B. Atamaniuk, A.J. Turski

UPROSZCZONA TECHNIKA WYZNACZANIA GRUP SYMETRII NIELINIOWYCH RÓWNAŃ KINETYCZNYCH PLAZMY

8/1995

WARSZAWA 1995

ISSN 0208-5658

Praca wpłynęła do Redakcji dnia 14 grudnia 1994 r.

IPPT PAN

Na prawach rękopisu

Instytut Podstawowych Problemów Techniki PAN
Nakład 100 egz. Ark. wyd. 0,5 Ark. druk. 0,75
Oddano do drukarni w lutym 1995 r.

Wydawnictwo Spółdzielcze sp. z o.o.
Warszawa, ul. Jasna 1

B. Atamaniuk A.J. Turski

Samodzielna Pracownia
Dynamiki Plazmy.

Uproszczona technika wyznaczania grup symetrii nieliniowych równań kinetycznych plazmy.

Streszczenie
W pracy zaprezentowana jest na przykładzie równań kinetycznych plazmy uproszczona technika wyznaczania grup symetrii równań różniczkowo-całkowych z "prostym" członem całkowym.

Jedną z metod badania symetrii układów równań różniczkowych jest zaproponowana przez Owsiannikowa technika wyznaczania grup symetrii równań różniczkowych [1,2,3]. Układy równań Własowa-Poissona (W–P) i Własowa-Maxwella (W–M) są różniczkowo-całkowe, dlatego bezpośrednie zastosowanie tej metody nie jest możliwe. Stosując metodę pośrednią (tzn. przechodząc z różniczkowo-całkowym układem równań do nieskończonego różniczkowego układu na momenty funkcji rozkładu) Taranov[4] otrzymał generatory grupy symetrii dla przypadku jednoskładnikowej plazmy W–P. J.Zawistowski uogólnił[5] metodę Ovsiannikowa na przypadek równań różniczkowo–całkowych i przy jej pomocy wyznaczył bezpośrednio (tj. bez przechodzenia do nieskończonego układu równań różniczkowych) pełną grupę symetrii dla wieloskładnikowej plazmy opisywanej układem równań W–P. Otrzymał 5 infinitezimalnych generatorów grupy Liego dopuszczonych przez ten układ równań :

$$
\begin{aligned}
G_1 &= \partial_t \\
G_2 &= \partial_x \\
G_3 &= -t\partial_x + \partial_u \\
G_4 &= -t\partial_t + x\,\partial_x + 2u\,\partial_u + 3E\,\partial_E \\
G_5 &= t\partial_t - 2x\,\partial_x - u\partial_u + 3\sum_{\alpha} f_\alpha \partial_{f_\alpha}
\end{aligned}
$$

W naszych poprzednich pracach[6,7] stosując metodę Taranova wyznaczyliśmy układ czterech generatorów, z których trzy pokrywają się z G_1, G_2, G_3 a czwarty jest liniową kombinacją generatoró w G_4, G_5 [$G'_4 = \frac{1}{3}(G_4 + G_5)$]

Okazało się, że w przypadku gdy wyrażenia całkowe są stosunkowo "proste" można zastosować uproszczoną technikę wyznaczania generatorów grupy Liego. Przepiszmy jeszcze raz układ równań W-P w następujący sposób:

$$f_{\alpha,t} + u\, f_{\alpha,x} + \frac{q_\alpha}{m_\alpha} E\, f_{\alpha,u} = 0 \tag{1}$$

$$E_{,t} + \sum \frac{q_\alpha}{\varepsilon_0} M^1_\alpha = 0 \tag{2}$$

$$E_{,x} - \sum \frac{q_\alpha}{\varepsilon_0} M^0_\alpha = 0 \tag{3}$$

gdzie:

$$M^1_\alpha = \int u\, f_\alpha\, du \tag{4}$$

$$M^0_\alpha = \int f_\alpha\, du \tag{5}$$

$$\left(M^1_{\alpha,x} = M^0_{\alpha,t}\right)$$

W tak postawionym problemie wielkościami do wyznaczenia są $f_\alpha, E, M^1_\alpha, M^0_\alpha$, a nie jak w poprzednim f_α, E. Wprowadzone oznaczenia są standardowe i zgodne z wcześniej używanymi przez nas oznaczeniami [6,7] (tzn.: f_α , m_α, q_α– funkcja rozkładu, ładunek, i masa składnika "α" ; E –samouzgodnione pole elektryczne). Stosując dalej technikę Owsiannikowa równania całkowe na M^1_α, M^0_α traktujemy jako dodatkowe więzy używane do uzgodnienia związków między f_α a M^1_α i M^0_α.

Dalej wprowadzamy oznaczenia

$$\beta_\alpha = \frac{q_\alpha}{\varepsilon_0}$$

$$\gamma_\alpha = \frac{q_\alpha}{m_\alpha}$$

W tym przypadku ogólna postać infinitezimalnego generatora jest następująca:

$$(6)\; G = \dot{t}\,\partial_t + \dot{x}\,\partial_x + \dot{u}\,\partial_u + \dot{E}\,\partial_E + \sum \dot{f}_\alpha\,\partial_{f_\alpha} + \sum_{\alpha,k} \dot{M}^k_\alpha\,\partial_{M^k_\alpha}$$

k = 0,1
α –numeruje cząstki

Podobnie wygląda rozszerzenie $\overset{1}{G}$ generatora G

$$(7) \qquad \overset{1}{G} = G + \sum_\alpha (\overset{t}{\eta}_\alpha\,\partial_{f_{\alpha,t}} + \overset{x}{\eta}_\alpha\,\partial_{f_{\alpha,x}} + \overset{u}{\eta}_{f,\alpha}\,\partial_{f_{\alpha,u}}) + $$
$$+ \overset{x}{E}_{,E}\,\partial_{E,x} + \overset{t}{\eta}_{E,t}\,\partial_{E,t} +$$
$$+ \sum_{\alpha,k}(\overset{t}{\eta}_{M^k_\alpha}\,\partial_{M^k_{\alpha,t}} + \overset{x}{\eta}_{M^k_\alpha}\,\partial_{M^k_{\alpha,x}})$$

gdzie:

$$\overset{t}{\eta}_{f_\alpha} = D_t\,\dot{f}_\alpha + f_{\alpha,t}\,D_t\,\dot{t} - f_{\alpha,x}\,D_t\,\dot{x} - f_{\alpha,u}\,D_t\,\dot{u}$$
$$\overset{x}{\eta}_{f_\alpha} = D_x\,\dot{f}_\alpha + f_{\alpha,t}\,D_x\,\dot{t} - f_{\alpha,x}\,D_x\,\dot{x} - f_{\alpha,u}\,D_x\,\dot{u}$$
$$\overset{u}{\eta}_{f_\alpha} = D_u\,\dot{f}_\alpha + f_{\alpha,t}\,D_u\,\dot{t} - f_{\alpha,x}\,D_u\,\dot{x} - f_{\alpha,u}\,D_u\,\dot{u}$$
$$\overset{t}{\eta}_E = D_t\,\dot{E} + E_{,t}\,D_t\,\dot{t} - E_{,x}\,D_t\,\dot{x}$$
$$\overset{x}{\eta}_E = D_x\,\dot{E} + E_{,t}D_x\,\dot{t} - E_{,x}D_x\,\dot{x}$$
$$\overset{x}{\eta}_{M^k_\alpha} = D_x\,\dot{M}^k_\alpha - \dot{M}^k_{\alpha,t}\,D_x\,\dot{t} - \dot{M}^k_{\alpha,x}\,D_x\,\dot{x}$$
$$\overset{t}{\eta}_{M^k_\alpha} = D_t\,\dot{M}^k_\alpha - \dot{M}^k_{\alpha,t}\,D_t\,\dot{t} - \dot{M}^k_{\alpha,x}\,D_t\,\dot{x}$$

$k = 0,1$

$$D_x = \partial_x + E_{,x}\,\partial_E + \sum_\alpha f_{\alpha,x}\partial_{f_\alpha} + \sum_\alpha M^k_{\alpha,x}\,\partial_{M^k_\alpha}$$
$$D_t = \partial_t + E_{,t}\,\partial_E + \sum_\alpha f_{\alpha,t}\partial_{f_\alpha} + \sum_\alpha M^k_{\alpha,t}\,\partial_{M^k_\alpha}$$
$$D_u = \partial_u + \sum_\alpha f_{\alpha,u}\partial_{f_\alpha}$$

Działając $\overset{1}{G}$ na układ W–P otrzymujemy:

$$\dot{u}\, f_{\alpha,x} + \gamma_\alpha\, \dot{E}\, f_{\alpha,u} + \overset{t}{\eta}_{f_\alpha} + u\, \overset{x}{\eta}_{f_\alpha} + \gamma_\alpha\, E\, \overset{u}{\eta}_{f_\alpha} = 0 \tag{8}$$

$$- \overset{t}{\eta}_E = \sum_\alpha \beta_\alpha\, \dot{\overset{1}{M}}_\alpha \tag{9}$$

$$\overset{x}{\eta}_E = \sum_\alpha \beta_\alpha\, \dot{\overset{0}{M}}_\alpha \tag{10}$$

$$\overset{x}{\eta}_{\overset{1}{M}_\alpha} = - \overset{t}{\eta}_{\overset{0}{M}_\alpha} \tag{11}$$

Korzystając z 9 i 10 $\Rightarrow$

$$D_t\, \dot{E} - E_{,t}\, D_t\, \dot{t} - E_{,x} D_t\, \dot{x} = \sum_\alpha \dot{\overset{1}{M}}_\alpha$$

$$D_x\, \dot{E} - E_{,t}\, D_x\, \dot{t} - E_{,x} D_x\, \dot{x} = \sum_\alpha \dot{\overset{0}{M}}_\alpha$$

Wykorzystując równania 1, 2, 3 wyznaczamy:

$f_{\alpha,t} = \ldots$
$E_{,x} = \ldots$
$E_{,t} = \ldots$

i po wstawieniu do równań określających otrzymujemy:

$\dot{t}_{,M_\alpha^k} = 0$ $\qquad$ $\dot{x}_{,M_\alpha^k} = 0$
$\dot{t}_{,E} = 0$ $\qquad$ $\dot{x}_{,E} = 0$
$\dot{t}_{,f_\alpha} = 0$ $\qquad$ $\dot{x}_{,f_\alpha} = 0$
$\dot{t}_{,x} = 0$

$\dot{E}_{,f_\alpha} = 0$ $\qquad$ $\dot{\overset{1}{M}}_{\alpha,M_\delta^k} = 0$ dla $\alpha \neq \delta$
$\dot{E}_{,t} = 0$ $\qquad$ $\dot{\overset{0}{M}}_{\alpha,M_\delta^k} = 0$ dla $\alpha \neq \delta$ i każdego k
$\dot{E}_{,M_\alpha^k} = 0$ $\qquad$ lub $k = 1$ i każdego δ
$\dot{E}_{,x} = 0$

$$\dot{E}_{,E} - \dot{t}_{,t} = \dot{\overset{1}{M}}_{\alpha,M_\alpha^1}$$

$$\dot{E}_{,E} - \dot{x}_{,x} = \dot{\overset{0}{M}}_{\alpha,M^0_\alpha}$$
$$\dot{x}_t = \dot{\overset{1}{M}}_{\alpha,M^0_\alpha}$$
$$\dot{t} = 0$$

Związki te są analogiczne do otrzymanych w pracach [6,7] Wracając do równania 8 i powtarzając poprzednią procedurę otrzymujemy z równania 8 następujące związki:

$$\dot{f}_{\alpha,f_s} = 0 \quad \alpha \neq s$$
$$\dot{f}_{\alpha,M^k_s} = 0 \quad \text{dla każdego k},\alpha,s$$
$$\dot{f}_{\alpha,E} = 0 \quad \text{dla każdego } \alpha$$
$$\dot{t}_u = 0$$
$$\dot{x}_u = 0$$

$$\dot{u}_u = \dot{x}_x - \dot{t}_t$$
$$\dot{u}_u = \dot{E}_E + \dot{t}_t$$

Dalej

$$\dot{E} = C_E E$$
$$\dot{t} = C_t t + B_t$$
$$\dot{u} = C_u u + B_u$$

skąd

$$C_E = C_u - C_t$$

$$\dot{x} = (C_E + 2C_t)t + B_u t + B_x$$
$$\dot{u} = B_u + u(C_E + C_t)$$

gdzie : C_E , C_u , C_t , B_u , B_t , B_x – stałe

$$\dot{\overset{1}{M}}_\alpha = (C_E - C_t)M^1_\alpha + B_u M^0_\alpha$$
$$\dot{\overset{0}{M}}_\alpha = -2C_t M^0_\alpha$$

Podsumowując te cząstkowe rezultaty widać, że otrzymaliśmy następujące związki:

$$\text{(12)} \qquad \overset{\bullet}{x} = (C_E + 2C_t)t + B_u t + B_x$$

$$\text{(13)} \qquad \overset{\bullet}{E} = C_E E$$

$$\text{(14)} \qquad \overset{\bullet}{t} = C_t t + B_t$$

$$\text{(15)} \qquad \overset{\bullet}{u} = C_u u + B_u$$

$$\text{(16)} \qquad \overset{\bullet}{M}{}^1_\alpha = (C_E - C_t) M^1_\alpha + B_u M^0_\alpha$$

$$\text{(17)} \qquad \overset{\bullet}{M}{}^0_\alpha = -2 C_t M^0_\alpha$$

gdzie

$C_E = C_u - C_t$

Aby wyznaczyć $\overset{\bullet}{f}$ skorzystamy z definicji przekształcenia punktowego:

$$\text{(18)} \qquad \widetilde{M}^1_\alpha = M^1_\alpha + \lambda \overset{\bullet}{M}{}^1_\alpha + O(\lambda^2)$$

$$\text{(19)} \qquad \widetilde{M}^0_\alpha = M^0_\alpha + \lambda \overset{\bullet}{M}{}^0_\alpha + O(\lambda^2)$$

$$\text{(20)} \qquad \tilde{f}_\alpha = f_\alpha + \lambda \overset{\bullet}{f}_\alpha + O(\lambda^2)$$

$$\text{(21)} \qquad \tilde{u}_\alpha = u_\alpha + \lambda \overset{\bullet}{u} + O(\lambda^2)$$

$$\text{(22)} \qquad d\tilde{u}_\alpha = du_\alpha + \lambda \frac{\partial \overset{\bullet}{u}}{\partial u} du$$

Z drugiej strony

$\widetilde{M}^1_\alpha = \int \tilde{u} \tilde{f}_\alpha d\tilde{u} = \ldots =$

$= M^1_\alpha + \lambda \int (f_\alpha \overset{\bullet}{u} + \overset{\bullet}{f}_\alpha u + u f_\alpha \frac{\partial \overset{\bullet}{u}}{\partial u}) du + O(\lambda^2)$

i analogicznie

$\widetilde{M}^0_\alpha = \int \tilde{f}_\alpha d\tilde{u} = \ldots = M^0_\alpha + \lambda \int (\overset{\bullet}{f}_\alpha + f_\alpha \frac{\partial \overset{\bullet}{u}}{\partial u}) du + O(\lambda^2)$

stąd:

(23) $$\dot{f}_\alpha = -(C_E + 3C_t)f_\alpha$$

Wstawiając w ten sposób wyznaczone związki 12,13, 14, 15, 16,17, 23 do 6 otrzymujemy infinitezimalne generatory ciągłej grupy przekształceń dopuszczanej przez układ równań Własowa-Poissona dla wieloskadnikowej plazmy (1, 2,3). Widać, że ten nieskomplikowany zabieg prowadzi prosto i szybko do rezultatów otrzymanych przez J.Zawistowskiego[5]. Nie jest on jednak ogólny i jego powodzenie uwarunkowane jest "prostotą" członu całkowego. W równaniach kinetycznych dla plazmy człony całkowe są momentami funkcji rozkładu względem prędkości i w tym przypadku rezultaty otrzymuje się stosunkowo prosto. Zachęceni otrzymanymi wynikami zastosowaliśmy zaprezentowaną procedurę do zlinearyzowanego układu równań W-P:

(24) $$f_{\alpha,t} + u\, f_{\alpha,x} + \gamma_\alpha E\, f_{0\alpha,u} = 0$$

(25) $$E_{,t} + \sum \frac{q_\alpha}{\varepsilon_0} M^1_\alpha = 0$$

(26) $$E_{,x} - \sum \frac{q_\alpha}{\varepsilon_0} M^0_\alpha = 0$$

gdzie $f_{0\alpha}$ znana równowagowa funkcja rozkładu, i do pełnego układu równań Własowa-Maxwella:

(27) $$\sum x_k E_{k,x_k}; =; \frac{N_0 e}{\epsilon_0}(1 - M^0)$$

(28) $$\sum \epsilon_{klm} E_{m,x_l}; =; -B_{k,t}$$

(29) $$\sum B_{k,x_k}; =; 0$$

(30) $$\sum \epsilon_{klm} B_{m,x_l}; =; \mu_0(\epsilon_0 E_{k,t} - M^1_k)$$

(31) $$f_{,t} + \sum_k u_k f_{,x_k} + \frac{q}{m} \sum_{k,l,m} (E_k + \frac{1}{c}(\epsilon_{klm} B_m u_l)) f_{,u_l} = 0$$

ϵ_{klm} - tensor antysymetryczny
k,l,m = 1,2,3

$$M^1 = \int u f du$$

$$M^0 = \int f du$$

oznaczenia:

$$\vec{x} = (x_1, x_2, x_3) \qquad \vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$$

$$f = f(\vec{x}, \vec{u}, t) \qquad \vec{M}^1 = (M_1^1, M_2^1, M_3^1)$$

$$\vec{E} = (E_1, E_2, E_3) \qquad \vec{B} = (B_1, B_2, B_3)$$

$$F_{a,x_k} = \frac{\partial F_a}{\partial x_k}$$

Częściowe rezultaty tych obliczeń prezentowaliśmy na konferencji P T Z E. Otrzymane aktualnie wyniki zaprezentujemy w pracy po przeanalizowaniu hierarchii równań Własowa-Poissona (ewentualnie Własowa-Maxwella) w odniesieniu do stanu równowagi, co pozwoli na interpretację wcześniej otrzymanych rezultatów.

LITERATURA

1. Owsiannikow L.W., Gruppowoj analiz differencjalnych urawnienii, Nauka, Moskwa 1978.

2. Ibragimow N.H., Grupowyje preobrazowanija w matamaticheskoi fizikie, Nauka, Moskwa 1983.

3. Bluman G.W.,Cole J.D., Similarity methods for differential Equations, Springer-Verlag, 1974.

4. Taranov W.B., ŻTF 46, 6, 1976.

5. Zawistowski J., Zastosowanie teorii grup do równa różniczkowo-całkowych fizyki plazmy.Prace IPPT, 23, 1992

6. B.Atamaniuk, A.J.Turski, J.Tech.Phys.XXX,2, 1989.

7. B.Atamaniuk, Praca IPPT 50 1988.