

3.31 — teoria fal elektromagne-
tycznych

Jacek Zawistowski

ASYMPTOTYCZNA ANALIZA PROPAGACJI
W POPRZECZNIE NIJEDNORODNYM
ŚWIATŁOWODZIE

4/1985

P. 269



WARSZAWA 1985

Praca wpłynęła do Redakcji dnia 10 grudnia 1984 r.



56945



Na prawach rękopisu

Instytut Podstawowych Problemów Techniki PAN
Nakład 140 egz. Ark.wyd. 2,5 Ark.druk. 3,3
Oddane do drukarni w styczniu 1985 r.
Nr zamówienia 60/85

Warszawska Drukarnia Naukowa, Warszawa,
ul. Śniadeckich 8

Asymptotyczna analiza propagacji w poprzecznie
niejednorodnym światłowodzie

Streszczenie

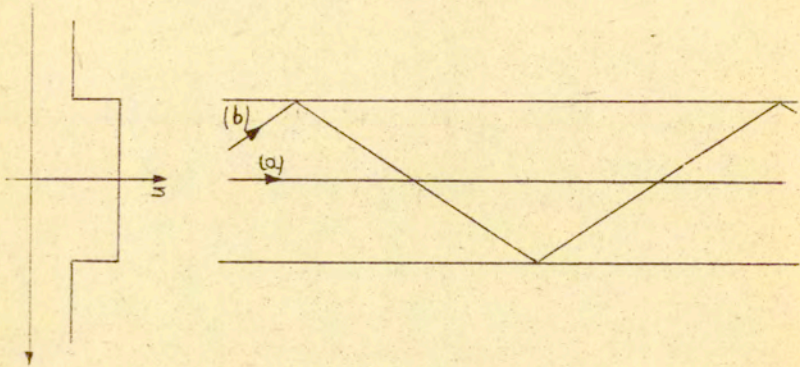
Podane zostały jednolicie asymptotyczne wyrażenia dla pól poszczególnych modów prowadzonych w cylindrycznym światłowodzie o radialnie zmiennym współczynniku załamania. Posłużono się uogólnieniem metody W.K.B. Langer, Olver do asymptotycznego rozwiązania problemu radialnego. Metoda W.K.B. i jej uogólnienia zostały szczegółowo omówione. Otrzymane równania na wartości własne (stała propagacji) i opóźnienie grupowe są szczególnie przydatne do obliczeń numerycznych.

1. Wstęp

Celowość zajęcia się światłowodami gradientowymi wpływa z potrzeby optymalizacji profilu, radialna zależność współczynnika załamania, ze względu na opóźnienie grupowe. Dyspersję modową i wynikające z niej opóźnienie grupowe można prosto wyjaśnić w języku promieni w przybliżeniu optyki geometrycznej [1].

Na rysunku 1. przedstawione są dwa różne mody w opisie promieniowym. Dla stałego współczynnika załamania droga optyczna wzdłuż promienia świetlnego jest w przypadku b) dłuższa niż w przypadku a).

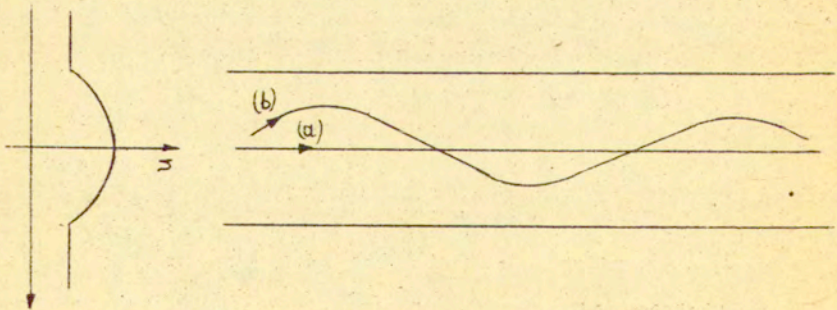
Sygnal przesyłany w modzie b) dotrze do punktu obserwacji później niż sygnal w modzie a). Powoduje to istotne ograniczenie pasma (częstotliwości) przepustowego światłowodu - szersze



Rys. 1. Opis promieniowy dwóch różnych modów dla światłowodu o stałym współczynniku załamania.

pasmo powoduje wzbudzenie większej ilości modów w światłowodzie, co z kolei jest niedopuszczalne ze względu na silne zniekształcenie sygnału wynikające z różnicy faz poszczególnych składników modowych.

Można temu zapobiec stosując światłowód o zmiennym poprzecznie współczynniku załamania - współczynnik załamania maleje od środka ku brzegowi światłowodu. W tym wypadku, przedstawionym na rys.2, większa geometryczna długość promienia b) niż a)



Rys.2. Opis promieniowy dwóch różnych modów dla światłowodu o poprzecznie zmiennym współczynniku załamania.

jest kompensowana mniejszą gęstością optyczną ośrodka z dala od osi światłowodu, gdzie przebiega znaczna część tego promienia. W rezultacie, dla optymalnie dobranej zależności radialnej współczynnika załamania, drogi optyczne dla modu a) i b) są w przybliżeniu równe. Idealna kompensacja zachodzi dla parabolicznego profilu $n^2(r) = n_1^2 (1 - r^2)$, który stanowi model matematyczny nierealizowalny fizycznie (współczynnik załamania nie może być ujemny - gałęzie paraboli opadają do $-\infty$).

Również w przypadku światłowodów jednomodowych odpowiednio dobrana zależność radialna współczynnika załamania jest bardzo istotna. Pozwala ona na uzyskanie pracy jednomodowej przy znacznie szerszym rdzeniu niż dla stałego współczynnika załamania, co znacznie ułatwia sprzęganie światłowodu ze źródłami światła.

Ze względu na potrzebę objęcia szerokiej klasy profili musimy ograniczyć się do przybliżonych metod badania propagacji. Analiza asymptotyczna (krótkofalowa), której zerowe przybliżenie stanowi optyka geometryczna, jest elastyczną i naturalną metodą dostosowaną do naszych potrzeb. Będziemy stosować opis połowy (modowy) i po skorzystaniu z symetrii problemu (separacja zmiennych) zastosujemy analizę asymptotyczną (uogólniona metoda W.K.B.) do rozwiązania problemu radialnego. Oprzemy się na pracach Arnolda [2-6].

Ograniczymy się do ważnego praktycznie przypadku "słabego prowadzenia" [7], [8], [9] (wolnej zmienności $n(r)$), co prowadzi do przybliżenia skalarnego - praktycznie poprzeczna fala o liniowej polaryzacji. Wynika to z następującej analizy. Równania Maxwella w niejednorodnym ośrodku izotropowym bez źródeł przyjmują postać:

$$(1) \quad \begin{cases} \nabla \times \vec{E} = -\mu \vec{H} \\ \nabla \times \vec{H} = \varepsilon \vec{E} \\ \nabla \cdot (\varepsilon \vec{E}) = 0 \\ \nabla \cdot (\mu \vec{H}) = 0 \end{cases}$$

Eliminując z dwóch pierwszych równ. (1) pole \vec{H} dostajemy

$$\nabla \times \frac{1}{\mu} \nabla \times \vec{E} + \varepsilon \ddot{\vec{E}} = 0.$$

Ponieważ

$$\nabla \times \frac{1}{\mu} \nabla \times \vec{E} = \frac{1}{\mu} \nabla \times \nabla \times \vec{E} + (\nabla \frac{1}{\mu}) \times (\nabla \times \vec{E})$$

i

$$\nabla \times \nabla \times \vec{E} = \nabla (\nabla \cdot \vec{E}) - \Delta \vec{E}$$

więc

$$\Delta \vec{E} - \varepsilon \mu \ddot{\vec{E}} - \mu (\nabla \frac{1}{\mu}) \times (\nabla \times \vec{E}) - \nabla (\nabla \cdot \vec{E}) = 0.$$

$\nabla \cdot \vec{E}$ obliczymy z równania

$$0 = \nabla \cdot (\varepsilon \vec{E}) = (\nabla \varepsilon) \cdot \vec{E} + \varepsilon (\nabla \cdot \vec{E}).$$

Ostatecznie, ponieważ $\frac{1}{\varepsilon} \nabla \varepsilon = \nabla \ln \varepsilon$ oraz $\mu (\nabla \frac{1}{\mu}) = \nabla \ln \frac{1}{\mu} = -\nabla \ln \mu$

$$\Delta \vec{E} - \varepsilon \mu \ddot{\vec{E}} + (\nabla \ln \mu) \times (\nabla \times \vec{E}) + \nabla (\vec{E} \cdot (\nabla \ln \varepsilon)) = 0$$

i podobnie

$$\Delta \vec{H} - \varepsilon \mu \ddot{\vec{H}} + (\nabla \ln \varepsilon) \times (\nabla \times \vec{H}) + \nabla (\vec{H} \cdot (\nabla \ln \mu)) = 0.$$

Dla harmonicznej zależności od czasu $\vec{E} e^{-i\omega t}$

$$(2) \Delta \vec{E} + \omega^2 \varepsilon \mu \vec{E} + (\nabla \ln \mu) \times (\nabla \times \vec{E}) + \nabla (\vec{E} \cdot (\nabla \ln \varepsilon)) = 0$$

W wypadku wolnej zmienności ε i μ w stosunku do zmienności pola $\vec{E} = E \vec{e}$, \vec{e} - wektor

$$(3) \frac{\|\nabla \varepsilon\|}{\varepsilon} \Big/ \frac{\|\nabla E\|}{E} \ll 1, \quad \frac{\|\nabla \mu\|}{\mu} \Big/ \frac{\|\nabla E\|}{E} \ll 1$$

(tzn. ε i μ mało zmieniają się na długości fali dla harmonicznej zależności przestrzennej pola) możemy pominąć w równ.

(2) dwa ostatnie wyrazy otrzymując równ. Helmholtza

$$(4) \quad \Delta \vec{E} + n^2 k^2 \vec{E} = 0$$

gdzie:

$$k = \frac{\omega}{c}, \quad n = c \sqrt{\epsilon \mu}$$

W przyjętym przez nas przybliżeniu (3) otrzymujemy więc równanie takie jak dla ośrodka jednorodnego z tym, że teraz $n \neq \text{const}$.

Dla harmonicznej zależności przestrzennej w wybranym kierunku propagacji (oś z), przyjmując dodatkowe założenia o wolnej zmienności pola w kierunku poprzecznym w stosunku do zmienności w kierunku podłużnym (oś z) [10], otrzymujemy w przybliżeniu rozwiązanie poprzeczne. Z rów. Maxwella (1)

$$\begin{aligned} 0 &= \nabla \cdot (\epsilon \vec{E}) = (\nabla \epsilon) \cdot \vec{E} + \epsilon (\nabla \cdot \vec{E}) = \\ &= (\nabla_t \epsilon) \cdot \vec{E}_t + \epsilon \nabla_t \cdot \vec{E}_t + \epsilon \nabla_L \cdot \vec{E}_L, \end{aligned}$$

gdzie \vec{E}_L równoległe, \vec{E}_t prostopadłe do osi z , zaś $\nabla = \nabla_t + \nabla_L$, $\nabla_L \cdot \vec{E}_L = \partial_z E_z$, $\partial_z \epsilon = 0$.
Zatem dla

$$\vec{E}(x, y, z) = \vec{E}(x, y) e^{i\beta z}$$

mamy

skąd

$$\nabla_L \cdot \vec{E}_L = \partial_z E_z = i\beta E_z$$

$$E_z = i \frac{\nabla_t \cdot \vec{E}_t}{\beta} + i \frac{(\nabla_t \cdot \epsilon) / \epsilon}{\beta} \cdot \vec{E}_t$$

Ponieważ

$$\beta = (\nabla_L \cdot \vec{E}_L) / E_z$$

więc

$$\frac{E_z}{E_t} = i \frac{(\nabla_t \cdot \vec{E}_t) / E_t}{(\nabla_L \cdot \vec{E}_L) / E_z} + i \frac{(\nabla_t \cdot \epsilon) / \epsilon}{(\nabla_L \cdot \vec{E}_L) / E_z} \cdot \left(\frac{\vec{E}_t}{E_t} \right)$$

Przyjmując

$$(5) \quad \frac{(\nabla_t \cdot \vec{E}_t) / E_t}{(\nabla_L \cdot \vec{E}_L) / E_z} \ll 1$$

mamy łącznie z (3) warunek przybliżonej poprzeczności

$$\frac{E_z}{E_t} \ll 1.$$

W tym przybliżeniu wystarczy rozwiązać równ. Helmholtza (4) dla składowej poprzecznej pola \vec{E}_t . Ustalając wersor \vec{e}_t :
 $\vec{E}_t = E \vec{e}_t$ - liniowa polaryzacja - otrzymujemy skalarne równ. Helmholtza

$$(6) \quad \Delta E + n^2 k^2 E = 0.$$

Właściwym warunkiem brzegowym dla (6) jest żądanie ciągłości \vec{E} , $\nabla \vec{E}$ na granicy obszaru. Ze względu na brak źródeł mamy ciągłość wszystkich składowych pola \vec{E} i \vec{H} (ciągła zmienność ϵ i μ). Z równ. Maxwella (1) wynika, że wyeliminowane przez nas pole \vec{H} wyraża się przez pole \vec{E}

$$\omega \mu \vec{H} = \nabla \times \vec{E}$$

zaś dla $\vec{E} = \vec{E}_t = E \vec{e}_t$

$$\nabla \times \vec{E} = (\nabla E) \times \vec{e}_t.$$

Zatem z ciągłości pola \vec{H} wynika ciągłość ∇E .

W pracy [10] przedstawione porównanie przybliżenia skalarnego ze ścisłą analizą numeryczną dla różnych modów w cylindrycznym światłowodzie o liniowo zmiennym współczynniku załamania. Błąd wynikający z przybliżenia skalarnego jest proporcjonalny do $(n_{max} - n_{min})/n_{max}$ i maleje ze wzrostem częstotliwości.

Wyniki tej pracy potwierdzają słuszność przybliżenia skalarnego.

2. Sformułowanie problemu

Wybieramy układ współrzędnych cylindrycznych (r, θ, z) o osi z pokrywającej się z osią symetrii światłowodu. Zależność radialną współczynnika załamania ("profil" światłowodu) przyjmujemy w postaci:

$$(7) \quad \begin{cases} n^2(r) = n_1^2 - (n_1^2 - n_2^2) f((r/a)^2) & r \leq a \\ n^2(r) = n_2^2 & r \geq a \end{cases}$$

gdzie o funkcji $f(\cdot)$ zakładamy:

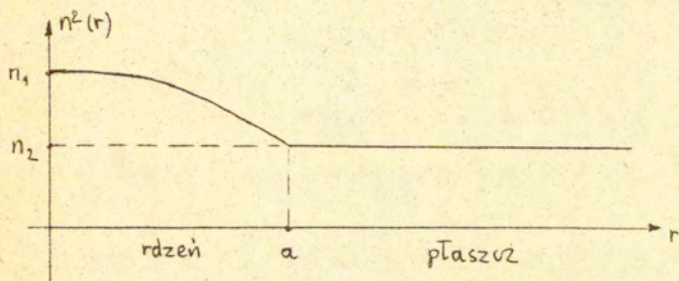
$$f(0) = 0$$

$$f(1) = 1$$

$f(\cdot)$ jest analityczna

$f(\cdot)$ jest wolno zmienna w sensie (3).

Jakościowo współczynnik załamania jest przedstawiony na rys.3.



Rys. 3. Profil światłowod. (optical fiber profile).

Zakładamy, że płaszcz rozciąga się do nieskończoności.

Rozważamy, omówiony we wstępie, przypadek słabego prowadzenia i wynikające z niego przybliżenie skalarne:

$$(8) \quad n_1^2 - n_2^2 \ll n_1^2.$$

Przyjmujemy harmoniczną zależność od czasu $e^{-i\omega t}$ i poszukujemy rozwiązania równ. Helmholtza (6) w postaci zgodnej z symetrią problemu:

$$(9) \quad \vec{E}_t = \vec{e}_t E(r) e^{i\omega t} e^{i\beta z}.$$

Podstawienie (9) do równ. (6) prowadzi do równania radialnego

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{d}{dr} E \right) + \left(n^2 k^2 - \beta^2 - \frac{m^2}{r^2} \right) E = 0,$$

gdzie: $k^2 = \frac{\omega^2}{c^2}$, $n^2 = c^2 \epsilon \mu$.

Podstawienie $E = r^{-1/2} \varphi$ eliminuje pierwszą pochodną w operatorze

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} r \frac{d}{dr} = \frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr}$$

Zatem przyjmując

$$(10) \left\{ \begin{array}{l} E = r^{-1/2} \varphi \\ \rho = \frac{r}{a} \quad - \text{bezwymiarowa zmienna niezależna} \\ U^2 = (n_1^2 k^2 - \beta^2) a^2 \quad - \text{wartość własna} \\ V^2 = k^2 (n_1^2 - n_2^2) a^2 \quad - \text{unormowana częstość} \quad - \text{duży parametr} \\ \mu = \frac{1}{4} - m^2 < 0 \quad - \text{pomijany med podstawowy} \end{array} \right.$$

otrzymujemy dla $\rho \leq 1$ (wewnątrz rdzenia)

$$(11) \quad \frac{d^2 \varphi}{d \rho^2} + (U^2 - V^2 \rho + \frac{\mu}{\rho^2}) \varphi = 0.$$

Na zewnątrz rdzenia (w płaszczu) dla $\rho \geq 1$ współczynnik załamania jest stały $n = n_2$ i na $E(r)$ otrzymujemy ściśle rozwiązywalne równanie Bessela.

W oznaczeniach (10) przyjmując dodatkowo

$$(12) \quad W^2 = a^2 (\beta^2 - n_2^2 k^2) = V^2 - U^2 > 0$$

dostajemy

$$(13) \quad \frac{d^2 \varphi}{d \rho^2} - (W^2 - \frac{\mu}{\rho^2}) \varphi = 0$$

Rozwiązanie rów. (13) znikające w nieskończoności ($\xi \rightarrow \infty$) ma postać

$$(14) \quad \varphi = \xi^{1/2} K_m(\xi W)$$

gdzie: $K_m(\cdot)$ - zmodyfikowana funkcja Hankela [11].

Warunki ciągłości dla φ oraz $\frac{d\varphi}{d\xi}$ (patrz wstęp str. 8) w punkcie $\xi=1$ ($r=a$) możemy przedstawić w postaci warunku brzegowego ($\xi=1$) dla problemu (11) w przedziale $0 \leq \xi \leq 1$.

Poszukiwane przez nas mody prowadzone (problem własny) są określone z dokładnością do stałej - warunek unormowania. Stanowią one bazę względem której rozwijamy dane pole i wówczas według naszej wygody wybieramy unormowanie.

Posługując się pochodną logarytmiczną, która narzuca na φ warunek wynikający z ciągłości φ i $\frac{d\varphi}{d\xi}$ z dokładnością do stałej mamy

$$(15) \quad \frac{1}{\varphi} \frac{d\varphi}{d\xi} \Big|_{\xi=1} = K$$

gdzie stała K jest dana przez

$$(16) \quad K = \frac{1}{2} + W \frac{K'_m(W)}{K_m(W)}$$

gdyż dla $\xi \geq 1$ otrzymujemy z (14)

$$\frac{\varphi'}{\varphi} \Big|_{\xi=1} = \frac{\frac{1}{2} \xi^{-1/2} K_m(\xi W) + \xi^{1/2} W K'_m(\xi W)}{\xi^{1/2} K_m(\xi W)} \Big|_{\xi=1} = \frac{\frac{1}{2} K_m(W) + W K'_m(W)}{K_m(W)}$$

Zatem wykorzystując znajomość ścisłego rozwiązania na zewnątrz rdzenia ($\xi \geq 1$) sprowadzamy problem do zagadnienia brzegowego wewnątrz rdzenia z warunkiem brzegowym (15).

Warunek brzegowy w $\xi=0$ wynika z żądania regularności pola \vec{E} . Brak osobliwości pola jest konsekwencją braku źródeł i braku nieciągłości ośrodka dla $\xi=0$. Zbadajmy

bardziej szczegółowo wynikające stąd warunki na φ . Zachowanie asymptotyczne φ dla $\varrho \rightarrow 0$ znajdziemy analizując asymptotyczne przybliżenie równ. (11). Zgodnie z przyjętymi założeniami o regularności f wyrażenie $U^2 - V^2 f$ jest pomijalne w stosunku do $\frac{\mu}{\varrho^2}$ w otoczeniu $\varrho = 0$. Zatem dla $\varrho \rightarrow 0$ równ. (11) przyjmuje postać:

$$\frac{d^2\varphi}{d\varrho^2} + \frac{\mu}{\varrho^2} \varphi = 0.$$

Poszukujemy rozwiązania w postaci $\varphi = \varrho^\lambda$

$$\lambda(\lambda-1)\varrho^{\lambda-2} + \mu\varrho^{\lambda-2} = 0$$

czyli

$$\lambda^2 - \lambda + \mu = 0$$

skąd

$$\lambda_{\pm} = \frac{1}{2} \pm m.$$

Warunek regularności pola $E = r^{-1/2} \varphi \sim \varrho^{\pm m}$ eliminuje ujemne potęgi. Otrzymujemy warunek brzegowy dla $\varrho \rightarrow 0$

$$(17) \quad \varphi \underset{\varrho \rightarrow 0}{\sim} \varrho^{m+1/2}.$$

Sprowadziliśmy w ten sposób całe zagadnienie do rozwiązania następującego problemu własnego

$$(18) \quad \frac{d^2\varphi}{d\varrho^2} - V^2 F \varphi = 0$$

gdzie:

$$(19) \quad F = f - \frac{U^2}{V^2} - \frac{\mu}{V^2 \varrho^2}.$$

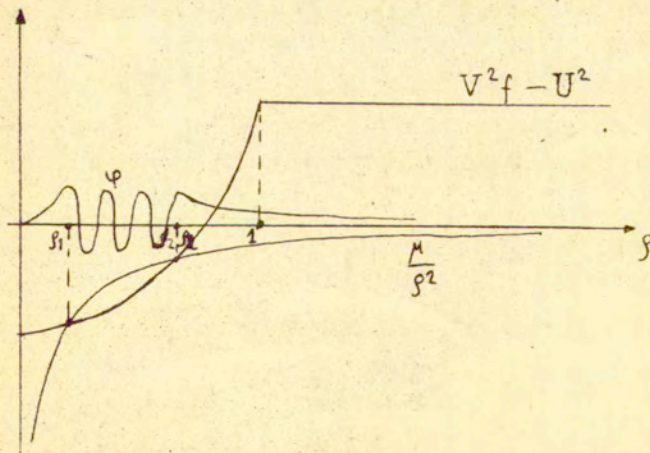
U^2 jest szukaną wartością własną, której znajomość pozwala zgodnie z (10) wyznaczyć stałą propagacji β . Funkcja

własna $\varphi(\xi)$ określona na odcinku $[0,1]$ spełnia następujące warunki brzegowe

$$(20) \quad \begin{cases} \varphi \sim \xi^{m+1/2} \\ \xi \rightarrow 0 \\ \frac{1}{\varphi} \frac{d\varphi}{d\xi} \Big|_{\xi=1} = K(W) \end{cases}$$

Wyznaczona stąd funkcja φ daje pole elektryczne wewnątrz rdzenia dla $\xi \leq 1$. Dla $\xi \geq 1$ korzystamy z (14).

Rozważamy przypadek modów prowadzonych tzn. zakładamy, że wyrażenie $U^2 - V^2 f$ ma jedno miejsce zerowe na odcinku $\xi \in [0,1]$ zaś $U^2 - V^2 f + \frac{\mu}{\xi^2}$ ma dwa miejsca zerowe. Miejsca zerowe wyrażenia $U^2 - V^2 f + \frac{\mu}{\xi^2}$ zwane punktami zwrotnymi ograniczają obszar, gdzie funkcja φ ma charakter oscylacyjny. Duży parametr V^2 pozwala szukać rozwiązania asymptotycznego dla $V^2 \rightarrow \infty$ — asymptotyka krótkofalowa dla $k \rightarrow \infty$ tzn. k duże w stosunku do zmian współczynnika załamania na odcinku a (promień rdzenia) zgodnie z (10). Sytuacja ta jest przedstawiona jakościowo na rys. 4.



Rys. 4. Przypadek $\mu < 0$ ($m \geq 1$).

Podobną metodę można zastosować do światłowodów planarnych [5], [6]. Wówczas funkcja F występująca w (18) jest prostsza

$$(21) \quad F = f - \frac{U^2}{V^2}$$

3. Asymptotyczna analiza równania zwyczajnego drugiego rzędu.

Metoda W.K.B.

Poszukujemy rozwiązań asymptotycznych równania typu (18)

$$(22) \quad \frac{d^2 u}{dx^2} - \lambda^2 q(x) u = 0, \quad x, q \in \mathbb{R}, \quad u \in \mathbb{C},$$

dla $\lambda \rightarrow \infty$. Postać (22) jest wystarczająco ogólna dla równań drugiego rzędu, gdyż równanie

$$\frac{d^2 u}{dx^2} + p \frac{du}{dx} + qu = 0$$

daje się sprowadzić do

$$\frac{d^2 w}{dx^2} + \left(q - \frac{p^2}{4} - \frac{1}{2} \frac{dp}{dx} \right) w = 0$$

przy pomocy transformacji

$$u = w e^{-\frac{1}{2} \int p dx}$$

Zakładamy (patrz wstęp), że funkcja $q(x)$ jest wolno zmienna. W krańcowym przypadku $q = \text{const}$ rozwiązanie (22) jest trywialne $\sim e^{\pm \lambda \sqrt{q}}$. Ze względu na wolną zmienność $q(x)$ możemy oczekiwać, że lokalnie wokół x w pierwszym

(b. grubym) przybliżeniu

$$u = A e^{\lambda \sqrt{q(x)}} + B e^{-\lambda \sqrt{q(x)}}$$

Dla $q > 0$ rozwiązania mają charakter eksponenoidalny, zaś dla $q < 0$ oscylacyjny. Już z tej bardzo przybliżonej analizy wynika wyróżniona rola punktu x_0 : $q(x_0) = 0$ rozdzielającego obszary, w których rozwiązanie ma jakościowo różny charakter. Miejsce zerowe x_0 , $q(x_0) = 0$ nazywamy punktem zwrotnym (turning point). Terminologia ta została zaczerpnięta z kwaziklasycznego przybliżenia mechaniki kwantowej: punkty zwrotne klasycznego ruchu cząstki w jamie potencjalnej dane są warunkiem równości energii kinetycznej i potencjalnej, stąd zerowanie się $q(x) = E - V(x)$ w równaniu Schrödingera. W optyce punkty zwrotne są rzutami kaustyk [12].

Carlini w roku 1817 [13] w szczególnym przypadku funkcji Bessela dla dużego argumentu (praca ta została zapomniana) oraz ogólnie dla rów. (22) Liouville [14] i niezależnie Green [15] w 1837 roku zastosowali transformację zmiennej niezależnej i szukanej funkcji by otrzymać prostszą postać równania, lepiej nadającą się do wykonania przybliżenia dla $\lambda \rightarrow \infty$

Podstawienie

$$(23) \quad \begin{cases} t(x) = \int^x \sqrt{q(x')} dx' & \Leftrightarrow \frac{dt}{dx} = q^{1/2} \\ w(x) = \left(\frac{dt}{dx}\right)^{1/2} u(x) = q^{1/4} u(x) \end{cases}$$

przeprowadza rów. (22) w

$$(24) \quad \frac{d^2 w}{dt^2} - \lambda^2 (1 + \varepsilon) w = 0$$

gdzie

$$(25) \quad \varepsilon = - \frac{1}{\lambda} q^{1/4} \frac{d^2}{dx^2} q^{1/4}$$

Posługując się "pochodną Schwartza" [16]

$$(26) \quad \{t, x\} \equiv \left(\frac{dt}{dx}\right)^{1/2} \frac{d^2}{dx^2} \left(\frac{dt}{dx}\right)^{-1/2}$$

można zapisać (25) w postaci

$$\varepsilon = -\frac{1}{\lambda^2} \{t, x\} \left(\frac{dt}{dx}\right)^{-2} = \frac{1}{\lambda^2} \{x, t\}$$

Dla wystarczająco regularnych funkcji $q(\cdot)$ zachodzi $\varepsilon \xrightarrow{\lambda \rightarrow \infty} 0$.
Właśnie zmierzanie do zera ε danego przez (25) precyzuje warunek wolnej zmienności $q(\cdot)$. Można wówczas zastąpić rów. (24) przez

$$(27) \quad \frac{d^2 w}{dt^2} - \lambda^2 w = 0, \quad \text{dla } \lambda \rightarrow \infty$$

skąd natychmiast

$$w \sim A e^{\lambda t} + B e^{-\lambda t}$$

Wracając do wyjściowych zmiennych x , u zgodnie z (23) dostajemy dla $\lambda^2 \rightarrow \infty$

$$(28a) \quad u(x) \sim A q^{-1/4} e^{\lambda \int q^{1/2} dx'} + B q^{-1/4} e^{-\lambda \int q^{1/2} dx'}$$

($q > 0$)

$$(28b) \quad u(x) \sim A |q|^{-1/4} e^{i\lambda \int |q|^{1/2} dx'} + B |q|^{-1/4} e^{-i\lambda \int |q|^{1/2} dx'}$$

($q < 0$)

Rozwiązanie (28) staje się osobliwe w punktach zwrotnych x_0 : $q(x_0) = 0$, czyli jest niedobre w otoczeniu punktów zwrotnych. Znalazienie rozwiązań poprawnych również w otoczeniu punktów zwrotnych jest celem tego paragrafu.

W literaturze matematycznej [17] transformacja (23) nosi nazwę transformacji Liouville'a - Greena (L.G.) , rozwiązania (28) funkcji Liouville'a - Greena. Wśród fizyków rozwiązania (28) noszą nazwę przybliżenia W.K.B. od nazwisk: Wentzel [26] , Kramers [27] , Brillouin [28] . Badali oni przybliżenie kwazi-klasyczne równania Schrödingera (1926 r.) . Główną ich zasługą nie jest odtwarzenie znanych już wcześniej rozwiązań (28) (choć częściowo zapomnianych) lecz podanie sposobów powiązania rozwiązań (28a) i (28b) poprzez punkt zwrotny - związki asymptotyczne (connection formulae) .

Otrzymamy jeszcze raz rozwiązania (28) w sposób typowy W.K.B , który można znaleźć w dowolnym podręczniku mechaniki kwantowej np. [18] , [19] . Poszukujemy rozwiązania rów. (22) w postaci rozwinięcia asymptotycznego

$$(29) \quad u = e^{i\lambda S}$$

gdzie

$$(30) \quad S = S_0 + \left(\frac{1}{i\lambda}\right) S_1 + \left(\frac{1}{i\lambda}\right)^2 S_2 + \dots$$

Podstawienie (29) do (22) daje ($S' \equiv \frac{dS}{dx}$) równanie

$$(31) \quad i S'' - \lambda S'^2 + \dots = q(x)$$

Z kolei wstawienie rozwinięcia (30) do (31) i uporządkowanie względem potęg $(i\lambda)$ prowadzi do rekurencyjnego układu równań

$$(32) \quad \begin{cases} S_0'^2 + q = 0 \\ S_0'' + 2S_0' S_1' = 0 \\ S_1'' + S_1'^2 + 2S_0' S_2' = 0 \\ \dots \end{cases}$$

W pierwszych dwóch rzędach

$$S_0' = \pm (-q)^{1/2} \Rightarrow S_0 = \pm \int (-q)^{1/2} dx'$$

$$S_1' = -\frac{1}{2} \frac{S_0''}{S_0'} = -\frac{1}{2} (\ln S_0')' \Rightarrow S_1 = -\frac{1}{2} \ln S_0' = \ln S_0'^{-1/2}$$

$$e^{S_1} = S_0'^{-1/2} = (\pm 1)^{-1/2} (-q)^{-1/4}$$

Skąd

$$u \sim A q^{-1/4} e^{\lambda \int q^{1/2}} + B q^{-1/4} e^{-\lambda \int q^{1/2}} \quad (q > 0)$$

$$u \sim A |q|^{-1/4} e^{i\lambda \int |q|^{1/2}} + B |q|^{-1/4} e^{-i\lambda \int |q|^{1/2}} \quad (q < 0)$$

czyli znowu otrzymaliśmy (28).

Rozwinięcie (29,30) jest równoważne rozwinięciu Debye'a

$$(33) \quad u \sim e^{i\lambda \int q^{1/2}} \sum_{n=0}^{\infty} A_n (i\lambda)^{-n}$$

(33) prowadzi w najniższym rzędzie do takiego samego wyrażenia jak (28) [20]. Oba podejścia różnią się sposobem rozwijania w wyższych rzędach tzn. mamy

$$u = e^{i\lambda S_0} A$$

gdzie dla (30) $A = \exp\left[\sum_{n=1}^{\infty} S_n (i\lambda)^{-n}\right]$

dla (33) $A = \sum_{n=0}^{\infty} A_n (i\lambda)^{-n}$

W mechanice kwantowej bardziej rozpowszechnione jest rozwinięcie (30) zaś w optyce (33).

Metoda formalnych rozwinięć asymptotycznych typu (30) lub (33) jest prostsza i naturalniejsza niż metoda transformacji Liouville'a - Greena (23), daje ponadto wyższe rzędy rozwinięcia.

Przytoczyliśmy metodę transformacji Liouville'a - Greena nie tylko ze względów historycznych. Jej uogólnienia pozwalają znajdować jednolite rozwinięcia asymptotyczne, słuszne w otoczeniu punktu zwrotnego i poza nim.

Zbadamy teraz równanie (22) w otoczeniu punktu zwrotnego, gdzie rozwiązania (28) są niepoprawne. Rozważymy tzw. liniowy punkt zwrotny - najprostsz i najczęściej spotykany przypadek.

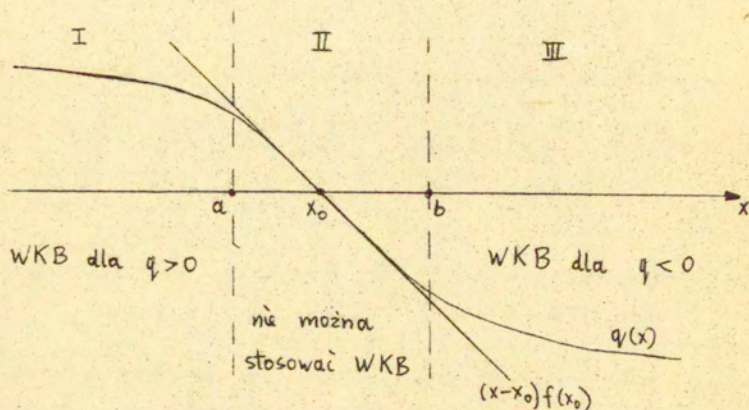
Zakładamy, że w otoczeniu punktu zwrotnego x_0 : $q(x_0) = 0$, funkcja $q(\cdot)$ ma postać

$$(34) \quad q = (x-x_0) f(x)$$

tzn. $q(\cdot)$ ma zero pierwszego rzędu w x_0 (w rozwinięciu Taylora q wokół x_0 nie znika pierwsza pochodna). Dla wolno zmiennej funkcji $q(\cdot)$ możliwa jest liniowa aproksymacja w niezbyt dużym otoczeniu punktu x_0

$$(35) \quad q \approx (x-x_0) f(x_0) = (x-x_0) \left. \frac{dq}{dx} \right|_{x=x_0}$$

Sytuację przedstawia rys. 5



Rys. 5. Liniowy punkt zwrotny.

Zatem wewnątrz $[a, b]$ można zastąpić (22) przybliżonym równaniem

$$\frac{d^2 u}{dx^2} - \lambda^2 f(x_0) (x - x_0) u = 0$$

Podstawiając

$$\xi = [\lambda^2 f(x_0)]^{1/3} (x - x_0)$$

otrzymujemy równanie Airy'ego

$$(36) \quad \frac{d^2 u}{d\xi^2} - \xi u = 0.$$

Rozwiązanie równania (36)

$$(37) \quad u(\xi) = C_1 Ai(\xi) + C_2 Bi(\xi)$$

dane jest przez funkcje Airy'ego

$$(38) \quad \begin{cases} Ai(\xi) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \cos\left(\frac{t^3}{3} + \xi t\right) dt \\ Bi(\xi) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \left[e^{-\frac{t^3}{3} + \xi t} + \sin\left(\frac{t^3}{3} + \xi t\right) \right] dt \end{cases}$$

Funkcje Airy'ego wyrażają się przez funkcje Bessela rzędu $\frac{1}{3}$

$$Ai(\xi) = \frac{1}{3} \sqrt{\xi} \left[I_{-\frac{1}{3}}\left(\frac{2}{3}\xi^{3/2}\right) - I_{\frac{1}{3}}\left(\frac{2}{3}\xi^{3/2}\right) \right]$$

$$Bi(\xi) = \sqrt{\frac{\xi}{3}} \left[I_{-\frac{1}{3}}\left(\frac{2}{3}\xi^{3/2}\right) + I_{\frac{1}{3}}\left(\frac{2}{3}\xi^{3/2}\right) \right],$$

a dla dużego argumentu mają następujące rozwinięcia asymptotyczne ($\xi \rightarrow \infty$)

$$(39) \quad \begin{aligned} Ai(\xi) &\sim \frac{1}{2} \pi^{-1/2} \xi^{-1/4} \exp\left(-\frac{2}{3}\xi^{3/2}\right) \\ Ai(-\xi) &\sim \pi^{-1/2} \xi^{-1/4} \sin\left(\frac{2}{3}\xi^{3/2} + \frac{\pi}{4}\right) \\ Bi(\xi) &\sim \pi^{-1/2} \xi^{-1/4} \exp\left(\frac{2}{3}\xi^{3/2}\right) \\ Bi(-\xi) &\sim \pi^{-1/2} \xi^{-1/4} \cos\left(\frac{2}{3}\xi^{3/2} + \frac{\pi}{4}\right). \end{aligned}$$

Podobnie można analizować punkt zwrotny wyższego rzędu (zero $q(\cdot)$ wyższego rzędu)

$$q = c(x-x_0)^n \quad \text{w otoczeniu } x_0.$$

Otrzymujemy w otoczeniu x_0 równanie Bessela i rozwiązanie [21] , [18]

$$u(x) = A \xi^{1/2} q^{-1/4} J_{\pm m}(\xi)$$

gdzie
$$\xi(x) = \int_{x_0}^x q^{1/2} dx' \quad , \quad m = \frac{1}{n+2}.$$

Dla $n=1$ dostajemy $m = \frac{1}{3}$, stąd funkcje Airy'ego.
Dla $n=2$, $m = \frac{1}{4}$ - wielomiany Hermitte'a itd.

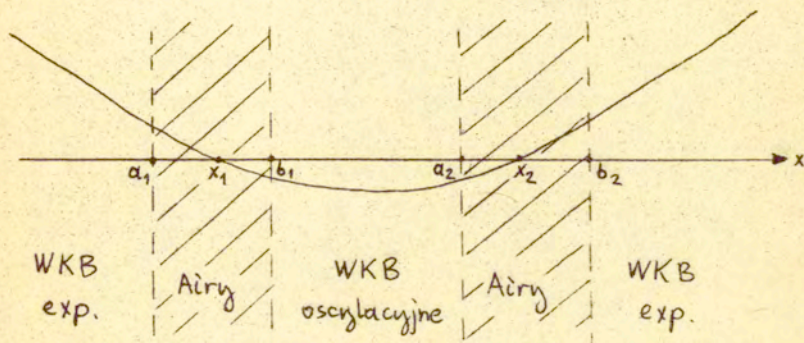
Dla wolno zmiennej funkcji $q(\cdot)$ możliwe jest zszycie rozwiązań w.K.B. (28) z rozwiązaniem (37) w otoczeniu punktu zwrotnego. Wybieramy punkty a i b nie za bliskie x_0 tak, by jeszcze obowiązywało w nich rozwiązanie (28) i nie za daleko od x_0 , tak, by przybliżenie rów. (22) przez rów.

(36) Airy'ego dające (37) było uzasadnione. Otrzymujemy w ten sposób niejednolite rozwinięcie asymptotyczne rozwiązania u . W różnych obszarach przedstawione jest ono różnymi wzorami.

Można zastosować tę procedurę zszywania do interesującego nas zagadnienia z dwoma punktami zwrotnymi— "jama potencjału" [19] .

Nakładając na tak znalezione niejednolite rozwiązanie asymptotyczne u warunki brzegowe (u nas dla $\vartheta=0$ i $\vartheta=1$) otrzymujemy równanie na wartości własne

$$(40) \quad \int_{x_1}^{x_2} q^{1/2} dx = (n + \frac{1}{2})\pi \quad , \quad n = 1, 2, \dots ,$$



Rys. 6. Metoda zszywania.

w optyce zwane często warunkiem rezonansu zaś w mechanice kwantowej regułą kwantowania Bohra-Sommerfelda.

Gdy nie interesuje nas jawna postać rozwiązania wokół punktu zwrotnego, to można asymptotycznie uzgodnić rozwiązania (28a) i (28b) po obu stronach punktu zwrotnego posługując się rozwinięciami asymptotycznymi (39) funkcji Airy'ego (asymptotic matching).

Uzgadniamy (39) z (28a) lub (28b) z odpowiedniej strony punktu zwrotnego - wyznaczamy współczynniki A, B przez C_1 i C_2 . Stąd znajdujemy związki między (28a) i (28b) [22], [18] - związki asymptotyczne (connection formulae) - w obszarze

$\delta > 0$ wybieramy zgodnie z warunkami brzegowymi malejącą funkcję wykładniczą :

$$(41) \quad \frac{A}{2} q^{-1/2} e^{-\int_{x_0}^x q^{1/2} dx'} \quad \longleftrightarrow \quad A |q|^{-1/2} \cos \left[\int_{x_0}^x |q|^{1/2} dx' - \frac{\pi}{4} \right]$$

($q > 0$) ($q < 0$)

$$A |q|^{-1/2} \cos \left[\int_{x_0}^x |q|^{1/2} dx' + \delta - \frac{\pi}{4} \right] \quad \longleftrightarrow \quad A q^{-1/2} \sin \delta e^{-\int_{x_0}^x q^{1/2} dx'}$$

($q < 0$) ($q > 0$)

Niesymetryczny charakter wzorów (41), wyrażony strzałkami, wynika stąd, że niewielka zmiana fazy kosinusa odpowiada pojawieniu w drugim obszarze rosnącej funkcji wykładniczej (dominującej asymptotycznie).

Związki asymptotyczne są bardzo użyteczne gdy nie jest potrzebna znajomość rozwiązania w otoczeniu punktu zwrotnego. Np. w problemach rozpraszeniowych (na skoku współczynnika załamania, potencjału itp.) wystarczy znajomość relacji między asymptotycznymi postaciami rozwiązania z dala od centrum rozpraszania (macierz rozpraszania) [18]. Podobnie gdy interesuje nas tylko wartość własna można wykorzystać (41). Można w ten sposób otrzymać (40) [18].

Rayleigh pierwszy (1912r.) otrzymał związki asymptotyczne (dla malejącej funkcji wykładniczej) badając odbicie fal akustycznych od warstwy przejściowej [23]. Gans (1915r.) badając propagację światła w słabo niejednorodnych ośrodkach warstwowych [24] po raz pierwszy w pełni systematycznie znalazł związki asymptotyczne i wyjaśnił rolę punktów zwrotnych (zjawisko Stakesa). Obie te prace zostały zapomiane. Ponownie Jeffreys (1924r.) w kontekście równania Mathieu (swobodne fale na wodzie) [25] badał wpływ punktów zwrotnych, otrzymał związki asymptotyczne i jako pierwszy usystematyzował metodę W.K.B. Dopiero w 1926r., metody te się rozpowszechniły ze względu na znacznie mechaniki kwantowej, gdy badając przybliżenie kwaziklasyczne równania Schrödingera, od nowa i niezależnie od siebie Wentzel [26], Kramers [27] i Brillouin [28] znaleźli rozwiązania (zwane stąd przybliżeniem WKB), wyjaśnili rolę punktów zwrotnych i otrzymali związki asymptotyczne. Inną metodę otrzymania związków asymptotycznych przedstawił Zwaan (1929r.) wykorzystując całkowanie w płaszczyźnie zespolonej w celu obejścia punktów zwrotnych [29], [30]. Rozwinęli tę technikę Dunham (1932r.) [31] oraz Kemble (1935r.) [32].

Podstawową wadą omówionej wyżej metody zszywania jest jej niejednorodny charakter. Rozwiązanie asymptotyczne dla $\lambda \rightarrow \infty$ nie jest jednostajne ze względu na zmienną x . Langer (1931, 1934r.) zaproponował uogólnienie transformacji Liouville'a - Greena prowadzące do jednolitego rozwinięcia asymptotycznego

[21] , [33] . Uświadomił on sobie, że wszelkie próby wyrażenia asymptotycznych rozwinięć rozwiązań przez funkcje elementarne muszą zawieść w pobliżu punktów zwrotnych. Nieuniknione jest pojawienie się funkcji specjalnych spełniających odpowiednie równania różniczkowe. Idea Langer'a streszcza się w zdaniu: bliskie sobie równania mają bliskie rozwiązania. Należy przybliżyć wyjściowe równanie (22) pomocniczym równaniem (related equation, comparison equation) prowadzącym do funkcji specjalnej, charakterystycznej dla danego problemu np. liniowy punkt zwrotny - funkcja Airy'ego . Jako metodę otrzymania równania pomocniczego zastosował Langer uogólnienie transformacji L.G. (23) .

Zacznijmy od zbadania dlaczego transformacja (23) jest zła w pobliżu punktu zwrotnego. Sprawdźmy z jaką dokładnością przybliżone rozwiązania (28) spełniają wyjściowe rów. (22) . Wstawiając u dane wzorami (28) do lewej strony (22) otrzymujemy

$$\frac{d^2 u}{dx^2} - \lambda^2 q u = \lambda^2 q \frac{1}{\lambda^2} q^{-3/4} \frac{d^2}{dx^2} q^{1/4} u = -\lambda^2 q \varepsilon u \neq 0$$

gdzie ε jest dane przez (25) . Prawa strona tego równania $-\lambda^2 q \varepsilon u$ wyraża błąd w rozwiązaniu wyjściowego problemu. Pokazaliśmy więc, że przybliżone (WKB) rozwiązania (28) spełniają ściśle równanie

$$(42) \quad \frac{d^2 u}{dx^2} - \lambda^2 q (1-\varepsilon) u = 0 .$$

Równanie (42) w odróżnieniu od wyjściowego (22) jest osobliwe w punktach zwrotnych, gdyż

$$\varepsilon \xrightarrow{q \rightarrow 0} \pm \infty$$

Poza punktami zwrotnymi rów. (42) przybliża asymptotycznie wyjściowe rów. (22)

$$\begin{array}{l} \xi \longrightarrow 0 \\ \lambda \longrightarrow \infty \end{array} , \text{ dla } q \neq 0.$$

Zatem metoda Liouville'a - Greena wprowadziła sztuczne osobliwości w punktach zwrotnych, których nie ma w wyjściowym równaniu (22). Wynika stąd wniosek, że uogólniając przekształcenia Liouville'a - Greena (23) trzeba zadbać by otrzymane równanie pomocnicze miało tyle samo odpowiadających sobie miejsc zerowych i osobliwości co równanie wyjściowe. Nie zmieniamy wówczas ogólnego charakteru równania i możemy przypuszczać, że rozwiązania równania pomocniczego dobrze oddają jakościowe cechy rozwiązania problemu wyjściowego bez przykrych niespodzianek typu sztucznie wprowadzonych osobliwości. Ilościową zgodność osiągamy asymptotycznie dla $\lambda \rightarrow \infty$. Ze względów praktycznych trzeba zadbać by równanie pomocnicze było prostsze niż wyjściowe np. równanie prowadzące do znanych funkcji specjalnych [21], [33].

Realizując ten program Langer uogólnił przekształcenie L.G. następująco

$$(43) \quad \left\{ \begin{array}{l} t(x) = \int^x q^{1/2} dx \\ w = \left(\frac{dt}{dx}\right)^{1/2} u = q^{1/4} u \end{array} \right. \longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} t = \phi(x) = ? \\ w = \left(\frac{dt}{dx}\right)^{1/2} u = \phi'^{1/2} u \end{array} \right.$$

Liouville-Green

Langer

gdzie zależność $t = \phi(x)$ pozostaje do wyznaczenia. Związek $w = \left(\frac{dt}{dx}\right)^{1/2} u$ zapewnia nie wystąpienie pierwszej pochodnej w przekształconym równaniu. Transformacja (43) przeprowadza rów. (22) w

$$(44) \quad \frac{d^2 w}{dt^2} - \lambda^2 \left(\frac{q}{\phi'^2} + \xi \right) w = 0$$

gdzie

$$\begin{aligned}
 (45) \quad \varepsilon &= \frac{1}{\lambda^2} \left(\frac{1}{2} \frac{\phi'''}{\phi'^3} - \frac{3}{4} \frac{\phi''^2}{\phi'^4} \right) = \\
 &= -\frac{1}{\lambda^2} \phi'^{-3/4} \frac{d^2}{dx^2} \phi'^{-1/2} = \\
 &= -\frac{1}{\lambda^2} \{t, x\} \left(\frac{dt}{dx} \right)^{-2} = \\
 &= \frac{1}{\lambda^2} \{x, t\}
 \end{aligned}$$

Przy odpowiednio regularnej zamianie zmiennej

$$x \longrightarrow t = \phi(x)$$

mamy (zgodnie z (45))

$$\varepsilon \xrightarrow{\lambda \rightarrow \infty} 0 \quad \text{dla wszystkich } x$$

i możemy przybliżyć (44) równaniem

$$(46) \quad \frac{d^2 w}{dt^2} - \lambda^2 \frac{q}{\phi'^2} w = 0.$$

Wybór $\frac{q}{\phi'^2} = 1$ tzn. $\frac{dt}{dx} = \phi' = q^{1/2} \Rightarrow t = \int^x q^{1/2}$ odtwarza przybliżenie Liouville'a-Grena przy czym ε staje się osobliwe w punktach zwrotnych (źródłem tej osobliwości jest wybór $t = \int^x q^{1/2}$). Kierując się zachowaniem wyjściowego rów. (22) w otoczeniu liniowego punktu zwrotnego Langer [21], [33] wybrał

$$(47) \quad \frac{\lambda^2 q}{\phi'^2} = \phi \equiv t,$$

co przeprowadza rów. (46) w pomocnicze równanie - równanie Airy'ego

$$(48) \quad \frac{d^2 w}{dt^2} - t w = 0.$$

Rozwiązując równanie (47)

$$\lambda^2 q = \phi'^2 \phi$$

$$\lambda q^{1/2} = \phi' \phi^{1/2} = \left(\frac{2}{3} \phi^{3/2}\right)'$$

$$(49) \quad \frac{2}{3} t^{3/2} \equiv \frac{2}{3} \phi^{3/2} = \lambda \int_{x_0}^x q^{1/2} dx',$$

otrzymujemy jednolite asymptotyczne rozwiązanie rów. (22) (z liniowym punktem zwrotnym) w postaci

$$(50) \quad \left\{ \begin{array}{l} u \underset{\lambda \rightarrow \infty}{\sim} \phi'(x)^{-1/2} [C_1 Ai(\phi(x)) + C_2 Bi(\phi(x))] \\ \phi(x) = \left[\frac{3}{2} \lambda \int_{x_0}^x q^{1/2} dx' \right]^{2/3} \end{array} \right.$$

Rozwinięcie asymptotyczne jest jednostajne ze względu na x włączając punkty zwrotne. Wykorzystując rozwinięcia asymptotyczne funkcji Airy'ego (39) dla dużych argumentów odtwarzamy z (50) rozwiązanie niejednolite - przybliżenie Liouville'a - Greena (WKB) (28) - słuszne daleko od punktów zwrotnych. W

pobliżu punktu zwrotnego, przybliżając

$$q = (x-x_0) f(x) \approx (x-x_0) f(x_0),$$

otrzymujemy

$$\phi(x) \approx \left(\frac{3}{2} \lambda f(x_0)^{1/2} \right)^{2/3} \left(\int_{x_0}^x (x'-x_0)^{1/2} dx' \right)^{2/3}.$$

Ponieważ

$$\int_{x_0}^x (x'-x_0) dx' = \int_0^{x-x_0} y^{1/2} dy = \frac{2}{3} (x-x_0)^{3/2},$$

więc odtwarzamy rozwiązanie (37).

W 1953r. Miller i Good [34] zastosowali tę samą metodę dla dwóch liniowych punktów zwrotnych w przypadku równania Schrödingera uzyskując bardzo dużą dokładność (porównanie ze ściśle rozwiązywalnym przypadkiem).

W 1954r. Olver [35] uogólnił transformację Langer'a. Zostało to powtórzone w 1959 r. przez Moriguchiego [36], który rozważył różne przypadki (jeden liniowy punkt zwrotny, jeden punkt zwrotny drugiego rzędu, dwa liniowe punkty zwrotne oraz równanie Hilla z punktem zwrotnym liniowym i drugiego rzędu) oraz badał wyższe rzędy rozwinięcia.

Olver zastąpił transformację Langer'a [22] przez

$$(51) \quad \begin{cases} u = \chi^{-1/4} w \\ \tau = \tau(t) = \int q^{1/2} \\ \chi = \frac{q}{\left(\frac{d\tau}{dt}\right)^2} \end{cases}$$

gdzie nowa zmienna niezależna t jest nieznaną funkcją starej zmiennej x .

Transformacja (51) przekształca równanie (22) w

$$(52) \quad \frac{d^2 w}{dt^2} - \lambda^2 \left[\left(\frac{d\tau}{dt} \right)^2 + \varepsilon \right] w = 0,$$

gdzie

$$(53) \quad \varepsilon = - \frac{1}{\lambda^2} \chi^{-3/4} \frac{d^2 \chi}{dx^2} \chi^{-1/4}.$$

Jeśli χ jest regularne i nie znika w interesującym nas obszarze, to $\varepsilon \rightarrow 0$ dla $\lambda \rightarrow \infty$ i można przybliżyć asymptotycznie równanie (52) równaniem pomocniczym

$$(53) \quad \frac{d^2 w}{dt^2} - \lambda^2 \left(\frac{d\tau}{dt} \right)^2 w = 0.$$

W tym celu trzeba wybrać zależność $\tau(t)$ tak, by zera i osobliwości $\left(\frac{d\tau}{dt} \right)^2$ były tego samego rzędu i występowały w tych samych miejscach jak dla $q(\cdot)$ ($\chi = q / \left(\frac{d\tau}{dt} \right)^2$). Zatem pomocnicze równanie (53) powinno mieć zera (punkty zwrotne) i osobliwości takie same jak wyjściowe równanie (22). W ramach tego ograniczenia wybieramy $\tau(t)$ tak, by uzyskać jak najprostsze równania pomocnicze (53), najlepiej o znanych rozwiązaniach. Np. gdy w interesującym nas obszarze $q(\cdot)$ jest nieosobliwe i różne od zera (brak punktów zwrotnych) możliwy jest wybór $\left(\frac{d\tau}{dt} \right)^2 = 1$ skąd $t = \tau$ i dostajemy transformację Liouville'a - Greena.

Natomiast, gdy $q(x) = f(x)(x - x_0)$ tzn. q nieosobliwe i ma jedno zero pierwszego rzędu, możliwy jest wybór (regularność χ) $\left(\frac{d\tau}{dt} \right)^2 = \pm t \Rightarrow \tau = \frac{2}{3} t^{3/2}$,

który daje transformację Langerera. Inne przypadki są przedstawione w pracy Mariguchiego [36] i w książce Olvera [17] rozdziały 10 - 14.

Do tej pory rozważaliśmy jednolite rozwinięcie asymptotyczne najniższego rzędu. Wyższe rzędy rozwinięcia (w parametrze λ) można otrzymać na kilka sposobów [22]. Jedną z metod rozwinięta przez Imai'ego [37] i Mariguchiego [36] polega na wielokrotnym powtarzaniu transformacji Langerera-Olvera. Równanie otrzymane po pierwszej transformacji (przed pominięciem ξ prowadzącym do równania pomocniczego w najniższym rzędzie) sprowadzamy przy pomocy zamiany zmiennych do postaci formalnie identycznej jak wyjściowe równanie i ponownie stosujemy transformację Langerera itd. Otrzymujemy rozwinięcie w postaci superpozycji transformacji Langerera. Metoda ta jest uciążliwa i trudno jest wyjść poza drugi rząd rozwinięcia. Inne podejście, zastosowane przez Cherry'ego [38] w przypadku liniowego punktu zwrotnego, polega na rozwinięciu względem λ wyrażenia $\eta(\xi)$ danego równania (45) (od λ zależy również ϕ zgodnie z (49)) i poszukiwaniu rozwiązania w postaci rozwinięcia, które otrzymujemy z (50) zastępując argumenty funkcji Airy'ego rozwinięciami w parametrze λ

$$\phi \longrightarrow \phi + \lambda^{-1} \phi_1 + \lambda^{-2} \phi_2 + \dots$$

Najprostszy i najbardziej efektywny jest sposób Olvera [35], [20], który polega na wydzieleniu znalezionych w najniższym rzędzie funkcji specjalnych i pomnożeniu ich przez asymptotyczne rozwinięcie potęgowe. W przypadku liniowego punktu zwrotnego mamy

$$u \sim Ai(\phi) \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{-n} A_n + Ai'(\phi) \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{-n} B_n +$$

$$+ B_i(\phi) \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{-n} C_n + B'_i(\phi) \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{-n} D_n.$$

4. Asymptotyczna postać modów w światłowodzie cylindrycznym

Rozwiązanie problemu własnego (18) rozpoczniemy od znalezienia asymptotycznego ($V \rightarrow \infty$) wyrażenia na funkcję własną φ przedstawiającą rozkład pola (10) danego modu prowadzonego. Zastosujemy metodę Langer'a i Olvera w następującej postaci [4]. Równanie (18) przekształćmy

$$(54) \quad \frac{d^2 \varphi}{d \varrho^2} - V^2 F \varphi = 0 \quad \longrightarrow \quad \frac{d^2 \phi}{dz^2} - V^2 G \phi = 0$$

przy pomocy transformacji

$$(55) \quad \varphi = \left(\frac{dz}{d \varrho} \right)^{-1/2} \phi$$

$$(56) \quad G = \left(\frac{dz}{d \varrho} \right)^{-2} \left(F - \frac{1}{V^2} \{z, \varrho\} \right) = F \left(\frac{d \varrho}{dz} \right)^2 + \frac{1}{V^2} \{ \varrho, z \},$$

gdzie, zgodnie z (26)

$$(57) \quad \{z, \varrho\} = \left(\frac{dz}{d \varrho} \right)^{1/2} \frac{d^2}{d \varrho^2} \left(\frac{dz}{d \varrho} \right)^{-1/2}$$

Zależność $\varphi = \varphi(z)$ pozostaje do wyznaczenia. Wynika ona z przyjętej postaci G . Przy wyborze G kierujemy się wygodą, dążymy do równania o znanych rozwiązaniach. Przy odpowiednim wyborze G otrzymamy regularną zależność $\varphi(z)$ tak, że możemy przybliżyć (56) jednolicie asymptotycznie (dla wszystkich φ)

$$(58) \quad G \left(\frac{dz}{d\varphi} \right)^2 \underset{V \rightarrow \infty}{\sim} F$$

Przybliżenie (58) jest możliwe, gdy $\{z, \varphi\} < \infty$. Zgodnie z (56)

$$\{z, \varphi\} = V^2 F - V^2 G \left(\frac{dz}{d\varphi} \right)^2,$$

więc trzeba, by F i G miały zera i osobliwości w tych samych miejscach i tego samego rzędu ($z(\varphi)$ regularne) - patrz uwagi poniżej (53), w przeciwnym razie dla $V \rightarrow \infty$ nie jest możliwe $\{z, \varphi\} < \infty$.

Dobierając G do F zgodnie z powyższym ograniczeniem możemy wykorzystać (58), stanowiące równanie różniczkowe pierwszego rzędu o rozdzielonych zmiennych, do wyznaczenia $z(\varphi)$. Otrzymujemy

$$G^{1/2} \frac{dz}{d\varphi} = F^{1/2}$$

$$G^{1/2} dz = F^{1/2} d\varphi$$

skąd

$$(59) \quad \int_{\tilde{z}}^z G^{1/2} dz' = \int_{\tilde{\vartheta}}^{\vartheta} F^{1/2} d\vartheta',$$

gdzie $\tilde{z}(\tilde{\vartheta})$ jest warunkiem początkowym.

Zgodnie z (19) funkcja F

$$F = f - \frac{U^2}{V^2} - \frac{\mu}{V^2 \vartheta^2}$$

ma osobliwość dla $\vartheta = 0$ oraz dwa miejsca zerowe ϑ_1, ϑ_2
- patrz rys. 4.

Przyjmujemy

$$(60) \quad G = z^2 - z_0^2 - \frac{\mu}{V^2 z^2},$$

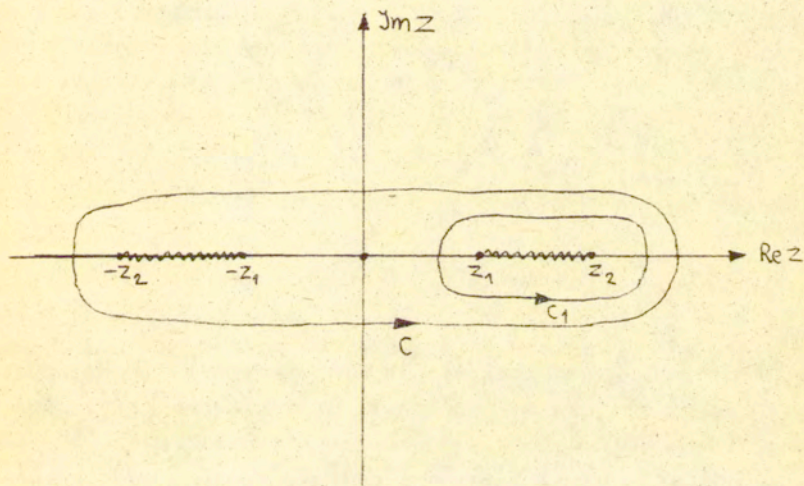
które ma taką samą osobliwość dla $z = 0$ oraz dwa miejsca
zerowe z_1, z_2 ($\mu = \frac{1}{4} - m^2 < 0$).

Warunek początkowy w (59) wybieramy tak, że $\vartheta \rightarrow 0 \Leftrightarrow z \rightarrow 0$.
Pozostaje ustalić parametr z_0 w (60), by G zerowało się
jednocześnie z F . Zgodnie z (59) warunek na z_0 można
zapisać jako

$$(61) \quad \int_{z_1}^{z_2} G^{1/2} dz = \int_{\vartheta_1}^{\vartheta_2} F^{1/2} d\vartheta,$$

gdzie całkę z lewej strony można wykonać otrzymując jawne wyrażenie zależne od parametru z_0 .

Naturalnym zakresem zmienności ξ i odpowiednio z jest dodatnia półoś \mathbb{R}_+ . Wygodnie jest rozważyć całą płaszczyznę zespoloną dla zmiennej ξ i z . Funkcja podcałkowa w (61) ma cięcia między miejscami zerowymi z_1 i z_2 oraz ich odbiciami względem zera $-z_2$ i $-z_1$ na płaszczyźnie z i podobnie dla ξ_1 i ξ_2 na płaszczyźnie ξ . W $z = 0$ mamy osobliwość. Sytuację przedstawia rys. 7.



Rys. 7. Kontury całkowania w warunku na z_0 .

Całka

$$\int_{z_1}^{z_2} G^{1/2} dz$$

Sprowadza się do obliczenia całki

$$2 \int_{z_1}^{z_2} G^{1/2} dz = \oint_{C_1} G^{1/2} dz$$

Wygodniej jest obliczać całkę (która wyraża się przez \oint_{C_1})

$$\oint_C G^{1/2} dz,$$

gdź wystarczy badać tylko punkt w nieskończoności.

Oczywiście należy obliczyć tę samą całkę po obu stronach (61).

Otrzymujemy w ten sposób, wyliczając jawnie lewą stronę, warunek na z_0

$$(62) \quad -\frac{z_0^2}{2} = \frac{1}{2\pi i} \oint_C F^{1/2} d\zeta,$$

gdzie kontur C na płaszczyźnie ζ przebiega identycznie jak na rys. 7. Zależność (62) wyznacza G dane przez (60), co łącznie z (59) ustala jednoznacznie transformację (55-56).

W ten sposób zastąpiliśmy wyjściowe równanie (18) równaniem pomocniczym (related equation, comparison equation)

$$(63) \quad \frac{d^2 \phi}{dz^2} + [V^2(z_0^2 - z^2) + \frac{M}{z^2}] \phi = 0,$$

zgodnie z (54), asymptotycznie dla $V \rightarrow \infty$ (przybliżamy (56) przez (58)).

Równanie (63) jest postaci (5.8.6) w monografii Slatera [39] i zgodnie z (5.8.7)_w[39] jego rozwiązanie może być wyrażone przez funkcję Whittakera lub na podstawie (1.6.5) z [39] przez konfluentną funkcję hipergeometryczną.

Otrzymujemy w ten sposób

$$(64) \quad \phi(z) = A z^{m+1/2} e^{-Vz^2/2} F(-\nu, m+1, Vz^2),$$

gdzie

$$-\nu = \frac{1}{2} + \frac{m}{2} - \frac{Vz_0^2}{4}$$

czyli

$$(65) \quad Vz_0^2 = 2(2\nu + m + 1),$$

zaś A jest dowolną stałą wynikającą z przyjętego warunku unormowania na ϕ . Można to sprawdzić bezpośrednim rachunkiem podstawiając (64) do (63), co prowadzi do równania konfluentnego, hipergeometrycznego na $F(x)$, $x = Vz^2$.

Korzystając z definicji uogólnionej funkcji Laguerra [39]

$$L_{\nu}^{(m)}(x) = \frac{\Gamma(1+\nu+m)}{\Gamma(1+\nu)\Gamma(1+m)} F(-\nu, m+1, x)$$

możemy nasze rozwiązanie przedstawić w postaci

$$(66) \quad \phi(z) = B z^{m+1/2} e^{-Vz^2/2} L_{\nu}^{(m)}(Vz^2),$$

gdzie B stała, do wyznaczenia z warunku unormowania.

Po sprowadzeniu (63) do równania konfluentnego, wybieramy rozwiązanie $F(a, b, x)$ dające (64), gdyż drugie liniowo niezależne rozwiązanie

$$x^{1-b} F(a-b+1, 2-b, x)$$

ma w $x=0$ punkt osobliwy ($1-b = 1-m-1 = -m < 0$) i otrzymana stąd funkcja ϕ nie spełniałaby warunku brzegowego w zerze (17).

Wyrażenia (64) i (66) dają jednolite asymptotyczne przedstawienie modów (łącznie z (14)) w cylindrycznym światłowodzie o dowolnym profilu typu (7) w pierwszym rzędzie w parametrze $V \rightarrow \infty$ (pominięcie członu $\frac{1}{V^2} \{g, z\}$ w (56) prowadzące do (58)).

5. Równanie na wartości własne

Warunek na wartości własne otrzymujemy wstawiając znaną funkcję własną (66) do warunku brzegowego (15). Rozwiązanie (66) zostało wyrażone przy pomocy zmiennej z natomiast warunek brzegowy (15) był sformułowany przy pomocy zmiennej ϱ . Trzeba zatem wyrazić warunek brzegowy (15) przy pomocy zmiennej z (można postąpić odwrotnie). Punktowi $\varrho=1$ w (15) odpowiada $z = z_3$, zgodnie z (59)

$$(67) \quad \int_{z_2}^{z_3} G^{1/2} dz = \int_{\varrho_2}^1 F^{1/2} d\varrho$$

Wybór warunku początkowego w $z_2 \longleftrightarrow \varrho_2$ jest nieistotny. Warunek brzegowy przyjmie postać

$$(68) \quad \left. \frac{i}{\phi} \frac{d\phi}{dz} \right|_{z=z_3} \sim \text{http://rcin.org.pl}$$

gdzie \tilde{K} nowa stała zmodyfikowana przez zamianę zmiennych

$$(69) \quad \tilde{K} = \left(\frac{dz}{d\varphi} \right)^{-1} \left[K - \left(\frac{dz}{d\varphi} \right)^{1/2} \frac{d}{d\varphi} \left(\frac{dz}{d\varphi} \right)^{-1/2} \right]$$

Stała K jest dana wzorem (16) zaś pochodne $\frac{d}{d\varphi}$ obliczamy w $\varphi = 1$.

Postać warunku na wartości własne zależy od postaci rozwiązania ϕ , które podstawimy do (68). Będziemy dążyć do równania na wartości własne najbardziej przypominającego odpowiednie równanie dla przybliżenia WKB - porównaj (40). W ten sposób będziemy mogli potraktować rozwiązania WKB jako pierwsze przybliżenie i zastosować procedurę iteracyjną.

Rozwiązanie (66) przedstawimy jako kombinację liniową dwóch liniowo niezależnych rozwiązań równania (63) ϕ_1 i ϕ_2

$$(70) \quad \phi = A_1 \phi_1 + A_2 \phi_2$$

W ogólności istnieją dwa liniowo niezależne rozwiązania (63) spełniające warunek brzegowy w zerze (17). Użycie funkcji konfluentnych prowadziło do wyeliminowania jednej z nich.

Funkcje ϕ_1 i ϕ_2 określimy z żądania, by w sytuacji, gdy jest słuszne przybliżenie WKB, przechodziły one asymptotycznie w rozwiązania WKB (28a)

$$(71) \quad \begin{cases} \phi_1 \sim G^{-1/4} \exp \left[-V \int_{z_2}^{z_3} G^{1/2} dz \right] \\ \phi_2 \sim 2 G^{-1/4} \exp \left[V \int_{z_2}^{z_3} G^{1/2} dz \right] \end{cases} \quad \text{dla } V \rightarrow \infty$$

Przybliżenie WKB (71) jest słuszne daleko od odcięcia $(U^2 \neq V^2)$ tzn. gdy punkt zwrotny z_2 jest położony daleko od interesującego nas teraz punktu brzegowego z_3 (ρ_2 i $\rho_1 = 1$ odpowiednio). Można wówczas zastosować transformację Liouville'a - Greena (23) w miejsce transformacji Langer-Olvera (55-56) otrzymując rozwiązania postaci (71).

Trzeba zatem rozwinąć rozwiązanie ϕ (66) asymptotycznie (niejednolicie) dla $V \longrightarrow \infty$ otrzymując

$$A_1 G^{-1/4} \exp\left[-V \int_{z_2}^{z_3} G^{1/2} dz\right] + A_2 2 G^{-1/4} \exp\left[V \int_{z_2}^{z_3} G^{1/2} dz\right].$$

Znajdziemy w ten sposób funkcje ϕ_1 , ϕ_2 i współczynniki A_1 , A_2 .

Wykorzystamy rachunki przeprowadzone w uzupełnieniu pracy Arnol'da [2]. Zostało tam pokazane, że

$$(72) \quad 2^m e^{-Vz^2/2} L_{\nu}^{(m)}(Vz^2) = \frac{1}{2\pi i} \left[e^{-i\nu\pi} W_1(Vz^2) + e^{i\nu\pi} W_2(Vz^2) \right] \\ = \frac{1}{2\pi i} \left[\cos(\nu\pi) W_3 + i \sin(\nu\pi) W_4 \right],$$

gdzie

$$(73) \quad W_3 = W_1 + W_2, \quad W_4 = W_2 - W_1,$$

zaś

$$(74) \quad W_{1,2}(Vz^2) = \int_{C_{1,2}} \left(\frac{1+s}{1-s} \right)^{\nu+(m+1)/2} (1-s^2)^{(m-1)/2} e^{-sVz^2/2} ds,$$

kontur całkowania C_1 prowadzi od $s = -1$ do $s = \infty e^{i\varphi}$, $\varphi > 0$,
zaś C_2 jest odbiciem C_1 względem osi rzeczywistej ze zmianą kierunku.

Metodą punktu siodłowego zostało znalezione zachowanie asymptotyczne dla W_i przy $V \rightarrow \infty$, $U^2 \neq V^2$ (daleko od odcięcia) - wzory (A.14 - 16) w [2].
Z porównania tych wzorów z (71) otrzymujemy (należy pamiętać, że $G^{1/2} \approx (z^2 - z_0^2)^{1/2}$ dla $V \rightarrow \infty$ i $z \neq 0$)

$$(75) \quad \begin{cases} \phi_1 = -i A' z^{m+1/2} W_3 \\ \phi_2 = -A' z^{m+1/2} W_4 \end{cases}$$

Na podstawie (75), (72) i (66) dostajemy ostatecznie

$$(76) \quad \phi = A_0 (\cos(\nu\pi)\phi_1 - \sin(\nu\pi)\phi_2),$$

gdzie A_0 stała wynikająca z unormowania, zaś funkcje ϕ_1 , ϕ_2 są dane wzorami (75), (73) i (74).

W pobliżu odcięcia ($U^2 \approx V^2$), gdy punkt zwrotny Z_2 (kaustyka) zlewa się z punktem brzegowym Z_3 - przypadek ten został rozważony w pracy Arnolda [3] - funkcje ϕ_1 i ϕ_2 przechodzą asymptotycznie ($V \rightarrow \infty$) w funkcje Airy'ego - odpowiednio A_i i B_i tak jak należało oczekiwać, gdyż wówczas słuszna jest transformacja Langer'a (43), (47).

Zatem postać rozwiązania (76) dająca jednolite asymptotyczne rozwinięcie dla modów jest szczególnie wygodna, gdyż otrzymujemy z niej natychmiast przypadki szczególne - niejednolite asymptotyki WKB z dala od punktów zwrotnych lub funkcje Airy'ego w otoczeniu punktów zwrotnych.

Podstawienie (76) do warunku brzegowego (68) daje (primem oznaczamy różniczkowanie $\frac{d}{dz}$)

$$A_0 [\cos(\nu\pi) \phi_1'(z_3) - \sin(\nu\pi) \phi_2'(z_3)] = \tilde{K} A_0 [\cos(\nu\pi) \phi_1(z_3) - \sin(\nu\pi) \phi_2(z_3)],$$

skąd

$$\cos(\nu\pi) [\phi_1'(z_3) - \tilde{K} \phi_1(z_3)] = \sin(\nu\pi) [\phi_2'(z_3) - \phi_2(z_3)],$$

czyli

$$(77) \quad \operatorname{tg}(\nu\pi) = \frac{\phi_1'(z_3) - \tilde{K} \phi_1(z_3)}{\phi_2'(z_3) - \tilde{K} \phi_2(z_3)}.$$

Otrzymaliśmy równanie na parametr ν . Jego rozwiązanie (okresowość tangensa) wynosi

$$(78) \quad \nu = \frac{\Theta}{\pi} + q, \quad q - \text{całkowite},$$

gdzie

$$(79) \quad \Theta = \operatorname{arctg} \frac{\phi_1'(z_3) - \tilde{K} \phi_1(z_3)}{\phi_2'(z_3) - \tilde{K} \phi_2(z_3)}.$$

Ponieważ, zgodnie z (62) i (65)

$$2\nu + m + 1 = -\frac{V}{2\pi i} \oint_C F^{1/2} d\varphi$$

więc (78) prowadzi do następującego równania na wartości własne

$$(80) \quad -\frac{V}{2\pi i} \oint_C F^{1/2} d\varphi = 2q + m + 1 + \frac{2\Theta}{\pi},$$

gdzie q - całkowite, a Θ dane wzorem (79). Wstawiając jawną postać F (19) otrzymujemy ostatecznie

$$(81) \quad -\frac{1}{2\pi i} \oint_C \left(V^2 f - U^2 - \frac{1/4 - m^2}{\varrho^2} \right)^{1/2} d\varphi = 2q + m + 1 + \frac{2\Theta}{\pi}.$$

Jeśli położyć $\Theta = 0$, to (81) przejdzie w (40). Otrzymamy przybliżenie WKB. Trzeba tylko całkować po tym samym konturze w obu przypadkach (w (40) mieliśmy $\int_{P_1}^{\varrho^2} = \frac{1}{2} \oint_{C_1}$). Θ w (81) opisuje wpływ płaszcza światłowodu, który się ujawnia w postaci warunku brzegowego dla $\varphi=1$. Skomplikowane wyrażenie na Θ , zawierające w sobie zależność od szukanej wartości własnej U^2 (stała K zależy od U^2) jest źródłem złożoności równania (81). W związku z tym, w ogólnym przypadku, efektywne jest tylko rozwiązywanie numeryczne (81).

Nasuwa się naturalny schemat procedury iteracyjnej. Zaczynamy od zerowego przybliżenia (WKB); kładąc $\Theta = 0$ po prawej stronie (81). Wyznaczona z tak uproszczonego równania

wartość $U_0^2 = U_{wKB}^2$ służy nam do obliczenia prawej strony równania (81) - $\Theta(V)$. Rozwiązujemy otrzymane w ten sposób równanie i dostajemy pierwsze przybliżenie U_1^2 , które z kolei wstawiamy do wzoru na Θ znajdując dokładniejszą postać prawej strony (81). Rozwiązujemy otrzymane równanie, co daje drugie przybliżenie U_2^2 itd.

W odróżnieniu od innych metod numerycznych nie musimy, dla znalezienia wartości własnej, wyznaczać punkt po punkcie funkcji własnej, co pochłonęłoby dużo czasu pracy komputera (zwłaszcza gdy funkcja własna ϕ , jest szybko zmienna dla dużych V).

Przyjmując dodatkowe założenia upraszczające, jak np. kształt profilu bliski parabolicznego, możemy otrzymać analityczne rozwiązania przybliżone równania (81) opisujące jakościowo sytuację w rozważanych przypadkach [2], [3].

Jak już wspominaliśmy z dala od odcięcia lub blisko odcięcia możemy przybliżyć funkcje ϕ_1 i ϕ_2 , określające Θ zgodnie z (79), przez (71) lub przez funkcje Airy'ego. Jednak tak uproszczone równanie (81) jest nadal bardzo skomplikowane.

6. Opóźnienie grupowe

Ważnym parametrem światłowodów wielomodowych jest opóźnienie grupowe zdefiniowane następującym wzorem

$$(82) \quad \tau = L \frac{d\beta}{d\omega},$$

gdzie L - długość światłowodu, β - stała propagacji (9),
 ω - częstość kołowa (zauważamy, że $v_{gr} = 1 / \left(\frac{d\beta}{d\omega} \right)$).

Jak wyjaśniono we wstępie minimalizacja opóźnienia grupowego jest głównym problemem dla światłowodów wielomodowych.

Zgodnie z (10) stała propagacji β jest wyznaczona przez wartość własną U^2 . Jednakże w ogólnym przypadku nie znamy analitycznego wyrażenia na $U^2(\omega)$ (wyniki numeryczne).

Wyznaczenie numeryczne $U^2(\omega)$ (punkt po punkcie) dla obliczenia $d\beta/d\omega$ byłoby niezwykle pracochłonne. Postąpimy inaczej [1].

Oznaczmy

$$(83) \quad D(\omega, \beta(\omega)) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C (V^2 f - U^2 - \frac{1/4 - m^2}{g^2})^{1/2} d\beta + 2q + m + 1 + \frac{2\theta}{\pi} = 0$$

Obliczymy różniczkę zupełną

$$0 = \frac{dD}{d\omega} = \frac{\partial D}{\partial \omega} + \frac{\partial D}{\partial \beta} \frac{d\beta}{d\omega}$$

skąd otrzymujemy wzór na opóźnienie grupowe na jednostkę długości światłowodu

$$(84) \quad \frac{d\beta}{d\omega} = - \frac{\partial D}{\partial \omega} / \frac{\partial D}{\partial \beta}$$

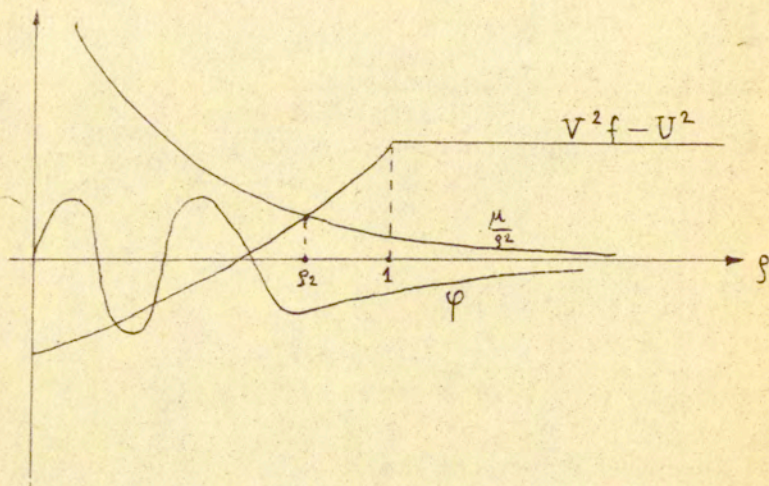
Wykonując formalnie $\frac{\partial D}{\partial \omega}$ (jawna zależność od ω dana jest przez unormowaną częstość V^2 (10)) oraz $\frac{\partial D}{\partial \beta}$ (zależność od β wynika zgodnie z (10) z zależności od U^2) otrzymujemy wyrażenia analityczne, które obliczamy numerycznie.

7. Przypadek $m = 0$ - mody osiowo symetryczne.

Do tej pory rozważaliśmy przypadek $\mu < 0$ czyli $m \gg 1$ tzn. pomijaliśmy mody z $m = 0$, w szczególności „mod podstawowy”, który opisuje „pracę jednomodową” (dla $V \rightarrow \infty$).

Dla $m = 0$ ($\mu = \frac{1}{4} > 0$) mamy tylko jeden punkt zwrotny g_2 (zerowanie się $V^2 f = V^2 f - U^2 - \frac{m}{g^2}$)

co ilustruje rys. 8 (porównaj z rys. 4).



Rys. 8. Przypadek $\mu = 1/4$ ($m=0$).

Warunek brzegowy w zerze (17) przyjmuje teraz postać

$$(85) \quad \varphi \underset{\rho \rightarrow 0}{\sim} \rho^{1/2},$$

co zgadza się z interpretacją fizyczną, gdyż pole $E = a^{-1/2} \rho^{-1/2} \phi$ (10) przyjmuje wówczas dla $\rho = 0$ wartość skończoną, różną od zera.

Przy rozwiązywaniu zagadnienia własnego (18) postępujemy identycznie jak w przypadku wielomodowym. Ponieważ teraz F ma tylko jedno miejsce zerowe ρ_2 , należy wybrać inną niż (60) funkcję G , która też musi mieć tylko jedno miejsce zerowe.

Przyjmujemy

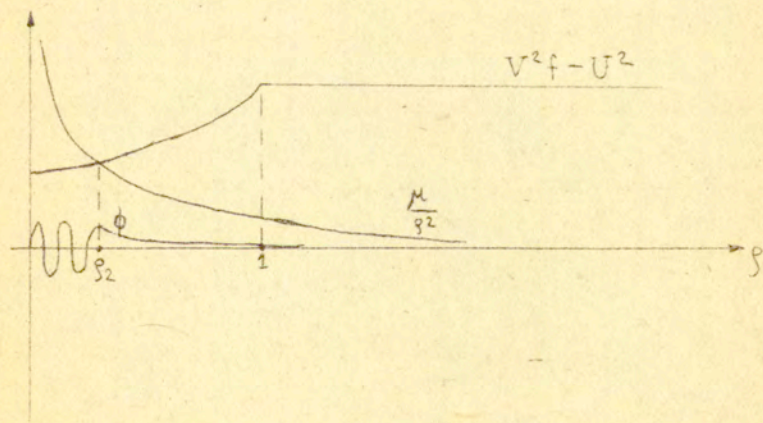
$$(86) \quad G = z_0 - \frac{1}{4V^2 z^2}$$

kierując się wygodą - prostotą otrzymanego w ten sposób równania pomocniczego. Inny możliwy wybór to

$$G = z - z_0 - \frac{1}{4V^2 z^2}$$

Nadmierne uproszczenie funkcji G może prowadzić do zbyt małej dokładności rozwiązania ϕ, U^2 ze względu na złe przybliżenie przebiegu funkcyjnego F przez G , zwłaszcza dla skończonych wartości V występujących w praktyce.

Wyrażenie (86) mimo swej prostoty nieźle aproksymuje przebieg $F(\xi)$ dla dużego V szczególnie w przypadku jednomodowym. Wówczas dla ograniczonego $U^2 < \infty$ przy $V \rightarrow \infty$ punkt zwrotny zbliża się do zera $\beta_2 \rightarrow 0$. Zważa się "jama potencjału, w której złapany jest stan związany" - rozwiązanie oscylacyjne. Patrz rys. 9.



Rys. 9. Przypadek jednomodowy ($m = 0$, $U^2 = U^2_{\min}$).

W tej sytuacji decyduje obszar bliski $\varrho = 0$, gdzie dominujący wpływ ma wyraz $1/4\varrho^2$, który jest dokładnie odtwarzany przez $1/4z^2$.

Wyrażenie (86) prowadzi (55-56) do następującego równania pomocniczego

$$(87) \quad \frac{d^2\phi}{dz^2} - \left[V^2 z_0 - \frac{1}{4z^2} \right] \phi = 0$$

Postać asymptotyczna (87) dla $z \rightarrow 0$ (gdzie występuje osobliwość w równaniu)

$$\frac{d^2\phi}{dz^2} + \frac{1}{4z^2} \phi = 0$$

daje

$$(88) \quad \phi \sim z^{1/2} \quad z \rightarrow 0$$

Asymptotyka (88) sugeruje podstawienie $\phi = z^{1/2} Z$, które prowadzi do równania Bessela. Otrzymujemy w ten sposób

$$(89) \quad \phi = z^{1/2} Z_0(iVz).$$

gdzie Z_0 jest kombinacją liniową dwóch dowolnych funkcji cylindrycznych zerowego rzędu (porównaj [40] rozdz. II punkt 2.162 (7) lub [11]).

Warunek brzegowy w zerze (85) $\varphi \sim \varrho^{1/2}$ daje dla ϕ

$$\phi \sim z^{1/2} \quad z \rightarrow 0$$

gdyż $\left(\frac{dz}{d\xi}\right)_{\xi \rightarrow 0} \rightarrow 1$. Tylko funkcja J_0 ($J_0(z) \xrightarrow{z \rightarrow 0} 1$) zapewnia spełnienie przez (89) tego warunku. Ostatecznie otrzymujemy asymptotyczne wyrażenie na mody dla $m=0$

$$(90) \quad \phi(z) = z^{1/2} J_0(iVz).$$

Pozostałe postępowanie, tzn. otrzymanie stałej Z_0 oraz wyprowadzenie równania na wartości własne, przebiega identycznie jak dla $m \gg 1$.

Funkcja Bessela wyraża się przez konfluentną funkcję hipergeometryczną

$$J_0(x) = e^{-ix} F\left(\frac{1}{2}, 1, 2ix\right),$$

skąd inna postać ϕ

$$\phi(z) = z^{1/2} e^{Vz} F\left(\frac{1}{2}, 1, -2Vz\right).$$

8. Podsumowanie

Przedstawiona metoda analizy asymptotycznej propagacji w cylindrycznym światłowodzie jest prosta i bardzo efektywna. Zachowuje poglądowy charakter metody WKB i jednocześnie pozwala uzyskać dowolną dokładność (po uwzględnieniu wyższych rzędów rozwinięcia względem V^{-1} dla $V \rightarrow \infty$). Jest szczególnie wygodna i skuteczna w przypadku obliczeń numerycznych. W szczególnych przypadkach [2], [3], [5], [6] daje oszacowania analityczne uzupełniające przybliżenie WKB.

W pracach [5], [6] Arnold badał przypadek światłowodu planarnego. Problem ten jest prostszy ze względu na brak osobliwości dla $\xi=0$ w równaniu własnym typu (18).

Przedstawiona została tam metoda znajdowania wyższych rzędów rozwinięcia względem V^{-1} . Polega ona na pozostawieniu w (56) członu $V^{-2} \{z, \varrho\}$ i potraktowaniu otrzymanego wyrażenia jako równania różniczkowego (nieliniowego!) na $w = \frac{dz}{d\varrho}$. Równanie to rozwiązujemy asymptotycznie dla $V \rightarrow \infty$ stosując iterację. Ze względu na skomplikowany charakter tego równania metoda ta nie jest zbyt efektywna i nawet dla światłowodu planarnego nie daje się przeprowadzić do końca w ogólnym przypadku. Lepszą wydaje się wspomniana wyżej metoda Olvera, w której do (56) wstawiamy asymptotyczne rozwinięcia potęgowe z wydzielonymi funkcjami specjalnymi znalezionymi w najniższym rzędzie. Ogólnie, z powodu tych komplikacji oraz trudności oceny liczby dobrych wyrazów rozwinięcia asymptotycznego dla skończonego parametru V , lepiej jest dobrze wybrać funkcję G by otrzymać wystarczającą dokładność bez uwzględniania wyższych rzędów rozwinięcia.

Osobliwość w zerze $\varrho = 0$ w równaniu (18) można wyeliminować dokonując podstawienia [1]

$$\varrho = a e^{\eta},$$

które przeprowadza (18) w

$$\frac{d^2 \varphi}{d\eta^2} - V^2 \varrho^2 F \varphi = 0.$$

Wyrażenie $V^2 \varrho^2 F = V^2 \{ a^2 e^{2\eta} - U^2 a^2 e^{2\eta} - \mu$ jest nieosobliwe dla $\varrho = 0$ ($\eta = -\infty$). W ten sposób można sprowadzić analizę światłowodu cylindrycznego do rozwiązania znalezionego w przypadku światłowodu planarnego (można również postąpić odwrotnie).

Przedstawione w tej pracy metody matematyczne (analiza asymptotyczna równania zwyczajnego drugiego rzędu) daleko wykraczają poza zastosowania w optyce.

9. Literatura

1. H.G. Unger, Planar Optical Waveguides and Fibres, Oxford 1977.
2. I.M. Arnold, J.Phys.A: Math.Gen., 13, 347, /1980/
3. I.M. Arnold, J.Phys.A: Math.Gen., 13, 361, /1980/
4. I.M. Arnold, Radio Science, 16, 511, /1981/
5. I.M. Arnold, J.Phys.A: Math.Gen., 13, 3057, /1980/
6. I.M. Arnold, J.Phys.A: Math.Gen., 13, 3083, /1980/
7. C.N. Kurtz, W. Streifer, IEEE trans. MTT-17 Nr 1, 11; Nr 5, 250, /1969/
8. D. Gloge, Appl.Optics, 10, Nr 10, 2252, /1971/
9. H. Kirchoff, AEU Band 27, Heft 1, 13, /1973/
10. Morishita, Kondoh, Kumagai, IEEE Trans. MTT-28, No 1, 33, /1980/
11. E. Janke, F. Emde, F. Lösch, Tafeln Hoherer Funktionen, Stuttgart 1960
12. D. Ludwig, Comm.Pure Appl.Math.19, 215, /1966/
13. F. Carlini, Recherche sulla convergenza della serie che serve alla soluzione del problema di Keplero, Milan 1817
14. J. Liouville, J. Math.Pures Appl.2, 16, /1837/
15. G. Green, Trans.Camb.Phil.Soc. 6, 457, /1837/
16. A.R. Forsyth, A Treatise on Differential Equations, 6-th ed., Macmilan
17. F.W.J. Olver, Asymptotics and Special Functions, Academic Press, NY, London 1974
18. L.I. Schiff, Mechanika kwantowa, PWN, Warszawa 1977
19. A.S. Dawydow, Mechanika kwantowa, PWN, Warszawa 1967
20. M.W. Fedoruk, Asimptotičeskije metody dla liniejnych obyknobiennych diferencjalnych urawnienij, Moskva 1983
21. R.E. Langer, Trans.Amer.Math.Soc., 33, 23, /1931/
22. A.H. Nayfeh, Perturbation Methods, J.Wiley, N.Y. 1973
23. Lord Rayleigh, Proc.Roy.Soc. London A86, 208, /1912/
24. R. Gans, Ann.Phys.Lpz. 47, 709, /1915/
25. H. Jeffreys, Proc.London Math.Soc./2/ 23, 428, /1924/
26. G. Wentzel, Zeit.f.Physik, 38, 518, /1926/
27. H.A. Kramers, Zeit.f.Physik, 39, 828, /1926/

28. L. Brillouin, Comptes Rendus, 183, 24, /1926/
29. A. Zwaan, Ph.D Thesis, Intensiteten im Ca-Funkenspektrum, Utrecht 1929
30. L.D. Landau, E.M. Lifszyc, Mechanika kwantowa, PWN, Warszawa 1979
31. J.L. Dunham, Phys.Rev. 41, 713, /1932/
32. E.C. Kemble, Phys.Rev. 48, 549, /1935/
33. R.E. Langer, Trans.Amer.Math.Soc. 36, 90, /1934/
34. S.C. Miller, R.H. Good, Phys.Rev.91, No 1, 174, /1953/
35. F.W. Olver, Phil.Trans.Roy.Soc.London Ser.A247, 307, /1954/
36. H. Moriguchi, J. Phys.Soc.Japan, 14, No 12, 1771, /1959/
37. I. Imai, Phys.Rev.74, 113, /1948/, 80, 1112, /1950/
38. F.M. Cherry, J. London Math.Soc.24, 121, /1949/, Trans.Amer. Math.Soc.68, 224 /1950/
39. L.J. Slater, Confluent Hypergeometric Functions, Cambridge 1960
40. E. Kamke, Differentialgleichungen, Leipzig 1959.

10. Spis treści

	str.
1. Wstęp	3
2. Sformułowanie problemu	8
3. Asymptotyczna analiza równania zwyczajnego drugiego rzędu. Metoda WKB.	14
4. Asymptotyczna postać modów w światłowodzie cylindrycznym	32
5. Równanie na wartości własne	38
6. Opóźnienia grupowe	44
7. Przypadek $m = 0$ - mody osiowo symetryczne	45
8. Podsumowanie	49
9. Literatura	51