c \operatorname{wst} L = 2c \operatorname{dos} \beta$; zatem trzeba żeby było



$$2a > 2c \operatorname{dos} \beta \qquad \text{albo} \qquad \frac{a}{c} > \operatorname{dos} \beta.$$

$\frac{AA'}{AL} = \frac{2a}{BD}$

AA′

Owoż, odnosząc się do figury na stronicy 301, i oznaczając przez 2θ kąt niemaltycznych, mamy $\operatorname{dos}\theta = \frac{a}{c}$; jeśli podstawimy tę wartość, będzie

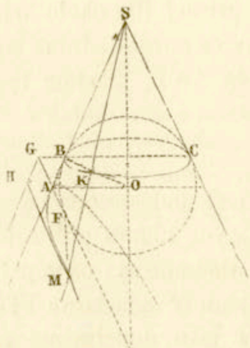
$$\operatorname{dos}\theta > \operatorname{dos}\beta;$$

zkąd, uważając że kąty θ i β są ostre, wynika

$$\theta < \beta \quad \text{albo} \quad 2\theta < 2\beta.$$

Więc, *żeby na danym stożku obrotowym można umieścić daną hiperbolę, trzeba żeby kąt niemaltycznych, zawierający tę krzywę, nie przewyższał kąta stożka.*

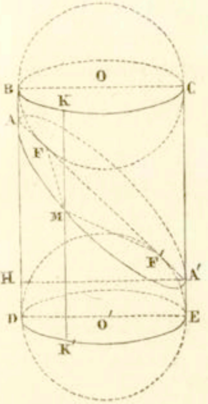
3° Niech będzie parabola AM umieszczona na danym stożku



Mamy AB = AG = AF, i widzimy łatwo że promień OA koła stycznego O jest dwójsieczną kąta BAF. Więc trójkąt prostokątny ABO, w którym wiadomy jest bok AB jako połowa parametru danej paraboli, i kąt BAO jako dopełnienie połowy kąta S stożka, jest wyznaczony. Zbudowawszy go, wyprowadzi się prostopadłę OS do OA; powierzchnia stożkowa utworzona obrotem prostej AS około OS będzie równa danej, i płaszczyzna poprowadzona prostopadle do płaszczyzny trójkąta ABO, przez prostę AF która tworzy z prostą AO kąt równy kątowi BAO, przetnie tę powierzchnię wedle danej paraboli. *Można więc zawsze umieścić daną parabolę na danym stożku obrotowym.*

Przecięcie walcowe. — Jeśli wierzchołek stożka obrotowego oddala się w nieskończoność, wtedy stożek staje się walcem obrotowym. Więc *przecięcie walca prostego o podstawie kołowej jest ellipsą.*

Mimo tego rozumowania które jest dostateczne, dobrze jest znać dowodzenie wprost. Niech będzie tedy przecięcie AM walca



obrotowego przez płaszczyznę jakąkolwiek. Aby okazać że ono jest ellipsą, nic łatwiejszego jak powtórzyć dowodzenie dane dla stożka; ale wskażemy jeszcze inne. W tym celu, poprowadźmy płaszczyznę południkową BCED prostopadłą do płaszczyzny siecznej AMA′, która ją przetnie wedle AA′; poczem, wpiszmy w walec dwie sfery O i O′, styczne do jego powierzchni wedle równoleżników BKC, DK′E, i styczne do płaszczyzny siecznej w punktach F, F′. Jeśli teraz, przez jakikolwiek punkt M krzywej AM, poprowadzimy promienie wodzące MF, MF′, i krawędź KK′ walca, będzie

$$\text{MF} + \text{MF}' = \text{MK} + \text{MK}' = \text{AA}'.$$

Więc przecięcie AM walca obrotowego jest ellipsą która ma punkta F, F′ za ogniska, prostę AA′ za oś wielką, i średnicę walca za *oś mała.*

Ztąd wynika że, *na każdym walcu obrotowym, można zawsze umieścić daną ellipsę, byle tylko jej oś mała była równa średnicy tego walca.*

Uwaga. — To co poprzedza jasno pokazuje że, *Rzut prostokątny ellipsy, mającej osie* $\text{AA}' = 2a$ *i* $\text{DE} = 2b$, *na płaszczyznie równoległej do małej osi i czyniącej z płaszczyzną tej ellipsy kąt* AA′H *taki że*

dos $\text{AA}'\text{H} = \dfrac{\text{HA}'}{\text{AA}'} = \dfrac{b}{a}$, *jest kołem średnicy* $2b$.

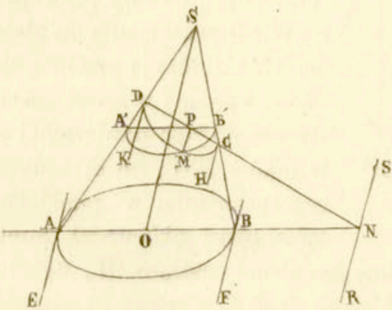
Wzajemnicy tego twierdzenia,

Rzut prostokątny koła na płaszczyznie jest ellipsą której wielka oś jest równa jego średnicy,

dowodzi się, nie można łatwiej, w geometryi analitycznej.

Twierdzenie V.

W stożku pochyłym o podstawie kołowej przecięcie przeciwrównoległe do podstawy jest kołem.



Niech będzie stożek pochyły SAB mający za podstawę koło O. Nazywa się *płaszczyzną główną* płaszczyzna SAB prostopadła do podstawy stożka, i przechodząca przez prostę SO która łączy jego wierzchołek ze środkiem podstawy.

Płaszczyzna sieczna CMD nazywa się *przeciwrównoległą* do podstawy stożka, gdy jest prostopadła do płaszczyzny głównej i jej ślad CD na tej płaszczyznie jest przeciwrównoległy do śladu AB podstawy względem kąta S.

Wiemy że w stożku kołowym przecięcie równoległe do podstawy jest kołem; przypuśćmy że w stożku kołowym pochyłym SAB istnieje drugie przecięcie kołowe CMD nierównoległe do podstawy, i niech będzie RS ślad jego płaszczyzny na płaszczyznie podstawy. Ze środka O spuśćmy na RS prostopadłę ON która spotka okrąg podstawy w punktach A, B; i poprowadźmy styczne AE, BF do podstawy, które będą równoległe do RS. Płasczyzny styczne SAE, SBF do stożka, będąc równoległe do RS (V, 16.), przecinają płasczyznę koła CMD wedle jego stycznych CH i DK które są równoległe do RS. Ztąd wynika że te dwie styczne CH i DK są równoległe między sobą i temsamem prostopadłe do CD; więc ślad RS jest prostopadły do prostej DN. To dowodzi że koła AB i CD są prostopadłe do tej samej płasczyzny przechodzącej przez ich środki i przez wierzchołek S stożka.

Aby teraz wiedzieć pod jakim warunkiem przecięcie CMD jest kołem, przez jego punkt M poprowadźmy, równolegle do podstawy, płasczyznę A′B′ która przetnie stożek wedle koła A′MB′, i płasczyznę przypuszczonego koła CMD wedle prostej MP prostopadłej do płasczyzny głównej ASB.

Owoż, koła CMD i A′MB′ dają

$$\overline{MP}^2 = PC.PD \quad \text{i} \quad \overline{MP}^2 = PA'.PB';$$

ztąd

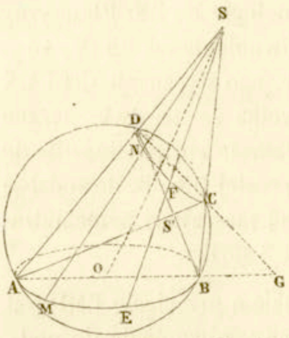
$$PC.PD = PA'.PB'.$$

Więc, żeby przecięcie CMD było kołem, trzeba żeby jego ślad CD i ślad AB podstawy, na płasczyznie głównej SOA, były przeciwrównoległe względem kąta S. Ten warunek konieczny jest dostateczny; bo prowadzi do równania $\overline{MP}^2 = PC.PD$ które pokazuje że przecięcie CMD jest kołem (III, 17, 3°).

Ztąd wynika że, *przez każdy punkt powierzchni stożka kołowego pochyłego, można zawsze poprowadzić dwa przecięcia kołowe, ale tylko dwa; jedno równoległe do podstawy, a drugie przeciwrównoległe.*

Wniosek I.—*Dwa przecięcia stożka kołowego pochyłego, jedno równoległe a drugie przeciwrównoległe do podstawy, są na jednej sferze.*

Albowiem, te dwa przecięcia kołowe są prostopadłe do płasczyzny na której leżą ich średnice AB i CD, a czworobok ABCD jest wpisalny; więc koła AB i CD są na jednej sferze której wielkie koło przechodzi przez cztery punkta A, B, C, D.



Nawzajem, *przez dwa koła leżące na jednej sferze można zawsze poprowadzić dwa stożki.*

Jakoż, przez środki dwóch kół danych na sferze, poprowadźmy płaszczyznę wielkiego koła, która będzie prostopadła do tych kół i przetnie je wedle średnic AB i CD. Owoż, jeśli poprowadzimy proste AD i BC, ich punkt spotkania S będzie wierzchołkiem stożka który ma za podstawę koło AB i przechodzi przez punkta C i D. Ale proste AB i CD są przeciwrównoległe względem kąta S, jako dwa boki przeciwległe czworoboku wpisanego; zatem przecięcie CDN stożka S, przez płaszczyznę prostopadłą do płaszczyzny ABCD, jest kołem mającem CD za średnicę. Więc to koło przystaje do danego koła CD na sferze, i stożek S przechodzi przez oba dane koła AB i CD tej sfery.

Istnieje drugi stożek przechodzący przez te same koła AB i CD, którego wierzchołek jest na przecięciu S′ przekątnych AC i BD czworoboku ABCD.

W szczególnym przypadku, pierwszy z tych dwóch stożków może stać się walcem, drugi linią prostą.

II. — Powyższe twierdzenie i jego wniosek stosują się oczywiście do walca pochyłego o podstawie kołowej.

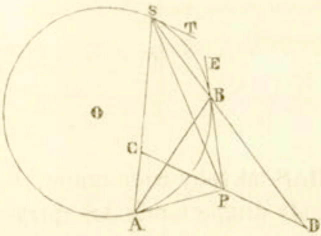
To wszystko razem dowodzi że, *jeśli stożek albo walec przenika sferę wedle koła* (AB) *to z niej wychodzi także wedle koła* (CD).

III. — Gdy w stożku S, przechodzącym przez dwa koła AB i CD na sferze, koło CD malejąc staje się punktem, płaszczyzna tego koła staje się płaszczyzną styczną do sfery przy wierzchołku S który wtedy leży na sferze.

Więc, *przecięcia przeciwrównoległe stożka kołowego są równoległe do płaszczyzny stycznej, w jego wierzchołku, do sfery opisanej.*

Twierdzenie VI.

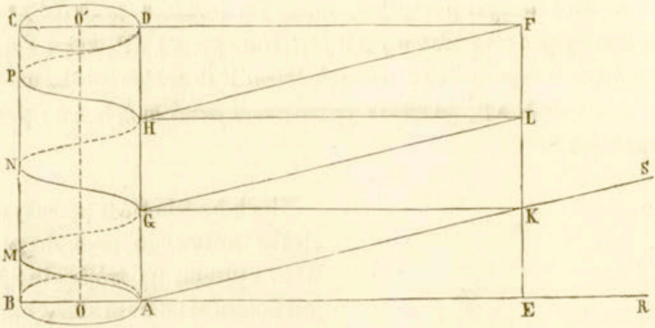
W stożku kołowym pochyłym, miejscem środków przecięć przeciwrównoległych do podstawy AB *jest linia prosta* SP, *która łączy wierzchołek* S *tego stożka z wierzchołkiem* P *drugiego stożka opisanego, wedle koła* AB, *na sferze wyznaczonej przez to koło* AB *i przez wierzchołek* S.



Niech będzie SAB płaszczyzna stożka kołowego pochyłego S. Koło opisane na trójkącie SAB jest kołem wielkiem sfery opsanej na stożku SAB; styczna ST do tego koła jest rzutem płaszczyzny stycznej do sfery, a cięciwa AB rzutem podstawy stożka. Zatem, biegun P cięciwy AB, względem koła ABS, jest wierzchołkiem stożka opisanego wedle koła AB, na sferze wyznaczonej przez to koło i wierzchołek stożka S. Owoż, wiemy że płaszczyzny przecięć przeciwrównoległych są równoległe do płaszczyzny stycznej ST; więc, aby dowieśdź twierdzenia, dość jest poprowadzić przez punkt P, równolegle do ST, prostę CD która będzie średnicą jednego z przecięć przeciwrównoległych, i okazać że punkt P jest środkiem tej średnicy CD. To uczyniwszy, uważajmy że kąty ACP i AST są równe z przyczyny równoległych CP i ST, a zaś kąty AST i SAP są równe jako mające tę samą miarę; więc trójkąt PAC jest równoramienny, i bok PC = PA. Podobnie, kąty D i DST są równe z przyczyny równoległych CD i ST, a zaś kąty DBP i BST czyli EBS i BST są równe jako mające tę samą miarę; zatem trójkąt PBD jest równoramienny, i bok PD=PB. Ale styczne PA i PB są równe, więc PC = PB.

WIEDZA O HELICY.

Niech będzie walec ABCD prosty o podstawie kołowej. Jeśli



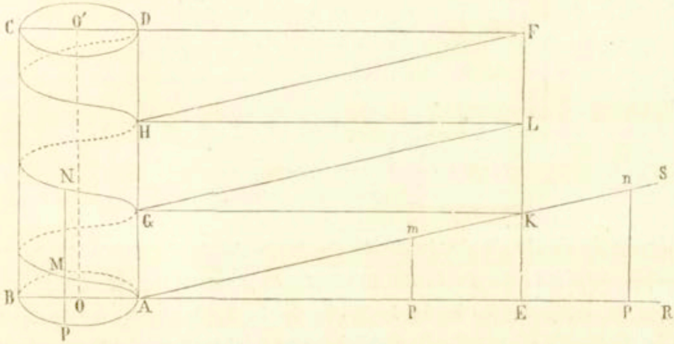
nawiniemy na niego płaszczyznę kąta RAS tak żeby jedno ramie AR przystawało do okręgu podstawy, wtedy drugie ramie AS, przystając do powierzchni walcowej, utworzy na niej linię krzywą AMG która się nazywa HELICĄ (*linią śrubową*).

Można inaczej wyobrazić sobie tworzenie helicy. Jakoż, rozwińmy na płasczyznie powierzchnię boczną walca obrotowego ABCD, i niech będzie prostokąt AEFD tem rozwinięciem. Weźmy, na bokach AD i EF, odległości równe AG, GH, EK,... i poprowadźmy poprzeczne AK, GL...; jeśli nawiniemy ten prostokąt na walec tak żeby podstawa AE przystała do okręgu AB, poprzeczne AK, GL... obwiją powierzchnię walca i utworzą na niej linię krzywą ciągłą która będzie właśnie helicą.

Części AMG, GNH helicy, mające obie skrajności na jednej linii rodzącej walca, nazywają się *skrętami* (*spira*). Wszystkie skręty helicy są równe jako długości poprzecznych równych AK, GL,... Nazwano *krokiem* helicy część linii rodzącej walca, jako AG, zawartą między dwiema skrajnościami jednego skrętu. Krok helicy, długość jednego skrętu i długość okręgu podstawy walca są trzema bokami trójkąta prostokątnego AEK. Dwie z tych trzech części są oczywiście dostateczne do wyznaczenia helicy.

Twierdzenie VII.

Rzędna punktu helicy jest proporcyonalna do odciętej krzywolinijnej.



Niech będzie MP linia rodząca walca, która przechodzi przez punkt M helicy i spotyka okrąg podstawy w punkcie P. Długość MP jest *rzędną* punktu M, a długość łuku AP koła podstawy *odciętą krzywolinijną* tego punktu. Rzędną punktu N leżącego na drugim skręcie helicy jest NP, a odciętą łuk ABAP, to jest łuk AP powiększony jednym okręgiem; i t d.

Uważajmy punkt N helicy, i niech będzie odpowiedający punkt n na ramieniu kąta które tworzy tę linię; podobieństwo trójkątów Anp i AEK daje

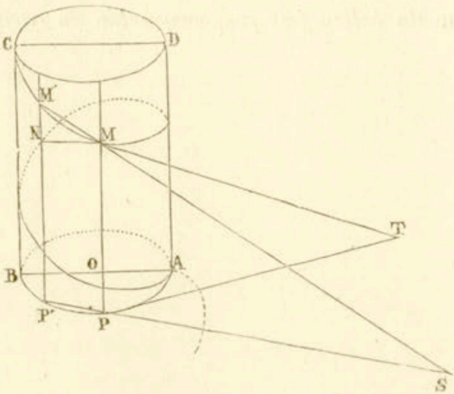
$$\frac{np}{\mathrm{A}p} = \frac{\mathrm{EK}}{\mathrm{AE}}.$$

Więc, oznaczając przez x, y odciętę i rzędnę jakiegokolwiek punktu helicy, przez h jej krok, przez R promień okręgu podstawy, mamy

$$\frac{y}{x} = \frac{h}{2\pi R}.$$

Twierdzenie VIII.

Styczna do helicy czyni kąt stały z linią rodzącą walca.



Niech będą dwa punkta sąsiednie M i M' helicy; przypuszczając $MP < M'P'$, sieczna MM' spotyka swój rzut PP' na płaszczyznie podstawy w punkcie S. Poprowadźmy prostę MN równoległą do PP'; trójkąty MPS i MNM' prostokątne podobne dają

$$\frac{MP}{SP} = \frac{M'N}{MN} \quad \text{albo} \quad \frac{MP}{SP} = \frac{M'N}{\textit{cięc. } PP'};$$

Ale mamy (7)

$$\frac{MP}{APBP} = \frac{h}{2\pi R} = \frac{M'P'}{APBP'} = \frac{M'P' - MP}{AP' - AP} = \frac{M'N}{\textit{łuk } PP'};$$

ztąd
$$M'N = \frac{h. \textit{ łuk } PP'}{2\pi}$$

Podstawiając tę wartość, otrzymujemy

$$\frac{\mathrm{MP}}{\mathrm{SP}} = \frac{h}{2\pi\mathrm{R}} \cdot \frac{\textit{łuk.}\ \mathrm{PP}'}{\textit{cięc.}\ \mathrm{PP}'}.$$

Owoż, gdy punkt M′ dąży do punktu M i z nim się schodzi, sieczna MM′ staje się styczną do helicy w punkcie M, i trójkąt MPS staje się MPT. A ponieważ, jako wiemy z trygonometryi, stosunek łuku PP′ do cięciwy PP′ ma za granicę jedność gdy łuk i cięciwa dążą do zera; więc

$$gr.\ \frac{\mathrm{MP}}{\mathrm{SP}} = \frac{h}{2\pi\mathrm{R}} \cdot gr. \frac{\textit{łuk.}\ \mathrm{PP}'}{\textit{cięc.}\ \mathrm{PP}'}, \quad \text{czyli} \quad \frac{\mathrm{MP}}{\mathrm{TP}} = \frac{h}{2\pi\mathrm{R}}.$$

To dowodzi że trójkąt prostokątny MPT, w którym stosunek dwóch boków zostaje stały, jest ciągle sobie podobny, jakiekolwiek punkt M bierze położenie na helicy. Ztąd wynika że *styczna do helicy w każdym punkcie* M *czyni ten sam kąt z linią rodzącą walca.*

Oznaczając przez i kąt PMT pod którym styczna do helicy przecina linię rodzącą walca, będzie

$$\mathrm{sty}\,i = \frac{2\pi\mathrm{R}}{h}.$$

Wniosek I. — Nazywa się *podstyczną* w punkcie M helicy rzut PT, na płaszczyznie podstawy walca, stycznej MT zawartej między punktem zetknięcia M i śladem T na tej płaszczyznie.

Owoż, mamy

$$\frac{\mathrm{MP}}{\mathrm{TP}} = \mathrm{dot}\,i. = \frac{h}{2\pi\mathrm{R}}, \quad \text{i} \quad \frac{\mathrm{MP}}{\mathrm{APBP}} = \frac{h}{2\pi\mathrm{R}};$$

ztąd

$$\mathrm{TP} = \mathrm{APBP}.$$

Więc *podstyczna w danym punkcie helicy jest równa odciętej krzywolinijnej tego punktu.*

Ten wniosek daje sposób prowadzenia stycznej w danym punkcie M helicy. Dość wziąć, począwszy od spodka rzędnej MP, na stycznej do okręgu podstawy, długość PT równą odciętej APBP wyprostowanej, i połączyć punkta M, T.

Znając kąt i, można poprowadzić styczną do helicy w punkcie M, nie prostując odciętej krzywolinijnej; trzeba tylko, na płaszczyznie stycznej do walca w punkcie M, nakreślić linię prostą któraby czyniła kąt i z linią rodzącą MP.

II. Jeśli na linię krzywą nawijemy nić, i, utkwiwszy jedną skrajność, będziemy ją rozwijali tak żeby zostawała ciągle styczną do krzywej; wtedy, druga skrajność nici nakreśli linię *rozwijającą* tej krzywej, która na odwrót jest *rozwitą* krzywej nakreślonej.

Widzimy więc że *miejscem śladu stycznej do helicy na płaszczyznie podstawy jest* ROZWIJAJĄCA *koła.*

Miejscem stycznych do helicy jest powierzchnia nazwana HELICOIDĄ ROZWIJALNĄ.

UWAGA. — Powyższe własności helicy walca obrotowego stosują się do helicy walca prostego o podstawie jakiejkolwiek. Są także helice *stożkowe*; ale mówić o nich nie tu jest miejsce.

FIGURY JEDNOKŁADNE W PRZESTRZENI.

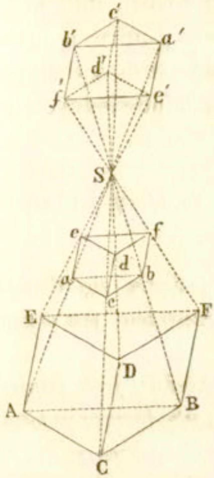
TWIERDZENIE IX.

Mając dany jakikolwiek układ punktów A, B, C,... *w przestrzeni, jeśli na promieniach* SA, SB, SC,... *wychodzących z punktu* S *wziętego dowolnie, wyznaczymy odcinki* Sa, Sb, Sc,... *tak żeby było*

$$\frac{Sa}{SA} = \frac{Sb}{SB} = \frac{Sc}{SC} = \dots = k, \qquad (k \text{ jest liczbą jakąkolwiek})$$

układ punktów a, b, c,... *będzie jednokładny do układu* ABC...

Według jak stosunek k jednokładności jest dodatny albo odjemny, punkta odpowiedne, jako A i a, albo A i a', leżą oba z jednej strony albo oba z dwóch stron przeciwnych *środka jednokładności* S, i dwa układy ABC..., *abc*... nazywają się *jednokładnemi prostemi* albo *jednokładnemi odwrotnemi.*



Widzimy że określenie jednokładności figur w przestrzeni jest takie samo jakie dla figur płaskich. Ale trzeba uważać że na płasczyznie dwie figury jednokładne odwrotne, mające stosunek jednokładności $k = -1$, są *równe*, i przystają do siebie jeśli dano jednej z nich obrót 180° około środka jednokładności; gdy tymczasem w przestrzeni, dwie figury jednokładne odwrotne, mające stosunek jednokładności $k = -1$, są *symetryczne*, i żadnym sposobem do siebie przystać nie mogą.

Wskażemy teraz ogólne twierdzenia jednokładności figur przestrzeni, odsyłając łatwe dowodzenia do podobnych w geometryi płaskiej, i zachowując tylko ich porządek.

Twierdzenie X. — *Figurą jednokładną do linii prostej jest linia prosta równoległa, a kąt dwóch linij prostych w przestrzeni jest równy kątowi linij jednokładnych* (III, 36, wn.).

Twierdzenie XI.

Figurą jednokładną do płasczyzny jest płasczyzna równoległa.

Albowiem, jeśli na pierwszej płasczyznie wyobrazimy linię prostą która się obraca około punktu A, ta prosta, w każdem położeniu, będzie miała za jednokładną linię prostą równoległą, przechodzącą przez punkt A′ odpowiedny punktowi A, na drugiej płasczyznie.

Ztąd wynika, że *płasczyzna przechodząca przez środek jednokładności jest sama swoją jednokładną*; i że *kąt dwóch płasczyzn iest równy kątowi płasczyzn jednokładnych.*

Styczne w dwóch punktach odpowiednych dwóch linij krzywych jednokładnych są równoległe, jako granice położeń siecznych równoległych. Zatem, *płaszczyzny styczne* do dwóch powierzchni jednokładnych w dwóch punktach odpowiednych są równoległe.

Twierdzenie XII. — *Figurą jednokładną do sfery jest sfera.* Dowodzenie jako dla okręgu.

Wniosek. — Można uważać koło jako przecięcie się dwóch sfer ; więc *figurą jednokładną do okręgu w przestrzeni jest okrąg.*

Twierdzenie XIII. — *Dwie figury są jednokładne, jeśli istnieje w przestrzeni dwa punkta* O i O' *takie, że proste łączące punkt* O *z różnemi punktami pierwszej figury, i proste łączące punkt* O' *z punktami drugiej, są równoległe i w tym samym stosunku.*

Dowodzenie jako w tw. XXXVI księgi III.

Ztąd wynika że *dwie sfery są zarazem jednokładne proste i jednokładne odwrotne.*

Środki jednokładności dwóch sfer dzielą harmonicznie ich linię środków, i są wierzchołkami dwóch stożków opisanych spólnych. Gdy dwie sfery są styczne, punkt zetknięcia jest jednym ze środków jednokładności, *prostym* albo *odwrotnym* według jak zetknięcie jest zewnętrzne albo wewnętrzne.

Twierdzenie XIV. — *Dwie sfery jednokładne do trzeciej są jednokładne między sobą* (III, 39).

Twierdzenie XV. — *Trzy figury jednokładne po dwie mają trzy środki jednokładności w linii prostej, która jest* osią jednokładności (III, 40).

Trzy sfery uważane po dwie mają *sześć środków jednokładności*, to jest : trzy środki jednokładności prostej i trzy środki jednokładności odwrotnej ; mają zatem cztery osie jednokładności, to jest : *jedną* oś jednokładności prostej i trzy osie jednokładności odwrotnej.

Te cztery osie jednokładności należą do trzech kół, które się otrzymuje przecinając trzy dane sfery płaszczyzną przechodzącą przez ich środki.

Twierdzenie XVI.

Cztery figury F, F′, F″, F‴, *jednokładne po dwie, mają* SZEŚĆ ŚRODKÓW JEDNOKŁADNOŚCI *które są na jednej płaszczyznie zwanej* PŁASCZYZNĄ JEDNOKŁADNOŚCI.

Jakoż, oznaczmy przez S_1, S_2, S_3, środki jednokładności figury F z każdą ze czterech innych, to jest : F i F′, F i F″, F i F‴. Płaszczyzna S_1 S_2 S_3, przechodząca przez środki jednokładności S_1 i S_2 układów F, F′ i F, F″, zawiera środek jednokładności układu F′, F″; bo ten środek jest na linii prostej S_1S_2, osi jednokładności trzech figur F, F′, F″ (15). Dowiedzie się tak samo że płaszczyzna S_1 S_2 S_3 zawiera środki jednokładności układów F′ F‴ i F″, F‴. Więc te środki jednokładności są wszystkie na jednej płaszczyznie.

Wynika z dowodzenia że, sześć środków jednokładności czterech figur jednokładnych stanowią wierzchołki czworoboku zupełnego, którego bokami są cztery osie jednokładności tych figur.

Jako przykład, uważajmy cztery sfery O, O′, O″, O‴. Te figury są zarazem jednokładne proste i jednokładne odwrotne. Zatem mają *dwanaście* środków jednokładności, sześć prostych i sześć odwrotnych; cztery osie jednokładności prostej i dwanaście osi jednokładności odwrotnej. Nakoniec, mają *osiem* płaszczyzn jednokładności, to jest : jedną płaszczyznę która zawiera sześć środków jednokładności prostej; cztery płaszczyzny które stanowią ściany czworościanu O O′ O″ O‴; i nakoniec trzy płaszczyzny, z których każda zawiera dwa środki jednokładności prostej nie tworzące osi jednokładności, i cztery środki jednokładności odwrotnej odpowiedające innym środkom jednokładności prostej.

Podobieństwo figur w przestrzeni. — *Dwie figury w przestrzeni są* podobne, *gdy można sprowadzić pierwszą na jedną z figur jednokładnych prostych do drugiej.*

To co poprzedza pokazuje że, aby wyznaczyć wszystkie figury jednokładne do danej, niema potrzeby zmieniania środka jednokładności, dość tylko podstawić za k ciąg wartości od 0 do ∞. Więc, otrzymamy wszystkie figury *podobne* do danej w przestrzeni, biorąc dowolnie środek podobieństwa, i budując powierzchnie jednokładne odpowiedające ciągowi wartości dla k.

Stosując to określenie podobieństwa, widzimy zaraz że *wszystkie sfery są podobne;* co już wiemy.

Jedyną figurą podobną powierzchni stożkowej jest ta sama powierzchnia stożkowa; albowiem, jeśli weźmiemy wierzchołek O stożka za środek podobieństwa, punkt A′ jednokładny punktu A będzie leżał na krawędzi OA.

Dwie powierzchnie walcawé są podobne, gdy ich linie rodzące są równoległe i mają za kierownice dwie krzywe jednokładne.

PŁASCZYZNA BIEGUNOWA WZGLĘDEM SFERY.

Twierdzenie XVII.

Miejscem punktu M *sprzężonego harmonicznego z punktem* A *względem sfery* O *jest płasczyzna prostopadła do średnicy* OA *przechodzącej przez punkt* A.

Albowiem, jeśli przez punkt A i przez środek sfery O (*fig. ks.* V, *tw.* XI), poprowadzimy płasczyznę która przetnie sferę wedle koła OCE, biegunową punktu A względem tego koła będzie prosta MB prostopadła do AO. Owoż, jakiekolwiek jest położenie płasczyzny siecznej, biegunowa MB przechodzi zawsze przez punkt B sprzężony harmoniczny punktu A względem średnicy CD; więc miejscem punktu M jest *płasczyzna* prostopadła do średnicy AO w punkcie B.

Punkt A nazywa się *biegunem* płasczyzny MN, która nawzajem jest *płasczyzną biegunową* punktu A względem sfery O.

WNIOSEK. — *Płasczyzna biegunowa punktu* A *jest miejscem jego biegunowych, względem wszystkich kół sfery których płasczyzny przez ten punkt przechodzą.*

To cośmy powiedzieli o biegunowej względem koła, stosuje się oczywiście do płasczyzny biegunowej względem sfery.

I tak:

Promień sfery jest średnim proporcyonalnym między odległościami środka sfery od bieguna i od płasczyzny biegunowej, to jest $R^2 = OA \cdot OB$.

Gdy biegun jest zewnątrz sfery, płasczyzna biegunowa jest płasczyzną zetknięć stożka opisanego na sferze i mającego ten biegun za wierzchołek.

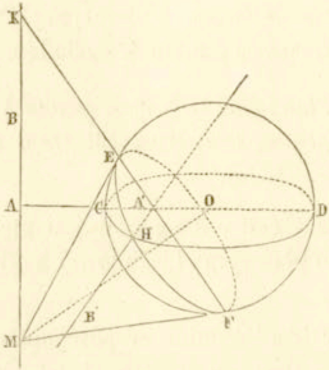
Gdy biegun jest na sferze, płasczyzna biegunowa jest płasczyzną styczną do sfery w tym punkcie.

Nakoniec, gdy biegun jest wewnątrz sfery, płasczyzna biegunowa jest zewnątrz, i tem dalej od środka sfery im bliżej niego ten biegun.

TWIERDZENIE XVIII. — *Płasczyzny biegunowe punktów leżących na płasczyźnie* P *przechodzą przez biegun tej płasczyzny.* I NAWZAJEM, *bieguny płasczyzn przechodzących przez punkt* A *są na płasczyźnie biegunowej tego punktu* (V, 13).

Zatem, *jeśli z każdego punktu płasczyzny* P *jako wierzchołka opiszemy stożek na sferze, płasczyzny okręgów zetknięć tych stożków przejdą przez biegun płasczyzny* P; I NAWZAJEM, *jeśli wedle każdego z kół sfery, których płasczyzny przechodzą przez jeden punkt, opiszemy stożek na sferze, wierzchołki tych stożków będą na płasczyźnie biegunowej tego punktu.*

Dwie proste wzajemne względem sfery. — Niech będą sfera O i jakakolwiek prosta AB. Jeśli przez biegun A′ prostej AB, wzglę-



dem koła wielkiego CED na płasczyznie ABO, poprowadzono prostopadłę A′B′ do tej płasczyzny; będzie nawzajem prosta AB prostopadłą do płasczyzny A′B′O, i przejdzie przez biegun A prostej A′B′ względem koła wielkiego na tejże płasczyznie. Dla tej wzajemnej własności, proste AB i A′B′ nazwano *prostemi wzajemnemi* względem sfery O.

Gdy dwie proste są wzajemne względem sfery, każda z nich jest miejscem biegunów wszystkich płasczyzn przechodzących przez drugą. Albowiem, płasczyzna biegunowa jakiegokolwiek punktu M prostej AB, jako prostopadła do MO, jest prostopadła do płasczyzny ABO; a że zawiera biegunowe punkta M względem koła CED, więc przechodzi przez biegun A′ prostej AB (V, 13), i temsamem zawiera prostę A′B′.

Gdy dwie proste AB i A′B′ *są wzajemne względem sfery, każda jest miejscem biegunów drugiej, względem wszystkich kół sfery których płasczyzny przechodzą przez tę drugą.* Jakoż, przez prostę A′B′ poprowadźmy płasczyznę, która przecina prostę AB w punkcie K i koło wielkie CED na płasczyznie ABO w punktach E i F. Ponieważ prosta AB jest biegunową punktu A′, względem koła CED, punktu K, E, A′, F stanowią układ harmoniczny;

więc punkt K jest biegunem prostej A'B', względem koła EHK którego płasczyzna przechodzi przez tę prostę.

Gdy dwie płasczyzny sieczne do sfery na której kreślą koła AB i CD (*fig. stronicy* 708) przecinają się, linia ich przecięcia, prostopadła w punkcie G do płasczyzny koła wielkiego ABCD prostopadłego do kół AB i CD, jest widocznie linią wzajemną prostej SS', która łączy wierzchołki dwóch stożków wyznaczonych przez te koła AB i CD. Ztąd wynika że

Gdy dwie płasczyzny są styczne do sfery, ich przecięcie się jest linią wzajemną prostej łączącej punkta zetknięć.

PŁASCZYZNA PIERWIASTNA DWÓCH SFER.

Jeśli z jakiegokolwiek punktu M przestrzeni, poprowadzimy do sfery O sieczną która ją spotyka w punktach A i B, wieloczyn MA . MB niezależny od kierunku tej siecznej, i dodatny albo odjemny albo zero, według jak punkt M jest zewnątrz albo wewnątrz albo na powierzchni, nazywa się *potęgą punktu* M *względem sfery*.

Nazywając R promień sfery, wiemy że $MA \, . \, MB = \overline{MO}^2 - R^2$.

Twierdzenie XIX.

Miejscem punktów równej potęgi względem dwóch sfer jest płasczyzna prostopadła do linii środków.

Dowodzenie jako w *Ks.* V, *tw.* XIV.

Ta płasczyzna nazywa się *płasczyzną pierwiastną dwóch sfer*.

Gdy się dwie sfery przecinają, ich płasczyzną pierwiastną jest płaszczyzna koła spólnego; a gdy dwie sfery są styczne, płaszczyzną pierwiastną jest spólna płaszczyzna styczna. Płaszczyzna pierwiastna dwóch sfer spółśrodkowych znika w nieskończoności.

Płaszczyzna pierwiastna dwóch sfer jest miejscem punktów z których można prowadzić styczne równe do tych sfer. Ta płaszczyzna jest także miejscem środków sfer które przecinają prostokątnie dwie sfery dane (V, 14).

Twierdzenie XX. — *Płaszczyzny pierwiastne trzech sfer, uważanych po dwie, przechodzą przez jedną linię prostą* (V, 16), *która się nazywa* OSIĄ PIERWIASTNĄ TRZECH SFER.

Oś pierwiastna trzech sfer danych jest prostopadła do płaszczyzny ich środków, przechodzi przez środek pierwiastny trzech wielkich kół leżących na tej płaszczyznie, i jest miejscem środków sfer które przecinają prostokątnie trzy dane sfery.

Gdy środki trzech sfer są w linii prostej, ich oś pierwiastna znika w nieskończoności.

Może być szczególne położenie trzech sfer w którem płaszczyzny pierwiastne schodzą się w jedną; ta płaszczyzna jest wtedy płaszczyzną pierwiastną trzech sfer danych.

Twierdzenie XXI.

Płaszczyzny pierwiastne czterech sfer, uważanych po trzy, przechodzą przez jeden punkt.

Jakoż, punkt, w którym oś pierwiastna trzech sfer spotyka płaszczyznę pierwiastną czwartej sfery wziętej z jedną z tych sfer, ma równą potęgę względem czterech sfer; więc jest spólny sześciu płaszczyznom pierwiastnym czterech sfer, i także spólny czterem osiom pierwiastnym tych sfer.

Ten jedyny punkt spotkania osi pierwiastnych nazywa się *środkiem pierwiastnym* czterech sfer.

Jeśli środki czterech sfer są na jednej płasczyznie, osie pierwiastne są równoległe; wtedy środek pierwiastny czterech sfer jest w nieskończoności.

Może nawet być szczególne położenie czterech sfer, mających środki w linii prostej, w którem cztery osie pierwiastne schodzą się w jedną, albo także wszystkie płasczyzny pierwiastne schodzą się w jedną.

Przecinając dwie sfery płasczyzną przechodzącą przez ich środki, łatwo się z twierdzeń XVI, XVII, XIX *ks.* V wnosi, że

Płasczyzna pierwiastna dwóch sfer jest równo oddalona od dwóch płasczyzn biegunowych któregokolwiek środka podobieństwa.

Płasczyzny biegunowe punktu wziętego na płasczyznie pierwiastnej dwóch sfer przecinają się na tej płasczyznie.

Płasczyzny styczne w dwóch punktach przeciwodpowiednych dwóch sfer przecinają się na płasczyznie pierwiastnej tych sfer.

Nakoniec, uważajmy szczególne przypadki gdy sfera malejąc staje się punktem, albo gdy promień rośnie do nieskończoności i sfera staje się płasczyzną.

Nie trudno widzieć że, płasczyzna pierwiastna sfery i punktu jest w równej odległości od tego punktu i od jego płasczyzny biegunowej względem sfery.

Płasczyzna pierwiastna dwóch punktów jest prostopadła we środku linii która je łączy.

Płasczyzna pierwiastna sfery i płasczyzny jest tą samą płasczyzną; i wtedy, skrajności średnicy prostopadłej do tej płasczyzny są środkami podobieństwa.

Płasczyzna pierwiastna punktu i płasczyzny jest także tą samą płasczyzną.

SFERA STYCZNA DO CZTERECH SFER.

Oznaczmy przez A, B, C, D środki czterech sfer danych, przez X i X' środki dwóch sfer jednakowo stycznych do tych sfer; i, przypuszczając dla utkwienia myśli, że sfera X jest styczna zewnętrznie a sfera X' styczna wewnętrznie, oznaczmy przez *a* i *a'* ich punkta zetknięć ze sferą A, przez *b* i *b'*, *c* i *c'*, *d* i *d'* punkta zetknięcia ze sferami B, C, D. Zagadnienie będzie rozwiązane zupełnie jeśli wyznaczymy środki X i X' i promienie dwóch sfer szukanych. Rozwiązanie opiera się na następującem twierdzeniu które odpowieda podobnemu w geometryi płaskiej.

Twierdzenie XXII.

Gdy dwie sfery, styczne do czterech sfer danych, należą do jednego dwojanu, wtedy : cięciwa zetknięć każdej ze sfer danych, 1° *przechodzi przez ich środek pierwiastny, i* 2° *zawiera, względem swojej sfery, biegun płaszczyzny podobieństwa odpowiedającej temu dwojanowi.*

Jakoż, 1° na mocy założenia, punkt zetknięcia *a* jest środkiem podobieństwa odwrotnego sfer A i X, a zaś punkt zetknięcia *a* środkiem podobieńsiwa prostego sfer A i X'; więc cięciwa zetknięć *aa'* jest osią pobobieństwa odwrotnego trzech sfer A, X, X', i temsamem przechodzi przez środek podobieństwa odwrotnego I sfer X i X'. Rozumując podobnie, widzimy łatwo że cięciwy *ab* i *a'b'* przechodzą przez środek podobieństwa prostego S sfer A i B. Zatem cięciwy *aa'* i *bb'* sfer A i B są przeciwodpowiedne (V, 19), i ich punkt spotkania I należy do płasczyzny pierwiastnej sfer A i B.

Ztąd wnosimy że wszystkie cięciwy zetknięć *aa'*, *bb'*, *cc'*, *dd'* przechodzą przez punkt I który, należąc do płasczyzn pierwiastnych czterech sfer, uważanych po dwie, jest ich środkiem pierwiastnym. Więc każda cięciwa zetknięć przechodzi przez środek pierwiastny czterech sfer danych.

2° Ponieważ punkt I jest środkiem podobieństwa odwrotnego sfer X i X', cięciwy *ab* i *a'b'* tych sfer są przeciwodpowiedne, i ich punkt spotkania S, który jest środkiem podobieństwa prostego sfer A i B, należy do płaszczyzny pierwiastnej sfer X i X'. Dowiedzie się podobnie że płaszczyzna pierwiastna sfer X i X' przechodzi przez każdy inny środek podobieństwa prostego czterech sfer A, B, C, D, branych po dwie; więc ona jest płaszczyzną podobieństwa tych sfer. Owoż, płaszczyzna pierwiastna sfer X i X', stycznych do sfery A, zawiera przecięcie się płaszczyzn stycznych do tej sfery w punktach przeciwodpowiednych *a* i *a'*; to zaś przecięcie jest linią wzajemną cięciwy zetknięć *aa'*; więc, nawzajem, *cięciwa zetknięć* aa' *zawiera, względem swojej sfery, biegun* K *płaszczyzny pierwiastnej sfer* X *i* X', czyli co to samo, *zawiera biegun płaszczyzny podobieństwa czterech sfer danych.*

Uważajmy nakoniec że prosta AK jest prostopadła do płaszczyzny podobieństwa czterech sfer danych, i prosta XX' jest prostopadła do płaszczyzny pierwiastnej sfer X i X' (19); a że te dwie płaszczyzny są jedną płaszczyzną, więc *proste* AK i XX' *są równoległe.*

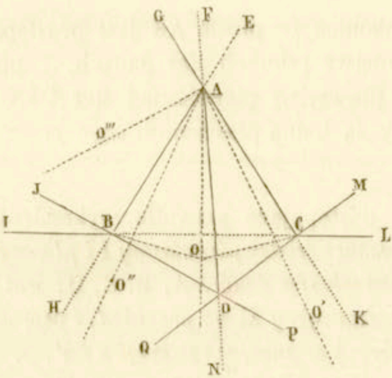
Ztąd wynika następujące prawidło wykreślenia sfer stycznych X i X'. *Wyznacz środek pierwiastny* I *i płaszczyznę podobieństwa prostego czterech sfer danych* A, B, C, D; *weź biegun* K *tej płaszczyzny względem sfery* A, *na przykład, i poprowadź prostę* IK *która przetnie sferę* A *w punktach zetknięć* a *i* a'; *po czem, pociągnij proste* Aa, Aa'; *połącz* AK, *i przez* I *poprowadź prostę* XIX' *równoległą do* AK *aż do przecięcia w* X *i* X' *z prostemi* Aa *i* Aa'. *Punkta* X *i* X' *będą środkami, a odległości* Xa *i* X'a' *promieniami dwóch sfer stycznych szukanych. Łącząc środki* X *i* X' *ze środkami* B, C, D *sfer danych wyznaczy się wszystkie inne punkta zetknięć sfer* X *i* X'.

Jeśli, zamiast płaszczyzny podobieństwa prostego, weźmiemy każdą z siedmiu innych płaszczyzn podobieństwa czterech sfer danych, otrzymamy siedem innych dwojanów sfer stycznych. Zagadnienie ma więc ogólnie *szesnaście* rozwiązań.

Powyższe rozwiązanie, podobne do tego któreśmy dali w geometryi płaskiej, jest wprost i ogólne; stosuje się nawet do przypadków szczególnych, w których jedna albo kilka sfer danych stają się punktami albo płaszczyznami; byle tylko środki tych sfer nie były wszystkie na jednej płaszczyznie.

Sfera styczna do czterech płaszczyzn. — Moglibyśmy rozwiązać to zagadnienie jako przypadek szczególny czterech sfer; ale ważność zagadnienia wymaga rozwiązania wprost. Niech będą dane cztery płaszczyzny, które, przecinając się po dwie, tworzą czworościan ABCD. Aby wyznaczyć wszystkie sfery styczne do tych płaszczyzn, szukajmy ile może być punktów równo oddalonych od czterech ścian czworościanu albo od ich przedłużeń.

Owoż, widzimy zaraz że miejscem punktów równo oddalonych



od płaszczyzn ABC i ABD są dwie płaszczyzny dwójsieczne α i α' kątów dwójściennych przyległych DBAC i DBAH; tak samo, miejscem punktów równo oddalonych od płaszczyzn ACB i ACD są dwie płaszczyzny dwójsieczne β i β' kątów przyległych DCAB i DCAL. Te cztery płaszczyzny α, α', β, β', przechodzące przez punkt A, przecinają się wedle czterech linij prostych. Jedna z tych linij AC, przecięcie płaszczyzn α i β, pada wewnątrz czworościanu; trzy inne padają zewnątrz, to jest : przecięcie AO' płaszczyzn α i β' przebija część LCDP, przecięcie AO'' płaszczyzn α' i β przebija część HBDQ, nakoniec przecięcie AO''' płaszczyzn α' i β' przebija część IBCM. Ale cztery proste AO, AO', AO'', AO''', będąc miejscami punktów równo oddalonych od trzech płaszczyzn ABC, ABD, ACD, leżą także każda na jednej z płaszczyzn dwójsiecznych kątów przyległych mających krawędź AD. Więc środki sfer stycznych do ścian bocznych czworościanu znajdują się tylko na tych czterech prostych.

Środki tych sfer muszą się także znajdować na płaszczyznach dwójsiecznych γ i γ' dwóch kątów przyległych ABDC i ABDQ przy podstawie BCD; a ponieważ płaszczyzna i linia prosta mogą się przecinać w jednym tylko punkcie, może więc być tylko osiem przecięć między czterema prostemi AO, AO', AO'', AO''' i dwiema płaszczyznami γ i γ'. Nadto, te punkta przecięć, jako równo oddalone od czterech ścian czworościanu, leżą także na płaszczyznach dwójsiecznych innych kątów przyległych podstawie BCD. Ztąd wynika że nie może istnieć więcej niż *osiem* sfer stycznych do czterech płaszczyzn danych.

Zobaczmy teraz jakie są położenia sfer stycznych.

Sfera styczna wewnętrznie istnieje zawsze, jakośmy już dowiedli (VIII, 8).

Cztery sfery styczne zewnętrznie, każda do jednej ze ścian czworościanu i do przedłużenia innych, to jest *sfery zawpisane*, istnieją także zawsze. Bo płaszczyzna dwójsieczna kąta zewnętrznego ACDP przecina oczywiście prostę AO' w trójścianie B zewnątrz ściany ACD. Tak samo, płaszczyzny dwójsieczne kątów zewnętrznych ABDQ i ABCM przecinają proste odpowiedające AO'' i AO''' w trójścianach C i D, zewnątrz ścian ABD i ABC. Te same trzy płaszczyzny dwójsieczne spotykają się w trójścianie A, zewnątrz ściany BCD, w jednym punkcie równo oddalonym od czterech płaszczyzn; zatem w punkcie leżącym na prostej AO.

Nakoniec, mogą być sfery styczne do samych przedłużeń ścian czworościanu. Te sfery, jeśli istnieją, znajdują się niby w poddaszach graniastonnych, jako LCKPON, mających za grzbiet krawędź czworościanu. Uważajmy dwa takie poddasza KCLNDP i GAFIBI mające za grzbiety dwie krawędzie przeciwległe CD i AB. Płaszczyzna dwójsieczna kąta wewnętrznego ACDB może spotykać prostę AO', albo w tym kącie albo w kącie krawędzią przeciwległym KCDP; ale może także być równoległą do tej prostej. Więc, jeśli istnieje sfera styczna w jednem poddaszu, to nie istnieje w jego przeciwległem. Ztąd wynika że w sześciu poddaszach graniastonnych czworościanu nie może istnieć więcej niż trzy sfery styczne. Ale te ostatnie sfery, jako łatwo pojmujemy, nie zawsze są możebne; albowiem, powtarzamy, płaszczyzna dwójsieczna kąta ACDB, naprzykład, może być równoległa do prostej AO'. Więc razem może być osiem sfer stycznych do czterech płaszczyzn danych. Jeśli te płaszczyzny tworzą czworościan, wtedy istnieje zawsze pięć sfer stycznych, a trzy inne są możebne.

Można otrzymać promienie ośmiu sfer stycznych w funkcyi ścian czworościanu. Oznaczmy przez a, b, c, d ściany przeciwległe wierzchołkom A, B, C, D tego czworościanu, przez r, r_1, r_2, r_3, r_4 promienie sfer wpisanej i zawpisanych. Jeśli połączymy środki tych sfer z wierzchołkami czworościanu ABCD, otrzymamy dla każdej sfery cztery czworościany, mające spólny wierzchołek w jej środku i ściany czworościanu ABCD za podstawy. W sferze wpisanej, jako już wiemy, wszystkie cztery czworościany są dodatne, i ich summa stanowi objętość czworościanu ABCD; w sferze zawpisanej zewnętrznie do ściany a, czworościan mający podstawę a jest sam odjemny, trzy inne są dodatne. Podobnie dla czterech innych sfer zawpisanych. Więc, nazywając V objętość czworościanu ABCD, będzie, dla dwóch sfer wpisanej i zawpisanej odpowiedających trójścianowi A,

$$\mathrm{V} = \frac{r}{3}(a+b+c+d) \quad \text{i} \quad \mathrm{V} = \frac{r_1}{3}(b+c+d-a)$$

ztąd $$r = \frac{3V}{a+b+c+d}, \quad \text{i} \quad r_1 = \frac{3V}{b+c+d-a}$$

Tak samo

$$r_2 = \frac{3V}{a+c+d-b}, \quad r_3 = \frac{3V}{a+b+d-c}, \quad r_4 = \frac{3V}{a+b+c-d}.$$

Te wszystkie wartości są dodatne i skończone, bo każda ściana czworościanu jest mniejsza od summy trzech innych; co potwierdza istnienie pięciu sfer stycznych wpisanej i zawpisanych.

Nazwijmy teraz ρ_1, ρ_2, ρ_3 promienie trzech sfer stycznych do samych przedłużeń ścian czworościanu. Figura jasno pokazuje że każda z tych sfer jest styczna wewnętrznie do dwóch przedłużeń ścian i zewnętrznie do dwóch innych.

Jeśli sfera promienia ρ_1 jest styczna do poddasza LCKPDN, będzie

$$V = \frac{\rho_1}{3}(c+d-a-b).$$

A jeśli ta sfera jest styczna do poddasza przeciwległego GAFTBJ, będzie przeciwnie

$$V = \frac{\rho_1}{3}(a+b-c-d).$$

Tak samo, dwa inne poddasza przeciwległe BD albo AC, BC albo AD, dają

$$V = \frac{\rho_2}{3}(b+d-a-c) \quad \text{albo} \quad V = \frac{\rho_2}{3}(a+c-b-d),$$

$$V = \frac{\rho_3}{3}(b+c-a-d) \quad \text{albo} \quad V = \frac{\rho_3}{3}(a+d-b-c).$$

Znając ściany a, b, c, d czworościanu ABCD, można zaraz wiedzieć które sfery, wpisane w same przedłużenia, istnieją a które są niemożebne.

Jakoż, przypuśćmy że liczby mierzące powierzchnie ścian czworościanu w porządku ich wielkości są: $a > b > c > d$; będziemy mieli oczywiście:

$$a + b > c + d, \quad \text{i} \quad a - d > b - c, \quad \text{albo} \quad a + c > b + d;$$

a może być także

$$a + d \gtrless b + c, \quad \text{albo jeszcze} \quad a + d = b + c.$$

Więc, gdy cztery ściany a, b, c, d są nierówne, wtedy jest zawsze *siedem* sfer stycznych do czterech danych płaszczyzn.

Co do ósmej sfery, jej promień ρ_3 wyraża się przez

$$\rho_3 = \pm \frac{3V}{a + d - b - c},$$

biorąc znak $+$ albo $-$ według jak summa $a + d$ jest większa albo mniejsza od $b + c$. Więc ta sfera istnieje gdy mianownik nie jest zero; ale, jeśli $a + d = b + c$, wtedy $\rho_3 = \infty$, i sfera znika w nieskończoności.

Przypuszczając $a = b$ i $c = d$, ale a i c nierówne, będzie

$$a + b \lesseqgtr c + d \quad \text{i} \quad a + c = b + d, \quad a + d = b + c,$$

wtedy, ze trzech sfer możebnych jedna tylko mająca promień ρ_1 istnieje, a dwie inne mające promienie ρ_2 i ρ_3 znikają w nieskończoności.

Nakoniec, jeśli $a = b = c = d$, trzy ostatnie sfery znikają.

Cztery dane płaszczyzny mogą mieć przecięcia równoległe, albo nawet być same równoległe między sobą; w tych szczególnych przypadkach zagadnienie może być niewyznaczone albo niemożebne.

FIGURY NA SFERZE.

Stosunek nieharmoniczny. — Nazywa się stosunkiem nieharmonicznym czterch punktów A, B, C, D, leżących na okręgu koła wielkiego sfery O, stosunek nieharmoniczny pęku utworzonego przez cztery promienie OA, OB, OC, OD które łączą te punkta ze środkiem sfery (VI, 48, *uw.*).

Gdy pęk czterech łuków koła wielkiego SM, SN, SP, SQ, wychodzących z jednego punktu S powierzchni sferycznej, jest przecięty łukiem L koła wielkiego, stosunek nieharmoniczny czterech punktów przecięć A, B, C, D jest stały, niezależny od położenia łuku poprzecznego L. Bo ten stosunek, według określenia, jest równy stosunkowi pęku (O . ABCD), a ten ostatni równa się stosunkowi nieharmonicznemu czterech płaszczyzn SOA, SOB, SOC, SOD.

Na mocy tego określenia, nazwano stosunkiem nieharmonicznym pęku czterech łuków kół wielkich, stosunek nieharmoniczny czterech punktów przecięć tego pęku przez łuk poprzeczny koła wielkiego.

Pojmuje się łatwo że fundamentalne twierdzenia II i III *ks.* V i ich następstwa, jako równie twierdzenia *Paskala* i *Brianchona* stosują się do figur sferycznych; dość tylko w rozumowaniu zamiast wyrazu *linia prosta* położyć *łuk koła wielkiego*.

Cztery punkta A, B, C, D, leżące na łuku koła wielkiego, tworzą *układ harmoniczny* gdy ich stosunek nieharmoniczny równa się — 1.

Pęk czterech łuków kół wielkich SA, SB, SC, SD jest harmoniczny gdy jego stosunek nieharmoniczny jest — 1.

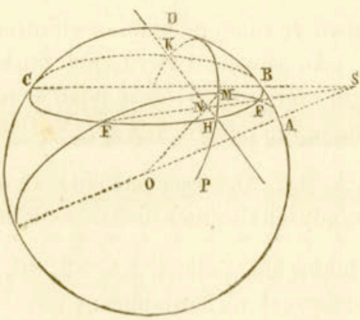
Biegunowa względem kąta. — Jeśli przez punkt C powierzchni sferycznej poprowadzimy, do kąta ASB dwóch łuków kół wielkich, różne sieczne sferyczne jako CAB, i weźmiemy na każdej punkt D sprzężony harmoniczny puuktu C, względem odcinka AB zawartego między ramionami tego kąta, miejscem punktu D będzie łuk koła wielkiego SD, sprzężony harmoniczny z łukiem SC względem kąta ASB. Punkt C nazywa się *biegunem*, a łuk koła wielkiego SD *biegunową* względem kąta ASB.

Twierdzenie czworoboku zupełnego stosuje się do sfery, i nastręcza łatwy sposób, 1° wyznaczenia czwartego punktu harmonicznego do trzech danych na łuku koła wielkiego, 2° wyznaczenia biegunowej danego punktu, względem kąta (V, 10).

BIEGUNOWA WZGLĘDEM KOŁA NA SFERZE.

Twierdzenie XXIII.

Jeśli przez punkt A *dany na sferze poprowadzono do małego koła* BEC *jakąkolwiek sieczną sferyczną* AEF, *miejscem punktu M sprzężonego harmonicznego z punktem* A *względem cięciwy sferycznej* EF *jest łuk koła wielkiego, prostopadły do okręgu koła wielkiego* AD *które przechodzi przez punkt* A *i przez biegun* D *danego koła małego.*



Jakoż, niech będzie S punkt w którym promień OA spotyka płaszczyznę danego koła BEC. Trzy punkta S, E, F są w linii prostej, i pęk (O . AEMF) jest harmoniczny z założenia; więc, jeśli oznaczymy przez N punkt przecięcia promienia OM i prostej SE, układ prostolinijny punktów S, E, N, F będzie także harmoniczny. Ztąd wynika, że miejscem punktu N jest biegunowa NK punktu S, względem koła BEC, prostopadła do średnicy BC; więc miejscem punktu M jest przecięcie PMK sfery przez płaszczyznę ONK, to jest okrąg koła wielkiego MP prostopadły do okręgu koła wielkiego AD.

Nazwano punkt A *biegunem* okręgu koła wielkiego MP, a ten okrąg *biegunową* punktu A, względem koła BEC.

UWAGA. — Wyraz *biegun* jest tu użyty w znaczeniu różnem od już wiadomego (VIII, 4). Jednakże nie wyniknie ztąd żadna wątpliwość; bo, do wyrazu biegun w nowem znaczeniu, będą zawsze dodane wyrazy *względem koła*, mówiąc *np.* jako wyżej: biegun okręgu koła wielkiego MP *względem koła* BEC.

To cośmy w geometryi płaskiej o biegunowej względem koła powiedzieli stosuje się do biegunowej względem koła na sferze. Zatem, *biegunowa wszelkiego punktu wziętego na okręgu jednego koła wielkiego przechodzi przez biegun tego okręgu względem koła*; I NAWZAJEM, *bieguny względem koła, okręgów kół wielkich* przechodzących przez jeden punkt, leżą na biegunowej (kołowej) tego punktu.

Twierdzenie XII i XIII *ks.* V, ich dowodzenie i wnioski stosują się do sfery, i nastręczają sposób wyznaczenia biegunowej danego punktu względem koła na sferze.

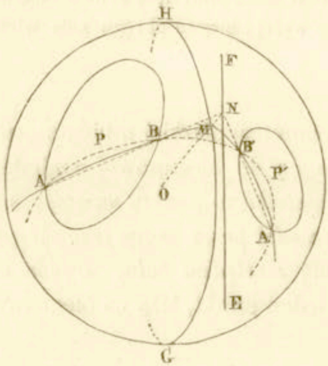
Z tych twierdzeń wynika że biegunowa punktu, leżącego zewnątrz koła, jest cięciwą zetknięć stycznych poprowadzonych przez ten punkt.

Nakoniec, metoda przekształcenia przez biegunowe wzajemne w przestrzeni stosuje się do figur sferycznych.

OŚ PIERWIASTNA KÓŁ NA SFERZE.

Twierdzenie XXIV.

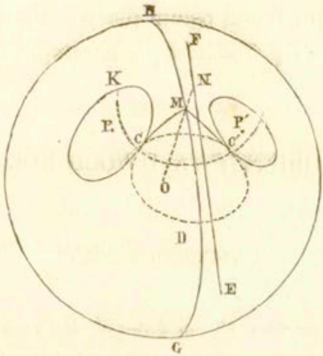
Jeśli na sferze poprowadzimy jakiekolwiek koło przecinające dwa dane koła P *i* P′ *w punktach* A, B *i* A′, B′, *miejsce spotkania* M *siecznych sferycznych* AB *i* A′B′ *będzie okrąg koła wielkiego* GH, *prostopadły do linii biegunów* PP′, *którego płaszczyzna przechodzi przez linię przecięcia* EF *płaszczyzn kół danych.*



Jakoż, płaszczyzny kół P i P′ przecinają się wedle prostej EF; więc sieczne AB, A′B′, leżące na płaszczyznie koła zmiennego ABB′A′ i na płaszczyznach kół danych P, P′, spotykają się na prostej EF w punkcie N. Ztąd wynika że punkt M, w którym promień ON przebija sferę, jest przecięciem trzech kół wielkich których płaszczyzny przechodzą odpowiednio przez styczne sferyczne AB, A′B′, i przez prostę EF. Owoż, promienie OP i OP′ są prostopadłe do płaszczyzn kół P i P′; co pokazuje że prosta EF jest prostopadła do płaszczyzny POP′. Więc łuk GH koła wielkiego, jako mjejsce punktów M leżących na płaszczyznie OEF, jest prostopadły do linii biegunów PP′ kół danych.

Ten łuk GH koła wielkiego, miejsce punktu M, nazywa się *osią pierwiastną dwóch kół* P *i* P'.

Gdy koło sieczne ABB'A' staje się kołem CDC' stycznem w punktach C i C' do kół P i P', sieczne sferyczne MBA i MB'A' stają się stycznemi sferycznemi MC i MC'. Owoż, te styczne są



równe, jako wyprowadzone z jednego punktu M do koła CDC' (VIII, *zag.* XIII); więc *oś pierwiastna* GH *dwóch kół* P *i* P' *jest miejscem punktów powierzchni sferycznej z których można do nich prowadzić styczne sferyczne równe*.

Widzimy łatwo że koło KCC', nakreślone z punktu M jako bieguna promieniem sferycznym MC, przecina prostokątnie oba koła P i P', bo jest prostopadłe do stycznych sferycznych MC i MC'; więc *oś pierwiastna dwóch kół na sferze jest miejscem biegunów kół które je przecinają prostokątnie.*

Płaszczyzna koła CKC', które przecina prostokątnie dwa koła P, P', jest oczywiście płaszczyzną biegunową punktu N prostej EF. Owoż, gdy koło KCC' zmienia się, biegun N jego płaszczyzny opisuje prostę EF; więc ta płaszczyzna przechodzi ciągle przez prostę wzajemną prostej EF względem sfery. A dodajemy, co już wiadome, że prosta wzajemna przecięcia EF płaszczyzn dwóch kół P i P' na sferze jest linią która łączy wierzchołki dwóch stożków wyznaczonych przez te koła.

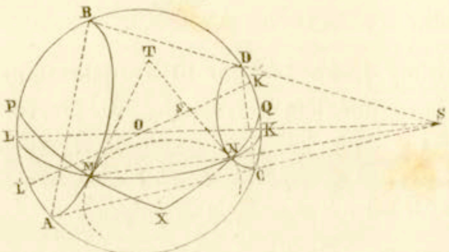
Gdy dwa koła na sferze są spółbiegunowe, ich osią pierwiastną jest widocznie okrąg koła wielkiego spółbiegunowego.

Twierdzenie XXV.— *Osie pierwiastne trzech kół na sferze, uważanych po dwa, przecinają się w jednym punkcie.* Albowiem płaszczyzny tych trzech kół tworzą trójścian, a promień przechodzący przez wierzchołek tego trójścianu przebija powierzchnię sfery w punkcie spólnym trzem osiom pierwiastnym rzeczonych kół. Ten punkt nazywa się *środkiem pierwiastnym* trzech kół.

ŚRODEK PODOBIEŃSTWA DWÓCH KÓŁ NA SFERZE.

Twierdzenie XXVI.

Jeśli przez punkta M *i* N, *w których koło zmienne* X *dotyka kół* P *i* Q *na sferze, poprowadzimy okrąg koła wielkiego, ten okrąg przetnie koła* P *i* Q *pod kątami równemi. i przejdzie przez dwa punkta stałe.*



Niech będą S i S′ dwa stożki wyznaczone przez dwa koła P i Q dane na sferze. Uważajmy koło X styczne jednakowo do kół P i Q w punktach M i N. Ponieważ styczna MT spólna kołom P i X, i styczna NT, spólna kołom Q i X, leżą na płaszczyznie koła X, ta płaszczyzna jest styczna do stożka S, i prosta MN przechodzi przez wierzchołek S tego stożka (11. wn.). Więc płaszczyzna koła wielkiego MN zawiera prostę OS ; co dowodzi że okrąg tego koła przechodzi przez dwa punkta stałe K, L w których OS spotyka sferę.

Nadto łuk XP koła wielkiego, łączący bieguny X P dwóch kół stycznych, przechodzi przez punkt zetknięcia M; tak samo, łuk koła wielkiego XQ przechodzi przez punkt zetknięcia N;

zatem kąt LMP = XMN = XNM = KNQ.

To pokazuje że okrąg koła wielkiego LMNK przecina okręgi kół P i Q pod kątami równemi.

Gdyby wzięto koło zmienne X różnie styczne do dwóch kół P i Q na sferze, dowiedzionoby podobnie że okrąg koła wielkiego, poprowadzony przez punkta zetknięcia, przecina te dwa koła pod kątami równemi, i przechodzi przez dwa punkta stałe K′, L′ w których prosta OS′ spotyka sferę.

Punkta K i L, K′ i L′, niezależne od wielkości koła zmiennego X, zostają te same gdy to koło staje się styczną sferyczną spólną kołom P i Q. Więc punkta K, L, i K′, L′ są punktami spotkań stycznych sferycznych zewnętrznych i wewnętrznych, spólnych dwom kołom P i Q.

Wynika z tego co poprzedza że wszelkie koło wielkie przechodzące przez wierzchołek stożka S albo S′ przecina dwa koła P, Q pod kątami równemi ; i nawzajem.

Nazwano *środkami podobieństwa dwóch kół* P i Q *na sferze* punkta K i K′, w których promienie OS i OS′, idące do wierzchołków dwóch stożków wyznaczonych przez te koła, spotykają sferę. *Środek* K *podobieństwa prostego* odpowieda stożkowi którego wierzchołek S jest *zewnątrz*, a *środek* K′ *podobieństwa odwrotnego* stożkowi którego wierzchołek S′ jest *wewnątrz* sfery. Te oba środki są na linii biegunów PP′ dwóch kół danych (VIII, *zag.* 14, *uw.*).

Punkta M i N dwóch kół P i Q, leżące na jednej krawędzi stożka S, albo stożka S′, nazywają się *przeciwodpowiednemi* (V, 19). *Dwa dwojany punktów przeciwodpowiednych leżą na jednym okręgu ;* albowiem, te punkta należą do sfery, a będąc na dwóch krawędziach stożka leżą na jednej płaszczyznie. Ztąd i na mocy określenia osi pierwiastnej (24), wnosimy że cięciwa sferyczna dwóch punktów koła P, i cięciwa sferyczna punktów przeciwodpowiednych koła Q spotykają się na osi pierwiastnej tych dwóch kół.

Zatem, *styczna sferyczna w dwóch punktach przeciwodpowiednych dwóch kół na sferze spotykają się na osi pierwiastnej tych kół*; cośmy już widzieli.

Twierdzenie XXVII.

Sześć środków podobieństwa trzech kół na sferze, uważanych po dwa, leżą po trzy na czterech okręgach kół wielkich.

Jakoż, uważajmy trzy stożki S, S_1, S_2 wyznaczone przez dane koła, których wierzchołki są zewnątrz sfery; te trzy wierzchołki są na płasczyznie koła stycznego zewnętrznie do trzech kół danych, ale są także na płasczyznie koła stycznego wewnętrznie do tych trzech kół (26); więc trzy wierzchołki S, S_1, S_2 są w linii prostej. Oznaczając przez S', S'_1, S'_2, wierzchołki wewnątrz sfery trzech innych stożków, dowiedzie się podobnie że wierzchołki S, S'_1, S'_2, są w linii prostej; i tak samo S_1, S', S'_2, i S_2, S', S'_1 są w linii prostej. Istnieje więc cztery linie proste zawierające wierzchołki sześciu stożków. A ponieważ każdy wierzchołek należy oddzielnie do dwóch z tych prostych, te cztery proste leżą na jednej płasczyznie, i tworzą czworobok zupełny. Ztąd wynika że trzy środki podobieństwa prostego trzech kół na sferze są na jednym okręgu koła wielkiego. Tak samo, każdy ze środków podobieństwa prostego z dwoma nieodpowiedającemi środkami podobieństwa, odwrotnego leży na jednym okręgu koła wielkiego.

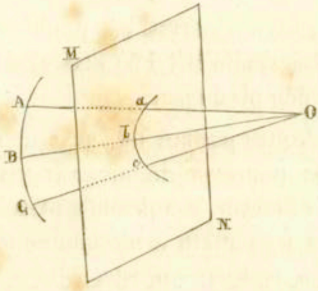
Te cztery okręgi kół wielkich, każdy przechodzący przez trzy środki podobieństwa, nazywają się *osiami podobieństwa* trzech kół na sferze. Jest więc *jedna* oś podobieństwa *prostego*, i *trzy* osie podobieństwa odwrotnego.

KOŁO STYCZNE DO TRZECH KÓŁ DANYCH NA SFERZE.

Dowodzenie i wykreślenie, któreśmy dali w geometryi płaskiej (V, 20 i *zag.*), stosuje się do kół stycznych na sferze, zastępując tylko linie proste przez łuki kół wielkich. Zwykle dość nakreślić styczne sferyczne spólne do dwóch dwojanów kół danych, aby mieć środek pierwiastny i biegun osi podobieństwa tych kół. Zagadnienie ma ogólnie osiem rozwiązań. Metoda w tem jest ważna że daje rozwiązanie wprost; jest ona ogólna, i obejmuje nawet przypadki szczególne w których dane koła stają się punktami albo kołami wielkiemi.

ZASADY PERSPEKTYWY.

Niech będzie punkt stały O który się nazywa *okiem* widza, płaszczyzna stała MN zwana *płaszczyzną wizerunku* czyli obrazu.



Perspektywa punktu A w przestrzeni jest punkt *a* w którym *promień oczny*, idący od oka O do punktu A, przebija płaszczyznę wizerunku MN.

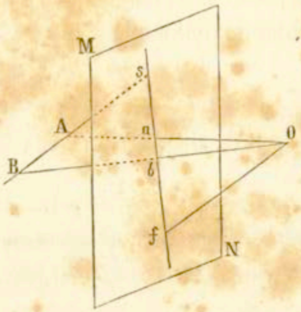
Perspektywą linii jakiejkolwiek ABC jest miejsce perspektyw *abc* wszystkich jej punktów.

Jako widzimy, perspektywa linii ABC jest przecięciem płaszczyzny wizerunku z powierzchnią stożkową, mającą punkt widzenia O za wierzchołek, a linię ABC za kierownicę. Dla tej przyczyny perspektywa linii nazywa się jej *rzutem stożkowym*, albo jeszcze *rzutem środkowym*.

Pojmujemy teraz łatwo że dwie krzywe różne mogą mieć tę samą perspektywę na jednej płaszczyźnie.

Twierdzenie XXVIII.

Perspektywą linii prostej jest linia prosta.



Albowiem, perspektywy wszystkich punktów prostej AB, będąc zarazem na płaszczyznie MN i na płaszczyznie OAB, są przecięciem *ab* tych dwóch płaszczyzn.

Aby mieć perspektywę punktu leżącego w *nieskończoności* na prostej AB, trzeba poprowadzić przez oko O równoległę O*f* do AB; punkt *f*, w którym ona przebija płaszczyznę wizerunku, będzie perspektywą jej punktu w nieskończoności. Ten punkt *f* nazywa się *punktem umknięcia* prostej AB.

Gdy prosta AB jest równoległa do płaszczyzny wizerunku, jej punkt umknięcia znika w nieskończoności.

Widzimy teraz łatwo że, gdy jest kilka prostych równoległych między sobą, perspektywy punktów leżących w nieskończoności na tych równoległych schodzą się wszystkie w jednym punkcie umknięcia. Ale ten punkt znika w nieskończoności jeśli dane proste, równoległe między sobą, są zarazem równoległe do płaszczyzny wizerunku.

Punkt *s* w którym prosta AB spotyka płaszczyznę wizerunku nazywa się jej *śladem*.

Gdy prosta AB przechodzi przez punkt widzenia O, jej perspektywa przywodzi się do jednego punktu który jest jej śladem. Ale i ten ślad znika, jeśli prosta AB przechodząca przez punkt O jest równoległa do płaszczyzny wizerunku.

Gdy prosta AB leży na płaszczyznie przechodzącej przez punkt widzena i równoległej do wizerunku, jej perspektywa znika w nieskończoności.

Twierdzenie XXIX.

Gdy dwie proste przecinają się, ich perspektywy przecinają się także albo są równoległe, według jak promień oczny puuktu przecięcia spotyka płaszczyznę wizerunku albo jest do niej równoległy.

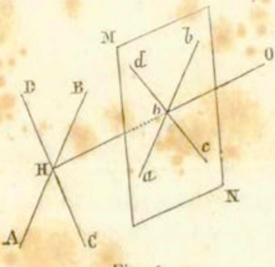


Fig. 1.

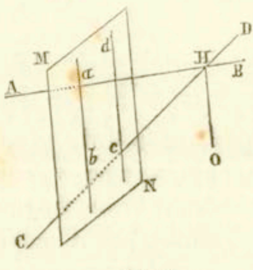


Fig. 2.

1° Niech będą dwie proste AB i CD (*fig.* 1) przecinające się w punkcie H. Ponieważ promień oczny OH spotyka płaszczyznę wizerunku w punkcie *h*, jako pokazuje figura, ten punkt *h* jes perspektywą punktu przecięcia H dwóch prostych AB i CD; więc wtedy perspektywy *ab* i *cd* tych prostych spotykają się w punkcie *h*.

2° Uważajmy teraz dwie proste AB i CD także się przecinające w punkcie H (*fig.* 2), ale w których promień OH nie spotyka płasczyzny wizerunku. W tym przypadku, płasczyzny OAB i OCD przechodzą przez promień OH; więc ich przecięcia *ab* i *cd* z płasczyzną wizerunku, to jest perspektywy dwóch prostych AB i CD, są równoległe do OH, i temsamem równoległe między sobą.

Twierdzenie XXX.

Gdy dwie proste są równoległe, ich perspektywy przecinają się albo są równoległe, według jak te proste spotykają płasczyznę wizerunku albo są do niej równoległe.

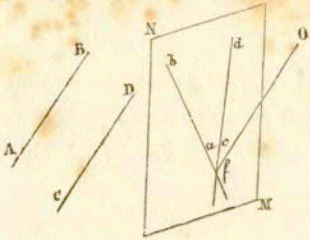


Fig. 1.

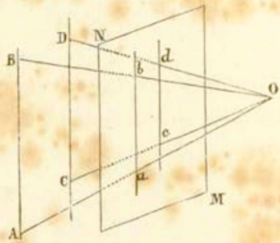


Fig. 2.

1° Niech będą dwie proste równoległe AB i CD (*fig.* 1) które spotykają płasczyznę wizerunku. Jeśli przez punkt widzenia O poprowadzimy prostę O*f* równoległą do danych, ta linia wyznaczy ich spólny punkt umknięcia *f*. Więc perspektywy *ab* i *cd* dwóch danych równoległych AB i CD przecinają się w punkcie *f*.

2° Jeśli dwie proste równoległe AB i CD (*fig.* 2) są zarazem równoległe do płasczyzny wizerunku, wtedy płasczyzny OAB i OCD przecinają tę płasczyznę wedle dwóch prostych *ab* i *cd* które są równoległe do dwóch danych równoległych AB i CD. Więc perspektywy *ab* i *cd* tych ostatnich są równoległe.

Wniosek. — Gdy dwie proste leżą na jednej płesczyznie przechodzącej przez punkt widzenia O, wtedy ich perspektywy zlewają się w jedną linię prostą.

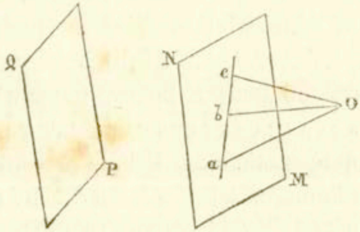
Uwaga. — Z tego co poprzedza wnosimy *ogólne twierdzenie :*

Gdy przecięcie się dwóch płaszczyzn rzutujących jest równoległe do płaszczyzny wizerunku, perspektywy jakichkolwiek linij leżących na tych płaszczyznach są równoległe. I nawzajem.

Więc, aby otrzymać perspektywy równoległe prostych AB, CD, EF,... przecinających się w jednym punkcie H, dość wziąć płaszczyznę wizerunku równoległą do prostej OH która łączy punkt H z punktem widzenia O. Można tym sposobem otrzymać perspektywy równoległe drugiej jeszcze grupy linij prostych A′B′, C′D′, E′F′,... przecinających się w punkcie H′, biorąc płaszczyznę wizerunku równoległą zarazem do OH i OH′.

Zagadnienie XXXI.

Wszystkie punkta płaszczyzny które są w nieskończoności mają perspektywy w linii prostej na płaszczyźnie wizerunku nierównoległej.



Jakoż, otrzymuje się perspektywy *a*, *b*, *c*,... punktów w nieskończoności leżących na płaszczyźnie PQ, prowadząc przez punkt O równoległe O*a*, O*b*, O*c*,...do tej płaszczyzny. Owoż, te równoległe leżą wszystkie na jednej płaszczyźnie *oab* równoległej do płaszczyzny PQ (VI, 23, wn.); więc szukane perspektywy, leżąc na dwóch płaszczyznach MN i O*ab*, są na linii prostej *abc* równoległej do przecięcia płaszczyzn MN i PQ.

Wniosek. — Jeśli figura płaska F ma punkta w nieskończoności, perspektywy tych punktów są w linii prostej. I nawzajem, punktom figury perspektywnej F′, będącym w nieskończoności, odpowiedają punkta figury F leżące na linii prostej równoległej do przecięcia płaszczyzn figur F i F′. Bo figury F i F′ są nawzajem perspektywą jedna drugiej, względem tego samego punktu widzenia O.

Z tego co poprzedza wynika że :

1° Można zawsze wziąć perspektywę figury płaskiej tak, żeby perspektywa jednego z jej punktów A poszła w nieskończoność; dość tylko żeby płaszczyzna wizerunku była równoległa do promienia ocznego OA. Wtedy wszystkie linie proste które się spotykają w punkcie A tej figury będą miały perspektywy równoległe.

2° Można zawsze wziąć perspektywę figury płaskiej tak, żeby perspektywa dwóch jej punktów A i B, czyli perspektywa linii prostej AB, była w nieskończoności. Dość tylko żeby płaszczyzna wizerunku była równoległa do płaszczyzny OAB.

Tym sposobem czworobok może mieć za perspektywę równoległobok, z kątem takiej wielkości jaka się podoba. Jakoż, żeby perspektywa *abcd* czworoboku ABCD była równoległobokiem, trzeba żeby punkt spotkania E boków przeciwległych AB i CD miał perspektywę w nieskończoności; tak samo, trzeba żeby perspektywa punktu spotkania F boków przeciwległych AD i BC była także w nieskończoności. Dość więc żeby płaszczyzna wizerunku była równoległa do płaszczyzny OEF. Owoż, kąt EOF jest dowolny, ponieważ punkt widzenia O może być wzięty dowolnie. Więc można dać kątowi *bad* równoległoboku taką wielkość jaką zechcemy.

RZUTY W OGÓLNOŚCI.

Wiadomo że *rzutem linii prostej na płaszczyznie jest linia prosta.* To twierdzenie nie przestaje być prawdziwe, gdy rzutujące punktów są pochyłe do płaszczyzny rzutów (VI, 16); byle tylko wszystkie rzutujące były równoległe do jednej prostej. Dla tej przyczyny obydwa rzuty są *rzutami walcowemi;* a widzieliśmy że perspektywa jest *rzutem stożkowym*. Więc, zogólniając znaczenie wyrazu *rzut*, powiemy:

Rzut *a* punktu A na płasczyznie P nazywa się *prostokątnym* albo *pochyłym* albo *stożkowym*, według jak rzutująca A*a* jest prostopadła do płasczyzny P, albo równoległa do pewnej pochyłej do tej płasczyzny, albo wychodzi z punktu stałego O przestrzeni.

Rzut prostokątny, pochyły, albo stożkowy figury jest miejscem rzutów prostokątnych, pochyłych, albo stożkowych wszystkich punktów tej figury; biorąc, ma się rozumieć, na jednej płasczyznie rzuty wszystkich punktów.

Cień rzucony na płasczyznę P, przez figurę którą oświeca punkt światły O, jest rzutem stożkowym czyli perspektywą tej figury.

Ztąd, i na mocy *tw.* XLVIII, *Ks.* V, wnosimy ogólne zadanie:

Gdy cztery proste zbiegające leżą na jednej płasczyznie, ich rzuty prostokątne pochyłe, albo ich cienie czyli perspektywy, na jakiejkolwiek innej płasczyznie, są czterema liniami prostemi także zbiegającemi, których stosunek nieharmoniczny jest równy stosunkowi nieharmonicznemu czterech pierwszych.

Rzuty dają następujące ważne twierdzenie.

TWIERDZENIE XXXII.

Styczna w punkcie m *rzutu* mm' *jakiejkolwiek krzywej* MM' *jest rzutem stycznej w odpowiedającym punkcie* M *tej krzywej.*

Albowiem sieczna *mm'* jest rzutem albo perspektywą siecznej MM', jakkolwiek blizko punkt M' i jego rzut *m'* dochodzą odpowiednio do M i *m*. Więc styczna w punkcie *m* rzutu, albo perspektywy, linii krzywej MM' jest rzutem albo perspektywą stycznej do tej krzywej w punkcie M.

Jest tu jednak wyjątek. W szczególnym przypadku w który styczna do krzywej w punkcie M jest rzutującą tego punktu, jej rzut albo perspektywa jest tylko punktem; gdy tymczasem styczna do rzutu tej krzywej, w punkcie m, jest linią wyznaczoną.

Określenie. — Nazywa się *własnością rzutową* figury wszelka własność która się zachowuje w rzucie tej figury. Własności opisowe są oczywiście własnościami rzutowemi.

Ale nie każda własność miarowa figury jest jej własnością rzutową; i tak, twierdzenie: *W trójkącie prostokątnym, kwadrat z przeciwprostokątnej równa się summie kwadratów z boków kąta prostego*, nie zachowuje się w rzucie trójkąta na płaszczyznie; bo ten rzut nie jest koniecznie trójkątem prostokątnym.

Stosunek nieharmoniczny czterech punktów w linii prostej jest własnością rzutową, i równa się stosunkowi nieharmonicznemu ich perspektyw. Bo cztery punkta A, B, C, D w linii prostej i ich perspektywy a, b, c, d leżą na dwóch poprzecznych jednego pęku O.ABCD (V, 1).

Perspektywa jest jedną z metod poszukiwania własności figur, odpowiedających wiadomym własnościom figur spółrodzajowych. I tak, niech będzie czworobok ABCD, w którym E i F są punktami spotkań boków przeciwległych, G przecięciem dwóch przekątnych wewnętrznych. Zrzutujmy ten czworobok wedle równoległoboku $abcd$. W równoległoboku przekątne przecinają się na połowy. Owoż, perspektywa g punktu G jest środkiem przekątnej ac; więc ta przekątna jest podzielona harmonicznie przez przekątnę bd, i przez prostę ef która jest w nieskończoności perspektywą prostej EF. Ale własność harmoniczna jest własnością rzutową; więc w czworoboku zupełnym ABCD przekątna AC jest podzielona harmonicznie przez przekątne BD i EF. Co już wiemy (V, 10).

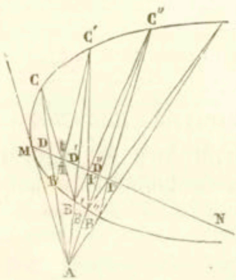
Można uważać wszelką stożkowę jako perspektywę koła, i nawzajem. Albowiem, można nakreślić tę stożkowę i dane koło na jednym stożku kołowym; więc, jeśli weźmiemy wierzchołek tego stożka za punkt widzenia O, i płaszczyznę jednej z dwóch linij za płaszczyznę wizerunku, druga linia będzie perspektywą pierwszej.

Ztąd wynika że wszystkie własności opisowe koła należą do przecięć stożkowych.

I tak, naprzykład, twierdzeniu biegunowej względem koła, odpowieda następujące w przecięciach stożkowych.

Twierdzenie XXXIII.

Jeśli przez punkt A, *leżący na płaszczyznie przecięcia stożkowego, poprowadzono jakąkolwiek sieczną* ABC, *miejscem punktu* D *sprzężonego harmonicznego z punktem* A, *względem cięciwy* BC, *jest linia prosta* DD′ *biegunowa punktu* A.



Bo te wszystkie sieczne AC, AC′... i ich punkta przecięć C, C′, C″.. ze stożkową MC mogą się uważać jako perspektywy linij i odpowiedających punktów które leżą na kole. Owoż, w kole punkta sprzężone harmoniczne których perspektywami są D, D′,... stanowią biegunowę punktu mającego perspektywę A; więc *miejscem punktów* D, D′, D″,... *jest linia prosta* DD′, *biegunowa punktu* A *względem danej stożkowej*.

Wniosek. — *Jeśli przez punkt* A, *leżący na płaszczyznie linii stożkowej, poprowadzimy sieczne* AC, AC′... ; *cięciwy łączące pnnkta przecięć, jako* BC′ *i* CB′,... *albo jako* BB′ *i* CC′,... *spotkają się na biegunowej* DD′ *punktu* A (V, 12).

Uważając na to cośmy powiedzieli w *ks.* V o biegunowej względem koła, łatwo można, za pomocą powyższego twierdzenia i jego wniosku, nakreślić biegunowę danego punktu, albo biegun danej biegunowej, względem linii stożkowej.

Stosując tę uwagę, i opierając się na *tw.* XXX, *Ks.* V, widzimy zaraz że

Każda kierownica jest biegunową odpowiednego ogniska względnie do jego stożkowej.

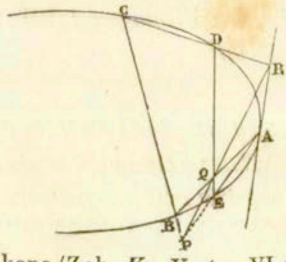
Tą samą metodą perspektywy nie trudno dowieśdź że znamienite twierdzenia *sześciokąta* PASKALA i BRIANCHONA, twierdzenie DESARGA (V, 32 i 33), KARNOTA (III, 33), z ich wnioskami stosują się do wszystkich przecięć stożkowych.

Jako przykład ważności tych twierdzeń, rozwiążmy następujące zagadnienia.

ZAGADNIENIE I.

Przez dany punkt A *poprowadzić styczną do danej stożkowej.*

1° Jeśli punkt A jest dany zewnątrz, na płasczyznie linii stożkowej BMC (*fig. poprzednia*), nakreśl jego biegunowę MN której punkta przecięcia, M, N ze stożkową będą punktami zetknięć, a zaś proste AM, AN stycznemi szukanemi.



2° Jeśli pukt A jest dany na stożkowej ABC, weź na tej linii cztery punkta przyzwoite B, C, D, E, i nakreśl pięciokąt wpisany ABCDEA. Przedłuż AE, BC i CD, poprowadź sieczną punktów spotkań PQR, i nakoniec prostę AR która będzie styczną szukaną (Zob. *Ks.* V, *tw.* VI *wn*).

UWAGA. — To piękne rozwiązanie, za pomocą samej linii prostej, pokazuje że można kreślić styczne do danej stożkowej nie znając nawet jej rodzaju; to jest, nie wiedząc czy dany łuk należy do ellipsy, hiperboli albo paraboli.

Jest więcej jeszcze. Można, znając tylko pięć punktów linii stożkowej, poprowadzić przez jeden z nich styczną do tej krzywej, chociaż ona nie jest nakreślona ani dany jej rodzaj.

Zagadnienie II.

Mając dane pięć punktów A, B, C, D, E *linii stożkowej, nakreślić inne.*

Przez jeden z danych punktów, *np.* przez E, poprowadź jakąkolwiek prostę EF. Chodzi o znalezienie punktu F w którym ona spotyka linię stożkową. Otóż, w sześciokącie wpisanym ABCDEF, przez punkt przecięcia P *pierwszego* boku AB i *czwartego* DE, i przez punkt przecięcia Q *drugiego* boku BC i *piątego* EF, poprowadź linię prostą PQ która spotka *trzeci* bok CD w punkcie R. Jeśli połączysz AR, proste AR i E'F przetną się w żądanym punkcie F.

Można tym sposobem wyznaczyć tyle punktów szukanej stożkowej ile się podoba.

Zagadnienie jest oczywiście niemożebne, gdy *trzy* z pięciu danych punktów są w linii prostej.

Zagadnienie III.

Nakreślić linię stożkową styczną do pięciu danych prostych.

Niech będzie ABCDE pięciokąt utworzony z danych stycznych. Poprowadź przekątne BD i CE; punkt skrzyżowania N i wierzchołek A połącz linią prostą AN, która spotka bok przeciwległy CD w punkcie zetknięcia F szukanej stożkowej.

Tym sposobem wyznacza się cztery inne punkta zetknięcia, i zagadnienie przywodzi się do poprzedzającego.

Zagadnienie jest niemożebne gdy *trzy* z pięciu danych stycznych zbiegają się w jednym punkcie albo są równoległe.

Uwaga. — *W każdy pięciokąt można wpisać i na nim opisać linię stożkową, ale tylko jedną.*

Stożkowa sferyczna. — Wyobraźmy sobie sferę i stożek mający za wierzchołek jej środek a za podstawę linię stożkową. Ten stożek przecina powierzchnię sferyczną wedle dwóch linij zamkniętych, symetrycznych, które uważane razem stanowią *stożkowę sferyczną*. Każda z tych dwóch krzywych jest perspektywą na sferze linij stożkowych, i nazywa się ELLIPSĄ SFERYCZNĄ.

Ellipsa sferyczna ma dwie osie symetryi sferyczne prostokątne, których punkt przecięcia jest jej środkiem; ma także dwa ogniska leżące na wielkiej osi, i dwie kierownice sferyczne odpowiedające tym ogniskom.

Stosunek nieharmoniczny trzech punktów w linii prostej, jako równy stosunkowi nieharmonicznemu pęku czterech linij prostych, jest także równy stosunkowi nieharmonicznemu czterech punktów na sferze, jeśli do wyznaczenia jego wartości są wzięte nie łuki kół wielkich ale ich wstawy. Zatem, czterem punktom harmonicznym na płaszczyźnie odpowiedają cztery punkta harmoniczne na sferze. Następnie, ponieważ biegunowa punktu względem podstawy stożka jest linią prostopadłą do osi ogniskowej, biegunowa punktu względem ellipsy sferycznej jest łukiem koła wielkiego, także prostopadłym do osi ogniskowej.

Ellipsa sferyczna posiada wiele własności podobnych do własności ellipsy płaskiej.

I tak:

Stosunek wstaw odległości punktu ellipsy sferycznej od ogniska i od kierownicy odpowiedającej jest ilością stałą.

Summa wstaw promieni wodzących które łączą punkt ellipsy sferycznej z obydwoma ogniskami jest ilością stałą.

Styczna do ellipsy sferycznej czyni kąty równe z promieniami wodzącemi punktu zetknięcia (V, 27); i. t. d.

Ale dowodzenia tych twierdzeń do geomotryi analitycznej należą.

FIGURY ODWROTNE; METODA PRZEKSZTAŁCENIA PRZEZ PROMIENIE WODZĄCE ODWROTNE.

Określenie. — Mając dany jakikolwiek układ punktów A, B, C... na *płaszczyźnie* albo *w przestrzeni*, jeśli na promieniach wodzących SA, SB, SC,.. które wychodzą z punktu dowolnego S, weźmiemy odległości SA', SB', SC',... wszystkie jednakowym sposobem, i takie żeby było

$$SA . SA' = SB . SB' = SC . SC' = \dots = p,$$

punkta A', B', C',... będą stanowiły układ *odwrotny* układu ABC...

Jeśli punkta A, B, C,... tworzą figurę płaską albo w przestrzeni, ich odpowiedne A', B', C',... tworzą także figurę płaską albo w przestrzeni odwrotną pierwszej. Sposób jakim się przechodzi z pierwszej figury do drugiej nosi nazwisko *przekształcenia przez promienie wodzące odwrotne.*

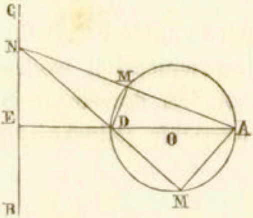
Punkt S nazywa się *biegunem* albo *początkiem*, a ilość stała p *potęgą* przekształcenia. Ta potęga, jest *dodatna* albo *odjemna*, według jak dwa punkta *odpowiedne* A i A' leżą oba z jednej strony albo każdy ze strony przeciwnej bieguna S.

Gdy potęga p jest dodatna, można ją uważać jako kwadrat z promienia koła mającego środek w S. A jeśli nadamy temu promieniowi ciąg wartości, wszystkie figury odwrotne tak otrzymane będą jednokładne. Albowiem, oznaczmy przez ρ promień wodzący danej figury, przez r i r' promienie wodzące odpowiedne dwóch figur odwrotnych z pierwszą względem potęg p i p',

będzie $\rho r = p$ i $\rho r' = p'$; więc $\frac{r}{r'} = \frac{p}{p'}$.

Twierdzenie XXXIV.

Figurą odwrotną linii prostej jest okrąg przechodzący przez punkt wzięty za biegun.



Niech będzie linia prosta BC i punkt A wzięty za biegun. Poprowadźmy promień wodzący AN, i weźmy na nim punkt M taki żeby było

$$AN . AM = p;$$

z punktu A spuśćmy na BC prostopadłę AE, i weźmy na niej punkt D taki żeby było

$$AE . AD = p.$$

Z tych dwóch równań wynika

$$AN . AM = AE . AD.$$

Ostatnie równanie pokazuje że cięciwa DM i dana prosta BC są dwiema przeciwrównoległemi w kącie A (III, 10); zatem kąt DMA jest prosty.

Więc *miejscem punktu* M *jest okrąg przechodzący przez biegun* A.

Promień tego okręgu jest oczywiście $AO = \frac{p}{2AE}$.

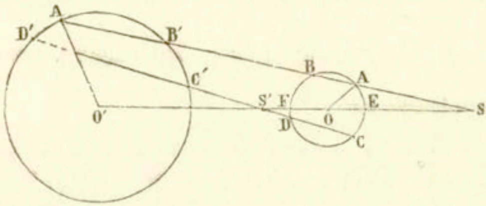
Gdyby wzięto punkt D za biegun otrzymanoby ten sam wynik.

To wszystko jest przez się widoczne; dość uważać że punkta A i D są środkami podobieństwa linii prostej BC i koła AMD.

Uwaga. — Gdyby biegun był wzięty na danej prostej, wtedy ta prosta byłaby sama swoją odwrotną.

Twierdzenie XXXV.

Figura odwrotna okręgu, względem punktu jego płaszczyzny wziętego za biegun, jest okrąg mający z pierwszym ten biegun za jeden ze środków podobieństwa.



Niech będzie dany okrąg O, i punkt S na jego płaszczyznie, zewnątrz albo wewnątrz tego okręgu. Na promieniu wodzącym SAB weźmy punkta A′ i B′ takie żeby było

$$SA \,.\, SA' = p \quad \text{i} \quad SB \,.\, SB' = p.$$

A ponieważ $SA \,.\, SB = k$, będzie, mnożąc i dzieląc stronami,

$$SA' \,.\, SB' = \frac{p^2}{k}.$$

Więc *miejscem punktów* A′ i B′ *jest okrąg* O′.

Punkt S jest środkiem podobieństwa okręgów O i O′; a zaś $\dfrac{k}{p}$ ich stosunkiem podobieństwa, bo $\dfrac{SA \,.\, SB}{SB \,.\, SB'} = \dfrac{SA}{SB'} = \dfrac{k}{p}$.

Zatem $$SO' = \frac{p}{k}\, SO \quad \text{i} \quad O'A' = \frac{p}{k}\, OA.$$

Wniosek. — Jeśli punkt S zbliża się do okręgu O, i nareszcie pada na nim w punkcie E albo F, wtedy okrąg odwrotny O' rośnie nieskończenie i staje się linią prostą.

Więc, *figurą odwrotną okręgu, względem jednego z jego punktów wziętego za biegun, jest linia prosta, prostopadła do średnicy* 2R *przechodzącej przez ten biegun, i na odległość* $\frac{p}{2R}$ *od niego.*

Dobrze jest dowieśdź wprost tego wniosku, który jest niejako wzajemnicą twierdzenia XXXV.

Twierdzenie XXXVI. — *Figurą odwrotną płaszczyzny jest sfera przechodząca przez punkt wzięty za biegun.*

Promień tej sfery równa się $\frac{p}{2d}$, oznaczając przez d odległość bieguna od płaszczyzny.

Twierdzenie XXXVII. — *Figurą odwrotną sfery, względem punktu przestrzeni wziętego za biegun, jest sfera mająca z daną sferą ten biegun za jeden ze środków podobieństwa.*

Dowodzi się łatwo obydwóch twierdzeń, przywodząc rzecz do linii prostej i koła, za pomocą płaszczyzny siecznej przechodzącej przez biegun.

Wniosek. — Jeśli punkt wzięty za biegun zbliża się do danej powierzchni sferycznej i nareszcie jej dosięga, wtedy sfera odwrotna rośnie nieskończenie i staje się płaszczyzną.

Więc *figurą odwrotną sfery, względem jednego z jej punktów wziętego za biegun, jest płaszczyzna prostopadła do średnicy* 2R *przechodzącej przez ten biegun, i na odległość* $\frac{p}{2R}$ *od niego.*

Uwaga. Ten wniosek z wnioskiem *tw.* XXXV stanowią dwa ważne twierdzenia które nam później będą użyteczne.

TWIERDZENIE XXXVIII.

Figurą odwrotną okręgu, względem jakiegokolwiek punktu przestrzeni wziętego za biegun, jest okrąg.

Albowiem, można uważać dany okrąg jako przecięcie się dwóch sfer O i O′; zatem figura odwrotna tego okręgu, będąc przecięciem się dwóch sfer O_1 i O_1' które są odwrotnemi sfer O i O′, jest także okręgiem.

TWIERDZENIE XXXIX.

Znając odległość dwóch punktów jednej figury, można wyznaczyć odległość punktów odpowiednych figury odwrotnej, względem jakiegokolwiek bieguna S *i potęgi* p.

Jakoż, równanie

$$SM\,.\,SM' = SN\,.\,SN' = p$$

dowodzi że proste MN i M′N′ są przeciwrównoległe względem kąta S; zatem dwa trójkąty podobne SMN i SM′N′ dają :

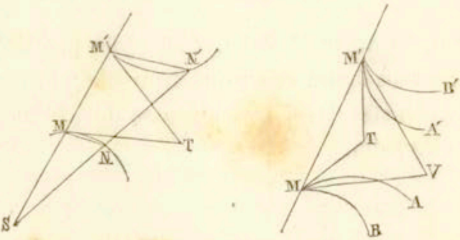
$$\frac{M'N'}{MN} = \frac{SN'}{SM} = \frac{SN'\,.\,SN}{SM\,.\,SN} = \frac{p}{SM\,.\,SN};$$

zkąd
$$M'N' = \frac{MN\,.\,p}{SM\,.\,SN}.$$

Otrzymuje się podobnie $MN = \dfrac{M'N'\,.\,p}{SM'\,.\,SN'}$.

Twierdzenie XL.

Kąt dwóch linij przecinających się jest równy kątowi linij odwrotnych.



Uważajmy najpierwej że dwie jakiekolwiek linie odwrotne MN i M'N', płaskie albo skośne, tworzą z promieniem wodzącym SM kąty równe. Jakoż, cięciwy MN i M'N' są przeciwodpowiedne; zatem kąty SMN i SN'M' są równe, jakkolwiek blizko punkt N dosięga do M. Owoż, gdy promień wodzący SN schodzi się z SM, sieczne MN i M'N' stają się stycznemi MT i M'T do swoich krzywych w punktach odpowiednych M i M'; więc te styczne czynią z promieniem wodzącym SM kąty równe, to jest wyraźniej, tworzą trójkąt równoramienny TMM' mający podstawę MM'.

Niech będą teraz dwie jakiekolwiek krzywe MA, MB, i ich odwrotne M'A', M'B'; powiedam że kąt dwóch pierwszych równa się kątowi dwóch drugich, to jest kąty TMV i TM'V, utworzone przez styczne do tych krzywych, są równe.

Albowiem, jeśli dwie krzywe MA i MB leżą na jednej płaszczyźnie, na mocy tego co poprzedza będzie

kąt TMM' = TM'M, i kąt VMM' = VM'M; więc kąt TMV = TM'V.

Jeśli zaś dwie dane krzywe MA i MB są skośne, uważajmy dwa trójściany MM'TV i M'MTV które, mając kąt dwójścienny MM' spólny, przyległy dwom ścianom odpowiednio równym

TMM' = TM'M i VMM' = VM'M, są symetryczne; więc kąty TMV i TM'V są równe.

Twierdzenie XLI.

Kąt dwóch powierzchni P i P_1, *w punkcie* m *linii przecięcia* amb, *jest równy kątowi pod którym się przecinają dwie powierzchnie odwrotne* P' i P'_1 *w punkcie odpowiednym* m'.

Kątem dwóch powierzchni przecinających się w danym punkcie *m* jest kąt ich płaszczyzn stycznych w tym punkcie. Owoż, jeśli przez punkt *m*, poprowadzimy na powierzchniach P i P_1 dwie odpowiedne krzywe *mp* i *mq*, przecinające pod kątem prostym linię *ab* spólną tym powierzchniom, krzywe odwrotne *m'p'* i *m'q'* przetną także pod kątem prostym linię *a'm'b'*, spólną powierzchniom odwrotnym P', P'_1. Ale kąt dwóch krzywych *mp* i *mq* mierzy kąt powierzchni P i P_1 w punkcie *m*, a kąt krzywych odwrotnych *m'p'* i *m'q'* mierzy kąt powierzchni odwrotnych P' i P'_1 w punkcie odpowiednym *m'*, i te dwa kąty są równe (40); więc kąt dwóch powierzchni przecinających się w punkcie *m* jest równy kątowi powierzchni odwrotnych przecinających się w punkcie odpowiednym *m'*.

Ta własność zachowania kątów w dwóch figurach odwrotnych, i możebność wyrażenia odległości dwóch punktów w funkcyi odległości punktów odpowiednych, są nader ważne, i mogą służyć do poszukiwania własności *opisowych* albo *miarowych* danej figury, jeśli ją przekształcimy na inną w której te własności są wiadome.

Zastosowanie pokaże lepiej użytek tej metody, do której służą dwa następujące twierdzenia.

Można zawsze przekształcić dany układ trzech kół na inny układ trzech kół mających środki w linii prostej; miejscem biegunów tego przekształcenia jest okrąg przecinający prostokątnie trzy dane koła. Jakoż, linia prosta na której się znajdują środki trzech kół przekształconych dzieli prostokątnie ich okręgi; więc okrąg będący linią odwrotną tej prostej dzieli prostokątnie trzy dane okręgi, i jest miejscem biegunów przekształcenia.

Można także przekształcić dany układ trzech sfer na inny układ trzech sfer mających środki w linii prostej; miejscem biegunów tego przekształcenia jest okrąg który dzieli prostokątnie koła wielkie trzech sfer danych, leżące na płaszczyznie ich środków. Albowiem, biegun przekształcenia, i prosta na której mają się znajdować środki trzech sfer odwrotnych, wyznaczają płaszczyznę która zawiera oczywiście środki trzech danych sfer (35); więc zadanie przywodzi się do przekształcenia trzech kół wielkich, leżących na płaszczyznie środków trzech danych sfer, na trzy inne koła mające środki w linii prostej. Co już wiadome.

Ostatnie przekształcenie daje łatwe dowodzenie twierdzenia *Dupuis*.

Gdy jedna sfera zmienna jest jednakowo styczna do trzech sfer stałych, każdy ze trzech punktów zetknięć opisuje małe koło na swojej sferze.

Jakoż, jeśli przekształcimy układ czterech sfer tak, żeby trzy stałe sfery miały środki w linii prostej, sfera zmienna nie przestanie być styczną do tych sfer, i dotknie każdej w punkcie którego miejscem jest okrąg prostopadły do linii środków. Owoż, figurą odwrotną koła jest koło; więc, wracając do danego układu sfer, widzimy że punkt zetknięcia sfery zmiennej opisuje małe koło na każdej sferze stałej.

Zastosujemy teraz wyłożoną teoryę do kilku zadań geometryi płaskiej.

Przekształcenie własności opisowych. — Figurą odwrotną wielokąta prostolinijnego ABC..., względem punktu S jego płaszczyzny, jest wielokąt krzywolinijny A'B'C',... utworzony przez łuki kół które się krzyżują w punkcie S. Ztąd, na mocy twierdzenia równości kątów w dwóch figurach odwrotnych, wynikają następujące zadania.

1° *Summa kątów wielokąta krzywolinijnego* A'B'C'... *jest równa dwom kątom prostym wziętym tyle razy ile jest boków mniej dwa.*

2° Trzy wysokości trójkąta przecinają się w jednym punkcie.

Więc, *w trójkącie krzywolinijnym* mającym za boki łuki trzech kół przechodzących przez jeden punkt, trzy łuki kół, z których każdy przechodząc przez ten punkt i przez jeden wierzchołek trójkąta dzieli prostokątnie bok przeciwległy, spotykają się w drugim punkcie spólnym.

Twierdzenie dwójsiecznych w trójkącie przekształca się podobnie.

3° Gdy dwa koła, przechodzące odpowiednio przez punkła S i A, S i B, przecinająsię pod kątem stałym, miejscem drugiego punktu przecięcia jest okrąg.

Przekształcenie własności miarowych. — To przekształcenie opiera się na formule odległości dwóch punktów (39), w której można wziąć $p = 1$. Aby więc przekształcić związek między odcinkami AB, BC,... danej figury, dość zastąpić każdy z nich, jako AB, przez $\frac{AB}{SA \,.\, SB}$, biorąc punkt S za biegun.

I tak : *Miejscem geometrycznem punktów równo oddalonych od punktu stałego* O *na jednej płaszczyznie jest okrąg.*

Przekształćmy to określenie.

Oznaczając przez M' i O' punkta odpowiedne punktów M i O, względem bieguna S wziętego na tej samej płaszczyznie, będzie

$$MO = \frac{M'O' \,.\, p}{SM' \,.\, SO'}; \quad \text{zkąd} \quad \frac{O'M'}{SM'} = \frac{MO \,.\, SO}{p}.$$

To pokazuje że stosunek $\frac{O'M'}{SM'}$ jest liczbą stałą.

Więc *miejscem punktu* M', *którego odległości od dwóch punktów* S i O' *są w stosunku stałym, jest okrąg*. Co już wiemy.

Niech będzie, na drugi przykład, szereg punktów w linii prostej idących w porządku A, B, C,... K. Mamy oczywiście

$$AK = AB + BC + ... + IK.$$

Figurą odwrotną układu tych punktów, względem bieguna S, jest szereg punktów A', B', C',.. K' idących w tym samym porządku, i leżących na okręgu który przechodzi przez biegun S. Odległości punktów figury odwrotnej są związane równaniem

$$\frac{A'K'}{SA' \,.\, SK'} = \frac{A'B'}{SA' \,.\, SB'} + \frac{B'C'}{SB' \,.\, SC'} + \ldots\ldots \frac{I'K'}{SI' \,.\, SK'}.$$

Biorąc tylko trzy punkta A', B', C', będzie

$$A'C' \,.\, SB' = A'B' \,.\, SC' + B'C' \,.\, SA'.$$

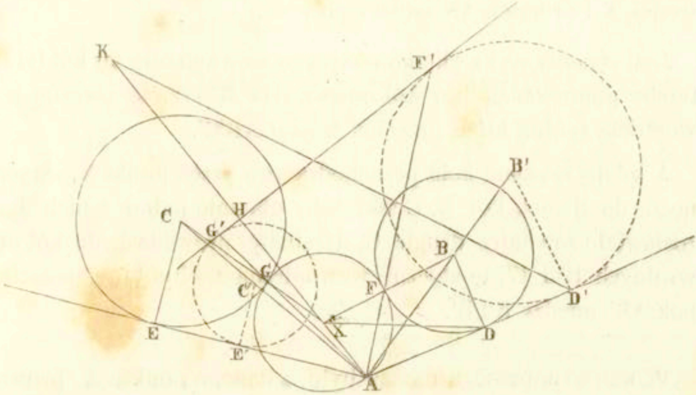
Co daje wiadome *twierdzenie Ptolemeusza* (III, 26).

Nakoniec, weźmy przykład który, dowodząc użytku metody, pokaźe jak można ułatwić kreślenie figury odwrotnej z daną.

Zagadnienie IV.

Przez dany punkt A *poprowadzić koło styczne do dwóch danych kół* B i C.

Niech będzie X koło zadość czyniące zagadnieniu. Jeśli, biorąc punkt A za biegun, przekształcimy, przez promienie wodzące odwrotne, figurę trzech kół stycznych B, C, X, otrzymamy dwa koła odwrotne B', C', i linię prostą która będzie spólną styczną tych ostatnich kół (35). Więc, żeby rozwiązać zagadnienie, dość jest poprowadzić do kół odwrotnych B', C', jedną ze stycznych spólnych, jako F'G', i połączyć punkta styczności F', G' z biegunem A; punkta F, G, przeciwodpowiedne punktów F', G', będą zetknięciami koła X z danemi kołami B i C, punkt spotkania linij środków BF i CG będzie środkiem X, a odiegłość XF promieniem tego koła.



Wykreślenie kół odwrotnych B' i C'. — Przypuśćmy, dla utkwienia myśli, że trzeba wykreślić koło X przechodzące przez punkt A i styczne zewnętrznie do dwóch kół B, C. Przez dany punkt A prowadzimy styczne AD i AE do tych kół, i bierzemy wieloczyn AD.AE za potęgę przekształcenia; po czem, na stycznej AD wyznaczamy długość AD' = AE, i z punktu D' wyprowadzamy prostopadłę D'B' aż do spotkania B' z prostą AB; otrzymujemy tym sposobem środek B' i promień B'D' koła B' odwrotnego z kołem B. Biorąc na stycznej AE' długość AE' = AD, i wykonywając podobne wykreślenia, znajdziemy koło C' odwrotne z kołem C.

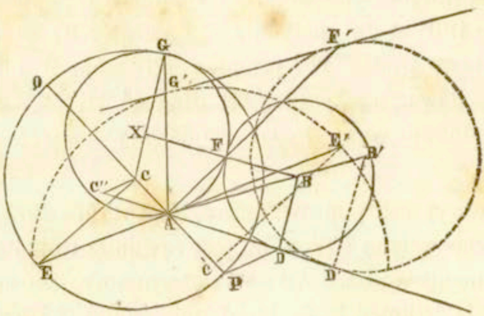
To zrobiwszy, jeśli poprowadzimy, do kół odwrotnych B' i C', tę styczną zewnętrzną F'G' która jest zewnątrz trójkąta AB'C', i potem promienie wodzące AF', AG', otrzymamy, jakośmy powiedzieli, punkta zetknięć F, G, a następnie środek X i promień XF koła szukanego.

Można inaczej znaleźć środek i promień koła X. Jakoż, uważajmy że środek X leży na prostopadłej AH do stycznej spólnej F'G' kół B', C', i promień $AX = \frac{p}{2AH} = \frac{AD \,.\, AD'}{2AH}$ (34); więc, jeśli weźmiemy $AK = 2AH$, i, połączywszy KD', poprowadzimy przeciwrównoległę DX do D'K, wyznaczymy zarazem środek X i promień AX szukanego koła.

Jeśli chcemy wykreślić koło styczne wewnętrznie do kół B i C, trzeba poprowadzić, do kół odwrotnych B' i C', tę styczną zewnętrzną spólną która przecina trójkąt AB'C'.

A gdyby szukano koła przechodzącego przez punkt A, i stycznego do dwóch kół B, C tak, żeby otaczało jedno z nich B a zostawiało zewnątrz drugie C, trzebaby prowadzić, do kół odwrotnych B' i C', tę styczną wewnętrzną spólną która przecina bok AB' między A i B'.

W tem co poprzedza można było, z danego punktu A, prowadzić styczne do obydwóch kół danych B, C; i dlatego mogliśmy wziąć za potęgę przekształcenia wieloczyn stycznych AD.AE. Uważajmy teraz szczególny przypadek w którym szukane koło X, styczne do danych B i C, powinno przechodzić przez punkt A leżący wewnątrz koła C. Jeśli poprowadzimy styczną AD do koła B a średnicę PAQ w kole C, i wyznaczymy punkt D' tak żeby



było $AD' = AQ$; widzimy zaraz że, biorąc wieloczyn AD . AD' za potęgę prsekształcenia, łatwo się kreśli koło B' odwrotne koła B. Nie trudno także wykreślić koło C' odwrotne koła C; bo wiemy że jego środek C′ otrzymuje się za pomocą formuły $AC' = \frac{p}{k} . AC = \frac{AD . AC}{AP}$. Owoż, łącząc DP, i prowadząc przez środek danego koła C równoległę CC″ do DP aż do spotkania C″ z prostą AD, będzie $AC'' = \frac{AD . AC}{AP}$; więc bierzemy AC′ = AC″, prowadzimy prostopadłe CE i C′E′ do AC, a potem prostę EA aż do spotkania E′ z prostą C′E′ i, mamy tym sposobem środek C′ i promień C′E′ koła odwrotnego z kołem C. Wykreśliwszy koła odwrotne B′ i C′, prowadzimy styczną zewnętrzną spólną F′G′, i znajdujemy, jako wyżej, punkta zetknięć F i G, a następnie środek X i promień XF żądanego koła X.

Uwaga. — Powyższe rozumowania, zmodyfikowane wedle twierdzeń 36 i 37, stosują się do sfer i dają rozwiązanie zagadnienia : *Przez dany punkt poprowadzić sferę styczną do trzech sfer danych.*

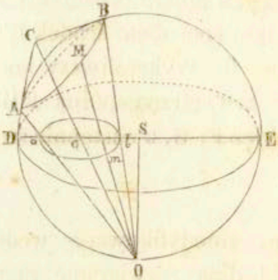
RZUT STEREOGRAFICZNY.

Rzut stereograficzny figury sferycznej jest poprostu perspektywą figury sferycznej, otrzymaną na płaszczyznie koła wielkiego którego biegun wzięto za punkt widzenia. I tak (*fig. poniżej*), rzutem stereograficznym punktu M sfery jest punkt m na płaszczyznie *średnicowej* DE, prostopadłej do promienia OS który łączy oko ze środkiem sfery. Owoż, uważając że płaszczyzna średnicowa jest figurą odwrotną swojej sfery, względem bieguna O i potęgi przekształcenia $p = 2R . R$ (37, wn), łatwo widzimy że rzut stereograficzny jest tylko szczególnym przypadkiem przekształcenia przez promienie wodzące odwrotne. Ztąd zaraz wnosimy następujące twierdzenie.

Rzuty stereograficzne dwóch linij nakreślonych na sferze przecinają się pod tym samym kątem co te linie same.

Twierdzenie XLII.

Rzut stereograficzny koła AMB *leżącego na sferze jest kołem* amb, *które ma za środek* c *rzut stereograficzny wierzchołka* C *stożka opisanego na tej sferze wedle danego koła.*



Jakoż, prosta CS jest prostopadła do płaszczyzny koła AMB; zatem, w stożku OAB kołowym pochyłym, płaszczyzna OSC jest prostopadła do płaszczyzn koła AMB i przecięcia *amb*. Ale ślady AB i *ab* tych dwóch płaszczyzn na płaszczyznie głównej OAB, są oczywiście przeciwrównoległe; więc przecięcie *amb* jest kołem przeciwrównoległem względem podstawy AMB, i jego środek *c* leży na prostej CO (6). Co dowodzi twierdzenia.

Chociaż to dowodzenie jest proste, dajemy jednak drugie, wskazane przez P. Chasles.

Wyobraźmy sferę S_1, która przechodzi przez koło AMP i ma za środek wierzchołek C stożka opisanego na sferze S. Sfery S i S_1 przecinają się prostokątnie; zatem, biorąc punkt widzenia O za biegun przekształcenia, jeśli utworzymy figury odwrotne sfer S i S_1, pierwszej będzie odwrotną płaszczyzna średnicowa D*m*E, a drugiej sfera S'_1 mająca środek na prostej OC. Owoż, te dwie figury odwrotne przecinają się także prostokątnie; więc ich przecięcie jest wielkiem kołem sfery S'_1, mającem środek na przecięciu *c* promienia OC z płaszczyzną średnicową D*m*E. To wielkie koło jest właśnie rzutem stereograficznym *amb* danego koła AMB na sferze. Co było do dowodzenia.

Wniosek. — *Mając dane koło* K *i punkt wewnętrzny* P, *można zawsze, i wieloma sposobami, zrzutować to koło środkowo (wziąć perspektywę) wedle koła mającego za środek perspektywę* p *punktu* P.

Aby dopełnić tego podwójnego warunku, dość jest poprowadzić *jakąkolwiek* sferę przez dane koło K, i zrobić rzut stereograficzny tego koła, biorąc za punkt widzenia jeden z punktów przecięcia sfery z linią która łączy punkt P z wierzchołkiem stożka opisanego na sferze wedle danego koła K.

ZADANIA GEOMETRYI PRZESTRZENI.

1055. — Płaszczyzny biegunowe punktów leżących na okręgu koła danego w przestrzeni są styczne do powierzchni stożkowej obrotowej. Jaki powinien być promień tego okręgu ażeby kąt linii rodzącej stożka i osi koła miał $45°$?

1056. — Jedną płaszczyzną przecięto dwa walce jednokładne. Dowieśdź że przecięcia są dwiema liniami krzywemi jednokładnemi, których środek jest na przecięciu płaszczyzny siecznej z prostą równoległą do linij rodzących i przechodzącą przez środek jednokładności tych walców.

1057. — Można zawsze ustawić dwa dane czworościany tak żeby jeden był perspektywą drugiego.

1058. — Gdy dwa pęki jednokreślne spólnego środka nie mają promieni podwójnych, wtedy można je uważać za perspektywę dwóch pęków w których promienie odpowiedne czynią między sobą kąty równe i skierowane w tę samę stronę.

1059. — Znaleźć najkrótszą odległość danego punktu od danej powierzchni obrotowej stożkowej, albo walcowej.

1060.—Jaka jest najkrótsza droga między dwoma punktami na powierzchni walcowej?

1061. — Poprowadzić płaszczyznę styczną do powierzchni obrotowej, walcowej albo stożkowej, 1° przez dany punkt na powierzchi, 2° przez punkt zewnętrzny, 3° równolegle do danej prostej.

1062. — Zbudować stożek albo walec obrotowy, znając trzy linie rodzące.

1063. — Znaleźć miejsce punktów których potęgi względem trzech sfer są proporcyonalne do promieni tych sfer.

1064. — Jaki punkt trzeba wziąć za biegun przekształcenia żeby, za pomocą metody promieni wodzących odwrotnych, zamienić zagadnienie sfery stycznej de czterech sfer danych na zagadnienie sfery stycznej do jednej sfery i do trzech płasczyzn?

1065. — Mając dane cztery sfery promieni $R+\rho$, $R_1+\rho$, $R_2+\rho$, $R_3+\rho$, znaleźć miejsce które środek pierwiastny tych sfer opisuje gdy się zmienia ilość ρ.

1066. — Stożek jest wpisany w sferę; dowieśdź że wszelka płasczyzna, prostopadła do średnicy przechodzącej przez wierzchołek tego stożka, przecina go wedle koła.

1067. — Zbudować trójkąt sferyczny, znając powierzchnię, bok i promień koła opisanego.

1068. — Zbudować trójkąt sferyczny, znając powierzchnię, podstawę i wysokość.

1069. — Znaleść miejsce drugiego ogniska ellips mających jedno ognisko spólne i dwie styczne spólne.

1070. — Miejsce środków wszystkich cięciw ellipsy przechodzących przez jeden punkt.

1071. — Jeśli połączono ogniska hiperboli z punktami w których styczna do tej krzywej spotyka obie niemaltyczne, otrzyma się czworobok wpisalny.

1072. — W paraboli, wieloczyny odległości ogniska od wierzchołków przeciwległych czworoboku opisanego są równe.

1073. — Mając dane dwa trójkąty, zrzutować jeden z nich na płasczyznie tak żeby rzut był trójkątem podobnym drugiemu.

1074. — Przeciąć dany stożek obrotowy wedle ellipsy której excentryczność jest dana.

1075. — W dany stożek obrotowy wpisano dwie sfery, styczne zewnętrznie między sobą. Dowieśdź że objętość zawarta między stożkiem i sferami jest połową objętości zawartej między tym stożkiem i sferą która przechodzi przez dwa koła zetknięć stożka ze sferami wpisanemi.

1076. — Dwa stożki obrotowe przecinające się mają spólną oś, i kąt przy wierzchołku stożka wewnętrznego zawiera 60°; dowieśdź że wierzchołek stożka wewnętrznego jest spólnem ogniskiem wszystkich przecięć, wyznaczonych na stożku zewnętrznym, przez płasczyzny styczne do stożka wewnętrznego.

1077. — Jaka jest najkrótsza droga na powierzchni stożkowej z jednego punktu do drugiego?

1078. — Jeśli na powierzchni walca obrotowego, poprowadzono przez jeden punkt dwie helice przemiające się prostokątnie, *okrąg podstawy walca jest średnim proporcyonalnym między krokami tych helic.*

1079. — Dowieśdź że dwie helice, przecinające się prostokątnie na walcu obrotowym, dzielą jego powierzchnię na czworoboki równe.

1080. — Ze skrajności A i A′ średnicy podstawy walca obrotowego, wychodzą dwie helice przecinające się prostokątnie. Przypuszczając że pierwszy punkt spotkania tych helic jest w M, znaleźć, w funkcyi kroku h pierwszej helicy i promienia R walca, powierzchię trójkąta krzywolinijnego AMA′. Jaki powinien być krok h żeby ten trójkąt krzywolinijny AMA′ był maximum ?

1081. — Mając daną helicę na walcu obrotowym, jeśli przez punkt przestrzeni poprowadzimy proste równoległe do stycznych helicy, miejscem tych równoległych będzie powierzchnia stożkowa obrotowa.

1082. — Zbudować sferę :

1° przechodzącą przez trzy punkta dane i styczną do płaszczyzny, albo do sfery danej,

2° przechodzącą przez dwa punkta dane, i styczną do dwóch płaszczyzn albo do dwóch sfer danych, albo do płaszczyzny i do sfery danej.

3° przechodzącą przez punkt dany i styczną do trzech płascyzn, albo do trzech sfer danych,

4° styczną do trzech płaszczyzn danych i do sfery danej,
5° styczną do dwóch płaszczyzn danych i do dwóch sfer danych,
6° styczną do płaszczyzny danej i do trzech sfer danych.

1083. — Zbudować sferę danego promienia któraby zadość czyniła trzem innym warunkom, *np.* żeby przechodziła przez trzy dane punkta ; albo żeby przechodziła przez dwa punkta dane i była styczna do płaszczyzny, *albo* do sfery danej ; etc.

1084. — Nakreślić na sferze, promieniem sferycznym danym, koło styczne do dwóch kół danych.

1085. — Opisać na sferze koło styczne do dwóch kół danych, któreby przecinało inne koło w dwóch punktach średnicowo przeciwległych.

1086. — Opisać na sferze koło któreby przecinało trzy koła dane w punktach średnicowo przeciwległych.

1087. — Opisać na sferze koło któreby przecinało trzy koła dane pod kątami danemi. Uważać przypadek gdy dane kąty są równe.

1088. — Przez dwa punkta A i B sfery poprowadzono ciąg kół, do których poprowadzono styczne sferyczne z punktu wziętego na łuku koła wielkiego AB. Jakie jest miejsce punktów zetknięć?

1089. — Mając dane na kole sfery dwa punkta A i B, znaleźć na tem kole trzeci punkt C taki, żeby dwa wielkie koła CA, CB spotykały się pod kątem danym.

1090. — Trzy sfery mające spólne koło wyznaczają na poprzecznej sześć punktów w inwolucyi, której punktem środkowym jest przecięcie tej poprzecznej z płaszczyzną koła spólnego.

1091. — Biegunową wzajemną paraboli, względem punktu kierownicy, jest hiperbola równoboczna.

1092. — Zrzutować daną stożkowę wedle hiperboli równobocznej.

1093. — W stożku kołowym nazywają się *cyklicznemi* (κύκλος koło) dwie płaszczyzny przechodzące przez jego wierzchołek i równoległe do dwóch przecięć kołowych. Dowieśdź że wszelka płaszczyzna styczna do stożka kołowego przecina obie płaszczyzny cykliczne wedle dwóch linij prostych, równo nachylonych na krawędź zetknięcia.

1094. — Wszelka płaszczyzna styczna do stożka kołowego czyni z dwiema płaszczyznami cyklicznemi dwa kąty których summa jest stała.

1095. — Cztery linie proste wedle których dwie płaszczyzny styczne do stożka kołowego przecinają obie płaszczyzny cykliczne, należą do stożka obrotowego którego oś jest prostopadła do płaszczyzny dwóch krawędzi zetknięć.

1096. — Nazywają się *spółcyklicznemi* dwa stożki mające spólny wierzchołek i spólne płaszczyzny cykliczne. Dowieśdź że gdy płaszczyzna poprowadzona przez wierzchołek dwóch stożków spółcyklicznych przecina obydwa, wtedy dwie krawędzie przecięć jednego stożka czynią z odpowiednemi krawędziami przecięć drugiego kąty rowne. Przypadek szczególny gdy płaszczyzna sieczna przecina jeden z tych stożków i jest styczną do drugiego.

1097. — Gdy płaszczyzna jest styczna do dwóch stożków spółcyklicznych, krawędzie zetknięć są prostopadłe do siebie.

1098. — Jeśli SA i SB są dwie krawędzie prostokątne, wzięte na dwóch stożkach spółcyklicznych, płaszczyzna ASB przecinia oba stożki wedle dwóch innych krawędzi SA′, SB′ także prostokątnych; cztery linie proste, wedle których przecinają się płaszczyzny styczne do pierwszego stożka przechodzące przez SA i SA′, i płaszczyzny styczne do drugiego stożka przechodzące przez SB i SB′, należą do trzeciego stożka spółcyklicznego z dwoma pierwszemi. Ten trzeci stożek zostaje stały jakiekolwiek jest położenie dwóch krawędzi prostokątnych SA i SB.

1099. — Istnieje zawsze wewnątrz stożka kołowego pochyłego, i na płaszczyznie największego kąta, dwie linie proste przechodzące przez wierzchołek, takie że, jeśli przez jedną z nich poprowadzono dwie płaszczyzny prostokątne jakiekolwiek, płaszczyzny styczne do stożka wedle dwóch krawędzi leżących na jednej z tych płaszczyzn przecinają się wedle linii leżącej na drugiej płaszczyznie. Te dwie proste nazywają się *liniami ogniskowemi* stożka.

1100. — Kąt dwóch płaszczyzn stycznych do stożka kołowego, i kąt dwóch płaszczyzn wyznaczonych przez przecięcie się ostatnich i przez każdą linię ogniskową, mają tę samą płaszczyznę dwójsieczną.

1101. — Wszelka płaszczyzna styczna do stożka kołowego jest równo nachylona na płaszczyzny wyznaczone przez krawędź zetknięcia i przez każdą linię ogniskową.

1102. — Summa kątów które każda krawędź tworzy z dwiema liniami ogniskowemi jest stała.

1103. — Jeśli przez wierzchołek stożka kołowego poprowadzono ciąg normalnych do płaszczyzn stycznych do tego stożka, te normalne tworzą drugi stożek którego płaszczyzny styczne są prostopadłe do krawędzi pierwszego. Dwa takie stożki nazywają się *spełniającemi*.

1104. — Gdy dwa stożki są spełniające, płaszczyzny cykliczne i linie ogniskowe pierwszego są odpowiednio prostopadłe do linij ogniskowych i do płaszczyzn cyklicznych drugiego.

1105. — Gdy dwie figury płaskie F i F′ są perspektywą jedna drugiej, i gdy ich płaszczyzny przecinają się, jeśli obrócimy jedną z dwóch płaszczyzn około ich przecięcia, dwie uważane figury nie przestaną być w perspektywie, i miejscem punktu widzenia który ciągle zmienia położenie, będzie okrąg leżący na płaszczyznie prostopadłej do osi obrotu.

1106. — Jeśli dwa czworościany mają wierzchołki, po dwa, na czterech liniach prostych zbiegających się w jednym punkcie, krawędzie tych czworościanów spotykają się, po dwie, w sześciu punktach leżących, po trzy, na jednej płaszczyznie; *i nawzajem*.

1107. — Ściany obydwóch dwudziestościanów foremnych i dwóch dwunastuścianów foremnych z kątami trójściennemi, wpisanych w jedną sferę, są wpisalne w jedno koło.

1108. — Bok sześcianu jest zarazem różnicą i średnią proporcyalną między bokami dwóch dwunastościanów foremnych z kątami trójściennemi.

1109. — Dowieśdź że linia krzywa, nakreślona na powierzchni walcowej przez punkt który się wznosi ilością proporcyonalną do długości łuku obrotu, jest helicą.

1110. — Gdy dwa koła styczne są wpisane w jeden kąt, oczywiście miejscem punktu zetknięcia jest dwójsieczna tego kąta. Utworzyć figurę odwrotną i dowieśdź że, jeśli w przestrzeń zawartą między dwoma kołami siecznemi, wpisano dwa okręgi styczne między sobą, miejscem punktu zetknięcia tych okręgów jest koło.

1111. — Okręgi przechodzące przez punkt stały S, i przecinające prostokątnie dany okrąg, spotykają się w drugim punkcie S'; dowieśdź że punkta S i S' są sprzężone harmoniczne, względem średnicy którą prosta SS' wyznacza na danym okręgu.

1112. — Na danym czworoboku opisano różne linie stożkowe. Dowieśdź że, 1° biegunowe jakiegokolwiek punktu p, względem tych stożkowych, przechodzą wszystkie przez jeden punkt q; 2° jeśli punkt p opisuje linię prostą L, punkt q opisuje linię stożkową; 3° ta stożkowa jest miejscem bieguna prostej L względem stożkowych opisanych, i przechodzi przez punkt spotkania przekątnych i przez punkt spotkania boków przeciwległych czworoboku. Uważać przypadek w którym prosta L jest w nieskończoności.

1113. — Na trzech przekątnych czworoboku zupełnego wzięto trzy dwojany punktów które dzielą harmonicznie te przekątne; dowieśdź że te sześć punktów są na jednej stożkowej.

1114. — Wielokąt płaski odkształca się tak że wszystkie jego wierzchołki, prócz jednego, posuwają się po liniach prostych stałych, a wszystkie boki są widziane pod danemi kątami z tylu punktów ile jest tych linij; znaleźć miejsce ostatniego wierzchołka. Jakie jest twierdzenie spółwzględne?

1115. — Wielokąt mający $4n+2$ boków, opisany na kole, posiada $2n+1$ przekątnych które łączą wierzchołki przeciwległe; dowieśdź że, jeśli $2n$ tych przekątnych spotykają się w jednym punkcie, ostatnia przekątna przechodzi także przez ten punkt spotkania.

1116. — Dwa punkta materyalne przebiegają, jednocześnie i ruchem jednostajnym, dwie linie proste nie leżące na jednej płaszczyznie; jakie jest miejsce środka linii prostej łączącej te dwa punkta?

KONIEC.

NOTY.

I. — O LINIACH RÓWNOLEGŁYCH.

Euklides uważa jako pewnik następujące zadanie:

Jeśli jedna prosta padając na dwie proste czyni kąty wewnętrzne, z jednej strony leżące, mniejsze od dwóch kątów prostych, te dwie proste przedłużone w nieskończoność spotkają się z tej strony z której kąty są mniejsze od dwóch kątów prostych.

Niektórzy biorą za oczywiste że: *Dwie proste, jedna prostopadła a druga pochyła do trzeciej, spotykają się.* To podanie, uważane zwykle za postulatum Euklidesa, jest szczególnym przypadkiem jego pewnika, i pozornie tylko widoczniejsze. Jakoż, że pochyła EH (*fig. stronicy* 24) zbliża się ciągle do prostopadłej CD, to nie jest bynajmniej dowodem żeby ją koniecznie spotkać musiała. Bo, dlaczegożby ta pochyła nie mogła się zbliżać nieskończenie, i nigdy nie spotykać prostopadłej CD? tak jako gałęź hiperboli zbliża się ciągle do swej niemaltycznej a nigdy jej nie spotyka, chociaż odległość może stać się mniejszą od wszelkiej małości.

Czuł to mocno uczony professor Bertrand (z *Genewy*), i chciał Geometryę uwolnić od postulatum. Aby dojść do tego, utrzymuje że *kąt jest częścią nieskończoną płaszczyzny, zawartą między dwiema liniami prostemi wychodzącemi z jednego punktu.* — Określenie niedokładne, bo jego następstwem byłoby że dwa kąty proste nie są równe. Ale idźmy dalej. Aby dowieśdź że linia pochyła EH spotyka prostopadłę CD, dosyć jest, wedle Bertranda, okazać że kąt FEH jest większy od pasa FECD. W tym celu uważajmy, mówi, że kładąc kąt FEH około siebie n razy można pokryć całą przestrzeń kąta prostego FEB; gdy tymczasem, kładąc raz wedle razu pas FECD także n razy, nie można pokryć tej samej przestrzeni. Więc kąt FEH jest większy od pasa FECD; zatem ramie EH musi wyjść poza ten pas; etc.

To dowodzenie nie ma koniecznej ścisłości matematycznej; najpierwej dlatego że się tu porównywa dwie powierzchnie *różnorodne* i *nieskończone*, co nie jest logiczne; a potem że, nie określając równości między ilościami *niekończenie wielkiemi*, które tylko dla skrócenia mowy, symbolicznie nazywają się ilościami, nie wolno jest rozumować na tych ilościach tak jak na ilościach skończonych.

Od niejakiego czasu przyjęto w szkołach francuskich postulatum podane przez GERGONNE: *Przez dany punkt jedną tylko równoległę do danej prostej poprowadzić można.* Użyliśmy tego postulatum w tekscie, nie dlatego żeby było daleko widoczniejsze od innych, ale dlatego że, jako postulatum, warto tyle ile inne.

II. — PRZYPADEK NIESPÓŁMIERNOŚCI.

Wszędzie, gdzie chodziło o dowodzenie równości stosunków między ilościami niespółmiernemi, użyliśmy metody granic, jako ogólnej i jedynie ścisłej. Nie źle jednak będzie znać inny sposób dowodzenia, który nieraz korzystnie zastosować można. Dla jasności wykładu, weźmy znajome twierdzenie: *W jednem kole kąty środkowe są proporcyonalne do łuków objętych między ich ramionami*, i dowiedźmy go w przypadku łuków niespółmiernych.

Przypuśćmy, w tym celu, że podzielono łuk AB (*fig. stronicy* 69) na m części równych, z których jedna mieści się w łuku AC n razy najwięcej, ale z pewną resztą, ponieważ łuki AB i AC są niespółmierne; stosunek $\frac{\mathrm{AC}}{\mathrm{AB}}$ będzie oczywiście większy od $\frac{n}{m}$ a mniejszy od $\frac{n+1}{m}$, to jest

$$\frac{n+1}{m} > \frac{\mathrm{AC}}{\mathrm{AB}} > \frac{n}{m}.$$

Jeśli teraz poprowadzimy promienie przez punkta podziału, rozdzielimy kąt AOB na m kątów równych, z których jeden będzie się mieścił w kącie AOC n razy najwięcej, zawsze z resztą; tak że stosunek kątów $\frac{\mathrm{AOC}}{\mathrm{AOB}}$ będzie się zawierał między $\frac{n}{m}$ i $\frac{n+1}{m}$, to jest

$$\frac{n+1}{m} > \frac{\mathrm{AOC}}{\mathrm{AOB}} > \frac{n}{m}.$$

Jako widać, stosunek kątów i stosunek odpowiedających łuków są oba zawarte między temi samemi liczbami $\frac{n}{m}$ i $\frac{n+1}{m}$; zatem ich różnica jest mniejsza od różnicy tychże liczb, to jest mniejsza od $\frac{1}{m}$. Owoż, dzieląc łuk AB na części dostatecznie małe, różnica $\frac{1}{m}$ może stać się tak małą jak się podoba, gdy przeciwnie różnica stosunku kątów i stosunku łuków zostaje stałą, nie zależąc bynajmniej od liczby m podziałów; więc, gdyby stosunek kątów nie był równy stosunkowi odpowiedających łuków, różnica musiałaby się stać mniejszą od wszelkiej wartości. Co niedorzeczne, bo ta różnica jest ilością stałą. Ztąd wnosimy że te dwa stosunki są równe, to jest $\frac{AOC}{AOB} = \frac{AC}{AB}$.

III. — O KWADRATURZE KOŁA.

Zagadnienie kwadratury koła, jakośmy już powiedzieli, zależy na tem żeby, kreśląc same tylko *linie proste* i *okręgi*, wystawić kwadrat równowarty danemu kołu; albo, co wychodzi na jedno, biorąc promień za jedność, znaleźć linię prostą długości π. Ta linia istnieje niezaprzeczalnie, bo oczywiście między długościami 3,14 i 3,15 jest długość π. Ale, czy można ją wyznaczyć za pomocą samych tylko linij prostych i kół? Oto całe pytanie.

Widzieliśmy w zagadnieniach *księgi* III jak się kreślą ilości spółmierne, pierwiastki kwadratowe czyli średnie proporcyonalne, pierwiastki równania stopnia 2° albo równań przywiednych do stopnia 2°. Gdyby więc π było jedną z takich liczb, możnaby wykreślić linię prostą długości π za pomocą liniału i cyrkla.

Lambert dowiódł pierwszy, w pamiętnikach *Akademii berlińskiej*, *r.* 1761 że π jest liczbą niespółmierną. Legendre idąc za Lambertem posunął się dalej, i okazał że kwadrat z π jest także liczbą niespółmierną.

Kwadratura koła będzie zawsze kwestyą zajmującą teorycznie, ale obojętną w zastosowaniu; bo, jako już wiemy, wyrachowano przybliżoną wartość π aż do 540tej cyfry dziesiętnej.

IV. — O RÓWNOŚCI WIELOŚCIANÓW WYPUKŁYCH.

W księdze XI geometryi Euklidesa czytamy dwa określenia pod numerami 9 i 10.

9. *Bryły podobne są te które są zawarte w tej samej liczbie płaszczyzn* (ścian) *podobnych.*

10. *Bryły podobne i równe są te które są zawarte w tej samej liczbie płaszczyzn* (ścian) *podobnych i równych.*

Te określenia nie tylko nie są oczywiste, ale owszem stanowią dwa twierdzenia których trzeba dowieść, a szczególniej drugiego które jest jednem z najtrudniejszych w geometryi elementarnej.

« Robert Simson, matematyk angielski, stosując, mówi nasz uczony » rodak Józef Czech (*), opisanie 10 (określenie) do brył, mających kąty » bryłowe wyskakujące i wskakujące, dowodzi w przypisach swojego prze- » łożenia, iż ono jest fałszywe ogólnie, i nie bez przyczyny. » W samej rzeczy, powieda Robert Simson, można przydać jednemu wielościanowi piramidę, dając jej za podstawę jedną ze ścian tego wielościanu; a zaś drugiemu przydać piramidę równą, stawiając ją na odpowiedniej ścianie tak, żeby wierzchołek padał wewnątrz wielościanu. Takie dwa wielościany mają oczywiście ściany równe każda każdej, a jednak są nierówne. « Lecz jeżeli » odkrycie to, mówi Czech, do którego myśl pierwszą podał Le Sage Gene- » wczyk, zdaje się uchybienie z jednej strony zadawać Euklidesowi, » z drugiej strony nie może wytykać błędu w dziele jego, kiedy cała nauka » jego o bryłach figurami płaskiemi ograniczonych, w księgach jedenastej i » dwunastej wyłożona, przedstawiając bryły ze samemi tylko kątami bryło- » wemi wyskakującemi, dowodzi jasno, iż Euklides ten tylko gatunek kątów » bryłowych miał na uwadze. »

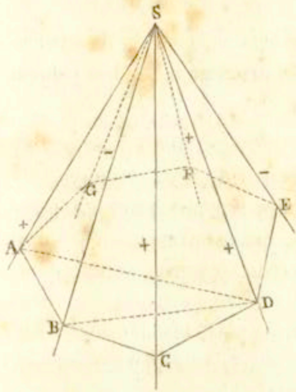
Chodzi więc teraz o dowodzenie drugiego twierdzenia, określeniem 10 wskazanego, w figurach wypukłych. Cauchy dowiódł go pierwszy; Legendre zmodyfikował dowodzenie w notach swojej geometryi, ale użył niepotrzebnie wielokątów sferycznych. Idąc za tymi sławnymi matematykami francuskimi, będziemy się starali, na tle ich dowodzeń, dać prostrze jeśli można, opierając się także na dwóch pomocniczych twierdzeniach które najpierwej wyłożymy.

I. Twierdzenie pomocnicze. — *Jeśli w kącie wielościennym wypukłym, mającym wszystkie ściany niezmienne prócz jednej, kąty dwójścienne nieprzyległe ścianie zmiennej zwiększają się zarazem albo zmniejszają, ta ściana zwiększa się także albo zmniejsza.*

Niech będzie kąt wielościenny wypukły SABCDEFG w którym, oprócz ściany ASB mogącej się zmieniać, wszystkie inne są stałe.

(*) Euklidesa *początków* Geometryi *ksiąg ośmioro, to jest sześć pierwszych, jedenasta i dwunasta, z dodanemi przypisami, dla pożytku młodzi akademickiej, wytłumaczone przez* Józefa Czecha. Wilno, 1817.

Przypuśćmy najpierwej że tylko jeden kąt dwójścienny SD, nieprzyległy ścianie ASB, zwiększa się albo zmniejsza; wtedy ta ściana zwiększa się także albo zmniejsza. Jakoż, poprowadźmy płaszczyzny ASD, BSD; kąty wielościenne SDEFGA i SDCB są oczywiście stałe. To pokazuje że w trójścianie SABD, kąt dwójścienny SD jest zawarty między dwiema ścianami stałemi ASD i BSD; więc, jeśli ten kąt zwiększa się albo zmniejsza, ściana mu przeciwległa ASB zwiększa się z nim razem albo zmniejsza.



Nie trudno teraz widzieć że, jeśli kilka kątów dwójściennych nieprzyległych ścianie ASB zwiększają się wszystkie zarazem albo zmniejszają, ta ściana zwiększa się także z niemi razem albo zmniejsza. Albowiem, można zmieniać te kąty jeden po drugim, a, na mocy tego co poprzedza, zmienność każdego z nich pociągnie za sobą podobną zmienność ściany ASB.

Wniosek. — Ztąd wynika że, jeśli wszystkie ściany kąta wielościennego wypukłego są stałe, kąty dwójścienne nie mogą się zmieniać wszystkie jednakowo, i, jeśli jedne się zwiększają, to drugie muszą się zmniejszać.

II. Twierdzenie pomocnicze. — *Jeśli w kącie wielościennym* wypukłym *mającym wszystkie ściany stałe, będziemy zmieniali kąty dwójścienne zwiększając jedne a zmniejszając drugie, tak jednakże aby kąt wielościenny nie przestawał być wypukły, i położymy znak* + *na krawędzi każdego kąta dwójściennego który się zwiększył, a znak* — *na krawędzi tego który się zmniejszył; wtedy, obchodząc na około kąt wielościenny, znajdziemy przynajmniej* CZTERY *zmienności znaków.*

Widzimy zaraz że ten kąt wielościenny musi mieć więcej niż trzy ściany, bo inaczej kąty dwójścienne nie mogłyby się zmieniać (V, 44). Po czem nie trudno dowieśdź że jest więcej niż dwie zmienności znaków. Jakoż, gdyby krawędzie po sobie idące SA, SB, SC, SD (*fig. powyższa*) miały znak +, a wszystkie następujące SE, SF, SG miały znak — ; płaszczyzna ASD, poprowadzona przez pierwszą i ostatnią krawędź ze znakiem +, podzieliłaby kąt wielościenny wypukły S na dwa kąty wielościenne SADCB i SADEFG także wypukłe. Ztądby wynikało że ściana ASD, spólna tym kątom, zwiększa się w jednym a zmniejsza w drugim. Musi zatem być więcej niż dwie zmienności znaków. Ale, ponieważ obchodząc na około kąt wielościenny S powracamy do znaku wyjścia, liczba zmienności znaków jest parzysta ; więc ta liczba parzysta, będąc większa od 2, jest przynajmniej 4.

Uwaga. — Twierdzenie Eulera (VII, 36) nie przestaje być prawdziwe, gdy się uważa niektóre krawędzie, i nawet niektóre wierzchołki, za niebyłe, jakoby znikały ; byle tylko liczono za jedną ścianę dwie ściany mające spólną krawędź która znika, i także za jedną ścianę wszystkie ściany każdego kąta wielościennego którego wierzchołek znika z krawędziami. Ściśle mówiąc, ta uwaga może się wyprowadzić z naszego dowodzenia twierdzenia Eulera ; ale, żeby nie zostawić żadnej wątpliwości, dajemy dowodzenie wprost.

Zachowując notacyę już użytą, oznaczmy jeszcze przez k liczbę niby znikających krawędzi które nie pociągają za sobą zniknięcia wierzchołków ; przez w liczbę znikających kątów wielościennych które mają n, n', n''... krawędzi ; nakoniec, przez K$'$, S$'$ i W$'$ liczbę pozostałych krawędzi, ścian i wierzchołków.

Widzimy łatwo że :

$$K'=K-k-n-n'-n''..., \quad W'=W-w, \quad S'=S-k+w-n-n'-n''.. ;$$

Więc

$$S'+W'-K'=S+W-K=2.$$

To ustaliwszy, możemy dowieśdź zapowiedzianego twierdzenia.

Twierdzenie.

Dwa wielościany wypukłe, mające ściany równe każda każdej i podobnie ułożone, są równe.

Twierdzenie jest oczywiste w dwóch graniastonach albo w dwóch piramidach, a ogólnie w dwóch wielościanach których wszystkie kąty są trójścienne ; bo te wielościany, mając ściany równe każda każdej i podobnie ułożone, mają temsamem kąty trójścienne odpowiedne równe ; więc są przystawalne.

Aby dowieśdź równości dwóch zadanych wielościanów, dość jest okazać że ich kąty dwójścienne odpowiedne nie mogą być nierówne.

Między temi kątami, jeśli wszystkie nie są równe swym odpowiednym, mogą być jedne równe a inne nierówne ; położmy znak + albo — na krawędziach tych ostatnich, według jak są większe albo mniejsze od swych odpowiednych, a nie kładźmy żadnego znaku na krawędziach kątów równych. Uważając krawędzie bez żadnego znaku za niebyłe, widzimy łatwo że, w jednym kącie wielościennym, dwie krawędzie ze znakiem + albo — po sobie idące należą obie razem do jednej ściany, płaskiej albo łamanej, i tylko do jednej. Ztąd wynika że liczby zmienności znaków na około każdego kąta wielościennego i liczby zmienności znaków na obwodzie każdej z tych ścian tworzą dwie summy równe.

Owoż, wiemy że na około kąta wielościennego wypukłego jest przynajmniej 4 zmienności znaków; więc, nazywając W liczbę kątów wielościennych pozostałych, jeśli niektóre znikają, liczba wszystkich zmiennosci znaków będzie przynajmniej $4W$.

Szukajmy teraz ile jest zmienności znaków na obwodach ścian utworzonych przez krawędzie ze znakami. W tym celu, oznaczmy przez S_3 liczbę takich ścian które mają obwód trójkątny, chociażby były złożone z wielu wielokątów; przez S_4 liczbę ścian z obwodem czworokątnym; i tak dalej. Po czem, uważajmy że w trójkącie największa możebna liczba zmienności znaków, jaką się otrzymuje kładąc na przemian znak + albo — na bokach, jest 2; bo można tylko mieć układ + — + albo — + —. W czworoboku ta liczba zmienności znaków jest najwięcej 4. Ogólnie, na obwodzie zamkniętym liczba zmienności znaków jest najwięcej równa liczbie boków; a ponieważ przebiegając ten obwód powracamy do znaku wyjścia, największa możebna liczba zmienności znaków musi być parzysta. Dlatego właśnie w trójkącie może być najwięcej 2 zmienności znaków; w czworokącie i w pięciokącie najwięcej 4; w sześciokącie i w siedmiokącie 6 najwięcej; etc. Więc, nazywając N największą liczbę zmienności znaków jaka się znajdować może na obwodach wszystkich ścian płaskich albo łamanych, będzie

$$N = 2S_3 + 4(S_4 + S_5) + 6(S_6 + S_7) + \dots$$

Ale, oznaczając przez K i S liczby pozostałych krawędzi i ścian, mamy.

$$S = S_3 + S_4 + S_5 + S_6 + \dots$$

$$2K = 3S_3 + 4S_4 + 5S_5 + 6S_6 + \dots$$

$$4S + 4W = 4K + 8.$$

Ztąd, rugując 4S i 4K, otrzymujemy odrazu

$$4W = 8 + 2S_3 + 4S_4 + 6S_5 + \dots$$

Zatem byłoby

$$4W > N;$$

wynik niedorzeczny. Co dowodzi że nasze dwa wielościany nie mogą mieć kątów dwójściennych nierównych.

Więc *dwa wielościany wypukłe mające ściany równe każda każdej są równe albo symetryczne, według jak ściany równe są w tym samym albo w odwrotnym porządku ułożone.*

Wniosek.—Ztąd wynika że, *Gdy dwa wielościany wypukłe mają ściany podobne każda każdej, te wielościany są podobne, albo jeden z nich jest podobny symetrycznemu drugiego, według jak ściany podobne są w tym samym albo w odwrotnym porządku ułożone.*

ZNACZNIEJSZE OMYŁKI DRUKU.

Stron.	*Linia.*
XII	2 od dołu, *zamiast* zagadnie *czytaj* zagadnienie.
XIII	12 od dołu, *zamiast* twierdzdzenia *czytaj* twierdzenie.
20	6 *zamiast* wa *czytaj* dwa.
25	14 *zamiast* niema *czytaj* niemal.
32	9 *zamiast* utrzymujemy *czytaj* otrzymujemy.
85	8 od dołu, *zamiast* znając *czytaj* mając.
98	9 *zamiast* BO′ *czytaj* HO′.
100	13 *zamiast* promieni *czytaj* promień.
102	2 od dołu, *zamiast* przystawienie *czytaj* przystawanie.
106	7 *zamiast* 2AO *połóż* : równym średnicy koła O.
106	10 *zamiast* AC *czytaj* AE.
108	14 od dołu, *zamiast* ADE *czytaj* ACD.
108	2 od dołu, *zamiast* DE, FC *czytaj* CE, FD.
118	5 od dołu, *zamiast* równozamienny *czytaj* równoramienny.
122	5 *zamiast* podzielny *czytaj* podzielony.
132	Odsyłacz na dole stronicy należy do *tw.* V, a nie do *tw.* IV.
137	Poprawić drugą figurę, zamieniając B′ na C′, i nawzajem.
145	1 od dołu, *zamiast* AB i AC *czytaj* BD i CD
150	3 od dołu, *zamiast* 2BD *czytaj* 2BC.
152	15 *zamiast* ołowy *czytaj* połowy.
175	13 od dołu, *zamiast* ACB *czytaj* AB.
175	10 od dołu, *zamiast* $\frac{AC}{ac}$ *czytaj* $\frac{ab}{AB}$.
176	15 *zamiast* O′A *czytaj* O′A′.
178	Na *fig.* 1 zamienić S na S″, i nawzajem.
179	4 *zamiast* jedności *czytaj* jednokładności.
204	9 od dołu w ostatnim wyrazie, *zamiast* CB *czytaj* CE.
208	13 *zamiast* spólnych *czytaj* siecznych.
215	3 od dołu. Na końcu zadania, *dodaj:* a jeden z wierzchołków w danym punkcie.
218	*Zamiast* zadania 373, *weź :* W dany trójkąt wpisać trójkąt obwodu minimum i podobny innemu trójkątowi danemu.
222	4 *zamiast* tworą *czytaj* tworzą.
222	*Zamiast* zadania 419, *weź* : W kole O, poprowadzić cięciwę równoległą do danej prostej MN, tak żeby była podzielona w stosunku $m:n$ przez daną sieczną AB.

Stron.	*Linia.*
223	*Zamiast* zadania 426, *weź :* W dany trójkąt wpisać trójkąt równy innemu danemu.
235	4 od dołu, *zamiast* S *czytaj* S'.
244	3 od dołu, *zamiast* ot *czytaj* to.
245	Pod pierwiastnikiem ostatni wyraz, *zamiast* $a'c'$ *czytaj* $a'b'$.
255	3 *zamiast* OH *czyt.* OK, a *zamiast* OK czytaj OH.
256	9 *zamiast* średnię *czytaj* średnicę.
266	5 od dołu, *zamiast* OL *czytaj* GL.
273	3 od dołu, *zamiast* $\frac{A'OB'}{AOB}$ *czytaj* $\frac{AOB}{A'OB'}$.
273	9 *zamiast* odjętego *czytaj* objętego.
304	8 *zamiast* wiec *czytaj* więc.
314	8 od dołu, *zamiast* $\frac{a}{c}$ *czytaj* $\frac{c}{a}$.
335	7 *zamiast* $A' - B' < \frac{A - B}{4}$ *czytaj* $B' - A' < \frac{B - A}{4}$.
363	15 *zamiast* O.ABCD *czytaj* O. ACBD.
377	16 *zamiast* biegunowa *czytaj* oś pierwiastna.
382	9 *zamiast* S'A' *czytaj* SA'.
385	7 od dołu, *zamiast* (9) *czytaj* (11 i 15).
390	13 *zamiast* pònktów *czytaj* punktów.
398	13 i 14 *zamiast* e' *czytaj* e.
483	11 od dołu, *zamiast* CD *czytaj* SD.
507	10 *zamiast* wiloczynowi *czytaj* wieloczonowi.
518	11 *zamiast* (VI) *czytaj* (6).
521	*zamiast* nazwiejmy *czytaj* nazwijmy.
541	1 na dole, *zamiast* matymatyka *czytaj* matematyka.
645	3 od dołu, *zamiast* R^3 *czytaj* D^3.
675	8 od dołu, *zamiast* FA *czytaj* FA'.
751	5 *zamiast* geomotryi *czytaj* geometryi.

Paryż. — Drukarnia E. Martinet, ulica Mignon, 2.

$\sqrt{2} = 1,4142.$

100 24

-400 281 2824

11900

-6041 2828

$a^2 = 2r^2$

$\sqrt{2r^2 - r^2\sqrt{2}} = r\sqrt{2-\sqrt{2}}$

6,12°

1,4142

$\sqrt{5858} = 765$

958 146

-8200 152

6,12 r.

$8 \cdot \frac{1}{2} r\sqrt{2} \cdot r = 4r^2\sqrt{2}$