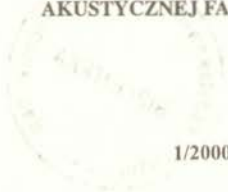


Janusz Wójcik

NIELINIOWE ODBICIE I TRANSMISJA  
AKUSTYCZNEJ FALI PŁASKIEJ



1/2000



P.269

W A R S Z A W A 2 0 0 0

<http://rcin.org.pl>

Praca wpłynęła do Redakcji dnia 21 grudnia 1999 r.

INSTYTUT PODSTAWOWYCH PROBLEMÓW TECHNIKI PAN

**BIBLIOTEKA**

02-100 Warszawa ul. Pawińskiego 5B

Tel. 22-829-74-10



56523

0208.9



Na prawach rękopisu

---

Instytut Podstawowych Problemów Techniki PAN

Nakład 100 egz. Ark. wyd. 1,5 Ark. druk. 1,75

Oddano do drukarni w lutym 2000 r.

---

**ATOS** Poligrafia-Reklama, W-wa, ul. Jana Kazimierza 35/37

## Nieliniowe Odbicie i Transmisja Akustycznej Fali Płaskiej

### Streszczenie.

W pracy analizowane i rozwiązywane jest klasyczne zagadnienie odbicia i transmisji fali płaskiej w opisie nieliniowym. Zakładamy dwa przylegające ośrodki o płaskiej granicy między nimi. Parametry charakteryzujące własności nieliniowe (wykładnik adiabaty lub parametr nieliniowości), absorpcyjne (stłabosygnałowy współczynnik absorpcji) i równowagowe (gęstość, równowagowa prędkość dźwięku) ośrodków mogą doznawać "skoku" na granicy. Na granicę, prostopadłe do niej, pada fala płaska. Zaburzenie w ośrodku pierwszym przedstawiono w postaci superpozycji fali padającej i odbitej, w ośrodku drugim w postaci fali transmitowanej. Na bazie nieliniowych równań akustyki, zakładając ciągłość pól prędkości i ciśnienia wyznaczono operatory odbicia i transmisji prędkości i ciśnienia. Są to operatory nieliniowe względem pola fali padającej. Stwierdzono że, przy powierzchni granicznej powstaje warstwa "odbijająco-transmitująca". Ma ona decydujący wpływ na przebieg i opis zjawiska nieliniowego odbicia i transmisji. Dochodzi w niej do nieliniowego sprzężenia zwrotnego fali odbitej i padającej. Jest to jedna z podstawowych różnic między zjawiskiem nieliniowym i liniowym gdzie takiego sprzężenia nie ma. Jest to omawiane w rozdziale VI. Podano równania fali padającej, odbitej i transmitowanej. W przypadku ośrodków klasycznie lepkich i w obszarach asymptotycznych (poza warstwą odbijającą) są to równania Burgersa. We wnioskach przeprowadzono uzupełniającą dyskusję otrzymanych operatorów i eksperymentalnego znaczenia uzyskanych wyników. Podano przykład efektywnego zastosowania analizy przeprowadzonej w rozdziale VI w rozwiązywaniu zagadnień nieliniowej propagacji w warunkach omawianych w tej pracy.

### I. WSTĘP

Zagadnienie odbicia i transmisji zaburzenia falowego jest jednym z podstawowych problemów teorii propagacji w ośrodkach niejednorodnych. Nawet w liniowym opisie, poza znanymi klasycznymi rozwiązaniami, zagadnienia jakie tu spotykamy są trudne a ich literatura, obszerna [1]. Przeciwnie, w zakresie nieliniowego opisu zjawiska, literatura akustyczna jest niezwykle uboga. Na uwagę zdaniem autora zasługują teoretyczne prace przedstawione w [2] i [3]

oraz eksperymentalne [4],[5]. Stały się one stymulacją do powstania tej pracy. Niemniej jednak autor nie znalazł w literaturze rozwiązania podstawowego zadania – wyznaczenia zaburzeń odbitego i transmitowanego w funkcji zaburzenia o postaci fali płaskiej, padającego prostopadle na płaską granicę między dwoma ośrodkami. Innymi słowami wyznaczenia nieliniowych odpowiedników znanych w teorii liniowej współczynników odbicia i transmisji. Ich postać wynika z równania propagacji i ogólnych warunków ciągłości pól na granicy. Odpowiednia liczba równań i niewiadomych powoduje, że współczynniki te nie mogą być przedmiotem definicji lub być konstruowane na podstawie uogólnień pojęć znanych z teorii liniowej (np. pojęcia impedancji).

Zjawisko którego, teoretycznym opisem zajmujemy się w tej pracy jest składnikiem-często podstawowym- wielu technologii. Na przykład w medycznej diagnostyce ultrasonograficznej ważne informacje otrzymujemy w wyniku detekcji odbić od granic między tkankami. Często równowagowe parametry (impedancje) tych tkanek niewiele się różnią. Powstaje pytanie - mające znaczenie nie tylko w diagnostyce medycznej [4],[5] - w jaki sposób efekty nieliniowe wpływają na ogólny obraz zjawisk odbicia i transmisji, jaki jest ich udział w tych zjawiskach?. Wartość parametrów nieliniowości  $(B/A)$ [11] dla różnych tkanek miękkich zawierają się w przedziale 5-8-11 [6]. Czy ośrodki różniące się tylko tymi parametrami są rozróżniane w zjawisku odbicia i w jaki sposób się to przejawia. Praca ta stanowi próbę teoretycznej odpowiedzi na te ważne z praktycznego punktu widzenia pytania.

## II. SFORMUŁOWANIE ZAGADNIENIA

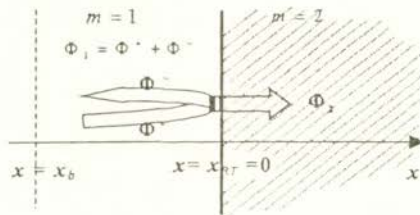
Zakładamy dwa różne ośrodki z płaską granicą między nimi. Parametry i funkcje materiałowe charakterystyczne dla ośrodków będziemy oznaczać górnym albo dolnym indeksem  $m=1,2$  odpowiednio. Ponieważ używać będziemy bezwymiarowego układu zmiennych i parametrów to w celu normalizacji równowagowych parametrów materiałowych zakładamy hipotetyczny ośrodek skalujący o równowagowej gęstości  $\rho_0$  i prędkości dźwięku  $c_0$ . Bezwymiarowa równowagowa gęstość i prędkość dźwięku dane są przez

$$g_{0m} = \rho_{0m} / \rho_0, \quad c_{m0} = c_{0m} / c_0, \quad (1)$$

(oczywiście może być  $\rho_0 = \rho_{01}$ ,  $c_0 = c_{01}$ ).

Zakładamy że, ośrodki są stratne (absorbujące) i nieliniowe względem zaburzenia.

Rysunek 1. Przedstawia omawianą sytuację.



Rys.1 Fale  $\Phi^+$ -padająca,  $\Phi^-$ -odbita i  $\Phi_2$ -transmitowana przez granicę między ośrodkami  $m=1$  i  $m=2$ , znajdującą się w punkcie  $x = x_{RT} = 0$ .

Znaczenie płaszczyzny  $x = x_b$  wyjaśnia się w następnym rozdziale.

Zaburzenie w pierwszym ośrodku jest opisywane przez potencjał akustyczny  $\Phi_1$ . Część jego energii przedostaje się przez granicę w punkcie  $x=0$ , wzbudzając zaburzenie  $\Phi_2$ . Zastosowano następujące reprezentacje zaburzeń w składniku  $m=1$  i  $m=2$ .

$$\Phi_1(x,t) = \Phi^+(t - \frac{x}{c_{10}}, x) + \Phi^-(t + \frac{x}{c_{10}}, -x), \quad (2)$$

$$\Phi_2(x,t) = \Phi_2(t - \frac{x}{c_{20}}, x). \quad (3)$$

Gdzie  $\Phi^+ + \Phi^-$ , interpretujemy jako superpozycje fali padającej i odbitej od granicy. Ponieważ, z definicji  $\mathbf{v} \equiv \nabla\Phi$ , pole prędkości  $\mathbf{v}$  jest liniowe względem potencjału to następujące rozkłady prędkości

$$\begin{aligned} v_1(x,t) &= v^+(t - \frac{x}{c_{10}}, x) + v^-(t + \frac{x}{c_{10}}, -x), \\ v_1 &= \mathbf{e} \cdot \mathbf{v}_1 = \mathbf{e} \cdot \mathbf{v}^+ + \mathbf{e} \cdot \mathbf{v}^-, \quad \mathbf{v}_1 = \mathbf{e} v_1 \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} v_2(x,t) &= v_2(t - \frac{x}{c_{20}}, x), \\ v_2 &= \mathbf{e} \cdot \mathbf{v}_2, \quad \mathbf{v}_2 = \mathbf{e} v_2 \end{aligned} \quad (5)$$

odpowiadają rozkładom (2) i (3),  $\mathbf{e}$  - wersor osi  $x$ . Analogicznie, zastosowano następujące rozkłady ciśnienia akustycznego

$$P_1(x,t) = P^+(t - \frac{x}{c_{10}}, x) + P^-(t + \frac{x}{c_{10}}, -x), \quad (6)$$

$$P_2(x,t) = P_2(t - \frac{x}{c_{20}}, x). \quad (7)$$

Ścisłe mówiąc, związek między ciśnieniem akustycznym i potencjałem wynika z definicji  $\mathbf{v} \equiv \nabla\Phi$  i z ogólnych równań ośrodka ciągłego, i nie jest liniowy.

$$P_1 = P_1[\Phi_1] = P_1[\Phi^+ + \Phi^-] \neq P_1[\Phi^+] + P_1[\Phi^-] = P^+ + P^-. \quad (8)$$

Aczkolwiek,  $P_m \equiv -\rho_m \partial_t$  jest bardzo dobrym przybliżeniem pełnej nieliniowej operacji  $P[\cdot]$ . W DODATKU A podajemy uzasadnienie tego przybliżenia. Niemniej jednak chcemy podkreślić że postać  $P[\cdot]$  nie ma większego wpływu na nasze podstawowe rozwiązania.

Po pierwsze chcemy wyznaczyć związki między  $v^+, v^-, v_2$  i  $P^+, P^-, P_2$  na granicy w  $x=x_{RT}=0$ . Innymi słowami chcemy znaleźć warunki graniczne dla  $v^-, v_2$  i  $P^-, P_2$  na powierzchni między dwoma nieliniowymi i stratnymi ośrodkami. Problem będzie rozwiązany jeśli znajdziemy funkcje (operatory)  $R, T$  takie że,

$$v^- = R'_v[\{m\}, v^+] = R_v[\{m\}, v^+] \circ v^+, \quad (9)$$

$$v_2 = T'_v[\{m\}, v^+] = T_v[\{m\}, v^+] \circ v^+, \quad x = x_{RT} = 0. \quad (10)$$

Gdzie:  $R_v[;]; T_v[;];$  - operatory odbicia i przejścia na granicy, Ogólnie  $\circ$  - oznacza operację charakterystyczną dla operatora. W prawie wszystkich i przez nas rozważanych przypadkach  $\circ \equiv \otimes$  - splot (w dziedzinie czasu lub częstotliwości Fouriera), jednak czasem w szczególnych sytuacjach  $\circ \equiv \cdot$  - zwykle mnożenie;  $\{m\}$  - oznacza zbiór parametrów materiałowych które, charakteryzują składniki.

Po drugie poszukujemy układu równań opisującego ewolucję  $\Phi^+, \Phi^-$  i  $\Phi_2$ .

W liniowym opisie jest to "klasyczny" problem odbicia i transmisji fali płaskiej. W dziedzinie częstotliwości Fouriera

$$\hat{v}^- = \hat{R}_v[\{m\}] \circ \hat{v}^+ = \hat{R}_v[\{m\}] \cdot \hat{v}^+ \quad (13)$$

$$\hat{v}_2 = \hat{T}_v[\{m\}] \circ v^+ = \hat{T}_v[\{m\}] \cdot v^+ \quad (14)$$

$\hat{R}[\{m\}], \hat{T}[\{m\}]$  - współczynniki odbicia i transmisji.

### III. RÓWNANIA PODSTAWOWE

Za bazę opisu przyjmujemy równanie (24) przedstawione w pracy [7]. Równanie to opisuje zaburzenia akustyczne o skończonej amplitudzie w ośrodkach stratnych. W kartezjańskim układzie współrzędnych i dla zaburzeń jednowymiarowych w m-tym ośrodku przyjmuje ono postać

$$c_{m0}^2 \partial_{xx} \Phi_m - \partial_{tt} \Phi_m - 2\mathcal{A}_m \partial_t \Phi_m - q_m \partial_t (\partial_t \Phi_m)^2 = 0 + O((\gamma')^2) \quad (15)$$

$$q_m \equiv q(\gamma_m + 1)/2c_{m0}^2 = q\beta_m/c_{m0}^2, \quad m = 1, 2 \quad (16)$$

Gdzie:  $\gamma_m$  - wykładnik adiabaty albo  $\gamma_m = (B/A)_m + 1$ ,  $(B/A)_m$  oznacza parametr nieliniowości [11],  $q$  - współczynnik nieliniowości (akustyczna liczba Macha),  $O((\gamma')^2)$  - wielkość mała rzędu  $l$ .  $\mathcal{A}_m$  - operator absorpcji typu splotowego. W tej pracy stosuje się jego reprezentacje w dziedzinie czasu, to znaczy

$$\mathcal{A}\Phi \equiv A(t) \otimes \Phi(x, t), \quad (17)$$

$$A(t) = F^{-1}[a(\omega)], \quad (18)$$

gdzie  $a(\omega)$  - słabosygnałowy współczynnik absorpcji (wartość własna  $\mathcal{A}$ , odpowiadająca zaburzeniu o postaci funkcji własnej, funkcji Fouriera o częstotliwości  $\omega$ ),  $F[\cdot]$  - transformacja Fouriera. Dla absorpcji klasycznej (w m-tym ośrodku)  $a(\omega) = \alpha_2^m \omega^2$ ,  $\alpha_2^m$  - bezwymiarowa hybrydowa lepkość,  $\mathcal{A}_m = -\alpha_2^m \partial_{tt} + O(a(q + \alpha))$ . Szczegóły normalizacji, określenie  $\alpha$ , opis równania (15) i operatora absorpcji  $\mathcal{A}$  patrz [7].

Wprowadzamy

$$\tau^+(t, x) = t - \frac{x}{c_{10}}, \quad \tau^-(t, x) = t + \frac{x}{c_{10}} \quad (19)$$



$$\tau_2(t, x) = t - \frac{x}{c_{20}}, \quad x \geq 0 \quad (20)$$

Chcemy zaznaczyć, że także następujący układ argumentów może być zastosowany w  $\Phi^*, \Phi^-, \Phi_2$ .

$$\tau^+(t, x) = t - \frac{|x-x_b|}{c_{10}} = t - \frac{x-x_b}{c_{10}}, \quad x_b \leq x \leq 0, \quad (21)$$

$$\tau^-(t, x) = t - \frac{|x|}{c_{10}} = t + \frac{x}{c_{10}}, \quad x \leq 0, \quad (22)$$

$$\tau_2(t, x) = t - \frac{x}{c_{20}}, \quad x \geq 0. \quad (23)$$

Gdzie  $x_b$  - zadana wartość, lub współrzędna płaszczyzny (punktu) patrz Rys.1, w której dany jest przebieg czasowy  $\Phi^+$  lub  $\Phi^-$  pozostawia ślad czasowy,  $\Phi^+(\tau^+(t, x), x)|_{x=x_b} = \Phi_b^+(t)$ . Argumenty o postaci (21)-(23) są jawnie retardowane w czasie i bardziej odpowiednie dla bardziej złożonego problemu - problem brzegowy dla  $\Phi_1$  w punkcie  $x=x_b$  z propagacją do odbijającej i transmitującej powierzchni  $(x=x_{RT}=0)$ . Niemniej jednak obie postacie argumentów dają w naszym zagadnieniu te same wyniki. Poszukujemy rozwiązania równania (15) o postaci (2) w ośrodku  $m=1$  i o postaci (3) w ośrodku  $m=2$ . Po podstawieniu (3)  $\Phi_2 = \Phi_2(t - \frac{x}{c_{20}}, x) = \Phi_2(\tau_2, x)$  do (15) otrzymujemy

$$c_{20}^2 \left[ \partial_x \Phi_2(\tau_2, x) - \frac{2}{c_{20}} \partial_t \partial_x \Phi_2(\tau_2, x) \right] = 2 \partial_{\tau_2} \mathcal{A}_2 \Phi_2(\tau_2, x) + q_2 \partial_{\tau_2} \left( \partial_{\tau_2} \Phi_2(\tau_2, x) \right)^2, \quad (24)$$

$$(\partial_t - \partial_{\tau_2}) \Phi_2 = 0. \quad (25)$$

Gdzie różniczkowanie względem  $x$  dotyczy teraz tylko drugiego argumentu. Formalnie pełna transformacja zmiennych zawierała by transformacje  $x \rightarrow \xi = x$ . Jednak, by nie kreować nadmiernie nowych symboli pozostajemy przy starych - stąd też powyższa uwaga.

Funkcje  $\tau^{\pm 2}(t, x) = (t \mp x/c_{20})$  stanowią parę charakterystyk operatora d'Alamberta  $\square \equiv c_{m0}^2 \partial_{xx} - \partial_{tt}$ .

Na charakterystykach rozwiązania  $\Phi(t \mp x/c_{m0})$  równania  $\square \Phi = 0$  są stałe. Fizycznie oznacza to wzajemną kompensację szybkich zmian przestrzennych zaburzeń (w skali  $\lambda_0 \equiv 2\pi/k_0$ ) z czasowymi (w skali  $T_0 \equiv 2\pi/\omega_0$ ,  $\omega_0 = c_{m0}k_0$ ). We współrzędnych charakterystycznych  $\partial_x(\Phi(\tau^{\pm 2})) = 0$ . W rozwiązaniach równania zaburzonego członami absorpcyjnymi lub nieliniowymi  $\mathcal{A}(q+\alpha)$  wystąpi zależność od dodatkowej współrzędnej (w naszym przypadku -  $x$ ) o charakterystycznej skali zmienności przestrzennej  $\lambda_{\alpha,q} \equiv \min\{\lambda_0, 1/q\}$ . Z (24) wynika  $\partial_x(\partial_x \Phi_2, \partial_{\tau_2} \Phi_2) \propto \mathcal{O}(q+\alpha)$ . Stąd  $\partial_{xx} \Phi_2 \propto \mathcal{O}(q+\alpha)^2$ . Wykazano to w DODATKU B. Wyrazy tego rzędu zostały już pominięte w (15). Pomijamy je także w (24). Mamy

$$\partial_x \partial_t \Phi_2(\tau_2, x) = -\frac{1}{c_{20}} \partial_t \mathcal{A}_2 \Phi_2(\tau_2, x) - \frac{q_2}{2c_{20}} \partial_t \left( \partial_t \Phi_2(\tau_2, x) \right)^2, \quad \partial_{\tau_2} = \partial_t. \quad (26a)$$

Zakładając zerowe warunki początkowe w odpowiednio dużym otoczeniu  $x=x_{RT}=0$  i całkując (26a) względem czasu, otrzymujemy

$$\partial_x \Phi_2(\tau_2, x) = -\frac{1}{c_{20}} \mathcal{A}_2 \Phi_2(\tau_2, x) - \frac{q_2}{2c_{20}} \left( \partial_{\tau_2} \Phi_2(\tau_2, x) \right)^2, \quad \partial_{\tau_2} = \partial_t, \quad (26b)$$

gdzie:  $\bar{\mathcal{A}}_m = \int \mathcal{A}_m$ ,

$$\int_0^t \mathcal{A}_m \partial_t \Phi dt = \mathcal{A}_m \Phi = \bar{\mathcal{A}}_m \partial_t \Phi, \quad (27)$$

$$\bar{\mathcal{A}}_m \partial_t \Phi = \bar{A}_m(t) \otimes (\partial_t \Phi), \quad \bar{A}_m(t) = \int_0^t A_m(t') dt', \quad (28)$$

$$F[A_m] = a^m(\omega), \quad F[\bar{A}_m] = \bar{a}(\omega) = a(\omega)/(-i\omega) \quad (29)$$

Dla klasycznie absorbującego ośrodka  $\bar{\mathcal{A}}_m = -\alpha_2^m \partial_t$ .

Stosując poprzednio opisane operacje do  $\Phi_1 = \Phi^+ + \Phi^-$ , otrzymujemy

$$\partial_x (\partial_t \Phi^+(\tau^+, x) - \partial_t \Phi^-(\tau^-, -x)) = -\frac{1}{c_{10}} \bar{\mathcal{A}}_1 (\partial_t \Phi^+(\tau^+, x) + \partial_t \Phi^-(\tau^-, -x)) - \frac{q}{2c_{10}} (\partial_t \Phi^+(\tau^+, x) + \partial_t \Phi^-(\tau^-, -x))^2 \quad (30a)$$

$$\partial_x (\Phi^+(\tau^+, x) - \Phi^-(\tau^-, -x)) = -\frac{1}{c_{10}} \bar{\mathcal{A}}_1 (\partial_{\tau^+} \Phi^+(\tau^+, x) + \partial_{\tau^-} \Phi^-(\tau^-, -x)) - \frac{q}{2c_{10}} (\partial_{\tau^+} \Phi^+(\tau^+, x) + \partial_{\tau^-} \Phi^-(\tau^-, -x))^2, \quad (30b)$$

$$(\partial_{\tau^+} - \partial_t) \Phi^+ = 0, \quad (\partial_{\tau^-} - \partial_t) \Phi^- = 0. \quad (31)$$

Zwraca się uwagę że, superpozycja  $\Phi^+ + \Phi^- = \Phi_1$ , staje się tu liniową superpozycją,  $\Phi^+$  i  $\Phi^-$ , tylko wtedy gdy założymy: **1)**  $q = 0$  (powyższe równania stają się liniowe- liniowy opis ośrodka) i **2)** funkcje  $\Phi^+$  i  $\Phi^-$ , każda oddzielnie, spełniają to samo równanie liniowe ((15) lub z niego wynikające po podstawieniu  $\Phi^+$  albo  $\Phi^-$ ). Wyniki odpowiadające założeniu **1)** otrzymuje się w tej pracy jako przypadek szczególny. Ponadto część z nich uzyskać można bez założenia **2)**. Równania (26) i (30) są równoważne (15) (z dokładnością do wyrazów  $\mathcal{O}(\alpha(q+\alpha))$ ) odpowiednio w ośrodku  $m=2$  i  $m=1$ . To znaczy jeśli  $\Phi_2$  spełnia (26a) a  $\Phi^+$  i  $\Phi^-$  spełniają (30a) to  $\Phi_1 = \Phi^+ + \Phi^-$  i  $\Phi_2$  spełniają (15). Przy zerowych warunkach początkowych dla potencjałów i ich pierwszych pochodnych względem czasu równania (26a) i (30a) są równoważne (26b) i (30b). Natomiast jeśli funkcje  $\Phi_2$ ,  $\Phi^+$ ,  $\Phi^-$ , spełniają (26b) i (30b) to spełniają także (26a) i (30a). Równanie (30b) można interpretować jako całkę względem czasu dwóch nieliniowo sprzężonych uogólnionych (z uwagi na wyraz absorpcyjny) równań Burgersa [11],[12] (coupled equation- równanie "pary" ( $\Phi^+ + \Phi^-$ )). Dla założonych postaci rozwiązań  $\Phi^+$ ,  $\Phi^-$ ,  $\Phi_2$ , odpowiednie ciśnienia akustyczne i prędkości przyjmują postać,

$$P^+ = -g_{01} \partial_t \Phi^+ = -g_{01} \partial_{\tau^+} \Phi^+, \quad (32)$$

$$P^- = -g_{01} \partial_t \Phi^- = -g_{01} \partial_{\tau^-} \Phi^-, \quad (33)$$

$$P_2 = -g_{02} \partial_t \Phi_2 = -g_{02} \partial_{\tau_2} \Phi_2, \quad (34)$$

Jak łatwo zauważyć rozwiązania równań (26a) i (30a) mogą być wyrażone za pomocą ciśnień, podobnie jak rozwiązania równania (15).



$$v^+ = -\frac{1}{c_{10}} \partial_t \Phi^+ + \partial_x \Phi^+ = -\frac{1}{c_{10}} \partial_{t'} \Phi^+ + \partial_x \Phi^+ = \frac{P^+}{z_{01}} + \partial_x \Phi^+, \quad (35)$$

$$v^- = \frac{1}{c_{10}} \partial_t \Phi^- + \partial_x \Phi^- = \frac{1}{c_{10}} \partial_{t'} \Phi^- + \partial_x \Phi^- = -\frac{P^-}{z_{01}} + \partial_x \Phi^-, \quad (36)$$

$$v_2 = -\frac{1}{c_{20}} \partial_t \Phi_2 + \partial_x \Phi_2 = -\frac{1}{c_{20}} \partial_{t_2} \Phi_2 + \partial_x \Phi_2 = \frac{P_2}{z_{02}} + \partial_x \Phi_2. \quad (37)$$

Gdzie  $z_{0m} \equiv g_{0m} c_{m0}$ , - impedancje równowagowe.

Z (35)-(37) otrzymujemy

$$P^+ = z_{01}(v^+ - \partial_x \Phi^+) \quad , \quad (38)$$

$$P^- = -z_{01}(v^- - \partial_x \Phi^-) \quad , \quad (39)$$

$$P_2 = z_{02}(v_2 - \partial_x \Phi_2) \quad . \quad (40)$$

Funkcje  $\partial_t \Phi^+, \partial_x \Phi^-, \partial_x \Phi_2$  odróżniają związki "impedancyjne" (38)-(40) ośrodka stratnego lub nieliniowego od związkw impedancyjnych idealnego ośrodka liniowego

#### IV. RÓWNANIA I WARUNKI CIĄGŁOŚCI

W tym i następnym rozdziale wszystkie funkcje i związki rozpatruje się na granicy między ośrodkami  $m=1$  i  $m=2$ . Na tej powierzchni w punkcie  $x = x_{RT} = 0$  wszystkie funkcje i związki zależą tylko od czasu  $t$ , i w szczególności  $\partial_t = \partial_{t'} = \partial_{t_2} = \partial_{t_2}$ . Zachowujemy także poprzedni układ oznaczeń.

Przyjmujemy warunki ciągłości w konwencjonalnej postaci, to jest

$$P_1 = P_2 \quad , \quad (41)$$

$$v_1 = v_2 \quad , \quad \text{dla } x = x_{RT} = 0 \quad . \quad (42)$$

Na podstawie A17 możemy zastosować w (41) rozkłady (6)-(7). Następnie stosujemy (38)-(40) w celu redukcji  $P^+, P^-, P_2$  z (41). Do (42) podstawiamy rozkłady (4)-(5). Po opisanych operacjach (41-42) uzyskują postać

$$z_{01}((v^+ - v^-) - \partial_x(\Phi^+ - \Phi^-)) = z_{02}(v_2 - \partial_x \Phi_2), \quad (43)$$

$$v^+ + v^- = v_2 \quad . \quad (44)$$

Potrzebne wyrazy  $\partial_x(\Phi^+ - \Phi^-)$ ,  $\partial_x \Phi_2$  otrzymujemy z (26b) i (30) w drodze przejścia granicznego  $x \rightarrow (x_{RT}^{\leq}, x_{RT}^{\geq})$ ,  $x = x_{RT}$ .

$$(\partial_x \Phi^+ - \partial_x \Phi^-) = \frac{1}{z_{01}} \bar{\mathcal{A}}_1 (P^+ + P^-) - \frac{q_1 c_{10}}{2z_{01}^2} (P^+ + P^-)^2 + O((q + \alpha)^2), \quad (45)$$

$$\partial_x \Phi_2 = \frac{1}{z_{02}} \bar{\mathcal{A}}_2 P_2 - \frac{q_2 c_{20}}{2z_{02}^2} P_2^2 + O((q+\alpha)^2). \quad (46)$$

Na bazie (38)-(40) i z tą samą dokładnością mamy

$$(\partial_x \Phi^+ - \partial_x \Phi^-) = \bar{\mathcal{A}}_1 (v^+ - v^-) - \frac{q_1 c_{10}}{2} (v^+ - v^-)^2 + O((q+\alpha)^2), \quad (47)$$

$$\partial_x \Phi_2 = \bar{\mathcal{A}}_2 v_2 - \frac{q_2 c_{20}}{2} v_2^2 + O((q+\alpha)^2). \quad (48)$$

Podstawiając (47),(48) do (43) i wykorzystując (44) otrzymujemy

$$[z_1 + z_2 + w \cdot v^+] v^- = [z_1 - z_2 + \frac{1}{2} u \cdot v^+] v^+ + \frac{1}{2} u \cdot (v^-)^2. \quad (49)$$

Gdzie:  $z_1, z_2$  - operatory liniowej impedancji

$$z_m \equiv z_{0m} (1 - \bar{\mathcal{A}}_m), \quad m=1,2, \quad (50)$$

$$w \equiv N_1 + N_2 = z_{01} c_{10} q_1 + z_{02} c_{20} q_2, \quad (51)$$

$$u \equiv N_1 - N_2 = z_{01} c_{10} q_1 - z_{02} c_{20} q_2. \quad (52)$$

W ogólności (49) (z powodu absorpcji) może być różniczkowo-całkowym nieliniowym równaniem w dziedzinie czasu, albo nieliniowym równaniem spłotowym w dziedzinie częstotliwości Fouriera (po transformacji Fouriera (49)). Najprostszy przypadek uwzględniający jednak absorpcję otrzymujemy zakładając absorpcje klasyczną  $\bar{\mathcal{A}}_m = -\alpha_2^m \partial_t$  dla obu ośrodków. Wtedy (49) jest równaniem Riccatiego.

## V. OPERATORY ODBICIA I TRANSMISJI

Abstrakcyjne (symboliczne) rozwiązanie (49) może być przedstawione następująco

$$v^-(t) = R_v[\{m\}, v^+] v^+(t), \quad (53)$$

$$R_v[\{m\}, v^+] \equiv \frac{1}{2w \circ R_0 v^+} \left[ 1 - \sqrt{1 - 4w \circ R_0 v^+} \right] R_0. \quad (54)$$

Gdzie  $w = w[\{m\}, v^+]$ ,  $R_0 = R_0[\{m\}, v^+]$  - operatory nieliniowe względem  $v^+$ ,

$$w[\{m\}, v^+] \equiv \frac{\frac{1}{2} u \cdot}{z_1 + z_2 + w \cdot v^+}, \quad (55)$$

$$R_0\{m; v^+\} \equiv \frac{z_1 - z_2 + \frac{1}{2}uv^+}{z_1 + z_2 + wv^+} \quad (56)$$

Znak + przed pierwiastkiem kwadratowym w (54) został pominięty jako dający egzotyczne rozwiązanie, które nie posiada znanej liniowej postaci asymptotycznej (gdy  $q_m \rightarrow 0$ ). Ponieważ  $w \leq o(q)$  to pierwiastek kwadratowy w formule (54) może być przedstawiony w postaci szeregu potęgowego, otrzymujemy zatem

$$R_v\{m; v^+\} = [1 + w \circ (R_0 v^+) \cdot + \dots] R_0 \quad (57)$$

$$T_v\{m; v^+\} = 1 + R_v\{m; v^+\}. \quad (58)$$

Rozwinięcie (57) możemy także otrzymać w wyniku zastosowania do (49) metody kolejnych przybliżeń. Metoda i przykład faktoryzacji operatorów  $w[\cdot]$  i  $R_0[\cdot]$  przedstawiono w DODATKU C.

Zakładając nieobecność absorpcji (lub jej małość) otrzymujemy prosty przypadek faktoryzacji. Wtedy  $w[\cdot]$  i  $R_0[\cdot]$  faktoryzują się jako zwykłe funkcje a formuły (54), (57) dają rozwiązania faktyczne,  $\circ = \cdot$  w dziedzinie czasu. W tym przybliżeniu wpływ nieciągłości parametrów absorpcji na zaburzenie - absorpcyjne odbicie i transmisja, jest pomijany. Efekt ten  $O(\alpha)$  jest opisywany w liniowej teorii. Także pomijany jest kombinowany efekt drugiego rzędu  $O(q\alpha)$ . Efekty tego rzędu nie są przedstawiane jawnie w tej pracy od samego początku. W takim razie przybliżenie to skupia się na efektach tylko  $O(1+q)$ , w szczególności na nieliniowych, generowanych przez przestrzenną nieciągłość parametrów równowagowych lub nieliniowych. Zastosowanie opisanego przybliżenia znacznie upraszcza analizę, mimo to uzyskiwane tą drogą wnioski w całości lub znacznym stopniu zachowują ogólne znaczenie.

Z (55)-(58), pod warunkami  $z_m = z_{0m}$ , otrzymujemy

$$v^-(t) = \left[ \left( 1 + \frac{\frac{1}{2}u(z_{01} - z_{02} + \frac{1}{2}uv^+(t))}{(z_{01} + z_{02} + wv^+(t))^2} v^+(t) + \dots \right) \cdot \frac{z_{01} - z_{02} + \frac{1}{2}uv^+(t)}{z_{01} + z_{02} + wv^+(t)} \right] v^+(t) \quad (59)$$

$$v^-(t) = \left( \frac{z_{01} - z_{02}}{z_{01} + z_{02}} + \frac{2z_{01}z_{02}q}{(z_{01} + z_{02})^3} \left( \frac{z_{02}}{c_{10}} \beta_1 - \frac{z_{01}}{c_{20}} \beta_2 \right) v^+(t) \right) v^+(t) + O(q^2), \quad (60)$$

$$v_2(t) = \left( \frac{2z_{01}}{z_{01} + z_{02}} + \frac{2z_{01}z_{02}q}{(z_{01} + z_{02})^3} \left( \frac{z_{02}}{c_{10}} \beta_1 - \frac{z_{01}}{c_{20}} \beta_2 \right) v^+(t) \right) v^+(t) + O(q^2). \quad (61)$$

Powyższe wzory przepisujemy w postaci

$$v^-(t) = R_v v^+ = (R_v + r_v v^+) v^+, \quad (62)$$

$$R_v \equiv \frac{z_{01} - z_{02}}{z_{01} + z_{02}}, \quad r_v \equiv \frac{q^2 z_{01} z_{02}}{(z_{01} + z_{02})^3} \left( \frac{z_{02}}{c_{10}} \beta_1 - \frac{z_{01}}{c_{20}} \beta_2 \right)$$

$$v_2(t) = T_v v^+ = (T_v + r_v v^+) v^+ \quad (63)$$

$$T_v = 1 + R_v, \quad T_v = 1 + R_v = \frac{2z_{01}}{z_{01} + z_{02}},$$

W celu wyznaczenia operatorów (współczynników),  $R_p$ -odbicia, i  $T_p$  - transmisji dla ciśnienia zakładamy, że:

a)

$$P^- = R_p P^+, \quad (64)$$

$$P_2 = T_p P^+ \quad (65)$$

gdzie,

$$R_p = R_p - r_p P^+ = -(R_v + r_p P^+), \quad (66)$$

$$T_p = 1 + R_p = T_p - r_p P^+ = T_v \frac{z_{02}}{z_{01}} - r_p P^+; \quad (67)$$

b) zasada zachowania energii na powierzchni granicznej w  $x = x_{TR} = 0$  jest spełniona w postaci

$$\tilde{\mathbf{I}}^+ + \tilde{\mathbf{I}}^- = \tilde{\mathbf{I}}_2, \quad (69)$$

gdzie:  $\tilde{\mathbf{I}}^+$ ,  $\tilde{\mathbf{I}}^-$ ,  $\tilde{\mathbf{I}}_2$  -wektory gęstości prądu energii [7]

$$\tilde{\mathbf{I}}^+ \equiv \mathbf{e} \tilde{T}^+ = P^+ v^+ = \mathbf{e} P^+ v^+, \quad (70)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{I}}^- &\equiv -\mathbf{e} \tilde{T}^- = P^- v^- = \mathbf{e} P^- v^- \\ &= \mathbf{e} R_v R_p P^+ v^+ = -\left(R_v + r_v v^+\right) \left(R_v + r_p P^+\right) \tilde{\mathbf{I}}^+, \end{aligned} \quad (71)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{I}}_2 &\equiv \mathbf{e} \tilde{T}_2 = P_2 v_2 = \mathbf{e} P_2 v_2 \\ &= \mathbf{e} T_v T_p P^+ v^+ = \left(T_v + r_v v^+\right) \left(T_v \frac{z_{02}}{z_{01}} - r_p P^+\right) \tilde{\mathbf{I}}^+. \end{aligned} \quad (72)$$

Wielkości zdefiniowane powyżej spełniają (69) pod następującym warunkiem

$$\left(v^+ r_v - P^+ r_p\right) = 0 + O(q^3). \quad (73)$$

Wrócimy do tego równania później. Teraz chcemy zaznaczyć że, z równań ciągłości (41), (42) wynika bardziej ogólna niż (69) postać prawa zachowania gęstości prądu energii, to znaczy

$$\tilde{\mathbf{I}}_1 = \tilde{\mathbf{I}}_2 \Leftrightarrow \tilde{T}_1 = \tilde{T}_2, \quad (74)$$

$$P^+ v^+ + P^- v^- + (v^+ P^- + P^+ v^-) = P_2 v_2. \quad (75)$$

Oznacza to że, rozkład  $\tilde{\mathbf{I}}_1 = \tilde{\mathbf{I}}^+ + \tilde{\mathbf{I}}^-$  aczkolwiek wydający się być naturalnym, niemniej jednak zachodzi pod warunkiem

$$(v^+ P^- + P^+ v^-) = 0, \quad (76)$$

Jeżeli założymy (76) to warunek (73) będzie spełniony. Jest to widoczne po zastąpieniu  $P^-$  i  $v^-$  przez prawe strony (62) i (64). Jednak (76) ma bardziej podstawowe znaczenie, co pokazujemy niżej.

Zastępując  $P^-$  i  $v^-$  w (76) przez prawe strony relacji (62) i (64), i wykorzystując związek impedancyjny (38) lub (35), otrzymujemy

$$(v^+ R_v v^+ + v^+ R_p v^+) - (\partial_x \Phi^+ R_v v^+ + v^+ R_p \partial_x \Phi^+) = 0 \quad (77)$$

lub

$$(P^+ R_v P^+ + P^+ R_p P^+) + z_{01} (\partial_x \Phi^+ R_p P^+ + P^+ R_v \partial_x \Phi^+) = 0. \quad (78)$$

Zakładamy

$$R_p = -R_v. \quad (79)$$

W tym wypadku z (77-78) otrzymujemy związki przemienności

$$\partial_x \Phi^+ \cdot \left( R_{v \text{ lub } p} \begin{pmatrix} v^+ \\ P^+ \end{pmatrix} \right) - \begin{pmatrix} v^+ \\ P^+ \end{pmatrix} \cdot (R_{v \text{ lub } p} \partial_x \Phi^+) = 0. \quad (80)$$

Z drugiej strony - zastępując  $P^-, P^+$  (lub  $v^-, v^+$ ) w (76) przez związki impedancyjne (38-39), stosując (62) (lub (64)), a następnie (80), otrzymujemy

$$\partial_x \Phi^- = R_v \partial_x \Phi^+, \quad (81)$$

lub

$$\partial_x \Phi^- = -R_p \partial_x \Phi^+. \quad (82)$$

Oczywiście wzory te mogą być otrzymane także z (77-78).

Wyprowadzone wyżej zależności w szczególności dają (73). Ponadto, z (81-82) wynika ważny wniosek - wielkość  $\partial_x \Phi^+$  "odbija" się tak jak prędkość lub ciśnienie. Równania (81-82) pozwalają na dokonanie separacji (podziału) równania coupletu (45) lub (47). Po podstawieniu prawych stron (64) i (82) do (45) otrzymujemy

$$\partial_x \Phi^+ = T_p^{-1} \left( \frac{1}{z_{01}} \bar{\mathcal{A}}_1 T_p P^+ - \frac{q C_{10}}{2z_{01}^2} (T_p P^+)^2 \right) + \alpha (q + \alpha)^2. \quad (83)$$

Jednak konsekwentnie, w naszym rzędzie aproksymacji możemy zastąpić w (83)  $T_p$  przez  $T_p$ ,

$$T_p = (1 + R_p) = T_p + \alpha(\alpha + q) = 1 + R_p + \alpha(\alpha + q), \quad (84)$$

$$\partial_x \Phi^+ = \frac{1}{z_{01}} \bar{\mathcal{A}}_1 P^+ - \frac{q C_{10}}{2z_{01}^2} T_p (P^+)^2 + \alpha (q + \alpha)^2$$

i w opisanym wyżej przybliżeniu ( $\mathcal{A}_n = 0$ )



56523



$$\partial_x \Phi^+ = -\frac{q_1 c_{10}}{2z_{01}^2} T_p (P^*)^2 + \alpha(q + \alpha)^2, \quad (85)$$

Niemniej jednak, jeżeli mamy operator odbicia prędkości  $R_v[\cdot; v^*]$  a chcemy wyznaczyć operator odbicia ciśnienia  $R_p$  jako funkcje tylko  $P^*$  to stosując (79) i (35) otrzymujemy

$$R_p[\cdot; P^*] = -R_v\left[\cdot; \frac{P^*}{z_{01}} + \partial_x \Phi^+\right], \quad (86)$$

gdzie  $\partial_x \Phi^+$  jest dane przez (83). W naszym przypadku związek ten redukuje się do (73), stosując (85), otrzymujemy

$$\left( \left( 1 - \frac{q_1 c_{10}}{2z_{01}} T_p P^* \right) \frac{r_v}{z_{01}} - r_p \right) P^* = 0 + O(q^3), \quad T_p = \frac{2z_{02}}{z_{01} + z_{02}}. \quad (87)$$

W naszym rzędzie aproksymacji  $R_v[\cdot; v^*]$ ,  $r_v$  jest stałą względem  $v^*$  i jest  $O(q)$ . By pozostać konsekwentnymi, musimy pominąć drugi wyraz w wewnętrznych nawiasach, w takim razie

$$r_p = (r_v / z_{01}) + O(q^2), \quad (88)$$

i

$$P^-(t) = \left( \frac{z_{01} - z_{02}}{z_{01} + z_{02}} + \frac{2z_{02}q}{(z_{01} + z_{02})^3} \left( \frac{z_{02}}{c_{10}} \beta_1 - \frac{z_{01}}{c_{20}} \beta_2 \right) P^*(t) \right) P^*(t) + O(q^2), \quad (89)$$

$$P_2(t) = \left( \frac{2z_{02}}{z_{01} + z_{02}} - \frac{2z_{02}q}{(z_{01} + z_{02})^3} \left( \frac{z_{02}}{c_{10}} \beta_1 - \frac{z_{01}}{c_{20}} \beta_2 \right) P^*(t) \right) P^*(t) + O(q^2). \quad (90)$$

W dziedzinie częstotliwości Fouriera

$$\hat{R}_v = \left( \frac{z_{01} - z_{02}}{z_{01} + z_{02}} + \frac{2z_{02}z_{01}q}{(z_{01} + z_{02})^3} \left( \frac{z_{02}}{c_{10}} \beta_1 - \frac{z_{01}}{c_{20}} \beta_2 \right) \hat{v}^+(\omega) \otimes \right) + O(q^2), \quad (91)$$

$$\hat{R}_p = \left( \frac{z_{01} - z_{02}}{z_{01} + z_{02}} + \frac{2z_{02}q}{(z_{01} + z_{02})^3} \left( \frac{z_{02}}{c_{10}} \beta_1 - \frac{z_{01}}{c_{20}} \beta_2 \right) \hat{p}^+(\omega) \otimes \right) + O(q^2), \quad (92)$$

W celu uwzględnienia absorpcji następujący wyraz

$$\hat{p}_A \equiv \frac{2z_{01}z_{02}}{(z_{01} + z_{02})^2} \frac{(a^2(\omega) - a^1(\omega))}{-i\omega}, \quad (93)$$

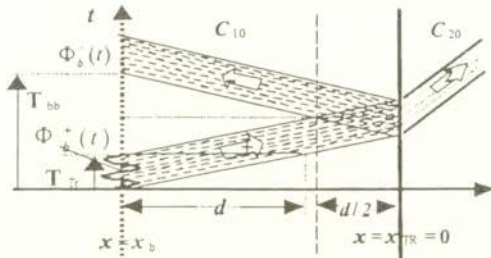
powinien być dodany do prawej strony (91).

Dotychczasowe wyniki – równania (49), (60), (91) – pokazują że, w opisie linowym z absorpcją  $q=0$ ,  $\alpha \neq 0$ , warunek liniowej superpozycji (2) strona 8) nie jest konieczny do uzyskania  $R_v[\cdot]$ .

Analogicznie, w opisie nieliniowym  $q \neq 0$ , nie jest konieczna znajomość oddzielnych równań dla  $\Phi^+$  i  $\Phi^-$  by uzyskać  $R_v[\cdot; v^+]$

## VI. SEPARACJA RÓWNIANIA PROPAGACJI (SEPARACJA COUPLETU).

Wyprowadziliśmy operatory odbicia i transmisji dla powierzchni granicznej między dwoma ośrodkami. Jest to podstawowe zagadnienie, niemniej jednak jego rozwiązanie nie zamyka problemu opisu zjawiska odbicia i transmisji w warunkach nieliniowej propagacji (w przeciwieństwie do liniowego opisu). Rysunek 2 przedstawia czasoprzestrzenny diagram odpowiadający Rysunkowi 1. Pozwala on dokładnie objaśnić przebieg zjawiska i pojęcie – nieliniowe odbicie i transmisja.



Rys.2. Czasoprzestrzenny diagram odbicia i transmisji  
 "+"-wstęga padająca, "-" -wstęga obita, "2"-wstęga transmisji;  $d$ -długość przestrzenna impulsu;  
 $d/2$ -grubość przygranicznej warstwy odbijającej.

Zgodnie z wcześniejszymi ustaleniami (ROZDZIAŁ III) punkt  $x_b$  jest punktem warunku brzegowego (punktem wzbudzenia) dla impulsu padającego lub punktem w którym impuls ten pozostawia ślad czasowy o czasie trwania  $T_{Tr}$  (pomijamy wpływ rozmyć dyfuzyjnych na  $T_{Tr}$  powstających w trakcie propagacji i wynikających z absorpcji). Impuls ma więc długość  $d = T_{Tr} c_{10}$ . Wstęgi "+", "-" i "2" składają się z linii "świata" odpowiednio impulsu padającego, odbitego i transmitowanego. Trójkątny obszar czasu i przestrzeni jest obszarem oddziaływania odbitej części impulsu z częścią impulsu padającego. W równaniu kupletu (30) lub (45) stosowanym poprzednio tylko na granicy  $x=x_{RT}=0$ , a które przepisujemy poniżej jako obowiązujące w całym obszarze  $x \leq x_{RT}=0$ ,

$$\left(\partial_x \Phi^+ - \partial_x \Phi^-\right) = \frac{1}{z_{01}} \bar{A}_1 \left(P^+ + P^-\right) - \frac{q c_{10}}{2 z_{01}^2} \left(P^+ + P^-\right)^2 + \alpha(q + \alpha^2), \quad (94)$$

oddziaływanie to opisywane jest wyrazem proporcjonalnym do  $P^+(t - \frac{x}{c_{10}}, x) P^-(t + \frac{x}{c_{10}}, -x)$ . W liniowym opisie w obszarze tym powstaje jedynie liniowa superpozycja zaburzeń. W opisie nieliniowym dochodzi do specyficznego sprzężenia zwrotnego, w którym odbita część impulsu

może zmieniać amplitudę impulsu padającego- to znaczy zmieniać wartość amplitudy zaburzeń składowych w warunkach granicznych. Z tego punktu widzenia, to cała warstwa przygraniczna o zmiennej w czasie grubości (maksymalnej  $d/2$ ) odbija i transmituje impuls padający

W związku z powyższym powstaje pytanie jak obliczyć  $\Phi^+$  w szczególności na granicy, oraz  $\Phi^-$  dla  $x < x_{gr} = 0$  - jakie równania rządzą ewolucją tych pól? Zauważmy że, określenie operatorów odbicia i transmisji dla prędkości nie nakłada żadnych dodatkowych warunków na równanie (30) lub jego graniczne wartości (45),(47). Oznacza to że, podział (30) lub (94) na równania opisujące ewolucje  $\Phi^+$  i  $\Phi^-$  jest do pewnego stopnia dowolny. Niemniej jednak w obszarze asymptotycznym, to znaczy poza warstwą przygraniczną ( $P^+P^- = 0$ ), każde z nich powinno być równaniem Burgersa. Prostą wydaje się być sytuacja, w której zakładamy że  $\Phi^+$  spełnia równanie Burgersa w całym obszarze  $m=1$ , zaś cały opis oddziaływania  $\Phi^+$  z  $\Phi^-$  pozostawiamy w równaniu na  $\Phi^-$ , które także spełnia to równanie jednak dopiero w obszarze asymptotycznym. Analogiczną sytuację mamy pozostawiając cały wyraz  $2P^+P^-$  w równaniu dla  $\Phi^+$ . Równanie (84) oraz równanie jakie otrzymujemy po odjęciu (84) od (45) można zapisać w postaci

$$\partial_x \Phi^+ = \frac{1}{z_{01}} \bar{\mathcal{A}}_1 P^+ - \frac{q_1 c_{10}}{2z_{01}^2} (P^+ + P^-) P^+ + O((q+\alpha)^2) \quad (95)$$

$$-\partial_x \Phi^- = \frac{1}{z_{01}} \bar{\mathcal{A}}_1 P^- - \frac{q_1 c_{10}}{2z_{01}^2} (P^+ + P^-) P^- + O((q+\alpha)^2) \quad (96)$$

Taki podział równania (45) na granicy jest konsekwencją przyjętego na granicy podziału prądu energii (69) to znaczy warunku (76). Jeśli przyjmiemy układ równań o postaci (95-96) jako rządzący ewolucją  $\Phi^-$  i  $\Phi^+$  w całym obszarze  $m=1$ , to będzie to wybór i podział równania (30) konsystentny z przyjętymi w poprzednich rozdziałach założeniami i przedstawionymi explicite postaciami operatorów odbicia i transmisji ciśnienia. W stosunku do powyżej przedstawionych innych możliwości układ (95-96) zachowuje symetrię opisu oddziaływania. Rozważmy ogólną sytuację. Mianowicie zastosujemy ciągły względem parametru  $\varepsilon$  podział oddziaływania a tym samym równania (94). Mamy

$$\partial_x \Phi^+ = \frac{1}{z_{01}} \bar{\mathcal{A}}_1 P^+ - \frac{q_1 c_{10}}{2z_{01}^2} (P^+ + \varepsilon P^-) P^+ + O((q+\alpha)^2), \quad (97)$$

$$-\partial_x \Phi^- = \frac{1}{z_{01}} \bar{\mathcal{A}}_1 P^- - \frac{q_1 c_{10}}{2z_{01}^2} (P^- + (2-\varepsilon)P^+) P^- + O((q+\alpha)^2), \quad (98)$$

(ograniczeniem dla  $\varepsilon$  jest  $\varepsilon q \propto O(q)$ ). Oczywiście postać operatorów odbicia i transmisji prędkości nie zależy od  $\varepsilon$ . Jednak ogólna postać operatora odbicia i transmisji ciśnienia zależy od  $\varepsilon$ . Wyrażając prędkości w warunku granicznym (42) za pomocą odpowiednich ciśnień, danych przez związki impedancyjne (35)-(37) a następnie stosując graniczne wartości  $\partial_x \Phi^+$ ,  $\partial_x \Phi^-$  i  $\partial_x \Phi_2$  wynikające z (97), (98) i (46) otrzymujemy z dotychczas stosowaną dokładnością ogólną postać  $R_p^\varepsilon$

$$R_p^\varepsilon = - \left( \frac{z_{01} - z_{02}}{z_{01} + z_{02}} + \frac{q^2 z_{02} z_{01}}{(z_{01} + z_{02})^3} \left( \left( \frac{z_{02}}{z_{01}} + \frac{\varepsilon - 1}{2} \left( \frac{z_{02}}{z_{01}} \right)^2 - 1 \right) \right) \frac{\beta_1}{c_{10}} - \frac{\beta_2}{c_{20}} \right) P^+(t) + O(q^2). \quad (99)$$

Dla  $\varepsilon = 1$  otrzymujemy wzory (90) i (92), to znaczy przypadek szczegółowo dyskutowany w tej pracy i zachowujący symetrie opisu oddziaływania, dla  $\varepsilon = 0$  i  $\varepsilon = 2$ , pierwszy i drugi z powyżej przedstawionych. Wreszcie, dla  $z_{02} \neq z_{01}$  istnieje taka wartość  $\varepsilon$  dla której wyraz nieliniowy w (99) jest równy zeru  $r_p = 0$ , jest nią

$$\varepsilon = \varepsilon_L \equiv 1 + 2T_p \left( 1 + \frac{z_{021}}{z_{021} - 1} \left( \frac{\beta_{21}}{c_{210} z_{021}^2} - 1 \right) \right), \quad (100)$$

$$z_{021} \equiv \frac{z_{02}}{z_{01}}, \quad c_{210} \equiv \frac{c_{20}}{c_{10}}, \quad \beta_{21} \equiv \frac{\beta_2}{\beta_1}$$

i

$$R_p^{\varepsilon_L} = R_p \quad (101)$$

Z powyższego wynika że, skalując opis oddziaływania możemy zlinearyzować opis warunków granicznych dla ciśnienia. W tym przypadku lokalny i nieliniowy opis wpływu granicy na transmisję i odbicie ciśnienia został "przeniesiony" do wnętrza warstwy. Jest to jeszcze jeden przykład ilustrujący rolę warstwy przygranicznej w zjawisku nieliniowego odbicia i w jego opisie. Wyraźnie dokonujemy tu w fizycznym obrazie zjawiska rozróżnienia na "zjawisko samo w sobie" i jego "opis". Bowiem jak widać z powyższego, szczegółowych opisów może być nieskończenie wiele. Powstać więc może uzasadnione wrażenie, że każdemu z nich odpowiadają inne wartości pól odbitych, transmitowanych i pola padającego w warstwie dla tego samego zaburzenia padającego na warstwę. W szczególności, że wraz ze zmianą  $\varepsilon$  zmianie ulega wyrażony przez ciśnienia warunek graniczny (który jest warunkiem zależnym) dla  $\Phi_2$  (ściśle dla  $P_2$ ) przy niezmiennym zaburzeniu padającym na warstwę. To znaczy, że "opis" jest niejednoznaczny i, co najwyżej istnieją wyróżnione wartości  $\varepsilon$  takie, że związane z nimi "opisy" odpowiadają "zjawisku samemu w sobie", to znaczy są zgodne na przykład z eksperymentem. Pozostawienie zagadnienia równoważności opisów ciśnień dla różnych  $\varepsilon$  teoretycznie nie rozstrzygnięciem oznaczałoby niedomknięcie opisu zjawiska, a to między innymi, oznacza brak opisów prądów energii.

Problem nie jest banalny, bowiem nawet założenie istnienia i jednoznaczności rozwiązań zagadnień brzegowych dla wszystkich przedstawionych równań (w szczególności zależnych od  $\varepsilon$ ) automatycznie nie rozwiązuje zagadnienia równoważności opisów. Przypominamy bowiem że, mamy trzy "mody" z których tylko jeden - padający jest "sztywno utwierdzony" warunkiem brzegowym w  $x_b$  w obszarze asymptotycznym. Pozostałe dwa spełniają zależny warunek brzegowo - graniczny w  $x_{RT}$ .

Należy wykazać, że wartość  $P^+ + P^-$  nie zależy od  $\varepsilon$ . Co w szczególności dla  $x = x_{RT}$  oznaczać będzie, że nie ma dodatkowego nieliniowego efektu zależnego od  $\varepsilon$  takiego, że choć warunek graniczny  $P^+ + P^- = P_2$  jest zawsze spełniony to na innych - zależnych od  $\varepsilon$  - poziomach amplitud. Tak więc,  $P_2$  też nie zależy od  $\varepsilon$  mimo tego, że graniczny związek  $P^+$  i  $P^-$  wyrażający się przez  $R_p^{\varepsilon}$  zależy jawnie od  $\varepsilon$ . Należy też zaznaczyć, że prędkości  $v^+$ ,  $v^-$  ze względu na (97), (98) także zależą od  $\varepsilon$ , jednak na granicy związek między nimi nie zawiera dodatkowego członu jawnie zależącego od  $\varepsilon$  i w tym sensie jest jawnie niezmienniczy ze względu na skalowanie oddziaływania w warstwie odbijającej.

Zakładając istnienie i jednoznaczność rozwiązań zagadnień brzegowych dla stosowanych w tej pracy równań różniczkowych, w szczególności dla równania (15) i równań (97) i (98) (oraz odpowiadających im równań wyrażonych przez prędkości) można pokazać co następuje:



Jezeli przy dowolnym zadanym  $\varepsilon$   $\Phi^+$  i  $\Phi^-$  są jedynymi rozwiązaniami układu równań

$$\partial_x \Phi^+ = \frac{1}{z_{01}} \bar{A}_1 P^+ - \frac{q_1 c_{10}}{2z_{01}^2} (P^+ + \alpha P^-) P^+ + O((q+\alpha)^2), \quad P^+ = -g_{01} \partial_t \Phi^+ = -g_{01} \partial_{t'} \Phi^+, \quad (102)$$

$$-\partial_x \Phi^- = \frac{1}{z_{01}} \bar{A}_1 P^- - \frac{q_1 c_{10}}{2z_{01}^2} (P^- + (2-\varepsilon)P^+) P^- + O((q+\alpha)^2), \quad P^- = -g_{01} \partial_t \Phi^- = -g_{01} \partial_{t'} \Phi^-, \quad (103)$$

dla  $x_b \leq x \leq x_{RT}$  a  $\Phi_2$  dla  $x \geq x_{RT}$  jedynym rozwiązaniem równania

$$\partial_x \Phi_2 = \frac{1}{z_{02}} \bar{A}_2 P_2 - \frac{q_2 c_{20}}{2z_{02}^2} (P_2)^2 + O((q+\alpha)^2), \quad P_2 = -g_{02} \partial_t \Phi_2 = -g_{02} \partial_{t_2} \Phi_2, \quad (104)$$

gdzie  $\Phi^+$  spełnia warunek brzegowy w  $x = x_b$

$$\Phi^+|_{x_b} = \Phi_b^+(t) \quad \text{i} \quad \underline{\Phi_b^+(t) = 0 \text{ dla } t > T_{bb}}, \quad (105)$$

$T_{bb} \equiv 2|x_{RT} - x_b|/c_{\max}$  (patrz Rys.2),  $\max(\xi_i) \leq c_{\max} \equiv c_{i0}(1+q(\gamma-1))2c_{i0}$   $c_i(x,t)$  dane jest przez A14.

$\Phi$  i  $\Phi_2$  spełniają warunek graniczny w  $x = x_{RT}$

$$P^- = R_p^\varepsilon P^+ = R_p^\varepsilon P^+(\tau^+(x_{RT}, t), x_{RT}), \quad (106)$$

$$P_2 = (P^+ + P^-) = T_p^\varepsilon P^+ = (1 - R_v) v^+, \quad (107)$$

to: 1) funkcje  $\Phi^+$ ,  $\Phi^-$  i  $\Phi_2$  spełniają równanie (94) i (104) odpowiednio dla  $x_b \leq x \leq x_{RT}$  i  $x \geq x_{RT}$ , a więc spełniają także równania (26a) i (30a) Co z kolei oznacza, że

$$\Phi_1(x, t) = \Phi^+(\tau^+(x, t), x) + \Phi^-(\tau^-(x, t), -x), \quad (108)$$

jest rozwiązaniem równania (15) (z dokładnością  $O((q+\alpha)^2)$ ) przyjmującym na brzegu wartość

$$\Phi_1(x_b, t) = \Phi^+(\tau^+(x_b, t), x_b) + \Phi^-(\tau^-(x_b, t), -x_b) = \Phi_b^+(t) + \Phi_b^-(t) \quad \text{dla } 0 \leq t < \infty. \quad (109)$$

2) dla  $0 \leq t < \infty$   $\Phi_1 = \Phi^+ + \Phi^-$  i  $\Phi_2$  oraz  $P_1 = P^+ + P^-$  i  $P_2$  nie zależą od  $\varepsilon$

3) dla zaburzeń brzegowych nie spełniających podkreślonego w (105) warunku a więc o czasie trwania  $T_{Tr} > T_{bb}$  tezę 2) wykazano tylko dla  $0 \leq t < T_{bb}$  (w tym przypadku powierzchnia warunku brzegowego w  $x = x_b$  ma część wspólną z warstwą odbijającą- obszarem oddziaływania).

$\Phi_b^-(t)$  jest niejawnym (poszukiwanym) składnikiem warunku brzegowego. W naszym zagadnieniu interpretujemy go jako "śląd czasowy" jaki pozostawia w  $x = x_b$  zaburzenie odbite. Składnik ten musi być formalnie uwzględniony w matematycznie poprawnym sformułowaniu zagadnienia brzegowego, jeśli problem analizowany jest dla  $0 \leq t < \infty$ . Ważnym uzupełnieniem tezy 1) jest przypadek szczególnie  $z_{01} = z_{02}$ . Zachodzi wtedy tylko nieliniowe odbicie (przy dodatkowym założeniu  $c_{10} = c_{20}$  -"czysto nieliniowe" nazwane tak w dalszej części tej pracy). Wtedy operatory odbicia i transmisji ciśnienia nie zależą od  $\varepsilon$  (przy przyjętej dokładności przedstawianiu tych



operatorów!) pomimo tego że, równania na  $P^+, P^-$  (otrzymywane w wyniku obliczenia  $\partial_t$  obu stron równań (97) i (98)) zależą od  $\varepsilon$ . Ponadto dla każdego  $\varepsilon$  (w sensie  $\varepsilon q \propto O(q)$ ) mają one postać jak dla  $\varepsilon=1$ . Jest to niezwykle szczęśliwy przypadek koniunkcji. Bowiem, w tym co charakterystyczne dla zjawiska nieliniowego i co stało się przyczyną tej dyskusji, z jednej strony mamy postać operatora nie związaną z "opisem" oddziaływania w warstwie, z drugiej zaś jest to postać odpowiadająca szczegółowo przedstawionemu przypadkowi symetrii oddziaływania i podziału prądów energii to znaczy  $\varepsilon=1$ . Niemniej jednak należy jeszcze raz podkreślić, jest on charakterystyczny dla przyjętej dokładności przedstawiania postaci operatorów odbicia i transmisji ciśnienia (zgodnej z ogólnie przyjętą w tej pracy).

## VII. Dyskusja i wnioski

Wyznaczone operatory odbicia i transmisji dla ciśnienia i prędkości zachowują własności asymptotyczne operatorów liniowych przy  $(z_{01}; z_{02}) \rightarrow (0 \text{ or } \infty)$  (w przypadku  $R_p^{cs1}$  i  $T_p^{cs1}$  także dla  $z_{01} \rightarrow 0$  jeśli  $c_{10} \neq 0$ ). Transmisja energii do ośrodka  $m=2$  zanika zawsze gdy  $z_{021} \rightarrow 0$  lub  $\infty$ . Zauważmy że brak różnicy między nieliniowymi parametrami ośrodków ( $\beta_1 = \beta_2$ ) nie jest wystarczającym warunkiem znikania nieliniowej (kwadratowej) względem fali padającej, składowej fali odbitej. Warunkiem tym jest

$$z_{02} c_{20} \beta_1 = z_{01} c_{10} \beta_2 \quad (110)$$

Jednak wtedy

$$\begin{Bmatrix} v^- \\ P^- \end{Bmatrix} = \frac{\beta_1 c_{20} - \beta_2 c_{10}}{\beta_1 c_{20} + \beta_2 c_{10}} \cdot \begin{Bmatrix} + \\ - \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} v^+ \\ P^+ \end{Bmatrix}, \quad (111)$$

co przy  $\beta_1 \neq \beta_2$  oznacza, że mimo liniowej zależności między zaburzeniem odbitym i padającym, zjawisko oddziaływania z powierzchnią istotnej nieciągłości nadal zachowuje nieliniowy charakter. Różnica między ośrodkami zanika wtedy, gdy spełniony jest warunek (110) i  $z_{01} = z_{02}$ . Wtedy także  $R_0 = 0$  i  $R_0 = 0 = R_p$  ściśle w dowolnym rzędzie (gdy  $\mathcal{A}_1 = \mathcal{A}_2$ ). Z powyższego wynika, że w warunkach nieliniowej propagacji podstawowy nieliniowy efekt odbicia i transmisji zależy w takim samym stopniu od wszystkich parametrów ośrodków, zarówno równowagowych (słabosygnalowych) jak i charakteryzujących nieliniowe własności ośrodków (nieliniowość równań stanu). Można się jednak umówić że, czysto nieliniowe odbicie i transmisja zachodzi wtedy, gdy tylko  $\beta_1 \neq \beta_2$ . Dla tego przypadku otrzymujemy

$$P^-(t) = -\frac{q}{4z_{01}c_{10}}(\beta_1 - \beta_2)P^+(t)^2 + O(q^2), \quad (112)$$

$$v^-(t) = \frac{q}{4c_{10}}(\beta_1 - \beta_2)v^+(t)^2 + O(q^2), \quad (113)$$

$$\hat{P}^-(\omega) = -\frac{q}{4z_{01}c_{10}}(\beta_1 - \beta_2)\hat{P}^+(\omega) \otimes \hat{P}^+(\omega) + O(q^2), \quad (114)$$

$$\hat{v}^-(\omega) = \frac{q}{4c_{10}} (\beta_1 - \beta_2) \hat{v}^+(\omega) \otimes \hat{v}^+(\omega) + O(q^2). \quad (115)$$

Ogólnie (z uwzględnieniem uwagi po (111)) zaburzenie odbite (lub transmitowane) możemy przedstawić w postaci

$$v^- = v_L^- + v_{NL}^-, \quad P^- = P_L^- + P_{NL}^-, \quad (116)$$

gdzie,

$$v_L^-(t) \equiv R_v v^+(t), \quad P_L^-(t) \equiv R_p P^+(t), \quad (117)$$

$$v_{NL}^-(t) \equiv r_v v^+(t) \cdot v^+(t), \quad P_{NL}^-(t) \equiv -r_p P^+(t) \cdot P^+(t), \quad (118)$$

a indeks  $L$  wyróżnia składową liniową względem zaburzenia, a nie liniową ze względu na opis zjawiska. W dziedzinie częstotliwości Fouriera

$$\hat{v}_L^-(\omega) \equiv R_v \hat{v}^+(\omega), \quad \hat{P}_L^-(\omega) \equiv R_p \hat{P}^+(\omega), \quad (119)$$

$$\hat{v}_{NL}^-(\omega) \equiv r_v \hat{v}^+(\omega) \otimes \hat{v}^+(\omega), \quad \hat{P}_{NL}^-(\omega) \equiv -r_p \hat{P}^+(\omega) \otimes \hat{P}^+(\omega) \quad (120)$$

Z uzyskanych przez nas wyników w szczególności ze wzorów (120) wynika, że odbicie i transmisja w warunkach nieliniowej propagacji jest zjawiskiem nielokalnym w dziedzinie częstotliwości. Na odbicie i transmisję każdej ze składowych Fourierowskich fali padającej mają wpływ wszystkie pozostałe - co wynika z własności autosplotu. W nieliniowym opisie oddziaływania z powierzchnią nieciągłości odbicie i transmisja pojedynczej składowej Fourierowskiej nie jest zjawiskiem niezależnym od pozostałych składowych widma.

W sytuacji, gdy fala padająca wytwarzana jest przez impulsowy nadajnik o częstotliwości nośnej  $\omega_{ca}$  w pobliżu powierzchni nieciągłości, to nawet przy stosunkowo dużych wartościach  $q$  widmo fali padającej ( $v^+(\omega), P^+(\omega)$ ) będzie wyraźnie zarysowanym pojedynczym prążkiem nadal skupionym wokół  $\omega_{ca}$ . Jak wynika z (119)-(120) w widmie fali odbitej (lub przechodzącej) oprócz prążka o tej samej częstotliwości centralnej pojawi się wyraźnie odseparowany (przy odpowiedniej długości impulsu) dodatkowy prążek, odpowiadający ( $v_{NL}^-, P_{NL}^-$ ) skupiony wokół  $2\omega_{ca}$ . Jest to jednak sytuacja raczej wyjątkowa. Ogólnie widma  $v^-, P^-$  zaburzenia docierającego do powierzchni odbijającej są już widmami złożonymi, nieliniowo propagującego zaburzenia. Poza hipotetycznymi sytuacjami i sytuacją wyżej opisaną widma ( $v_{NL}^-, P_{NL}^-$ ) niosą znacznie mniejszą energię niż ( $v_L^-, P_L^-$ ) (nawet w sytuacji  $z_{01} \approx z_{02}$ ) i są przez nie praktycznie nakrywane (w dolnym zakresie widma). Stąd też praktyczne znaczenie składowych ( $v_{NL}^-, P_{NL}^-$ ) w analizie różnic między składnikami ośrodka (np. wyznaczanie  $\beta$  jednego ze składników, gdy znane są pozostałe parametry) zależy od zastosowania specjalnych technik wzbudzenia i detekcji zaburzeń odbitych (lub transmitowanych). W tym kontekście zwracamy uwagę że zmiana znaku  $v^-, P^-$  nie powoduje zmiany znaku ( $v_{NL}^-, P_{NL}^-$ ). Przykłady liczbowego porównania ( $v_{NL}^-, P_{NL}^-$ ) z ( $v_L^-, P_L^-$ ), mającego decydujące znaczenie dla standardowych technik detekcji stosowanych w ultrasonografii medycznej, podano w Dodatku D.

Osobliwością i interesującą cechą zjawiska nieliniowego odbicia i transmisji jest to, że w punkcie istotnej nieciągłości, to znaczy na rozmaitości zero wymiarowej powstaje efekt skończonej

nieliniowej zmiany ciśnienia (prędkości)! Jest on tego samego rzędu co nieliniowa zmiana ciśnienia wynikająca z nieliniowej propagacji zaburzenia na skończonym odcinku  $\delta x$  (to znaczy na jednowymiarowej rozmiarowości o niezerowej mierze) w pierwszym lub drugim ośrodku. Szczegóły wywodu prowadzące do oszacowania  $\delta x$  pomijamy

$$\delta x(\omega) = \text{const} (z_{021}, \beta_{21}) \frac{c_{10}}{\omega} \quad (121)$$

Wyrażenie (121) ma znaczenie jakościowe jako charakterystyka efektu porównawczego

Otrzymanie operatorów odbicia i transmisji prędkości nie wymagało żadnych dodatkowych założeń oprócz uczynionych na początku tej pracy. Dla otrzymania analogicznych operatorów dla ciśnienia konieczne były dodatkowe kroki- podział równań (30) i (30a). To jednak nie pozwoliło na zamknięcie opisu zjawiska na podstawie dotychczasowych założeń. Założenie o podziale prądu energii, aczkolwiek charakteryzujące się symetrią opisu oddziaływania, okazało się być konsekwencją jednego z wielu możliwych opisów oddziaływania w warstwie. W ogólnym przypadku i wobec jawnie występującego dodatkowego, zależnego od opisu oddziaływania składnika w  $R_p^e$ , dyskusja i dodatkowe założenia w ROZDZIALE VI były konieczne. Zagadnienie równoważności opisów oddziaływań w warstwie ulega znacznemu logicznemu uproszczeniu, gdy jest rozwiązany w kategoriach zagadnienia początkowego- przestrzennie zlokalizowane zaburzenie  $\Phi_1(t_0, x) = \Phi_1^+(x)$  zadawane w pewnej odległości od warstwy w chwili  $t_0$ . Niemniej jednak z rozważań tych wynika:

1) Względne znaczenie składników tworzących złożoną reprezentację zaburzenia nieliniowego- w przeciwieństwie do pełnej reprezentacji lub takiej, która jest ścisłym rozwiązaniem zagadnienia. W przypadku liniowym takie rozróżnienie nie ma znaczenia.

2) Niezależność  $\Phi_1 = \Phi^+ + \Phi^-$  i  $\Phi_2$ , (lub  $P_1 = P^+ + P^-$  i  $P_2$ ) od  $\varepsilon$  pozwala wybrać taki opis, przy którym zagadnienie rozwiązania układu równań (102-104) (a więc także (15)) jest najprostsze (nawet z numerycznego punktu widzenia). Na przykład zakładając ośrodek klasycznie lepki i  $\varepsilon = 0$  stwierdzamy, że równania (102) i (104) są równaniami Burgersa. Zganienia brzegowe dla tych równań są ściśle całkowalne. Czynniki  $2P^+$  w wyrażeniu opisującym oddziaływanie w (103) jest więc zdefiniowany dla każdego  $t$ . Równanie to możemy zapisać następująco,

$$\partial_\xi \Phi^-(\tau^-, \xi) = \frac{1}{z_{01}} \bar{A}_1 P^-(\tau^-, \xi) - \frac{q_1 c_{10}}{2z_{01}^2} \left( P^-(\tau^-, \xi)^2 + 2P^+(\tau^- + \frac{2\xi}{c_{10}}, \xi) P^-(\tau^-, \xi) \right) + O(q + \alpha^2). \quad (122)$$

Zastosowano podstawienie  $-x = \xi$ , oraz  $\tau^+ = t - x/c_{10} = \tau^- + 2\xi/c_{10}$ . Ta sama transformacja (Cole-Hopfa [11]pp 198), która przekształca (102) i (104) w równania liniowe, przekształca (103) lub (122) w quasi liniowe w obszarze asymptotycznym w liniowe.

Z analizy w ROZDZIALE VI odnieśliśmy więc dodatkową korzyść, a w przypadku klasycznej absorpcji obu składników możemy uzyskać ściśle rozwiązanie dla  $\Phi_2(P_2)$ .

3) Zwracamy uwagę że parametrem opisu (skalowania) nieliniowego oddziaływania może być (w znacznym stopniu dowolna jednak  $\varepsilon q \propto O(q)$ ) funkcja  $\varepsilon(x, t)$ . Pozwala to spojrzeć na zagadnienie wyboru opisu oddziaływania jak na wybór szczególnego "funkcjonalnego układu" odniesienia. Niemniej jednak każdy wybór zachowuje wartość  $\Phi_1, \Phi_2(P_1, P_2)$ .

4) W ROZDZIALE VI w kontekście pojawienia się wielu możliwych opisów nieliniowego odbicia i transmisji użyto terminu zjawisko "samo w sobie". Wyodrębnienie opisu zjawiska "samego w sobie" poprzez eksperyment (nawet myślowy) zakłada możliwość przeprowadzenia w warstwie odbijając niezależnych pomiarów  $P_1$  i  $P_2$ . Zakładamy tym samym, że z pośród wielu



możliwych układów  $P^+$  i  $P^-$  realizujących  $P_1$  w warstwie i spełniających warunki brzegowe w  $x = x_b$  i graniczne w  $x = x_{RT}$ , w rzeczywistym procesie wybierany jest tylko jeden odpowiadający szczególnej wartości  $\varepsilon$ . Abstrahując od możliwości takiego pomiaru przypominamy szczególnie przypadek  $\tilde{z}_{01} = \tilde{z}_{02}$ . Jak stwierdzono - w tym co charakterystyczne dla zjawiska nieliniowego odbicia i transmisji - wszystkie możliwe opisy dają operatory odbicia i transmisji ciśnienia jak dla  $\varepsilon = 1$ , to znaczy jak dla przypadku założonej symetrii oddziaływania i podziału prądu energii. Są to równocześnie najprostsze postaci tych operatorów, chociaż obliczenia na bazie opisu  $\varepsilon = 1$  nie są najłatwiejsze. Wydaje się że właśnie ten opis może być przypisany "zjawisku samemu w sobie".

Otrzymując równania (26b) i (30b) założono zerowe warunki początkowe dla zaburzeń. W konsekwencji operatory odbicia i transmisji zostały podane w postaci niezależnej od stanów początkowych. W ogólnym przypadku taka zależność wystąpi i łatwo ją uwzględnić w przedstawionych w tej pracy wzorach. Wpływ "historii" układu na przebieg zjawiska, zwłaszcza w przypadku nieliniowym (zależność od postaci zaburzenia początkowego!), jest ważną cechą wymagającą dalszej analizy. Na szczególną uwagę zasługuje też następujący problem ogólny, którego znaczenie wykracza poza charakterystyczny dla akustyki opis nieliniowości. Równania tworzące warunki graniczne wyrażone przez zaburzenia (lub jedno z zaburzeń) spełniające równania propagacji są równaniami nieliniowymi rzędu odpowiadającego rzędowi nieliniowości równania propagacji (na przykład równanie (49) w naszym przypadku). Możliwe jest więc, że równania graniczne będą posiadały dwa, trzy lub więcej pierwiastków to znaczy będą prowadziły do dwu lub większej liczby postaci operatorów odbicia i transmisji. Przy czym redukcji ich liczby (do jednej postaci) nie będzie można przeprowadzić posługując się argumentami typu- patrz zdanie po wzorze (56). Należy się więc liczyć z wystąpieniem przynajmniej, dwóch mających fizyczne znaczenie, asymptotyk odbiciowo-transmisyjnych w zagadnieniach opisywanych równaniami o rzędzie nieliniowości trzy lub większym (teoretycznie dwa- jednak w tej pracy jedna z gałęzi jest nie fizyczna w założonym rzędzie dokładności opisu).

## PODZIĘKOWANIE

Autor dziękuje Profesorowi Leszkowi Filipczyńskiemu i Komitetowi Badań Naukowych (KBN Grant nr. 7T07 B 034 14) za wsparcie finansowe, które wydatnie przyczyniło się do powstania tej pracy.

## DODATEK A

Tensor ciśnień  $\Pi_{kl}$  ma postać [8]

$$\Pi_{kl} = P_{th}(g, s) \delta_{kl} - \sigma_{kl}, \quad k, l = 1, 2, 3 \quad A1$$

gdzie:  $P_{th}$  - ciśnienie termodynamiczne,  $\rho, s$  - gęstość i entropia odpowiednio;  $\sigma_{k,l}$  - tensor naprężeń lepkich. Dla ośrodków klasycznie lepkich i w przybliżeniu potencjalnym ( $\mathbf{v} = \nabla\Phi$ ), dywergencja  $\sigma_{k,l}$  przyjmuje postać

$$-\partial_{x_i} \sigma_{k,l} = -\nabla^2 \alpha_{2L} \Delta \Phi = \nabla^2 \mathcal{A}_{L} \Phi, \quad A2$$

$$\alpha_{2L} \equiv (\frac{4}{3} \eta_s + \eta_0) / 2, \quad A3$$

$$\mathcal{A}_{L} = -\alpha_{2L} \Delta = -(\alpha_{2L} / c_m^2) \partial_{tt} + O(\alpha(q + \alpha)), \quad A4$$

gdzie  $\eta_i, \eta_b$  - lepkości ścinania i objętościowa odpowiednio. Całkowita siła na jednostkę objętości ośrodka jest równa

$$-\partial_{x_j} \Pi_{ki} = -\nabla \tilde{P}, \quad \text{A5}$$

$$\tilde{P}(g, s, \Phi) = P_{ih}(\rho, s) + 2\mathcal{A}_{Ls}\Phi$$

Dla okołoadiabatycznej przemiany ośrodka, w pierwszym rzędzie względem zmian entropii [9],

$$P_{ih}(g, s) = P^*(g) + \partial_s P_{ih}(g)|_{g, s=s_0} (s - s_0) = P^* + 2\mathcal{A}_{ih}\Phi, \quad \text{A6}$$

$$\mathcal{A}_{ih} \equiv -\alpha_{2ih}\Delta, \quad \text{A7}$$

gdzie  $P^*$  opisuje ciśnienie w przemianie adiabatycznej. W takim razie ciśnienie  $\tilde{P}$  może być przedstawione następująco,

$$\tilde{P}(g, \Phi) = P^*(g) + 2\mathcal{A}\Phi \quad \text{A8}$$

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}_{ih} + \mathcal{A}_{Ls} = -(\alpha_{2ih} + \alpha_{2Ls})\Delta = -\alpha_2\Delta, \quad \text{A9}$$

dla ośrodka klasycznie lepkiego. Niemniej jednak operator

$$2\mathcal{A}\Phi = 2(\mathcal{A}_{ih} + \mathcal{A}_{Ls})\Phi = \tilde{P}(g, s, \Phi) - P^*(g) + O(s^2) \quad \text{A10}$$

może być zrekonstruowany z pomiarów słabosygnałowego współczynnika absorpcji  $\alpha(\omega)$  [7].

Po podstawieniu  $\tilde{P}(g, \Phi) = P^*(g) + 2\mathcal{A}\Phi$  do równania transportu pędu, gdzie dla m-tego składnika

$$P^*(g_m) = \frac{g_{0m} c_{m0}^2}{q\gamma_m} \left( \frac{g_m}{g_{0m}} \right)^{\gamma_m} \quad \text{A11}$$

albo dla empirycznego równania stanu,  $\gamma_m \equiv 1 + (B/A)_m$

$$P^*(g_m) = P_{m0} + \frac{g_{0m} c_{m0}^2}{q} \left[ \left( \frac{g_m}{g_{0m}} - 1 \right) + \frac{\gamma_m - 1}{2} \left( \frac{g_m}{g_{0m}} - 1 \right)^2 + O(q^3) \right], \quad \text{A12}$$

Dla obu przypadków otrzymujemy

$$g_m(\mathbf{x}, t) = g_{0m} \left[ 1 - \frac{q}{c_{m0}^2} \left( \partial_t \Phi + \frac{q}{2} (\nabla \Phi)^2 + \frac{q\gamma_m - 2}{2c_{m0}^2} (\partial_t \Phi)^2 + 2\mathcal{A}_m \Phi \right) \right] + \alpha q (\alpha q + \alpha), \quad \text{A13}$$

$$c_m^2(\mathbf{x}, t) = c_{m0}^2 \left[ 1 - \frac{q(\gamma_m - 1)}{c_{m0}^2} \left( \partial_t \Phi + \frac{q}{2} (\nabla \Phi)^2 + \frac{q\gamma_m - 2}{2c_{m0}^2} (\partial_t \Phi)^2 + 2\mathcal{A}_m \Phi \right) \right] + \alpha q (\alpha q + \alpha). \quad \text{A14}$$

Z równania transportu masy i wzoru A13 możemy otrzymać, w pierwszym rzędzie względem  $q$  i  $\alpha$ , równanie Kuznetsova [10] i równanie (15) [7].

Zaburzenie całkowitego ciśnienia  $\tilde{P}$  ze stanu równowagi  $P_{m0}$  przyjmuje postać

$$P_m(\mathbf{x}, t) = P_m[\Phi] \equiv \tilde{P}(g_m[\Phi], \Phi) - P_{m0} = -g_{\alpha m} (\partial_t \Phi + qL_m[\Phi]) + \alpha q (\alpha q + \alpha) \quad \text{A15}$$



$$L_m[\Phi] \equiv \frac{1}{2} \left[ (\nabla\Phi)^2 - \left( \frac{1}{c_{m0}} \partial_t \Phi \right)^2 \right] \quad A16$$

Z powyższych równań wynika że,  $\bar{P}$  jest całkowitym i rzeczywistym (faktycznym) dynamicznym czynnikiem w równaniu pędu- w przeciwieństwie do  $P^*$  i  $P_{th}$ . Oznacza to, że równanie definicyjne A15 jest dobrą definicją potencjalnych zaburzeń całkowitego ciśnienia w ośrodku. Używamy A15 jako określenie ciśnienia akustycznego  $P_m$  w ośrodku, który jest charakteryzowany przez zbiór równowagowych (lub słabosygnalowych) parametrów  $\{m\} \equiv \{c_{m0}, g_{0m}, a_m(\omega), \dots\}$ . Wykazano [7] że, dla rozwiązań równania Kuznetsova (lub (15) i (24) w pracy [7]) człon  $L_m[\Phi]$  jest wyższego rzędu względem  $(\partial_t \Phi)^2$ ,  $qL\alpha - \alpha q^2$ . Dlatego operator  $P_m$  w A15 może być zredukowany do

$$P_m = -g_{0m} \partial_t + \alpha(q(q+\alpha)) \quad A17$$

Przybliżenie to jest odpowiednie do tego by być stosowanym do rozwiązań (15) w celu wyznaczenia ciśnienia  $P_m$  z odpowiednią dokładnością.

## DODATEK B

Stosując do (24) w pracy [7] uogólnioną transformację Fouriera względem  $x$  i transformację Fouriera względem zmiennej  $r_2$  otrzymujemy

$$\zeta^2 \Phi_2 + \zeta \frac{2}{c_{20}} \omega \Phi_2 - i \frac{\omega \Phi_2}{c_{20}^2} \left[ 2\alpha(\omega) \Phi_2 + q_2 ((\omega \Phi_2) \otimes (\omega \Phi_2)) \right] = 0, \quad B1$$

gdzie  $\zeta$ - zespolona liczba falowa [7] ( $\mathbf{K} = \zeta \mathbf{e}$ - wektor falowy w trzech wymiarach, w jednym wymiarze  $\mathbf{e} = 1$  albo  $-1$ ). Możemy przepisać B1 w postaci "w pobliżu rozwiązania" względem  $\zeta \Phi_2(\omega, \zeta)$ ,

$$\zeta \Phi_2 = - \frac{\omega \Phi_2}{c_{20}} \left( 1 - \sqrt{1 + i \left( \frac{2\alpha(\omega) \Phi_2 + q_2 (\omega \Phi_2) \otimes (\omega \Phi_2)}{\omega \Phi_2} \right)} \right) \quad B2$$

$$\zeta \Phi_2 = i(\alpha(\omega) \Phi_2 + q_2 (\omega \Phi_2) \otimes (\omega \Phi_2)) / c_{20} + \alpha(q+\alpha)^2 \quad B3$$

to znaczy  $\zeta^2 \Phi_2 = 0 + \alpha(q+\alpha)^2$ ;  $\partial_{xx} \Phi_2(\cdot, x) = 0 + \alpha(q+\alpha)^2$ .

## DODATEK C

W celu faktoryzacji operatorów

$$w[\{m\}; v^+] \equiv \frac{\frac{1}{2} u \cdot}{z_1 + z_2 + w \cdot v^+}, \quad C1$$

$$R_0 \{ \{m\}, v^+ \} \equiv \frac{Z_1 - Z_2 + \frac{1}{2} u v^+}{Z_1 + Z_2 + w v^+} \quad C2$$

w dziedzinie czasu, musimy rozwiązać następujące niejednorodne równanie

$$[Z_1 + Z_2 + w \cdot v^+] v^- = Si4[v^+] \quad C3$$

To jest

$$-(z_{01} \bar{A}_1 + z_{02} \bar{A}_2) v^- + (z_{01} + z_{02} + w \cdot v^+) v^- = Si4[v^+] \quad C4$$

$$Si4[v^+] \equiv \begin{cases} \frac{1}{2} u \cdot (\cdot) & \text{dla } w \\ (Z_1 - Z_2 + \frac{1}{2} u v^+) v^+ & \text{dla } R_0 \end{cases} \quad C5$$

Jezeli  $v^-$  może być przedstawione (w przybliżeniu) w skończenie wymiarowej bazie funkcji Fouriera to C1 jest rozwiązywalne. W tym przypadku  $R_0$  i  $w$  są macierzami, a więc dla wieloskładnikowych reprezentacji mają one tylko numeryczną wartość. Na szczęście, dla klasycznej absorpcji Eq C4 rozwiązuje się z zastosowaniem konwencjonalnych metod. Mamy

$$-(z_{01} \bar{A}_1 + z_{02} \bar{A}_2) = (z_{01} \alpha_1^2 + z_{02} \alpha_2^2) \partial_t = \alpha \partial_t, \quad C6$$

i C4 przyjmuje postać

$$\partial_t v^- + \frac{(z_{01} + z_{02} + w \cdot v^+)}{\alpha} v^- = \frac{Si4[v^+]}{\alpha} \quad C7$$

Jest to niejednorodne liniowe równanie Bernoulliego. Jego rozwiązanie (z zerowymi warunkami początkowymi) ma postać,

$$v^-(t) = \int_0^t \frac{1}{\alpha \xi} \exp \left[ -\frac{1}{\alpha \xi} \left( (z_{01} + z_{02})(t-t') + w \int_{t'}^t v^+(t'') dt'' \right) \right] Si4[v^+(t')] dt' \quad C8$$

Jak widać jądro  $w_0$  podstawowego operatora  $w_0$  ma postać

$$w_0(t, t'; v^+(t)) \equiv \frac{1}{\alpha \xi} \exp \left[ -\frac{1}{\alpha \xi} \left( (z_{01} + z_{02})(t-t') + w \int_0^{t-t'} v^+(t-\tau) d\tau \right) \right], \quad C9$$

i

$$w[\cdot; v^+] \circ (\cdot) = u w_0 \circ (\cdot) / 2 = \frac{u}{2} \int_0^t w_0(t, t'; v^+(t)) (\cdot) dt, \quad C10$$

$$R_0[\cdot; v^+] v^+ = \int_0^t w_0(t, t'; v^+(t)) [Z_1 - Z_2 + \frac{1}{2} u v^+(t')] v^+(t') dt \quad C11$$

Jezeli  $|\partial_t v^+ / v^+| \ll 1/\alpha \xi$  to, mamy

$$v^-(t) = R_0 v^+(t) = \frac{Z_1 - Z_2 + \frac{1}{2} u v^+(t)}{z_{01} + z_{02} + \frac{1}{2} w v^+(t)} v^+(t) \quad C12$$

## DODATEK D

Na podstawie wzorów (117) i (118) otrzymujemy

$$St_{NLL} \equiv \frac{v_{NL}^-(t)}{v_L^-(t)} = \frac{P_{NL}^-(t)}{P_L^-(t)} + \alpha(q(q+\alpha)) = \frac{r_v v^+(t)}{R_v} = \frac{r_p P^+(t)}{R_p} + \alpha(q(q+\varepsilon)), \quad D1$$

$$r_v, r_p \propto \alpha(q), \quad P^* = z_{01} v^* + \alpha(q+\alpha)$$

Ze wzorów (60) i (89) wynika,

$$St_{NLL} = \left( q \frac{2z_{01}z_{02} \left( \frac{z_{02}}{c_{10}} \beta_1 - \frac{z_{01}}{c_{20}} \beta_2 \right) v^+(t)}{(z_{01} - z_{02})(z_{01} + z_{02})^2} \right) = q \frac{2z_{02} \left( \frac{z_{02}}{c_{10}} \beta_1 - \frac{z_{01}}{c_{20}} \beta_2 \right) P^+(t)}{(z_{01} - z_{02})(z_{01} + z_{02})^2} + \alpha(q(q+\alpha)) \quad D2$$

W celu obliczenia powyższego stosunku przy pomocy wielkości wymiarowych należy przyjąć  $q=1$ . Ciśnienie podajemy w [Pa]. Obliczmy  $St_{NLL}$  dla dwóch układów środków 1) (krew | mięsień serca), 2) (krew | tłuszcz).

Dane **krew**

$$z_{01} = 1060 [kg/m^3] \cdot 1567 [m/s] = 1.661 \cdot 10^6, \quad c_{10} = 1567 [m/s], \quad \beta_1 = 1 + 0.5 \cdot 6.05,$$

**mięsień serca**

$$z_{02} = 1058 [kg/m^3] \cdot 1542 [m/s] = 1.661 \cdot 10^6, \quad c_{20} = 1542 [m/s], \quad \beta_2 = 1 + 0.5 \cdot 5.8$$

**tłuszcz**

$$z_{02} = 920 [kg/m^3] \cdot 1476 [m/s] = 1.352 \cdot 10^6, \quad c_{10} = 1476 [m/s], \quad \beta_2 = 1 + 0.5 \cdot 11$$

W pierwszym przypadku (krew | mięsień serca) otrzymujemy

$$|St_{NLL}| = 0.11 \cdot 10^{-9} [1/Pa] \cdot P^*$$

co dla  $P^* = 10^7 [Pa]$  daje  $St_{NLL} = 0.0011$ .

W drugim (krew | tłuszcz),

$$|St_{NLL}| = (3.7 - 4.1) \cdot 10^{-9} [1/Pa] \cdot P^*$$

co dla  $P^* = 10^7 [Pa]$ , daje  $St_{NLL} \approx 0.037$ . Jest to wielkość ponad trzydziestokrotnie większa niż w przypadku (krew | mięsień serca).

## LITERATURA

- [1] L. M. BREKHOVSKIKH, O. A. GODIN, Acoustics of layered media, Część I i II, SPRINGER-VERLAG 1990
- [2] D. T. BLACKSTOCK, Normal reflection of finite amplitude plane waves from a rigid wall, PROC OF THE THIRD INTERNATIONAL CONGRESS ON ACOUSTICS, Stuttgart, 1959, ELS PUB COMP, AMSTERDAM, LONDON, NEW YORK, PRINCETON, 1961
- [3] L. FILIPCZYŃSKI, A. GRABOWSKA, Deviation of the acoustic pressure to particle velocity ratio from the  $\rho c$  value in liquids and solids at high pressures, ARCHIVES OF ACOUSTICS, 14, 3-4, 1989, pp 173-179
- [4] A. L. VAN BUREN, M. A. BREAZEALE, Reflection of finite-amplitude ultrasonic waves, Część I i II, J. Acoust Soc. Am. 44(4) 1968, pp 1014-1027
- [5] M. A. BREAZEALE, W. W. LESTER, Demonstration of the "last stable waveform" of finite amplitude waves. J. Acoust Soc. Am. 33, 1961, pp 1803
- [6] F. A. DUCK, Physical properties of tissue. A comprehensive reference book, Academic Press, Harcourt Brace Jovanovich, Publishers London San Diego New York etc., 1990
- [7] J. WÓJCIK, Conservation of energy and absorption in acoustic fields for linear and nonlinear propagation, J. Acoust Soc. Am. 104(5), November 1998, pp 2654-2663
- [8] J. F. CLARKE, M. McCHESENEY, The dynamics of real gases, LONDON BUTTERWORTHS, 1964 (<Mir> Moskwa 1967)
- [9] S. MAKAROV, M. OCHMAN, Nonlinear and thermoviscous phenomena in acoustics, Part I, ACUSTICA, Vol 82, 1996
- [10] V. P. KUZNETSOV, Equations of nonlinear acoustics, AKUST. ZH. 16, 1970, pp 548-553
- [11] R. T. BEYER, "Nonlinear acoustics in fluids", Van Nostrand Reinhold Company Inc, New York, 1984, pp. 207-208, 302-304, 193-205
- [12] S. MAKAROV, M. OCHMAN, Nonlinear and thermoviscous phenomena in acoustics, Part II, ACUSTICA, Vol. 83, 1997, pp 205

## SPIS TREŚCI

	strona
Streszczenie.....	3
I.WSTĘP.....	3
II.ZFORMUOWANIE ZAGADNIENIA.....	4
III.RÓWNANIA PODSTAWOWE.....	6
IV. RÓWNANIA I WARUNKI CIĄGŁOŚCI.....	9
V. OPERATORY ODBICIA I TRANSMISJI.....	10
VI. SEPARACJA RÓWNANIA PROPAGACJI.....	15
VII.WNIOSKI I Dyskusja.....	19
DODATKI	
A.....	22
B.....	24
C.....	24
D.....	26
LITERATURA.....	27



56523