

Wiesław Nagórko, Czesław Woźniak
Instytut Matematyki Stosowanej i Mechaniki
Uniwersytet Warszawski

O FORMUŁOWANIU KRYTERIÓW SPÓJNOŚCI I FILTROWANIA OBRAZÓW BINARNYCH Z ZADANĄ TOLERANCJĄ

W opracowaniu rozważa się matematyczny model obrazów obiektów trójwymiarowych zarejestrowanych przez kamerę. Zakłada się, że obrazy mają gradację binarną i mogą być zinterpretowane jako macierze, których elementami są liczby 0 lub 1. Macierzom tym przyporządkowane są zbiory w dyskretnej przestrzeni punktów w R^2 . Wprowadzając w tę przestrzeń tolerancje, formułuje się kryteria filtrowania obrazu, wygładzania krawędzi oraz analizuje się pojęcie spójności.

1. Matematyczny model obrazu

Będziemy rozpatrywać zarejestrowane przez kamerę obrazy o gradacji binarnej: czern - biel. Przyporządkujmy każdemu elementowi obrazu wartość 0 w przypadku czerni i 1 w przypadku bieli. Przyjmijmy, że matematycznym modelem takiego obrazu jest macierz A o m wierszach i n kolumnach, w praktyce $m = 128$, $n = 512$. Elementami macierzy są liczby 0 i 1.

Macierz A możemy zinterpretować graficznie w przestrzeni R^2 w następujący sposób:

- niech Z będzie zbiorem punktów R^2 o współrzędnych całkowitych,

- każdemu elementowi macierzy A_{ij} przyporządkujmy punkt

siatki $(i, j) \in \mathcal{X} \subset \mathbb{R}^2$, a więc punkt o współrzędnych oznaczających wiersz i kolumnę tego elementu,

- jeżeli element $A_{i,j}$ jest liczbą 1, to graficzną interpretacją tego elementu będzie zbiór

$$D_{ij} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, i-0.5 \leq x \leq i+0.5, j-0.5 \leq y \leq j+0.5\},$$

- jeżeli $A_{i,j} = 0$, to $D_{ij} = \emptyset$.

Niech $D = \langle 0.5, m+0.5 \rangle \times \langle 0.5, n+0.5 \rangle \subset \mathbb{R}^2$. Zbiór $D_1 = \bigcup_{i,j} D_{i,j}$ nazwiemy graficzną interpretacją macierzy A , zaś zbiór $D_0 = D - D_1$ nazwiemy tłem zbioru D_1 .

Określmy teraz w zbiorze \mathcal{X} zbiór Ξ następujących tolerancji; [1-3];

ξ_0 - relacji identyczności t.j. relacji określonej jako

$$\{(i, j), (k, l)\} \in \xi_0 \Leftrightarrow i=k, j=l,$$

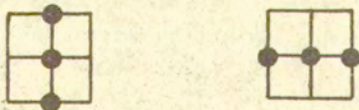
relacji ξ_2^n , $n=1, 2, 3, 4$ określonych jako

$$\{(i, j), (k, l)\} \in \xi_2^n \Leftrightarrow (k, l) \in \mathcal{X}_{ij}^n$$

gdzie

$$\mathcal{X}_{ij}^n = \{(k, l), k=i+\delta_{1,3,4}^n, l=j+\delta_{2,3}^n - \delta_{2,3}^n \text{ lub } k=i-\delta_{1,3,4}^n, l=j-\delta_{2,3}^n + \delta_{2,3}^n\}.$$

Relacje ξ_2^n są relacjami, które dla punktu (i, j) wyznaczają odpowiednie punkty sąsiednie $(k, l) \in \mathcal{X}_{ij}^n$, i tak dla $n=1$ punktami sąsiednimi są $(i+1, j)$, $(i-1, j)$, dla $n=2$: $(i, j+1)$, $(i, j-1)$ itd. (Crys. 1).



Rys. 1

Obok tolerancji ξ_0 , ξ_2^n , $n=1, 2, 3, 4$ do zbioru Ξ zaliczymy ponadto relacje [3]:

$$\xi_4^1 = \xi_2^1 \cup \xi_2^2, \xi_4^2 = \xi_2^2 \cup \xi_2^3, \xi_4^3 = \xi_2^3 \cup \xi_2^4, \xi_4^4 = \xi_2^4 \cup \xi_2^1, \xi_4^5 = \xi_2^1 \cup \xi_2^4,$$

$$\xi_4^6 = \xi_2^3 \cup \xi_2^4, \xi_4^7 = \xi_2^1 \cup \xi_2^3, \xi_4^8 = \xi_2^1 \cup \xi_2^4, \xi_4^9 = \xi_2^2 \cup \xi_2^4, \xi_4^{10} = \xi_2^4 \cup \xi_2^4,$$

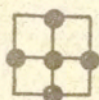
$$\xi_8 = \xi_4^1 \cup \xi_4^6.$$

Każda z wyżej zdefiniowanych tolerancji przyporządkowuje punktowi (i, j) odpowiedni zbiór punktów sąsiednich, dla przykładu:

ξ^1 przyporządkowuje punkty $(i, j+1)$, $(i, j-1)$, $(i+1, j)$, $(i-1, j)$,

ξ^2 przyporządkowuje punkty $(i, j+1)$, $(i, j-1)$, $(i+1, j)$, $(i-1, j)$,

$(i-1, j+1)$, $(i+1, j-1)$ (rys. 2).



Rys. 2

Dla każdej tolerancji $\xi \in \Xi$ i punktu $(i, j) \in \mathcal{Z}$ określamy operator $Mr: \Xi \times \mathcal{Z} \rightarrow \mathcal{Z}^{\mathcal{Z}}$ kładąc

$$Mr(\xi, (i, j)) = \{(k, l); ((i, j), (k, l)) \in \xi\}$$

oraz liczbę $\rho[Mr(\xi, (i, j))]$ równą liczbie tych punktów $(k, l) \in Mr(\xi, (i, j))$, dla których $A_{kl} = 1$.

2. Filtrowanie obrazu

Gdy mamy zarejestrowany obraz i jego interpretację macierzową, pojawia się problem ustalenia, w jakim stopniu obraz, opisany daną macierzą, jest zgodny z obrazem rzeczywistym obiektu fizycznego, jak i co należy zmienić w tej macierzy by usunąć błędy rejestracji powstałe na skutek niedokładności układu optycznego, zmian oświetlenia, szumów w elementach elektronicznych itd. Przetwarzanie danej macierzy według ustalonych reguł nazywamy procesem filtrowania obrazu. W dalszym ciągu wykorzystamy zbiór tolerancji Ξ do filtrowania obrazu.

Formalnie filtrowaniem obrazu nazywamy odwzorowanie

$$F: A \longrightarrow \langle 0, 1 \rangle$$

przyporządkowujące każdemu elementowi A_{ij} nowy element $F(A_{ij})$ równy 0 lub 1.

Obraz A poddajemy pierwszemu filtrowaniu $F_1: A \rightarrow \{0,1\}$, stosując następujące kryterium:

Kryterium 1

Jeżeli $\rho(\text{Mr}(\xi_{ij}, (i,j))) \geq 8$ to $F_1(A_{ij}) = 1$,

Jeżeli $\rho(\text{Mr}(\xi_{ij}, (i,j))) \leq 2$ to $F_1(A_{ij}) = 0$, oraz

$F_1(A_{ij}) = A_{ij}$ w pozostałych przypadkach.

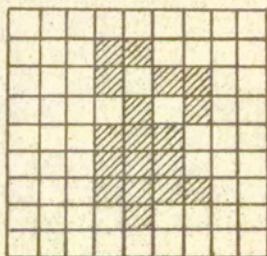
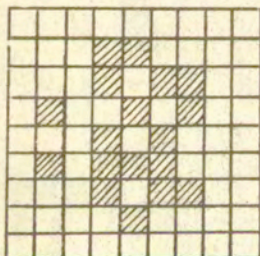
Inne kryterium (zwane kryterium uśredniania) sformułowano w [4] w postaci:

Kryterium uśredniania

Jeżeli $\rho(\text{Mr}(\xi_{ij}, (i,j))) \leq 4$ to $F_1(A_{ij}) = 0$,

Jeżeli $\rho(\text{Mr}(\xi_{ij}, (i,j))) \geq 8$ to $F_1(A_{ij}) = 1$.

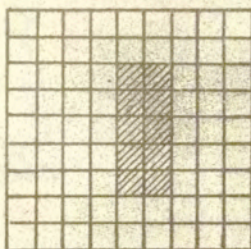
Przykład stosowania kryterium 1 przedstawia rys. 3. Na rys. 4 przedstawiono ten sam obraz po filtracji zgodnie z kryterium uśredniania. Różnice są widoczne, kryterium 1 zachowuje w większym stopniu własności obrazu wyjściowego.



Rys. 3

W wielu przypadkach, kilkakrotne stosowanie do obrazu kryterium uśredniania prowadzi do całkowitego jego wymazania, zaś kryterium 1 prowadzi do przekształcenia tożsamościowego, to znaczy dalsze filtrowanie nic już w obrazie nie zmienia. W tej sytuacji ustalanie warunków zakończenia procesu filtrowania nie jest potrzebne.

Innym przykładem filtrowania jest filtrowanie powodujące wygładzenie brzegu:

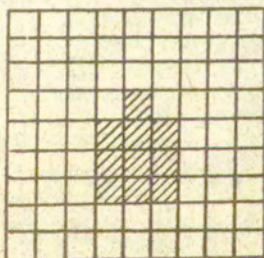


Rys. 4

Kryterium 2

Jeżeli dla A_{ij} istnieje $n \in \{1,2,3,4\}$ takie, że $\rho(\text{Mr}(Z_2^n, (i,j)))=3$ to $F_2(A_{ij})=1$. W pozostałych przypadkach $F_2(A_{ij})=0$.

W rozpatrywanym wcześniej przykładzie po zastosowaniu kryt.1 otrzymamy obraz $F_1(A)$ do którego stosujemy filtrowanie zgodnie z kryt.2 i otrzymujemy obraz przedstawiony na rys.5.



Rys. 5

Proponujemy, by proces filtrowania składał się z dwu filtrowań F_1, F_2 tj. filtrowań zgodnie z kryterium 1 i 2. Po zastosowaniu filtrowania F_2 proces filtracji się kończy. Warunkiem zakończenia procesu filtracji jest dokonanie filtrowania F_2 obrazu $F_1(A)$. Z kryteriów 1,2 wynika, że rejestrowanie obrazu jest pewne

jeżeli choć jeden wymiar liniowy obrazu jest przedstawiony przez trzy punkty, sąsiednie względem ξ_2^n .

3. Spójność obrazu

Będziemy mówić, że dwa punkty siatki (i,j) , (k,l) są połączone ciągiem tolerancji $\xi_{(\alpha)}$, $\alpha=1,2,\dots,\gamma$ wtedy, gdy

$$(\forall \alpha=1,2,\dots,\gamma-1) \left[\exists (p_\alpha, q_\alpha) \right] \left[\text{Mr} \left(\xi_{(\alpha)}, (p_\alpha, q_\alpha) \right) \cap \right. \\ \left. \text{Mr} \left(\xi_{(\alpha+1)}, (p_{\alpha+1}, q_{\alpha+1}) \right) \neq \emptyset \wedge (p_1, q_1) = (i,j), (p_\gamma, q_\gamma) = (k,l) \right]$$

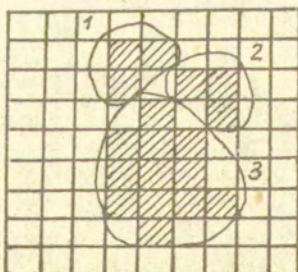
Kryterium spójności $D_1 \cap \mathcal{Z}$

Zbiór punktów $D_1 \cap \mathcal{Z}$ jest spójny, jeżeli dla każdego punktu (i,j) , $(k,l) \in D_1 \cap \mathcal{Z}$ istnieje ciąg tolerancji $\xi_{(\alpha)}$, $\alpha=1,2,\dots,\gamma$ łączący te punkty oraz $\xi_{(\alpha)} \in (\xi_2^1, \xi_2^2)$.

Kryterium spójności $D_0 \cap \mathcal{Z}$ (tia)

Zbiór punktów $D_0 \cap \mathcal{Z}$ (tia) jest spójny, jeżeli dla każdego dwu punktów (i,j) , $(k,l) \in D_0 \cap \mathcal{Z}$ istnieje ciąg tolerancji $\xi_{(\alpha)}$, $\alpha=1,2,\dots,\gamma$ łączący te punkty oraz $\xi_{(\alpha)} \in (\xi_2^n, n=1,2,3,4)$.

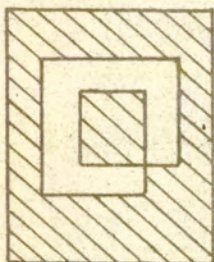
W rozpatrywanym przykładzie (rys. 3) mamy cztery zbiory spójne, oznaczone nr 1,2,3, oraz tia (rys. 6).



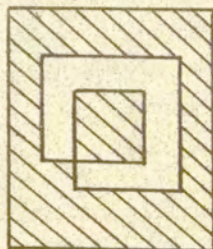
Rys. 6

Zauważmy, że rozważane w [4] pojęcie 4,6,8-spójności może prowadzić do sprzeczności. Rozważmy przypadki obrazów a) i b),

(rys. 7). W przypadku a) i przyjęciu 4 - spójności (tzn. punkt (i, j) przylega do zbioru jeżeli $Mr(\xi_4^a, (i, j))$ należy do tego zbioru), obszar czarny w środku obrazu stanowi dziurę w tle gdyż nie jest połączony z czarnym obrzeżem. Z kolei tło białe nie otacza rozpatrywanego zbioru. Zastosowanie 6-spójności tj. tolerancji ξ_6^2 powoduje, że środkowa część czarna jest spójna (w przypadku a)) i niespójna (w przypadku b)). Przyjęcie spójności ξ_6^1 czyni niespójnym środkowy obszar czarny z obrzeżem w a) i spójnym w b).



(a)



(b)

Rys. 7

4. Uwagi końcowe

W pracy rozpatrzono matematyczny model obrazów obiektów rzeczywistych. Skonstruowano dwa kryteria filtrowania obrazu, w tym jedno powodujące wygładzanie brzegu, oraz porównano je z kryterium uśredniania. Zaproponowano kryteria spójności obrazu i tła, stanowiące alternatywę do rozpatrywanych w literaturze. Przy ich użyciu usuwa się niektóre sprzeczności występujące przy badaniu spójności zbiorów dyskretnych. Model rozważano w odniesieniu do obrazów o gradacji binarnej. Przedstawione kryteria filtrowania i spójności można uogólnić na obrazy o gradacji wielowartościowej.

LITERATURA

1. E.C. Zeeman, *The topology of the brain and visual perception*, w: M.K. Fort (Red.), *Topology of 3-manifolds and related topics*, Englewood Cliffs, New York, 1962.
2. C. Woźniak, *Tolerance and fuzziness in problems of mechanics*, Arch. Mech. 35, 5, 1983, 567-578.
3. S. Matysiak, W. Nagórko, Cz. Woźniak, *O dyskretnej reprezentacji obiektów materialnych w przestrzeniach tolerancyjnych*, w: W. Kosiński (Red.), *Komputerowe modelowanie percepcji i rozpoznawania*, Prace IPPT, 31/1987, 145-153.
4. M. Nieniewski, T. Gawlik, *Podstawowe algorytmy bazy danych systemu wizyjnego z kamerą D-CAM*, tamże, 126-144.