M. R.

Roman Gutowski

DYNAMIKA TYPOLOGICZNA

WARSZAWA 1980

Praca wpłynęła do Redakcji dnia 18 marca 1980 r.

Zarejestrowana pod nr 11/1980

Wykład przygotowany na kurs szkoleniowy organizowany przez

Zakład Układów Mechanicznych IPPT PAN

i Sekcję Mechaniki Teoretycznej Komitetu Mechaniki PAN

IPPT PAN

N a   p r a w a c h   r ę k o p i s u

Instytut Podstawowych Problemów Techniki PAN

Nakład 170 egz. Ark.wyd. 4,6. Ark. druk. 7 .
Oddano do drukarni w kwietniu 1980 r.
Nr zamówienia 248/0/80

Warszawska Drukarnia Naukowa, Warszawa,
ul.Śniadeckich 8

Roman Gutowski
Politechnika Warszawska

DYNAMIKA TOPOLOGICZNA

1° Układy dynamiczne

Układem dynamicznym w przestrzeni metrycznej R nazywamy funkcję $q = f(p,t)$, która każdemu punktowi p przestrzeni R i każdej liczbie rzeczywistej $t(-\infty < t < +\infty)$, przyporządkowuje określony punkt $q \in R$ i ma następujące własności:

1) $f(p,t_0) = p$, dla dowolnego punktu $p \in R$

2) $\lim\limits_{\substack{p\to p_0\\ t\to t_0}} f(p,t) = f(p_0,t_0)$

Oznacza to, że dla każdego ciągu (p_n) punktów przestrzeni R zmierzającego do p_0 i dowolnego ciągu (t_n) liczb rzeczywistych zmierzającego do t_0, odpowiedni ciąg $f(p_n,t_n)$ punktów przestrzeni R zmierza do $f(p_0,t_0)$.

Inaczej mówiąc dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje takie $\delta > 0$, że jeśli $\varrho(p,p_0) < \delta$ i $|t-t_0| < \delta$ to

$$\varrho(f(p,t),f(p_0,t_0)) < \varepsilon ,$$

gdzie ϱ oznacza odległość w rozważanej przestrzeni metrycznej R

3) $$f(f(p,t_1),t_2) = f(p,t_1+t_2)$$

dla dowolnego punktu $p \in R$ i dowolnych liczb rzeczywistych t_1 i t_2.

Będziemy stosowali następujące oznaczenia

$$I \equiv (-\infty,+\infty),\quad I^+ \equiv \langle 0,+\infty),\quad I^- \equiv (-\infty,0\rangle$$

$f(A,K) = \bigcup\limits_{\substack{p\in A\\ t\in K}} f(p,t)$ dla dowolnych $A\subset R,\ K\subset I$

$$\Gamma_A \equiv \overline{f(A,I)},\quad \Gamma_A^+ \equiv \overline{f(A,I^+)},\quad \Gamma_A^- \equiv \overline{f(A,I^-)}$$

Dla każdej ustalonej wartości t (którą nazywamy czasem), funkcja $q = f(p,t)$ stanowi pewne przekształcenie przestrzeni R w siebie. Zatem układ dynamiczny wyznacza jednoparametryczną rodzinę G przekształceń przestrzeni R w siebie.

Funkcję f(p,t) przy ustalonym p nazywamy ruchem, zaś zbiór punktów $q = f(p,t)$ dla wszystkich $-\infty < t < +\infty$, to znaczy zbiór $f(p,I)$, nazywamy trajektorią tego ruchu.

Zbiór punktów f(p,t) przy ustalonym p i dowolnym $t > 0$ (lub $t \leqslant 0$), to znaczy zbiór $f(p,I^+)$ (lub $f(p,I^-)$) nazywamy dodatnią (lub ujemną) półtrajektorią, wychodzącą z punktu p.

Zbiór wszystkich punktów f(p,t) przy ustalonym p i dowolnym $t \in \langle T_1, T_2 \rangle$, to znaczy zbiór $f(p, \langle T_1, T_2 \rangle)$, nazywa się odcinkiem trajektorii, zaś liczba $T = T_2 - T_1$ nazywa się „długością czasową" tego odcinka trajektorii.

Jako pierwszy przykład układu dynamicznego rozważmy równania kanoniczne Hamiltona, przy założeniu, że funkcja Hamiltona nie zależy jawnie od czasu

$$H = H(\xi_1, \ldots, \xi_k, \eta_1, \ldots, \eta_k) \quad ,$$

gdzie $\xi_1, \ldots, \xi_k$ oznaczają współrzędne uogólnione, zaś $\eta_1, \ldots, \eta_k$ oznaczają pędy uogólnione. Równania kanoniczne Hamiltona mają postać

$$\left.\begin{aligned} \dot{\xi}_\sigma &= \frac{\partial H}{\partial \eta_\sigma} = a_\sigma(\xi_1, \ldots, \xi_k, \eta_1, \ldots, \eta_k) \\ \dot{\eta}_\sigma &= -\frac{\partial H}{\partial \xi_\sigma} = b_\sigma(\xi_1, \ldots, \xi_k, \eta_1, \ldots, \eta_k) \\ &\sigma = 1, \ldots, k \end{aligned}\right\} \tag{1.1}$$

Wprowadźmy oznaczenia

$$\begin{aligned} &\xi_1 = x_1, \ldots, \xi_k = x_k \ , \ \eta_1 = x_{k+1}, \ldots, \eta_k = x_n \\ &a_1 = \varphi_1, \ldots, a_k = \varphi_k \ , \ b_1 = \varphi_{k+1}, \ldots, b_k = \varphi_n \end{aligned} \qquad n = 2k$$

Możemy więc równania (1.1) napisać w postaci

$$\frac{dx_i}{dt} = \varphi_i(x_1, \ldots, x_n), \quad i = 1, \ldots, n \ , \quad \text{lub} \quad \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}) \tag{1.2}$$

gdzie $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n) \quad , \quad \boldsymbol{\varphi} = (\varphi_1, \ldots, \varphi_n) \quad .$

Zwróćmy uwagę na to, że prawa strona równania (1.2) nie zależy jawnie od zmiennej t. Takie układy nazywamy autonomicznymi.

Rozwiązania $x_i = x_i(t)$ $(i = 1,\dots,n)$ nazywamy ruchami, wielkości $x_1,\dots,x_n$ nazywamy współrzędnymi poruszającego się punktu n-wymiarowej przestrzeni euklidesowej E_n, zwanej też przestrzenią fazową, zaś krzywe, których równania parametryczne mają postać $x_i = x_i(t)$ $(i = 1,\dots,n)$, nazywamy trajektoriami ruchów.

Niech warunek początkowy dla równania (1.2) ma postać

$$\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \quad . \tag{1.3}$$

Zakładamy, że funkcja $\boldsymbol{\varphi}$ spełnia warunki zapewniające istnienie i jednoznaczność rozwiązań równania (1.2), spełniających warunek początkowy (1.3), w przedziale $-\infty < t < +\infty$. Oznaczmy to rozwiązanie przez

$$\mathbf{x} = \mathbf{g}(t;t_0,\mathbf{x}_0) \quad . \tag{1.4}$$

Rozwiązanie to jest ciągłe względem wszystkich swych argumentów, co wynika z odpowiednich twierdzeń o istnieniu i jednoznaczności tego rozwiązania oraz ciągłości rozwiązania równania różniczkowego względem wartości początkowych.

Rozwiązanie (1.4) ma następującą własność. Na mocy (1.3) dla $t = t_0$ jest

$$\mathbf{g}(t_0;t_0,\mathbf{x}_0) = \mathbf{x}_0 \quad . \tag{1.5}$$

Gdybyśmy warunek początkowy wzięli w chwili t_1, to znaczy $\mathbf{x}(t_1) = \mathbf{x}_0$, to rozwiązanie $\mathbf{x} = \mathbf{g}(t;t_1,\mathbf{x}_0)$ miałoby własność

$$\mathbf{g}(t_1;t_1,\mathbf{x}_0) = \mathbf{x}_0 \quad .$$

Ogólnie, rozwiązanie $\mathbf{x} = \mathbf{g}(t;s,\mathbf{x}_0)$ spełniające w chwili $t=s$ warunek $\mathbf{x}(s) = \mathbf{x}_0$ ma własność

$$\mathbf{g}(s;s,\mathbf{x}_0) = \mathbf{x}_0 \tag{1.6}$$

dla $s \in (-\infty, +\infty)$.

Oznaczmy punkty $\mathbf{x}_0$ przez p zaś funkcję, czyli odwzorowanie $\mathbf{g}$ przez f, to znaczy $\mathbf{g}(t;t_0,\mathbf{x}_0) = f(p.t)$.
Na mocy (1.5) spełniona jest własność (1) układów dynamicznych. Własność (2) układów dynamicznych wynika z faktu, że funkcja $\mathbf{g}$ jest ciągła względem swych argumentów.

Spełnienie własności (3) układów dynamicznych można wykazać następująco. Zwróćmy najpierw uwagę na fakt, że jeśli $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{g}(t;t_0,\boldsymbol{x}_0)$ jest rozwiązaniem równania (1.2), to funkcja $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{g}(t+c;\alpha,\boldsymbol{x}_0)$ (gdzie c = const $< \infty$) też jest rozwiązaniem tego równania, gdyż prawa strona równania (1.2) nie zależy jawnie od t i postać jego nie zmienia się przy zmianie t na t + c. Rozwiązanie to spełnia warunek $\boldsymbol{x}(\alpha)=\boldsymbol{x}_0$, gdy $\alpha=t_0+c$.

Wobec tego funkcja w postaci

$$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{g}(t-t_0;0,\boldsymbol{x}_0) \tag{1.7}$$

jest rozwiązaniem równania (1.2), przy czym jest ono równe rozwiązaniu (1.4), to znaczy

$$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{g}(t;t_0,\boldsymbol{x}_0)=\boldsymbol{g}(t-t_0;0,\boldsymbol{x}_0) \quad . \tag{1.8}$$

Istotnie, obie te funkcje są rozwiązaniami równania (1.2), a ponadto mają na mocy (1.6) tę samą wartość początkową w chwili początkowej $t = t_0$.

$$\boldsymbol{g}(t_0;t_0,\boldsymbol{x}_0)=g(0;0,\boldsymbol{x}_0)=\boldsymbol{x}_0 \quad .$$

Na mocy jednoznaczności rozwiązań równania (1.2), rozwiązania (1.8) są więc identyczne dla $t\in(-\infty,+\infty)$.

Nadajmy teraz zmiennej t wartość $t_1\in(-\infty,+\infty)$ i oznaczmy

$$\boldsymbol{g}(t_1-t_0;0,\boldsymbol{x}_0)=\boldsymbol{g}_1=\boldsymbol{x}_1 \quad . \tag{1.9}$$

Utwórzmy następnie rozwiązanie, spełniające warunek początkowy $\boldsymbol{x}(t_1)=\boldsymbol{x}_1$ w postaci

$$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{g}(t-t_1;0,\boldsymbol{x}_1)=\boldsymbol{g}(t;t_1,\boldsymbol{x}_1) \tag{1.10}$$

Na mocy (1.8), (1.9) i (1.10) mamy

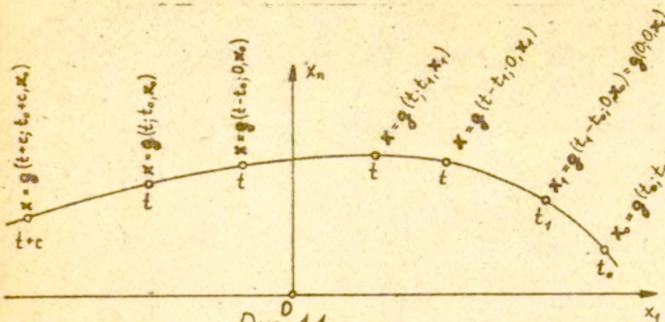
$$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{g}(t-t_1;0,\boldsymbol{x}_1)=\boldsymbol{g}(t-t_0;0,\boldsymbol{x}_0) \tag{1.11}$$

Istotnie, oba rozwiązania spełniają ten sam warunek początkowy a mianowicie

dla $t = t_1$ jest

$$\boldsymbol{g}(0;0,\boldsymbol{x}_1)=\boldsymbol{x}_1 \quad , \quad \boldsymbol{g}(t_1-t_0;0,\boldsymbol{x}_0)=\boldsymbol{x}_1 \tag{1.12}$$

zatem na mocy jednoznaczności rozwiązań równania (1.2), rozwiązania (1.11) są więc identyczne.



Rys. 1.1

W dalszym ciągu będziemy opuszczali w nawiasie rozwiązania g wielkość występująca na drugim miejscu, oznaczającą chwilę początkową, to znaczy będziemy pisali np. $g(t, x_0)$ zamiast $g(t; t_0, x_0)$ itd. Biorąc to pod uwagę i pisząc dla uproszczenia t_1 zamiast $t_1 - t_0$ oraz t_2 zamiast $t - t_1$ mamy zamiast $t_1 + t_2$ wartość $t_1 - t_0 + t - t_1 = t - t_0$

Wobec tego związek (1.11) przybiera postać

$$g(t_2, x_1) = g(t_1 + t_2, x_0) \quad .$$

Biorąc pod uwagę związek (1.9) możemy napisać

$$g(t_2, g(t_1, x_0)) = g(t_1 + t_2, x_0) \quad . \tag{1.13}$$

Oznaczając ponownie odwzorowanie g przez f, zaś punkty x_0 przez p otrzymujemy

$$f(p, t_1 + t_2) = f[f(p, t_1), t_2] \tag{1.14}$$

to znaczy własność (3) układu dynamicznego.

Ponieważ założyliśmy, że rozwiązania $x = g$ są określone na całej osi $t \in (-\infty, +\infty)$, więc funkcja $q = f(p,t)$ przyporządkowuje każdemu punktowi p przestrzeni R i każdej liczbie rzeczywistej $t \in (-\infty, +\infty)$ określony punkt $q \in R$. Wobec tego równanie (1.2) jest przy uczynionych założeniach układem dynamicznym. Układy dynamiczne będziemy również oznaczali i nazywali D-układami

Przykład. Rozważmy równanie autonomiczne w postaci

$$\frac{dx}{dt} = x$$

Oznaczając przez $x = g(x_0,t) = f(x_0,t)$ rozwiązanie tego układu, spełniające warunek początkowy

dla $t = 0$ jest $x = x_0$

otrzymujemy rozwiązanie w postaci

$$x = f(x_0, t) = x_0 e^t \quad .$$

Mamy

$$f(x_0,t_1+t_2) = x_0 e^{t_1+t_2} \; ; \quad f[f(x_0,t_1),t_2] = f(x_0,t_1)e^{t_2} = x_0 e^{t_1} e^{t_2}$$

zatem $$f[f(x_0,t_1),t_2] = f(x_0,t_1+t_2) \quad .$$

Rozważmy z kolei równanie nieautonomiczne w postaci

$$\frac{dx}{dt} = 2tx$$

Rozwiązanie tego równania, spełniające ten sam warunek początkowy co dla poprzedniego równania, ma postać

$$x = f(x_0,t) = x_0 e^{t^2}$$

Łatwo sprawdzić, że nie spełnia ono własności (3) układu dynamicznego.

Istnienie i jednoznaczność rozwiązania równania (1.2) dla $t \in (-\infty, +\infty)$ jest istotną własnością, niezbędną dla tego, aby równanie (1.2) było układem dynamicznym. Z tego względu przytoczymy wybrane fakty związane z tym zagadnieniem.

Twierdzenie 1.1 Niech będzie dane równanie

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}) \qquad \mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n) \quad . \tag{1.15}$$

Zakładamy, że funkcja $\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x})$ jest ciągła w pewnym zbiorze domkniętym i ograniczonym $\overline{G}$. Niech będzie dany ponadto punkt $A_0(\mathbf{x}_0)$ będący punktem wewnętrznym zbioru $\overline{G}$. Wtedy istnieje rozwiązanie równania (1.15) przechodzące przez punkt A_0 w chwili t_0, przy czym rozwiązanie to, jest określone w przedziale

$$-\frac{r}{M\sqrt{n}} + t_0 \leqslant t \leqslant \frac{r}{M\sqrt{n}} + t_0 \tag{1.16}$$

gdzie r oznacza odległość punktu A_0 od brzegu zbioru $\overline{G}$, zaś M jest największą z wartości maksymalnych funkcji $\varphi_i(x_1,\ldots, x_n)$ $(i = 1,\ldots,n)$ w zbiorze $\bar{G}$.

Uwaga. Jeśli funkcje φ_i $(i = 1,\ldots,n)$ spełniają ponadto warunek Lipschitza w rozważanym obszarze

$$|\varphi_i(\xi_1,\ldots,\xi_n)-\varphi_i(x_1,\ldots,x_n)| < L_G\sum_{i=1}^{n}|\xi_i - x_i|, \quad i=1,\ldots,n$$

to rozwiązanie zagadnienia początkowego jest jednoznaczne w tym przedziale.

Twierdzenie 1.2 Jeśli trajektoria ruchu jest zbiorem zwartym w zbiorze G, w którym spełnione są warunki twierdzenia o istnieniu rozwiązania, to ruch (rozwiązanie) można przedłużyć na przedział $\langle t_0, +\infty)$.

Dowód. Każdy podzbiór zwarty przestrzeni metrycznej jest zbiorem domkniętym i ograniczonym. Jeśli trajektoria ruchu jest zwarta w zbiorze G, to znaczy, że przy wzroście czasu pozostaje ona w zbiorze domkniętym i ograniczonym L, zawartym wraz ze swym brzegiem w zbiorze G, to znaczy $\bar{L} \subset G$. Niech r oznacza odległość od brzegu zbioru G do brzegu zbioru L. Stosując wielokrotnie twierdzenie o istnieniu rozwiązania, zawsze otrzymujemy punkt, którego odległość od brzegu zbioru G jest nie mniejsza niż r. Wobec tego na mocy twierdzenia 1.1 o istnieniu, możemy przedłużyć rozwiązanie o następny przedział zmiennej t, mający długość nie mniejszą niż $\frac{r}{M\sqrt{n}}$.

c.n.d.

Z twierdzenia tego, nie wynika bezpośrednio możliwość wnioskowania o istnieniu rozwiązania na całej osi $t \in (-\infty, +\infty)$. W związku z tym przytoczymy pewien dogodny w zastosowaniach warunek dostateczny, którego spełnienie pozwala na żądane przedłużenie rozwiązania na całą oś.

Twierdzenie 1.3 Jeśli funkcje $\varphi_i(x_1,\ldots,x_n)$ są ciągłe dla $-\infty < x_i < +\infty$, $(i = 1,\ldots,n)$ oraz

$$\varphi_i(x_1,\ldots,x_n) = O\left(|x_1| + \cdots + |x_n|\right), \quad |x_1| + \cdots + |x_n| \to \infty \qquad (1.17)$$

to rozwiązanie układu równań różniczkowych

$$\dot{x}_i = \varphi_i(x_1,\dots,x_n), \qquad i = 1,\dots,n \tag{1.18}$$

jest określone na całej osi $-\infty < t < +\infty$.

Dowód. Przede wszystkim z założeń twierdzenia wynika, że

$$|\varphi_i(x_1,\dots,x_n)| < A \max(|x_1| + \dots + |x_n|, 1) \tag{1.19}$$

Istotnie, jeśli $|x_1| + \dots + |x_n| > \gamma$, gdzie γ oznacza pewną liczbę dostatecznie dużą, to na mocy (1.17) wyrażenie

$$\frac{|\varphi_i(x_1,\dots,x_n)|}{|x_1| + \dots + |x_n|} \qquad i = 1,\dots,n$$

jest ograniczone. Wobec tego w zbiorze $|x_1| + \dots + |x_n| \leq \gamma$ są ograniczone $\varphi_i(x_1,\dots,x_n)$.

Rozważmy najpierw sześcian $|x_i - x_{0i}| \leq b$, $(i = 1,\dots,n)$ i niech M oznacza największą z maksymalnych wartości funkcji $\varphi_i(x_1,\dots,x_n)$ w tym sześcianie. Na mocy twierdzenia 1.1 rozwiązanie wychodzące z punktu A_0, można przedłużyć na przedział $\langle t_0, t_0 + \frac{b}{M\sqrt{n}} \rangle$. Załóżmy, że (x_{0i}, t_0, b) mają wartości $(c_i, 0, 1)$. Wtedy mamy $|x_i(t) - c_i| \leq 1$ i na mocy (1.19) jako wartość M można wziąść $A = \max(c+1, 1)$, gdzie $c = \max c_i$, $(i = 1,\dots,n)$, to znaczy $M = A(c+1)$. Wtedy wielkość $\frac{b}{M\sqrt{n}} = \frac{1}{M\sqrt{n}}$ jest równa $\frac{1}{A(c+1)\sqrt{n}}$. Jeśli więc oznaczymy

$$t_1 = \frac{1}{A(c+1)\sqrt{n}}$$

to rozwiązanie jest określone w przedziale $0 \leq t \leq t_1$. Ponadto są spełnione nierówności $|x_i(t_1)| \leq c + 1$ $(i = 1,\dots,n)$. Niech teraz (x_{0i}, t_0, b) mają wartości $(x_i(t_1), t_1, 1)$. Wtedy jako wartość M możemy wziąść $A \max(c+2, 1) = A(c+2)$, zaś wielkość $\frac{b}{M\sqrt{n}}$ jest równa

$$\frac{b}{M\sqrt{n}} = \frac{1}{M\sqrt{n}} = \frac{1}{A(c+2)\sqrt{n}}.$$

Jeśli więc oznaczymy

$$t_2 = \frac{1}{A(c+2)\sqrt{n}}$$

to rozwiązanie jest określone również w przedziale $t_1 < t < t_1 + t_2$.

Możemy więc łącznie stwierdzić, że rozwiązanie jest określone w przedziale $\langle 0, t_1 + t_2 \rangle$, przy czym z nierówności $|x_i(t) - x_i(t_1)| \leq 1$ dla $t_1 \leq t \leq t_2$ wynika, że $|x_i(t_2)| \leq c+2$.
Kontynuując to postępowanie otrzymujemy po m krokach liczbę

$$t_m = \frac{1}{A(c+m)\sqrt{n}} \tag{1.20}$$

zaś rozwiązanie jest po m krokach określone w przedziale

$$0 \leq t \leq T_m = t_1 + \cdots + t_m \tag{1.21}$$

oraz wartość rozwiązania w punkcie T_m nie przekracza $c+m$.

Szereg

$$\frac{1}{A\sqrt{n}} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{c+m+1} \tag{1.22}$$

(w którym t_1 traktujemy jako wielkość odpowiadającą „krokowi" $m = 0$) jest rozbieżny, zatem rozwiązanie po wykonaniu dostatecznie dużej ilości kroków (w prawo i w lewo od punktu początkowego), będzie określone w dowolnie dużym przedziale.

c.n.d.

Wiele równań różniczkowych typu (1.2) nie spełnia bezpośrednio założeń twierdzenia 1.3, w związku z czym nie wiadomo, czy rozwiązania ich są określone dla $t \in (-\infty, +\infty)$. Jednakże można wykazać, że zmieniając jedynie zmienną niezależną, czyli zmieniając sparametryzowanie krzywych całkowych, możemy uzyskać inne równanie różniczkowe równoważne danemu w tym sensie, że ma ono te same trajektorie i do którego stosuje się już bezpośrednio twierdzenie 1.3. Oczywiście prawo ruchu po trajektorii (prędkość ruchu) będzie inne, lecz trajektorie będą geometrycznie identyczne. Jeśli więc interesują nas tylko geometryczne (ściślej topologiczne) własności poszczególnych trajektorii, lub całego ich zbioru, to wystarczy ograniczyć się do równań typu (1.2) będących układami dynamicznymi. W związku z tym równania typu (1.2) będziemy nazywali równoważnymi, jeśli ich trajektorie są geometrycznie identyczne.

<u>Twierdzenie 1.4</u> Niech w zbiorze $G \subset R^n$ dane będzie równanie w postaci (1.2). Istnieje D - układ równoważny danemu i będący w przypadku $G \neq R^n$ częścią D - układu, określonego

w całej przestrzeni R^n.

Dowód. Wykażemy najpierw, że układ (1.2) można zastąpić układem równoważnym, mającym prawe strony ograniczone. W tym celu weźmy funkcje $\psi_i(\mathbf{x})$ w postaci

$$\left.\begin{aligned} \psi_i(\mathbf{x}) &= 1 , & |\varphi_i(\mathbf{x})| &< 1 \\ \psi_i(\mathbf{x}) &= \frac{1}{\varphi_i(\mathbf{x})} , & \varphi_i(\mathbf{x}) &> 1 \\ \psi_i(\mathbf{x}) &= -\frac{1}{\varphi_i(\mathbf{x})} , & \varphi_i(\mathbf{x}) &< -1 \end{aligned}\right\} \tag{1.23}$$

i oznaczmy

$$\psi(\mathbf{x}) = \prod_{i=1}^{n} \psi_i(\mathbf{x}) \tag{1.24}$$

Jest widoczne, że

$$0 < \psi_i(\mathbf{x}) \leq 1 , \quad |\varphi_i(\mathbf{x})\psi_i(\mathbf{x})| \leq 1 .$$

Wobec tego mamy

$$0 < \psi(\mathbf{x}) \leq 1 , \quad |\varphi_i(\mathbf{x})\psi(\mathbf{x})| \leq 1 .$$

Funkcje $\psi_i(\mathbf{x})$ oraz funkcja $\psi(\mathbf{x})$ są ciągłe. Układ

$$\frac{dx_i}{dt} = \varphi_i(x_1,\dots,x_n)\,\psi(x_1,\dots,x_n) = \varphi_i(\mathbf{x})\,\psi(\mathbf{x}) \tag{1.25}$$

jest równoważny danemu układowi (1.2) i prawe strony układu (1.25) są ograniczone. Dla wygody możemy więc od razu założyć, że równanie (1.2) ma tę własność.

Wykażemy najpierw, że t można przedłużyć do $+\infty$ (lub do $-\infty$) wzdłuż półtrajektorii nieskończenie długiej. Istotnie oznaczmy

$$v = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \varphi_i^2} . \tag{1.26}$$

Wielkość ta wyraża prędkość punktu reprezentującego układu (1.2) w przestrzeni E_n. Jeśli s oznacza długość łuku półtrajektorii, liczoną od jej początku, wtedy mamy

$$t = \int_0^s \frac{ds}{v} . \tag{1.27}$$

Ponieważ $0 < v \leq c = \text{const}$, gdyż φ_i $(i = 1,\dots,n)$ są ograniczone, więc z warunku $s \to +\infty$ (lub $-\infty$) wynika, że $t \to +\infty$ (lub $-\infty$).

Pozostaje rozważyć półtrajektorie o skończonej długości i nie zwarte w zbiorze G, gdyż t może okazać się ewentualnie nieprzedłużalne do $+\infty$ (lub $-\infty$), lecz tylko wzdłuż takiej półtrajektorii. Jeśli bowiem trajektoria jest zwarta w zbiorze G to z twierdzenia 1.2 wynika, że t można nieograniczenie przedłużać.

Taka półtrajektoria nie zwarta, wzdłuż której t może okazać się ewentualnie nieprzedłużalne, ma punkt skupienia

$$\mathbf{y}_0 \in F = R^n \setminus G .$$

Oznaczmy

$\varrho(\mathbf{x},\mathbf{y})$ odległość od $\mathbf{x}$ do $\mathbf{y}$,

$$\varrho(\mathbf{x},F) = \min_{\mathbf{y}\in F} \varrho(\mathbf{x},\mathbf{y})$$

Obierzmy dowolny punkt $\mathbf{x}_0 \in G$ i wprowadźmy funkcję

$$\mu(\mathbf{x}) = \frac{\varrho(\mathbf{x},F)}{\varrho(\mathbf{x},F)+\varrho(\mathbf{x},\mathbf{x}_0)+1} \tag{1.28}$$

Funkcja $\mu(\mathbf{x})$ jest ciągła wszędzie w R^n, przy czym

$0 \leqslant \mu(\mathbf{x}) < 1$ oraz $\mu(\mathbf{x}) = 0$ na F i tylko na F. (1.29)

Rozważmy układ równań różniczkowych

$$\frac{dx_i}{d\tau} = \varphi_i(x)\,\mu(x) , \quad i = 1,\dots,n \tag{1.30}$$

Jest to układ równań równoważny danemu (1.2), mający prawe strony ograniczone (założyliśmy dla wygody, że układ (1.2) ma prawe strony ograniczone, aby nie sięgać do układu (1.25)). Układ ten jest na razie określony w zbiorze G. Chcemy zbadać przedłużalność t wzdłuż pół trajektorii l o skończonej długości s_0, mającej koniec w punkcie $\mathbf{y}_0 \in F$. Oznaczmy punkt zmienny na półtrajektorii l przez $\mathbf{z}$ i rozważmy dla ustalenia uwagi przypadek, gdy długość łuku s odmierzamy w kierunku dodatnim.

Mamy

$$\tau = \int_0^s \frac{ds}{v(\mathbf{z})\,\mu(\mathbf{z})} . \tag{1.31}$$

Ponadto mamy

$$\mu(\mathbf{z}) = \frac{\varrho(\mathbf{z},F)}{\varrho(\mathbf{z},F)+\varrho(\mathbf{z},\mathbf{x}_0)+1} \leqslant \varrho(\mathbf{z},F) = \min_{\mathbf{y}\in F} \varrho(\mathbf{z},\mathbf{y}) \leqslant \varrho(\mathbf{z},\mathbf{y}_0) \leqslant s_0 - s .$$

Ponieważ $0 < v(z) \leqslant c = \text{const}$ więc

$$T \geqslant \frac{1}{c}\int_0^s \frac{ds}{s_0 - s} = -\frac{1}{c}\ln\frac{s_0 - s}{s} \qquad (1.32)$$

Wobec tego $T \to \infty$ dla $s \to s_0$.

Uzupełnijmy teraz obszar określoności prawych stron równań (1.30) przyjmując, że są one równe zeru w zbiorze F. Na mocy ograniczoności funkcji $\varphi_i(x)$ i ciągłości funkcji $\mu(x)$, prawe strony równań (1.30) są tym samym określone wszędzie w R^n, zatem rozważany układ jest D - układem, przy czym wszystkie punkty zbioru F są punktami spoczynku (prędkości są równe zeru).

c.n.d.

Przykład. Rozważmy układ dynamiczny, dany układem równań różniczkowych

$$\frac{dx_1}{dt} = x_1 \quad , \qquad \frac{dx_2}{dt} = x_2$$

Rozwiązanie tego układu, spełniające warunki początkowe

dla $t = 0$ jest $x_1(0) = x_{01}$, $x_2(0) = x_{02}$

ma postać

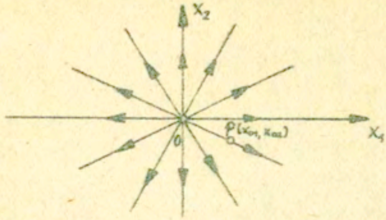
$$x_1 = x_{01}e^t \quad , \quad x_2 = x_{02}e^t$$

Wobec tego gdy punkt p ma współrzędne (x_{01}, x_{02}), to punkt $q = f(p,t)$ ma współrzędne $(x_1, x_2) = (x_{01}e^t, x_{02}e^t)$.

Trajektoria odpowiadająca (mająca początek) początkowi współrzędnych składa się z jednego punktu (0,0). Jeśli $x_{01} \neq 0$, lub $x_{02} \neq 0$, to przy $t \to +\infty$ punkt $q \to \pm\infty$ (w zależności od znaku $x_{01} \neq 0$ lub $x_{02} \neq 0$), zaś przy $t \to -\infty$ punkt $q \to 0$. Ponadto jest

$$x_{01}x_2 = x_{02}x_1$$

Jeśli więc punkt p nie pokrywa się z początkiem współrzędnych, to trajektoria jest półprostą, wychodzącą z początku współrzędnych i przechodzącą przez punkt $p(x_{01}, x_{02})$.

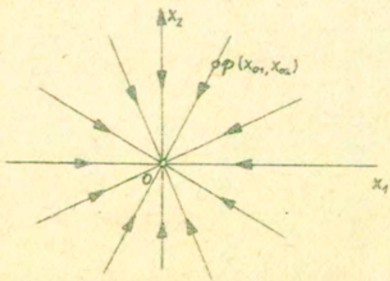


Rys. 1.2

Przykład. Rozważmy układ dynamiczny, dany układem równań różniczkowych

$$\frac{dx_1}{dt} = -x_1 \quad ; \quad \frac{dx_2}{dt} = -x_2 \quad .$$

Przypadek ten można sprowadzić do poprzedniego, zastępując t przez „-t". Wobec tego trajektorie ruchu są takie same, jak w poprzednim przykładzie, tylko kierunek ruchu wzdłuż nich jest przeciwny.
Wszystkie te trajektorie zmierzają do punktu (0,0) przy $t \to +\infty$.



Rys. 1.3.

Przykład. Rozważmy układ dynamiczny, dany układem równań różniczkowych

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2 , \qquad \frac{dx_2}{dt} = -x_1 .$$

Rozwiązanie tego układu, spełniające warunki początkowe

dla $t = 0$ jest $x_1(0) = x_{01}$, $x_2(0) = x_{02}$

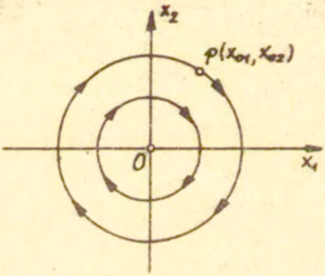
ma postać

$$x_1 = x_{01}\cos t + x_{02}\sin t , \qquad x_2 = -x_{01}\sin t + x_{02}\cos t$$

Ponieważ jest

$$x_1^2 + x_2^2 = x_{01}^2 + x_{02}^2$$

więc trajektorie są okręgami o środku w początku współrzędnych.
Trajektoria odpowiadająca początkowi współrzędnych składa się z jednego punktu (0,0).



Rys. 1.4.

Jako drugi przykład układu dynamicznego rozważmy równanie o pochodnych cząstkowych liniowe pierwszego rzędu w postaci

$$\frac{\partial u}{\partial t} = au + \sum_{i=1}^{n} b_i \frac{\partial u}{\partial x_i} \tag{1.33}$$

gdzie $a, b_1, \ldots, b_n$ oznaczają stałe rzeczywiste.

Utwórzmy przestrzeń Φ funkcji różniczkowalnych $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$, określonych dla $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in E_n$ i takich, że

$$\varphi(x_1, \ldots, x_n) \to L_\varphi \qquad \text{przy } \|\mathbf{x}\|^2 \to \infty$$

gdzie $\|\cdot\|$ oznacza normę, zaś L_φ stałą rzeczywistą dodatnią.

Wprowadzamy oznaczenie

$$\|\varphi\| = \sup_{\mathbf{x}\in E_n} |\varphi| \quad . \tag{1.34}$$

Niech warunek początkowy ma postać: dla $t_0 = 0$ jest

$$u(\mathbf{x}, 0) = u_0 = \varphi(\mathbf{x}) = \varphi(x_1, \ldots, x_n) \quad . \tag{1.35}$$

Łatwo sprawdzić, że rozwiązanie równania (1.33), spełniające warunek początkowy (1.35), ma postać

$$u(\mathbf{x}, t) = u(\varphi, t) = e^{at}\varphi(x_1 + b_1 t, \ldots, x_n + b_n t) \quad . \tag{1.36}$$

Istotnie oznaczając $\xi_i = x_i + b_i t$ mamy

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a e^{at}\varphi(\xi_1, \ldots, \xi_n) + e^{at}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial \varphi}{\partial \xi_i}\frac{\partial \xi_i}{\partial t} ,$$

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = e^{at}\frac{\partial \varphi}{\partial \xi_i}\frac{\partial \xi_i}{\partial x_i} \quad .$$

Biorąc pod uwagę, że $\frac{\partial \xi_i}{\partial t} = b_i$ oraz $\frac{\partial \xi_i}{\partial x_i} = 1$ $(i = 1, \ldots, n)$ i podstawiając do równania (1.33) otrzymujemy tożsamość.

Ponadto na mocy (1.36) mamy dla $t = 0$

$$u(\varphi, 0) = \varphi(x_1, \ldots, x_n) = u_0 \quad . \tag{1.37}$$

Oznaczając $p = \varphi$ oraz $u = f$ mamy więc

$$f(p, 0) = p \tag{1.38}$$

dla dowolnego punktu $p \in E_n$. Wobec tego spełniona jest własność (1) układu dynamicznego.

Ponadto jest widoczne, że rozwiązanie (1.36) jest jednoznacznie wyznaczone przez warunek początkowy (1.35) w przedziale $t \in (-\infty, +\infty)$

W celu sprawdzenia własności (2) układu dynamicznego wystarczy wykazać, że $u(\varphi, t)$ jest ciągła w dowolnym punkcie (t, φ) względem obu argumentów, to znaczy, że dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieją takie $\delta_1 > 0$, $\delta_2 > 0$, $\gamma > 0$ że nierówności

$$|t_1 - t_2| < \delta_1 \delta_2 \quad , \quad \|\varphi_1 - \varphi_2\| < \gamma \tag{1.39}$$

pociągają za sobą nierówność

$$\| u(\varphi_1,t_1) - u(\varphi_2,t_2) \| < \varepsilon \quad . \tag{1.40}$$

W tym celu przedstawmy różnicę występującą we wzorze (1.40) w postaci

$$u(\varphi_1,t_1) - u(\varphi_2,t_2) = e^{at_1}\varphi_1(x_1+b_1t_1,\ldots,x_n+b_nt_1)-$$
$$-e^{at_2}\varphi_2(x_1+b_1t_2,\ldots,x_n+b_nt_2) = e^{at_1}[\varphi_1(x_1+b_1t_1,\ldots,x_n+b_nt_1)-\varphi_2(x_1+b_1t_1,\ldots,x_n+b_nt_1)]+$$
$$+(e^{at_1}-e^{at_2})\varphi_2(x_1+b_1t_1,\ldots,x_n+b_nt_1)+$$
$$+e^{at_2}[\varphi_2(x_1+b_1t_1,\ldots,x_n+b_nt_1)-\varphi_2(x_1+b_1t_2,\ldots,x_n+b_nt_2)] \quad .$$

Dla dalszego ciągu badania ciągłości u ważne jest co następuje. Można wykazać, że jeśli $|L_\varphi| < +\infty$, to dowolna funkcja $\varphi \in \Phi$ jest jednostajnie ciągła w całej przestrzeni E_n i jest w tej przestrzeni ograniczona.

Na mocy jednostajnej ciągłości funkcji φ_2 , dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje $\delta_1 > 0$ takie, że

dla $|t_1 - t_2| < \delta_1$

jest $e^{at_2}\|\varphi_2(x_1+b_1t_1,\ldots,x_n+b_nt_1)-\varphi_2(x_1+b_1t_2,\ldots,x_n+b_nt_2)\| < \varepsilon$.

Następnie na mocy ograniczoności φ_2 , istnieje takie $\delta_2 > 0$, że

dla $|t_1 - t_2| < \delta_2$ jest $(e^{at_1} - e^{at_2})\|\varphi_2\| < \varepsilon$

Ponadto dla każdego $\varepsilon > 0$, istnieje $\gamma > 0$ takie, że

dla $\|\varphi_1 - \varphi_2\| < \gamma$

jest $e^{at_1}\|\varphi_1(x_1+b_1t_1,\ldots,x_n+b_nt_1) - \varphi_2(x_1+b_1t_1,\ldots,x_n+b_nt_1)\| < \varepsilon$

Kładąc

$$\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$$

mamy

dla $|t_1 - t_2| < \delta$, $\|\varphi_1 - \varphi_2\| < \gamma$

jest $\|u(\varphi_1,t_1) - u(\varphi_2,t_2)\| < 3\varepsilon$

to znaczy nierówność (1.40).

W celu wykazania własności (3) układu dynamicznego, zwróćmy uwagę na to, że utworzenie funkcji $u(\varphi, t)$, na przykład z funkcji $u[\varphi(x_1,\ldots,x_n), 0]$, polega (p.(1.36)) na pomnożeniu funkcji φ przez czynnik e^{at} oraz dodaniu w każdym z argumentów funkcji φ składnika $b_i\, t$ ($i = 1,\ldots,n$). Wobec tego mamy

$$u(\varphi, t_1 + t_2) = e^{a(t_1+t_2)}\varphi[x_1 + b_1(t_1+t_2), \ldots, x_n + b_n(t_1+t_2)] ,$$

$$u(u(\varphi,t_1),t_2) = e^{at_2} e^{at_1}\varphi[(x_1+b_1t_1) + b_1t_2, \ldots, (x_n+b_nt_1) + b_nt_2] .$$

Stąd wynika, że

$$u(u(\varphi, t_1), t_2) = u(\varphi, t_1 + t_2) . \qquad (1.41)$$

Oznaczając tak jak poprzednio $p = \varphi$ oraz $u = f$, mamy

$$f(f(p,t_1),t_2) = f(p, t_1 + t_2) ,$$

to znaczy własność (3) układu dynamicznego.

Jako trzeci przykład układu dynamicznego rozważmy równanie o pochodnych cząstkowych liniowe, drugiego rzędu, typu hiperbolicznego (równanie poprzecznych drgań struny, lub podłużnych względnie skrętnych drgań pręta).

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} . \qquad (1.42)$$

Niech warunki początkowe mają postać

$$w(x,0) = \lambda(x) = \int_0^x \psi(x)\,dx ; \qquad \frac{\partial w(x,0)}{\partial t} = \varphi(x) . \qquad (1.43)$$

Połóżmy

$$u = \frac{\partial w}{\partial t} , \qquad v = \frac{\partial w}{\partial x} . \qquad (1.44)$$

Wobec tego równanie (1.42) przybiera postać układu równań

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial t} &= \frac{\partial u}{\partial x} \end{aligned}\right\} \qquad (1.45)$$

Na mocy (1.43) i (1.44), warunki początkowe dla funkcji u i v mają postać

$$u(x,0) = \varphi(x) \quad , \quad v(x,0) = \psi(x) \quad . \tag{1.46}$$

Utwórzmy przestrzeń Ψ funkcji różniczkowalnych $\varphi(x), \psi(x)$, określonych dla $x \in R$, mających skończone granice przy $x \to +\infty$ i $x \to -\infty$. W zbiorze funkcji Ψ wprowadzamy normę w sposób następujący

$$\|(\varphi,\psi)\| = \sup|\varphi| + \sup|\psi| \quad , \quad x \in (-\infty, +\infty) \quad . \tag{1.47}$$

Łatwo sprawdzić, że para

$$\left.\begin{aligned} u(\varphi,\psi,t) &= \frac{1}{2}\{\varphi(x-t)+\varphi(x+t)+\psi(x+t)-\psi(x-t)\} \\ v(\varphi,\psi,t) &= \frac{1}{2}\{\psi(x-t)+\psi(x+t)+\varphi(x+t)-\varphi(x-t)\} \end{aligned}\right\} \tag{1.48}$$

jest rozwiązaniem układu (1.45), spełniającym warunki początkowe

$$u(\varphi,\psi,0) = \varphi(x) \quad , \quad v(\varphi,\psi,0) = \psi(x) \quad . \tag{1.49}$$

Jeśli więc oznaczymy $f \equiv (u,v)$, $p \equiv (\varphi, \psi)$, to mamy

$$f(p,0) = p \quad . \tag{1.50}$$

Wobec tego spełniona jest własność (1) układu dynamicznego. Ponadto jest widoczne, że rozwiązanie (1.48) jest jednoznacznie wyznaczone przez warunki początkowe (1.49).

W celu sprawdzenia własności (2) układu dynamicznego, wystarczy wykazać, że $u(\varphi, \psi, t)$ i $v(\varphi, \psi, t)$ są funkcjami ciągłymi swych argumentów φ, ψ, t. Pomijając szczegóły, stwierdzamy jedynie, że wykazuje się to analogicznie jak w poprzednim przykładzie, wykorzystując fakt, że wskutek istnienia skończonych granic, przy $x \to +\infty$ i $x \to -\infty$, funkcji będących elementami przestrzeni Ψ, funkcje $\varphi(x)$ i $\psi(x)$ są jednostajnie ciągłe dla $x \in (-\infty, +\infty)$, jeśli $(\varphi,\psi) \in \Psi$.

Własność (3) układu dynamicznego, wynika z następujących zależności. Mamy na mocy (1.48)

$$u(\varphi,\psi,t_1+t_2) = \frac{1}{2}\{\varphi[x-(t_1+t_2)]+\varphi[x+(t_1+t_2)]+\psi[x+(t_1+t_2)]-\psi[x-(t_1+t_2)]\}$$

$$v(\varphi,\psi,t_1+t_2)=\frac{1}{2}\left\{\psi[x-(t_1+t_2)]+\psi[x+(t_1+t_2)]+\varphi[x+(t_1+t_2)]-\varphi[x-(t_1+t_2)]\right\}$$

oraz

$$u(u(\varphi,\psi,t_1),\ v(\varphi,\psi,t_1),t_2)=$$

$$=\frac{1}{2}\left\{\varphi[(x-t_1)-t_2]+\varphi[(x+t_1)+t_2]+\psi[(x+t_1)+t_2]-\psi[(x-t_1)-t_2]\right\}$$

$$v(u(\varphi,\psi,t_1).\ v(\varphi,\psi,t_1),t_2)=$$

$$=\frac{1}{2}\left\{\psi[(x-t_1)-t_2]+\psi[(x+t_1)+t_2]-\varphi[(x-t_1)-t_2]+\varphi[(x+t_1)+t_2]\right\}.$$

Stąd wynika, że

$$\left.\begin{aligned} u(u(\varphi,\psi,t_1),v(\varphi,\psi,t_1),t_2) &= u(\varphi,\psi,t_1+t_2)\\ v(u(\varphi,\psi,t_1),v(\varphi,\psi,t_1),t_2) &= v(\varphi,\psi,t_1+t_2)\end{aligned}\right\} \qquad (1.51)$$

Oznaczając tak jak poprzednio $f \equiv (u,v)$, $p \equiv (\varphi, \psi)$, mamy

$$f(f(p,t_1),t_2) = f(p,t_1+t_2). \qquad (1.52)$$

to znaczy własność (3) układu dynamicznego.

Zatem rodzina odwzorowań przestrzeni Ψ na siebie, generowana układem (1.45), jest przy uczynionych założeniach układem dynamicznym.

Dla dalszych rozważań ważne jest stwierdzenie, że szereg własności układów dynamicznych w różnych przestrzeniach (E_n, Φ, Ψ), można badać niezależnie od równań różniczkowych, generujących te układy.

2. Podstawowe własności układów dynamicznych

2.1. Własności ogólne

Złożeniem (mnożeniem) dwóch odwzorowań przestrzeni R w siebie nazywamy odwzorowanie, otrzymane w wyniku wykonania dwóch kolejnych odwzorowań.

Twierdzenie 2.1. Rodzina G odwzorowań przestrzeni R w siebie, będąca układem dynamicznym f(p,t), jest grupą względem operacji złożenia.

Dowód. Zbiór elementów G jest grupą, jeśli w G określone jest działanie (zwane zwykłe złożeniem, mnożeniem, lub rzadziej dodawaniem), spełniające tak zwane aksjomaty grupy, które każdej parze elementów $a,b \in G$, przyporządkowuje pewien element $c \in G$, to znaczy $c = a \circ b$ (na ogół $a \circ b \neq b \circ a$; jeśli $a \circ b = b \circ a$ to grupa nazywa się przemienną, czyli abelową). Przyporządkowanie to, zachodzi dla układów dynamicznych, na mocy własności (3) tych układów.

Działanie określone dla rozważanych elementów, musi spełniać następujące aksjomaty grupy.

1) Łączność: dla każdych trzech elementów $a,b,c \in G$ jest

$$(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c) \quad .$$

Własność ta zachodzi dla układów dynamicznych. Istotnie na mocy własności (3) układów dynamicznych oraz biorąc pod uwagę, że $(g \circ h)(x) = g(h(x))$ mamy

$$(f(p,t_1) \circ f(p,t_2)) \circ f(p,t_3) = f(f(p,t_2),t_1) \circ f(p,t_3) =$$

$$= f(p,t_2+t_1) \circ f(p,t_3) = f(f(p,t_3),t_2+t_1) = f(p,t_3+(t_2+t_1))$$

$$f(p,t_1) \circ (f(p,t_2) \circ f(p,t_3)) = f(p,t_1) \circ f(f(p,t_3),t_2) =$$

$$= f(p,t_1) \circ f(p,t_3+t_2) = f(f(p,t_3+t_2),t_1) = f(p,(t_3+t_2)+t_1) \quad .$$

Ponieważ jest: $\quad t_3 + (t_2 + t_1) = (t_3 + t_2) + t_1$

więc mamy

$$(f(p,t_1) \circ f(p,t_2)) \circ f(p,t_3) = f(p,t_1) \circ (f(p,t_2) \circ f(p,t_3))$$

2) W G istnieje jedność lewostronna, wspólna dla wszystkich elementów grupy, to znaczy taki element e, że $e \circ a = a$ dla każdego elementu $a \in G$.

W przypadku odwzorowań, własność ta jest równoważna istnieniu odwzorowania tożsamościowego. Dla układów dynamicznych, odwzorowanie takie istnieje, na mocy własności (1) układów dynamicznych: $f(p,0) = p$.

4) Każdy element $a \in G$, ma lewostronny element odwrotny a^{-1}, to znaczy taki, że $a^{-1} \circ a = e$. W przypadku odwzorowań, własność ta jest równoważna następującej: dla każdego odwzorowania $q = f(p,t)$, istnieje odwzorowanie odwrotne $p = f^{-1}(q,t)=f(q,-t)$. Dla układów dynamicznych powyższy aksjomat grupy ma miejsce na mocy własności (3) i (1) układu dynamicznego

$$f(q,-t)\circ f(p,t) = f(f(p,t),-t) = f(p,t-t) = f(p,0) = p$$

c.n.d.

Twierdzenie 2.2. Odwzorowania grupy G są homeomorfizmami przestrzeni R na siebie.

Dowód. Odwzorowanie $q = f(p,t)$ przestrzeni R na siebie jest wzajemnie jednoznaczne, co jest zagwarantowane istnieniem odwzorowania odwrotnego $p = f(q,-t)$. Ciągłość obu tych odwzorowań, zapewnia własność (2) układu dynamicznego.

c.n.d.

Twierdzenie 2.3. Dla dowolnych $A_\alpha \subset R$, $K_\beta \subset I$ mają miejsce związki

$$f\Big(\bigcup_\alpha A_\alpha, \bigcup_\beta K_\beta\Big) = \bigcup_{\alpha,\beta} f(A_\alpha, K_\beta) \tag{2.1}$$

$$f\Big(\bigcap_\alpha A_\alpha, t\Big) = \bigcap_\alpha f(A_\alpha, t) \tag{2.2}$$

$$f\Big(p, \bigcap_\beta K_\beta\Big) \subset \bigcap_\beta f(p, K_\beta) \tag{2.3}$$

$$f(f(p,K_1),K_2) = f(p, K_1 + K_2) \tag{2.4}$$

gdzie

$$K_1 + K_2 = \bigcup_{\substack{t_1\in K_1\\ t_2\in K_2}} (t_1 + t_2)$$

Dowód. Związki tego rodzaju wynikają z twierdzeń, dowodzonych w podręcznikach analizy matematycznej(*). Z tego względu, udo-

(*) W. Kołodziej Analiza Matematyczna PWN 1978 r. str. 18

wodnimy tylko dla przykładu związek (2.2) (między innymi dlatego, aby wykazać, że zachodzi w nim znak równości a nie inkluzji).

Niech

$$q \in f(\bigcap_{\alpha} A_{\alpha}, t) \quad . \tag{2.5}$$

Wtedy mamy dla dowolnego α

$$f(q,-t) \subset f(f(\bigcap_{\alpha} A_{\alpha}, t), -t) = f(\bigcap_{\alpha} A_{\alpha}, t-t) = f(\bigcap_{\alpha} A_{\alpha}, 0) =$$
$$= \bigcap_{\alpha} A_{\alpha} \subset A_{\alpha} \quad .$$

Wobec tego dla każdego α jest

$$q = f(q,0) = f(f(q,-t), t) \in f(A_{\alpha}, t) \quad .$$

Zatem jest również

$$q \in \bigcap_{\alpha} f(A_{\alpha}, t) \quad . \tag{2.6}$$

Załóżmy teraz, że jest spełniony związek (2.6). Wtedy dla każdego α mamy

$$q \in f(A_{\alpha}, t)$$

zatem

$$f(q,-t) \in f(f(A_{\alpha}, t), -t) = f(A_{\alpha}, t-t) = f(A_{\alpha}, 0) = A_{\alpha} \quad .$$

Wobec tego ma miejsce zależność

$$f(q,-t) \in \bigcap_{\alpha} A_{\alpha} \quad .$$

Stąd mamy

$$f(f(q,-t), t) \in f(\bigcap_{\alpha} A_{\alpha}, t)$$

czyli

$$f(q, t-t) = f(q,0) = q \in f(\bigcap_{\alpha} A_{\alpha}, t) \quad .$$

Ponieważ ze związku (2.5) wynika (2.6) oraz ze związku (2.6) wynika (2.5) więc mamy

$$f(\bigcap_{\alpha} A_{\alpha}, t) = \bigcap_{\alpha} f(A_{\alpha}, t) \quad .$$

c.n.d.

Uwaga! W związku (2.3) nie można znaku inkluzji zastąpić znakiem równości, co wynika z następującego przykładu.

Rozważmy jednostajny ruch okresowy, o okresie równym 1, $q = f(p,t)$ po okręgu L, to znaczy

$$f(p,t+1) = f(p,t) \quad , \quad \text{dla wszystkich } t \in I \; .$$

Niech $K_1 = \langle 0,1 \rangle$, $K_2 = \langle 1,2 \rangle$, zatem $K_1 \cap K_2 = 1$

Wobec tego z okresowości funkcji $f(p,t)$ wynika, że

$$f(p, K_1 \cap K_2) = f(p,1) = f(p, 0+1) = f(p,0) = p \; .$$

Dalej mamy

$$f(p,K_1) \cap f(p,K_2) = f(p,K_1) = f(p,K_2) = f(p,I) = L \; .$$

Jest widoczne, że $p \in L$ więc

$$f(p, K_1 \cap K_2) \subset f(p,K_1) \cap f(p,K_2)$$

Twierdzenie 2.4. Jeśli

$$\lim_{n\to\infty} q_n = q_0 \quad , \quad \lim_{n\to\infty} p_n = p_0 \; . \tag{2.7}$$

to

$$\lim \varrho(q_n, p_n) = \varrho(q_0, p_0) \tag{2.8}$$

Dowód (*) . Na podstawie własności metryki (nierówność trójkąta) mamy

$$\varrho(q_n,p_n) \leqslant \varrho(q_n,q_0) + \varrho(q_0,p_n) \leqslant \varrho(q_n,q_0) + \varrho(q_0,p_0) + \varrho(p_0,p_n)$$

skąd

$$\varrho(q_n,p_n) - \varrho(q_0,p_0) \leqslant \varrho(q_n,q_0) + \varrho(p_0,p_n) \; . \tag{2.9}$$

Zamieniając w (2.9) miejscami p_0 z p_n i q_0 z q_n mamy

$$\varrho(q_0,p_0) - \varrho(q_n,p_n) \leqslant \varrho(q_0,q_n) + \varrho(p_n,p_0)$$

(*) W. Kołodziej Analiza Matematyczna PWN 1978 r str 65 skąd

$$\rho(q_n, p_n) - \rho(q_0, p_0) \geqslant -\rho(q_n, q_0) - \rho(p_n, p_0) \ .$$

Mamy więc

$$-\rho(q_n, q_0) - \rho(p_n, p_0) \leqslant \rho(q_n, p_n) - \rho(q_0, p_0) \leqslant \rho(q_n, q_0) + \rho(p_n, p_0)$$

to znaczy

$$|\rho(q_n, p_n) - \rho(q_0, p_0)| \leqslant \rho(q_n, q_0) + \rho(p_n, p_0) \ .$$

Na mocy (2.7) jest

$$\rho(q_n, q_0) < \tfrac{1}{2}\varepsilon \quad , \quad \rho(p_n, p_0) < \tfrac{1}{2}\varepsilon \quad \text{dla } n > N$$

więc

$$|\rho(q_n, p_n) - \rho(q_0, p_0)| < \varepsilon, \ \text{dla} \quad n > N \ . \tag{2.10}$$

Stąd wynika (2.8), to znaczy ciągłość metryki w dowolnym punkcie (q,p). c.n.d.

Twierdzenie 2.5. Jeśli

$$\lim_{n \to \infty} p_n = p_0 \qquad \text{oraz} \qquad A \subset R \tag{2.11}$$

to

$$\lim_{n \to \infty} \rho(p_n, A) = \rho(p_0, A) \ . \tag{2.12}$$

(gdzie $\rho(r, A) = \inf_{\mu \in A} \rho(r, \mu)$)

Dowód. Na mocy własności metryki (nierówność trójkąta), dla dowolnego punktu $p \in A$ jest

$$\rho(p_n, p) \leqslant \rho(p_n, p_0) + \rho(p_0, p) \ .$$

Stąd

$$\rho(p_n, A) \leqslant \rho(p_n, p_0) + \rho(p_0, p) \ .$$

Ponieważ nierówność ta zachodzi dla każdego punktu $p \in A$, więc jest również

$$\rho(p_n, A) \leq \rho(p_n, p_0) + \rho(p_0, A)$$

skąd

$$\rho(p_n, A) - \rho(p_0, A) \leq \rho(p_n, p_0) \qquad (2.13)$$

Zamieniając miejscami p_n i p_0 mamy

$$\rho(p_0, A) - \rho(p_n, A) \leq \rho(p_0, p_n) = \rho(p_n, p_0)$$

skąd

$$\rho(p_n, A) - \rho(p_0, A) \geq -\rho(p_n, p_0) \qquad (2.14)$$

Na mocy (2.13) i (2.14) jest

$$-\rho(p_n, p_0) \leq \rho(p_n, A) - \rho(p_0, A) \leq \rho(p_n, p_0)$$

czyli

$$|\rho(p_n, A) - \rho(p_0, A)| \leq \rho(p_n, p_0) .$$

Na mocy (2.11) jest $\rho(p_n, p_0) < \varepsilon$ dla $n > N$ zatem

$$|\rho(p_n, A) - \rho(p_0, A)| \leq \varepsilon \quad \text{dla } n > N \qquad (2.15)$$

Stąd wynika związek (2.12).

c.n.d.

<u>Twierdzenie 2.6.</u> Dla dowolnego punktu $p \in R$, dowolnej liczby rzeczywistej $T > 0$ i dowolnego $\varepsilon > 0$, istnieje $\delta > 0$ takie, że dla $\rho(q,p) < \delta$ oraz $0 \leq t \leq T$ $(-T \leq t \leq 0)$. jest $\rho(f(q,t), f(p,t)) < \varepsilon$ (2.16) dla każdego $q \in R$ oraz $t \in I$.

Inaczej mówiąc, jeśli punkty początkowe są dostatecznie bliskie, to w przedziale czasu T, odległość między jednoczesnymi położeniami poruszających się punktów, będzie mniejsza od zadanej liczby dodatniej ε.

<u>Dowód.</u> Przypuśćmy, że tak nie jest, to znaczy dla pewnego punktu $p_0 \in R$ i liczb $T_0 > 0$ oraz $\varepsilon_0 > 0$ nie istnieje $\delta > 0$, spełniające warunki twierdzenia.

Weźmy ciąg liczb dodatnich (δ_n) zmierzający do zera. Zgodnie z przypuszczeniem, dla każdego n istnieje przynajmniej jeden punkt q_n i jedna liczba $t_n \in \langle 0, T_0 \rangle$

takie, że dla $\rho(q_n, p_n) < \delta_n$, jest

$$\rho(f(q_n, t_n), f(p_o, t_n)) \geqslant \varepsilon_o \quad . \tag{2.17}$$

Ponieważ $\rho(q_n, p_o) < \delta_n \to 0$, przy $n \to \infty$, więc $(q_n) \to p_o$.

Ciąg (t_n) wartości czasu jest ograniczony. Wobec tego na mocy twierdzenia Bolzano-Weierstrassa (*), można z niego wybrać podciąg zbieżny. Aby nie komplikować oznaczeń, załóżmy, że sam ciąg (t_n) jest zbieżny. Niech więc

$$\lim_{n \to \infty} t_n = t_o \quad .$$

Na mocy ciągłości funkcji $f(p,t)$ względem swych argumentów (własność (2) układu dynamicznego), mamy

$$\lim_{n \to \infty} f(q_n, t_n) = f(p_o, t_o) \quad , \quad \lim_{n \to \infty} f(p_o, t_n) = f(p_o, t_o) \quad . \tag{2.18}$$

Przechodząc do granicy w (2.17), otrzymujemy na mocy (2.18) i twierdzenia 2.4

$$\lim_{n \to \infty} \rho(f(q_n, t_n), f(p_o, t_n)) = \rho(f(p_o, t_o), f(p_o, t_o)) = 0 \geqslant \varepsilon_o \quad .$$

Otrzymana sprzeczność dowodzi twierdzenia

c.n.d.

2.2. Klasyfikacja ruchów i trajektorii układu dynamicznego oraz niektóre ich własności

Rozważmy dowolny ruch $f(p,t)$. Możliwe są trzy przypadki.

1) $f(p,t) \equiv p$ dla wszystkich t. Taki ruch nazywa się spoczynkiem, zaś punkt p punktem spoczynku.

2) $f(p,t) \not\equiv p$, lecz istnieją liczby $t_1 \neq t_2$ takie, że $f(p, t_2) = f(p, t_1)$.

Przyjmując dla ustalenia uwagi, że $t_2 > t_1$ oznaczmy $\tau = t_2 - t_1$ $(\tau > 0)$. Na mocy własności (3) układu dynamicznego, mamy dla każdego $t \in I$

$$f(p, t+\tau) = f(p, t + t_2 - t_1) = f(f(p, t_2), t - t_1) = \\ = f(f(p, t_1), t - t_1) = f(p, t_1 + t - t_1) = f(p,t) \quad . \tag{2.19}$$

(*) W. Kołodziej Analiza Matematyczna PWN 1978 r str. 39

W tym przypadku ruch nazywa się okresowym, zaś liczba τ jego okresem. Wraz z τ, rozważany ruch ma również okresy w postaci $n\tau$ ($n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$). Wykażemy, że wśród wszystkich dodatnich okresów ruchu $f(p,t)$, istnieje okres najmniejszy. W tym celu rozważmy zbiór $\{\tau\}$ wszystkich okresów dodatnich i oznaczmy $\inf \{\tau\} = \tau_0$. Wtedy istnieje ciąg dodatnich okresów $(\tau_n) \to \tau_0$. Przechodząc do granicy przy $n \to \infty$ w równości

$$f(p, t + \tau_n) = f(p,t)$$

otrzymujemy

$$f(p, t + \tau_0) = f(p,t) \qquad \text{dla wszystkich } t \in I$$

Oznacza to, że τ_0 jest również okresem ruchu $f(p,t)$. Pozostaje wykazać, że $\tau_0 \neq 0$.

Przypuśćmy, że tak nie jest, to znaczy, że ciąg $(\tau_n) \to 0$. Rozważmy punkt p i dowolne jego otoczenie $S(p, \varepsilon)$, to znaczy zbiór $\{q \in R : \rho(q,p) < \varepsilon\}$. Wskutek ciągłości funkcji $f(p,t)$ względem t, dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje $\delta > 0$ takie, że dla wszystkich $|t| < \delta$ jest $\rho(f(p,t), p) < \varepsilon$ (2.20)

Oczywiście istnieje również odpowiednie $\tau_n < \delta$, a więc nierówność (2.20) jest spełniona dla wszystkich $t \in \langle 0, \tau_n \rangle$. Ponieważ τ_n jest okresem, więc nierówność (2.20) musi być spełniona dla wszystkich $t \in I$. Wobec tego $f(p,t) \in S(p, \varepsilon)$ dla wszystkich $t \in I$. Ponieważ ε jest dowolne, więc stąd wynika, że $f(p,t) = p$ dla wszystkich t, co jest sprzeczne z warunkiem $f(p,t) \not\equiv p$.

W dalszych rozważaniach, przez okres ruchu $f(p,t)$, będziemy rozumieli najmniejszy jego okres.

Ruchy mające własności (1) lub (2), to znaczy punkt spoczynku i ruch okresowy, nazywamy ruchami osobliwymi.

3) $f(p,t_2) \neq f(p,t_1)$ dla $t_2 \neq t_1$. Taki ruch nazywamy nieosobliwym.

Istnieją więc trzy różne pod względem topologicznym rodzaje ruchów i odpowiadających im trajektorii.

1) W przypadku spoczynku, trajektoria jest punktem.

2) W przypadku ruchu T - okresowego, trajektoria jest linią zamkniętą, to znaczy jest homeomorfizmem przedziału $\langle 0, \tau \rangle$ osi rzeczywistej, w którym utożsamiamy jego początek i koniec. Można wykazać, że trajektoria ruchu okresowego jest homeomorficzna z okręgiem.

3) W przypadku ruchu nieosobliwego, trajektoria jest homeomorficzna z prostą rzeczywistą.

Twierdzenie 2.7. Dowolny skończony odcinek trajektorii, jest zbiorem w sobie zwartym i domkniętym.

Dowód. Rozważmy odcinek $f(p, \langle T_1, T_2 \rangle)$ i dowolny ciąg punktów (q_n) na tym odcinku. Ponieważ

$$q_n \in f(p, \langle T_1, T_2 \rangle)$$

więc istnieje liczba rzeczywista $t_n \in \langle T_1, T_2 \rangle$ taka, że

$$q_n = f(p, t_n) .$$

Ponieważ ciąg (t_n) jest ograniczony, więc na mocy twierdzenia Bolzano-Weierstrassa, można z niego wybrać podciąg zbieżny (t_{i_k}). Niech

$$\lim_{k \to \infty} t_{i_k} = t_0$$

Mamy $t_0 \in \langle T_1, T_2 \rangle$, zatem

$$f(p, t_0) \in f(p, \langle T_1, T_2 \rangle) .$$

Rozważmy teraz podciąg punktów (q_{i_k}), odpowiadających wartościom (t_{i_k}). Na mocy ciągłości funkcji $f(p,t)$ mamy

$$\lim_{k \to \infty} q_{i_k} = \lim_{k \to \infty} f(p, t_{i_k}) = f(p, t_0) \in f(p, \langle T_1, T_2 \rangle) .$$

Stąd wynika, że istnieje punkt graniczny, należący do $f(p, \langle T_1, T_2 \rangle)$. Tym samym wykazaliśmy zwartość i domkniętość zbioru wartości funckji $f(p, \langle T_1, T_2 \rangle)$

c.n.d.

Uwaga 1. Często mówi się, że zbiór zwarty i domknięty jest w sobie zwarty (w literaturze zagranicznej używa się też nazwy „kompakt" czyli „zwartość" lecz ta ostatnia nazwa nie jest stosowana w literaturze polskiej).

Uwaga 2. Twierdzenie to można również udowodnić następująco. Odcinek $f(p, \langle T_1, T_2 \rangle)$ można uważać za obraz ciągły zbioru domkniętego i ograniczonego $\langle T_1, T_2 \rangle$, który to przedział jest podzbiorem przestrzeni liczb rzeczywistych R. Taki podzbiór jest zbiorem zwartym.(*) Twierdzenie 2.7 wynika z faktu, że obraz ciągły przestrzeni zwartej jest zbiorem zwartym(**), a więc w R jest on też domknięty i ograniczony. W przypadku trajektorii nieosobliwej, obraz ciągły $f(p, \langle T_1, T_2 \rangle)$ przedziału $\langle T_1, T_2 \rangle$, jest nawet homeomorfizmem.

Twierdzenie 2.8. Jeśli $q \in f(p,I)$, to $f(q,I) = f(p,I)$

Dowód. Niech $q \in f(p,I)$. Na mocy (2.4) jest

$$f(q,I) \subset f(f(p,I),I) = f(p, I+I) = f(p,I)$$

Z drugiej strony punkt q, będący punktem trajektorii punktu p, można przedstawić w postaci $q = f(p,t_0)$. Zatem

$$p = f(q, -t_0) \in f(q,I)\ .$$

Stąd

$$f(p,I) \subset f(f(q,I),I) = f(q, I+I) = f(q,I)\ .$$

Ponieważ $f(q,I) \subset f(p,I)$ oraz $f(p,I) \subset f(q,I)$ więc

$$f(q,I) = f(p,I)\ .$$

c.n.d.

Twierdzenie 2.9. Różne trajektorie układu dynamicznego nie przecinają się.

Dowód. Wykażemy, że jeśli dwie trajektorie $f(p,I)$ i $f(q,I)$ mają wspólny punkt r, to są one identyczne. Istotnie, jeśli $r \in f(p,I)$ i $r \in f(q,I)$, to na mocy twierdzenia 2.8 jest

$$f(r,I) = f(p,I)\ , \qquad f(r,I) = f(q,I)\ .$$

Stąd wynika, że $f(p,I) = f(q,I)$

c.n.d.

(*) W. Kołodziej Analiza Matematyczna PWN 1978 r str 87

(**) jak wyżej str 88

Twierdzenie 2.10. Ruch dowolnego punktu p, wyznacza jednoznacznie ruch wszystkich pozostałych punktów trajektorii f(p,I).

Dowód. Istotnie, jeśli znany jest ruch f(p,t) punktu p, to ruch dowolnego punktu $q = f(p,t_0) \in f(p,I)$, jest wyznaczony wzorem

$$f(q,t) = f(f(p,t_0),t) = f(p,t_0+t) .$$

c.n.d.

2.3. Zbiory niezmiennicze

Zbiór A punktów przestrzeni R nazywamy niezmienniczym względem danego układu dynamicznego f(p,t) (lub wprost niezmienniczym), jeśli przekształca się on w siebie, przy wszystkich odwzorowaniach danego układu, to znaczy gdy

$$f(A,t) \subset A \quad \text{oraz} \quad f(A,-t) \subset A , \ t \in I . \tag{2.21}$$

Stosując do drugiej inkluzji odwzorowanie z parametrem t, będące układem dynamicznym, mamy

$$f(f(A,-t),t) = f(A,0) = A \subset f(A,t) \tag{2.22}$$

Wobec tego na mocy pierwszej z inkluzji (2.21) i (2.22), jest

$$f(A,t) = A . \tag{2.23}$$

Przykładem zbioru niezmienniczego, jest całkowita trajektoria. Istotnie na mocy (2.4), odwzorowaniem całkowitej trajektorii, jest całkowita trajektoria, to znaczy

$$f(f(p,I),t) = f(p,I+t) = f(p,I) . \tag{2.24}$$

Twierdzenie 2.11. Suma dowolnej ilości zbiorów niezmienniczych, jest zbiorem niezmienniczym.

Dowód. Niech $A = \bigcup_\alpha A_\alpha$, gdzie A_α oznaczają zbiory niezmiennicze, to znaczy $f(A_\alpha,t) = A_\alpha$, dla wszystkich $t \in I$. Na mocy (2.1) mamy

$$f(A,t) = f(\bigcup_\alpha A_\alpha,t) = \bigcup_\alpha f(A_\alpha,t) = \bigcup_\alpha A_\alpha = A .$$

Zatem zbiór A jest niezmienniczy c.n.d.

Z twierdzenia 2.11 wynika w szczególności, że dowolny zbiór całkowitych trajektorii, jest zbiorem niezmienniczym. Wykażemy, że jest również na odwrót, to znaczy, że każdy zbiór niezmienniczy składa się z całkowitych trajektorii. Istotnie, niech $p \in A$, gdzie A jest zbiorem niezmienniczym. Zatem dla każdego $t \in I$ jest

$$f(p,t) \in f(A,t) = A$$

Stąd wynika, że $f(p,I) \subset A$. Tym samym udowodniliśmy następujące twierdzenie.

Twierdzenie 2.12. Warunkiem koniecznym i wystarczającym na to, aby zbiór był niezmienniczy, jest, aby składał się on z całkowitych trajektorii, to znaczy, aby zbiór ten wraz z każdym swym punktem, zawierał również całkowitą trajektorię, przechodzącą przez ten punkt.

Twierdzenie 2.13. Niepuste przecięcie (iloczyn) dowolnej ilości zbiorów niezmienniczych, jest zbiorem niezmienniczym.

Dowód. Niech $A = \bigcap_{\alpha} A_\alpha$, gdzie A_α są zbiorami niezmienniczymi. Na mocy (2.2) jest

$$f(A,t) = f(\bigcap_{\alpha} A_\alpha, t) = \bigcap_{\alpha} f(A_\alpha, t) = \bigcap_{\alpha} A_\alpha = A$$

c.n.d.

Twierdzenie 2.14. Dopełnienie $R \setminus A$ zbioru niezmienniczego $A \subset R$, jest zbiorem niezmienniczym.

Dowód. Niech $A \subset R$ oraz $f(A,t) = A$ dla wszystkich $t \in I$. Dla dowolnego punktu $q \in R \setminus A$ i dowolnego $t \in I$, jest $f(q,t) \in R \setminus A$. Istotnie, gdyby było $f(q,t) \in A$, to $q \in f(A,-t) = A$, co jest niemożliwe, gdyż $q \in R \setminus A$. Na mocy tego, że $f(q,t) \in R \setminus A$, dla dowolnego $t \in I$, wynika, że $f(q,I) \subset R \setminus A$. Wobec tego zbiór $R \setminus A$ składa się z całkowitych trajektorii, zatem na mocy twierdzenia 2.12, jest on zbiorem niezmienniczym.

Twierdzenie 2.15. Domknięcie każdego zbioru niezmienniczego, jest zbiorem niezmienniczym.

Dowód. Niech A będzie zbiorem niezmienniczym. Wykażemy, że domknięcie $\bar{A}$ składa się z całkowitych trajektorii. Niech $p \in \bar{A}$. Wtedy istnieje ciąg punktów zbioru A (między którymi mogą być też jednakowe), taki(*), że $(q_n) \to p$. Wskutek niezmienniczości zbioru A, mamy $f(q_n,t) \in A$, dla dowolnego $t \in I$. Jednakże ciąg $(f(q_n,t)) \to f(p,t)$, więc $f(p,t) \in \bar{A}$. Ponieważ t jest dowolne, więc również $f(p,I) \subset \bar{A}$. Wobec tego całkowita trajektoria jest zawarta w $\bar{A}$, co na mocy twierdzenia 2.12 dowodzi, że domknięcie $\bar{A}$ jest zbiorem niezmienniczym.

c.n.d.

Jest oczywiste, że każdy układ dynamiczny $f(p,t)$ zadany w przestrzeni R, określa jednoznacznie układ dynamiczny, na dowolnym podzbiorze niezmienniczym $A \subset R$.

Zbiór A nazywa się dodatnio (lub ujemnie) niezmienniczym, jeśli $f(A,t) \subset A$, dla wszystkich $t \in I^+$ (lub $t \in I^-$). Można wykazać, że dla zbiorów dodatnio (lub ujemnie) niezmienniczych, mają miejsce twierdzenia 2.11, 2.12, 2.13, 2.14 oraz, że dopełnieniem zbioru dodatnio niezmienniczego, jest zbiór ujemnie niezmienniczy.

2.4. Twierdzenia o punktach spoczynku

Twierdzenie 2.16. Zbiór punktów spoczynku jest domknięty.

Dowód. Rozważmy ciąg (p_n) punktów spoczynku, zbieżny do punktu p_0. Przechodząc w równości $f(p_n,t) = p_n$ (prawdziwej dla każdego n i t) do granicy przy $n \to \infty$, otrzymujemy, że $f(p_0,t) = p_0$, dla wszystkich $t \in I$, co dowodzi, że p_0 też jest punktem spoczynku.

c.n.d.

Twierdzenie 2.17. Żaden ruch nie może osiągnąć punktu spoczynku w skończonym przedziale czasu.

Dowód. Niech p będzie punktem spoczynku. Załóżmy, że jakikolwiek ruch $f(q,t)$ $(q \neq p)$ osiągnął w pewnej chwili czasu $t = t_0$ punkt spoczynku, to znaczy $f(q,t_0) = p$. Wtedy na mocy twierdzenia 2.8, jest $f(q,I) = f(p,I) = p$, co jest sprzeczne

(*) W.Kołodziej Analiza Matematyczna PWN 1978 r. str 76 z założeniem $q \neq p$.

c.n.d.

Uwaga! Twierdzenie to jest również konsekwencją twierdzenia 2.9.

Twierdzenie 2.18. Jeśli dla pewnej liczby $T > 0$ i dla dowolnego otoczenia punktu p, istnieje odcinek trajektorii o „długości czasowej" T, całkowicie zawarty w tym otoczeniu, to p jest punktem spoczynku.

Dowód. Przypuśćmy, że jest przeciwnie, to znaczy, że p nie jest punktem spoczynku. Wtedy w przedziale $\langle 0,T \rangle$ istnieje takie t_0, że $f(p,t_0) \neq p$. Oznaczmy $f(p,t_0) = p_0$ oraz $\rho(p_0,p) = r \, (r > 0)$.

Wskutek ciągłości funkcji $f(p,t)$ istnieje takie $\delta > 0$, że

$$\rho(f(q,t_0), f(p,t_0)) < \frac{r}{2} \qquad (2.25)$$

dla każdego punktu $q \in S(p,\delta)$ ($S(p,\delta)$ – kula – otoczenie punktu p o promieniu δ), przy czym możemy zawsze przyjąć, że $\delta < \frac{r}{2}$.

Nierówność (2.25) możemy napisać w postaci

$$\rho(f(q,t_0), p_0) < \frac{r}{2} \qquad (2.26)$$

Na mocy nierówności (2.6) i nierówności trójkąta dla metryki, mamy

$$r = \rho(p,p_0) \leq \rho(p, f(q,t_0)) + \rho(f(q,t_0), p_0) < \rho(p, f(q,t_0)) + \frac{r}{2}$$

Wobec tego

$$\rho(p, f(q,t_0)) > \frac{r}{2}$$

Zatem dla dowolnego punktu $q \in S(p,\delta)$ jest $f(q,t_0) \notin S(p,\delta)$.

Ponieważ $0 < t_0 < T$, więc w $S(p,\delta)$ nie ma ani jednego odcinka trajektorii o „długości czasowej" T, co przeczy założeniu w twierdzeniu. Sprzeczność ta dowodzi, że p jest punktem spoczynku.

c.n.d.

Twierdzenie 2.19. Jeśli istnieje granica

$$\lim_{t \to \pm\infty} f(q,t) = p \qquad (2.27)$$

to p jest punktem spoczynku.

Dowód. Jeśli zachodzi (2.27), to dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje takie t_0, że cała półtrajektoria $f(f(q,t_0),I^{\pm}) = f(q,t_0 + I^{\pm})$ leży w ε - otoczeniu punktu p. Na mocy twierdzenia 2.18, punkt p' jest wtedy punktem spoczynku.

c.n.d.

Twierdzenie 2.20. Jeśli w dowolnym otoczeniu punktu p, istnieją punkty odpowiadające ruchom okresowym, o dowolnie małym okresie, to p jest punktem spoczynku.

Dowód. Niech $(p_n) \to p$, $f(p_n, \tau_n) = p_n$, $(\tau_n) \to 0$ $(\tau_n > 0)$ oraz $\varepsilon > 0$. Wskutek ciągłości funkcji $f(p,t)$, istnieje $T > 0$ takie, że

$$\rho(f(p,t), f(p,0)) < \frac{\varepsilon}{2} \tag{2.28}$$

dla wszystkich $t \in \langle 0,T \rangle$ (p. twierdzenie 2.6).

Obierzmy odpowiednie $\delta > 0$ dla $\frac{\varepsilon}{2}$, punktu p i liczby T, na podstawie twierdzenia 2.6. Możemy zawsze założyć, że $\delta < \frac{\varepsilon}{2}$.

Zgodnie z założeniem twierdzenia, istnieje liczba naturalna n taka, że $p_n \in S(p, \delta)$ oraz $\tau_n < T$. Wobec tego dla obranego δ i wszystkich $t \in \langle 0, \tau_n \rangle$ jest

$$\rho(f(p_n,t), f(p,t)) < \frac{\varepsilon}{2} \tag{2.29}$$

Na mocy (2.28) i (2.29) mamy dla wszystkich $t \in \langle 0, \tau_n \rangle$

$$\rho(f(p_n,t), f(p,0)) = \rho(f(p_n,t), p) < \varepsilon$$

Ponieważ zgodnie z założeniem, τ_n jest okresem ruchu $f(p_n,t)$, więc

$$f(p_n, I) \subset S(p, \varepsilon)$$

Stąd na mocy twierdzenia 2.18 wynika, że p jest punktem spoczynku.

c.n.d.

Twierdzenie 2.21. Każdy dodatnio niezmienniczy zbiór M, homeomorficzny z domkniętą kulą w przestrzeni (skończenie n-wymiarowej) euklidesowej E_n, zawiera punkt spoczynku.

Dowód. Weźmy ciąg (t_k) liczb dodatnich, zbieżny do zera. Ponieważ zbiór M jest dodatnio niezmienniczy, więc dla każdego k, odwzorowanie $f(p,t_k)$ przekształca zbiór M w siebie. Na mocy twierdzenia Brouwera (*), odwzorowanie to ma przynajmniej jeden punkt stały, to znaczy istnieje taki punkt $p_k \in M$, że

$$f(p_k, t_k) = p_k$$

Nazwijmy n - wymiarowym elementem zbiór, homeomorficzny z domkniętą kulą, w przestrzeni euklidesowej E_n. Homeomorfizm taki wykazuje się w topologii algebraicznej (**). Ponieważ kula domknięta w skończenie n - wymiarowej przestrzeni euklidesowej E_n jest zwarta (***), więc jest również zwarty zbiór n - wymiarowych elementów, skąd możemy uważać, że ciąg (p_k) jest zbieżny. Niech $(p_k) \to p$. Jest widoczne, że $p \in M$. Zatem na mocy twierdzenia 2.20 punkt p jest punktem spoczynku.

c.n.d.

Jeśli L jest linią zamkniętą w E_2, zaś G obszarem ograniczonym tą linią, to domknięcie $\overline{G}$ jest homeomorficzne z kołem to znaczy jest elementem dwuwymiarowym. W związku z tym z twierdzenia 2.21, wynika twierdzenie następujące.

Twierdzenie 2.22. Na płaszczyźnie, wewnątrz obszaru ograniczonego trajektorią ruchu okresowego, istnieje co najmniej jeden punkt spoczynku.

Treść twierdzenia 2.22, dla układu równań różniczkowych, nosi zwykle nazwę twierdzenia Poincare'go-Bendixson'a.

Można również udowodnić (dowód pomijamy), że każdy układ dynamiczny na sferze S_{2k} (to znaczy w zbiorze punktów z E_{2k+1}, których współrzędne spełniają związek $x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_{2k+1}^2 = r^2$), ma przynajmniej jeden punkt spoczynku.

(*) K.Kuratowski Wstęp do teorii mnogości i topologii PWN 1972 wyd.6 - str 261.

(**) K.Kuratowski Wstęp do teorii mnogości i topologii PWN 1972 wyd.6 - str 319.
L.S.Pontriagin Wstęp do topologii kombinatorycznej PWN 1961 - str.44.

(***) W. Kołodziej Analiza Matematyczna PWN 1978 - str 88.

Jednakże do tej pory nie rozwiązano zagadnienia, czy istnieje na sferze S_3 układ dynamiczny, nie mający ani punktów spoczynku, ani trajektorii okresowych.

Zbadajmy dla przykładu kilka układów dynamicznych, na prostej OX.

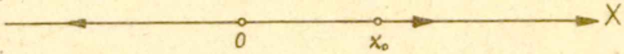
<u>Przykład.</u> Rozważmy równanie różniczkowe

$$\frac{dx}{dt} = x \ , \quad x(0) = x_0 \quad .$$

Rozwiązanie tego równania ma postać

$$x = x_0 e^t \quad .$$

Układ dynamiczny, wyznaczony w ten sposób na prostej OX, zawiera tylko trzy trajektorie, a mianowicie punkt spoczynku 0 i dwa przedziały półnieskończone $(-\infty\ ,\ 0)$ oraz $(0,\ +\infty\ )$. Wzdłuż pierwszego z nich, ruch przebiega w kierunku ujemnym, zaś wzdłuż drugiego, w kierunku dodatnim.



Rys. 2.1.

<u>Przykład.</u> Rozważmy równanie różniczkowe

$$\frac{dx}{dt} = -x \ , \quad x(0) = x_0 \quad .$$

Rozwiązanie tego równania ma postać

$$x = x_0 e^{-t} \quad .$$

Trajektorie ruchu są identyczne jak w poprzednim przykładzie, tylko zwrot ruchu jest przeciwny.

Rys. 2.2.

<u>Przykład.</u> Rozważmy równanie różniczkowe

$$\frac{dx}{dt} = |x| \ , \quad x(0) = x_0 \quad .$$

Trajektorie są identyczne jak w poprzednich dwóch przykładach. Zwrot ruchu ilustrują strzałki na Rys.2.3.

Rys. 2.3.

Przykład. Rozważmy równanie różniczkowe

$$\frac{dx}{dt} = 0 \quad , \quad x(0) = x_0$$

W tym przypadku wszystkie punkty prostej OX są punktami spoczynku.

Przykład. Rozważmy równanie różniczkowe

$$\frac{dx}{dt} = 1 \quad , \quad x(0) = x_0$$

Rozwiązanie tego równania ma postać

$$x = x_0 + t$$

W tym przypadku istnieje jedyna trajektoria, pokrywająca się z całą prostą, wzdłuż której zachodzi ruch jednostajny, z lewa na prawo.

W rozważanych wyżej przypadkach nie mogą występować ruchy okresowe (gdyż okręgu nie można homeomorficznie odwzorować ani na prostą, ani na dowolny podzbiór prostej). Zatem wszystkie ruchy dzielą się na spoczynki, lub ruchy nieosobliwe, zaś trajektorie są bądź punktami, bądź przedziałami.

Określenie na prostej domkniętego zbioru punktów spoczynku, wyznacza całkowicie zbiór trajektorii układu dynamicznego, a mianowicie trajektorie ruchów nieosobliwych są przedziałami, przylegającymi do domkniętego zbioru punktów spoczynku.

W celu pełnego wyznaczenia układu dynamicznego na prostej, wystarczy na mocy twierdzenia 2.10 podać po jednym z ruchów na każdym z przylegających przedziałów, to znaczy odwzorować homeomorficznie prostą rzeczywistą na każdy z tych przedziałów. Należy przy tym mieć na uwadze, że wzajemnie jednoznaczne i ciągłe odwzorowanie przedziału z E_1 na przedział w E_1 jest ściśle monotoniczne i jest homeomorfizmem przedziału na jego obraz, który jest też przedziałem w E_1.

Odwzorowanie homeomorficzne prostej rzeczywistej $-\infty < t < +\infty$ na przedział $a < x < b$, można zrealizować tylko za pomocą takiej funkcji $x = \psi(t)$ ciągłej i monotonicznej, że przy $t \to +\infty$ jest $x \to b$, lub $x \to a$, zaś przy $t \to -\infty$ jest $x \to a$, lub $x \to b$. Niech $x_0 = \psi(0)$. Połóżmy

$$f(x_0, t) = \psi(t)$$

Wtedy ruch $f(x_1, t)$ punktu x_1 $(a < x_1 = \psi(t_1) < b)$, jest na mocy twierdzenia 2.10 wyznaczony następująco

$$f(x_1, t) = f(f(x_0, t_1), t) = f(x_0, t_1 + t) = \psi(t_1 + t)$$

Stąd jest widoczne, że nie każdy układ dynamiczny na prostej, można przedstawić za pomocą równania różniczkowego w postaci

$$\frac{dx}{dt} = \varphi(x)$$

gdyż istnieją ciągłe i monotoniczne funkcje $x = \psi(t)$, które nie we wszystkich punktach przedziału $-\infty < t < +\infty$ mają pochodną.

2.5. Izomorfizm układów dynamicznych

Dwa układy dynamiczne $g(p,t)$ i $h(x,t)$ $(p \in R_1, x \in R_2, t \in I)$ nazywamy izomorficznymi, lub topologicznie równoważnymi, jeśli istnieje taki homeomorfizm $x = \xi(p)$ przestrzeni R_1 na przestrzeń R_2, że

$$\xi(g(p,t)) = h(\xi(p), t) \tag{2.30}$$

dla wszystkich $p \in R_1$ i $t \in I$.

Jeśli odwzorowanie ξ jest tylko ciągłe oraz spełniony jest warunek (2.30), to układ $g(p,t)$ nazywamy homomorficznym względem układu $h(x,t)$.

Najprostszym homomorfizmem jest przypadek, gdy przestrzeń R_2 stanowi jeden punkt spoczynku.

Zgodnie z powyższym określeniem izomorfizmu, rozważane oba układy dynamiczne $g(p,t)$ i $h(x,t)$ są równouprawnione, gdyż jeśli ξ jest homeomorfizmem, to warunek (2.30) jest równoważny warunkowi

$$\xi^{-1}(h(x,t)) = g(\xi^{-1}(x), t) \tag{2.31}$$

dla wszystkich $x \in R_2$ i $t \in I$.

Twierdzenie 2.23. Przy homomorfiźmie układów dynamicznych, obrazem odcinka $g(p, \langle t_1, t_2 \rangle)$ trajektorii punktu $p \in R_1$ jest odcinek $h(x, \langle t_1, t_2 \rangle)$ trajektorii punktu $x = \xi(p) \in R_2$.

Dowód. Niech $p \in R_1$ oraz $x = \xi(p)$. Z warunku (2.30) wynika, że dla dowolnego $t \in \langle t_1, t_2 \rangle$, obraz punktu $g(p,t)$ należy do odcinka $h(x, \langle t_1, t_2 \rangle)$. Z drugiej strony, każdy punkt $h(x,t)$ tego odcinka, jest obrazem punktu $g(p,t)$, odcinka $g(p, \langle t_1, t_2 \rangle)$, przy odwzorowaniu ξ.

c.n.d.

Twierdzenie 2.24. Przy homomorfiźmie układów dynamicznych, trajektoria (lub półtrajektoria dodatnia) przechodzi w trajektorię (lub półtrajektorię dodatnią).

Dowód - przebiega analogicznie jak dowód twierdzenia 2.23.

Z twierdzenia 2.24 wynika następujące twierdzenie.

Twierdzenie 2.25. Przy homomorfiźmie układów dynamicznych, punkt spoczynku przechodzi w punkt spoczynku.

Twierdzenie 2.26. Przy homomorfiźmie układów dynamicznych, punkt okresowy przechodzi w punkt okresowy, przy czym w przypadku izomorfizmu okres zostaje zachowany.

Dowód - wynika bezpośrednio z twierdzeń 2.23 i 2.24.

Twierdzenie 2.27. Przy homomorfiźmie układów dynamicznych, zbiór niezmienniczy przechodzi w zbiór niezmienniczy.

Dowód - wynika bezpośrednio z twierdzeń 2.12 i 2.24.

Twierdzenie 2.28. Warunkiem koniecznym izomorfizmu układów dynamicznych $g(p,t)$ i $h(x,t)$, mających odpowiednio zbiory punktów spoczynku M_1 i M_2, jest spełnienie jednego z dwóch następujących warunków.

1) $M_1 = M_2 = \emptyset$, gdzie $\emptyset$ oznacza zbiór pusty
2) $M_1 \neq \emptyset$, $M_2 \neq \emptyset$ lecz istnieje homeomorfizm R_1 na R_2 odwzorowujący M_1 na M_2.

Dowód - wynika bezpośrednio z twierdzenia (2.25) i wzoru (2.30)

Twierdzenie 2.29. Dwa układy dynamiczne okresowe zadane na okręgach, są izomorficzne wtedy i tylko wtedy, gdy ich ruchy mają jednakowy okres.

Dowód. Konieczność wynika z twierdzenia 2.26. W celu wykazania dostateczności załóżmy, że okres obu ruchów jest jednakowy. Biorąc dowolne dwa punkty q i x na okręgach R_1 i R_2 połóżmy

$$\xi(g(q,t)) = h(x,t) \quad , \quad t \in I \quad .$$

Łatwo sprawdzić, że ξ jest homeomorfizmem okręgu R_1 na R_2, spełniającym warunek (2.30). Wykażemy to, kładąc $p = g(q,t_0)$

$$\xi(g(p,t)) = \xi(g(g(q,t_0),t)) = \xi(g(q,t+t_0)) =$$

$$= h(x,t+t_0) = h(h(x,t_0),t) = h(\xi(g(q,t_0)),t) = h(\xi(p),t) \quad . \qquad \text{c.n.d.}$$

<u>Twierdzenie 2.30.</u> Dwa układy dynamiczne, bez punktów spoczynku, zadane na prostej, są izomorficzne.

<u>Dowód.</u> Niech $g(p,t)$ i $h(x,t)$, oznaczają dwa układy dynamiczne, zadane na E_1. Połóżmy przy dowolnym $t \in I$

$$\xi(g(0,t)) = h(0,t) \quad .$$

Łatwo sprawdzić, że ξ jest homeomorfizmem E_1 na E_1. Istotnie, jeśli $p = g(0,t_0)$, to

$$\xi(g(p,t)) = \xi(g(g(0,t_0),t)) = \xi(g(0,t+t_0)) = h(0,t+t_0) =$$

$$= h(h(0,t_0),t) = h(\xi(g(0,t_0)),t) = h(\xi(p),t) \quad .$$

Oznacza to, że jest spełniony warunek (2.30)'. c.n.d.

<u>Przykład.</u> Rozważmy układ dynamiczny, określony na prostej E_1 równaniem

$$\frac{dx}{dt} = 1 + |x| \quad , \quad x(0) = x_0 \quad .$$

Układ ten nie ma punktów spoczynku, jest on więc izomorficzny z układem, rozważonym w ostatnim przykładzie

$$\frac{dx}{dt} = 1 \quad , \quad x(0) = x_0 \quad .$$

W rozważanym obecnie przypadku, ruchy są wyznaczone równaniem

$$\int_{x_0}^{x} \frac{ds}{1+|s|} = t \quad .$$

Stąd otrzymujemy w szczególności dla $x_0 > 0$ i $t > 0$

$$x = (1 + x_0)e^t - 1 \quad . \tag{2.32}$$

Twierdzenie 2.31. Warunkiem koniecznym i wystarczającym na to, aby układy dynamiczne $g(p,t)$ i $h(x,t)$ określone w E_1, były izomorficzne jest, aby istniało odwzorowanie homeomorficzne $x = \eta(p)$ prostej E_1 na E_1, przekształcające w siebie zbiory punktów spoczynku M_1 i M_2 tych układów (przypominamy, że odwzorowanie homeomorficzne E_1 na E_1 jest monotoniczne) i przy tym w taki sposób, aby zwroty ruchu, na odpowiadających wzajemnie przedziałach, przyległych do M_1 i M_2, były dopasowane, to znaczy aby zwroty te pokrywały się, gdy $\eta(p)$ wzrasta i były przeciwne, gdy $\eta(p)$ maleje.

Dowód. A) Konieczność.

Niech układy dynamiczne $g(p,t)$ i $h(x,t)$, określone w E_1, będą izomorficzne. Na mocy (2.30), homeomorfizm $x = \xi(p)$ przekształca zbiory punktów spoczynku M_1 i M_2 tych układów wzajemnie na siebie. Wskutek monotoniczności homeomorfizmu E_1 na E_1, z (2.30) wynika, że zwroty ruchu w odpowiednich przedziałach przyległych do M_1 i M_2 są jednakowe, gdy $\xi(p)$ wrasta i przeciwne, gdy $\xi(p)$ maleje. Kładąc $\eta(p) \equiv \xi(p)$, otrzymujemy dowód konieczności warunków twierdzenia.

B) Dostateczność.

Załóżmy, że istnieje homeomorfizm $x = \eta(p)$, mający własności sformułowane w twierdzeniu. Zbudujmy funkcję $x = \xi(p)$, w następujący sposób. Jeśli p jest punktem spoczynku, to kładziemy $\xi(p) = \eta(p)$. Jeśli zaś $p \in (a,b)$, gdzie (a,b) oznacza przedział przyległy do M_1 oraz $p = g(\frac{a+b}{2}, t_0)$, to kładziemy

$$\xi(p) = h(\frac{c+d}{2}, t_0) \quad ,$$

gdzie $c = \xi(a)$, $d = \xi(b)$.

Ponieważ zwroty ruchów są z założenia dopasowane, więc zbudowane odwzorowanie $x = \xi(p)$, jest homeomorfizmem E_1 na E_1.

Ponadto jest spełniony warunek (2.30) gdyż:

$$\xi(g(p,t)) = \xi(g(g(\tfrac{a+b}{2},t_0),t) = \xi(g(\tfrac{a+b}{2},t+t_0)) =$$

$$= h(x,t+t_0) = h(\tfrac{\xi(a)+\xi(b)}{2},t+t_0) = h(\tfrac{c+d}{2},t+t_0) =$$

$$= h(h(\tfrac{c+d}{2},t_0),t) = h(\xi(p),t) \quad .$$

Wobec tego układy dynamiczne $g(p,t)$ i $h(x,t)$ są izomorficzne, zatem dostateczność warunków twierdzenia została udowodniona.

c.n.d.

Twierdzenie 2.32. Każdy układ dynamiczny na prostej, jest izomorficzny z pewnym układem dynamicznym, określonym za pomocą równania różniczkowego.

Dowód. Niech na E_1 dany będzie układ dynamiczny $g(p,t)$, którego punkty spoczynku tworzą zbiór M. Niech (a,b) oznacza dowolny przedział, przylegający do zbioru punktów spoczynku M. Określamy na E_1 funkcję $\varphi(x)$, kładąc $\varphi(x) = 0$ na M oraz

$$\varphi(x) = (x-a)(x-b)\operatorname{sgn}\left[\frac{a+b}{2} - g\left(\frac{a+b}{2},1\right)\right] \tag{2.33}$$

w przedziale (a,b). Jest widoczne, że funkcja $\varphi(x)$ określona w ten sposób, jest ciągła na E_1. Oznaczmy przez $x = h(x_0,t)$ układ dynamiczny, określony równaniem różniczkowym

$$\frac{dx}{dt} = \varphi(x) \tag{2.34}$$

Układy dynamiczne $g(p,t)$ i $h(x_0,t)$, mają jednakowe zbiory punktów spoczynku M. Ponadto na każdym przylegającym do zbioru M przedziale (a,b), ruchy $h(x_0,t)$ i $g(p,t)$ przebiegają w tym samym kierunku, gdyż $\frac{dx}{dt}$ ma znak zgodny ze znakiem różnicy $g(\frac{a+b}{2},1) - \frac{a+b}{2}$. Na mocy twierdzenia 2.31, układy dynamiczne $g(p,t)$ i $h(x_0,t)$ są izomorficzne.

c.n.d.

Należy zaznaczyć, że do tej pory nie ustalono, czy analogiczne twierdzenie ma miejsce dla przestrzeni E_2.

3. Własności graniczne układów dynamicznych

3.1. Punkty graniczne (dynamicznie). Własności zbiorów granicznych.

Punkt q nazywamy ω - granicznym (lub α - granicznym) punktem ruchu $f(p,t)$, jeśli istnieje ciąg (t_n) wartości czasu, zmierzający do $+\infty$ (lub $-\infty$) taki, że odpowiedni ciąg obrazów $(f(p,t_n))$ punktu p zmierza do q.

Punkty ω - graniczne i α - graniczne ruchu $f(p,t)$, nazywają się punktami granicznymi dynamicznie tego ruchu.

Twierdzenie 3.1. Warunkiem koniecznym i wystarczającym na to, aby punkt q był punktem ω - granicznym (lub α - granicznym) ruchu $f(p,t)$ jest, aby dla każdego $\varepsilon > 0$ i dowolnej chwili czasu T, istniała taka chwila czasu $t > T$ (lub $t < T$), że

$$f(p,t) \in S(q,\varepsilon) . \tag{3.1}$$

Dowód. Niech q będzie punktem ω - granicznym ruchu $f(p,t)$. Wtedy istnieje taki ciąg $(t_n) \to +\infty$, że $(f(p,t_n)) \to q$. Wobec tego, dla obranych $\varepsilon > 0$ i T, istnieje taka liczba N że dla $t_N > T$ jest $\rho(f(p,t_N),q) < \varepsilon$, co dowodzi konieczności warunku (3.1).

Załóżmy teraz, że dla dowolnych $\varepsilon > 0$ i T, istnieje takie $t > T$, że spełniony jest warunek (3.1). Rozważmy ciąg liczb $(\varepsilon_n) \to 0$ $(\varepsilon_n > 0)$ i $(T_n) \to +\infty$. Dla ε_n i T_n istnieje takie $t_n > T_n$, że

$$\rho(f(p,t_n),q) < \varepsilon_n . \tag{3.2}$$

Ponieważ $(t_n) \to +\infty$, więc na mocy (3.2), ciąg $(f(p,t_n)) \to q$. Wobec tego punkt q, jest punktem ω - granicznym ruchu $f(p,t)$, co dowodzi dostateczności warunku (3.1). c.n.d.

Zbiór wszystkich punktów ω - granicznych ruchu $f(p,t)$ oznaczamy przez Ω_p i nazywamy ω - granicznym zbiorem tego ruchu. Analogicznie zbiór wszystkich punktów α - granicznych ruchu $f(p,t)$ oznaczamy przez A_p i nazywamy α - granicznym zbiorem tego ruchu. Zbiory Ω_p i A_p nazywamy dynamicznie granicznymi zbiorami ruchu f(p,t).

Zbiór wszystkich dynamicznie granicznych punktów ruchu f(p,t) oznaczamy przez Δp, to znaczy

$$\Delta_p = A_p \cup \Omega_p \quad (3.2)$$

Jest widoczne, że punkty graniczne ruchu f(p,t), są punktami granicznymi półtrajektorii $f(p,I^+)$ i $f(p,I^-)$, to znaczy: (p. oznaczenie w p.1)

$$\Omega_p \subset \Gamma_p^+ \quad , \quad A_p \subset \Gamma_p^- \quad (3.4)$$

Ponadto mamy

$$\Gamma_p^+ = f(p,I^+) \cup \Omega_p \quad (3.5)$$

$$\Gamma_p^- = f(p,I^-) \cup A_p \quad (3.6)$$

$$\Gamma_p = f(p,I) \cup \Delta_p \quad (3.7)$$

<u>Twierdzenie 3.2.</u> Zbiory dynamicznie graniczne ruchu f(p,t) są domknięte.

<u>Dowód.</u> Ograniczymy się do zbioru Ω_p, gdyż postępowanie dla zbioru A_p jest analogiczne. Niech q będzie dowolnym punktem domknięcia $\bar{\Omega}$. Wobec tego w zbiorze Ω_p, istnieje ciąg punktów $(q_n) \to q$. Wykażemy, że q jest ω - granicznym punktem ruchu f(p,t). W tym celu weźmy dowolne ε_0 - otoczenie punktu q. Jest oczywiste, że istnieje takie $q_N \in R$, że $q_N \in S(q, \varepsilon_0)$. Istnieje również pewne otoczenie $S(q_N, \varepsilon_1)$, całkowicie zawarte w $S(q, \varepsilon_0)$

$$S(q_N, \varepsilon_1) \subset S(q, \varepsilon_0)$$

Ponieważ punkt $q_N \in \Omega_p$, więc dla dowolnego T, istnieje takie $t > T$, że $f(p,t) \in S(q_N, \varepsilon_1)$, co wynika z twierdzenia 3.1. Wobec tego $f(p,t) \in S(q, \varepsilon_0)$, zatem na mocy twierdzenia 3.1 jest $q \in \Omega_p$, to znaczy punkt q jest punktem ω - granicznym. c.n.d.

<u>Twierdzenie 3.3.</u> Zbiory graniczne (dynamiczne) ruchu f(p,t) są zbiorami niezmienniczymi.

<u>Dowód.</u> Ograniczymy się do wykazania niezmienniczości na przy-

kład zbioru Ω_p (dla A_p postępowanie jest analogiczne). Rozważmy dowolny punkt $q \in \Omega_p$. Istnieje taki ciąg $(t_n) \to \infty$ wartości czasu, że odpowiadający mu ciąg punktów $(f(p,t_n)) \to q$.

Jednakże dla dowolnego $t \in I$ mamy

$$\lim_{n\to\infty} (t_n + t) = +\infty ,$$

$$\lim_{n\to\infty} f(p,t_n+t) = \lim_{n\to\infty} f(f(p,t_n),t) = f(q,t) .$$

Zatem istnieje ciąg $(t_n + t) \to +\infty$ wartości czasu taki, że odpowiadający mu ciąg punktów $(f(p,t_n+t)) \to f(q,t)$. Wobec tego punkt $f(q,t) \in \Omega_p$ dla dowolnego t, to znaczy, że cała trajektoria $f(q,I) \subset \Omega_p$. Na mocy twierdzenia 2.12, zbiór Ω_p jest więc zbiorem niezmienniczym.

c.n.d.

Twierdzenie 3.4. Przy homomorfiźmie układów dynamicznych, punkt ω - graniczny przechodzi w punkt ω - graniczny, zaś punkt α - graniczny przechodzi w punkt α - graniczny.

Dowód. Niech $q \in \Omega_p$ oraz $\xi(p) = x$, $\xi(q) = y$. Istnieje taki ciąg liczb $(t_n) \to +\infty$, że $(g(p,t_n)) \to q$. Zatem na mocy (2.30), mamy

$$(h(x,t_n)) = (h(\xi(p),t_n)) = (\xi(g(p,t_n)) \to \xi(q) = y .$$

Wobec tego $y \in \Omega_x$, czyli jest punktem ω - granicznym. Analogicznie dowodzi się twierdzenie dla punktu α - granicznego.

c.n.d.

Rozważmy teraz strukturę zbiorów granicznych, dla różnych rodzajów ruchu.

1) Jeśli $f(p,t) \equiv p$, czyli p jest punktem spoczynku, to ciąg $(f(p,t_n))$ jest ciągiem stałym (p). Ciąg ten jest zbieżny do p, jaki by nie był ciąg $(t_n) \to +\infty$ (lub $-\infty$). Wobec tego

$$\Omega_p = A_p = p \tag{3.8}$$

2) Jeśli ruch f(p,t) jest okresowy, o okresie τ, wtedy dla dowolnego ustalonego t, jest

$$(t+nT)\to+\infty \quad , \quad (t-nT)\to-\infty \quad \text{przy } n\to\infty$$

oraz

$$f(p,t\pm nT)=f(p,t) \, .$$

Wobec tego ciąg

$$(f(p,t\pm nT))\to f(p,t) \, .$$

Stąd wynika, że

$$f(p,t)\in\Omega_p \qquad \text{oraz} \qquad f(p,t)\in A_p$$

dla każdego t, to znaczy jest

$$f(p,I)\subset\Omega_p \qquad \text{oraz} \qquad f(p,I)\subset A_p \, . \tag{3.9}$$

Ponieważ trajektoria $f(p,I) = f(p, \langle 0,T\rangle)$ jest na mocy twierdzenia 2.7 zbiorem w sobie zwartym (p. Uwaga 1 do tw.2.7), więc $f(p,I)$ jest jej domknięciem. Zatem inkluzje (3.4) przybierają postać

$$\Omega_p\subset f(p,I) \quad , \quad A_p\subset f(p,I) \, . \tag{3.10}$$

Na mocy (3.9) i (3.10) wnioskujemy, że dla ruchu okresowego $f(p,t)$, zbiory graniczne pokrywają się z trajektoriami ruchu.

$$\Omega_p = A_p = f(p,I) \, . \tag{3.11}$$

3) Strukturę zbiorów Ω_p i A_p w przypadku ruchu nieosobliwego $f(p,t)$, przedstawimy w p.3.5. Obecnie zaznaczymy tylko, że istnieją takie ruchy nieosobliwe $f(p,t)$, dla których istnieją granice

$$\lim_{t\to\infty} f(p,t)=q \quad , \quad \text{lub} \quad \lim_{t\to-\infty} f(p,t)=q \, .$$

Wtedy jest $\Omega_p = q$, lub odpowiednio $A_p = q$, zaś punkt q, na mocy twierdzenia 2.19, jest punktem spoczynku.

Na przykład w pierwszym przykładzie p.1° (p.Rys.1.2), żaden ruch oprócz punktu spoczynku, nie ma punktów ω - granicznych zaś punkt spoczynku 0, jest punktem α - granicznym wszystkich tych ruchów.

W drugim przykładzie p.1° (p.Rys.1.3), punkt 0 jest punktem

ω - granicznym wszystkich ruchów oraz ruchy te nie mają punktów α - granicznych, za wyjątkiem punktu spoczynku. W trzecim przykładzie p.2° (pp.2.4) - p.Rys.2.3, punkt O jest punktem ω - granicznym, dla ruchu odbywającego się po ujemnej półosi OX oraz punktem α - granicznym, dla ruchu odbywającego się po dodatniej półosi OX.

3.2. Stateczność w sensie Lagrange'a

Punkt p i ruch f(p,t) nazywają się stateczne w sensie Lagrange'a w kierunku dodatnim (lub ujemnym), co oznaczamy L^+ - stateczny (lub L^- - stateczny), jeśli domknięcie $\overline{\Gamma}_p^+$ (lub $\overline{\Gamma}_p^-$) półtrajektorii $f(p,I^+)$ (lub $f(p,I^-)$) jest zbiorem w sobie zwartym(*).

Gdy punkt p i ruch f(p,t) jest jednocześnie L^+- stateczny i L^- - stateczny (to znaczy $\overline{\Gamma}_p$ jest zbiorem w sobie zwartym), to nazywają się one stateczne w sensie Lagrange'a, co oznaczamy L - stateczny.

Z określenia tego wynika, że punkty spoczynku oraz ruchy okresowe, są stateczne w sensie Lagrange'a. Jest oczywiste, że jeśli przestrzeń metryczna R jest zwarta, to wszystkie ruchy są stateczne w sensie Lagrange'a.

W n - wymiarowej przestrzeni euklidesowej E_n, stateczne w sensie Lagrange'a są te i tylko te ruchy, których trajektorie są zawarte w ograniczonej części przestrzeni E_n. Na prostej, stateczne w sensie Lagrange'a są wszystkie ruchy, oprócz ruchów odbywających się w przedziałach półnieskończonych $(-\infty,a)$, $(b,+\infty)$ oraz w przedziale nieskończonym $(-\infty,+\infty)$.

Twierdzenie 3.4. Zbiór ω - graniczny ruchu statecznego w sensie Lagrange'a w kierunku dodatnim, lub zbiór α -graniczny ruchu statecznego w sensie Lagrange'a w kierunku ujemnym, jest niepusty.

Dowód. Załóżmy, że ruch f(p,t) jest L^+- stateczny. Weźmy ciąg liczb dodatnich $(t_n) \to +\infty$ i rozważmy ciąg $(f(p,t_n))$. Ponieważ

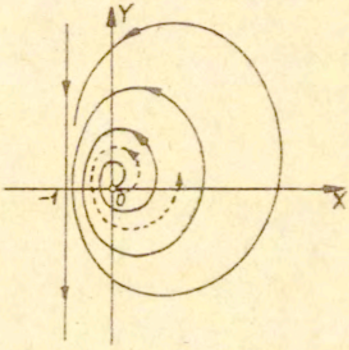
(*) Warunkiem koniecznym i wystarczającym na to jest, aby zbiór $f(p,I^+)$ (lub $f(p,I^-)$) był zbiorem zwartym w R.

$$f(p,t_n) \in f(p,I) \subset \Gamma_p^+$$

oraz zbiór Γ_p^+ jest zwarty, ze względu na L^+- stateczność ruchu f(p,t), więc z ciągu $(f(p,t_n))$ można wybrać podciąg zbieżny $(f(p,t_{i_n}))$. Niech $(f(p,t_{i_n})) \rightarrow q$. Ponieważ jest wtedy $(t_{i_n}) \rightarrow +\infty$, więc q jest punktem ω -granicznym ruchu f(p,t). Wobec tego zbiór Ω_p jest niepusty.

Należy podkreślić, że twierdzenie odwrotne nie jest prawdziwe, to znaczy istnieją ruchy, które nie są L^+ - stateczne, dla których zbiór ω - graniczny jest niepusty.

Przykład. Rozważmy układ dynamiczny, którego ruch jest przedstawiony na Rys.3.1



Rys.3.1.

W przykładzie tym, ruch po spirali nie jest L^+- stateczny, lecz jego zbiór ω - graniczny nie jest pusty, a mianowicie składa on się z punktów prostej $x = -1$.

Twierdzenie 3.5. Dla ruchu statecznego w sensie Lagrange'a w kierunku dodatnim (lub ujemnym), zbiór ω - graniczny (lub α - graniczny) jest zwarty.

Dowód.- wynika bezpośrednio z inkluzji (3.4) oraz z faktu, że zbiór Γ_p^+ (lub Γ_p^-) jest zwarty.

Twierdzenie 3.6. Jeśli ruch f(p,t) jest stateczny w sensie Lagrange'a w kierunku dodatnim (lub ujemnym), wtedy przy

$t \to +\infty$ (lub $-\infty$), punkt f(p,t) zmierza do ω - granicznego (lub α - granicznego) zbioru tego ruchu.

Dowód. Niech ruch f(p,t) będzie L^+ -stateczny. Wtedy na mocy twierdzenia 3.4 zbiór Ω_p jest niepusty. Należy wykazać, że przy $t \to +\infty$ odległość $\rho(f(p,t), \Omega_p) \to 0$, to znaczy, że dla dowolnego $\varepsilon > 0$ istnieje taka chwila T, że

$$\rho(f(p,t), \Omega_p) < \varepsilon \qquad \text{dla wszystkich } t > T$$

Przypuśćmy, że tak nie jest. Wtedy istnieje takie $\varepsilon_0 > 0$, że dla każdego T, istnieje $t > T$ takie, że

$$\rho(f(p,t), \Omega_p) \geqslant \varepsilon_0 . \tag{3.12}$$

Weźmy dowolny ciąg liczb dodatnich $(T_n) \to +\infty$. Na mocy (3.12), dla każdego n naturalnego, istnieje takie $t_n > T_n$, że

$$\rho(f(p,t_n), \Omega_p) \geqslant \varepsilon_0 . \tag{3.13}$$

Ciąg $(f(p,t_n))$ może nie mieć granicy, lecz wskutek zwartości zbioru Γ_p^+, można z niego wybrać podciąg zbieżny. Aby nie komplikować oznaczeń, przyjmijmy, że od razu sam ciąg $(f(p,t_n))$ jest zbieżny i oznaczmy jego granicę przez q. Ponieważ $(t_n) \to +\infty$, więc punkt $q \in \Omega_p$. Przechodząc w nierówności (3.13) do granicy przy $n \to \infty$, otrzymujemy

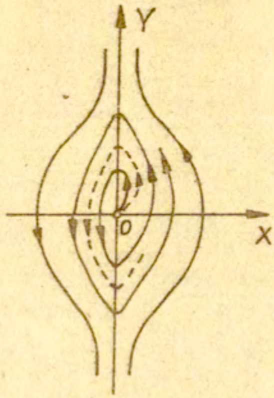
$$\rho(q, \Omega_p) \geqslant \varepsilon_0 .$$

Nierówność ta jest sprzeczna z faktem, że $q \in \Omega_p$, co dowodzi twierdzenia.

c.n.d.

Ostatni przykład (p.Rys.3.1) wskazuje, że dla ruchu L^+-niestatecznego, teza twierdzenia 3.6 może nie mieć miejsca.

Może jednak również zdarzyć się, że mimo, iż ruch jest L^+ - niestateczny, to teza twierdzenia 3.6 ma miejsce. Przykład takiego ruchu jest przedstawiony na Rys.3.2.



Rys. 3.2

Twierdzenie 3.7. Warunki konieczne i wystarczające na to, aby ruch f(p,t) był stateczny w sensie Lagrange'a w kierunku dodatnim, są następujące:

1) $\Omega_p \neq \emptyset$ czyli zbiór Ω_p jest niepusty

2) Ω_p jest zwarty

3) $\lim\limits_{t\to+\infty} \rho(f(p,t),\Omega_p) = 0$.

Dowód. Konieczność tych warunków wynika bezpośrednio z twierdzeń 3.4, 3.5 i 3.6. Wykażemy, że są one również wystarczające.

Załóżmy więc, że warunki (1), (2), (3) twierdzenia są spełnione. Wykażemy, że zbiór $f(p,I^+)$ jest wtedy zwarty w R. Weźmy dowolny ciąg (q_n) punktów $q \in f(p,I^+)$. Niech $q_n = f(p,t_n)$, gdzie $t_n > 0$.

Gdy ciąg (t_n) jest ograniczony, to można z niego wybrać podciąg zbieżny, zatem odpowiedni podciąg punktów q_n będzie też zbieżny.

Przypuśćmy z kolei, że $(t_n) \to +\infty$. Na mocy warunku (3) jest

$$\lim_{n\to\infty} \rho(q_n, \Omega_p)=0 \,.$$

Wobec tego istnieje taki ciąg (r_n) punktów $r_n \in \Omega_p$, że

$$\lim_{n\to\infty} \rho(q_n, r_n)=0 \,. \tag{3.14}$$

Na mocy warunku (2), można z ciągu (r_n) wybrać podciąg zbieżny. Wobec tego na mocy (3.14), również odpowiedni podciąg punktów q_n ma tę samą granicę.

c.n.d.

Przestrzeń nazywa się lokalnie zwarta, jeśli dla każdego jej punktu istnieje otoczenie tego punktu, którego domknięcie jest zwarte. Przykładem takiej przestrzeni, jest na przykład n - wymiarowa przestrzeń euklidesowa.

Okazuje się, że w przestrzeniach lokalnie zwartych, warunek (3) w twierdzeniu 3.7 jest zbędny. Zanim to wykażemy, udowodmimy najpierw następujące twierdzenie.

Twierdzenie 3.8. W przestrzeni lokalnie zwartej R, dla każdego zbioru w sobie zwartego $Q \subset R$, istnieje takie $\varepsilon > 0$, że $\bar{S}(Q, \varepsilon)$ jest zwarte.

Dowód. Ponieważ przestrzeń R jest lokalnie zwarta, więc dla każdego punktu $q \in Q$, istnieje otoczenie $U(q)$, którego domknięcie jest zwarte. Na mocy zwartości zbioru Q, można spośród tych otoczeń wybrać skończoną ich liczbę, pokrywającą cały zbiór Q. Niech będą to otoczenia $U(q_i)$ $(i = 1,\dots,m)$. Wtedy

$$U(Q) = \bigcup_{i=1}^{m} U(q_i)$$

jest zbiorem otwartym zawierającym zbiór Q, to znaczy jest otoczeniem zbioru Q. Ponadto domknięcie

$$\overline{U(Q)} = \bigcup_{i=1}^{m} \overline{U(q_i)}$$

jest zbiorem zwartym. Pozostaje wykazać, że istnieje takie $\varepsilon > 0$, że

$$S(Q, \varepsilon) \subset U(Q) \,. \tag{3.15}$$

Jeśliby tak było, to $\bar{S}(Q, \varepsilon)$ jako domknięty podzbiór zbioru zwartego $\overline{U(Q)}$, byłby też zwarty.

Przypuśćmy, że tak nie jest, to znaczy, że dla żadnego $\varepsilon > 0$ inkluzja (3.15) nie ma miejsca. Weźmy ciąg liczb dodatnich $(\varepsilon_n) \to 0$. Wtedy istnieje taki punkt $r_n \in S(Q,\varepsilon_n)$, że $r_n \notin U(Q)$. Jednakże dla każdego punktu r_n, istnieje w Q punkt q_n taki, że

$$\rho(r_n, q_n) < \varepsilon \quad . \tag{3.16}$$

Ponieważ zbiór Q jest w sobie zwarty, więc można uważać, że ciąg (q_n) jest zbieżny do pewnego punktu $q_0 \in Q$. Na mocy (3.16), mamy wtedy również $(r_n) \to q_0$, co jest sprzeczne z faktem, że $r_n \notin U(Q)$. c.n.d.

<u>Twierdzenie 3.9.</u> Warunkiem koniecznym i wystarczającym na to, aby w przestrzeni lokalnie zwartej R, ruch $f(p,t)$ był stateczny w sensie Lagrange'a w kierunku dodatnim jest, aby zbiór Ω_p był niepusty i zwarty.

<u>Dowód.</u> Aby udowodnić to twierdzenie wystarczy wykazać, że w przestrzeni lokalnie zwartej R, z warunków (1) i (2) twierdzenia 3.7 wynika warunek (3). Załóżmy więc, że przestrzeń R jest lokalnie zwarta, zbiór Ω_p jest niepusty i zwarty oraz nie jest spełniony warunek (3). Wtedy istnieje takie $\varepsilon_0 > 0$, że dla dowolnej liczby T_n, istnieje takie $t_n > T_n$, że spełniona jest nierówność (3.13). Liczby T_n możemy obrać w taki sposób, aby $(T_n) \to +\infty$. Wtedy również $(t_n) \to +\infty$. Z drugiej strony, istnieje taki ciąg $(\tilde{t}_n) \to +\infty$, że

$$\rho(f(p,\tilde{t}_n), \Omega_p) < \varepsilon_0 \quad . \tag{3.17}$$

Na mocy (3.13) i (3.17) wynika, z uwagi na ciągłość funkcji $\rho(f(p,t), \Omega_p)$ względem t, że między t_n i $\tilde{t}_n$ istnieje taka liczba τ_n, że

$$\rho(f(p,\tau_n), \Omega_p) = \varepsilon_0 \quad . \tag{3.18}$$

Na podstawie twierdzenia 3.8. można założyć, że liczba ε_0 jest taka, że domknięcie otoczenia $S(\Omega_p, 2\varepsilon_0)$ jest zwarte. Wobec tego ciąg $(f(p,\tau_n))$, można uważać za zbieżny. Niech $(f(p,\tau_n)) \to r$. Na mocy twierdzenia 2.5, przechodząc do

granicy w równości (3.18), otrzymujemy $\rho(r, \Omega_p) = \varepsilon_0$
Z drugiej strony, wskutek tego, że $(\tau_n) \to +\infty$, jest $r \in \Omega_p$. Otrzymana sprzeczność dowodzi twierdzenia. c.n.d.

Zbiór domknięty M, nazywa się spójnym, jeśli nie można przedstawić go jako sumę dwóch zbiorów niepustych, domkniętych i nieprzecinających się.

Twierdzenie 3.10. Jeśli ruch f(p,t) jest stateczny w sensie Lagrange'a w kierunku dodatnim (lub ujemnym), to jego zbiór ω - graniczny (lub α - graniczny) jest spójny.

Dowód. Przypuśćmy, że dla L^+ - statecznego ruchu f(p,t), zbiór Ω_p nie jest spójny. Wtedy można go przedstawić jako sumę dwóch niepustych, domkniętych i nieprzecinających się zbiorów

$$\Omega_p = A \cup B$$

Ponieważ zbiór Ω_p jest zwarty, więc odległość $\rho(A,B) = d$ zbiorów A i B jest dodatnia. Istotnie, odległość dwóch zbiorów A i B, jest określona wzorem

$$d = \rho(A,B) = \inf_{\substack{a \in A \\ b \in B}} \rho(a,b)$$

Gdyby było $d = 0$, to istniałyby ciągi punktów (a_n) ze zbioru A i (b_n) ze zbioru B, takie, że

$$\rho(a_n, b_n) \to 0$$

Wskutek zwartości zbioru $A \cup B$, można ciągi (a_n) i (b_n) uważać za zbieżne. Niech $(a_n) \to a_0$ i $(b_n) \to b_0$. Ponieważ zbiory A i B są domknięte, więc $a_0 \in A$, $b_0 \in B$ oraz

$$\rho(a_0, b_0) = \lim_{n \to \infty} \rho(a_n, b_n) = 0$$

Wobec tego jest $a_0 = b_0$ skąd $A \cap B \neq \emptyset$, co jest sprzeczne z założeniem, że zbiory A i B nie przecinają się. Zatem przypuszczenie, że $d = 0$ prowadzi do sprzeczności, więc istotnie $d = \rho(A,B)$ jest w rozważanym przypadku wielkością dodatnią.

Rozważmy dwa punkty $r_A \in A$ i $r_B \in B$. Ponieważ oba punkty r_A i r_B są punktami ω - granicznymi ruchu f(p,t), więc istnieją takie dwa ciągi wartości czasu $(t_n) \to +\infty$ oraz $(\tilde{t}_n) \to +\infty$, że

$$(f(p,t_n)) \to \tau_A \quad , \quad (f(p,\bar{t}_n)) \to \tau_B \quad .$$

Wobec tego, począwszy od pewnego wskaźnika n, zachodzą nierówności

$$\rho(f(p,t_n),\tau_A) < \frac{d}{2} \quad , \quad \rho(f(p,\bar{t}_n),\tau_B) < \frac{d}{2} \quad . \tag{3.19}$$

Ponadto

$$\rho(f(p,t_n),A) \leqslant \rho(f(p,t_n),\tau_A) < \frac{d}{2} \quad . \tag{3.20}$$

Z drugiej strony, biorąc pod uwagę nierówność trójkąta oraz (3.19), otrzymujemy

$$d = \rho(A,B) \leq \rho(A,\tau_B) \leqslant \rho(A,f(p,\bar{t}_n)) + \rho(f(p,\bar{t}_n),\tau_B) <$$
$$< \rho(A,f(p,\bar{t}_n)) + \frac{d}{2} \quad .$$

Stąd mamy

$$\rho(A,f(p,\bar{t}_n)) > \frac{d}{2} \quad . \tag{3.21}$$

Na mocy (3.20), (3.21) i twierdzenia 2.5 i ze względu na ciągłość funkcji $\rho(f(p,t),A)$ względem t wynika, że między t_n i $\bar{t}_n$ istnieje liczba τ_n taka, że

$$\rho(f(p,\tau_n),A) = \frac{d}{2} \quad . \tag{3.22}$$

Ponieważ ruch $f(p,t)$ jest L^+ - stateczny, więc ciąg $(f(p,\tau_n))$ można uważać za zbieżny. Niech

$$\lim_{n\to\infty} f(p,\tau_n) = q \quad . \tag{3.23}$$

Z (3.22) wynika więc, że

$$\rho(q,A) = \frac{d}{2} \quad .$$

Wobec tego mamy

$$d = \rho(A,B) \leqslant \rho(A,q) + \rho(q,B) = \frac{d}{2} + \rho(q,B)$$

skąd wynika, że

$$\rho(q,B) \geqslant \frac{d}{2} \quad .$$

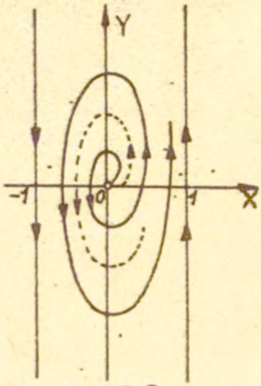
Na tej podstawie wnioskujemy, że $q \notin A$ i $q \notin B$, a więc

$q \notin \Omega_p$. Ponieważ jednak $(\tau_n) \to +\infty$, więc z (3.23) wynika, że $q \in \Omega_p$. Otrzymana sprzeczność dowodzi twierdzenia.

c.n.d.

Warunek L^+ - stateczności ruchu f(p,t), nie jest warunkiem koniecznym spójności zbioru ω - granicznego. Przykład przedstawiony na Rys.3.1 wskazuje, że zbiór ω - graniczny (prosta x = -1) jest spójny mimo, że ruch jest L^+ - niestateczny.

Natomiast na Rys.3.3 pokazany jest przykład niespójnego zbioru ω - granicznego, składającego się z dwóch prostych równoległych x = +1 i x = -1.



Rys.3.3

Twierdzenie 3.11. W zbiorze ω - granicznym (lub α -granicznym) ruchu statecznego w sensie Lagrange'a w kierunku dodatnim (lub ujemnym), wszystkie ruchy są stateczne w sensie Lagrange'a.

Dowód. Niech ruch f(p,t) będzie L^+ - stateczny i niech $q \in \Omega_p$. Wskutek niezmienniczości Ω_p, trajektoria $f(q,I) \subset \Omega_p$, zaś wskutek domkniętości Ω_p, zbiór $\Gamma_q \subset \Omega_p$. Na mocy twierdzenia 3.5 zbiór Ω_p jest więc w sobie zwarty. Wobec tego zbiór Γ_p jest również w sobie zwarty, więc ruch f(q,t) jest stateczny w sensie Lagrange'a.

c.n.d.

Twierdzenie 3.12. Przy homomorfiźmie układów dynamicznych, ruch stateczny w sensie Lagrange'a w kierunku dodatnim (lub ujemnym), przechodzi w ruch stateczny w sensie Lagrange'a w kierunku dodatnim (lub ujemnym).

Dowód. Niech ruch $g(p,t)$, będzie na przykład L^+ - stateczny. Wtedy zbiór $g(p,I^+)$ jest zwarty w R_1. Na mocy twierdzenia 2.24 zbiór $h(p,I^+)$ jest obrazem zbioru $g(p,I^+)$, przy odwzorowaniu ciągłym $\xi : R_1 \to R_2$. Wykażemy, że $h(p,I^+)$ jest zwarty w R_2. Niech (q_n) oznacza ciąg punktów $q_n \in h(p,I^+)$, zaś p_n niech będą punktami $p_n \in g(p,I^+)$ takimi, że $q_n = \xi(p_n)$. Z ciągu (p_n), można wybrać podciąg (p_{n_k}) zbieżny w R_1 do pewnego punktu p_o. Wobec tego podciąg $(q_{n_k}) = (\xi(p_{n_k}))$ jest zbieżny w R_2 do $\xi(p_o)$.

c.n.d.

3.3. Klasyfikacja ruchów na podstawie własności zbiorów granicznych.

Na podstawie własności zbiorów granicznych (dynamicznie), można ruchy $f(p,t)$ podzielić następująco.

1) Jeśli zbiór Ω_p (lub A_p) jest pusty, czyli $\Omega_p = \emptyset$ (lub $A_p = \emptyset$), to punkt p i ruch $f(p,t)$ nazywamy wypływającym w dodatnim (lub ujemnym) kierunku. Punkt p i ruch $f(p,t)$ wypływający w obu kierunkach, nazywamy wypływającym (wtedy jest $\Delta_p = \emptyset$).

2) Jeśli zbiór Ω_p (lub A_p) jest niepusty, lecz przecięcie $\Omega_p \cap f(p,I^+)$ (lub $A_p \cap f(p,I^-)$) jest puste, to punkt p i ruch $f(p,t)$, nazywamy asymptotycznymi w kierunku dodatnim (lub ujemnym). Zauważmy, że wskutek niezmienniczości zbioru Ω_p (lub A_p), przecięcia

$$\Omega_p \cap f(p,I^+) \quad \text{lub} \quad A_p \cap f(p,I^-)$$

są puste wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\Omega_p \cap f(p,I) = \emptyset \quad \text{lub} \quad A_p \cap f(p,I) = \emptyset \ .$$

Punkt p i ruch $f(p,t)$ asymptotyczne w obu kierunkach, nazywamy asymptotycznymi. Wtedy jest

$$\Omega_p \neq \emptyset, \quad A_p \neq \emptyset, \quad \Delta_p \cap f(p,I) = \emptyset$$

3) Jeśli przecięcia

$$\Omega_p \cap H(p,I) \quad \text{lub} \quad A_p \cap H(p,I)$$

są niepuste, to punkt p i ruch f(p,t) nazywamy statecznymi w sensie Poisson'a, w kierunku odpowiednio dodatnim, lub ujemnym. Ruchy te oznaczamy jako P^+ - stateczne lub P^- - stateczne.

W tym przypadku mamy

$$f(p,I) \subset \Omega_p \quad \text{lub} \quad f(p,I) \subset A_p \ .$$

Ponieważ zbiory graniczne są domknięte, więc mamy również

$$\Gamma_p \subset \Omega_p \quad \text{lub} \quad \Gamma_p \subset A_p \ .$$

Stąd na mocy (3.4) otrzymujemy

$$\Omega_p = \Gamma_p \qquad \text{lub} \qquad A_p = \Gamma_p \ . \tag{3.24}$$

Punkt p i ruch f(p,t) stateczne w sensie Poisson'a w obu kierunkach, nazywamy statecznymi w sensie Poisson'a i oznaczamy jako P - stateczne.

Warunkiem koniecznym i wystarczającym stateczności w sensie Poisson'a ruchu f(p,t), jest aby

$$\Gamma_p = A_p = \Omega_p \tag{3.25}$$

Stąd jest widoczne, że punkty spoczynku i ruchy okresowe, są zawsze stateczne w sensie Poisson'a.

Dla każdego układu dynamicznego, zbiór punktów wypływających w kierunku dodatnim (lub ujemnym), asymptotycznych w kierunku dodatnim (lub ujemnym) oraz P^+ - statecznych (lub P^- - statecznych) jest niezmienniczy i zostaje zachowany przy izomorfiźmie układów dynamicznych. Wynika to bezpośrednio z twierdzeń 2.8, 3.4, wzoru (2.31) oraz faktu, że jeśli $r \in f(p,I)$, to $\Omega_r = \Omega_p$. Ten ostatni fakt zachodzi z tego względu, że jeśli $r = f(p,t_0)$, to związki

$$(f(p,t_n)) \to q \quad \text{i} \quad (f(r,t_n - t_0)) \to q$$

są równoważne, co wskazuje, że $q \in \Omega_p$ wtedy i tylko wtedy, gdy $q \in \Omega_r$.

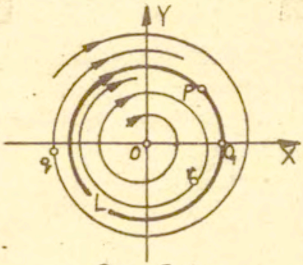
Przy homomorfiźmie, ruch wypływający może przejść w asymptotyczny, lub nawet w P - stateczny (na przykład w punkt spoczynku). Jednakże ma miejsce następujące twierdzenie.

Twierdzenie 3.13. Przy homomorfiźmie układów dynamicznych, ruch stateczny w sensie Poisson'a w kierunku dodatnim (lub ujemnym), przechodzi w ruch stateczny w sensie Poisson'a w kierunku dodatnim (lub ujemnym).

Dowód - wynika bezpośrednio z twierdzenia 3.4.

Można wykazać, że dla układów dynamicznych na płaszczyźnie E_2 i prostej E_1, jedynymi ruchami statecznymi w sensie Poisson'a, są ruchy osobliwe(*) (punkty spoczynku i ruchy okresowe na E_2 i tylko punkty spoczynku na E_1).

Przykład. Rozważmy układ dynamiczny przedstawiony schematycznie na Rys.3.4, dla którego punkty O i O_1 są punktami spoczynku.



Rys. 3.4.

Punkty O i O_1, jako punkty spoczynku, są oczywiście stateczne w sensie Poisson'a. Ruchy $f(p,t)$ i $f(r,t)$, są asymptotyczne

$$\Omega_p = A_p = O_1 \ , \quad \Omega_r = L \text{ (okrąg)} \ , \quad A_r = O \ .$$

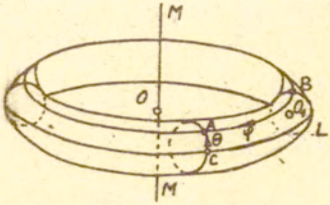
Ruch $f(q,t)$ jest asymptotyczny w kierunku dodatnim, to znaczy jest $\Omega_q = L$ i wypływający w kierunku ujemnym.

(*) Филиппов А.Ф. Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. Математический Сборник 51, 1 (1960) - стр. 122

Сибирский К.С. Введение в топологическую динамику А.Н. МССР, Кишинев 1970, стр. 41-43.

Seibert P. Tulley P. On dynamical systems in the plane Arch.Math. 18,3 (1967) str. 290-292

Przykład. Rozważmy ruch na torusie, przedstawionym na Rys.3.5. Trajektorie mogące mieć miejsce w takim ruchu, stanowią przykład trajektorii niezamkniętych (i różnych od punktów spoczynku) statecznych w sensie Poisson'a.



Rys.3.5.

Prosta MM - nazywa się osią torusa, punkt O - środkiem torusa. Gdy okrąg L opisuje torus, to jego środek O_1 opisuje linię, zwaną osiowym okręgiem torusa - jego środkiem jest punkt O.

Płaszczyzna, w której leży osiowy okrąg, nazywa się płaszczyzną równikową torusa.

Okręgi powstające wskutek przecięcia torusa płaszczyznami, przechodzącymi przez prostą MM, nazywają się południkami torusa, zaś okręgi powstające wskutek przecięcia torusa płaszczyznami prostopadłymi do prostej MM, nazywają się równoleżnikami. Płaszczyzna równikowa przecina torus wzdłuż dwóch okręgów, z których jeden nazywamy małym, a drugi dużym równikiem.

Rozważmy dowolny punkt A na powierzchni torusa. Przez punkt ten przechodzi pewien równoleżnik, przecinający okrąg L w pewnym punkcie B, oraz pewien południk, przecinający duży równoleżnik w pewnym punkcie C.

Oznaczmy odpowiednio przez φ i θ miary łuków $\widehat{BA}$ i $\widehat{CA}$ w radianach, liczone od punktów B i C. Liczby

$$\varphi + 2\pi m \quad , \quad \theta + 2\pi n \quad ,$$

gdzie m i n oznaczają dowolne liczby całkowite, nazywamy współrzędnymi punktu A. Są to odpowiedniki długości i szerokości geograficznej. Z tego względu, współrzędne te nazywamy również długością i szerokością punktu A.

Niech $\{\varphi_1\}$ i $\{\varphi_2\}$ oznaczają zbiory długości punktów A_1 i A_2 na torusie, zaś $\{\theta_1\}$ i $\{\theta_2\}$ zbiory szerokości tych punktów. Odległość między punktami A_1 i A_2 przyjmujemy w postaci

$$\rho(A_1, A_2) = \sqrt{\varphi^2 + \theta^2}\ , \quad \varphi = \inf\{|\varphi_2 - \varphi_1|\},\ \theta = \inf\{|\theta_2 - \theta_1|\}\ .$$

Jest widoczne, że maksymalna odległość między punktami na torusie, jest równa

$$\sqrt{\pi^2 + \pi^2} = \pi\sqrt{2}\ .$$

Rozważmy teraz na torusie układ dynamiczny, określony układem równań różniczkowych

$$\frac{d\varphi}{dt} = 1\ , \qquad \frac{d\theta}{dt} = \alpha\ , \tag{3.26}$$

gdzie $\alpha > 0$ oznacza liczbę rzeczywistą. Niech warunki początkowe mają postać

$$\text{dla} \quad t = 0 \quad \text{jest} \quad \varphi = \varphi_0\ ,\ \theta = \theta_0\ . \tag{3.27}$$

Rozwiązanie układu (3.26), spełniające warunki początkowe (3.27), ma postać

$$\varphi = \varphi_0 + t\ , \qquad \theta = \theta_0 + \alpha t \tag{3.28}$$

Związek $\varphi = \varphi_0 + t$ wskazuje, że punkt (φ, θ) porusza się ruchem obrotowym jednostajnym wokół osi torusa, wykonując nieskończoną liczbę obrotów. Związek $\theta = \theta_0 + \alpha t$ wskazuje, że punkt (φ, θ) porusza się również ruchem obrotowym jednostajnym, wokół osiowego okręgu torusa.

Równanie trajektorii ruchu można napisać w postaci

$$\theta - \theta_0 = \alpha(\varphi - \varphi_0)\ . \tag{3.29}$$

Spośród punktów torusa, te należą do trajektorii, dla których przynajmniej jedna para współrzędnych spełnia równanie (3.29). Jest widoczne, że trajektorię tę można otrzymać z trajektorii $\theta = \alpha\varphi$, jeśli w tej ostatniej długość każdego punktu zwiększymy o $\varphi_0 - \frac{\theta_0}{\alpha}$, to znaczy, jeśli obrócimy torus wokół osi, o kąt $\varphi_0 - \frac{\theta_0}{\alpha}$. W związku z tym ograniczymy się do zbadania trajektorii

$$\theta = \alpha\varphi \tag{3.30}$$

kładąc w (3.29) $\varphi_0 = \theta_0 = 0$.

Rozważmy dwa najważniejsze przypadki podstawowe

1) Liczba α jest wymierna: $\alpha = \frac{p}{q}$, gdzie p i q oznaczają wzajemnie proste liczby naturalne. Mamy wtedy

$$\theta = \frac{p}{q}\cdot\varphi \tag{3.31}$$

Przy wzroście φ o $2\cdot\pi\cdot q$, szerokość θ zwiększa się o $2\pi p$. Wobec tego po q obrotach wokół osi torusa (i p obrotach wokół osiowego okręgu), trajektoria zamknie się. W tym przypadku na mocy (3.28), wszystkie ruchy są okresowe, o okresie $2\pi q$.

2) Liczba α jest niewymierna. Wtedy ruch

$$\varphi = t, \quad \theta = \alpha t \tag{3.32}$$

nie może być okresowy. Istotnie, ruch ten przechodzi przez punkt $(0 + 2\pi n,\ 0 + 2\pi m)$ w chwili $t = 0$. Jeśli by ruch ten miał przejść przez ten sam punkt, w pewnej chwili $t_0 > 0$, to dla pewnych m i n naturalnych, mielibyśmy

$$\varphi = t_0 = 2\pi n, \quad \theta = \alpha t_0 = 2\pi m$$

Stąd jednakże wynika, że $2\pi\cdot n\cdot\alpha = 2\pi m$, to znaczy liczba $\alpha = \frac{m}{n}$ powinna być w takim przypadku wymierna. Wobec tego w rozważanym przypadku, wszystkie ruchy są nieokresowe. Wykażemy, że ruchy te są stateczne w sensie Poisson'a.

W tym celu ograniczymy się do zbadania ruchu (3.28), dla $t > 0$. Zbadajmy punkty przecięcia dodatniej półtrajektorii, z dowolnym południkiem $\varphi = \varphi_0 > 0$, to znaczy punkty o współrzędnych

$$(\varphi_0 + 2\pi n,\ \alpha\varphi_0 + 2\pi n\alpha) \tag{3.33}$$

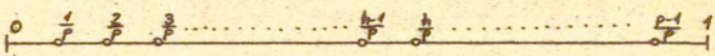
gdzie n oznaczają liczby naturalne. Wykażemy, że punkty te tworzą na południku zbiór gęsty. Oznaczmy przez $[\beta]$ największą liczbę całkowitą nie przekraczającą wartości β, zaś przez (β) jej część ułamkową (np. dla $\beta = 2\frac{1}{3}$ jest $[\beta]=2$, $(\beta)=\frac{1}{3}$). Na to, aby wykazać, że punkty (3.33) tworzą na południku zbiór gęsty, wystarczy wykazać, że liczby

$$2\pi n\alpha - 2\pi[n\alpha] = 2\pi(n\alpha) \tag{3.34}$$

tworzą zbiór gęsty w przedziale $\langle 0, 2\pi \rangle$, lub, że liczby

$$n\alpha - [n\alpha] = (n\alpha) \tag{3.35}$$

są rozmieszczone w sposób gęsty, w przedziale $\langle 0,1 \rangle$. Podzielmy przedział $\langle 0,1 \rangle$ na p równych części, tak jak wskazuje to Rys.3.6



Rys. 3.6.

Rozważmy liczby (α), (2α), ..., $((p+1)\alpha)$. Ponieważ liczb tych jest więcej niż podprzedziałów, więc istnieje co najmniej jeden podprzedział

$$\left(\frac{h-1}{p}, \frac{h}{p}\right)$$

zawierający co najmniej dwie liczby spośród rozpatrywanych. Niech będą to liczby $(k_1\alpha)$ i $(k_2\alpha)$, gdzie $k_2 > k_1$. Mamy więc

$$\frac{h-1}{p} < k_1\alpha - [k_1\alpha] < \frac{h}{p} \quad ,$$

$$\frac{h-1}{p} < k_2\alpha - [k_2\alpha] < \frac{h}{p} \quad .$$

Jest widoczne, że różnica tych liczb jest zawarta w przedziale

$$-\frac{1}{p} < (k_2 - k_1)\alpha - [k_2\alpha] + [k_1\alpha] < \frac{1}{p} \tag{3.36}$$

Wprowadzając oznaczenia

$$k_2 - k_1 = N \quad , \quad [k_2\alpha] - [k_1\alpha] = M$$

otrzymujemy nierówność (3.36) w postaci

$$-\frac{1}{p} < N\alpha - M < \frac{1}{p}$$

to znaczy

$$|N\alpha - M| < \frac{1}{p} \tag{3.37}$$

Oznaczając $|N\alpha - M| = \gamma$, mamy

$$\gamma < \frac{1}{p} \ .$$

Możliwe są dwa przypadki

1) $N\alpha - M > 0$. Wtedy jest $\gamma = N\alpha - M$, zatem

$$N\alpha = M + \gamma \ , \quad (N\alpha) = \gamma \ ,$$

$$2N\alpha = 2M + 2\gamma, \quad (2N\alpha) = 2\gamma \ ,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$lN\alpha = lM + l\gamma \ , \quad (lN\alpha) = l\gamma \ ,$$

gdzie powinno być $l\gamma < 1$

2) $N\alpha - M < 0$. Wtedy jest $\gamma = M - N\alpha$, zatem

$$N\alpha = M - \gamma \ , \quad (N\alpha) = 1 - \gamma \ ,$$

$$2N\alpha = 2M - 2\gamma, \quad (2N\alpha) = 1 - 2\gamma \ ,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$lN\alpha = lM - l\gamma \ , \quad (lN\alpha) = 1 - l\gamma \ ,$$

gdzie powinno być $l\gamma < 1$.

W pierwszym przypadku liczby $(N\alpha)$, $(2N\alpha)$, ..., $(lN\alpha)$ są rozmieszczone w przedziale $\langle 0,1 \rangle$ we wzrastającej kolejności, zaś w drugim przypadku w malejącej kolejności, przyczym w obu przypadkach w jednakowych odstępach, równych $\gamma < \frac{1}{p}$. Biorąc pod uwagę, że liczba podziałów p może być dowolnie duża wnioskujemy, że zbiór liczb $\{(n\alpha)\}$ jest gęsty w przedziale $\langle 0,1 \rangle$.

Wobec tego zbiór punktów (3.33) jest gęsty na południku $\varphi = \varphi_0$, zatem dowolny punkt (φ_0 , θ_0) tego południka, jest punktem granicznym ciągu (3.33). Ponieważ zgodnie z (3.32), ciąg wartości czasu $t_n = \varphi_0 + 2\pi n$, odpowiadających punktom (3.33), zmierza do $+\infty$, więc punkt (φ_0, θ_0) jest punktem ω - granicznym ruchu (3.32). Ponieważ φ_0 i θ_0 są dowolne, więc stąd wnioskujemy, że zbiorem ω - granicznym ruchu (3.32), jest cały torus. W szczególności istnieją punkty ω - graniczne należące do trajektorii, co oznacza, że rozważany ruch jest P^+ - stateczny. W analogiczny sposób wykazuje się, że ruch ten jest również P^- - stateczny. Wobec tego rozważany jest ruch P - stateczny.

Przykład. Rozważmy układ dynamiczny, określony na torusie za pomocą równań różniczkowych

$$\frac{d\varphi}{dt} = \Phi(\varphi, \theta), \quad \frac{d\theta}{dt} = \alpha\Phi(\varphi, \theta), \qquad (3.38)$$

gdzie $\alpha > 0$ jest liczbą niewymierną, zaś $\Phi(\varphi, \theta)$ funkcją ciągłą na torusie, okresową względem argumentów φ i θ, o okresie 2π, dodatnią w każdym punkcie, za wyjątkiem (0,0), gdzie jest $\Phi(0,0) = 0$.

W rozważanym przypadku, trajektorie ruchu są takie same, jak dla układu (3.26) za wyjątkiem krzywej $\theta = \alpha\varphi$, przechodzącej przez początek współrzędnych (0,0), ze względu na to, że punkt ten ma w rozważanym przypadku inny charakter, a mianowicie jest on punktem spoczynku. Ten punkt spoczynku, rozdziela P - stateczną trajektorię $\theta = \alpha\varphi$ układu (3.26), na trzy trajektorie, a mianowicie: punkt spoczynku, trajektorię asymptotyczną w kierunku dodatnim i P^- - stateczną oraz trajektorię asymptotyczną w kierunku ujemnym i P^+ - stateczną. Prędkość ruchu jest równa

$$\Phi(\varphi, \theta)\sqrt{1+\alpha^2}. \qquad (3.39)$$

Stąd jest widoczne, że wszystkie ruchy zwalniają w otoczeniu punktu (0,0).

3.4. Własności punktów i ruchów statecznych w sensie Poisson'a.

W poprzednim podpunkcie 3.3 wykazaliśmy, że warunkiem koniecznym i wystarczającym na to, aby punkt p i ruch $f(p,t)$ był P^+- stateczny (lub P^-- stateczny), jest spełnienie równości (3.24). Wykazaliśmy też, że zbiór punktów P^+- statecznych (lub P^-- statecznych) jest niezmienniczy, wskutek czego można mówić o trajektoriach P^+- statecznych (lub P^-- statecznych) oraz o trajektoriach P - statecznych.

Twierdzenie 3.14. Punkt p i ruch $f(p,t)$ są stateczne w sensie Poisson'a w kierunku dodatnim (lub ujemnym) wtedy i tylko wtedy, gdy półtrajektoria $f(p,I^+)$ (lub $f(p,I^-)$), nie jest homeomorficzna z półprostą.

Dowód. Przypuśćmy, że ruch nieosobliwy $f(p,t)$ jest P^+- stateczny. Wtedy odwzorowanie

$$q = f(p,t) = \varphi(t) \quad , \quad 0 \leqslant t < +\infty \tag{3.40}$$

jest ciągłe i wzjemnie jednoznaczne, lecz nie jest homeomorfizmem, gdyż odwzorowanie odwrotne

$$t = \varphi^{-1}(q) \quad , \quad q \in f(p,I^+) \tag{3.41}$$

nie jest ciągłe. Istotnie w rozważanym przypadku $p \in \Omega_p$, zatem istnieje ciąg

$$q_n = \varphi(t_n) = f(p,t_n)$$

który dla $t_n \geqslant 0$ oraz $t_n = \varphi^{-1}(q_n) \to +\infty$ zmierza do $p = \varphi(0)$, a nie do $\varphi^{-1}(p)$.

Przypuśćmy teraz, że półtrajektoria $Q = f(p,I^+)$ jest homeomorficzna z półprostą $t_0^* \leqslant t^* < +\infty$, to znaczy istnieje odwzorowanie ciągłe i wzajemnie jednoznaczne

$$q = \psi(t^*) \tag{3.42}$$

półprostej $t_0^* \leqslant t^* < +\infty$ na krzywą Q, dla którego odwzorowanie odwrotne $t^* = \psi^{-1}(q)$ jest ciągłe. Wtedy odwzorowanie

$$t^* = \psi^{-1}(\varphi(t)) \tag{3.43}$$

półprostej $0 \leqslant t < +\infty$, na półprostą $t_0^* \leqslant t^* < +\infty$, jest wzajemnie jednoznaczne i wzajemnie ciągłe, to znaczy jest ono homeomorfizmem. Wtedy odwzorowanie (3.40), będące złożeniem homeomorfizmów (3.42) i (3.43), powinno też być homeomorfizmem(*), lecz jak stwierdziliśmy to powyżej, fakt ten nie ma miejsca. Tym samym wykazaliśmy, że w przypadku, gdy ruch $f(p,t)$ jest P^+- stateczny, wtedy półtrajektoria $f(p,I^+)$ nie jest homeomorficzna z półprostą.

Przypuśćmy teraz, że ruch $f(p,t)$ nie jest P^+- stateczny. Wtedy odwzorowanie (3.41) powinno być ciągłe. Istotnie, jeśli ciąg (q_n) punktów półtrajektorii $f(p,I^+)$ zmierza do pewnego punktu $q_0 \in f(p,I^+)$, to odpowiedni ciąg

$$t_n = \varphi^{-1}(q_n) \;, \quad t_n \geqslant 0$$

jest ograniczony, gdyż w przeciwnym przypadku byłoby $q_0 \in \Omega_p$ i ruch byłby P^+- stateczny. Niech t_0 będzie granicą ciągu (t_n). Ponieważ na mocy (3.40) jest

$$q_n = f(p,t_n) = \varphi(t_n)$$

zatem

$$q_0 = f(p,t_0) = \varphi(t_0) \;.$$

Stąd wynika, że $t_0 = \varphi^{-1}(q_0)$ co oznacza, że istnieje

$$\lim t_n = t_0 = \varphi^{-1}(q_0) \;.$$

c.n.d.

Z twierdzenia 3.14 wynikają bezpośrednio (jako wnioski) następujące dwa twierdzenia.

<u>Twierdzenie 3.15.</u> Punkt p i ruch $f(p,t)$ są stateczne w sensie Poisson'a przynajmniej w jednym kierunku wtedy i tylko wtedy, gdy trajektoria $f(p,I)$ nie jest homeomorficzna z prostą.

<u>Twierdzenie 3.16.</u> Punkt p i ruch $f(p,t)$, są niestateczne w sensie Poisson'a w każdym kierunku wtedy i tylko wtedy, gdy trajektoria $f(p,I)$ jest homeomorficzna z prostą.

(*)

W.Kołodziej Analiza Matematyczna PWN 1978 r. str.81

Jest widoczne, że dla ruchów P^+- niestatecznych (lub P^-- niestatecznych) jest

$$\Omega_p = \Gamma_p^+ \setminus f(p, I^+) \quad \text{lub} \quad A_p = \Gamma_p^- \setminus f(p, I^-)$$

zaś dla ruchów P - niestatecznych w każdym kierunku jest

$$\Delta_p = \Gamma_p \setminus f(p, I) \ .$$

Odnośnie ruchów P^+- statecznych (lub P^-- statecznych),to dla nich mamy (p.(3.24)) $\Omega_p = \Gamma_p$ (lub $A_p = \Gamma_p$), przy czym mogą mieć miejsce przypadki, gdy Ω_p (lub A_p) nie zawierają innych punktów, poza punktami trajektorii. Taki przypadek ma miejsce na przykład wtedy, gdy w przykładzie badania ruchu na torusie, opisanym równaniami (3.38), przyjąć jako przestrzeń R tylko trajektorię asymptotyczną w kierunku ujemnym i P^+- stateczną. Jednakże przestrzeń taka nie jest zupełna.

Twierdzenie 3.17. W przestrzeni zupełnej, dla ruchu nieosobliwego f(p,t), statecznego w sensie Poisson'a w kierunku dodatnim (lub ujemnym), zbiór punktów nie należących do trajektorii tego ruchu, jest gęsty w zbiorze Ω_p (lub A_p), to znaczy

$$\Omega_p = \overline{\Gamma_p \setminus f(p, I)} \quad \text{lub} \quad A_p = \overline{\Gamma_p \setminus f(p, I)} \ .$$

Dowód. Niech przestrzeń R będzie zupełna, zaś ruch nieosobliwy f(p,t), niech będzie P^+- stateczny. Wykażemy, że dla dowolnego punktu $p_0 \in \Omega_p$ i dowolnego $\varepsilon > 0$, istnieje punkt

$$q \in \Omega_p \cap S(p_0, \varepsilon)$$

taki, że $q \notin f(p,I)$.

Ponieważ $p_0 \in \Omega_p$, więc istnieje takie $t_1 > 1$, że

$$f(p, t_1) \in S(p_0, \varepsilon) \ .$$

Oznaczmy $f(p,t_1) = p_1$. Ponieważ ruch f(p,t) jest nieosobliwy oraz $t_1 > 1$, więc mamy

$$p_1 \notin f(p, \langle -1, 1 \rangle) \ .$$

Otoczmy punkt p_1 takim ε_1 - otoczeniem, że

1) $S(p_1, \varepsilon_1) \subset S(p_0, \varepsilon)$

2) $\bar{S}(p_1, \varepsilon_1) \cap f(p, \langle -1, 1 \rangle) = \emptyset$

3) $\varepsilon_1 < \frac{\varepsilon}{2}$

Ponieważ

$$p_1 \in f(p, I) \subset \Omega_p$$

więc istnieje takie $t_2 > 2$, że

$$f(p, t_2) \in S(p_1, \varepsilon_1) \quad .$$

Oznaczmy $f(p,t_2) = p_2$. Jest widoczne, że

$$p_2 \notin f(p, \langle -2, 2 \rangle) \quad .$$

Otoczmy punkt p_2 takim ε_2 - otoczeniem, że

1) $S(p_2, \varepsilon_2) \subset S(p_1, \varepsilon_1)$

2) $\bar{S}(p_2, \varepsilon_2) \cap f(p, \langle -2, 2 \rangle) = \emptyset$

3) $\varepsilon_2 < \frac{\varepsilon_1}{2}$

Kontynuując ten proces otrzymujemy ciąg domkniętych kul

$$\bar{S}(p_0, \varepsilon) \supset \bar{S}(p_1, \varepsilon_1) \supset \dots \supset \bar{S}(p_n, \varepsilon_n) \supset \dots \quad .$$

Ponieważ przestrzeń R jest zupełna i $(\varepsilon_n) \to 0$, więc kule te mają niepuste przecięcie

$$q = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bar{S}(p_n, \varepsilon_n) \quad .$$

Wykażemy, że $q \in \Omega_p$, lecz nie należy do trajektorii f(p,I). Ponieważ jest

$$q \in \bar{S}(p_n, \varepsilon_n) \tag{3.44}$$

więc $\rho(p_n, q) \leqslant \varepsilon_n$, zatem

$$\lim_{n \to \infty} p_n = q \quad .$$

Mamy jednak $p_n = f(p, t_n)$ oraz

$$\lim_{n \to \infty} t_n = +\infty \quad .$$

Oznacza to, że $q \in \Omega_p$. Ponadto jest

$$\bar{S}(p_n, \varepsilon_n) \cap f(p, \langle -n, n \rangle) = \emptyset$$

więc na mocy (3.44) mamy

$$q \notin f(p, \langle -n, n \rangle) .$$

Stąd zaś wynika, że $q \notin f(p,I)$, co mieliśmy wykazać c.n.d.

4. Punkty niebłądzące i błądzące. Ruchy centralne.

4.1. Punkty niebłądzące i błądzące. Własności zbioru punktów niebłądzących i błądzących.

Punkt p nazywa się niebłądzącym w przestrzeni R, lub wprost niebłądzącym, jeśli dla dowolnego $T \in I$ i dowolnego otoczenia $U(p) \subset R$ punktu p, istnieje taka chwila czasu $t > T$, że

$$U(p) \cap f(U(p), t) \neq \emptyset \quad (4.1)$$

Twierdzenie 4.1. Punkt p jest niebłądzący wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnego $T \in I$ i dowolnego otoczenia $U(p)$, istnieje punkt $q \in U(p)$ (otoczenie $U(q) \subset U(p)$) i chwila $t > T$ takie, że

$$f(q,t) \in U(p), \quad \text{przy czym} \quad f(U(q),t) \subset U(p) .$$

Dowód. Ponieważ $q \in U(p)$, więc $f(q,t) \in f(U(p),t)$, zatem na mocy $U(q) \subset U(p)$ oraz (4.1), jest $f(q,t) \in U(p)$ c.n.d.

Oznaczmy przez M zbiór wszystkich punktów niebłądzących. Punkty dopełnienia, to znaczy punkty zbioru

$$W = R \setminus M \quad (4.2)$$

nazywają się punktami błądzącymi. Inaczej mówiąc, punkt p nazywa się błądzącym w przestrzeni R, lub wprost błądzącym, jeśli istnieje liczba T i otoczenie $U(p)$ punktu p takie, że dla wszystkich $t > T$ jest

$$U(p) \cap f(U(p),t) = \emptyset \quad (4.3)$$

W przykładzie przedstawionym na Rys.3.4, niebłądzącymi są oba punkty spoczynku O i O_1 oraz wszystkie punkty okręgu L. Pozostałe punkty, to znaczy punkty obu spirali, są punktami błądzącymi.

W przykładzie przedstawionym na Rys.3.1, punktami niebłądzącymi są punkt spoczynku O oraz punkty prostej $x = -1$.

Stosując odwzorowanie z parametrem „$-t$" do lewych stron związków (4.1) i (4.3) oraz biorąc pod uwagę, że obraz przecięcia jest równy przecięciu obrazów, otrzymujemy dla (4.1)

$$U(p) \cap f(U(p), -t) \neq \emptyset$$

zaś dla (4.3)

$$U(p) \cap f(U(p), -t) = \emptyset \quad .$$

Wynika to stąd, że jeśli $A \cap B = \emptyset$, to również $f(A,t_0) \cap f(B,t_0) = \emptyset$. Istotnie jeśli $f(A,t_0) \cap f(B,t_0) \neq \emptyset$, to stosując odwzorowanie z parametrem „$-t$" mamy $A \cap B \neq \emptyset$

Z powyższego wynika, że jeśli związek (4.1) jest spełniony dla pewnego $t = t_0 > T$, to jest on spełniony też dla $t = -t_0 < -T$ oraz jeśli związek (4.3) jest spełniony dla wszystkich $t > T$, to jest on spełniony też dla $t < -T$. Oznacza to, że własności punktów polegające na tym, że są one błądzące lub niebłądzące, mają charakter dwukierunkowy.

<u>Twierdzenie 4.2.</u> Zbiór punktów błądzących jest otwarty.

<u>Dowód.</u> Ze związku (4.3) wynika, że wraz z punktem $p \in W$, również wszystkie punkty z otoczenia $\tilde{U}(p)$ są błądzące, co oznacza, że zbiór W jest otwarty. c.n.d.

<u>Twierdzenie 4.3.</u> Zbiór $M = R \setminus W$ punktów niebłądzących jest domknięty.

<u>Dowód</u> - jest bezpośrednim wnioskiem z twierdzenia 4.2.

<u>Twierdzenie 4.4.</u> Zbiór punktów błądzących jest niezmienniczy.

<u>Dowód.</u> Niech $p \in W$. Wtedy istnieje taka liczba T i takie otoczenie $U(p)$ punktu p, że dla wszystkich $t > T$ zachodzi związek (4.3). Stosując do tego związku odwzorowanie z parametrem t_0, otrzymujemy dla wszystkich $t > T$

$$f(U(p),t_0) \cap f(f(U(p),t_0),t) = \emptyset \quad .$$

Oznaczmy

$$f(U(p),t_0) = U_1(f(p,t_0))$$

Mamy więc dla wszystkich $t > T$

$$U_1(f(p,t_0)) \cap f(U_1(f(p,t_0)),t) = \emptyset \qquad (4.4)$$

Zbiór $U_1(f(p,t_0))$ jest na mocy twierdzenia 2.2 obrazem topologicznym zbioru otwartego $U(p)$, więc jest zbiorem otwartym, zawierającym punkt $f(p,t_0)$, a wobec tego jest otoczeniem punktu $f(p,t_0)$. W związku z tym, na mocy (4.4) wnioskujemy, że $f(p,t_0)$ jest punktem błądzącym. Wobec tego $f(p,t_0) \in W$, dla dowolnego $t_0 \in I$. Stąd wynika, że $f(p,I) \subset W$, czyli zbiór W jest niezmienniczy.

c.n.d.

Na mocy twierdzenia 4.4 i twierdzenia 2.14, otrzymujemy następujące twierdzenie.

Twierdzenie 4.5. Zbiór punktów niebłądzących jest niezmienniczy.

Ponieważ dla dowolnego otoczenia punktu p, można zawsze zbudować kulę zawartą w tym otoczeniu, o środku w punkcie p, będącą też otoczeniem punktu p, wobec tego otoczenia $U(p)$ rozważane powyżej, można uważać za kule.

Rozważmy jako wyjściową przestrzeń metryczną zbiór niezmienniczy $A \subset R$. Jeśli punkt $p \in A$ jest niebłądzący, to nazywamy go niebłądzącym w A.

Twierdzenie 4.6. Jeśli punkt p należący do zbioru niezmienniczego $A \subset R$ jest niebłądzący w A, to jest on również niebłądzący w R.

Dowód. Jeśli punkt p jest niebłądzący w A, to dla dowolnego T i dowolnego ε - otoczenia $U_A(p)$ punktu p w A istnieje $t > T$ takie, że

$$U_A(p) \cap f(U_A(p),t) \neq \emptyset \qquad (4.5)$$

Rozważmy teraz ε - otoczenie $U(p)$ punktu p w R. Wtedy

$$U(p) \cap A = U_A(p)$$

jest ε - otoczeniem $U(p)$ punktu p w A. Na mocy (4.5), dla danego $t > T$, tym bardziej ma miejsce związek (4.1), zatem punkt p jest niebłądzący w R.

c.n.d.

Własność ta nie przenosi się na punkty błądzące, to znaczy nie każdy punkt błądzący w zbiorze niezmienniczym $A \subset R$, jest punktem błądzącym w R. Na przykład w przykładzie przedstawionym na Rys.3.4, punkt p jest niebłądzący w R i błądzący w f(p,I).

Twierdzenie 4.7. Każdy punkt graniczny q jest niebłądzący w Γ_p, jeśli $q \in \Delta_p$ oraz w f(p,I), jeśli $q \in \Delta_p \cap f(p,I)$

Dowód. Załóżmy dla ustalenia uwagi, że $q \in \Omega_p$. Wtedy w dowolnym otoczeniu $S(q,\varepsilon)$ punktu q, istnieje punkt $p_0 \in f(p,I)$. Ponieważ jest $\Omega_{p_0} = \Omega_p$, więc $q \in \Omega_{p_0}$. Wobec tego, dla każdego $T \in I$, istnieje takie $t > T$, że $f(p_0,t) \in S(q,\varepsilon)$.

Stąd wynika na podstawie twierdzenia 4.1, że $q \in M$. Ponieważ $q \in \Gamma_p$, zaś $p_0 \in f(p,I)$, więc tym samym dowód twierdzenia jest zakończony. c.n.d.

Biorąc pod uwagę, że punkt p jest P - stateczny przynajmniej w jednym kierunku wtedy i tylko wtedy, gdy $p \in \Delta_p$, otrzymujemy na mocy twierdzenia 4.7, następujące twierdzenie.

Twierdzenie 4.8. Każdy punkt p, stateczny w sensie Poisson'a przynajmniej w jednym kierunku, jest niebłądzący w f(p,I), a więc również i w R.

Rezultaty odwrotne do wskazanych w twierdzeniu 4.7 i w twierdzeniu 4.8 nie mają miejsca. Istotnie, jeśli w przykładzie przedstawionym na Rys.3.4, spirale f(q,I) i f(r,I) zastąpić rodziną okręgów o środku w punkcie O, to punkt p jest niebłądzący w R, jednakże nie jest on P - stateczny w żadnym kierunku, a nawet nie jest on punktem granicznym.

Nie dla każdego układu dynamicznego, istnieje niepusty zbiór punktów niebłądzących. Na przykład w przykładzie z pp. 2.4 ($\frac{dx}{dt} = 1$; $x = x_0 + t$) wszystkie punkty są błądzące. Jednakże na mocy twierdzenia 3.4 i twierdzenia 4.7, ma miejsce następujące twierdzenie.

Twierdzenie 4.9. Jeśli istnieje chociażby jeden ruch stateczny w sensie Lagrange'a, przynajmniej w jednym kierunku, to zbiór punktów niebłądzących jest niepusty.

Biorąc pod uwagę, że w przestrzeni zwartej wszystkie ruchy są stateczne w sensie Lagrange'a, mamy następujące twierdzenie.

Twierdzenie 4.10. W przestrzeni metrycznej zwartej, zbiór punktów niebłądzących jest niepusty.

Z twierdzenia 3.6 i z twierdzenia 4.7 wynika również następujące twierdzenie.

Twierdzenie 4.11. W przestrzeni metrycznej zwartej, każdy ruch zmierza do zbioru punktów niebłądzących.

4.2. Zbiór ruchów centralnych.

Podczas wszystkich rozważań w tym podpunkcie będziemy zakładali, że przestrzeń R jest zwarta. Wtedy na mocy twierdzenia 4.10, zbiór M punktów niebłądzących jest niepusty. Ponadto na mocy twierdzenia 4.3 i twierdzenia 4.5 zbiór ten jest domknięty i niezmienniczy. Wobec tego, jako zbiór domknięty przestrzeni zwartej, zbiór M jest zwarty. Jeśli teraz jako przestrzeń wyjściową wziąść zbiór M, to wskutek jego zwartości, zbiór $M_1 \subset M$ punktów niebłądzących w nim, jest niepusty. Na przykład w przykładzie przedstawionym na Rys.3.4, zbiór M_1 składa się tylko z dwóch punktów spoczynku.

Rozważmy z kolei M_1 jako przestrzeń wyjściową, dla której znajdujemy niepusty, domknięty (a więc i zwarty) zbiór niezmienniczy $M_2 \subset M_1$ punktów niebłądzących w M_1. Kontynuując to postępowanie, otrzymujemy nieskończony ciąg zawartych w sobie zbiorów

$$M \supset M_1 \supset M_2 \supset \cdots \supset M_k \supset \cdots .$$

Przecięcie tych zbiorów

$$M_\omega = \bigcap_{k=1}^{\infty} M_k$$

jest niepuste, gdyż przestrzeń R jest zwarta(*). Ponadto zbiór M_ω jest niezmienniczy i domknięty (a więc i zwarty), jako przecięcie zbiorów domkniętych i niezmienniczych.

Potraktujmy teraz zbiór M_ω jako przestrzeń wyjściową. W tej przestrzeni zbiór $M_{\omega+1} \subset M_\omega$ punktów niebłądzących jest

---

(*) K.Kuratowski Wstęp do teorii mnogości i topologii PWN 1972 wyd.6 str.195

niepusty. Kontynuując to postępowanie otrzymujemy ciąg

$$M \supset M_1 \supset M_2 \supset \cdots \supset M_k \supset \cdots \supset M_\omega \supset M_{\omega+1} \supset \cdots \supset M_{\omega+k} \supset \cdots$$

Następnie znowu bierzemy przecięcie $M_\alpha = \bigcap_{k=1}^{\infty} M_{\omega+k}$ i oznaczamy przez $M_{\alpha+1}$ niepusty zbiór punktów niebłądzących w M_α i tak dalej. W ten sposób otrzymujemy ciąg ciągów zbiorów domkniętych

$$M \supset M_1 \supset \cdots \supset M_k \supset \cdots \supset M_\omega \supset \cdots \supset M_\alpha \supset \cdots \supset M_\beta \supset \cdots \quad (4.6)$$

Ponieważ przestrzeń metryczna zwarta jest ośrodkowa, więc ma ona przeliczalną bazę(*) (czyli istnieje w R pewien zbiór przeliczalny i gęsty). Stosując twierdzenie Baire'a-Hausdorffa(**) wnioskujemy, że po co najwyżej przeliczalnej ilości kroków, zbiory w ciągu (4.6) zaczną pokrywać się, to znaczy, że istnieje takie δ, że

$$M_\delta = M_{\delta+1} = \cdots\cdots$$

Zbiór M_δ nazywa się zbiorem ruchów centralnych, lub wprost centrum układu dynamicznego.

Oznaczmy $M_\delta = Z$. Jest to zbiór domknięty i niezmienniczy i ponieważ $M_{\delta+1} = M_\delta$, więc wszystkie punkty zbioru Z są punktami niebłądzącymi w Z. Jest też widoczne, że Z jest maksymalnym zbiorem domkniętym i niezmienniczym, złożonym w całości z punktów niebłądzących w tym zbiorze. W szczególności, Z zawiera wszystkie punkty p, niebłądzące w $f(p,I)$. Wobec tego, na podstawie twierdzenia 4.8 wnioskujemy, że wszystkie punkty stateczne w sensie Poisson'a przynajmniej w jednym kierunku, są na pewno zawarte w zbiorze ruchów centralnych.

<u>Twierdzenie 4.12.</u> W zbiorze ruchów centralnych, zbiór punktów statecznych w sensie Poisson'a, jest gęsty.

<u>Dowód.</u> Rozważmy jako przestrzeń wyjściową zbiór Z. Weźmy dowolny punkt $p \in Z$ i rozważmy ε - otoczenie $S \equiv S(p, \varepsilon)$.

(*) W.Kołodziej Analiza Matematyczna PWN 1978r str. 83

(**) П.С Александров Введение в общую теорию множеств и функций Гос. Изд. Тех.-Теорет. Лит. Москва, Ленинград 1948 г. - стр. 275

Należy wykazać, że w S jest przynajmniej jeden punkt P - stateczny. Ponieważ punkt p jest niebłądzący, więc na podstawie twierdzenia 4.1, traktując otoczenia jako kule, istnieje taka kula S_1 i $t_1 > 1$, że

$$S_1 \subset S \quad , \quad f(S_1, t_1) \subset S \quad .$$

Zmniejszając w razie potrzeby promień ε_1 kuli S_1, możemy przyjąć, że $\varepsilon_1 < \frac{\varepsilon}{2}$ oraz

$$\bar{S}_1 \subset S \quad , \quad f(\bar{S}_1, t_1) \subset S \quad .$$

Biorąc pod uwagę fakt, że w zbiorze Z wszystkie punkty są niebłądzące, na mocy twierdzenia 4.1 oraz tego, że własność ta ma charakter dwukierunkowy, znajdujemy dla kuli S_1 takie $t_2 < -2$ oraz kulę S_2 o promieniu $\varepsilon_2 < \frac{\varepsilon_1}{2}$, że

$$\bar{S}_2 \subset S_1 \quad , \quad f(\bar{S}_2, t_2) \subset S_1$$

Analogicznie znajdujemy takie $t_3 > 3$ i kulę S_3 o promieniu $\varepsilon_3 < \frac{\varepsilon_2}{2}$, że

$$\bar{S}_3 \subset S_2 \quad , \quad f(\bar{S}_3, t_3) \subset S_2$$

i tak dalej. W ten sposób otrzymujemy zstępujący układ kul domkniętych, mających jedyny punkt wspólny (gdyż przestrzeń zwarta jest zupełna)

$$q = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bar{S}_n \quad .$$

Rozważmy dowolne otoczenie $S(q, \delta)$ punktu q. Istnieje takie N dostatecznie duże, że $\bar{S}_N \subset S(q, \delta)$. Wobec tego mamy

$$f(\bar{S}_n, t_n) \subset S_N \subset S(q, \delta)$$

dla wszystkich $n > N$. W szczególności $f(q, t_n) \in S(q, \delta)$, a ponieważ $t_{2k-1} > 2k - 1$ oraz $t_{2k} < -2k$, gdyż tak były wybierane chwile czasu przy konstrukcji zstępującego układu kul, więc

$$q = A_q \cap \Omega_q .$$

Wobec tego punkt q jest stateczny w sensie Poisson'a. Ponieważ $q \in S$, więc twierdzenie jest udowodnione. c.n.d.

Stąd wynika jako wniosek następujące twierdzenie.

Twierdzenie 4.13. Zbiór ruchów centralnych, jest domknięciem zbioru punktów statecznych w sensie Poisson'a.

W związku z zagadnieniami rozpatrzonymi powyżej sformułowano dwa następujące zagadnienia.

Zagadnienie 1. Czy istnieje punkt P - stateczny układu dynamicznego, określonego w płaszczyźnie E_2, mającego przynajmniej jeden punkt niebłądzący.

Zagadnienie 2. Czy istnieje układ dynamiczny bez punktów błądzących i P - statecznych, określonych w przestrzeni R niezupełnej.

4.3. Minimalne centrum przyciągania.

W tym podpunkcie będziemy rozważali tylko wartości czasu $t \in I^+$. Analogiczne pojęcia, do wprowadzonych poniżej, można również określić dla ujemnych wartości t.

Rozważmy zbiór $E \subset R$ domknięty, lub otwarty. Funkcją charakterystyczną φ_E zbioru E, nazywamy funkcję

$$\varphi_E(p) = \begin{cases} 1 & \text{dla} \quad p \in E \, . \\ 0 & \text{dla} \quad p \in R \setminus E \, . \end{cases} \tag{4.7}$$

Rozważmy łuk $f(p, \langle 0,T \rangle)$ i zbiór mierzalny(*) tych wartości $t \in \langle 0,T \rangle$, dla których $f(p,t) \in E$. Miara Lebesgue'a(*) tego zbioru jest równa

$$\tau = \tau(p,T,E) = \int_0^T \varphi_E(f(p,t))dt \, . \tag{4.8}$$

Jest rzeczą naturalną, nazwać τ czasem przebywania punktu p w zbiorze E, w przedziale czasu $\langle 0,T \rangle$.

Jest widoczne, że

(*) W.Kołodziej Analiza Matematyczna PWN 1978 r. str.267

$$0 \leqslant \frac{\tau}{T} \leqslant 1 \tag{4.9}$$

Jeśli istnieje granica

$$\lim_{T\to+\infty} \frac{1}{T}\int_0^T \varphi_\varepsilon(f(p,t))dt = \lim_{T\to+\infty} \frac{\tau}{T} = P(f(p,t)\in E) \tag{4.10}$$

to nazywamy ją prawdopodobieństwem znalezienia punktu p w zbiorze E.

Jest widoczne, że jeśli prawdopodobieństwa te istnieją, to

$$P(f(p,t)\in A\cup B) \leqslant P(f(p,t)\in A) + P(f(p,t)\in B) \tag{4.11}$$

przy czym jeśli $A \cap B = \emptyset$, to ma miejsce znak równości. Ponadto, jeśli $A \subset B \subset R$, to

$$P(f(p,t)\in A) \leqslant P(f(p,t)\in B) \; . \tag{4.12}$$

Zbiór niezmienniczy i domknięty $V \subset R$ nazywa się centrum przyciągania dla ruchu f(p,t), jeśli dla dowolnego $\varepsilon > 0$, jest

$$P(f(p,t)\in S(V,\varepsilon)) = 1 \; . \tag{4.13}$$

Jeśli zbiór V nie zawiera podzbioru właściwego, będącego centrum przyciągania dla f(p,t), wtedy zbiór V nazywamy minimalnym centrum przyciągania, dla ruchu f(p,t).

Oznaczmy przez W_p zbiór złożony z wszystkich punktów $q \in R$, dla których nierówność

$$\lim_{T\to+\infty} \sup \frac{\tau(p,T,S(q,\delta))}{T} > 0 \tag{4.14}$$

jest spełniona dla dowolnego $\delta > 0$ (o ile punkty takie istnieją). Jest widoczne, że

$$W_p \subset \Omega_p \subset \Gamma_p^+ \; . \tag{4.15}$$

<u>Twierdzenie 4.14.</u> Zbiór W_p jest niezmienniczy.

<u>Dowód.</u> Niech $q \in W_p$, $t_0 \in I$, $\varepsilon > 0$. Na mocy własności (2) układów dynamicznych, istnieje takie $\delta > 0$, że

$$f(S(q,\delta), t_0) \subset S(f(q,t_0),\varepsilon) \; .$$

Ponadto jest

$$\tau(p,T,S(f(q,t_0),\varepsilon)) \geq \tau(p,T,f(S(q,\delta),t_0)) \geq \\ \geq \tau(p,T,S(q,\delta)) - |t_0| \quad . \tag{4.16}$$

Z (4.14) i (4.16) wynika, że

$$\lim_{T\to+\infty} \sup \frac{\tau(p,T,S(f(q,t_0),\varepsilon))}{T} > 0 \quad .$$

Wskutek dowolności ε oznacza to, że $f(q,t_0) \in W_p$ zatem zbiór W_p jest niezmienniczy.

c.n.d.

<u>Twierdzenie 4.15.</u> Zbiór W_p jest domknięty.

<u>Dowód.</u> Niech $q \in R\setminus W_p$. Wtedy przynajmniej dla jednego $\delta = \delta_0 > 0$, warunek (4.14) nie jest spełniony, więc

$$P(f(p,t) \in S(q,\delta_0)) = 0 \quad . \tag{4.17}$$

Niech $q_1 \in S(q, \delta_0)$, zaś $\delta_1 > 0$ niech będzie takie, że

$$S(q_1,\delta_1) \subset S(q,\delta_0) \quad .$$

Wobec tego na mocy (4.17) jest

$$P(f(p,t) \in S(q_1,\delta_1)) = 0$$

zatem $q_1 \notin W_p$. Wobec tego

$$S(q,\delta_0) \subset R\setminus W_p$$

więc zbiór $R\setminus W_p$ jest otwarty, skąd wynika, że zbiór W_p jest domknięty.

c.n.d.

<u>Twierdzenie 4.16.</u> Jeśli V jest centrum przyciągania dla ruchu $f(p,t)$, to $W_p \subset V$.

<u>Dowód.</u> Przypuśćmy, że $q \notin V$. Wtedy jest

$$\alpha = \rho(q,V) > 0 \quad , \quad S(q,\tfrac{\alpha}{2}) \subset R\setminus S(V,\tfrac{\alpha}{2}) \quad .$$

Ponieważ V jest centrum przyciągania dla ruchu $f(p,t)$, więc

$$P(f(p,t) \in S(V,\tfrac{\alpha}{2})) = 1$$

Wobec tego jest

$$P(f(p,t) \in R \setminus S(V, \tfrac{\alpha}{2})) = 0$$

a więc tym bardziej jest

$$P(f(p,t) \in S(q, \tfrac{\alpha}{2})) = 0 .$$

Ostatnia równość oznacza, że

$$\lim_{T \to +\infty} \frac{\tau(p, T, S(q, \frac{\alpha}{2}))}{T} = 0 .$$

Wobec tego $q \notin W_p$, stąd zaś wynika, że $W_p \subset V$

c.n.d.

Twierdzenie 4.17. Jeśli ruch f(p,t) jest stateczny w sensie Lagrange'a w kierunku dodatnim, to zbiór $W_p \neq \emptyset$ i jest minimalnym centrum przyciągania dla f(p,t).

Dowód. Niech ruch f(p,t) będzie L^+- stateczny. Wtedy zbiór Γ_p^+ jest zwarty. Rozważmy dla dowolnego $\varepsilon > 0$ zbiór w sobie zwarty

$$K = \Gamma_p^+ \setminus S(W_p, \varepsilon)$$

gdy $W_p \neq \emptyset$, lub zbiór w sobie zwarty $K \equiv \Gamma_p^+$, gdy $W_p = \emptyset$.

Jeśli $K \neq \emptyset$, to dla dowlnego punktu $q \in K$ (ponieważ $q \notin W_p$), istnieje takie $\delta = \delta_q > 0$, dla którego nierówność (4.14) nie ma miejsca. Wtedy jest

$$P(f(p,t) \in S(q, \delta_q)) = 0 \qquad (4.18)$$

dla wszystkich $q \in K$. Ze zbioru otoczeń $\{ S(q, \delta_q) \}$ pokrywających zbiór K, można wybrać skończoną ich ilość

$$K \subset \bigcup_{i=1}^{m} S(q_i, \delta_{q_i})$$

Wtedy z (4.18) wynika, że

$$P(f(p,t) \in K) = 0 \qquad (4.19)$$

podczas gdy jest widoczne, że

$$P(f(p,t) \in \Gamma_p^+) = 1 \qquad (4.20)$$

Ze związków (4.19) i (4.20) wynika, że $W_p \neq \emptyset$, gdyż w przeciwnym przypadku związki te byłyby sprzeczne oraz, że

$$P(f(p,t) \in S(W_p, \varepsilon)) = 1 \quad . \tag{4.21}$$

Gdy $K = \emptyset$, to $S(W_p, \varepsilon) \supset \Gamma_p^+$, więc na mocy (4.20), związek (4.21) jest też spełniony.

Stąd na mocy twierdzeń 4.14 i 4.15 wynika, że W_p jest centrum przyciągania, dla ruchu $f(p,t)$. Jest to minimalne centrum przyciągania, ~~co wynika, z twierdzenia~~ 4.16. c.n.d.

Twierdzenie 4.18. Jeśli przestrzeń R jest zwarta, to minimalne centrum przyciągania W_p dla $f(p,t)$, jest zawarte w zbiorze ruchów centralnych Z.

Dowód. W pp. 4.2 stwierdziliśmy, że Z jest maksymalnym zbiorem domkniętym i niezmienniczym, złożonym w całości z punktów niebłądzących w tym zbiorze. Wobec tego wystarczy wykazać, że wszystkie punkty z W_p są niebłądzące w W_p.

Przypuśćmy, że w W_p istnieje punkt q, błądzący w W_p. Wobec tego (traktując otoczenia jako kule), istnieje takie $\varepsilon > 0$ i $t_0 > 0$, że dla wszystkich $t > t_0$, jest

$$S_{W_p}(q, 2\varepsilon) \cap f(S_{W_p}(q, 2\varepsilon), t) = \emptyset \quad ,$$

gdzie

$$S_{W_p}(q, 2\varepsilon) = S(q, 2\varepsilon) \cap W_p \quad .$$

Zatem dowolny punkt z $S_{W_p}(q, 2\varepsilon)$, musi ostatecznie opuścić $S_{W_p}(q, 2\varepsilon)$, przy czym wskutek niezmienniczości W_p i $S(q, 2\varepsilon)$, musi to nastąpić w odstępie czasu t_0.

Weźmy $\eta > 0$ i $T_1 > t$ takie, że

$$\frac{2T}{T_1} < \frac{1}{2}\eta \quad . \tag{4.22}$$

Dla zbioru w sobie zwartego

$$K = \bar{S}_{W_p}(q, \varepsilon)$$

oraz liczb ε i T_1, znajdujemy na mocy twierdzenia 2.6 odpowiednie $\delta > 0$, takie, że dla

$$\tau_0 \in K,\ \rho(\tau,\tau_0) < \delta,\ t \in \langle 0,T \rangle$$

jest

$$\rho(f(\tau,t), f(\tau_0,t)) < \varepsilon .$$

Oznaczmy

$$\Pi = \bar{S}(K,\delta) \cap \bar{S}(q,\varepsilon) , \qquad \Pi' = \overline{S(q,\varepsilon) \setminus \Pi} .$$

Niech $T > T_1$. Rozważmy wielkość $\tau(p,T,\Pi)$. Przy każdym przechodzeniu punktu $p_1 = f(p,t)$ przez Π, istnieje taki punkt $r_0 \in \bar{S}_{W_p}(q, \varepsilon)$, że $\rho(p_1, r_0) < \delta$.

W przeciągu czasu t_0, punkt r_0 opuści ostatecznie kulę $S(q, 2\varepsilon)$. Na mocy uczynionego wyboru δ, jest

$$\rho(f(p_1,t), f(\tau_0,t)) < \varepsilon$$

dla wszystkich $t \in \langle 0, T_1 \rangle$. Wobec tego, dla $t \in \langle t_0, T_1 \rangle$

$$f(p_1,t) \notin S(q,\varepsilon) .$$

Zatem po każdorazowym przebywaniu punktu $f(p,t)$ w obszarze Π (którego długotrwałość nie przekracza t_0), pozostaje on na zewnątrz $S(q, \varepsilon)$, podczas odstępu czasu $T_1 - t_0$. Mamy więc

$$\frac{\tau(p,T,\Pi)}{T} \leqslant \frac{2t_0}{T_1} . \tag{4.23}$$

Z drugiej strony, ponieważ $\Pi' \cap W_p = \emptyset$ więc

$$P(f(p,t) \in \Pi') = 0 .$$

Wobec tego, dla dostatecznie dużych T, jest

$$\frac{\tau(p,T,\Pi')}{T} < \frac{1}{2}\eta \tag{4.24}$$

Z (4.23) wynika na mocy (4.22) i (4.24), że

$$\frac{\tau(p,T,S(q,\varepsilon))}{T} < \eta .$$

Ponieważ zaś $\eta > 0$ jest dowolne, więc

$$P(f(p,t) \in S(q,\varepsilon)) = 0 .$$

Związek ten zaprzecza temu, że $q \in W_p$, co dowodzi twierdzenia. c.n.d.

Z (4.21) i twierdzenia 4.18, wynika następujące twierdzenie.

Twierdzenie 4.19. (Birkhoff). Jeśli przestrzeń R jest zwarta, to dla dowolnego punktu $p \in R$ i dowolnego $\varepsilon > 0$, ma miejsce równość

$$P(f(p,t) \in S(Z,\varepsilon)) = 1 . \tag{4.25}$$

Można wykazać, że jeśli w przykładzie z pp.3.3, przedstawiającym ruch na torusie, funkcja $\Phi(\varphi, \theta)$ spełnia warunek Lipschitza oraz jest

$$\iint\limits_R \frac{d\varphi\, d\theta}{\Phi(\varphi,\theta)} = +\infty \tag{4.26}$$

to dla dowlnego punktu $p \in R$ i dowolnego $\varepsilon > 0$, jest

$$P(f(p,t) \in S((0,0),\varepsilon)) = 1 .$$

Wobec tego punkt spoczynku (0,0), jest w tym przypadku minimalnym centrum przyciągania, dla wszystkich ruchów. Jednocześnie w rozważanym przypadku, jest $Z = R$.

5. Zbiory minimalne i ruchy rekurencyjne (zwrotne)

5.1. Zbiory minimalne.

Każdy zbiór niezmienniczy domknięty, nie zawierający podzbioru niezmienniczego domkniętego właściwego, nazywamy zbiorem minimalnym.

Punkt spoczynku oraz trajektoria dowolnego ruchu okresowego są zwartymi zbiorami minimalnymi. Przykładem niezwartego zbioru minimalnego jest trajektoria ruchu jednostajnego i prostoliniowego.

Twierdzenie 5.1. Każdy zbiór F niezmieniczy, domknięty i zwarty zawiera pewien zbiór minimalny.

Dowód. Jeśli zbiór F zawiera jakikolwiek podzbiór niezmienniczy domknięty właściwy, to oznaczamy ten podzbiór przez F_1. W przeciwnym przypadku kładziemy $F_1 = F$. Jeśli F_1 zawiera pewien podzbiór niezmienniczy domknięty właściwy, to oznaczamy ten podzbiór przez F_2. W przeciwnym przypadku kładziemy $F_1 = F_2$. Kontynuując to postępowanie, otrzymujemy ciąg zawartych w sobie zbiorów niezmienniczych domkniętych

$$F \supset F_1 \supset F_2 \supset \cdots \supset F_k \supset \cdots$$

Oznaczmy

$$F_\omega = \bigcap_{k=1}^{\infty} F_k$$

Zbiór F_ω jest niepustym (patrz pp.4.2) zbiorem niezmienniczym i domkniętym. Jako domknięty podzbiór zbioru zwartego F jest on również zwarty. Wobec tego odnośnie zbioru F_ω możemy powtórzyć te same rozważania, które przeprowadziliśmy odnośnie zbioru F i tak dalej. Otrzymujemy więc ciąg (ciągów) zbiorów niezmieniczych i domkniętych, zawartych w sobie

$$F \supset F_1 \supset \cdots \supset F_k \supset \cdots \supset F_\omega \supset \cdots \supset F_\alpha \supset \cdots \supset F_\beta \supset \cdots$$

Na podstawie twierdzenia Baire'a-Hausdorffa (patrz pp.4.2) wnioskujemy, że po wykonaniu co najwyżej przeliczalnej ilości kroków, zbiory w tym ciągu zaczną się pokrywać. Oznacza to, że istnieje takie γ, że $F_\gamma = F_{\gamma+1} = \cdots$. Jest widoczne, że F_γ jest zbiorem minimalnym

c.n.d.

<u>Twierdzenie 5.2.</u> Jeśli przestrzeń R jest zwarta, to zawiera ona pewien zbiór minimalny.

<u>Dowód</u> - wynika bezpośrednio z twierdzenia 5.1.

<u>Twierdzenie 5.3.</u> Jeśli ruch $f(p,t)$ jest stateczny w sensie Lagrange'a w kierunku dodatnim (lub ujemnym), to zbiór Ω_p (lub A_p) zawiera pewien zbiór minimalny.

<u>Dowód.</u> W rozważanym przypadku zbiór $\overline{\Gamma_p^+}$ (lub $\overline{\Gamma_p^-}$) jest zwarty, więc na mocy inkluzji (3.4) zbiór Ω_p (lub A_p) jest zbiorem niezmienniczym, domkniętym i zwartym, jako podzbiór zbioru niezmienniczego, domkniętego i zwartego. Wobec tego na mocy twierdzenia 5.1 zbiór Ω_p (lub A_p) zawiera pewien zbiór minimalny.

c.n.d.

Twierdzenie 5.4. Warunkiem koniecznym i wystarczającym na to, aby pewien zbiór niezmienniczy Γ był minimalny jest, aby każda trajektoria f(p,I) zawarta w Γ była w tym zbiorze gęsta, to znaczy aby było $\overline{\Gamma_p} = \Gamma$.

Dowód. Niech Γ będzie zbiorem minimalnym. Weźmy dowolny punkt $p \in \Gamma$. Ponieważ Γ jest zbiorem niezmienniczym, więc $f(p,I) \subset \Gamma$, zaś wskutek tego, że Γ jest zbiorem domkniętym, jest $\overline{\Gamma_p} \subset \Gamma$. Jednakże $\overline{\Gamma_p}$ nie może być pod-zbiorem właściwym zbioru Γ, gdyż wtedy zbiór Γ nie byłby minimalny, co oznacza, że $\overline{\Gamma_p} = \Gamma$.

Niech teraz dla dowolnej trajektorii f(p,I) należącej do zbioru niezmienniczego Γ, ma miejsce równość $\overline{\Gamma_p} = \Gamma$. Wtedy Γ jest również zbiorem domkniętym. Pozostaje wykazać, że zbiór Γ nie zawiera podzbioru niezmienniczego, domkniętego i właściwego. Przypuśćmy, że istnieje podzbiór niezmienniczy, domknięty i właściwy $A \subset \Gamma$. Weźmy dowolny punkt $p \in A$. Wtedy mamy $f(p,I) \subset A$, gdyż A jest zbiorem niezmienniczym oraz $\overline{\Gamma_p} \subset A$, gdyż A jest zbiorem domkniętym. Wobec tego na podstawie uczynionego przypuszczenia wynika, że $A \subset \Gamma = \overline{\Gamma_p} \subset A$. Otrzymana sprzeczność dowodzi twierdzenia.

c.n.d.

Twierdzenie 5.5. Przy izomorfiźmie układów dynamicznych, zbiór minimalny przechodzi w zbiór minimalny.

Dowód - wynika z twierdzenia 2.27, biorąc dodatkowo pod uwagę, że przy izomorfiźmie układów dynamicznych zbiór domknięty przechodzi w zbiór domknięty, zaś część właściwa pewnego zbioru przechodzi w część właściwą jego obrazu.

c.n.d.

Należy zaznaczyć, że przy homomorfiźmie zbiór minimalny może przejść w zbiór, który nie jest minimalny. Jednakże ma miejsce następująca własność (której dowód pomijamy).

Twierdzenie 5.6. Przy homomorfiźmie układów dynamicznych zbiór minimalny zwarty przechodzi w zbiór minimalny zwarty.

5.2. Ruchy prawie rekurencyjne i rekurencyjne.

Mówimy, że trajektoria f(p,I) aproksymuje jednostajnie zbiór $Q \subset R$, jeśli dla dowolnego $\varepsilon > 0$ istnieje taka liczba $T > 0$, że każdy łuk trajektorii $f(p,I)$ o „długości czasowej" T, aproksymuje zbiór Q z dokładnością do ε, to znaczy jest

$$Q \subset S(f(p,\langle t_0, t_0+T\rangle), \varepsilon) \tag{5.1}$$

dla dowolnego t_0.

Ruch $f(p,t)$ nazywa się prawie rekurencyjnym, jeśli trajektoria $f(p,I)$ aproksymuje jednostajnie punkt p.

Twierdzenie 5.7. Każdy ruch prawie rekurencyjny jest stateczny w sensie Poisson'a.

Dowód. Niech ruch $f(p,t)$ będzie prawie rekurencyjny. Wtedy dla dowolnego $\varepsilon > 0$, istnieje takie $T > 0$, że

$$p \in S(f(p,\langle t_0, t_0+T\rangle), \varepsilon) \tag{5.2}$$

dla dowolnego t_0, to znaczy jest

$$S(p,\varepsilon) \cap f(p,\langle t_0, t_0+T\rangle) \neq \emptyset \tag{5.3}$$

Ponieważ w (5.3) liczba t_0 jest dowolna, więc na mocy twierdzenia 3.1 punkt $p \in \Omega_p$, zatem jest on stateczny w sensie Poisson'a wraz z ruchem $f(p,t)$.

c.n.d.

Ruch $f(p,t)$ nazywa się rekurencyjnym, jeśli trajektoria $f(p,I)$ aproksymuje jednostajnie siebie samą.

Każdy ruch okresowy o okresie τ jest rekurencyjny. W tym przypadku dla dowolnego $\varepsilon > 0$ można przyjąć, że $T = \tau$. Wtedy mamy

$$f(p,\langle t_0, t_0+T\rangle) = f(p,I)$$

zatem dla $Q = f(p,I)$ ma miejsce inkluzja (5.1).

Analogicznie każdy spoczynek jest ruchem rekurencyjnym. Jest widoczne, że ma miejsce następujące twierdzenie.

Twierdzenie 5.8. Każdy ruch rekurencyjny jest prawie rekurencyjny, zaś jego trajektoria jest ograniczona.

Twierdzenie 5.9. W przestrzeni zupełnej, każdy ruch rekurencyjny jest stateczny w sensie Lagrange'a.

Dowód. Ponieważ ruch f(p,t) jest rekurencyjny, więc dla $\frac{\varepsilon}{2} > 0$ istnieje taka liczba $T > 0$, że $f(p, \langle 0,T \rangle)$ aproksymuje f(p,I) z dokładnością do $\frac{\varepsilon}{2}$, to znaczy jest

$$\rho(q, f(p,\langle 0,T\rangle)) < \frac{\varepsilon}{2}$$

dla wszystkich $q \in f(p,I)$. Wobec tego dla wszystkich $q \in \Gamma_p$ jest

$$\rho(q, f(p,\langle 0,T\rangle)) \leqslant \frac{\varepsilon}{2} . \tag{5.4}$$

Na mocy twierdzenia 2.7 zbiór $f(p, \langle 0,T \rangle)$ jest zwarty i domknięty.

Przypomnijmy, że zbiór E przestrzeni metrycznej R nazywamy ε - siecią dla zbioru M tej przestrzeni, jeśli dla dowolnego punktu $p \in M$ istnieje taki punkt $p_\varepsilon \in E$, że $\rho(p,p_\varepsilon)<\varepsilon$. Warunkiem koniecznym na to, aby zbiór M przestrzeni metrycznej R był zwarty jest, aby dla dowolnej liczby $\varepsilon > 0$ istniała skończona ε - sieć dla M, Gdy przestrzeń R jest zupełna, to warunek ten jest również wystarczający(*) .

Wobec tego zbiór $f(p, \langle 0,T \rangle)$ ma skończoną $\frac{\varepsilon}{2}$ sieć, która na mocy (5.4) jest skończoną ε - siecią dla Γ_p. Wobec tego, wskutek zupełności przestrzeni R, zbiór Γ_p jest zwarty(*), co oznacza, że ruch f(p,t) jest stateczny w sensie Lagrange'a.

c.n.d.

5.3. Związek między zbiorami minimalnymi a ruchami prawie rekurencyjnymi i rekurencyjnymi.

Twierdzenie 5.10. Ruch f(p,t), dla którego $\Omega_p \neq \emptyset$, przebiega przy $t > 0$ dowolnie duże przedziały czasu w dowolnym otoczeniu zbioru niezmienniczego $A \subset \Omega_p$.

Dowód. Niech będzie dany zbiór niezmienniczy $A \subset \Omega_p$ oraz niech będą dane liczby $\varepsilon > 0$ i $T > 0$. Weźmy dowolny punkt $q \in A$ i wyznaczmy odpowiednie $\delta(q, \varepsilon, T) > 0$ (na mocy

(*) L.A.Lusternik, W.I.Sobolew Elementy analizy funkcjonalnej PWN 1959 r str.49

twierdzenia 2.6) takie, że

$$\rho(f(r,t),f(q,t)) < \varepsilon$$

jeśli $\rho(r,q)<\delta$ i $0 \leqslant t \leqslant T$. Ponieważ punkt $q \in \Omega_p$, więc w kuli $S(q,\delta)$ istnieje punkt $p_1 \in f(p,I^+)$. Wobec tego jest $\rho(p_1,q)<\delta$, zaś wskutek odpowiedniego wyboru δ mamy

$$\rho(f(p_1,t),f(q,t))< \varepsilon$$

dla $0 \leqslant t \leqslant T$. Stąd wynika, że

$$\rho(f(p_1,t),A) < \varepsilon$$

dla $0 \leqslant t \leqslant T$.

c.n.d.

Twierdzenie 5.11. Domknięcie trajektorii ruchu prawie rekurencyjnego jest zbiorem minimalnym.

Dowód. Niech ruch f(p,t) będzie prawie rekurencyjny. Przypuśćmy, że zbiór Γ_p nie jest minimalny. Wtedy istnieje podzbiór niezmienniczy domknięty właściwy $A \subset \Gamma_p$. Jest oczywiste, że $p \notin A$, gdyż w przeciwnym przypadku byłoby $\Gamma_p \subset A$, to znaczy $A = \Gamma_p$. Oznaczmy $\rho(p,A) = d$ gdzie $d > 0$ i weźmy $\varepsilon<\frac{d}{2}$. Ponieważ ruch f(p,t) jest prawie rekurencyjny, więc dla przyjętego ε istnieje takie $T > 0$, że dla dowolnego $t_0 \in I$ ma miejsce inkluzja (5.2). Ponadto na mocy twierdzenia 5.7 jest $p \in \Omega_p$, a wobec tego również $\Gamma_p \subset \Omega_p$. Stąd na mocy (3.4) otrzymujemy równość

$$\Omega_p = \Gamma_p .$$

Na podstawie twierdzenia 5.10 istnieje przedział taki, że jest

$$f(p,\langle t_0, t_0+T\rangle) \subset S(A,\varepsilon) . \qquad (5.5)$$

Na mocy (5.2) i (5.5) jest $p \in S(A,2\varepsilon)$ skąd mamy

$$d= \rho(p,A)<2\varepsilon<d .$$

Otrzymana sprzeczność dowodzi twierdzenia.

c.n.d.

Twierdzenie 5.12. Ruch, którego trajektoria należy do zbioru minimalnego zwartego jest rekurencyjny.

Dowód. Przypuśćmy, że f(p,I) należy do zbioru minimalnego zwartego Γ, zaś ruch f(p,t) nie jest rekurencyjny i obierzmy dowolny ciąg liczb dodatnich $(T_n) \to +\infty$. Wtedy istnieje takie $\varepsilon_0 > 0$, że dla dowolnej liczby naturalnej n można wskazać łuk $f(p_n, \langle -T_n, T_n \rangle)$ trajektorii $f(p,I)$ o „długości czasowej" równej $2T_n$, który nie aproksymuje trajektorii $f(p,I)$ z dokładnością ε_0. Istnieje więc punkt $q_n \in f(p,I)$ taki, że

$$q_n \notin S(f(p_n, \langle -T_n, T_n \rangle), \varepsilon_0)$$

to znaczy

$$\varrho(q_n, f(p_n,t)) \geq \varepsilon_0 \tag{5.6}$$

dla wszystkich $t \in \langle -T_n, T_n \rangle$.

Otrzymujemy więc dwa ciągi punktów (p_n) i (q_n) należących do trajektorii $f(p,I)$ zawartej w zbiorze zwartym Γ. Z ciągów tych można wybrać podciągi zbieżne, których wyrazy miałyby odpowiednio jednakowe numery. Aby nie komplikować oznaczeń załóżmy, że same ciągi (p_n) i (q_n) są zbieżne. Niech

$$\lim_{n\to\infty} p_n = p^* \quad , \quad \lim_{n\to\infty} q_n = q^*$$

Granice te należą do zbioru Γ, to znaczy $p^* \in \Gamma$ i $q^* \in \Gamma$, gdyż punkty te należą do Γ_p, zaś na mocy twierdzenia 5.4 jest $\Gamma_p = \Gamma$.

Ustalmy dowolną liczbę $t \in I$. Dla dostatecznie dużego n jest $t \in \langle -T_n, T_n \rangle$ i spełniona jest nierówność (5.6). Przechodząc w tej nierówności do granicy przy $n \to \infty$ otrzymujemy

$$\varrho(q^*, f(p^*,t)) \geq \varepsilon_0 \,.$$

Ponieważ nierówność ta ma miejsce dla dowolnego $t \in I$, więc mamy

$$\varrho(q^*, f(p^*, I)) \geq \varepsilon_0 \,.$$

Wobec tego jest również

$$\varrho(q^*, \Gamma_{p^*}) \geq \varepsilon_0 \,.$$

Mamy jednak $\Gamma_{p^*} = \Gamma$, gdyż $p^* \in \Gamma$, zaś Γ jest zbiorem minimalnym. Stąd wynika, że

$$\varrho(q^*, \Gamma) \geq \varepsilon_0$$

co jest sprzeczne z faktem, że $q^* \in \Gamma$.

c.n.d.

Twierdzenie 5.13. W przestrzeni zupełnej domknięcie trajektorii ruchu rekurencyjnego jest zbiorem minimalnym zwartym.
Dowód - wynika bezpośrednio z twierdzeń 5.8, 5.11 i 5.9.

Twierdzenie 5.14. Warunkiem koniecznym i wystarczającym na to, aby ruch stateczny w sensie Lagrange'a był rekurencyjny jest, aby ruch ten był prawie rekurencyjny.
Dowód. Konieczność warunku jest oczywista. W celu wykazania dostateczności załóżmy, że ruch f(p,t) jest L - stateczny i prawie rekurencyjny. Na mocy twierdzenia 5.11 zbiór Γ_p jest zbiorem minimalnym. Zbiór ten jest zwarty, gdyż ruch f(p,t) jest stateczny w sensie Lagrange'a. Wobec tego na mocy twierdzenia 5.12 ruch f(p,t) jest rekurencyjny. c.n.d.

5.4. Klasyfikacja ruchów statecznych w sensie Poisson'a. Ruchy pseudo-rekurencyjne.

Niech ruch f(p,t) będzie P^+- stateczny. Stwierdzenie to jest równoważne temu, że dla dowolnych $\varepsilon > 0$, $t_0 \in I$ i $q \in f(p,I)$ istnieje taka funkcja jednoznaczna $T=T(\varepsilon,t_0,q)>0$, że

$$\rho(f(q,\langle t_0,t_0+T\rangle),q)<\varepsilon \quad (5.7).$$

Nierówność tę można napisać również w następujących dwóch równoważnych postaciach

$$q\in S(f(q,\langle t_0,t_0+T\rangle),\varepsilon) \quad , \quad (5.8)$$

$$f(q,\langle t_0,t_0+T\rangle)\cap S(q,\varepsilon)\neq\emptyset \quad . \quad (5.9)$$

Zauważmy, że funkcja jednoznaczna $T(\varepsilon, t_0, q)$ nie jest wyznaczona jednoznacznie chociażby z tego względu, że jeśli nierówność (5.7) jest spełniona dla pewnej funkcji $T(\varepsilon, t_0, q)$, to jest ona spełniona również dla dowolnej funkcji

$$T_1(\varepsilon,t_0,q)\geqslant T(\varepsilon,t_0,q) \quad .$$

Możliwe są następujące przypadki
1) Funkcję T można dobrać w taki sposób, aby była ona nieza-

leżna od ε. Wykażemy, że ma to miejsce wtedy i tylko wtedy, gdy ruch $f(p,t)$ jest osobliwy.

Istotnie, gdy ruch $f(p,t)$ jest osobliwy, to istnieje taka liczba $\tau > 0$, że $f(q, \tau) = q$ dla dowolnego $q \in f(p,I)$. W tym przypadku możemy w nierówności (5.7) położyć $T = \tau$ niezależnie od ε, ponieważ jest wtedy

$$f(q, \langle t_0, t_0+\tau\rangle) = f(p,I)$$

oraz

$$\varrho(f(q, \langle t_0, t_0+T\rangle), q) = 0 \quad . \tag{5.10}$$

Załóżmy teraz, że w nierówności (5.7) funkcja T nie zależy od ε. Wtedy równość (5.10) jest spełniona dla dowolnych $t_0 \in I$. i $q \in f(p,I)$. W przypadku $t_0 > 0$ i $q = p$ otrzymujemy na mocy (5.10) równość

$$\varrho(f(p, \langle t_0, t_0+T\rangle), p) = 0 \quad .$$

Wobec tego istnieje taka liczba $\tau \in \langle t_0, t_0+T\rangle$, że ma miejsce związek $f(p, \tau) = p$, skąd wynika, że ruch $f(p,t)$ jest osobliwy.

2) Funkcję T można dobrać w taki sposób, aby była ona niezależna od t_0. Wykażemy, że ma to miejsce wtedy i tylko wtedy, gdy ruch $f(p,t)$ jest prawie rekurencyjny.

Istotnie w (5.8) można obrać funkcję T niezależną od t wtedy i tylko wtedy, gdy ruch $f(q,t)$ jest prawie rekurencyjny dla dowolnego punktu $q \in f(p,I)$.

Wykażemy teraz, że ma ~~miejsce~~ następujące twierdzenie.

Twierdzenie 5.15. Jeśli ruch $f(p,t)$ jest prawie rekurencyjny, to również ruch $f(q,t)$ jest prawie rekurencyjny dla dowolnego punktu $q \in f(p,I)$.

Dowód. Niech będzie dane $q = f(p,t_1)$ oraz $\varepsilon > 0$. Z warunku ciągłości funkcji $f(p,t)$ względem p wyznaczamy takie $\delta > 0$, że

$$\text{dla} \quad \varrho(r,p) < \delta \qquad \text{jest} \quad \varrho(f(r,t_1),q) < \varepsilon \quad .$$

Na podstawie tej wartości δ, wykorzystując warunek, że ruch $f(p,t)$ jest prawie rekurencyjny, znajdujemy odpowiednią liczbę $T(\delta) > 0$, to znaczy takie $T > 0$, że zachodzi nierówność

$$\rho(f(p,\langle t_0, t_0+T\rangle), p) < \delta$$

dla wszystkich t_0. Wtedy zgodnie z obraną wartością δ, nierówność (5.7) jest spełnioną dla wszystkich t_0.

3) Funkcję T można dobrać w taki sposób, aby była ona niezależna od punktu q. Takie ruchy nazywamy pseudo-rekurencyjnymi. (Szczerbakow - 1962 - 1967).

Twierdzenie 5.16. Każdy ruch pseudo-rekurencyjny jest stateczny w sensie Poisson'a.

Dowód. Jest oczywiste, że ma miejsce P^{+} stateczność. Natomiast P^{-}- stateczność wynika z nierówności

$$\rho(f(q, \langle -t_0-T, -t_0\rangle), q) \leqslant \varepsilon \tag{5.11}$$

która ma miejsce wraz z nierównością (5.7), dla dowolnego punktu $q \in f(p,I)$.

Istotnie, jeśli nierówność (5.7) ma miejsce dla dowolnego punktu $q \in f(p,I)$, to w przedziale

$$\langle t_0, t_0+T(t_0,\varepsilon)\rangle$$

istnieje taka liczba τ_0, że

$$\rho(f(q,\tau_0), q) < \varepsilon$$

następnie taka liczba τ_1, że

$$\rho(f(q, -\tau_0+\tau_1), f(q, -\tau_0)) < \varepsilon$$

i tak dalej, wreszcie taka liczba τ_n, że

$$\rho(f(q, -\tau_{n-1}+\tau_n), f(q, \tau_{n-1})) < \varepsilon \tag{5.12}$$

i tak dalej. Ponieważ ciąg (τ_n) jest ograniczony, więc możemy uważać go za ciąg zbieżny. Niech (τ_n) $\to \tau$. Wtedy jest

$$\tau \in \langle t_0, t_0+T\rangle .$$

Przechodząc w (5.12) do granicy przy $n \to \infty$ otrzymujemy

$$\rho(q, f(q, -\tau)) \leqslant \varepsilon .$$

Stąd wynika nierówność (5.11)

c.n.d.

4) Funkcję T można dobrać w taki sposób, aby była ona niezależna od t_0 i q. Wykażemy, że ma to miejsce wtedy i tylko wtedy, gdy ruch $f(p,t)$ jest rekurencyjny.

Istotnie jeśli w (5.8) funkcja T nie zależy od t_0 i q, to dowolny punkt $q \in f(p,I)$ znajduje się w ε - otoczeniu dowolnego łuku $f(q, \langle t_0, t_0+T\rangle)$ trajektorii $f(p,I)$, gdyż t_0 jest dowolne. Oznacza to, że

$$f(p,I) \subset S(f(q,\langle t_0, t_0+T\rangle), \varepsilon) \tag{5.13}$$

dla dowolnych $q \in f(p,I)$ i $t_0 \in I$. Stąd wynika, że ruch $f(p,t)$ jest rekurencyjny.

Na odwrót, jeśli ruch $f(p,t)$ jest rekurencyjny, to istnieje takie $T = T(\varepsilon) > 0$, że inkluzja (5.13) ma miejsce dla dowolnych $q \in f(p,I)$ i $t_0 \in I$. Wtedy, w szczególności ma miejsce inkluzja (5.8) dla $T = T(\varepsilon)$ oraz dowolnych $q \in f(p,I)$ i $t_0 \in I$.

Jest oczywiste, że każdy ruch rekurencyjny jest pseudorekurencyjny.

Twierdzenie 5.17. W domknięciu trajektorii ruchu pseudo-rekurencyjnego (lub rekurencyjnego) wszystkie ruchy są pseudorekurencyjne (lub rekurencyjne).

Dowód. Jeśli w nierówności (5.7) położyć $T = T(\frac{\varepsilon}{2}, t_0)$ (lub $T = T(\frac{\varepsilon}{2})$), to jest ona spełniona nie tylko dla wszystkich punktów $q \in f(p,I)$, lecz również dla wszystkich punktów $q \in \overline{\Gamma_p}$, gdyż jest wtedy

$$\rho(f(q,\langle t_0, t_0+T\rangle), q) \le \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

c.n.d.

Twierdzenie 5.18. Domknięcie trajektorii ruchu rekurencyjnego jest zbiorem minimalnym, złożonym z trajektorii rekurencyjnych.

Dowód. - wynika bezpośrednio z twierdzeń 5.8, 5.11 i 5.17

Twierdzenie 5.19. W domknięciu trajektorii ruchu prawie rekurencyjnego wszystkie ruchy są prawie rekurencyjne.

<u>Dowód</u>. Niech ruch $f(p,t)$ będzie prawie rekurencyjny i niech punkt $q \in \Gamma_p$. Weźmy dowolne $\varepsilon > 0$. Ponieważ $q \in \Gamma_p$ więc istnieje taki punkt $\bar{p} = f(p,\bar{t})$, że

$$\rho(\bar{p},q) < \frac{\varepsilon}{3} \qquad (5.14)$$

Na mocy twierdzenia 5.15 ruch $f(\bar{p},t)$ jest prawie rekurencyjny. Wobec tego istnieje takie $T(\frac{\varepsilon}{3}) > 0$, że

$$\rho(\bar{p}, f(\bar{p}, \langle t_0, t_0+T\rangle)) < \frac{\varepsilon}{3} \qquad (5.15)$$

dla dowolnego $t_0 \in I$.

Niech $t' \in I$. Wykorzystując twierdzenie 2.6, wyznaczamy dla punktu $f(q,t')$ i liczb $\frac{\varepsilon}{3}$ oraz $T(\frac{\varepsilon}{3})$ takie $\delta > 0$, że

$$\rho(f(r,t), f(q,t'+t)) < \frac{\varepsilon}{3}$$

dla

$$\rho(r, f(q,t')) < \delta$$

i dowolnego $t \in \langle 0,T\rangle$. Ponieważ $\Gamma_{\bar{p}} = \Gamma_p$ oraz $q \in \Gamma_p$ więc $f(q,t') \in \Gamma_{\bar{p}}$. Istnieje więc takie t_0, że

$$\rho(f(q,t'), f(\bar{p},t_0)) < \delta .$$

Na mocy (5.15) istnieje dla tej wartości t_0 takie $\tau \in \langle 0,T\rangle$ że

$$\rho(\bar{p}, f(\bar{p}, t_0+\tau)) < \frac{\varepsilon}{3} . \qquad (5.16)$$

Ponadto dla obranej liczby δ jest

$$\rho(f(q,t'+\tau), f(\bar{p},t_0+\tau)) < \frac{\varepsilon}{3} \qquad (5.17)$$

Na mocy (5.17), (5.16) i (5.14) mamy

$$\rho(f(q,t'+\tau), q) < \varepsilon .$$

Wobec tego jest

$$\rho(f(q,\langle t',t'+T\rangle), q) < \varepsilon$$

dla dowolnego $t' \in I$, skąd wynika, że ruch $f(q,t)$ jest prawie rekurencyjny.

c.n.d.

Twierdzenie 5.20. Domknięcie trajektorii ruchu prawie rekurencyjnego jest zbiorem minimalnym, złożonym z trajektorii prawie rekurencyjnych.
Dowód - wynika bezpośrednio z twierdzeń 5.11 i 5.19.

Twierdzenie 5.21. Warunkiem koniecznym i wystarczającym na to, aby ruch f(p,t) stateczny w sensie Lagrange'a był pseudo-rekurencyjny jest aby w Γ_p wszystkie ruchy były stateczne w sensie Poisson'a w kierunku dodatnim.
Dowód. Konieczność warunku wynika z twierdzeń 5.16 i 5.17. W celu wykazania dostateczności przypuśćmy, że L - stateczny ruch f(p,t) nie jest pseudo-rekurencyjny i obierzmy dowolny ciąg liczb dodatnich $(T_n) \to +\infty$. Istnieje wtedy takie $\varepsilon > 0$ i $t_0 \in I$, że dowolnej liczbie naturalnej n można przyporządkować taki punkt $q_n \in f(p,I)$, dla którego ma miejsce nierówność

$$\rho(f(q_n, \langle t_0, t_0+T_n \rangle), q_n) \geqslant \varepsilon \quad . \tag{5.18}$$

Na mocy L - stateczności ruchu f(p,t), ciąg (q_n) można uważać za zbieżny. Niech $(q_n) \to q$ gdzie $q \in \Gamma_p$. Wtedy z nierówności (5.18) wynika, że

$$\rho(f(q, \langle t_0, +\infty)), q) \geqslant \varepsilon$$

Nierówność ta wyklucza możliwość P^+- stateczności punktu q.
c.n.d.

Można również udowodnić twierdzenie analogiczne do twierdzenia 5.21, w którym zamiast P^+- stateczności, występuje P^-- stateczność.

Twierdzenie 5.22. Jeśli układ dynamiczny jest homomorficzny ze zwartą przestrzenią fazową R_1, to ruch pseudo-rekurencyjny przechodzi w ruch pseudo-rekurencyjny. Jeśli układ dynamiczny jest homomorficzny z zupełną przestrzenią fazową R_1, to ruch rekurencyjny przechodzi w ruch rekurencyjny.
Dowód. W przypadku ruchu pseudo-rekurencyjnego korzystamy z twierdzenia 5.21 i twierdzenia 3.13 oraz tego faktu, że przy homomorfiźmie, domknięcie zbioru zwartego w R_1 przechodzi w domknięcie jego obrazu, który jest zwarty w R_2.

W przypadku ruchu rekurencyjnego korzystamy z twierdzeń

5.13, 5.6 oraz 5.12.

Twierdzenie 5.23. Przy homomorfiźmie układów dynamicznych ruch prawie rekurencyjny przechodzi w ruch prawie rekurencyjny.

Dowód. Niech $\xi : R_1 \to R_2$ będzie odwzorowaniem ciągłym realizującym homomorfizm układu dynamicznego $g(p,t)$ w układ $h(x,t)$. Niech ruch $g(p,t)$ będzie prawie rekurencyjny i niech $x = \xi(p)$ oraz $\varepsilon > 0$. Wskutek ciągłości odwzorowania ξ istnieje takie $\eta > 0$, że dla $\rho(q,p) < \eta$ gdzie $p,q \in R_1$ jest spełniona nierówność

$$\rho(\xi(q), \xi(p)) < \varepsilon \quad . \tag{5.19}$$

Z warunku, że ruch $g(p,t)$ jest prawie rekurencyjny, możemy dla η znaleźć takie $T > 0$, że

$$p \in S(g(p, \langle t_0, t_0+T \rangle), \eta)$$

dla dowolnego $t_0 \in I$. Dla obranego η mamy

$$\xi(p) \in S(\xi(g(p, \langle t_0, t_0+T \rangle)), \varepsilon)$$

Na mocy twierdzenia 2.23 otrzymujemy

$$x \in S(h(x, \langle t_0, t_0+T \rangle, \varepsilon) \; .$$

Oznacza to, że ruch $h(x,t)$ jest prawie rekurencyjny. c.n.d.

5.5. Układ dynamiczny Bebutowa.

Przestrzenią Bebutowa nazywamy zbiór wszystkich funkcji $\varphi(x)$ ciągłych w przedziale $(-\infty, +\infty)$, w którym odległość jest określona wzorem

$$\rho(\varphi_1, \varphi_2) = \sup_{X>0} \min \left\{ \max_{|x|<X} |\varphi_2(x) - \varphi_1(x)|, \frac{1}{X} \right\} \tag{5.20}$$

Twierdzenie 5.24. Nierówność

$$\rho(\varphi_1, \varphi_2) \leqslant \varepsilon \tag{5.21}$$

ma miejsce wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\max_{|x| \leqslant \frac{1}{\varepsilon}} |\varphi_2(x) - \varphi_1(x)| \leqslant \varepsilon \tag{5.22}$$

Dowód. Niech będzie spełniona nierówność (5.21). Przypuśćmy, że $|\varphi_2(x_0)-\varphi_1(x_0)|>\varepsilon$ oraz $|x_0|\leqslant\frac{1}{\varepsilon}$. Wskutek ciągłości różnicy $\varphi_2-\varphi_1$ można przyjąć, że $|x_0|<\frac{1}{\varepsilon}$. Mamy wtedy

$$\min\left\{\max_{|x|<|x_0|}|\varphi_2(x)-\varphi_1(x)|,\ \frac{1}{|x_0|}\right\}>\varepsilon$$

więc tym bardziej jest

$$\rho(\varphi_1,\varphi_2)>\varepsilon$$

co jest sprzeczne z nierównością (5.21).

Załóżmy teraz, że jest spełniona nierówność (5.22). Weźmy dowolne $X>0$. Wtedy, jeśli $X\geqslant\frac{1}{\varepsilon}$, to mamy

$$\min\left\{\max_{|x|\leqslant X}|\varphi_2(x)-\varphi_1(x)|,\ \frac{1}{X}\right\}\leqslant\frac{1}{X}\leqslant\varepsilon$$

zaś jeśli $X\leqslant\frac{1}{\varepsilon}$, to mamy (uwzględniając nierówność (5.22))

$$\min\left\{\max_{|x|\leqslant X}|\varphi_2(x)-\varphi_1(x)|,\ \frac{1}{X}\right\}\leqslant\max_{|x|\leqslant\frac{1}{\varepsilon}}|\varphi_2(x)-\varphi_1(x)|\leqslant\varepsilon\ .$$

Wobec tego ma miejsce nierówność (5.21).

c.n.d.

Twierdzenie 5.25. Odległość $\rho(\varphi_n,\varphi)\to 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy ciąg $(\varphi_n(x))$ jest zbieżny do $\varphi(x)$ jednostajnie, w każdym przedziale skończonym.

Dowód - można przeprowadzić na podstawie twierdzenia 5.24.

Łatwo można stwierdzić, że przestrzeń R_u jest zupełna i ośrodkowa. Na przykład zbiór przeliczalny i gęsty w tej przestrzeni stanowi zbiór wszystkich wielomianów o współczynnikach wymiernych.

Zdefiniujmy w przestrzeni R_u układ dynamiczny $f_u(\varphi,t)$ kładąc

$$f_u(\varphi,t)=\psi\ , \tag{5.23}$$

gdzie

$$\psi(x)\equiv\varphi(x+t)\ . \tag{5.24}$$

Zbudowany w ten sposób układ dynamiczny nazywa się układem dynamicznym Bebutowa.

Zbudujmy ciąg dwustronny

$$\ldots, a_{-k}, \ldots, a_{-2}, a_{-1}, a_0, a_1, a_2, \ldots, a_k, \ldots \qquad (5.25)$$

w następujący sposób. Na wszystkich miejscach parzystych, kładziemy zera, to znaczy

$$a_{2m} = 0 \qquad \text{dla} \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Pozostałe, to znaczy nieparzyste miejsca zapełniamy następująco: na najbliższych względem a_0 wolnych miejscach (a_1 i a_{-1}) kładziemy jedność i następnie opuszczamy jedno wolne miejsce; na następnych dwóch miejscach znowu kładziemy jedność, opuszczamy jedno wolne miejsce i znowu na następnych dwóch miejscach kładziemy jedność i tak dalej (w obie strony). Z kolei, tak samo jak z jednością postępujemy z liczbą 2, następnie z liczbą 3 i tak dalej.

Kładąc $\varphi(k) = a_k$ dla wszystkich k całkowitych, dookreślamy funkcję $\varphi(x)$ na całej osi $(-\infty, +\infty)$ za pomocą interpolacji liniowej. Wykażemy, że ruch

$$f_u(\varphi, t) = \varphi(x+t) \qquad (5.26)$$

wyznaczony przez zbudowaną funkcję stanowiącą układ dynamiczny Bebutowa jest prawie rekurencyjny. Istotnie, niech a_{k_n} będzie pierwszą z liczb na prawo od a_0, równą n. Wtedy przedział

$$\langle n = a_{-k_n}, \ldots, a_{-2}, a_{-1}, a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{k_n} = n \rangle$$

powtarza się w ciągu (5.25) nieskończenie wiele razy w prawo i w lewo. Fakt ten stanowi, że punkt φ jest prawie rekurencyjny.

Zbadajmy teraz, jak na podstawie własności funkcji $\varphi \in R_u$, można wnioskować o trajektorii $f_u(\varphi, I)$ przechodzącej przez ten punkt.

<u>Twierdzenie 5.26.</u> Warunkiem koniecznym i wystarczającym na to, aby funkcja $\varphi \in R_u$ była punktem spoczynku w układzie dynamicznym Bebutowa, jest aby $\varphi(x) = \text{const}$.

<u>Twierdzenie 5.27.</u> Warunkiem koniecznym i wystarczającym na to, aby ruch $f_u(\varphi, t)$ w układzie dynamicznym Bebutowa był okresowy o okresie T, jest aby funkcja $\varphi(x)$ była okresowa o tym samym okresie.

<u>Twierdzenie 5.28.</u> Warunkiem koniecznym i wystarczającym na to, aby ruch $f_u(\varphi, t)$ w układzie dynamicznym Bebutowa był stateczny w sensie Lagrange'a, jest aby funkcja $\varphi(x)$ była ograniczona i jednostajnie ciągła na całej prostej nieskończonej.
<u>Dowód.</u> Niech ruch $f_u(\varphi, t)$ będzie L - stateczny. Rozważmy zbiór funkcji

$$\varphi(x \pm n) \quad , \quad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{5.27}$$

Wszystkie te funkcje należą do trajektorii $f_u(\varphi, I)$. Ponieważ ruch $f_u(\varphi, t)$ jest L - stateczny, więc zbiór Γ_φ jest zwarty. Wobec tego z dowolnego podciągu funkcji ze zbioru (5.27), można wybrać podciąg zbieżny w R_u, który zgodnie z twierdzeniem 5.25 jest w szczególności jednostajnie zbieżny w przedziale $\langle 0,1 \rangle$. Na mocy twierdzenia Arzeli zbiór funkcji (5.27) jest jednostajnie ograniczony i równociągły w przedziale $\langle 0,1 \rangle$. Wynika stąd, że funkcja $\varphi(x)$ jest ograniczona i jednostajnie ciągła na całej prostej liczbowej.

Załóżmy teraz, że funkcja $\varphi(x)$ jest ograniczona i jednostajnie ciągła na całej prostej liczbowej. Weźmy dowolny ciąg $(f(\varphi, t_n))$, to znaczy $(\varphi(x + t_n))$. Ciąg ten jest jednostajnie ograniczony i równociągły na całej prostej liczbowej. Na podstawie twierdzenia Arzeli, wybieramy z niego podciąg $(\varphi(x + t_n^{(1)}))$ jednostajnie zbieżny w przedziale $\langle -1,1 \rangle$. W analogiczny sposób z tego ciągu wybieramy podciąg $(\varphi(x + t_n^{(2)}))$ jednostajnie zbieżny w przedziale $\langle -2,2 \rangle$ i tak dalej. Ciąg diagonalny

$$(\varphi(x + t_n^{(n)}))$$

jest jednostajnie zbieżny w dowolnym przedziale skończonym, to znaczy ciąg $(f_u(\varphi, t_n^{(n)}))$ jest zbieżny w R_u. Wobec tego zbiór $f_u(\varphi, I)$ jest zwarty w R_u, zatem ruch $f_u(\varphi, t)$ jest L - stateczny.

c.n.d.

W przykładzie ruchu, w ramach układu dynamicznego Bebutowa, przedstawionego wzorami (5.25 i (5.26), funkcja $\varphi(x)$ była nieograniczona, wskutek czego ruch $f_u(\varphi, t)$ nie był stateczny w sensie Lagrange'a. Wobec tego na mocy twierdzenia 5.9 ruch ten nie może być rekurencyjny, jakkolwiek jest on prawie rekurencyjny.

Układ dynamiczny Bebutowa charakteryzuje się pewną uniwersalnością, gdyż szeroką klasę układów dynamicznych można odwzorować izomorficznie w ten układ. Zanim udowodnimy twierdzenie dotyczące tej własności układu Bebutowa, przeprowadźmy najpierw pewne rozważania przygotowawcze.

Twierdzenie 5.29. Dla każdej ograniczonej i ciągłej funkcji λ, zadanej na zbiorze domkniętym M przestrzeni metrycznej R, istnieje ciągła w całej przestrzeni R funkcja Λ, pokrywająca się z λ we wszystkich punktach zbioru M. Ponadto jeśli μ_0 jest kresem górnym funkcji $|\lambda|$ na M, to funkcję Λ można dobrać w taki sposób, że kres górny jej wartości bezwzględnej jest także równy μ_0 w całej przestrzeni R.

Często korzysta się z krótkiego sformułowania tego twierdzenia mówiąc, że każdą funkcję ciągłą, zadaną w domkniętym zbiorze przestrzeni R, można przedłużyć w sposób ciągły na całą przestrzeń R. Z tego względu twierdzenie 5.29 bywa nazywane krótko twierdzeniem o przedłużaniu.(*)

Niech R będzie zbiorem zwartym, zaś M zbiorem punktów spoczynku układu dynamicznego $f(p,t)$ zadanego w R. Załóżmy, że M jest homeomorficzny względem podzbioru F prostej rzeczywistej i niech

$$t = \lambda(p) \quad , \quad p \in M \quad , \quad t \in F$$

oznacza funkcję realizującą ten homeomorfizm. Oznaczmy przez $\Lambda(p)$ dowolną funkcję rzeczywistą ciągłą na R, pokrywającą się na zbiorze M z funkcją $\lambda(p)$, zaś przez Φ - zbiór wszystkich takich funkcji $\Lambda(p)$. Na podstawie twierdzenia 5.29 o przedłużaniu zbiór Φ jest niepusty, to znaczy $\Phi \neq \emptyset$. Jeśli przyjmiemy, że

$$\|\Lambda\| = \sup_{p \in R} |\Lambda(p)| \quad , \quad \rho(\Lambda_1, \Lambda_2) = \|\Lambda_1 - \Lambda_2\|$$

(*) П.С. Александров Введение в общую теорию множеств и функций. Гос. Изд. Тех.-Теорет. Лит. Москва, Ленинград 1948 г. - стр. 285.

to przestrzeń Φ staje się przestrzenią metryczną zupełną i ośrodkową.

Wprowadzamy oznaczenia dla produktów kartezjańskich

$$R \times R = R^*, \quad M \times M = M^*$$

oraz następujące oznaczenia

$$\Delta^* = \{(p,p) : p \in R\}; \quad D^* = R^* \setminus (M^* \cup \Delta^*).$$

Mówimy, że funkcja $\Lambda \in \Phi$ rozdziela ruchy na zbiorze $U^* \subset R^*$, jeśli dla dowolnego punktu $(p,q) \in U^*$ istnieje takie $t \in I$, że

$$\Lambda(f(p,t)) \neq \Lambda(f(q,t)).$$

Zbiór wszystkich funkcji $\Lambda \in \Phi$ rozdzielających ruchy na zbiorze U^* oznaczamy przez $\Phi(U^*)$

Twierdzenie 5.30. Dla każdego zbioru $U^* \subset R^*$ zbiór $\Phi(\overline{U}^*)$ jest otwarty w Φ.

Dowód. Niech $U^* \subset R^*$, zaś $\Lambda_0 \in \Phi(\overline{U}^*)$. Oznaczmy

$$d(p,q) = \sup_{t \in I} |\Lambda_0(f(p,t)) - \Lambda_0(f(q,t))|.$$

Wtedy dla dowolnego punktu $(p,q) \in \overline{U}^*$ jest $d(p,q) > 0$. Wykażemy, że istnieje taka liczba $\delta_0 > 0$, że $d(p,q) \geqslant \delta_0$, dla wszystkich punktów $(p,q) \in \overline{U}^*$. Przypuśćmy, że tak nie jest, to znaczy przypuśćmy, że istnieje taki ciąg $((p_n,q_n))$ punktów z $\overline{U}^*$, że $(d(p_n,q_n)) \to 0$. Ponieważ przestrzeń R jest zwarta, więc możemy uważać, że ciąg $((p_n,q_n))$ jest zbieżny. Niech $((p_n,q_n)) \to (p_0,q_0)$.

Ponieważ dla dowolnego $t \in I$ jest

$$|\Lambda_0(f(p_n,t)) - \Lambda_0(f(q_n,t))| \leqslant d(p_n,q_n)$$

więc w granicy otrzymujemy, dla każdego $t \in I$

$$\Lambda_0(f(p_0,t)) = \Lambda_0(f(q_0,t)).$$

Rezultat ten jest sprzeczny z tym, że $(p_0,q_0) \in \overline{U}^*$, zaś $\Lambda_0 \in \Phi(\overline{U}^*)$.

Łatwo zauważyć, że jeśli w Φ weźmiemy kulę $S(\Lambda_0, \frac{\delta_0}{2})$, to

$$S(\Lambda_0, \frac{\delta_0}{2}) \subset \Phi(\bar{U}^*) \quad .$$

Wobec tego zbiór $\Phi(\bar{U}^*)$ jest otwarty w Φ.

c.n.d.

Twierdzenie 5.31. Dla dowolnego punktu $(p_0, q_0) \in D^*$ istnieje w D^* takie otoczenie U^* tego punktu, że $\Phi(\bar{U}^*)$ jest gęsty w Φ.

Dowód. Ponieważ $(p_0, q_0) \notin M^* \cup \Delta^*$, więc można uważać, że $p_0 \notin M$ i $q_0 \neq p_0$. Oznaczmy przez U takie otoczenie punktu p_0, że

$$\bar{U} \cap (M \cup q_0) = \emptyset \quad .$$

Ponieważ p nie jest punktem spoczynku, więc istnieje takie $\eta > 0$, że $f(p_0, \eta) \neq p_0$ oraz

$$f(p_0, \langle 0, \eta \rangle) \cap f(R \setminus U, \langle 0, \eta \rangle) = \emptyset \quad .$$

Obierzmy takie otoczenie W punktu p_0 i liczbę $\delta \in (0, \eta)$ dla których zbiory

$$A = f(\bar{W}, \langle 0, \delta \rangle) \quad ,$$

$$B = f(\bar{W}, \langle \eta, \eta + \delta \rangle) \quad ,$$

$$C = f(R \setminus U, \langle 0, \eta + \delta \rangle)$$

są parami rozłączne.

Połóżmy

$$u(p) = \frac{\varrho(p, A \cup C)}{\varrho(p, A \cup C) + \varrho(p, B)} \quad .$$

Funkcja $u(p)$ jest ciągła na zbiorze R oraz

$$0 \leqslant u(p) \leqslant 1 \quad \text{w} \quad R \quad ,$$

$$u(p) = 0 \quad \text{na} \quad A \cup C \quad ,$$

$$u(p) = 1 \quad \text{na} \quad B \quad .$$

Ponieważ $M \subset R \setminus U \subset C$, więc na zbiorze M funkcja u(p) = 0. Połóżmy

$$\vartheta(p) = \int_0^{\eta} u(f(p,s))ds \qquad , \qquad p \in R \quad .$$

Łatwo wykazać, że funkcja $\vartheta(p)$ jest ciągła na R oraz

$$0 \leq \vartheta(p) \leq \eta \qquad w \qquad R$$

$$\vartheta(f(p,t)) = \vartheta(p) + t \qquad \text{gdy} \quad p \in \overline{W} \ , \quad 0 \leq t \leq \delta \qquad (5.28)$$

$$\vartheta(f(p,t)) = 0 \qquad \text{gdy} \quad p \in R \setminus U \ , \quad 0 \leq t < \delta \qquad (5.29$$

$$\vartheta(f(p,t)) = 0 \qquad \text{gdy} \quad p \in M \ , \quad t \in I \quad .$$

Sprawdźmy na przykład związek (5.28). Mamy

$$\vartheta(f(p,t)) = \int_0^{\eta} u(f(p,t+s))ds = \int_t^{t+\eta} u(f(p,s))ds =$$

$$= \int_0^{\eta} u(f(p,s))ds + \int_{\eta}^{\eta+t} u(f(p,s))ds - \int_0^{t} u(f(p,s))ds \quad .$$

Pierwszy składnik po prawej stronie jest równy $\vartheta(p)$, drugi składnik jest równy t, gdyż u(p) = 1 na B, zaś trzeci składnik jest równy zeru, gdyż u(p) = 0 na A. Wobec tego ma miejsce związek (5.28).

Połóżmy wreszcie

$$U^* = W \times (R \setminus \overline{U}) \quad .$$

Jest widoczne, że U^* jest otoczeniem punktu (p_0, q_0) w D^* oraz że $\overline{U}^* = \overline{W} \times (R \setminus U)$. Wykażemy, że zbiór $\Phi(\overline{U}^*)$ jest gęsty w Φ.

Niech $\Lambda \in \Phi$ oraz niech $\varepsilon > 0$. Oznaczmy

$$\Lambda_\alpha(p) = \frac{1}{\alpha}\int_0^{\alpha} \Lambda(f(p,s))ds$$

i wyznaczmy takie $\alpha > 0$, że

$$\rho(\Lambda, \Lambda_\alpha) < \frac{\varepsilon}{2} \qquad (5.30)$$

Jest widoczne, że $\Lambda_\alpha(p)=\Lambda(p)=\lambda(p)$ na zbiorze M, więc $\Lambda_\alpha \in \Phi$. Ponieważ jest

$$\frac{\partial}{\partial t}\Lambda_\alpha(f(p,t)) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{\alpha}\int_t^{t+\alpha}\Lambda(f(p,s))ds\right) =$$

$$=\frac{1}{\alpha}[\Lambda(f(p,t+\alpha)) - \Lambda(f(p,t))]$$

wobec tego ma miejsce nierówność

$$\left|\frac{\partial}{\partial t}\Lambda_\alpha(f(p,t))\right| \leqslant \frac{2\|\Lambda\|}{\alpha} \tag{5.31}$$

dla każdego $t \in I$.

Obierzmy liczby całkowite n i m w taki sposób, aby spełnione były nierówności.

$$m > \frac{2}{\varepsilon} \tag{5.32}$$

$$n > \max\left(\frac{4m\|\Lambda\|}{\alpha}, \frac{\pi}{\delta}\right) \tag{5.33}$$

Połóżmy

$$g = \Lambda_\alpha + \frac{1}{m}\sin n\vartheta$$

Jest widoczne, że $g \in \Phi$, gdyż $\vartheta|_M = 0$. Ponadto na mocy (5.30) i (5.32) jest

$$\|\Lambda - g\| \leqslant \|\Lambda - \Lambda_\alpha\| + \frac{1}{m} < \varepsilon$$

Pozostaje wykazać, że $g \in \Phi(\bar{U}^*)$. Mamy

$$\begin{aligned}\left|\frac{\partial}{\partial t}g(f(p,t))\right| &\geqslant \left|\frac{\partial}{\partial t}\frac{1}{m}\sin[n\vartheta(f(p,t))]\right| - \left|\frac{\partial}{\partial t}\Lambda_\alpha(f(p,t))\right| \geqslant \\ &\geqslant \left|\frac{n}{m}\cos[n\vartheta(f(p,t))]\frac{\partial}{\partial t}\vartheta(f(p,t))\right| - \frac{2\|\Lambda\|}{\alpha}\end{aligned} \tag{5.34}$$

Ponieważ na mocy (5.33) jest $\frac{\pi}{n} < \delta$, wobec tego zgodnie z (5.28), dla dowolnego $p \in \bar{W}$ istnieje co najmniej jedno takie $t \in (0,\delta)$, że

$$n\vartheta(f(p,t)) \equiv 0 .$$

Dla tych p i t otrzymujemy z (5.34) (uwzględniając (5.28)) nierówność

$$\left|\frac{\partial}{\partial t} g(f(p,t))\right| > \frac{n}{m} - \frac{2\|\Lambda\|}{\alpha} > \frac{2\|\Lambda\|}{\alpha} . \qquad (5.35)$$

Z drugiej strony, zgodnie z (5.29) dla dowolnych $q \in R\setminus U$ oraz $0 < t < \delta$ jest

$$g(f(q,t)) = \Lambda_\alpha(f(q,t)) .$$

Z tej równości oraz z (5.31) wynika, że

$$\left|\frac{\partial}{\partial t} g(f(q,t))\right| \leqslant \frac{2\|\Lambda\|}{\alpha} \qquad (5.36)$$

dla dowolnych $q \in R\setminus U$ oraz $0<t<\delta$.

Na mocy (5.35) i (5.36), dla dowolnych $p \in \overline{W}$ i $q \in R \setminus U$ istnieje takie $t \in (0,\delta)$, że

$$\frac{\partial}{\partial t} g(f(p,t)) \neq \frac{\partial}{\partial t} g(f(q,t)) .$$

Wobec tego $g \in \Phi(\overline{U}^*)$. c.n.d.

Twierdzenie 5.32. Jeśli przestrzeń R jest zwarta oraz zbiór M punktów spoczynku układu dynamicznego f(p,t) jest homeomorficzny z podzbiorem prostej rzeczywistej I, zaś λ jest określoną na M ciągłą funkcją rzeczywistą realizującą ten homeomorfizm, to rodzina funkcji $\Phi(R^*\setminus\Delta^*)$ wyznaczona za pomocą λ jest niepusta.

Dowód. Na mocy twierdzenie 5.31, dla każdego punktu $(p_0,q_0) \in D^*$ istnieje w zbiorze D^* takie otoczenie U^*, że zbiór $\Phi(\overline{U}^*)$ jest gęsty w Φ. Suma tych wszystkich otoczeń, tworzy zbiór D^*. Ponieważ zbiór D^* jest metryczną przestrzenią ośrodkową, więc w rodzinie tych otoczeń istnieje taki ciąg (U_n^*), że

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} U_n^* = D^* .$$

Jest tak dlatego, że dla każdej rodziny podzbiorów otwartych zadanych w przestrzeni metrycznej ośrodkowej istnieje rodzina zbiorów przeliczalnych (lub skończonych), których suma jest taka sama jak suma zbiorów danej rodziny wyjściowej(ж).

Na mocy twierdzenia 5.30 każdy zbiór $\Phi(\overline{U}_n^*)$ jest otwarty w Φ. Ponieważ zbiór Φ jest zupełny, więc mamy

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \Phi(\overline{U}_n^*) \neq \emptyset .$$

Jest tak dlatego, że jeśli każdy zbiór spośród przeliczalnej rodziny zbiorów otwartych przestrzeni metrycznej zupełnej R jest gęsty w R, to ich przecięcie jest także gęste w R.

Jest widoczne, że

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} \Phi(\overline{U}_n^*) \subset \Phi(R^* \setminus \Delta^*)$$

wobec czego $\Phi(R^* \setminus \Delta^*) \neq \emptyset$. c.n.d.

Możemy teraz przystąpić do wyjaśnienia charakteru uniwersalności układu dynamicznego Bebutowa. W tym celu udowodnimy następujące twierdzenie.

Twierdzenie 5.33. Warunkiem koniecznym i wystarczającym na to, aby układ dynamiczny f(p,t) zadany w przestrzeni zwartej R, był izomorficzny z pewnym podukładem układu dynamicznego Bebutowa jest, aby zbiór punktów spoczynku układu dynamicznego f(p,t) był homeomorficzny względem pewnego podzbioru prostej I.

Dowód. Konieczność warunku wynika z twierdzenia 5.26, gdyż zbiór stałych w przestrzeni Bebutowa jest homeomorficzny względem prostej I.

W celu wykazania, że warunek ten jest również dostateczny, przyjmijmy, że R jest przestrzenią zwartą, zbiór M punktów spoczynku układu dynamicznego f(p,t) jest homeomorficzny względem podzbioru prostej I, zaś λ jest funkcją rzeczywistą ciągłą, określoną na M, realizującą ten homeomorfizm. Na mocy twierdzenia 5.32 istnieje funkcja $\Lambda \in \Phi(R^* \setminus \Delta^*)$.

Oznaczmy przez σ odwzorowanie przestrzeni R w przes-

(ж) W.Kołodziej Analiza Matematyczna PWN 1978 r. str.84

trzeń Bebutowa R_u

$$\varphi = \mathfrak{S}(p)$$

które ma następującą własność

$$\varphi(t) = \Lambda(f(p,t)) .$$

Jest widoczne, że $\mathfrak{S}$ jest wzajemnie jednoznacznym i ciągłym odwzorowaniem R w R_u. Ponieważ przestrzeń R jest zwarta więc $\mathfrak{S}$ jest homeomorfizmem R na podzbiór $\mathfrak{S}$ (R) przestrzeni R_u. Połóżmy

$$\psi = \mathfrak{S}(f(p,\tau)) .$$

Zgodnie z określeniem odwzorowania $\mathfrak{S}$ mamy

$$\psi(t) = \Lambda(f(p, t+\tau)) .$$

Wobec tego jest

$$\psi = f_u(\varphi, \tau)$$

to znaczy

$$\mathfrak{S}(f(p,\tau)) = f_u(\mathfrak{S}(p), \tau) .$$

Zatem $\mathfrak{S}$ realizuje izomorfizm układu dynamicznego f(p,t) w podukład układu dynamicznego Bebutowa.

c.n.d.

Literatura

(podstawowa - wykorzystana dla napisania niniejszego opracowania)

1. Aleksandrow P.S. Wprowadzenie do ogólnej teorii zbiorów i funkcji (w języku rosyjskim) , 1948
2. Barbaszin E.A. Wprowadzenie do teorii stateczności (w języku rosyjskim) , 1967
3. Gutowski R. Równania różniczkowe zwyczajne WNT 1971
4. Jacobs K. Einige Grundbegriffe der topologischen Dynamik Math.-Phys.Semesterber 14,2 (1967) ,129-150
5. Kołodziej W.Analiza matematyczna PWN 1978
6. Kuratowski K. Wstęp do teorii mnogości i topologii (wyd.6) PWN 1972
7. Lusternik L.A.,Sobolew W.I Elementy analizy funkcjonalnej (w języku polskim - tłumaczenie z języka rosyjskiego) PWN 1959
8. Niemyckij W.W. Stiepanow W.W. Jakościowa teoria równań różniczkowych (w języku rosyjskim) 1949
9. Sybirskij K.S. Wprowadzenie do dynamiki topologicznej (w języku rosyjskim) , 1970
10. Zubow W.J. Stateczność ruchu (w języku rosyjskim),1973

Szersze informacje literaturowe można znaleźć w pracy Gottschalk W.H. Bibliography for topological dynamics (second edition) Wesleyan Univ. 1966 , 1 - 76

Spis treści