ZASADNICZE WNIOSKI GEOMETRYCZNE

Z TEORYI ALGEBRAICZNEJ FORM KWADRATOWYCH PODWÓJNYCH

PRZEZ

DRA M. A. BARANIECKIEGO

Przedstawiono na posiedzeniu Towarzystwa, dnia 4 maja 1876 roku.

Własności wyrażeń algebraicznych, jednorodnych, nazywanych formami, bardzo troskliwie i nader szczegółowo są badane przez spółczesnych matematyków.

Wyniki tych badań, ciekawe ze względu algebraicznego, okażą się nie mniéj ważnemi, gdy będą przedstawione geometrycznie.

Mam zamiar objaśnić, jakim sposobem dla wywodów geometrycznych można zużytkować niektóre najprostsze własności form podwójnych kwadratowych (*).

Naturalnie, naprzód zjawia się kwestya, jakie znaczenie geometryczne posiada kwadratowa podwójna, albo, w ogóle, podwójna forma.

Przyrównywając do zera podwójną formę n^{ego} stopnia

$$a_0x_1^n + a_1x_1^{n-1}x_2 + a_2x_1^{n-2}x_2^2 + \ldots + a_{n-1}x_1x_2^{n-1} + a_nx_2^n,$$

którą umówmy się tak pisać :

$$(a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n)(x_1, x_2)^n,$$

otrzymujemy równanie jednorodne n^{ego} stopnia

(1) $$(a_0, a_1, \ldots, a_n)(x_1, x_2)^n = 0,$$

(*) Główne prace w tym kierunku są :

CAYLEY « Fifth Memoir upon Quantics ». (Phil. Tras.)

FIEDLER « Die Elemente der neueren Geometrie und der Algebra der binæren Formen ». (Lipsk, 1862.)

CLEBSCH. « Theorie der binæren algebraischen Formen ». (Lipsk, 1872.)

sprawdzające się dla n wartości zmiennéj

$$\frac{x_1}{x_2},$$

które to wartości nazwiemy

$$v_1, v_2, \ldots, v_n.$$

Jeśli przedstawimy sobie prostę i na niéj punkt np. O, to pierwiastki $v_1, \ldots, v_n$ mogą przedstawiać odległości pewnych punktów téj prostéj od punktu O; takim sposobem równanie (1) może służyć dla przedstawienia szeregu pewnych n punktów téj prostéj.

Lecz inaczéj jeszcze można rozumieć równanie (1). Niechaj będą dwa dowolnie wzięte punkta A i B i przechodząca przez nie prosta. To wtedy x_1 i x_2 mogą wyrażać dwie liczby całkowite (mające jakiekolwiek wartości niezależne), których stosunek, v, jest równy stosunkowi odległości pewnego punktu naszéj prostéj, odpowiadającego tym wartościom x_1 i x_2, od stałych punktów A i B. (Te punkta A i B nazywać daléj będziemy zasadniczemi punktami.) Widzimy więc, że nasze równanie (1) przedstawia « prostolinijny szereg » n punktów którego « podstawa » jest prosta AB.

Jeżeli $n=2$, t. j. forma jest kwadratowa, to, na mocy powyższego, równanie

$$a_0x_1^2 + a_1x_1x_2 + a_2x_2^2 = 0,$$

czyli

(2) $$(a_0, a_1, a_2)(x_1, x_2)^2 = 0,$$

przedstawia parę punktów.

Gdybyśmy zaś na płasczyznie poprowadzili dwie przecinające się proste i wyobrazili sobie przez punkt przecięcia przechodzące rozmaite inne proste, to te proste utworzą « płaską wiązkę prostolinijnych promieni », a punkt przecięcia będzie « wierzchołkiem wiązki ». Wtedy x_1 i x_2 mogą być dwiema liczbami, których stosunek v, równa się stosunkowi wstaw kątów, utworzonych przez pewien promień odpowiedni wiązki z dwoma początkowo poprowadzonemi (zasadniczemi) jéj promieniami. Zatém, równanie (1) może przedstawiać wiązkę płaską n prostolinijnych promieni; równanie zaś (2): parę prostych.

Jeszcze inaczéj. Przez linię przecięcia się dwóch płasczyzn przeprowadzając inne płasczyzny, otrzymamy « wiązkę płasczyzn ». Wtedy x_1 i x_2 mogą być dwiema liczbami, których stosunek v, jest równy stosunkowi wstaw kątów, utworzonych przez odpowiednią im płasczyznę z dwiema zasadniczemi płasczyznami wiązki. A więc, równanie (1) przedstawi wiązkę n płasczyzn, równanie zaś (2) przedstawi parę płasczyzn.

Widzimy zatém, że równanie, otrzymane przez przyrównanie formy podwójnéj do zera, może służyć jako analityczne wyrażenie zasadniczych przedstawień geometrycznych : prostolinijnego szeregu punktów, płaskiéj wiązki prostolinijnych promieni, wiązki płasczyzn. W szczególnym przypadku, równanie powstałe z przyrównania formy podwójnéj kwadratowéj do zera, służy jako analityczne wyrażenie pary punktów, pary prostych, lub téż pary płasczyzn.

Odpowiednio do tych trzech możliwych pojmowań równania (2) wypadłoby nam przy wypowiedzeniu jakiejkolwiek własności oddzielnie mówić o punktach, linijach i płasczyznach — co byłoby za długo. Możnaby wprawdzie uogólnić te trzy pojmowania i wszystkie jednocześnie mieć na widoku, wprowadzając jakieś ogólne nazwanie np. element — lecz wtedy nie dość jasno wypadki by się nam przedstawiały. Dla tego, zdaje się, będzie i krócéj i wygodniéj dla naszego skromnego dziś założenia, jeżeli nadal przez równanie (2) rozumieć będziemy tylko parę punktów.

W nowszym kierunku badań nad formami wybitnie przejawia się zadanie roztrząsania własności funkcyj algebraicznych przy pomocy innych funkcyj, takim sposobem z poprzednich powstałych, że wzajemna zależność tych (początkowo wziętych względem innych, z nich utworzonych) funkcyj nie ulega zmianie, jeżeli wielkości zmienne ulegną liniowemu przekształceniu.

Lecz jakie znaczenie geometryczne przedstawiać może przekształcenie liniowe zmiennych formy podwójnéj?

Jeśli forma zależy od zmiennych x_1 i x_2 i one ulegną liniowemu przekształceniu

$$x_1 = \alpha y_1 + \beta y_2,$$

$$x_2 = \gamma y_1 + \delta y_2,$$

którego wyznacznik

$$\begin{vmatrix} \alpha, & \beta \\ \gamma, & \delta \end{vmatrix} = m,$$

nazywa się «modułem przekształcenia», to, oczywiście, zastąpienie zmiennych x_1 i x_2 zmiennném y_1 i y_2 wyraża, że od innych, niż poprzednio, zasadniczych punktów (tejże prostéj) chcemy liczyć odległości punktów, przedstawionych przez przyrównaną do zera formę podwójną. Innemi słowy, to liniowe przekształcenie wyraża, że inne punkta przyjmujemy jako zasadnicze.

Jeżeli przyjmiemy, że mamy jakąkolwiek formę (albo systemat form) f i że ta forma (lub ten systemat) w skutek liniowego przekształcenia, którego moduł M, przechodzi w formę (lub systemat form) F, i że mamy funkcyę φ, pewnym sposobem utworzoną ze spółczynników i zmiennych formy (lub systematu form) f, i funkcyę Φ zupełnie tak powstałą ze spółczynników i zmiennych zachodzących w F, jak φ z f, to, jeżeli ma miejsce związek

$$\Phi = \mathrm{M}^p \varphi,$$

przy całkowitém p, powiadamy, że funkcya φ jest spółzmiennikiem formy (lub systematu form) f. W przypadku, jeśli funkcya φ jest stopnia zero względem zmiennych, zachodzących w f, nazywamy φ niezmienikiem formy (lub systematu form) f.

Co się tyczy spółzmienników i niezmienników form podwójnych, to zrobimy tu użytek z takiego twierdzenia :

Jeżeli dana jest forma podwójna lub systemat form podwójnych

$$f = f[x_1, x_2],$$

przechodzący, w skutek liniowego przekształcenia o module m, w formę lub systemat form

$$\mathrm{F} = \mathrm{F}[y_1, y_2],$$

to wtedy zawsze

$$m^p . \left(f\left[\frac{d}{dx_2}, -\frac{d}{dx_1}\right]\right) f = \left(f\left[\frac{d}{dy_2}, -\frac{d}{dy_1}\right]\right) \mathrm{F}.$$

Widzimy zatém, że, zgodnie z określeniem, funkcya

$$\left(f\left[\frac{d}{dx_2}, -\frac{d}{dx_1}\right]\right)f = \varphi,$$

jest niezmiennikiem albo spółzmiennikiem formy (lub systematu form) f. W przypadku, jeśli mamy systemat form podwójnych, to w funkcyi φ symbol funkcyjny $f[\ \ ]$ może się odnosić do jednéj z tych form, a to może być symbolicznie przez f pomnożone, choć f jest inną formą tego systematu.

Jeżeli dana jest jedna kwadratowa forma

$$(3) \qquad f = f[x_1, x_2] = a_0 x_1^2 + a_1 x_1 x_2 + a_2 x_2^2,$$

to wypadnie pomnożyć wyrażenie

$$f\left[\frac{d}{dx_2}, -\frac{d}{dx_1}\right] = a_0 \frac{d^2}{dx_2^2} - a_1 \frac{d^2}{dx_2 dx_1} + a_2 \frac{d^2}{dx_1^2},$$

symbolicznie przez f; i wtedy

$$a_0 \frac{d^2 f}{dx_2^2} - a_1 \frac{d^2 f}{dx_2 dx_1} + a_2 \frac{d^2 f}{dx_1^2} = 2a_0 a_2 - a_1^2 + 2a_2 a_0,$$

nazywając przez ρ otrzymane wyrażenie, widzimy, że

$$\rho = 4a_0 a_2 - a_1^2,$$

jest niezmiennikiem naszéj formy (3). Jest ono jednocześnie i dyskryminantem tej formy, gdyż, biorąc pierwsze jéj pochodne według x_1 i x_2, przyrównywając je do zera i rugując zmienne, otrzymamy ρ.

Równanie, powstałe z przyrównania formy (3) do zera, to jest równanie $f=0$, przedstawia, jak wiemy, parę punktów. A jeżeli jednocześnie niezmiennik $\rho=0$, to znaczy, że wtedy ta funkcya spółczynników równania $f=0$ identycznie jest równą zeru, choćbyśmy zmienne przekształcili liniowym sposobem. Lecz to przekształcenie wyraża, jakeśmy powyżéj powiedzieli, przyjęcie innych, niż poprzednio, punktów za zasadnicze. Zatém związek $\rho=0$, jako niezależący od tego, które punkta naszéj prostéj przyjmujemy za zasadnicze, wskazuje na istnienie pewnéj szczególnéj wtedy własności pary punktów $f=0$. Jakoż, jeżeli v_1 i v_2 są wartościami stosunku $\frac{x_1}{x_2}$, zadosyć czyniącemi równaniu $f=0$, to wtedy, jak wiemy,

$$v_1 + v_2 = -\frac{a_1}{a_0}; \quad v_1 v_2 = \frac{a_2}{a_0},$$

i

$$\rho = 4a_0 a_2 - a_1^2 = -a_0^2 (v_1 - v_2)^2.$$

Jeśli zaś ma być $\rho=0$, to koniecznie $v_1 = v_2$, to jest dwa punkta, przedstawione równaniem $f=0$, zchodzą się z sobą, czyli : jeżeli niezmiennik ρ formy f równa się zeru, to równaniem $f=0$ przedstawiony jest punkt podwójny, co zresztą było łatwém do przewidzenia. Stosując przytoczone poprzednio twierdzenie do dwóch form podwójnych kwadratowych

$$f_1 = f_1[x_1, x_2] = (a_0, a_1, a_2)(x_1, x_2)^2,$$
$$f_2 = f_2[x_1, x_2] = (b_0, b_1, b_2)(x_1, x_2)^2,$$

pomnożymy otrzymane z pierwszéj wyrażenie

$$f_1\left[\frac{d}{dx_2}, -\frac{d}{dx_1}\right] = a_0\frac{d^2}{dx_2^{\,2}} - a_1\frac{d^2}{dx_2 dx_1} + a_2\frac{d^2}{dx_1^{\,2}},$$

symbolicznie przez f_2, to

$$a_0\frac{d^2f_2}{dx^2_2} - a_1\frac{d^2f_2}{dx_2dx_1} + a_2\frac{d^2f_2}{dx^2_1} = 2a_0b_2 - a_1b_1 + 2a_2b_0,$$

nazywając to wyrażenie przez ψ, widzimy, że

$$\psi = 2a_0b_2 - a_1b_1 + 2a_2b_0,$$

jest niezmiennikiem form f_1 i f_2, że zatém, jeśli przyrównamy te formy do zera

$$\left\{\begin{aligned} f_1 &= 0, \\ f_2 &= 0, \end{aligned}\right. \tag{4}$$

i jeżeli ma miejsce równość

$$\psi = 0,$$

to wtedy istnieje pewna zależność między dwiema parami punktów, przedstawionych równaniami (4), niezawisła od tego, które punkta prostéj przyjmujemy jako zasadnicze.

Jeżeli v_1 i v_2 są pierwiastkami pierwszego z równań (4), zaś w_1 i w_2 pierwiastkami drugiego, to, robiąc użytek ze związków

$$v_1 + v_2 = -\frac{a_1}{a_0},\quad v_1v_2 = \frac{a_2}{a_0};\quad w_1 + w_2 = -\frac{b_1}{b_0};\quad w_1w_2 = \frac{b_2}{b_0},$$

otrzymujemy

$$\psi = a_0b_0[2(v_1v_2 + w_1w_2) - (v_1 + v_2)(w_1 + w_2)].$$

Jeśli tedy $\psi = 0$, to zatém idzie

$$2(v_1v_2 + w_1w_2) - (v_1 + v_2)(w_1 + w_2) = 0,$$

co można jeszcze przedstawić w następujących postaciach

$$\frac{1}{v_1 - v_2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{v_1 - w_1} + \frac{1}{v_1 - w_2}\right),$$

$$\frac{1}{v_2 - v_1} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{v_2 - w_1} + \frac{1}{v_2 - w_2}\right),$$

$$\frac{1}{w_1 - w_2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{w_1 - v_1} + \frac{1}{w_1 - v_2}\right),$$

$$\frac{1}{w_2 - w_1} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{w_2 - v_1} + \frac{1}{w_2 - v_2}\right).$$

Widzimy więc, że odwrotności każdéj z wielkości $v_1 - v_2$; $v_2 - v_1$; $w_1 - w_2$; $w_2 - w_1$ są średniemi arytmetycznemi odwrotności odpowiednich dwóch wielkości, że zatém każda z wypisanych czterech wielkości jest średnią harmoniczną tych wielkości, których odwrotności wchodzą w prawe strony odpowiedniego z powyższych związków. Że zaś wielkości $v_1 - v_2$; $v_1 - w_1$; $v_1 - w_2$; $v_2 - v_1$ i t. d., odpowiadają odległościom punktów v_1 od v_2, v_1 od w_1, i t. d., to te związki wskazują, że odległość punktu v_1 od v_2 jest średnią harmoniczną względem odległości tegoż punktu v_1 od każdego z punktów w_1 i w_2, że odległość punktu v_2 od v_1 jest średnią harmoniczną względem odległości tegoż punktu v_2 od każdego z punktów w_1 i w_2, i że toż samo ma miejsce co do odległości punktu w_1 od w_2 względem odległości punktu w_1 od v_1 i v_2 i podobnież, co do odległości punktu w_2 od w_1 względem odległości punktu w_2 od v_1 i v_2. Innemi słowy: pary punktów v_1 i v_2 oraz w_1 i w_2 są dwiema parami wzajemnie sprzężonych punktów harmonicznych. Do tego wypadku doszliśmy w założeniu, że $\psi = 0$. Powiemy zatém, że jeżeli nasz niezmiennik ψ dwóch form f_1 i f_2 równy jest zeru, to dwie pary punktów, przedstawionych równaniami (4), są dwiema parami harmonicznych punktów.

Żeby należycie zużytkować tę wskazówkę, utwórzmy anharmoniczny stosunek czterech punktów, przedstawionych równaniami (4), to jest odpowiadających pierwiastkom v_1, v_2 pierwszego i w_1, w_2 drugiego, i nazwijmy go np. λ:

$$(v_1, v_2, w_1, w_2) = \frac{v_1 - w_1}{v_1 - w_2} : \frac{v_2 - w_1}{v_2 - w_2} = \lambda.$$

i utwórzmy

$$\frac{1+\lambda}{1-\lambda} = \frac{(v_1 + v_2)(w_1 + w_2) - 2(v_1 v_2 + w_1 w_2)}{(v_1 - v_2)(w_1 - w_2)},$$

co za pomocą przywiedzionych wyżéj związków, możemy przez spółczynniki form f_1 i f_2 tak wyrazić

$$\left(\frac{1+\lambda}{1-\lambda}\right)^2 = \frac{(2a_0 b_2 - a_1 b_1 + 2a_2 b_0)^2}{(4a_0 a_2 - a^2_1)(4b_0 b_2 - b^2_1)}.$$

W liczniku wyrażenia po prawéj stronie zachodzi nasz niezmiennik ψ, w mianowniku zaś iloczyn dwóch niezmienników takichże, jak powyżéj oznaczony przez ρ; nazwijmy je ρ_1 i ρ_2; zatém

$$\left(\frac{1+\lambda}{1-\lambda}\right)^2 = \frac{\psi^2}{\rho_1 \rho_2}.$$

Jeżeli którykolwiek z niezmienników ρ_1 lub ρ_2 równy jest zeru, to wtedy odpowiednio albo dwa punkta pary $f_1 = 0$, albo dwa punkta pary $f_2 = 0$ zejść się ze sobą winny, jakeśmy to wyżéj widzieli. Lecz to rzeczywiście ma wtedy miejsce, gdyż, jako bezpośrednie następstwo równości $\rho_1 = 0$ lub $\rho_2 = 0$, stosunek anharmoniczny λ ma tu wartość

$$\lambda = +1,$$

co, jak wiemy, oznacza, że dwa punkta pary v_1 i v_2 lub dwa punkta pary w_1 i w_2 ze sobą się zchodzą.

Jeżeli

$$\psi = 0,$$

to

$$\lambda = -1,$$

to jest punkta tych par tworzą systemat harmonicznych punktów, jak to powyżéj już mieliśmy.

Jeśli nakoniec licznik równa się mianownikowi,

$$\psi^2 = \rho_1\rho_2,$$

to wtedy

$$\lambda = 0,$$

co, jak wiadomo, oznacza, że jeden z punktów jednéj pary zchodzi się z jednym z punktów drugiéj pary, tak, iż równość

$$\rho_1\rho_2 - \psi^2 = 0,$$

czyli

$$(a^2_1 - 4a_0a_2)(b^2_1 - 4b_0b_2) - [2(a_0b_2 + a_2b_0) - a_1b_1]^2 = 0, \tag{5}$$

przedstawia tém samém warunek istnienia spólnych pierwiastków równań (4). Wiemy zaś, że gdy istnieją spólne pierwiastki równań, to wypadek rugowania zmiennych tożsamościowo równy jest zeru. Zatém równość (5), jako warunkująca spólność pierwiastków, przedstawia właśnie związek, otrzymywany z tego rugowania, czyli jest ona wypadkiem dwóch równań (4).

Oznaczmy lewą stronę równości (5) głoską χ. Tę funkcyę spółczynników form f_1 i f_2 możemy przedstawić w takiéj postaci

$$\chi = 4(a_0b_1 - a_1b_0)(a_1b_2 - a_2b_1) - [2(a_0b_2 - a_2b_0)]^2.$$

Upatrując analogię między χ i powyższym dyskryminantem ρ, widzimy że χ jest dyskryminantem takiéj formy

$$((a_0b_1 - a_1b_0),\ 2(a_0b_2 - a_2b_0),\ (a_1b_2 - a_2b_1))(x_1, x_2)^2,$$

którą nazwijmy np. θ. Lecz tę funkcyę θ możemy przedstawić w postaci funkcyonalnego wyznacznika:

$$\theta = \begin{vmatrix} \dfrac{df_1}{dx_1}, & \dfrac{df_1}{dx_2} \\[2ex] \dfrac{df_2}{dx_1}, & \dfrac{df_2}{dx_2} \end{vmatrix},$$

a przekształcając w tym wyznaczniku zmienne sposobem liniowym, zobaczymy, że dojdziemy do podobnegoż wyznacznika funkcyjnego względem nowych zmiennych, pomnożonego przez moduł przekształcenia. Jest tedy funkcya θ spółzmiennikiem form f_1 i f_2.

Jeśli tę formę θ przyrównamy do zera, to równanie

$$\theta = 0,$$

przedstawi także parę punktów. A gdy θ jest spółzmiennikiem form f_1 i f_2, to para punktów $\theta = 0$ znajduje się w pewnéj zależności względem dwóch par punktów $f_1 = 0$ i $f_2 = 0$, niezmiennéj wskutek liniowego przekształcenia zmiennych, a więc niezawisłéj od tego, które punkta przyjmujemy jako zasadnicze.

Żeby wyjaśnić tę zależność między trzema parami punktów przedstawionych równaniami $f_1 = 0$, $f_2 = 0$, $\theta = 0$, to jest równaniami

$$(a_0, a_1, a_2)(x_1, x_2)^2 = 0,$$

$$(b_0, b_1, b_2)(x_1, x_2)^2 = 0,$$

$$((a_0b_1 - a_1b_0),\ 2(a_0b_2 - a_2b_0),\ (a_1b_2 - a_2b_1))(x_1, x_2)^2 = 0,$$

utwórzmy, raz dla pierwszéj i trzeciéj, a powtóre dla drugiéj i trzeciéj z tych form, niezmienniki na wzór powyższego niezmiennika ψ; otrzymamy tedy

$$\psi_1 = 2a_0(a_1b_2 - a_2b_1) - 2a_2(a_1b_2 - a_2b_0) + 2a_2(a_0b_1 - a_1b_0),$$

$$\psi_2 = 2b_0(a_1b_2 - a_2b_1) - 2b_1(a_0b_2 - a_2b_0) + 2b_2(a_0b_1 - a_1b_0).$$

Lecz tu tożsamościowo

$$\psi_1 = 0,$$

$$\psi_2 = 0;$$

zgodnie zatém z tém, cośmy powyżéj mówili, para punktów, wyznaczona pierwiastkami trzeciego z naszych równań, to jest równania, powstałego z przyrównania spółzmiennika θ do zera, jest harmonicznie sprzężona z punktami pierwszéj pary i z punktami drugiéj pary. Zatém dwa punkta przedstawione pierwiastkami naszego spółzmiennika, są podwójnemi punktami, czyli ogniskami inwolucyi punktów, wyznaczonéj dwiema parami tych punktów.

W podobny sposób przedstawiając daléj geometrycznie rezultaty algebraicznych badań nad podwójnemi formami kwadratowemi, moglibyśmy dojść do innych rozmaitych własności szeregów punktów, znajdujących się w inwolucyi, lub téż, w ogóle, w homograficzném czyli perspektywném położeniu, lecz, naprzód, wypadłoby wtedy wejść w szczegóły, a powtóre i powyższego wystarczy, aby pojąć, że nauka o formach zjawia się metodą wielkiéj ważności przy badaniach geometrycznych. A to właśnie stanowiło dzisiaj moje założenie.