

4.43 — pręty, belki,
układy prętowe

A. Niespodziana, R. Bogacz

O WPLYWIE STOPNIA
NIEKONSERWATYWNOŚCI OBCIĄŻENIA
NA CHARAKTER UTRATY STATECZNOŚCI
KOLUMNY DYSKRETNO CIĄGLEJ

36/1990

P. 269



WARSZAWA 1990

<http://rcin.org.pl>

Praca wpłynęła do Redakcji dnia 20 czerwca 1990 r.



56796



N a p r a w a c h r ę k o p i s u

Instytut Podstawowych Problemów Techniki PAN

Nakład 120 egz. Ark.wyd.1,0 Ark.druk.1,25

Oddano do drukarni w listopadzie 1990 r.

Nr zamówienia 297/90

Warszawska Drukarnia Naukowa, Warszawa
ul.Śniadeckich 8

A. NIESPODZIANA

Zakład Teorii Konstrukcji
Akademia Techniczno-Rolnicza
w Bydgoszczy

R. BOGACZ

Samodzielna Pracownia Dynamiki
I Stateczności Maszyn i Pojazdów
Instytut Podstawowych Problemów
Techniki PAN
w Warszawie

O WPLYWIE STOPNIA NIEKONSERWATYWNOŚCI
OBCIĄŻENIA NA CHARAKTER UTRATY STATECZNOŚCI
KOLUMNY DYSKRETNO CIAGŁEJ.

Streszczenie.

Rozważania dotyczą stateczności kolumny hybrydowej (ciągłych segmentów sprężystych połączonych przegubami) poddanej skupionemu obciążeniu cyrkulującemu, działającemu na nieutwierdzony koniec kolumny. Zagadnienie stanowi uogólniony problem Beck'a (ze względu na dyskretne przeguby), lub uogólniony problem Zieglera (ze względu na odkształcalność ramion wahadła Zieglera). Niniejsza praca stanowi uzupełnienie wcześniejszych badań autorów dotyczących konstrukcji złożonych z różnego rodzaju segmentów, podpór, przegubów i węzłów z lokalną utratą sztywności na kierunku działania siły tnącej. Uwzględnienie współczynnika śledzenia pozwala ocenić wrażliwość konstrukcji w tym konstrukcji optymalnej (np. [4]) na charakter obciążenia śledzącego. Praca zawiera kilka przykładów analizy numerycznej pozwalających ocenić jakościowo badane zjawisko stabilizacji konstrukcji pod działaniem obciążenia niekonserwatywnego.

1. Wstęp.

Problem wpływu niekonserwatywności obciążenia na krytyczne parametry stabilności był i jest przedmiotem studiów wielu badaczy. Autorzy pracy [1] określili zależność siły krytycznej od parametru η charakteryzującego niekonserwatywność obciążenia dla modelu Zieglera /wahadło o dwóch stopniach swobody/.

Wykazali oni, że dla $\eta \in < 0; 0,345 >$ oraz $\eta \in < 1,305; \infty >$ układ traci stateczność dywergen-
 tnie a wartość obciążenia krytycznego można określić stosując statyczne kryterium stabilności. W przedziale $\eta \in (0,345; 1,305)$ następuje oscylacyjna utrata stateczności a kryterium statyczne nie prowadzi do poprawnych rezultatów, w przeciwieństwie do kryterium kinematycznego. Zagadnienie to jest również badane w pracy [2] z uwzględnieniem tłumienia zewnętrznego i wewnętrznego. Wykazano tam możliwość destabilizującego wpływu tłumienia na krytyczne parametry obciążenia. Autorzy pracy badając dwuelementowy układ dyskretny z tłumieniem zewnętrznym translacyjnym i wewnętrznym rotacyjnym uzyskali wyniki wskazujące na istotną zależność obciążenia krytycznego od intensywności tłumienia.

Konsekwencją przyjętego modelu był fakt, że przy pewnych wartościach parametru η krzywe ograniczające obszary niestabilności /na płaszczyźnie P_{kr}, η / dążyły

asymptotycznie do nieskończoności, niezależnie od przyjętej intensywności tłumienia jako parametru.

Zagadnienie wpływu tłumienia było również dyskutowane przez autorów pracy [3], którzy zmieniając nieznacznie model tłumienia wykazali ograniczoną obszarów niestateczności.

Wpływ niekonserwatywności obciążenia /parametru η / na wartość siły krytycznej dla kolumny ciągłej był przedmiotem badań m.in. w pracach [4], [5]. Autorzy [4], [5] wykazali dużą wrażliwość obciążenia krytycznego kolumny ciągłej z jednym przegubem na zmianę parametrów α i η /stała sprężysta przegubu, współczynnik niekonserwatywności obciążenia/.

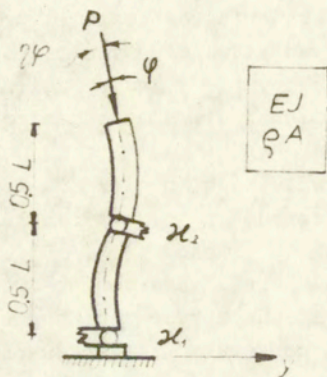
Niniejsza praca stanowi uogólnienie i uzupełnienie wcześniejszych badań i jest poświęcona wpływowi tych parametrów układu na stabilność sprężystej kolumny ciągłej z dwoma przegubami.

2. Sformułowanie problemu

W pracy rozważa się kolumnę ciągłą z dwoma przegubami o liniowych charakterystykach sprężystych, rozmieszczonymi jak na rysunku 1.

Założono, że kierunek obciążenia siłą skupioną jest zależny od wartości parametru η . W szczególnym przypadku dla $\eta = 1$ otrzymuje się obciążenie kolumny siłą styczną do swobodnego końca, natomiast przypadek Eulera dla $\eta = 0$. Obliczenia przeprowadzono wykorzystując metodę macierzy przeniesienia [6], [7]. Zastosowanie tej metody do zagadnień stateczności kolumny Becke'a omówione zostało w [3]. Ze względu na fakt, że w niniejszych rozważaniach kierunek działania obciążenia zależy od parametru η , nastąpi zmiana warunków

brzegowych zagadnienia.



rys. 1

Rozwiązanie różniczkowego równania ruchu odkształcalnej belki ciągłej

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(EJ \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right) + \rho \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \epsilon A \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0 \quad /2.1/$$

z warunkami brzegowymi postaci:

$$y(0, t) = \frac{\partial y(0, t)}{\partial x} = 0$$

$$EJ \frac{\partial^2 y(l, t)}{\partial x^2} = 0$$

/2.2/

$$EJ \frac{\partial^2 y(l, t)}{\partial x^2} + P(1-\eta) \frac{\partial y(l, t)}{\partial x} = 0$$

pozwoлиło na określenie macierzy przeniesienia poszczególnych elementów kolumny.

3. Wyniki analizy numerycznej

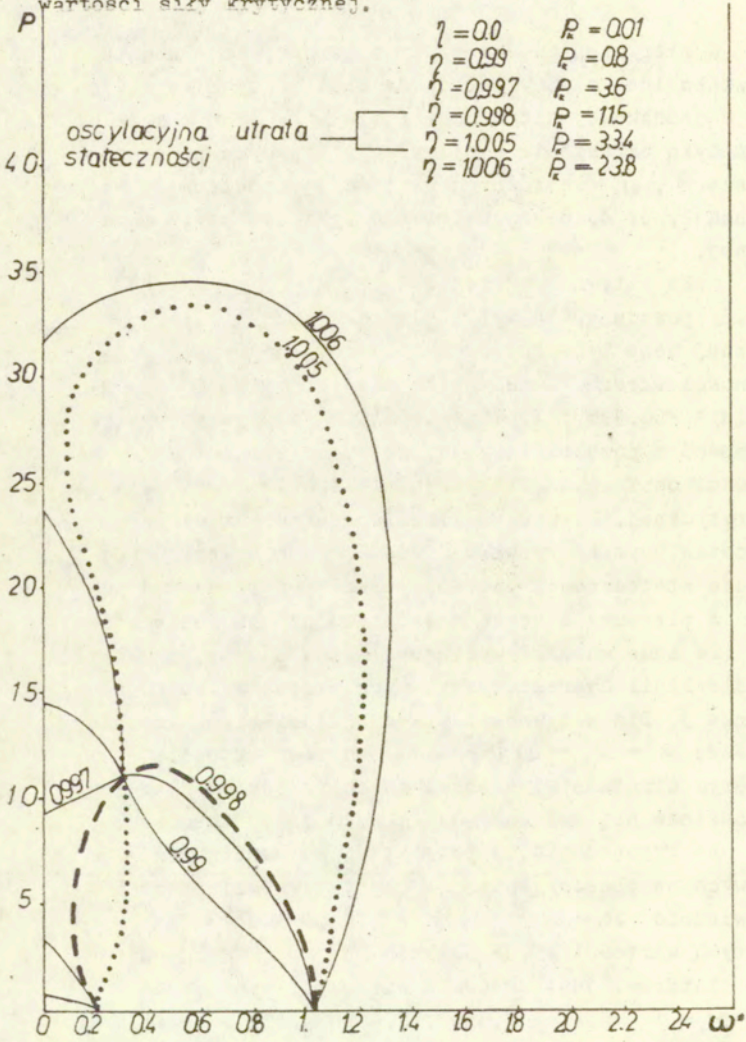
W pierwszej części pracy założono, że elementy odkształcalne kolumny połączone są przegubami sprężystymi o jednakowej sztywności $\chi_1 = \chi_2$. Jednym z celów badań było określenie konfiguracji krzywych na płaszczyźnie P, ω dla różnych wartości parametru η . Na rysunkach 2, 3, 4, 5 zilustrowano wyniki analizy numerycznej.

Mała sztywność przegubów np. $\chi_1 = \chi_2 = 0.01 \sqrt{\frac{EI^4}{EJ}} \omega$ /rys.2/ powoduje, że tylko siła o kierunku bliskim stycznej może być przyczyną oscylacyjnej utraty stateczności układu. Zachodzi to dla parametru η o wartości $\eta \in \langle 0,998 ; 1,005 \rangle$. Zmiana formy utraty stateczności z postaci oscylacyjnej do dywergentnej w zależności od η charakteryzuje się skokiem wartości siły krytycznej. Z wykresu linii charakterystycznych przedstawionym na rysunku 2 widać, że o dywergentnej utracie stateczności decyduje zawsze pierwsza postać drgań a pierwsza i druga o oscylacyjnym jej charakterze.

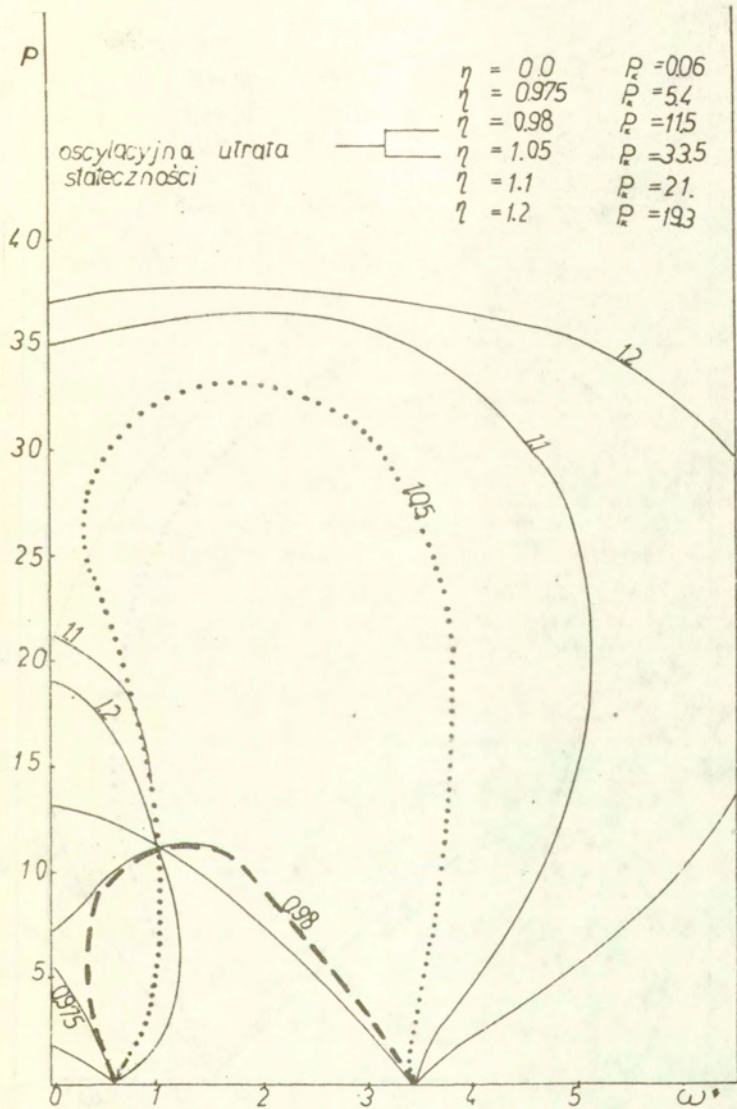
Te same wnioski wyciągnąć można z analizy ukształtowania linii charakterystycznych przedstawionych na rysunku 3. Dla sztywności przegubów dziesięciokrotnie większej $\chi_1 = \chi_2 = 0.1 \sqrt{\frac{EI^4}{EJ}} \omega$ zakres wartości η , w którym utrata stateczności ma charakter oscylacyjny, nieznacznie się zwiększa $\eta \in \langle 0,98 ; 1,05 \rangle$.

Na rysunkach 4, 5 przedstawiono konfigurację krzywych na płaszczyźnie P, ω dla sztywności przegubów odpowiednio $\chi_1 = \chi_2 = 1 \sqrt{\frac{EI^4}{EJ}} \omega$ i $\chi_1 = \chi_2 = 10 \sqrt{\frac{EI^4}{EJ}} \omega$. Dla tych wartości χ_1, χ_2 zakres parametru η odpowiadający flaterowi jest znacznie większy i wynosi dla $\chi_1 = \chi_2 = 1$ $\eta \in \langle 0,825 ; 1,6 \rangle$ a dla $\chi_1 = \chi_2 = 10$ odpowiednio $\eta \in \langle 0,58 ; 22 \rangle$. Można zauważyć również, że maksymalna wartość siły krytycznej przy założeniu $\chi_1 = \chi_2 = \chi$ występuje przy zmianie formy utraty

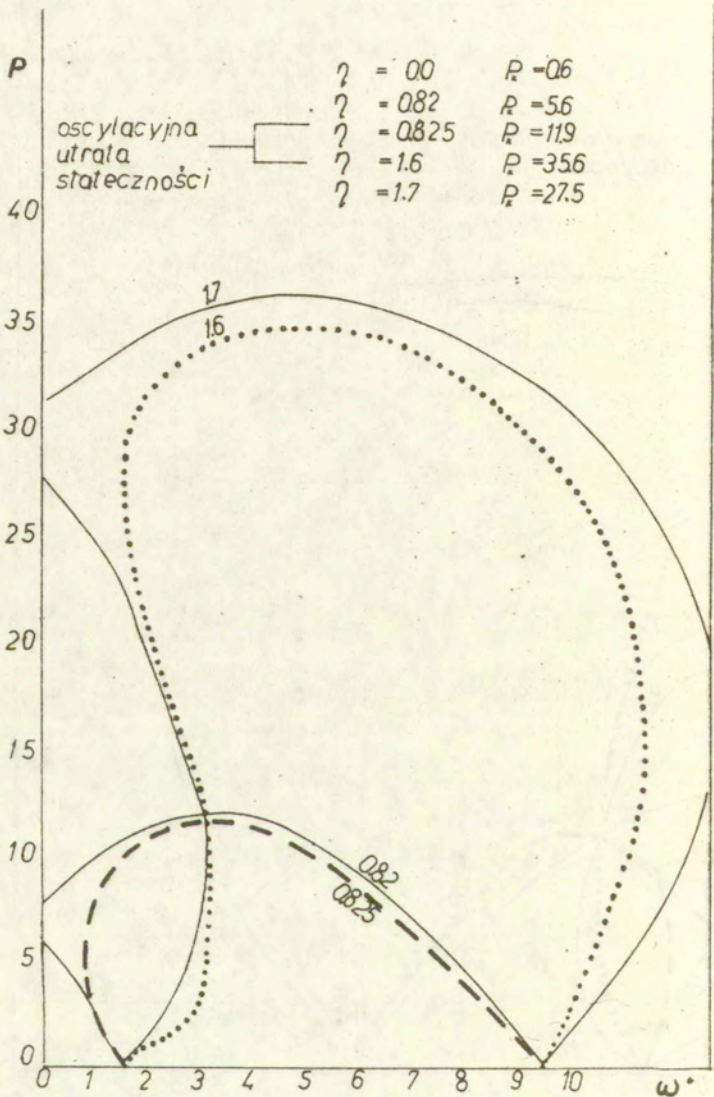
stateczności od postaci oscylacyjnej do dywergentnej. Ponadto większej sztywności przegubów odpowiadają większe wartości siły krytycznej.



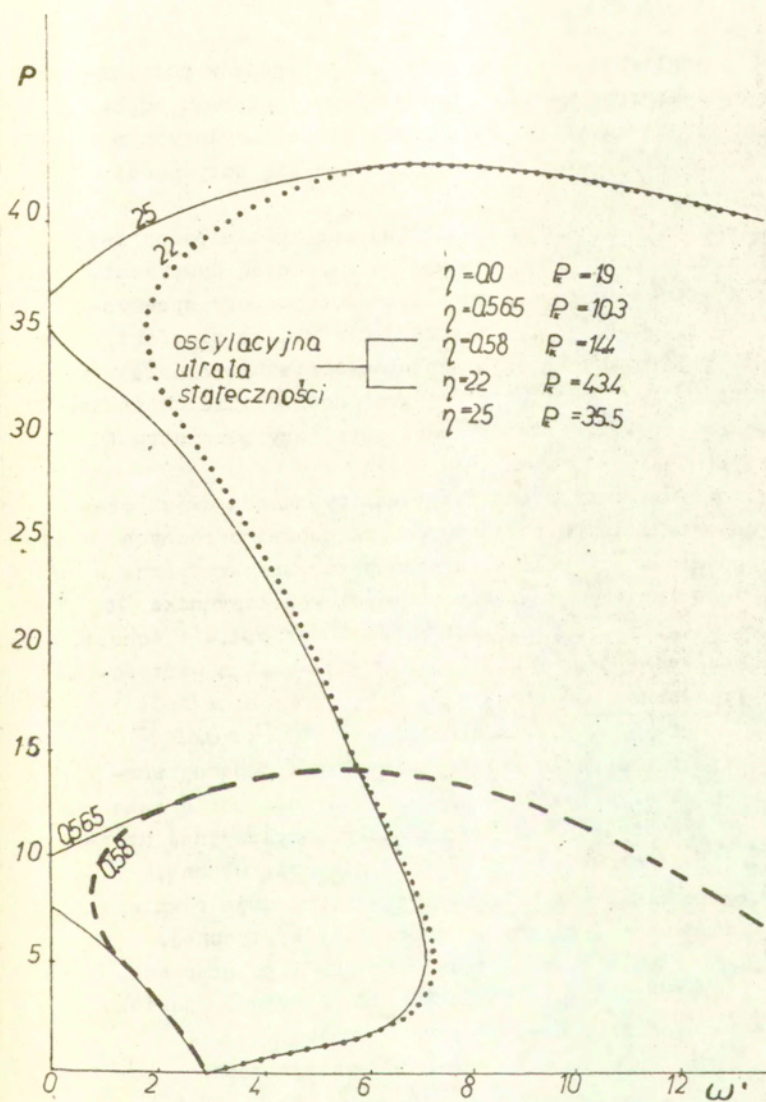
Rys. 2. Zależność P/ω dla $\alpha_1 = \alpha_2 = 0.01$ i $\frac{EI^4}{EJ} = \omega^2$



rys. 3. Zależność P/ω dla $\chi_1 = \chi_2 = 0,1$



Rys. 4. Zależność P/ω dla $\alpha_1 = \alpha_2 = 1 - \sqrt{\frac{\rho l^4}{EJ} \omega}$



Rys. 5. Zależność P/ω dla $\kappa_1 = \kappa_2 = 10 \sqrt{\frac{E_1 + \omega}{E_2}}$

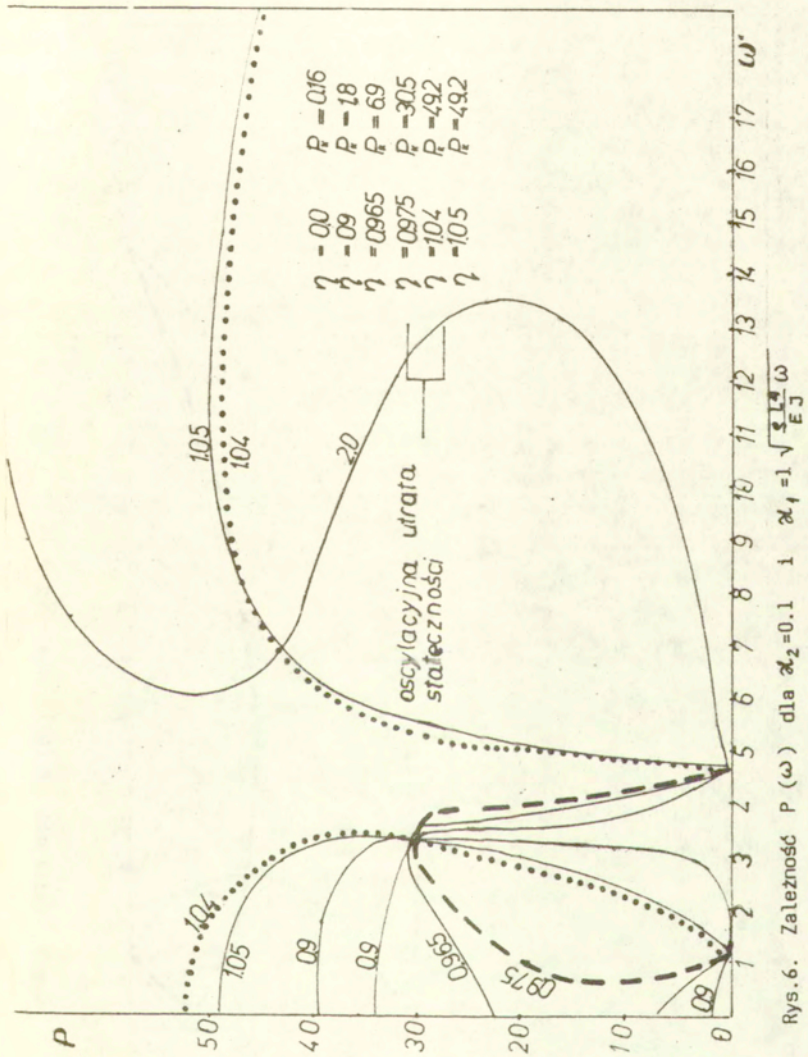
Wyniki analizy powyższych czterech przypadków potwierdzają, że zakres wartości parametru η , któremu odpowiada utrata stateczności o charakterze oscylacyjnym istotnie maleje wraz ze zmniejszaniem się sztywności przegubów.

Rezultaty dla kolumny ciągłej sprężystie podpartej otrzymane w pracy [4] wskazują na zależność dywergentnej utraty stateczności od sztywności podpory sprężystej i jej lokalizacji. Interesującym wydaje się fakt, że dla każdej sztywności przegubów \mathcal{K} istnieje para wartości P , ω , przez które przechodzą linie charakterystyczne z pewnego znanego zakresu zmiany parametru η /Rys. 2 - 5/.

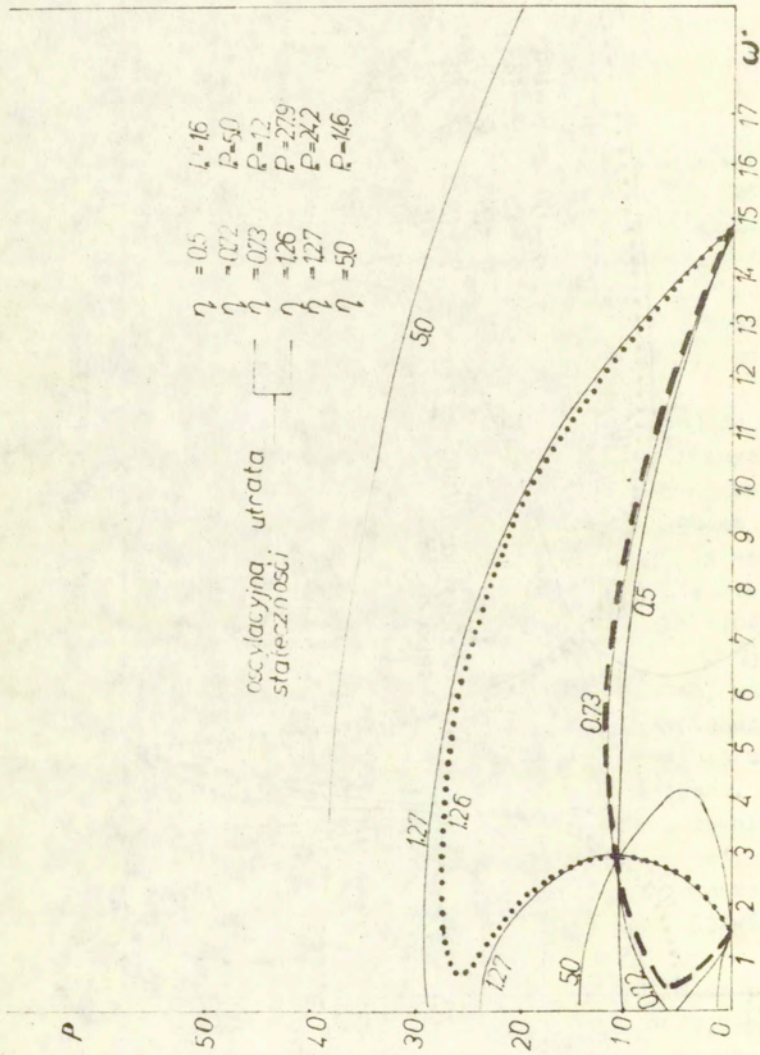
Druga część pracy dotyczy analizy układu dwóch prętów odkształcalnych połączonych przegubami o różnych sztywnościach przegubów. Zbadano parametry krytyczne w dostatecznie dużym zakresie wartości współczynnika \mathcal{K}_2 tj. $\mathcal{K}_2 = 0,1 ; 0,2 ; 0,5 ; 1 ; 2 ; 10$ przy $\mathcal{K}_1 = 1 = \text{const.}$

W zakresie $\mathcal{K}_2 \in \langle 0,1 ; 10 \rangle$ maksymalna wartość siły krytycznej wynosi $P_k = 49,2 \frac{L^2}{EJ}$ przy $\eta = 1,04$ i $\mathcal{K}_2 = 0,1 \sqrt{\frac{9L^4}{EJ} \omega}$. Minimalna wartość $P_k = 0,16 \frac{L^2}{EJ}$ występuje w przypadku Eulerowskim przy tej samej wartości \mathcal{K}_2 /Rys. 6 / . Tę maksymalną wartość obciążenia krytycznego uzyskuje się w przypadku oscylacyjnej utraty stateczności z drugą i trzecią postacią własną. Przebieg linii charakterystycznych powoduje również zjawisko skokowej zmiany wartości siły krytycznej, przy czym zawsze przed przeskokiem jak i po przeskoku utrata stateczności ma charakter oscylacyjny. Zjawisko to zostało szczegółowo omówione w pracy [8].

W miarę wzrostu sztywności \mathcal{K}_2 maleje różnica pomiędzy P_{\max} i P_{\min} . Dla $\mathcal{K}_2 = 10 \sqrt{\frac{9L^4}{EJ} \omega}$ $P_{\max} = 27,9 \frac{L^2}{EJ}$ przy $\eta = 1,26$ i $P_{\min} = 0,71 \frac{L^2}{EJ}$ przy $\eta = 0,0$ /Rys. 7/.



Rys. 6. Zależność $P(\omega)$ dla $\alpha_2 = 0.1$ i $\alpha_1 = 1 \sqrt{\frac{EJ}{EJ}}$

Rys.7. Zależność $P(\omega)$ dla $\alpha_2 = 10$

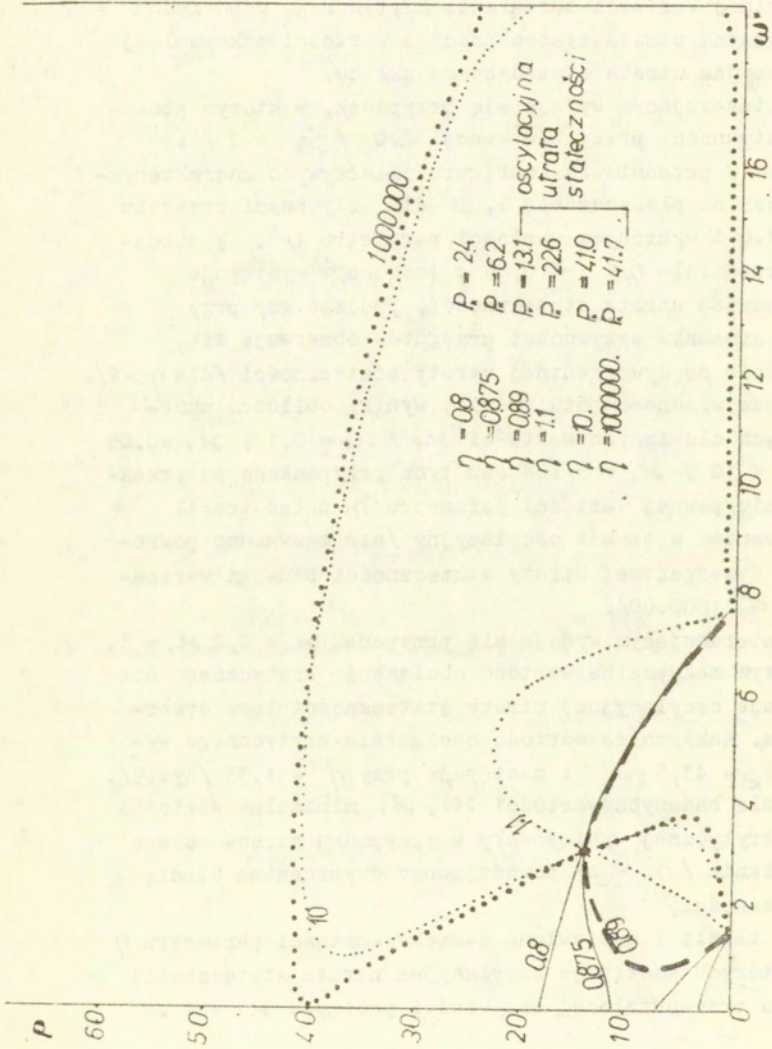
Minimalnej wartości obciążenia krytycznego odpowiada dywergentna utrata stateczności a wartości maksymalnej oscylacyjna utrata stateczności układu.

Interesującym wydaje się przypadek, w którym stosunek sztywności przegubów wynosi $2.0 / \frac{\lambda_1}{\lambda_2} = 2 /$. Rysunek 8 przedstawia konfigurację krzywych charakterystycznych na płaszczyźnie F, ω dla sztywności przegubu $\lambda_1 = 1.0$ i wybranych wartości parametru η . W zbadanym przedziale $\eta \in \langle 0,89; 100000 \rangle$ występuje oscylacyjna utrata stateczności, podczas gdy przy innym stosunku sztywności przegubów obserwuje się przejście do dywergentnej utraty stateczności /dla $\eta > 2/$. Powyższą własność potwierdziły wyniki obliczeń numerycznych dla innych wartości $\lambda_1 / \lambda_2 = 0.1$, $\lambda_2 = 0,05$ i $\lambda_1 = 10$, $\lambda_2 = 5/$. W obu tych przypadkach po przekroczeniu pewnej wartości parametru η układ tracił stateczność w sposób oscylacyjny /nie zauważono powrotu do dywergentnej utraty stateczności badając wartości $\eta \leq 1000000/$.

Interesującym wydaje się przypadek $\lambda_2 = 0,2$, $\lambda_1 = 1$, w którym maksymalna wartość obciążenia krytycznego nie powoduje oscylacyjnej utraty stateczności lecz dywergentną. Maksymalna wartość obciążenia krytycznego wynosi $F_k = 43,5 \frac{L^2}{EJ}$ i następuje przy $\eta = 1,33$ /Rys.9/.

Dla badanych wartości λ_1, λ_2 minimalne wartości siły krytycznej występowały w przypadku zachowawczego obciążenia / $\eta = 0/$ powodującego dywergentną utratę stateczności,

W tabeli 1 zestawiono zakresy wartości parametru η dla których następuje oscylacyjna utrata stateczności układu przy ustalonej sztywności przegubu $\lambda_1 = 1$.



Rys. 8. Zależność P (ω) dla $\alpha_2 = 0.5$ ($\alpha_1 = 2$)

Rys.9. Zależność P (ω) dla $\alpha_2 = 0.2$

Tabela 1.

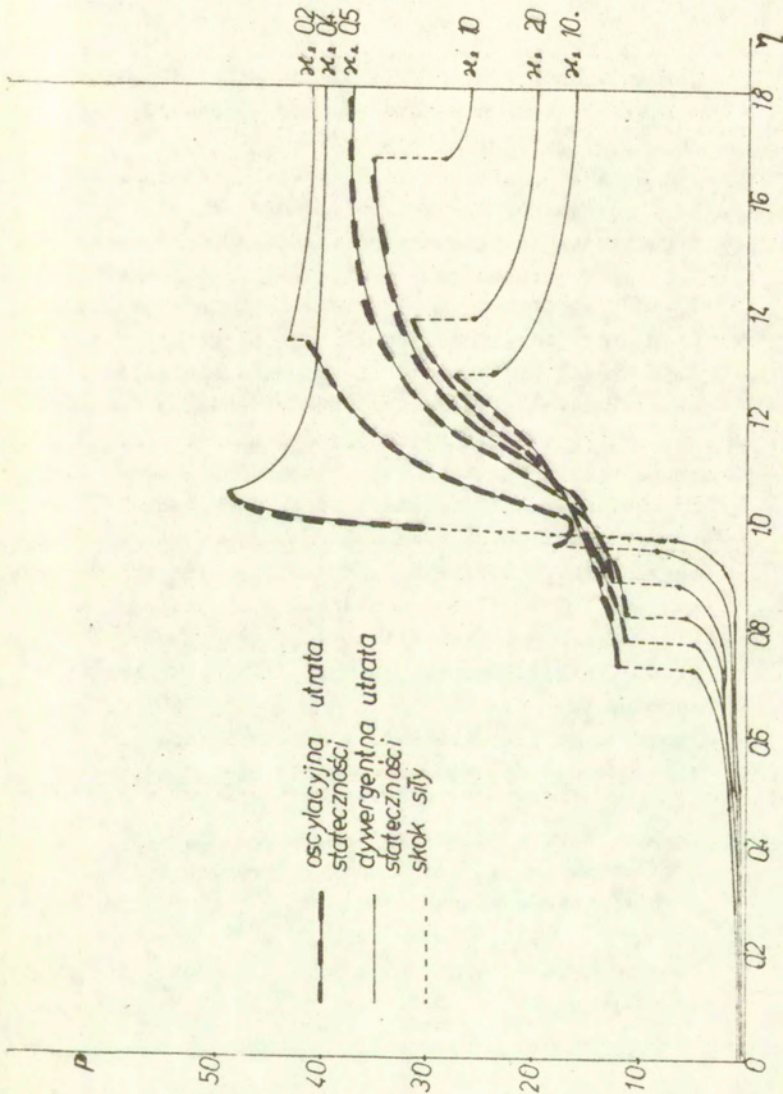
λ_2	Zakres odpowiadający oscylacyjnej utracie stateczności	Odpowiadające wartości sił krytycznych
10	0,73 ÷ 1,26	12,0 ÷ 27,9
2	0,80 ÷ 1,35	11,8 ÷ 31,5
1	0,825 ÷ 1,6	11,9 ÷ 35,6
0,5	0,89 ÷ $\eta > 10^6$	13,1 ÷ 41,7
0,2	0,95 ÷ 1,32	18,2 ÷ 41,5
0,1	0,975 ÷ 1,04	30,5 ÷ 49,2

Można zauważyć, że sztywność przegubu górnego kolumny ma decydujący wpływ na charakter utraty stateczności. Im bardziej podatny jest przegub górny tym mniejszy jest zakres parametru η , dla którego układ traci stateczność w sposób oscylacyjny. Dla $\lambda_2 < 0,5$ / $\lambda_1 = 1 = \text{const}$ / przedział η zwęża się a jego graniczne wartości dążą do jedności.

Z przeprowadzonej analizy wynika, że siła styczna do swobodnego końca kolumny / $\eta = 1$ / powoduje zawsze oscylacyjną utratę stateczności. Przy małej sztywności przegubu górnego ($\lambda_2 < 0,2$) oscylacyjna utrata stateczności ma miejsce tylko dla wartości parametru η bliskiej jedności w przypadku, gdy sztywność przegubu $\lambda_2 = 0,5$ występuje oscylacyjna utrata stateczności dla bardzo dużego zakresu zmienności programu η (0,89; 10^6).

Należy podkreślić, że rezultaty otrzymane dla układów idealnie sprężystych, w których nie uwzględnia

się wpływu tłumienia, mają tylko charakter poznawczy.



Rys.10. Zależność siły krytycznej od parametru η przy ustalonych wartościach α_2 .

4. Literatura cytowana w tekście.

- [1] Herman G. , Bungay R.W. : On the stability of elastic systems subjected to non - conservative forces, J.Appl. Mech. 31, 1964 , 435-440
- [2] Gajewski A. , Życzkowski M. : Wpływ jednoczesnego, niejednorodnego tarcia wewnętrznego i zewnętrznego na stateczność układów niekonserwatywnych, Mechanika Teoretyczna i Stosowana 1, 10 , 1972
- [3] Bogacz R. , Niespodziana A. : O obszarach niestateczności pewnych modeli kolumn obciążonych siłą ścieżającą, Prace IPPT , 36 , 1984
- [4] Bogacz R. , Mahrenholtz O. : Optimization of supporting conditions for columns subjected to nonconservative loads , Proc. GAMM Seminar on Optimization, Siegen 1988, pp. 71 - 79.
- [5] Sugiyama V. , Kawagoe H. , Maeda S. : Destabilizing effect of elastic constraint on the stability of non - conservative elastic systems , Proc. of IUTAM Sympos. on Optimization Melbourne 1988 pp 125 - 135
- [6] Pestel E.C. , Leckie F.A. : Matrix Method in elastomechanics, Mc. Graw - Hill Book Company, New York, 1963
- [7] Makajew W.P. , Grinienko N.T. , Pawlujuk J.U. : Statyczneskije Zadaczi Dinamiki Uprugich Konstrukcji, Moskwa "Nauka" 1984
- [8] Bogacz R. , Niespodziana A. : O stateczności ciągłych kolumn Becke'a ze zlokalizowaną utratą sztywności, Prace IPPT, 27 , 1987