


3.1.5. — dynamika ciała sztywnego

R. 269

  
Zbigniew Turek

**KINETOSTATYCZNA KOMPUTEROWA METODA  
MATEMATYCZNEGO MODELOWANIA  
ŁAŃCUCHÓW KINEMATYCZNYCH**

15/1993



**WARSZAWA 1993**

<http://rcin.org.pl>

Praca wpłynęła do Redakcji dnia 19 marca 1993 r.



56675



N a p r a w a c h r ę k o p i s u

---

Instytut Podstawowych Problemów Techniki PAN

Nakład 100 egz. Ark.wyd.1,50 Ark.druk.2,00

Oddano do drukarni w maju 1993 r.

---

Wydawnictwo Spółdzielcze sp. z o.o.

Warszawa, ul.Jasna 1

Zbigniew Turek  
Samodzielna Pracownia Optyczno Komputerowych  
Metod Mechaniki.

KINETOSTATYCZNA KOMPUTEROWA METODA MATEMATYCZNEGO MODELOWANIA  
ŁAŃCUCHÓW KINEMATYCZNYCH

Streszczenie

W pracy przedstawiono metodę komputerowego formowania równań dynamicznych, aktywnych mechanizmów o otwartych łańcuchach kinematycznych bez odgałęzień zaproponowaną przez Stepanenkę i Vukobratovića [3]. W stosunku do wersji źródłowej zmieniono część pracy dotyczącą parametrów elementów mechanizmu a w części dotyczącej montażu mechanizmu wprowadzono pojęcie odwzorowania zwanego montażem i w języku matematycznym dokonano montowania mechanizmu. W pracy zaproponowano metodę do obliczania macierzy wynikającej podczas montażu mechanizmu oraz wykazano symetryczność macierzy bezwładności.

I. WPROWADZENIE

Kinetostatyczna komputerowa metoda matematycznego modelowania służy do modelowania układów ciał sztywnych połączonych przegubami walcowymi, przesuwными i kulistymi. Jej opis można znaleźć w [3],[4]. Celem tej metody podobnie, jak innych metod [3], jest uzyskanie funkcji  $\vec{f}$  i  $\vec{g}$ , tak że

$$(a) \quad \ddot{\vec{u}} = \vec{f}(\vec{u}, \dot{\vec{u}}, \vec{P})$$

i

$$(b) \quad \vec{P} = \vec{g}(\vec{u}, \dot{\vec{u}}, \ddot{\vec{u}})$$

gdzie  $\vec{u}$  jest wektorem położenia mechanizmu,  $\vec{P}$  jest wektorem sił i momentów napędowych. Należy podkreślić, że algorytmy  $\vec{f}$  i  $\vec{g}$  tworzone są dla każdej chwili czasu;  $\vec{f}$  dla zagadnienia odwrotnego, zaś  $\vec{g}$  dla prostego zagadnienia dynamiki. Realizacja każdego z tych algorytmów przebiega w czterech etapach. W pierwszym etapie dokonujemy montażu mechanizmu. Drugi etap jest analiza kinematyczna, w którym określa się położenia, prędkości liniowe i przyspieszenia środków ciężkości oraz prędkości katowe i przyspieszenia katowe wszystkich elementów mechanizmu. W trzecim etapie na podstawie określonych poprzednio przyspieszeń wyznaczamy główny wektor sił bezwładności i główny moment sił bezwładności. Czwarty etap jest analiza statyczna, w którym rozważa się problem równowagi mechanizmu dla wyznaczonych sił i momentów sił bezwładności oraz danych sił i momentów zewnętrznych.

Ponieważ rozważana metoda będzie wykorzystana do modelowania dynamiki układu mechanicznego o przegubach walcowych, dlatego też w pracy tej przedstawiono jedynie wariant tej metody dotyczący generowania równań dynamiki mechanizmów z przegubami walcowymi.

## II. WYPROWADZENIE RÓWNAŃ RUCHU.

### 1. Parametry elementów mechanizmu.

Elementami mechanizmu będzie  $n$  idealnie sztywnych jednorodnych ciał  $\mathcal{P}_1$  o skończonych wymiarach i masie  $m_1$ . Konfiguracje tych ciał w euklidesowej przestrzeni fizycznej  $\mathcal{E}_3$  będziemy oznaczać przez  $\mathcal{B}_1$ . Związek między punktami  $P^1$  ciała  $\mathcal{P}_1$  ( $P^1 \in \mathcal{P}_1$ ) a punktami  $X^1$  przestrzeni fizycznej  $\mathcal{E}_3$ , takimi że  $X^1 \in \mathcal{B}_1$  określony jest wzajemnie jednoznaczny odwzorowaniem  $\kappa_1$

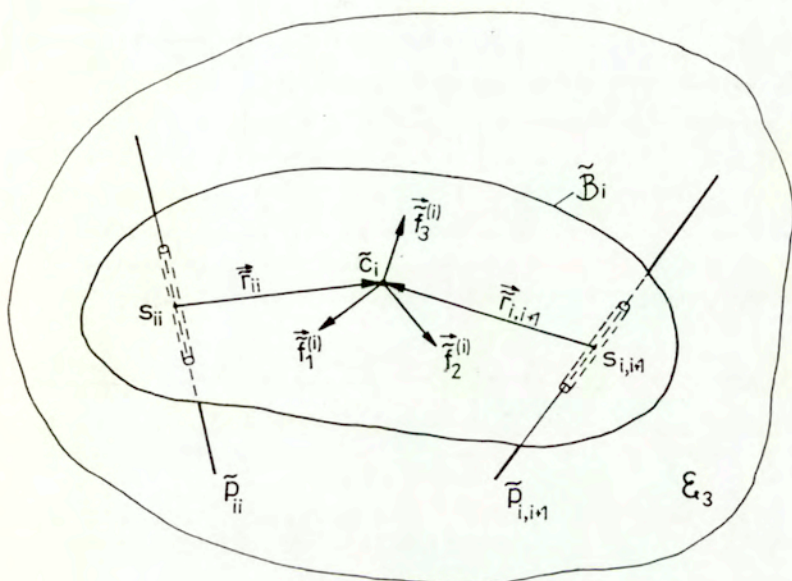
$$\kappa_1 : \mathcal{P}_1 \rightarrow \mathcal{B}_1 \subset \mathcal{E}_3$$

skąd

$$(II.1). \quad X^1 = \kappa(P^1)$$

W każdej konfiguracji wprowadzamy taki układ  $\{\tilde{c}_1, \vec{f}_1^{(1)}, \vec{f}_2^{(1)}, \vec{f}_3^{(1)}\}$ , w którym moment bezwładności  $\vec{J}_1$  reprezentowany jest przez trzy główne składowe  $J_{11}^{(1)}, J_{12}^{(1)}, J_{13}^{(1)}$ . Układ ten wprowadzamy w środku ciężkości konfiguracji  $\mathcal{B}_1$  tj. w punkcie  $\tilde{c}_1$  będącym obrazem środka ciężkości  $P_c^1 \in \mathcal{P}_1$  ciała  $\mathcal{P}_1$  w odwzorowaniu (II.1). Układ  $\{\tilde{c}_1, \vec{f}_1^{(1)}, \vec{f}_2^{(1)}, \vec{f}_3^{(1)}\}$

będziemy nazywać układem sztywno związanym z ciałem  $\mathcal{P}_1$  lub układem lokalnym.



Rys. II.1 Konfiguracja  $\tilde{\mathcal{B}}_1$  ciała  $\mathcal{P}_1$  i parametry ciała  $i$ -tego w przestrzeni fizycznej  $\mathcal{E}_3$ .

Wektory układu tworzą bazę ortonormalną, którą będziemy nazywać bazą lokalną. W układzie lokalnym dane są równania linii prostych  $\tilde{p}_{1,1}$ ,  $\tilde{p}_{1,1+1}$  będące geometrycznymi równaniami osi obrotu przegubu walcowego odpowiednio  $i$ -tego i  $i+1$ -szego (rys. II.1). Na każdej z tych prostych wybieramy w pewien sposób punkty  $\tilde{s}_{1,1}$ ,  $\tilde{s}_{1,1+1}$ , które będziemy nazywać środkami osi obrotu przegubu walcowego  $i$ -tego i  $i+1$ -szego. Wektory  $\vec{c}_1 - \vec{s}_{1,1}$  i  $\vec{c}_1 - \vec{s}_{1,1+1}$  będziemy odpowiednio oznaczać przez  $\vec{r}_{1,1}$  i  $\vec{r}_{1,1+1}$  tzn.  $\vec{r}_{1,1} := \vec{c}_1 - \vec{s}_{1,1}$  oraz  $\vec{r}_{1,1+1} := \vec{c}_1 - \vec{s}_{1,1+1}$ . Jeśli wektory  $\vec{e}_{1,1}$  i  $\vec{e}_{1,1+1}$  określają orientację linii  $\tilde{p}_{1,1}$  i  $\tilde{p}_{1,1+1}$  to ich równania w bazie lokalnej mają postać

$$(II.2) \quad \vec{z}_{1,1} = \vec{c}_1 - \vec{r}_{1,1} + \lambda_1 \vec{e}_{1,1}$$

$$\vec{z}_{1,1+1} = \vec{c}_1 - \vec{r}_{1,1+1} + \xi_1 \vec{e}_{1,1+1}$$

gdzie  $\lambda_1, \xi_1 \in \mathbb{R}^1$ .

Wektory  $\vec{r}_{1,1}$  i  $\vec{r}_{1,1+1}$  (podobnie jak i inne wektory) możemy przedstawić w bazie lokalnej  $\vec{f}^{(1)}$

$$(II.3a) \quad \vec{r}_{1,1} = R_{1,1}^{(1)} \alpha \vec{f}_\alpha^{(1)}$$

$$\vec{r}_{1,1+1} = R_{1,1+1}^{(1)} \alpha \vec{f}_\alpha^{(1)}$$

Zastosowano tu konwencję sumacyjną po  $\alpha = 1, 2, 3$ , zaś przez (i) oznaczono, w której bazie dokonano rozkładu wektora na składowe.

W macierzowej notacji natomiast można je zapisać następująco;

$$(II.3b) \quad \vec{r}_{1,1} = R_{-1,1}^{(1)T} \vec{f}^{(1)}$$

$$\vec{r}_{1,1+1} = R_{-1,1+1}^{(1)T} \vec{f}^{(1)}$$

lub

$$(II.3c) \quad \vec{r}_{1,1} = \vec{f}^{(1)T} R_{-1,1}^{(1)}$$

$$\vec{r}_{1,1+1} = \vec{f}^{(1)T} R_{-1,1+1}^{(1)}$$

T - jest operatorem transpozycji macierzy

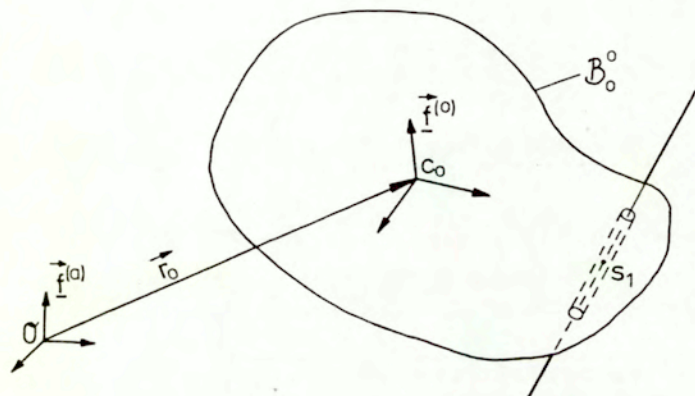
Dla każdego ciała  $\mathcal{P}_1$  i  $i \in I := \{1, 2, \dots, n\}$  macierze  $R_{-1,1}^{(1)}$  oraz  $R_{-1,1+1}^{(1)}$  są zadane. Zadane są również składowe wektorów  $\vec{e}_{1,1}$  i  $\vec{e}_{1,1+1}$  oraz tensora  $\vec{J}_1$  w bazie  $\vec{f}^{(1)}$ .

## 2. Montaż mechanizmu.

Montaż mechanizmu dokonamy w przestrzeni fizycznej  $\mathcal{E}_3$ , w której wprowadziliśmy układ bezwzględny  $\{0, \vec{f}_1^{(a)}, \vec{f}_2^{(a)}, \vec{f}_3^{(a)}\}$  taki, że wektory bazy  $\vec{f}^{(a)}$  tworzą bazę ortonormalną zaczepioną w punkcie  $0 \in \mathcal{E}_3$  zwanym początkiem układu, przyłączając w "odpowiedni" sposób do ciała o zadanym w  $\mathcal{E}_3$  położeniu, zwanego ciałem zerowym lub ciałem unoszącym, ciało pierwsze do ciała pierwszego ciało drugie itd.

Położenie ciała zerowego w  $\mathcal{E}_3$  dane jest wektorem  $\vec{r}_0 := \overrightarrow{c_0 - O}$  określającym położenie punktu  $c_0 \in \mathcal{B}_0^0$  w bazie  $\vec{f}_-^{(a)}$  oraz macierza ortogonalna  $A\underline{O}^{(o,a)}$  określająca orientację ciała zerowego w  $\mathcal{E}_3$  t.j. orientację bazy ortonormalnej  $\vec{f}_-^{(o)}$  układu  $\{c_0, \vec{f}_1^{(o)}, \vec{f}_2^{(o)}, \vec{f}_3^{(o)}\}$  sztywno związanej z ciałem zerowym względem bazy  $\vec{f}_-^{(a)}$ , tak że

$$(II.4). \quad \vec{f}_-^{(o)} = A\underline{O}^{(o,a)} \vec{f}_-^{(a)}$$



Rys. II.2 Konfiguracja  $\mathcal{B}_0^0$  ciała zerowego w  $\mathcal{E}_3$ .

Wspomniana "odpowiedniość" połączenia mechanizmu zapewni nam odwzorowanie  $K_1$  zwane montażem ciała w  $\mathcal{E}_3$ .

Definicja II.1 Montażem ciała w  $\mathcal{E}_3$  nazywamy odwzorowanie

$$(II.5) \quad K_1 : \tilde{\mathcal{B}}_1 \rightarrow \mathcal{B}_1$$

takie, że  $\forall i \in I$

1)  $K_1$  jest kongruencja  $\tilde{\mathcal{B}}_1$  na  $\mathcal{B}_1$ ; gdzie  $\mathcal{B}_1 := K_1(\tilde{\mathcal{B}}_1) \subset \mathcal{E}_3$

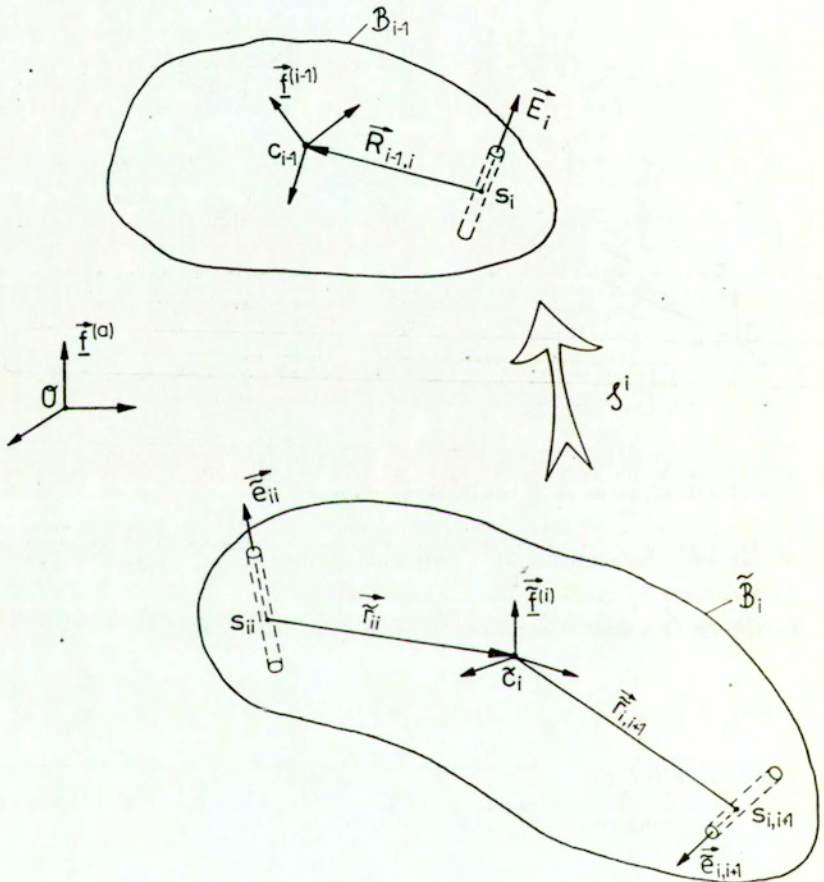
2)  $K_1(\vec{e}_{1,1}^{\rightarrow}) = \vec{E}_1$ ;

3)  $(\vec{R}_{1-1,1}^{\rightarrow} \times \vec{E}_1^{\rightarrow}) \cdot \vec{R}_{1,1}^{\rightarrow} = 0$

gdzie  $\vec{R}_{1,1}^{\rightarrow} := K_1(\vec{r}_{1,1}^{\rightarrow})$

Własność 2 wynika z własności kongruencji która mówi, że dowolna

kongruencja odwzorowuje wektor zaczepiony w wektor zaczepiony [1]. W przypadku montażu własność ta oznacza połączenie ciała  $i$ -tego z ciałem  $i-1$ -szym w ten sposób aby punkt  $s_{1,1}$  połączyć z punktem  $S_1$  a osie obydwu ciał pokrywały się. Własność  $X_1$  przedstawiona w punkcie 3 oznacza, że ciała należy tak zmontować aby  $i$ -ta współrzędna uogólniona była równa zero.



Rys. II.3 Montaż ciała  $i$ -tego.



Znajdziemy teraz współrzędne punktów  $X$  i wektorów (wektorów zaczepionych  $\vec{Z}-\vec{Y}$  i wektorów położenia  $\vec{X}-\vec{A}$ ) w odwzorowaniu będącym montażem. Rozważmy najpierw współrzędne punktów  $X$  i wektorów położenia  $\vec{X}-\vec{A}$ . Wiadomo jest jednak, że współrzędne punktów  $X$  i odpowiadających im wektorów  $\vec{X}-\vec{A}$  w układzie ortonormalnym  $\{A, \vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$  są takie same tzn.

$$X = A + x^1 \vec{u}_1 + x^2 \vec{u}_2 + x^3 \vec{u}_3$$

$$\vec{X}-\vec{A} = x^1 \vec{u}_1 + x^2 \vec{u}_2 + x^3 \vec{u}_3.$$

Wobec tego w celu wyznaczenia współrzędnych punktu  $X$  w odwzorowaniu zwanym montażem wystarczy określić współrzędne jego wektora położenia po montażu. Wiadomo jest, że kongruencja jest odwzorowaniem zachowującym odległość. Z tego wynika, że kongruencja zachowuje kąt pomiędzy dwoma dowolnymi wektorami. Wobec powyższego układ ortonormalny  $\{A, \vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$  przekształca się w układ ortonormalny  $\{A', \vec{u}'_1, \vec{u}'_2, \vec{u}'_3\}$ . Możemy więc napisać, że

$$\|\vec{u}_1\|_{\mathcal{E}_3} = \|\vec{u}'_1\|_{\mathcal{E}_3}, \|\vec{X}-\vec{A}\|_{\mathcal{E}_3} = \|\vec{X}'-\vec{A}'\|_{\mathcal{E}_3} \quad \text{- z definicji.}$$

$$(\vec{u}_1, \vec{X}-\vec{A}) = (\vec{u}'_1, \vec{X}'-\vec{A}') \quad \text{- z własności zachowania kąta}$$

i ostatecznie

$$(II.6) \quad x^1 = x'^1$$

skąd wynika, że współrzędne punktów  $X$  i współrzędne odpowiadających im wektorów położenia nie zmieniają się w odwzorowaniu kongruentnym. Rozważając obecnie dowolny wektor zaczepiony w punkcie  $Y$  i o początku w punkcie  $Z$  tzn. wektor postaci  $\vec{Z}-\vec{Y}$  należy skorzystać z faktu, że każdy taki wektor możemy przedstawić jako różnicę dwóch wektorów położenia  $\vec{Z}-\vec{A}$  i  $\vec{Y}-\vec{A}$  tzn.

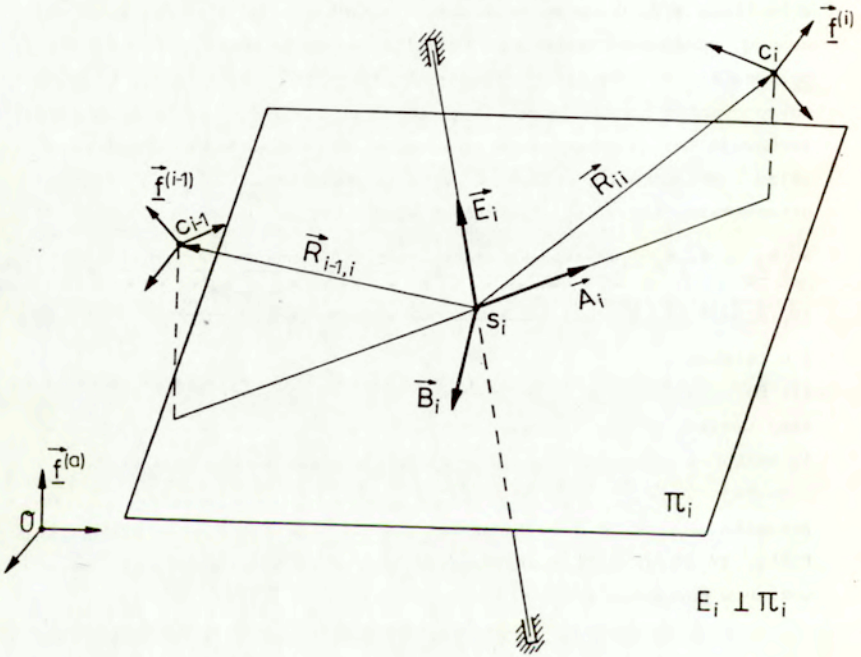
$$\vec{Z}-\vec{Y} = \vec{Z}-\vec{A} - \vec{Y}-\vec{A}.$$

Wiedząc teraz, że współrzędne wektorów położenia nie zmieniają się w odwzorowaniu kongruentnym (II.6) wnioskujemy, że nie zmienia się również współrzędne dowolnego wektora zaczepionego  $\vec{Z}-\vec{Y}$ .

Na podstawie powyższych rozważań można sformułować następujący

**Wniosek II.2** Dla każdego  $i \in I$  składowe parametrów (składowe wektorów położenia i wektorów zaczepionych) elementów mechanizmu (rys. II.1) podane w układzie  $\{\vec{c}_1, \vec{f}_1^{(1)}, \vec{f}_2^{(1)}, \vec{f}_3^{(1)}\}$  nie ulegają zmianie w układzie  $\{\vec{c}_1, \vec{f}_1^{(1)}, \vec{f}_2^{(1)}, \vec{f}_3^{(1)}\}$  pod działaniem montażu  $X_1$ , gdzie  $\vec{f}_k^{(1)} = X_1(\vec{f}_k^{(1)})$  ( $k=1, 2, 3$ ).

Oczywiście montaż ciała  $i$ -tego jest możliwy gdy dana jest macierz  $\underline{AO}^{(1-1, a)}$  tzn. gdy ciało  $(i-1)$ -sze zostało już zmontowane. Po montażu ciała  $i$ -tego należy określić położenie tego ciała w  $\mathcal{E}_3$ . (Dla  $i=1$  macierz  $\underline{AO}^{(1-1, a)}$  jest macierzą określającą orientację ciała do którego ma być przyłączony mechanizm - orientację ciała zerowego). W celu znalezienia położenia ciała  $i$ -tego w  $\mathcal{E}_3$  wprowadzimy w  $S_i \in \mathcal{B}_i$  układ wektorów  $\{S_i, \vec{B}_i, \vec{A}_i, \vec{E}_i\}$  w następujący sposób



Rys. II.4 Parametry przegubu  $i$ -tego.

$$(II.7) \quad \vec{A}_i := \frac{(\vec{R}_{1-1,1} \times \vec{E}_1) \times \vec{E}_1}{\|(\vec{R}_{1-1,1} \times \vec{E}_1) \times \vec{E}_1\|_{\mathcal{E}_3}}$$

$$\vec{B}_i := \vec{A}_i \times \vec{E}_1$$

gdzie

$$\begin{aligned} \vec{R}_{1-1,1} &= X_{1-1}(\vec{r}_{1-1,1}) = \vec{r}_{1-1,1}^{(1-1)T} R_{1-1,1}^{(1-1)} = \vec{r}_{1-1,1}^{(a)T} \underline{AO}^{(1-1, a)T} R_{1-1,1}^{(1-1)} \\ &= \vec{r}_{1-1,1}^{(a)T} R_{1-1,1}^{(a)} \end{aligned}$$

skąd

$$(II.8) \quad \underline{R}_{1-1,1}^{(a)} = \underline{AO}^{(a,1-1)} \underline{R}_{1-1,1}^{(1-1)}$$

oraz

$$\underline{\vec{E}}_1 = \chi_{1-1}(\underline{\vec{e}}_{1-1,1});$$

i skąd analogicznie

$$(II.9) \quad \underline{E}_1^{(a)} = \underline{AO}^{(a,1-1)} \underline{E}_{1-1,1}^{(1-1)}$$

Dla  $i = 1$   $\chi_{1-1}$  nie jest objęte definicją II.1. Jest to jednakże kongruencja a jej postać wynika z kinematyki ciała zerowego.

Macierze (II.8) i (II.9) posłużą nam do wyznaczenia składowych wektorów  $\underline{\vec{A}}_1$  i  $\underline{\vec{B}}_1$  w bazie  $\underline{\vec{f}}^{(a)}$  wg (II.7). Zgodnie z własnością 3 def. II.1 wektory (II.7) można również wyznaczyć jako

$$(II.10) \quad \underline{\vec{A}}_1 := \frac{(\underline{\vec{E}}_1 \times \underline{\vec{R}}_{1,1}) \times \underline{\vec{E}}_1}{\|(\underline{\vec{E}}_1 \times \underline{\vec{R}}_{1,1}) \times \underline{\vec{E}}_1\| \underline{\varepsilon}_3}$$

$$\underline{\vec{B}}_1 := \underline{\vec{A}}_1 \times \underline{\vec{E}}_1$$

gdzie w tym przypadku

$$(II.11) \quad \underline{\vec{R}}_{1,1} = \chi_1(\underline{\vec{r}}_{1,1}) = R_{1,1}^{(1)k} \chi_1(\underline{\vec{r}}_k^{(1)}) = \underline{\vec{f}}^{(1)T} \underline{R}_{1,1}^{(1)}$$

$$(II.12) \quad \underline{\vec{E}}_1 = \chi_1(\underline{\vec{e}}_{1,1}) = E_{1,1}^{(1)k} \chi_1(\underline{\vec{e}}_k^{(1)}) = \underline{\vec{f}}^{(1)T} \underline{E}_{1,1}^{(1)}$$

Wzory (II.11) i (II.12) posłużą nam do wyznaczenia składowych wektorów  $\underline{\vec{A}}_1$  i  $\underline{\vec{B}}_1$  w bazie  $\underline{\vec{f}}^{(1)}$  wg (II.10). Mamy zatem składowe wektorów  $\underline{\vec{B}}_1, \underline{\vec{A}}_1, \underline{\vec{E}}_1$  w bazie  $\underline{\vec{f}}^{(1)} = \chi(\underline{\vec{f}}^1)$  i w bazie  $\underline{\vec{f}}^{(a)}$  tzn.

$$(II.13) \quad \underline{\vec{B}}_1 = \underline{\vec{f}}^{(1)T} \underline{B}_1^{(1)} = \underline{\vec{f}}^{(a)T} \underline{B}_1^{(a)}$$

$$\underline{\vec{A}}_1 = \underline{\vec{f}}^{(1)T} \underline{A}_1^{(1)} = \underline{\vec{f}}^{(a)T} \underline{A}_1^{(a)}$$

$$\underline{\vec{E}}_1 = \underline{\vec{f}}^{(1)T} \underline{E}_1^{(1)} = \underline{\vec{f}}^{(a)T} \underline{E}_1^{(a)}$$

gdzie współrzędne tych wektorów w dwóch różnych bazach są dane związkami (II.7 + II.12).

Szukamy macierzy  $\underline{AO}^{(1,a)}$ , takiej że

$$(II.14) \quad \underline{\vec{f}}^{(1)} = \underline{AO}^{(1,a)} \underline{\vec{f}}^{(a)}$$

Po uwzględnieniu (II.14) związek (II.13) możemy zapisać we

współrzędnych skalarnych

$$(II.15) \quad \begin{aligned} \underline{AO}^{(a,1)} \underline{B}^{(1)} &= \underline{B}^{(a)} \\ \underline{AO}^{(a,1)} \underline{A}^{(1)} &= \underline{A}^{(a)} \\ \underline{AO}^{(a,1)} \underline{E}^{(1)} &= \underline{E}^{(a)} \end{aligned}$$

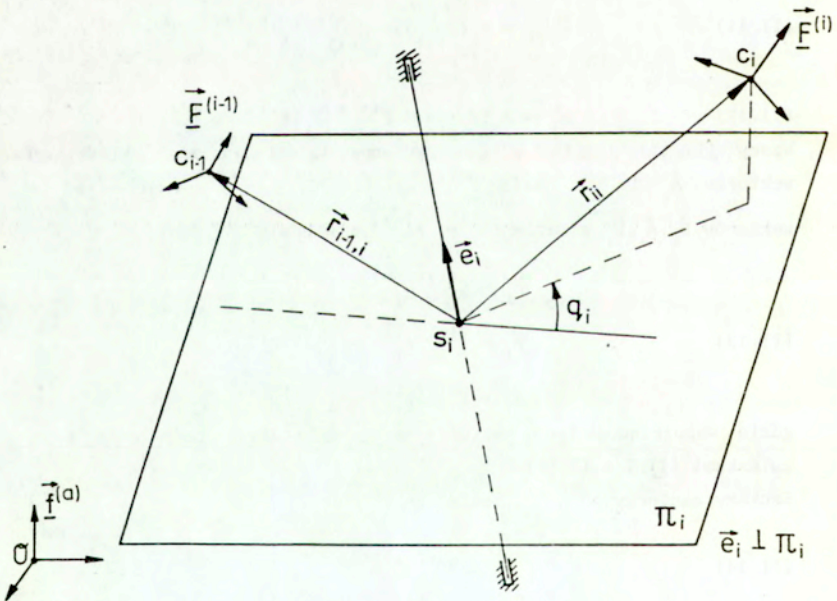
gdzie ze względu na ortonormalność  $\underline{E}^{(1)}$

$$\underline{AO}^{(1,a)} = \underline{AO}^{(a,1)T}$$

Zagadnienie montażu polega więc na znalezieniu macierzy  $\underline{AO}^{(a,1)}$  spełniającej układ równań (II.15). Zaproponowana metoda rozwiązywania układu (II.15) przedstawiono w dodatku (VI.3)

### 3. Wybór współrzędnych uogólnionych.

Do opisu orientacji mechanizmu użyto współrzędnych uogólnionych  $q_1, q_2, \dots, q_n$ . Każda ze współrzędnych odpowiada jednemu stopniowi swobody tzn. każdemu przegubowi.



Rys. II.5 Określenie współrzędnych uogólnionych.

Współrzędne uogólnione  $q_1$  definiujemy jako kąt obrotu w przegubie wokół wektora  $\vec{e}_1$ . Kąt ten można wyznaczyć jako kąt dodatni między rzutami wektorów  $-\vec{r}_{1-1,1}$  i  $\vec{r}_{1,1}$  (rys. II.5) na płaszczyznę  $\Pi_1$  prostopadłą do  $\vec{e}_1$ . Szczególny przypadek pojawia się gdy  $\vec{R}_{1,1} \parallel \vec{E}_1$  lub  $\vec{R}_{1-1,1} \parallel \vec{E}_1$ . Wtedy kąta nie można definiować w wyżej określony sposób. W tym przypadku definiujemy wektory jednostkowe  $\vec{R}_{1,1}^*$  i  $\vec{R}_{1-1,1}^*$  ( $\vec{R}_{1,1}^* \perp \vec{E}_1$ ,  $\vec{R}_{1-1,1}^* \perp \vec{E}_1$ ) i przy ich pomocy definiujemy kąty obrotu. Podobnie postępujemy gdy jeden z wektorów  $\vec{R}_{1,1}$  lub  $\vec{R}_{1-1,1}$  jest wektorem zerowym. Parametry  $\{c_{1-1}, \vec{f}_{1-1}^{(1-1)}, \vec{r}_{1-1,1}, s_1, \vec{e}_1, c_1, \vec{f}_{1,1}^{(1)}, \vec{r}_{1,1}\}$  przegubu (i-tego) są wynikiem działania funkcji ruchu na parametry  $\{C_{1-1}, \vec{f}_{1-1}^{(1-1)}, \vec{R}_{1-1,1}, S_1, \vec{E}_1, C_1, \vec{f}_{1,1}^{(1)}, \vec{R}_{1,1}\}$  tego samego przegubu po montażu (rys. II.4).

#### 4. Określenie położenia łańcucha otwartego.

W procesie "montażu" mechanizmu określiliśmy położenie łańcucha kinematycznego przy którym wszystkie współrzędne  $q_i = 0$  (własność 3 odwzorowania II.5). Do określenia nowego położenia mechanizmu po obrocie o kąt  $q_1$  użyjemy formuły Rodrigu'a tzw. formuły skończonych obrotów. Stosując tę formułę do wektorów bazy  $\vec{f}_\beta^{(1)}$  znajdujemy nowe położenia  $\vec{F}_\beta^{(1)}$  tych wektorów wg zależności

(II.16)

$$\vec{F}_\beta^{(1)} = \vec{f}_\beta^{(1)} \cos q_1 + (1 - \cos q_1) (\vec{E}_1 \cdot \vec{f}_\beta^{(1)}) \vec{E}_1 + \vec{E}_1 \times \vec{f}_\beta^{(1)} \sin q_1$$

$$\beta = 1, 2, 3$$

lub w postaci macierzowej

(II.17)

$$\underline{X}_\beta^1 = \underline{Z}_\beta^1 \cos q_1 + (1 - \cos q_1) \underline{E}_1^{(a)} \underline{Z}_\beta^1 \underline{E}_1^{(a)} + \underline{\tilde{E}}_1^{(a)} \underline{Z}_\beta^1 \sin q_1$$

gdzie  $\sim$  jest operatorem  $\sim : \underline{a} \rightarrow \underline{\tilde{a}}$  odwzorowującym macierz  $\underline{a} = (a^1, a^2, a^3)^T$  w macierz skośnie symetryczną

$$\underline{\tilde{a}} = \begin{pmatrix} 0 & -a^3 & a^2 \\ a^3 & 0 & -a^1 \\ -a^2 & a^1 & 0 \end{pmatrix}$$

natomiast  $\underline{Z}_\beta^1 := (\underline{AO}_\beta^{(1,a)1}, \underline{AO}_\beta^{(1,a)2}, \underline{AO}_\beta^{(1,a)3})^T$ . Orientacja bazy  $\underline{F}^{(1)}$  względem bazy  $\underline{f}^{(a)}$  dana jest przy pomocy macierzy  $\underline{A}^{(1,a)} = \underline{A}^{(a,1)T}$  gdzie  $\underline{A}^{(a,1)} := (\underline{X}_1^1, \underline{X}_2^1, \underline{X}_3^1)$ . Mając określoną macierz  $\underline{A}^{(a,1)}$  możemy określać wektory  $\vec{e}_1, \vec{r}_{1,1}, \vec{r}_{1-1,1}$

$$\begin{aligned} \vec{e}_1 &= \underline{f}^{(a)T} \underline{A}^{(a,1)} \underline{E}^{(1)} \\ \vec{r}_{1,1} &= \underline{f}^{(a)T} \underline{A}^{(a,1)} \underline{R}_{1,1}^{(1)} \\ \vec{r}_{1-1,1} &= \underline{f}^{(a)T} \underline{A}^{(a,1)} \underline{R}_{1-1,1}^{(1)} \end{aligned} \quad (II.18)$$

### 5. Określenie prędkości i przyspieszeń.

Niech położenie mechanizmu jest określone i niech znane będą wszystkie wektory  $\vec{e}_1, \vec{r}_{1,1}, \vec{r}_{1-1,1}$  (II.18). Należy wyznaczyć prędkości i przyspieszenia katowe  $\vec{\omega}_1$  i  $\vec{\varepsilon}_1$  oraz prędkości i przyspieszenia liniowe  $\vec{v}_1$  i  $\vec{w}_1$  dla wszystkich elementów mechanizmu. Dla pary kinematycznej z przegubem walcowym prędkości określamy wg wzorów

$$\begin{aligned} \vec{\omega}_1 &= \vec{\omega}_{1-1} + \dot{q}_1 \vec{e}_1 \\ \vec{v}_1 &= \vec{v}_{1-1} - \vec{\omega}_{1-1} \times \vec{r}_{1-1,1} + \vec{\omega}_1 \times \vec{r}_{1,1} \end{aligned} \quad (II.19)$$

przyspieszenia zaś wg

$$\begin{aligned} \vec{\varepsilon}_1 &= \vec{\varepsilon}_{1-1} + \ddot{q}_1 \vec{e}_1 + \dot{q}_1 \vec{\omega}_{1-1} \times \vec{e}_1 \\ \vec{w}_1 &= \vec{w}_{1-1} - \vec{\varepsilon}_{1-1} \times \vec{r}_{1-1,1} - \dot{\omega}_{1-1} \times (\vec{\omega}_{1-1} \times \vec{r}_{1-1,1}) + \vec{\varepsilon}_1 \times \vec{r}_{1,1} + \\ &\quad \vec{\omega}_1 \times (\vec{\omega}_1 \times \vec{r}_{1,1}) \end{aligned} \quad (II.20)$$

Przez zwiększenie numeru indeksu elementu o jeden można określić prędkości i przyspieszenia wszystkich elementów. Wyrażenia na przyspieszenia (II.20), które są funkcjami pochodnych drugiego rzędu współrzędnych uogólnionych można, bez zmiany ich rekurencyjnego charakteru, wyrazić

$$\begin{aligned} \vec{\varepsilon}_1 &= \sum_{j=1}^1 \ddot{\alpha}_{1,j} \dot{q}_j + \ddot{\theta}_1 + \vec{\varepsilon}_0 \\ \vec{w}_1 &= \sum_{j=1}^1 \ddot{\beta}_{1,j} \dot{q}_j + \ddot{\eta}_1 + \vec{w}_0 \end{aligned} \quad (II.21)$$

gdzie  $\vec{\epsilon}_0$  i  $\vec{\omega}_0$  jest odpowiednio przyspieszeniem kątowym i liniowym elementu zerowego,  $\vec{\alpha}_{1,j}$  i  $\vec{\beta}_{1,j}$  są funkcjami współrzędnych zaś wektory  $\vec{\theta}_1$  i  $\vec{\eta}_1$  są funkcjami współrzędnych i ich pierwszych pochodnych. Wstawiając  $\vec{\epsilon}_1$  i  $\vec{\epsilon}_{1-1}$  w postaci (II.21a) do wzoru (II.20a) otrzymamy

$$\sum_{j=1}^{1-1} \vec{\alpha}_{1,j} \dot{q}_j + \vec{\alpha}_{1,1} \dot{q}_1 + \vec{\theta}_1 + \vec{\epsilon}_0 = \sum_{j=1}^{1-1} \vec{\alpha}_{1-1,j} \dot{q}_j + \vec{\theta}_{1-1} + \vec{\epsilon}_0 + \dot{q}_1 \vec{\epsilon}_1 + \dot{q}_1 \vec{\omega}_{1-1} \times \vec{\epsilon}_1$$

lub

$$(II.22) \quad \sum_{j=1}^{1-1} (\vec{\alpha}_{1,j} - \vec{\alpha}_{1-1,j}) \dot{q}_j + (\vec{\alpha}_{1,1} - \vec{\epsilon}_1) \dot{q}_1 + (\vec{\theta}_1 - \vec{\theta}_{1-1} - \dot{q}_1 \vec{\omega}_{1-1} \times \vec{\epsilon}_1) = \vec{0}$$

Twierdzenie II.3 Równość (II.22) jest prawdziwa gdy  $\forall i \in I$

$$\vec{\alpha}_{1,j} = \vec{\alpha}_{1-1,j} \quad J < 1 > 1$$

$$(II.23) \quad \vec{\alpha}_{1,1} = \vec{\epsilon}_1 \quad 1 \geq 1$$

$$\vec{\theta}_1 = \vec{\theta}_{1-1} + \dot{q}_1 \vec{\omega}_{1-1} \times \vec{\epsilon}_1 \quad 1 \geq 1$$

Należy pamiętać, że  $\vec{\theta}_0 = \vec{0}$ .

Podobnie dla przyspieszeń liniowych wstawiając  $\vec{w}_1$  i  $\vec{w}_{1-1}$  w postaci (II.21b) do wzoru (II.20b) otrzymamy

(II.24)

$$\sum_{j=1}^{1-1} [\vec{\beta}_{1,j} - \vec{\beta}_{1-1,j} - \vec{\alpha}_{1-1,j} (\vec{r}_{1,1} - \vec{r}_{1-1,1})] \dot{q}_j + (\vec{\beta}_{1,1} - \vec{\epsilon}_1 \times \vec{r}_{1,1}) \dot{q}_1 + [\vec{\eta}_1 - \vec{\eta}_{1-1} - \vec{\theta}_{1-1} \times (\vec{r}_{1,1} - \vec{r}_{1-1,1}) - \vec{\epsilon}_0 \times (\vec{r}_{1,1} - \vec{r}_{1-1,1}) + \vec{\omega}_{1-1} \times (\vec{\omega}_{1-1} \times \vec{r}_{1-1,1}) - \vec{\omega}_1 \times (\vec{\omega}_1 \times \vec{r}_{1,1}) - \dot{q}_1 (\vec{\omega}_{1-1} \times \vec{\epsilon}_1) \times \vec{r}_{1,1}] = \vec{0}$$

Twierdzenie II.4 Równość (II.24) jest prawdziwa gdy  $\forall i \in I$

$$\vec{\beta}_{1,j} = \vec{\beta}_{1-1,j} + \vec{\alpha}_{1-1,j} (\vec{r}_{1,1} - \vec{r}_{1-1,1}) \quad J < 1 > 1$$

$$(II.25) \quad \vec{\beta}_{1,1} = \vec{\epsilon}_1 \times \vec{r}_{1,1} \quad 1 \geq 1$$

$$\vec{\eta}_1 = \vec{\eta}_{1-1} + (\vec{\theta}_{1-1} + \vec{\epsilon}_0) \times (\vec{r}_{1,1} - \vec{r}_{1-1,1}) + \vec{\epsilon}_0 \times (\vec{r}_{1,1} - \vec{r}_{1-1,1}) - \vec{\omega}_{1-1} \times (\vec{\omega}_{1-1} \times$$

$$\vec{r}_{1-1,1} + \vec{\omega}_1 \times (\vec{\omega}_1 \times \vec{r}_{1,1}) + \dot{q}_1 (\vec{\omega}_{1-1} \times \vec{e}_1) \times \vec{r}_{1,1} \quad i \geq 1$$

Tutaj  $\vec{\eta}_0 = \dot{q}_1 (\vec{\omega}_0 \times \vec{e}_1) \times \vec{r}_{1,1}$

I w ten sposób uzyskaliśmy związki rekurencyjne (II.23) i (II.25) na określenie wszystkich współczynników we wzorach (II.21).

Wniosek II.6 Związki (II.23) i (II.25) są równoważne odpowiednio związkom

$$(II.26a) \quad \vec{\alpha}_{1,j} = \vec{e}_j \quad j \leq i \leq 1$$

$$\vec{\theta}_1 = \vec{\theta}_{1-1} + \dot{q}_1 \vec{\omega}_{1-1} \times \vec{e}_1 \quad i \geq 1$$

$$(II.26b) \quad \vec{\beta}_{1,j} = \vec{e}_j \times \vec{R}_{1j}$$

$$\vec{\eta}_1 = \vec{\eta}_{1-1} + (\vec{\theta}_{1-1} + \vec{e}_0) \times (\vec{r}_{1,1} - \vec{r}_{1-1,1}) + \vec{e}_0 \times (\vec{r}_{1,1} - \vec{r}_{1-1,1}) - \vec{\omega}_{1-1} \times (\vec{\omega}_{1-1} \times \vec{r}_{1-1,1}) + \vec{\omega}_1 \times (\vec{\omega}_1 \times \vec{r}_{1,1}) + \dot{q}_1 (\vec{\omega}_{1-1} \times \vec{e}_1) \times \vec{r}_{1,1}$$

gdzie  $\vec{R}_{1j}$  jest wektorem o początku w j-tym przegubie i końcu w  $c_1$ , czyli  $\vec{R}_{1j} := \overrightarrow{c_1 - s_j}$ .

6. Określenie sił bezwładności i momentu sił bezwładności.

Siła bezwładności  $\vec{F}_1$  i-tego ciała jest zdefiniowana wg wzoru

$$(II.27) \quad \vec{F}_1 := -m_1 \vec{\omega}_1$$

co po uwzględnieniu (II.22b) może być napisane

$$(II.28) \quad \vec{F}_1 = \sum_{j=1}^1 \vec{a}_{1j} q_j + \vec{a}_1^{\times 0} - m_1 \vec{\omega}_0$$

gdzie  $m_1$  - masa i-tego elementu,  $\vec{a}_{1j} := -m_1 \vec{\beta}_{1,j}$ ,  $\vec{a}_1^{\times 0} := -m_1 \vec{\eta}_1$   
Moment sił bezwładności  $\vec{M}_1$  i-tego ciała określamy

$$(II.29) \quad \vec{M}_1 := -\dot{\vec{L}}_1$$

gdzie  $\dot{\vec{L}}_1$  jest pochodną geometryczną momentu pędu ruchu absolutnego względem środka ciężkości  $C_1$  i wyraża się wzorem

$$(II.30) \quad \dot{\vec{L}}_1 = \dot{J}_1 \cdot \vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_1 \times \dot{J}_1 \cdot \vec{\omega}_1$$



gdzie  $\vec{J}_1$  jest centralnym momentem bezwładności i-tego ciała  
• działanie tensora na wektor.

Wobec tego po przyjęciu oznaczenia  $\vec{e}_1 := \dot{\vec{\omega}}_1$

$$(II.31) \quad \vec{M}_1 := -\vec{J}_1 \cdot \vec{e}_1 - \vec{\omega}_1 \times \vec{J}_1 \cdot \vec{\omega}_1$$

Równanie to wyrażone w bazie  $\underline{F}^{(1)}$  ma postać

$$(II.32) \quad \underline{M}_1^{(1)} = -\underline{J}_1^{(1)} \underline{e}_1^{(1)} - \underline{\omega}_1^{(1)} \underline{J}_1^{(1)} \underline{\omega}_1^{(1)}$$

operator  $\sim$  zdefiniowano w punkcie II.4 tej pracy. Wzór (II.32) należy określić w bazie absolutnej.

Uwzględniając zatem, że

$$(II.33) \quad \underline{e}_1^{(1)} = \underline{A}^{(1,a)} \underline{e}_1^{(a)}, \quad \underline{\omega}_1^{(1)} = \underline{A}^{(1,a)} \underline{\omega}_1^{(a)}$$

$$\underline{\omega}_1^{(1)} = \underline{A}^{(1,a)} \underline{\omega}_1^{(a)} \underline{A}^{(a,1)}$$

oraz mnożąc lewostronnie (II.32) przez macierz  $\underline{A}^{(a,1)}$  otrzymamy

$$\underline{A}^{(a,1)} \underline{M}_1^{(1)} = -\underline{A}^{(a,1)} \underline{J}_1^{(1)} \underline{A}^{(1,a)} \underline{e}_1^{(a)} -$$

$$\underline{A}^{(a,1)} \underline{A}^{(1,a)} \underline{\omega}_1^{(a)} \underline{A}^{(a,1)} \underline{J}_1^{(1)} \underline{A}^{(1,a)} \underline{\omega}_1^{(a)}$$

i ostatecznie

$$(II.34) \quad \underline{M}_1^{(a)} := -\underline{J}_1^{(a)} \underline{e}_1^{(a)} - \underline{\omega}_1^{(a)} \underline{J}_1^{(a)} \underline{\omega}_1^{(a)}$$

gdzie

$$(II.35) \quad \underline{J}_1^{(a)} = \underline{A}^{(a,1)} \underline{J}_1^{(1)} \underline{A}^{(1,a)}$$

Jest reprezentacją tensora  $\vec{J}_1$  wyrażoną w bazie absolutnej. Wzór (II.31) po uwzględnieniu (II.22 i II.27) po prostych przekształceniach przyjmie postać

$$(II.36) \quad \vec{M}_1 = \sum_{j=1}^3 \vec{b}_{1j} \dot{q}_j + \vec{b}_1^0 - \vec{J}_1 \cdot \vec{e}_0$$

gdzie

$$(II.37) \quad \vec{b}_{1j} := -\vec{J}_1 \cdot \vec{e}_j$$

$$\vec{b}_1^0 := -\vec{J}_1 \cdot \vec{\theta}_1 - \vec{\omega}_1 \times \vec{J}_1 \cdot \vec{\omega}_1$$

## 7. Wyprowadzenie równań ruchu.

Na  $j$ -ty element mechanizmu działa główny wektor sił

$$\vec{F}'_j := \vec{F}_j + \vec{C}_j$$

i główny moment sił

$$\vec{L}'_j := \vec{M}_j + \vec{M}_j^C$$

gdzie  $\vec{C}_j$  jest wektorem sił zewnętrznych a  $\vec{M}_j^C$  momentem zewnętrznym. Po uwzględnieniu natomiast (II.28 i II.36)

$$\vec{F}'_j = \sum_{k=1}^j \vec{a}_{jk} \ddot{q}_k + \vec{a}_j^0 - m_j \vec{w}_0 + \vec{C}_j$$

(II.38)

$$\vec{L}'_j = \sum_{k=1}^j \vec{b}_{jk} \ddot{q}_k + \vec{b}_j^0 - \vec{J}_j \cdot \vec{w}_0 + \vec{M}_j^C$$

Rozdzielmy teraz myślowo mechanizm w  $i$ -tym przegubie i rozważmy równowagę części mechanizmu od ciała  $i$ -tego do ciała  $n$ -tego. Reakcje odrzuconej części mechanizmu zastąpmy siłami reakcji i momentami reakcji. Przy rozważaniu kinetostatycznej równowagi siły i momenty (II.38) należy zredukować do  $i$ -tego przegubu. Zgodnie z zasadą D'Alembert'a siły i momenty po redukcji są równoważone przez reakcje. Reakcje te określone są następującymi wzorami:

(II.39)

$$\vec{R}_1 = - \sum_{j=1}^n \vec{F}'_j = - \sum_{j=1}^n \left[ \sum_{k=1}^j \vec{a}_{jk} \ddot{q}_k + \vec{a}_j^0 - m_j \vec{w}_0 + \vec{C}_j \right]$$

$$\vec{M}_1^C = - \sum_{j=1}^n [\vec{L}'_j + \vec{R}_{j1} \times \vec{r}'_j] = - \sum_{j=1}^n \left[ \sum_{k=1}^j (\vec{b}_{jk} + \vec{R}_{j1} \times \vec{a}_{jk}) \ddot{q}_k \right]$$

$$\vec{R}_{j1} \times (\vec{a}_j^0 - m_j \vec{w}_0 + \vec{C}_j) + \vec{b}_j^0 - \vec{J}_j \cdot \vec{w}_0 + \vec{M}_j^C$$

Wyrażenie (II.39b) pozwala określić nam momenty napędowe w  $i$ -tym przegubie, czyli

(II.40)

$$\vec{P}_1^M = M_1^C \vec{e}_1 = \vec{P}_1^M \vec{e}_1$$

gdzie  $M_1^C := \vec{M}_1^R \vec{e}_1$  jest składową kolinearną momentu reakcji  $\vec{M}_1^R$

Równanie (II.40) będące równaniem równowagi momentów w i-tym przegubie przedstawia różniczkowe ruchu. Pisząc te równania dla wszystkich przegubów mechanizmu znajdujemy

$$(II.41) \quad \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^j \bar{H}_{1kj} \ddot{q}_k + \sum_{j=1}^n \bar{h}_{1j} = P_1^M$$

gdzie

$$(II.42) \quad \bar{H}_{1kj} := - \vec{e}_1 (\vec{b}_{jk} + \vec{R}_{j1} x \vec{a}_{jk})$$

$$\bar{h}_{1j} := - \vec{e}_1 [\vec{R}_{j1} x (\vec{a}_j^{x0} - m_j \vec{w}_0 + \vec{c}_j) + \vec{b}_j^{x0} - \vec{J}_j \cdot \vec{w}_0 + \vec{h}_j^x]$$

lub w postaci macierzowej

$$(II.43) \quad \underline{H} \underline{\ddot{q}} + \underline{h} = \underline{P}$$

Ponieważ w każdej konfiguracji  $\mathcal{B}_1$  wprowadziliśmy układ  $\{\vec{c}_1, \vec{f}_1^{(1)}, \vec{f}_2^{(1)}, \vec{f}_3^{(1)}\}$  skierowany wzdłuż centralnych osi bezwładności (patrz punkt II.1) przeto moment bezwładności  $\vec{J}_i \forall i \in I$  jest tensorem symetrycznym, skąd na podstawie twierdzenia V.1 z dodatku V2 wnioskujemy, że macierz  $\underline{H}$  w równaniu (II.43) jest symetryczna.

### III. KOMPLETNY MODEL DYNAMICZNY [4].

W ogólności układy manipulacyjne i roboty składają się z części mechanicznej układu  $S^M$  i układów napędowych  $S^I$  napędzających elementy mechanizmu  $S^M$ .

Do tej pory opisaliśmy sposób tworzenia modelu matematycznego dynamiki otwartych łańcuchów kinematycznych, stanowiących mechaniczną część systemu manipulatora. Matematyczny model dynamiki aktywnego mechanizmu  $S^M$  z n stopniami swobody może być przedstawiony w postaci (II.43). W ogólnym przypadku nie wszystkie stopnie swobody potrzebują być napędzane przez osobny silnik. Jednakże w większości przypadków manipulatorów przemysłowych wszystkie stopnie swobody napędzane są przez osobny silnik. Na ogół, modele silników są nieliniowe. Tutaj natomiast, rozpatrzmy szczególny przypadek, bardzo często spotykany w praktyce, kiedy dynamika silnika może być

przedstawiona przez liniowy niezależny od czasu system, czyli

$$(III.1) \quad \dot{\underline{x}}^i : \dot{\underline{x}}^i = \underline{A}^i \underline{x}^i + \underline{b}^i N(u^i) + \underline{f}^i P_i \quad \forall i \in I$$

gdzie  $\underline{x}^i \in R^{n_i}$  jest wektorem stanu  $i$ -tego modelu słownika,  $n_i$  jest rzędem  $i$ -tego słownika,  $u^i \in R^1$  jest wejściem  $i$ -tego słownika,  $P_i \in R^1$  jest siłą (momentem) napędową(wym) działającym na  $i$ -ty stopień swobody  $\underline{A}^i \in R^{n_i} \times R^{n_i}$  jest macierzą podukładu  $S^i$ ,  $\underline{b}^i \in R^{n_i}$  jest wektorem rozkładu wejścia,  $\underline{f}^i \in R^{n_i}$  jest wektorem rozkładu obciążenia.

$$(III.2) \quad N(u^i) := \begin{cases} -u^i & \text{dla} \quad u^i < -u^i_m \\ u^i & \text{dla} \quad -u^i_m < u^i < u^i_m \\ -u^i & \text{dla} \quad u^i > u^i_m \end{cases}$$

Przez  $N(u^i)$  oznaczono tutaj szczególny rodzaj sterowania.

Kompletny model całego układu  $S$  składa się z modelu mechanicznego  $S^M$  opisanego równaniem (II.43) i modeli słowników  $S^i$  opisanych równaniem (III.1). Uwzględniając związki między  $q_1$ ,  $\dot{q}_1$  oraz  $\underline{x}^1$  tzn.

$$(III.3) \quad q_1 = g_1^1(\underline{x}^1) ; \dot{q}_1 = g_1^2(\underline{x}^1)$$

gdzie

$$\forall i \in I \quad g_1^j : R^{n_i} \rightarrow R^1 \quad j = 1, 2$$

wtedy model części mechanicznej (II.48) możemy wyrazić przez współrzędne wektora stanu jako

$$(III.4) \quad \underline{P} = (\underline{I}_n - \underline{HG}(\underline{x})\underline{F})^{-1}[\underline{HG}(\underline{x})(\underline{Ax} + \underline{BN}(\underline{u})) + \underline{h}]$$

$\underline{I}_n$  - macierz jednostkowa  $n \times n$

$\underline{F} = \text{diag}(f^1)$ ,  $\underline{N}(\underline{u}) = (N(u^1), \dots, N(u^n))^T$ ,  $\underline{B} = \text{diag}(b^1)$

$\underline{A} = \text{diag}(\underline{A}^i)$

Wstawiając (III.4) do (III.1) otrzymamy model matematyczny całego układu  $S$

$$(III.5) \quad \dot{\underline{x}} : \dot{\underline{x}} = \hat{\underline{A}}(\underline{x}) + \hat{\underline{B}}(\underline{x})\underline{N}(\underline{u})$$

gdzie operatory  $\hat{A}$  i  $\hat{B}$  zdefiniowano

$$(III.6) \quad \hat{A}(\cdot) := A(\cdot) + F(I_n - HG(\cdot)F)^{-1} [HG(\cdot)A(\cdot) + h]$$

$$\hat{B}(\cdot) := B + F(I_n - HG(\cdot)F)^{-1} HG(\cdot)B$$

#### IV. UWAGI I WNIOSKI KOŃCOWE.

Wprowadzenie głównie heurystycznego pojęcia odwzorowania jako montażu pozwoliło zrozumieć w jaki sposób zmieniają się parametry elementów mechanizmu w trakcie montowania mechanizmu. Określenie elementów macierzy bezwładności  $\bar{H}_{1k}$  w zależności od elementów macierzy  $\bar{H}_{1kj}$  pozwoli uniknąć błędnego jej wyznaczania. Zaproponowana w dodatku (V.4) metoda rozwiązywania układu (II.15) pozwala na pominięcie działań numerycznych dokonywanych na elementach zerowych macierzy  $A_1$  (wzór V.10) tj. spośród 81 elementów macierzy  $A_1$  do obliczania układu (II.15) wykorzystuje się jedynie 9 elementów macierzy  $P_1$  zdefiniowanej w twierdzeniu (V.5).

## V. DODATEK.

1. Oblicznie macierzy bezwładności  $\underline{H}$  (II.43).

$$\sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^j \bar{H}_{1kj} \ddot{q}_k = \sum_{j=1}^n (\bar{H}_{11j} \ddot{q}_1 + \bar{H}_{12j} \ddot{q}_2 + \dots + \bar{H}_{1jj} \ddot{q}_j) =$$

$$\bar{H}_{111} \ddot{q}_1 + \bar{H}_{121} \ddot{q}_2 + \dots + \bar{H}_{111} \ddot{q}_1$$

$$\bar{H}_{11,1+1} \ddot{q}_1 + \bar{H}_{12,1+1} \ddot{q}_2 + \dots + \bar{H}_{11,1+1} \ddot{q}_1 + \bar{H}_{11+1,1+1} \ddot{q}_{1+1}$$

⋮

$$\bar{H}_{11n} \ddot{q}_1 + \bar{H}_{12n} \ddot{q}_2 + \dots + \bar{H}_{11n} \ddot{q}_1 + \bar{H}_{1,1+1,n} \ddot{q}_{1+1} + \dots + \bar{H}_{1nn} \ddot{q}_n =$$

$$(\bar{H}_{11,1} + \bar{H}_{11,1+1} + \dots + \bar{H}_{11,n}) \ddot{q}_1$$

$$(\bar{H}_{12,1} + \bar{H}_{12,1+1} + \dots + \bar{H}_{12,n}) \ddot{q}_2$$

⋮

$$(\bar{H}_{11,1} + \bar{H}_{11,1+1} + \dots + \bar{H}_{11,n}) \ddot{q}_1$$

$$(\bar{H}_{11+1,1+1} + \bar{H}_{11+1,1+2} + \dots + \bar{H}_{11+1,n}) \ddot{q}_{1+1}$$

$$(\bar{H}_{11+2,1+2} + \bar{H}_{11+2,1+3} + \dots + \bar{H}_{11+2,n}) \ddot{q}_{1+2}$$

⋮

$$+ \bar{H}_{1nn} \ddot{q}_n =$$

$$\sum_{j=1}^n \bar{H}_{11j} \ddot{q}_1 + \sum_{j=1}^n \bar{H}_{12j} \ddot{q}_2 + \dots + \sum_{j=1}^n \bar{H}_{11j} \ddot{q}_1 + \sum_{j=1+1}^n \bar{H}_{1,1+1,j} \ddot{q}_{1+1} +$$

$$\sum_{j=1+2}^n \bar{H}_{1,1+2,j} \ddot{q}_{1+2} + \dots + \sum_{j=n}^n \bar{H}_{1nj} \ddot{q}_n$$

skad

$$(V.1) \quad H_{ik} = \begin{cases} \sum_{j=1}^n \bar{H}_{ikj} & k \leq i \\ \sum_{j=k}^n \bar{H}_{ikj} & k > i \end{cases}$$

## 2. Dowody twierdzeń i lematów.

Twierdzenie V.1 Jeśli  $\forall j \in I \vec{J}_j$  jest tensorem symetrycznym to macierz  $\underline{H}$  w równaniu (II.43) jest symetryczna.

Do udowodnienia tego twierdzenia potrzebne są dwa lematy.

Lemat V.2 Dla symetrycznej macierzy  $\underline{A}$  prawdziwe jest zdanie

$$\underline{a}^T \underline{A} \underline{b} = \underline{b}^T \underline{A} \underline{a}$$

gdzie  $\underline{a}$  i  $\underline{b}$  są dowolnymi wektorami.

Dowód lematu V.2

$$\underline{a}^T \underline{A} \underline{b} = (\underline{A} \underline{b})^T \underline{a} = \underline{b}^T \underline{A}^T \underline{a} = \underline{b}^T \underline{A} \underline{a} \quad \text{c. b. d. o.}$$

Lemat V.3 Prawdziwe jest zdanie  $\bar{H}_{ikj} = \bar{H}_{kij}$  gdy  $\vec{J}_j$  symetryczne.

Dowód lematu V.3. Mając na uwadze, że  $\vec{a}_{jk} = -m_j \vec{\beta}_{jk}$  i uwzględniając (II.26b) i (II.37) elementy macierzy  $\underline{H}$  (II.42) można zapisać

$$(V.3) \quad \begin{aligned} \bar{H}_{ikj} &= \vec{e}_i^T [\vec{J}_j \vec{e}_k + m_j \vec{R}_{j1} \times (\vec{e}_k \times \vec{R}_{jk})] \\ &= \vec{e}_i^T \vec{J}_j \vec{e}_k + m_j \vec{e}_i^T [\vec{R}_{j1} \times (\vec{e}_k \times \vec{R}_{jk})] \end{aligned}$$

Korzystając z lematu V.2 możemy kolejno zapisać

$$(V.4) \quad \begin{aligned} \vec{e}_i^T \vec{J}_j \vec{e}_k &= \underline{e}_i^T \underline{J}_j \underline{e}_k = \underline{e}_i^T \underline{J}_j^T \underline{e}_k = \underline{e}_i^T \underline{J}_j \underline{e}_k \\ &= \underline{e}_i^T \underline{J}_j \underline{e}_k = \vec{e}_i^T \vec{J}_j \vec{e}_k \end{aligned}$$

rozważając drugi człon (V.3) otrzymujemy kolejno

$$\vec{e}_i^T [\vec{R}_{j1} \times (\vec{e}_k \times \vec{R}_{jk})] = -\vec{e}_i^T [(\vec{e}_k \times \vec{R}_{jk}) \times \vec{R}_{j1}] = (\vec{e}_k \times \vec{R}_{jk}) \cdot (\vec{e}_i \times \vec{R}_{j1})$$

$$(V.5) \quad = -\vec{e}_k [(\vec{e}_1 \times \vec{R}_{j1}) \times \vec{R}_{jk}] = \vec{e}_k [\vec{R}_{jk} \times (\vec{e}_1 \times \vec{R}_{j1})]$$

Podstawiając (V.4) i (V.5) do (V.3) otrzymujemy

$$(V.6) \quad \begin{aligned} \vec{H}_{ikj} &= \vec{e}_i \vec{j}_j \vec{e}_k + m_j \vec{e}_k [\vec{R}_{jk} \times (\vec{e}_1 \times \vec{R}_{j1})] \\ &= \vec{e}_k [\vec{j}_j \vec{e}_i + m_j \vec{R}_{jk} \times (\vec{e}_1 \times \vec{R}_{j1})] \\ &= \vec{H}_{kij} \end{aligned}$$

Dowód twierdzenia V.1

Dowód tego twierdzenia wynika bezpośrednio z lematu (V.2) i (V.3) oraz wzoru (V.1).

### 3. Rozwiązanie układu (II.15).

Po przyjęciu oznaczenia

$$(V.7) \quad \underline{AO}^{(a,1)} = \begin{pmatrix} x_1^1 & x_1^2 & x_1^3 \\ x_1^4 & x_1^5 & x_1^6 \\ x_1^7 & x_1^8 & x_1^9 \end{pmatrix}$$

równania (II.15) możemy zapisać



$$(V.8) \quad \begin{pmatrix} x_1^1 & x_1^2 & x_1^3 \\ x_1^4 & x_1^5 & x_1^6 \\ x_1^7 & x_1^8 & x_1^9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_1^{(1)1} \\ B_1^{(1)2} \\ B_1^{(1)3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_1^{(a)1} \\ B_1^{(a)2} \\ B_1^{(a)3} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1^1 & x_1^2 & x_1^3 \\ x_1^4 & x_1^5 & x_1^6 \\ x_1^7 & x_1^8 & x_1^9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1^{(1)1} \\ A_1^{(1)2} \\ A_1^{(1)3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1^{(a)1} \\ A_1^{(a)2} \\ A_1^{(a)3} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1^1 & x_1^2 & x_1^3 \\ x_1^4 & x_1^5 & x_1^6 \\ x_1^7 & x_1^8 & x_1^9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_1^{(1)1} \\ E_1^{(1)2} \\ E_1^{(1)3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_1^{(a)1} \\ E_1^{(a)2} \\ E_1^{(a)3} \end{pmatrix}$$

Układ (V.8) możemy przedstawić w postaci

$$B_1^{(1)1}x_1^1 + B_1^{(1)2}x_1^2 + B_1^{(1)3}x_1^3 + 0x_1^4 + 0x_1^5 + 0x_1^6 + 0x_1^7 + 0x_1^8 + 0x_1^9 = B_1^{(a)1}$$

$$0x_1^1 + 0x_1^2 + 0x_1^3 + B_1^{(1)1}x_1^4 + B_1^{(1)2}x_1^5 + B_1^{(1)3}x_1^6 + 0x_1^7 + 0x_1^8 + 0x_1^9 = B_1^{(a)2}$$

$$0x_1^1 + 0x_1^2 + 0x_1^3 + 0x_1^4 + 0x_1^5 + 0x_1^6 + B_1^{(1)1}x_1^7 + B_1^{(1)2}x_1^8 + B_1^{(1)3}x_1^9 = B_1^{(a)3}$$

$$A_1^{(1)1}x_1^1 + A_1^{(1)2}x_1^2 + A_1^{(1)3}x_1^3 + 0x_1^4 + 0x_1^5 + 0x_1^6 + 0x_1^7 + 0x_1^8 + 0x_1^9 = A_1^{(a)1}$$

$$0x_1^1 + 0x_1^2 + 0x_1^3 + A_1^{(1)1}x_1^4 + A_1^{(1)2}x_1^5 + A_1^{(1)3}x_1^6 + 0x_1^7 + 0x_1^8 + 0x_1^9 = A_1^{(a)2}$$

$$0x_1^1 + 0x_1^2 + 0x_1^3 + 0x_1^4 + 0x_1^5 + 0x_1^6 + A_1^{(1)1}x_1^7 + A_1^{(1)2}x_1^8 + A_1^{(1)3}x_1^9 = A_1^{(a)3}$$

$$E_1^{(1)1}x_1^1 + E_1^{(1)2}x_1^2 + E_1^{(1)3}x_1^3 + 0x_1^4 + 0x_1^5 + 0x_1^6 + 0x_1^7 + 0x_1^8 + 0x_1^9 = E_1^{(a)1}$$

$$0x_1^1 + 0x_1^2 + 0x_1^3 + E_1^{(1)1}x_1^4 + E_1^{(1)2}x_1^5 + E_1^{(1)3}x_1^6 + 0x_1^7 + 0x_1^8 + 0x_1^9 = E_1^{(a)2}$$

$$0x_1^1 + 0x_1^2 + 0x_1^3 + 0x_1^4 + 0x_1^5 + 0x_1^6 + E_1^{(1)1}x_1^7 + E_1^{(1)2}x_1^8 + E_1^{(1)3}x_1^9 = E_1^{(a)3}$$

lub w postaci macierzowej

$$(V.9) \quad \underline{A}_{-1} \underline{Y}_{-1} = \underline{B}_{-1}$$

gdzie

$$\underline{B}_{-1} := (B_1^{(a)1}, B_1^{(a)2}, B_1^{(a)3}, A_1^{(a)1}, A_1^{(a)2}, A_1^{(a)3}, E_1^{(a)1}, E_1^{(a)2}, E_1^{(a)3})^T$$

$$\underline{Y}_{-1} := (x_1^1, x_1^2, x_1^3, x_1^4, x_1^5, x_1^6, x_1^7, x_1^8, x_1^9)^T$$

oraz

(V. 10)

$$\underline{A}_{-1} := \begin{pmatrix} B_1^{(1)1} & B_1^{(1)2} & B_1^{(1)3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & B_1^{(1)1} & B_1^{(1)2} & B_1^{(1)3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & B_1^{(1)1} & B_1^{(1)2} & B_1^{(1)3} \\ A_1^{(1)1} & A_1^{(1)2} & A_1^{(1)3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A_1^{(1)1} & A_1^{(1)2} & A_1^{(1)3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A_1^{(1)1} & A_1^{(1)2} & A_1^{(1)3} \\ E_1^{(1)1} & E_1^{(1)2} & E_1^{(1)3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & E_1^{(1)1} & E_1^{(1)2} & E_1^{(1)3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E_1^{(1)1} & E_1^{(1)2} & E_1^{(1)3} \end{pmatrix}$$

Aby rozwiązać równanie (V.9) podamy bez dowodu

Twierdzenie V.4 Układ (V.9) jest równoważny układowi

$$(V.11) \quad (\underline{I} \times \underline{P}_{-1}) \underline{Y}_{-1} = \underline{m}_{-1}$$

gdzie

$$\underline{m}_{-1} := (B_1^{(a)1}, A_1^{(a)1}, E_1^{(a)1}, B_1^{(a)2}, A_1^{(a)2}, E_1^{(a)2}, B_1^{(a)3}, A_1^{(a)3}, E_1^{(a)3})^T$$

$$\underline{P}_{-1} := \begin{pmatrix} B_1^{(1)1} & B_1^{(1)2} & B_1^{(1)3} \\ A_1^{(1)1} & A_1^{(1)2} & A_1^{(1)3} \\ E_1^{(1)1} & E_1^{(1)2} & E_1^{(1)3} \end{pmatrix} \quad \underline{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\times$  - działanie mnożenia w algebrze Kroneckera [3] zdefiniowane następująco:

Niech  $\underline{A}_{-p \times q}$  i  $\underline{B}_{-s \times t}$  będą danymi macierzami wtedy iloczynem Kroneckera macierzy  $\underline{A}$  i  $\underline{B}$  jest macierz  $\underline{A} \times \underline{B}_{-p \times s \times q \times t}$  zdefiniowana

$$\underline{A} \times \underline{B} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} a_{11}^B \dots \dots \dots a_{1q}^B \\ \vdots \\ a_{p1}^B \dots \dots \dots a_{pq}^B \end{pmatrix}_{p \times qt}$$

Do rozwiązania równania (V.11) wykorzystamy lemat, który podajemy bez dowodu.

Lemat V.5 Dla macierzy kwadratowych  $\underline{I}, \underline{A}$  rzędu  $P$

$$(\underline{I} \times \underline{A}) \underline{b} = (\underline{A} \underline{b}_1, \dots, \underline{A} \underline{b}_p)^T$$

gdzie

$$\underline{b}_i := (b_{(i-1)p+1}, \dots, b_{ip})^T \quad i = 1, \dots, p$$

tak że

$$\underline{b} = (\underline{b}_1, \dots, \underline{b}_p)^T$$

Korzystając z faktu [3]  $(\underline{A} \times \underline{B})^{-1} \stackrel{\text{def}}{=} \underline{A}^{-1} \times \underline{B}^{-1}$  oraz zakładając, że  $\underline{P}_1$  jest nieosobliwa możemy zapisać

$$(V.12) \quad \underline{Y}_1 = (\underline{I} \times \underline{P}_1^{-1}) \underline{m}_1$$

zaś po uwzględnieniu lematu (V.6) daje nam rozwiązanie

$$Y_{-1} = \begin{pmatrix} P_{-1}^{-1} \begin{pmatrix} B_1^{(a)1} \\ A_1^{(a)1} \\ E_1^{(a)1} \end{pmatrix} \\ P_{-1}^{-1} \begin{pmatrix} B_1^{(a)2} \\ A_1^{(a)2} \\ E_1^{(a)2} \end{pmatrix} \\ P_{-1}^{-1} \begin{pmatrix} B_1^{(a)3} \\ A_1^{(a)3} \\ E_1^{(a)3} \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

lub

$$\left( \begin{pmatrix} x_1^1 \\ x_1^2 \\ x_1^3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1^4 \\ x_1^5 \\ x_1^6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1^7 \\ x_1^8 \\ x_1^9 \end{pmatrix} \right) = \left( P_{-1}^{-1} \begin{pmatrix} B_1^{(a)1} \\ A_1^{(a)1} \\ E_1^{(a)1} \end{pmatrix}, P_{-1}^{-1} \begin{pmatrix} B_1^{(a)1} \\ A_1^{(a)1} \\ E_1^{(a)1} \end{pmatrix}, P_{-1}^{-1} \begin{pmatrix} B_1^{(a)1} \\ A_1^{(a)1} \\ E_1^{(a)1} \end{pmatrix} \right)$$

wracając zaś do oznaczenia (V.6)

$$(V.13) \quad A\bar{O}^{(a,1)T} = \left( P_{-1}^{-1} \begin{pmatrix} B_1^{(a)1} \\ A_1^{(a)1} \\ E_1^{(a)1} \end{pmatrix}, P_{-1}^{-1} \begin{pmatrix} B_1^{(a)1} \\ A_1^{(a)1} \\ E_1^{(a)1} \end{pmatrix}, P_{-1}^{-1} \begin{pmatrix} B_1^{(a)1} \\ A_1^{(a)1} \\ E_1^{(a)1} \end{pmatrix} \right)$$

## VI. LITERATURA.

- [1] KARGER A., NOVAK J., Space Kinematics and Lie Groups, New York London 1985, (translation from Czech).
- [2] MA F. "Approximate analysis of a class of linear stochastic systems", Int. J. Engng Sci. Vol 24, No 1, pp.19-34, 1986.
- [3] VUKOBRATOVIĆ K.M., POTKONJAK V., Dynamics of Manipulation Robots, Theory and Application, Monograph, Springer-Verlag Berlin 1982.
- [4] VUKOBRATOVIĆ K.M., STOKIĆ D., Control of Manipulation Robots, Theory and Application, Monograph, Springer-Verlag Berlin 1982.