Teoretyczne wyznaczenie wpływu siły ciężkości na odkształcanie się prętów wyciąganych lub ściskanych w kierunku długości

przez

Dra Edwarda Skibę
Profesora Fizyki matem. w Uniw. Jagiellońskim.

Jeżeli pręt walcowego kształtu poddamy ciągnieniu w kierunku długości, to zachodzące przytém odkształcenia w ogólności muszą być takie, żeby siły działające na masę wraz z wzbudzonemi siłami sprężystości utrzymywały pojedyńcze elementy wewnątrz ciała w równowadze, i żeby przy powiérzchni ciała siły sprężystości były równemi i wprost przeciwnemi siłom zewnętrznym, działającym na odpowiednie elementy powierzchni.

Zadanie to zostało dawno już rozwiązaném, ale bez uwzględnienia wpływu siły ciężkości; wyznaczono odkształcenia odpowiadające tylko siłom działającym na powierzchnie, uważając pręt za nieciężki.

Sądzę więc za pożyteczne podać rozwiązanie tego samego zadania ale z jednoczesném uwzględnieniem siły ciężkości; rozwiązanie w tak ogólniejszém założeniu nie przedstawia zresztą żadnych zbytecznych trudności, a prowadzi jednak do ciekawych wypadków.

Jeżeli pręt o przekroju prostokątnym ciągniony w kierunku długości, odniesiemy do osi współrzędnych prostokątnych, których początek przypada w środku jednego przekroju końcowego, oś Z-ów idzie w kierunku długości, a osie X-ów i Y-ów są równoległe do odpowiednich boków prostokątnego przekroju; to przesunięcia osiowe u, v, w któregokolwiek punktu x, y, z, pręta uważanego za nieciężki dają równania (1):

$$u = ax, \quad v = ay, \quad w = bz,$$

$$\frac{a}{b} = -\frac{1}{2 + \frac{k}{K}}, \quad b = \frac{P}{s}\,q, \quad q = \frac{1 + \frac{2K}{k}}{k + 3K}; \tag{1}$$

gdzie P znaczy wielkość siły ciągnącéj pręt, s pole przekroju pręta, q zamiennik sprężystości, a k i K są stałémi współczynnikami Cauchego, wchodzącémi do wyrażeń na siły sprężystości dla ciał jednorodnych bezkierunkowych.

Odkształcenia dane przez wzory (1) nie służą dla pręta ciężkiego, bo nie czynią zadość warunkom równowagi ciała sprężystego, podlegającego działaniu siły ciężkości. Odkształcenia dla pręta ciężkiego muszą więc być inne niż odkształcenia dane przez wzory (1); dadzą się jednak łatwo wywnioskować ze znanych wzorów (1), — i z warunków działania siły ciężkości.

Weźmy pod uwagę pręt prostokątnego, jednakowego przekroju, w położeniu pionowém ciągniony u góry i u dołu przez siły pionowe. Biorąc początek współrzędnych w górnym końcu pręta w środku przekroju, oś z-ów w kierunku osi pręta, a osie x-ów i y-ów równolegle od boków przekroju prostokątnego; piérwsze przypuszczenie jakie o odkształceniach pręta ciężkiego się nam nasuwa jest, że dla pręta ciężkiego a i b we wzorach (1) należy uważać jako zależne od z-ów.

Przyjmując, że a i b są funkcyjami z-ów mieć będziemy:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = a, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = o, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = x\,\frac{da}{dz},$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = o, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = a, \quad \frac{\partial v}{\partial z} = y\,\frac{da}{dz},$$

$$\frac{\partial w}{\partial x} = o, \quad \frac{\partial w}{\partial y} = o. \quad \frac{\partial w}{\partial z} = b + z\,\frac{db}{dz}.$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = \theta = 2a + b + z\,\frac{db}{dz}. \tag{2}$$

Warunki równowagi dla elementów wewnętrznych ciała ciężkiego sprężystego, jednorodnego i bezkierunkowego w osiach współrzędnych prostokątnych, których oś z-ów dodatna ma kierunek pionowy na dół są:

$$(k+2K)\,\frac{\partial\theta}{\partial x} + k\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) = o,$$

$$(k+2K)\,\frac{\partial\theta}{\partial y} + k\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right) = o,$$

$$(k+2K)\,\frac{\partial\theta}{\partial z} + k\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right) + 2p = o, \tag{3}$$

gdzie p znaczy ciężar jednostki objętości pręta.

Podług wzorów (2) znajdziemy w naszym przypadku:

$$\frac{\partial\theta}{\partial x}=o,\ \frac{\partial\theta}{\partial y}=o,\ \frac{\partial\theta}{\partial z}=2\left(\frac{da}{dz}+\frac{db}{dz}\right)+z\,\frac{d^2b}{dz^2};$$

$$\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2u}{\partial z^2}=x\,\frac{d^2a}{dz^2},$$

$$\frac{\partial^2v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2v}{\partial y^2}+\frac{\partial^2v}{\partial z^2}=y\,\frac{d^2a}{dz^2},$$

$$\frac{\partial^2w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2w}{\partial y^2}+\frac{\partial^2w}{\partial z^2}=2\,\frac{db}{dz}+z\,\frac{d^2b}{dz^2}$$

a wprowadzając te wartości do równań (3) wypadnie:

$$\left.\begin{array}{l} k\,x\,\dfrac{d^2a}{dz^2}=o, \quad k\,y\,\dfrac{d^2a}{dz^2}=o, \\ p+(k+2K)\dfrac{da}{dz}+\left(2\dfrac{db}{dz}+z\,\dfrac{d^2b}{dz^2}\right)(k+K)=o \end{array}\right\}. \quad (4)$$

Równaniom (4) stanie się zadość we wszystkich punktach ciała jeżeli będzie:

$$\frac{d^2a}{dz^2}=o,\ \frac{d^2b}{dz^2}=o,\ p+(k+2K)\,\frac{da}{dz}+2\,(k+K)\,\frac{db}{dz}=o$$

czyli:

$$a=a_1+a_2z,\quad b=b_1+b_2z, \qquad (5)$$

$$p+a_2\,(k+2K)+2\,(k+K)\,b_2=o, \qquad (6)$$

gdzie a_1, a_2, b_1, b_2 są ilościami stałemi dowolnemi, połączonemi ze sobą związkiem (6).

Tak więc warunki równowagi elementów wewnętrznych uważanego pręta wymagają, żeby w założeniu powyższém było:

$$u=(a_1+a_2z)\,x,$$

$$v=(a_1+a_2z)\,y,$$

$$w=(b_1+b_2z)\,z, \qquad (7)$$

i żeby był sprawdzonym związek (6).

Idzie teraz o to, czy odkształcenia (7) sprawdzać mogą warunki odnoszące się do powierzchni pręta.

Ażeby się o tém przekonać, wyprowadźmy wyrażenia na siły sprężystości odpowiadające odkształceniom (7).

Podług znanych zasad sprężystości mamy ogólnie:

$$S_{xx} = k\frac{\partial u}{\partial x} + K\theta, \quad S_{yy} = k\frac{\partial v}{\partial y} + K\theta,$$

$$S_{zz} = k\frac{\partial w}{\partial z} + K\theta,$$

$$S_{xy} = \frac{1}{2}k\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right), \quad S_{xz} = \frac{1}{2}k\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right),$$

$$S_{yz} = \frac{1}{2}k\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right).$$

W naszym przypadku wypadnie więc:

$$S_{xx} = (k+2K)\,a_1 + Kb_1 + z\{(k+2K)a_2 + 2Kb_2\},$$

$$S_{yy} = (k+2K)\,a_1 + Kb_1 + z\{(k+2K)a_2 + 2Kb_2\},$$

$$S_{zz} = kb_1 + 4Ka_1 + 2z\,(b_2k + 2ka_2),$$

$$S_{xy} = o, \quad S_{xz} = \frac{1}{2}ka_2x, \quad S_{yz} = \frac{1}{2}ka_2y. \tag{8}$$

Warunki równowagi odnoszące się do powierzchni pręta wymagają, żeby dla bocznych ścian siły sprężystości były zerami, i żeby dla przekroju końcowego i początkowego siły sprężystości były normalnemi $\frac{P_1}{s}$ i $\frac{P_0}{s}$.

A więc jeżeli A i B oznaczają długości boków przekroju pręta równoległych od osi *Xów* i *Yów*, wtedy

dla $x = \pm\frac{A}{2}$ powinno być: $S_{xx} = o$, $S_{xy} = o$, $S_{xz} = o$,

dla $y = \pm\frac{B}{2}$ „ $S_{yy} = o$, $S_{yx} = o$, $S_{yz} = o$, dla $z = o$, powinno być $S_{zz} = \frac{Po}{s}$, $S_{zx} = o, S_{zy} = o$,

dla $z = L$, „ $S_{zz} = \frac{P_1}{s}$, $S_{zx} = o$, $S_{zy} = o$. (9)

gdzie L znaczy długość pręta.

Wszystkim warunkom (9) możnaby uczynić zadość z wyłączeniem jednak warunków $S_{xz} = o$ i $S_{zy} = o$. Spełnienie warunków

$$S_{xz} = o, \quad S_{zy} = o,$$

wymagałoby, żeby było $a_2 = o$, co znowu pociągnęłoby za sobą i $b_2 = o$, a w takim razie związek (6) nie mógłby być sprawdzonym.

To znaczy, że odkształcenia (7) nie odpowiadają stanowi równowagi uważanego pręta.

Żeby otrzymać odkształcenia odpowiadające stanowi równowagi pręta, trzeba wzory (7) zmodyfikować tak, iżby bez naruszenia możności sprawdzenia równań (3) stawało się zadość i warunkom (9).

Z tego cośmy dotychczas przerobili łatwo spostrzedz, że we wzorach (7) trzeba tylko zamiast $w = (b_1 + b_2 z)z$ położyć $w = (b_1 + b_2 z)z + c(x^2 + y^2)$, a już trudność jednoczesnego spełnienia równań (3) i warunków (9) zniknie.

Jakoż w założeniu:

$$\left.\begin{aligned} u &= (a_1 + a_2 z)x, \\ v &= (a_1 + a_2 z)y, \\ w &= (b_1 + b_2 z)z + c\,(x^2 + y^2) \end{aligned}\right\} \quad (10)$$

znajdziemy:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = a_1 + a_2 z, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = o, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = a_2 x,$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = o, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = a_1 + a_2 z, \quad \frac{\partial v}{\partial z} = a_2 y,$$

$$\frac{\partial w}{\partial x} = 2cx, \quad \frac{\partial w}{\partial y} = 2cy, \quad \frac{\partial w}{\partial z} = b_1 + 2b_2 z,$$

$$\theta = 2a_1 + b_1 + 2(a_2 + b_2)z;$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = o, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = o, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = o \quad \Delta^2 u = o,$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = o, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = o, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = o, \quad \Delta^2 v = o,$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 2c, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 2c, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} = 2b_2, \quad \Delta^2 w = 2(2c + b_2)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial x} = o, \quad \frac{\partial \theta}{\partial y} = o, \quad \frac{\partial \theta}{\partial z} = 2(a_2 + b_2).$$

$$S_{xx} = (k+2K)a_1 + Kb_1 + \{(k+2K)a_2 + 2Kb_2\} z,$$
$$S_{yy} = (k+2K)a_1 + Kb_1 + \{(k+2K)a_2 + 2Kb_2)\} z,$$
$$S_{zz} = (k+K)b_1 + 2Ka_1 + \{2(k+K)b_2 + 2Ka_2\} z,$$
$$S_{xy} = o, \quad S_{xz} = k\left(\frac{1}{2}a_2 + c\right)x, \quad S_{yz} = k\left(\frac{1}{2}a_2 + c\right)y.$$

Równania równowagi (3) sprowadzają się teraz do związku:

$$(k+2K)(a_2 + b_2) + k(2c + b_2) + p = o; \tag{11}$$

a warunki (9) odnoszące się do powierzchni pręta przyjmą kształt:

$$(k + 2K)\,a_1 + Kb_1 = o,$$
$$(k + 2K)\,a_2 + 2Kb_2 = o,$$
$$c = -\frac{1}{2}a_2$$

$$(k+K)b_1 + 2Ka_1 + \{2kb_2 + 2K(a_2 + b_2)\}\,L = \frac{P_1}{s},$$

$$(k + K)b_1 + 2Ka_1 = \frac{P_0}{s}; \tag{12}$$

gdzie L znaczy długość, s pole przekroju pręta, P_1 siłę ciągnącą pręt na dole, a P_0 siłę ciągnącą pręt na górze.

Związki (11) i (12) możemy napisać w kształcie:

$$a_1 = -\frac{K}{k+2K}b_1,$$

$$a_2 = -\frac{2K}{k+2K}b_2,$$

$$c = \frac{1}{2}\frac{2K}{k+2K}b_2,$$

$$\left(k+K-\frac{2K^2}{k+2K}\right)b_1 + 2\left\{k+K-\frac{2K^2}{k+2K}\right\}b_2 L = \frac{P_1}{s},$$

$$\left\{k+K-\frac{2K^2}{k+2K}\right\}b_1 = \frac{P_0}{s},$$

$$(k+2K)\left(1-\frac{2K}{k+2K}\right)b_2 + k\left\{\frac{2K}{k+2K}+1\right\}b_2 + p = o,$$

czyli:

$$a_1 = -\frac{K}{k+2K}b_1,$$

$$a_2 = -\frac{2K}{k+2K}b_2,$$

$$c = \frac{1}{2}\frac{2K}{k+2K}b_2,$$

$$b_1 + 2b_2 L = \frac{P_1}{s}\left\{\frac{k+2K}{k^2+3kK}\right\},$$

$$b_1 = \frac{P_0}{s}\left(\frac{k+2K}{k^2+3kK}\right),$$

$$2\frac{k(k+3K)}{k+2K}b_2 + p = o \qquad (13)$$

Stąd otrzymamy:

$$b_2 = -\frac{1}{2}p\frac{(k+2K)}{(k^2+3kK)},$$

$$b_1 = \frac{P_1}{s}\frac{k+2K}{k^2+3kK} + Lp\frac{k+2K}{k^2+3kK} = \frac{P_0}{s}\frac{k+2K}{k^2+3kK}$$

$$c = -\frac{p}{2}\frac{K}{k^2+3kK},\quad a_2 = p\frac{K}{k^2+3kK},$$

$$a_1 = -\frac{P_1}{s}\frac{K}{k^2+3kK} - pL\frac{K}{k^2+3kK}.$$

Wprowadzając dla skrócenia oznaczenia:

$$\frac{k+2K}{k^2+3kK} = q_1,\quad \frac{K}{k^2+3kK} = q_2,\ psL = P',\qquad (14)$$

z powyższego znajdziemy:

$$a_1 = -q_2\left(\frac{P_1+P'}{s}\right),\ b_1 = q_1\left(\frac{P_1+P'}{s}\right)$$

$$a_2 = q_2p,\ b_2 = -q_1\frac{p}{2},\quad c = -q_2\frac{p}{2},$$

$$P_1 + P' = P_0.\qquad (15)$$

Tak więc spełnionemi będą warunki równowagi dla pręta sprężystego ciężkiego, wyciąganego na dole przez siłę P_1, na górze przez siłę P_0, jeżeli odkształci się podług wzorów:

$$u = -q_2.\left(\frac{P_1+P'}{s}\right)x + q_2pxz,$$

$$v = -q_2\left(\frac{P_1+P'}{s}\right)y + q_2pyz,\qquad (16)$$

$$w = q_1\left(\frac{P_1+P'}{s}\right)z - q_1\frac{p}{2}z^2 - q_2\frac{p}{2}(x^2+y^2),$$

a jeżeli będzie

$$P_0 - P_1 = P',$$

gdzie q_1, q_2 P' mają wartości wyznaczone przez wyrażenia (14). Z ostatniego wyrażenia (14) widzimy, że P' znaczy całkowity ciężar uważanego pręta.

Równania (16) dają nam przesunięcia osiowe, któregokolwiek punktu pręta prostokątnego, zachodzące w skutek jednoczesnego działania siły ciężkości we wszystkich punktach pręta i sił P_0, P_1 wyciągających pręt w kierunku jego pionowéj osi, a działających na górnym i dolnym jego końcu.

Na górze siła ciągnąca musi być równą sile ciągnącéj pręt na dole zwiększonéj całkowitym ciężarem pręta.

Gdyby między siłą ciągnącą pręt na dole i siłą ciągnącą pręt na górze nie zachodził powyższy związek, pręt podlegałby odkształceniom wyznaczonym przez wzory (16), ale jako całość podlegałby jeszcze ruchowi w stronę przewagi sił.

Kładąc we wzorach (16) $p=o$, a więc i $P'=o$, przychodzimy do wyrażeń (1) stosujących się do pręta, niepodlegającego działaniu siły ciężkości.

Ze wzorów (16) można wyprowadzić wyrażenia na zmiany wymiarów pręta.

I tak całkowite wydłużenie λ osi pręta podług trzeciego ze wzorów (16) znajdziemy:

$$\lambda = q_1\left(\frac{P_1+P'}{s}\right)L - q_1\frac{pL^2}{2}$$

$$=q_1 L\left\{\frac{P_1}{s}+\frac{P'}{s}-\frac{psL}{2s}\right\}=q_1 L\left(\frac{P_1+\frac{1}{2}P'}{s}\right). \quad (17)$$

Wydłużenie więc zupełne osi pręta ciężkiego można obliczyć podług takich samych zasad, jak wydłużenie zupełne prętu niećiężkiego, ale do siły wyciągającéj na dole trzeba dodać siłę równą połowie ciężaru całego pręta.

Krawędzie pionowe pręta doznają takiego samego wydłużenia, w górnym końcu podniosą się nad płaszczyznę $z = o$, o długość

$$-\frac{q_2}{2} pR^2 ,$$

a w dolnym obniżą się o długość

$$\lambda - \frac{q_2}{2} pR^2 ,$$

gdzie R jest odległością krańca przekroju poprzecznego pręta od osi jego.

Wymiary poprzeczne doznają ścieśnienia, współczynnik ścieśnienia poprzecznego μ będzie danym przez wzór:

$$\mu = - q_2\left(\frac{P_1 + P'}{s}\right) + q_2 pz , \tag{18}$$

dla $z = o$ wypadnie największy

$$\mu_0 = -q_2 \left(\frac{P_1 + P'}{s}\right) ; \tag{19}$$

dla $z = L$ wypadnie najmniejszy:

$$\mu_1 = - q_2\left(\frac{P_1 + P'}{s}\right) + q_2 pL = - q_2 \frac{P_1}{s} . \tag{20}$$

Punkt, którego pierwotne współrzędne są x, y, z, po odkształceniu uważanego pręta przyjmie położenie, którego współrzędne x' y' z' wyznaczymy podług wzorów:

$$\begin{aligned} x' &= x + u , \\ y' &= y + v , \\ z' &= z + w . \end{aligned} \tag{21}$$

Wstawiając za u, v, w wartości (16) otrzymamy ztąd:

$$x' = x - q_2 \left(\frac{P_1 + P'}{s}\right) x + q_2 pxz ,$$

$$y' = y - q_2 \left(\frac{P_1 + P'}{s}\right) y + q_2 pyz\ ,$$

$$z' = z + q_1 \left(\frac{P_1 + P'}{s}\right) z - q_2 \frac{p}{2} z^2 - q_2 \frac{p}{2}(x^2 + y^2). \quad (22)$$

Dla punktów, które pierwotnie leżą na płaszczyźnie równoległéj od płaszczyzny np. yz odpowiada $x = C$; dla takich punktów po odkształceniu pręta znajdziemy:

$$x'_1 = \left\{1 - q_2 \left(\frac{P_1 + P'}{s}\right) + q_2\, pz\right\} C$$

$$y'_1 = \left\{1 - q_2 \left(\frac{P_1 + P'}{s}\right) + q_2\, pz\right\} y$$

$$z'_1 = z + q_1 \left(\frac{P_1 + P'}{s}\right) z - q_1 \frac{p}{2} z^2 - q_2 \frac{p}{2} (C^2 + y^2). \quad (23)$$

Z dwóch piérwszych równań (23) wypadnie:

$$z = \frac{x'_1 - \left\{1 - q_2 \left(\frac{P_1 + P'}{s}\right)\right\} C}{q_2 p C}\ ,$$

$$y = \frac{y'_1}{x'_1}\, C\ ,$$

co wstawiając w trzecie z równań (23) otrzymamy:

$$z'_1 = \left\{1 + q_1 \left(\frac{P_1 + P'}{s}\right)\right\} \left\{\frac{x'_1 - \left(1 - \frac{q_2 P_1 + q_2 P'}{s}\right) C}{q_2 p C}\right\} -$$

$$- \frac{q_1 p}{2} \frac{\left\{x'_1 - \left(1 - \frac{q_2 P_1 + q_2 P'}{s}\right) C\right\}^2}{q_2^{\,2} p^2 C^2}$$

$$- \frac{q_2 p}{2} \left(\frac{C^2 x'^{\,2}_1 + C^2 y'^{\,2}_1}{x'^{\,2}_1}\right). \quad (24)$$

Równanie (24) przedstawia powierzchnię na którą odkształci się przekrój przypadający na płaszczyźnie $x = C$.

Dla jakiegokolwiek C byle różnego od zera wypada powierzchnia (24) stopnia w ogóle czwartego, nie daje zaś żadnego oznaczonego wypadku dla $C=o$. Równania (23) uczą za to od razu, że dla $C=o$ musi być $x'_1=o$, to znaczy, że dla $C=o$ powierzchnia (24) jest zastąpioną przez płaszczyznę $x'_1=o$, płaszczyznę współrzędnych yz.

Z tego widzimy, że płaszczyzny równoległe pierwotnie od płaszczyzny yz odkształcają się w uważanym pręcie na powierzchnie krzywe czwartego stopnia, tylko płaszczyzna yz pozostaje po odkształceniu płaszczyzną także yz.

Podobnie się rzecz ma i z płaszczyznami równoległemi od płaszczyzny xz.

Ściany więc boczne pręta pierwotnie równoległe od płaszczyzn współrzędnych xz lub yz po odkształceniu się pręta stają się powierzchniami krzywemi czwartego stopnia.

Z dwóch piérwszych równań (22) wypada:

$$\frac{x'}{y'}=\frac{x}{y},$$

dla $\frac{x}{y}=Const.$ musi zatém być i $\frac{x'}{y'}=Const.$

To znaczy, że punkty leżące pierwotnie na przekroju płaskim pręta, przechodzącym przez oś tegoż, po odkształceniu pozostają na tym samym przekroju.

Uważmy teraz punkty, leżące pierwotnie na płaszczyźnie przekroju poprzecznego, dla takich punktów jest $z=h$, a zatém

$$x'_2=x-q_2\left(\frac{P_1+P'}{s}\right)x+q_2phx\,,$$

$$y'_2 = y - q_2 \left(\frac{P_1 + P'}{s}\right) y + q_2 phy\,,$$

$$z'_2 = q_1 \left(\frac{P_1 + P'}{s}\right) h - \frac{q_1 ph^2}{2} + q_2 \frac{p}{2}(x^2+y^2) + h. \quad (25)$$

Po wyrugowaniu x i y otrzymamy równanie powierzchni, na któréj punkty płaszczyzny $z=h$ po odkształceniu się pręta znajdować się będą; równaniem téj powierzchni będzie:

$$z'_2 = h\left\{1 + q_1\frac{(P_1 + P')}{s} - q_1\frac{ph}{2}\right\} - \frac{q_2 p\,(x'^2_2 + y'^2_2)}{2\left\{1 + q_2\left(ph - \frac{P_1 + P'}{s}\right)\right\}^2}\,, \quad (26)$$

jestto równanie paraboloidu obrotowego.

A zatém każdy przekrój pręta płaski i do osi prostopadły odkształci się na paraboloid obrotowy.

3. Przez założenie we wszystkich wzorach ogólnie wyprowadzonych $P_1 = o$, otrzymamy odkształcenia pręta wywołane przez siły ciężkości, działające we wszystkich jego punktach, i przez siłę P_0 podtrzymującą pręt na górze.

I tak znajdziemy przesunięcia osiowe różnych punktów pręta następne:

$$\left.\begin{aligned} u_0 &= -\,q_2 px\,(L - z)\,, \\ v_0 &= -\,q_2 py\,(L - z)\,, \\ w_0 &= q_1 pz\left(L - \frac{1}{2}z\right) - q_2\frac{p}{2}(x^2 + y^2). \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Wydłużenie całkowite osi pręta pod wpływem własnego ciężaru będzie:

$$\lambda_0 = \frac{1}{2} q_1 pL^2 = \frac{1}{2} q_1 \frac{P'}{s}\,. \quad (2)$$

Współczynnik ścieśnienia poprzecznego obliczy się podług wzoru:

$$\mu_0 = - q_2 p \, (L - z) \,, \qquad (3)$$

dla $z = o$ wypadnie $\mu_0 = - q_2 p L$,

dla $z = L$ „ $\mu_0 = o$.

Odkształcenie pręta będzie podobne jak w przypadku ogólniejszym $P_1 > o$.

Pod wpływem siły ciężkości pręt prostokątny pionowo utrzymywany odkształca się więc tak, że przekroje poziome jego przekształcają się na paraboloidy obrotowe,— przekroje pionowe przechodzące przez oś pręta pozostają przekrojami płaskiémi pionowémi,— a ściany boczne odkształcają się na powierzchnie czwartego stopnia.

Kładąc we wzorach ogólnych (16), $-P_1$ zamiast P_1 tudzież $-P_0$ zamiast P_0 przejdziemy do przypadku, gdy pręt ciężki prostokątny będzie w położeniu pionowém ściskanym w kierunku osi przez siły działające na jego końcowe przekroje:

Otrzymamy wówczas:

$$u = q_2 \left(\frac{P_1 - P'}{s} \right) x + q_2 p x z \,,$$

$$v = q_2 \left(\frac{P_1 - P'}{s} \right) y + q_2 p y z \,,$$

$$w = -q_1 \left(\frac{P_1 - P'}{s} \right) z - q_1 \frac{p}{2} z^2 - q_2 \frac{p}{2} (x^2 + y^2).$$

$$P_1 - P_0 = P' \,. \qquad (4)$$

Odpowiednio do tych odkształceń wypadnie:

$$\lambda = - q_1 L \left(\frac{P_1 - \frac{1}{2} P'}{s} \right) \,,$$

$$\mu = q_2 \left(\frac{P_1 - P'}{s} \right) + q_2 p z \,. \qquad (5)$$

Odkształcenie ścian pręta w tym przypadku będzie podobne jak poprzednio, tylko zmieni się względne położenie powierzchni odkształconych.

Należy się tu także zrobić uwagę, że wzory ogólne (16) utrzymują się dla prętów ograniczonych w ogólności jakiemikolwiek powierzchniami walcowemi, a więc do takich prętów stosują się wszystkie wyniki powyżéj podane.

Stosownie do kształtu pierwotnego powierzchni walcowéj tworzącéj ścianę boczną pręta, zmieniać się będzie kształt powierzchni bocznéj odkształconéj.

Niech pręt będzie ograniczony powierzchnią walcową

$$x^2 + y^2 = R^2 . \qquad (6)$$

Z dwóch piérwszych równań (22) otrzymamy:

$$x'^2 + y'^2 = \left\{1 - q_2\left(\frac{P_1 + P'}{s}\right) + q_2 pz\right\}^2 R^2$$

czyli

$$z = \left\{\frac{1}{R}(x'^2 + y'^2)^{1/2} - 1 + q_2\left(\frac{P_1 + P'}{s}\right)\right\}\frac{1}{q_2 p} .$$

Wstawiając tę wartość w trzecie z równań (22) znajdziemy dla powierzchni bocznéj odkształconego pręta walcowatego o przekroju kolistym równanie:

$$z' = \left\{1 + q_1\left(\frac{P_1 + P'}{s}\right)\right\}\left\{\frac{1}{R}(x'^2 + y'^2)^{1/2} - \right.$$

$$\left. - 1 + q_2\left(\frac{P_1 + P'}{s}\right)\right\}\frac{1}{q_2 p}$$

$$- \frac{q_1}{2q_2^2}\left\{\frac{1}{R}(x'^2 + y'^2)^{1/2} - 1 + q_2\left(\frac{P_1 + P'}{s}\right)\right\}^2 -$$

$$- q_2\frac{p}{2}R^2 . \qquad (7)$$

Równanie (7) przedstawia powierzchnię obrotową w około osi pręta w ogóle stopnia czwartego.

Przy uważanych ciągnieniach lub ściskaniach pręta można jednę ze sił cisnących lub wyciągających P_0 zastąpić przez odpowiednie przytwierdzenie jednego końca pręta.