

34/1987

Marek Miksa

WPLYW MAŁYCH DRGAŃ SKRĘTNYCH CZOPA
NA NOSNOŚĆ ŁOŻYSKA POPRZECZNEGO
Z UWZGLĘDNIENIEM SIŁ BEZWŁADNOŚCI

34/1987

P. 269



WARSZAWA 1987

Praca wpłynęła do Redakcji dnia 17 września 1987 r.



56826



Na prawach rękopisu

Instytut Podstawowych Problemów Techniki PAN

Nakład 140 egz. Ark.wyd. 1,91 Ark.druk. 3,25

Oddano do drukarni w marcu 1987 r.

Nr zamówienia 563/87.

Warszawska Drukarnia Naukowa, Warszawa,
ul. Śniadeckich 8

Marek Miksa
Pracownia Fizyki Polimerów IPPT PAN
Politechnika Świętokrzyska - Kielce

WPLYW MAŁYCH DRGAŃ SKRĘTNYCH CZOPA
NA NOŚNOŚĆ ŁOŻYSKA POPRZECZNEGO
Z UWZGLĘDNIENIEM SIŁ BEZWŁADNOŚCI

Streszczenie

W obecnej pracy, będącej bezpośrednią kontynuacją poprzednich rozważań [1] dla drgań skrętnych czopa o niskich częstościach, uwzględniono człony inercyjne w odpowiednich równaniach ruchu. Stosując metodę perturbacyjną przedyskutowano szczegółowe rozwiązania dla drgań skrętnych o małych amplitudach lecz wysokich częstotliwościach nałożonych na ustalony ruch czopa łożyska. Jako czynnik smarujący łożysko przyjęto ciecz opisywaną modelem cieczy drugiego rzędu. Przedstawiono także porównanie wyników z wynikami pracy poprzedniej [1].

1. WSTĘP

W poprzedniej pracy [1] rozpatrzono zagadnienie wpływu dodatkowych skrętnych drgań harmonicznych czopa ślizgowego łożyska poprzecznego na zmianę siły nośnej łożyska. Przyjęto, że amplituda i częstość drgań są na tyle małe, że człony inercyjne w równaniach ruchu można zaniedbać. Analizę przeprowadzono dla przypadku, gdy czynnikiem smarującym była ciecz opisywana modelem cieczy drugiego rzędu.

W obecnej pracy przyjmujemy ten sam model cieczy drugiego rzędu, uwzględniając dodatkowo zlinearyzowane człony bezwładności w równaniach ruchu, a pomijając człony konwekcyjne. Takie podejście jest możliwe wówczas, gdy dodatkowe drgania skrętne czopa są drganiami o małej amplitudzie lecz o dużej częstotliwości; mówiąc inaczej są to drgania o wysokiej "częstotliwościowej liczbie Reynoldsa". Interesować nas będzie, jak dodatkowe drgania czopa wynikające z nierównomiernych obrotów wału maszyny w rzeczywistości wpływają na siłę nośną łożyska. Siła ta jest inna w przypadku gdy czynnikiem smarującym jest ciecz newtonowska i inna, gdy czynnikiem tym jest ciecz drugiego rzędu. W analizie zagadnienia posłużymy się metodą perturbacyjną Jonesa i Waltersa [2], zastosowaną w pracach Zahorskiego [3,4], a także we wspomnianej wyżej pracy [1].

2. GEOMETRIA CZOPA

Geometria łożyska przedstawiona jest na Rys.1, gdzie oznaczono: e - mimośród łożyska (bezwzględny), R_1 - promień panewki, R_2 - promień czopa, punkt O - środek panewki, punkt C - środek czopa.

Przybliżoną zależność grubości warstwy smarującej h w funkcji kąta θ otrzymamy w postaci [5]:

$$h = c (1 + \varepsilon \cos \theta) , \quad (2.1)$$

gdzie $c = R_1 - R_2$ jest luzem promieniowym łożyska,
a $\varepsilon = e/c$ mimośrodem względnym.

3. PRZEPŁYW CIECZY NEWTONOWSKIEJ W ŁOŻYSKU Z UWZGLĘDNIENIEM DODATKOWYCH DRGAŃ SKRĘTNYCH CZOPA

3.1. Założenia upraszczające i równania ruchu.

Rozpatrzmy przypadek gdy czop łożyska poddany jest dodatkowym skrętnym drganiom harmonicznym o dużej częstotliwości i stosunkowo małej amplitudzie. Równania ruchu dla cieczy smarującej otrzymamy z równań Naviera-Stokesa dla przepływu płaskiego, dokonując w nich uproszczeń zgodnych z założeniami klasycznej teorii smarowania (por.[5]), a także wynikających z ograniczenia się do przypadku drgań o dużej "częstotliwościowej liczbie Reynoldsa" (por.[4]).

W biegunowym układzie współrzędnych (r, θ) równanie Naviera-Stokesa dla przepływu płaskiego ma postać:

$$\begin{aligned} & \rho \left(v_{\theta,t} + v_r v_{\theta,r} + \frac{1}{r} v_{\theta,\theta} + \frac{1}{r} v_r v_{\theta} \right) = \\ & = \mu \left\{ \left[\frac{1}{r} (r v_{\theta}) \right]_{,r} + \frac{1}{r^2} v_{\theta,\theta\theta} + \frac{2}{r^2} v_{r,\theta} \right\} + \quad (a) \\ & - \frac{1}{r} p_{,\theta} \quad , \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \rho \left(v_{r,t} + v_r v_{r,r} + \frac{1}{r} v_{r,\theta} - \frac{1}{r} v_{\theta}^2 \right) = \\ & = \mu \left[\left(\frac{1}{r} v_{r,r} \right)_{,r} + \frac{1}{r^2} v_{r,\theta\theta} - \frac{2}{r^2} v_{\theta,\theta} \right] + \quad (b) \\ & - p_{,r} \end{aligned}$$

gdzie przecinek oznacza pochodną cząstkową po zmiennej stojącej za nim, ρ - gęstość, μ - dynamiczny współczynnik lepkości, t - czas i p - ciśnienie.

Po wykonaniu wspomnianych wyżej uproszczeń, wprowadzeniu nowych oznaczeń oraz przyjęciu, że w cienkiej warstwie smarującej $r \approx R_1 \approx R_2 \approx R$ otrzymujemy z równań (a) i (b)

$$\mu \frac{\partial^2 u_N^w}{\partial r^2} - \frac{1}{R} \frac{\partial p_N^w}{\partial \theta} = \rho \frac{\partial u_N^w}{\partial t} ; \quad (3.1)$$

$$\frac{\partial p_N^w}{\partial r} = 0 ,$$

gdzie u_N^w , p_N^w oznaczają odpowiednio prędkość obwodową i ciśnienie cieczy smarującej.

Poszukując rozkładu prędkości u_N^w i ciśnienia p_N^w przewidujemy ich postać w formie (por.[1,2,3,4]):

$$u_N^w = u_N + \Re u_{N1} \exp i \omega t , \quad (3.2)$$

$$p_N^w = p_N + \Re p_{N1} \exp i \omega t . \quad (3.3)$$

Występujące we wzorach (3.2) i (3.3) wielkości u_{N1} , p_{N1} mogą być wielkościami zespolonymi. Zatem poszukiwane funkcje u_N^w , p_N^w mogą być także funkcjami zespolonymi. Fizyczne znaczenie mają tylko ich części rzeczywiste.

Do układu równań (3.1) dołączamy warunki brzegowe. Dla ciśnienia będą to warunki Sommerfelda (por.[5]):

$$p_N \Big|_{\theta=0} = p_N \Big|_{\theta=2\pi} = 0 , \quad (3.4)$$

$$p_{N1} \Big|_{\theta=0} = p_{N1} \Big|_{\theta=2\pi} = 0 ,$$

natomiast warunki brzegowe dla prędkości wynikają z założenia,

że czop łożyska obraca się z prędkością U wykonując dodatkowo drgania skrętne o częstotliwości ω i amplitudzie ϑU , gdzie ϑ jest małym parametrem, panewka zaś jest nieruchoma, tzn.:

$$u_N^\omega \Big|_{r=R} = U + \vartheta U \exp i \omega t, \quad (3.5)$$

$$u_N^\omega \Big|_{r=R+h} = 0.$$

3.2. Określenie rozkładu prędkości i ciśnienia.

3.2.1. Określenie rozkładu prędkości.

Prędkość u_N^ω , ciśnienie p_N^ω określone równaniami (3.2) i (3.3) muszą spełniać równania Naviera-Stokesa (3.1). Po podstawieniu wyrażeń (3.2) i (3.3) do równania ruchu (3.1) i porównaniu członów występujących przy ϑ^n ($n=0,1$) otrzymujemy:

$$\begin{aligned} \mu \left(\frac{\partial^2 u_N}{\partial r^2} + \vartheta \frac{\partial^2 u_{N1}}{\partial r^2} \exp i \omega t \right) - \frac{1}{R} \frac{\partial p_N}{\partial \theta} + \\ - \vartheta \frac{1}{R} \frac{\partial p_{N1}}{\partial \theta} \exp i \omega t = \rho \left(\frac{\partial u_N}{\partial t} + \right. \\ \left. + \vartheta i \omega u_{N1} \exp i \omega t \right); \end{aligned} \quad (3.6)$$

dla $n = 0$

$$\mu \frac{\partial^2 u_N}{\partial r^2} - \frac{1}{R} \frac{\partial p_N}{\partial \theta} = \rho \frac{\partial u_N}{\partial t}, \quad (3.7)$$

uwzględniając jednak, że $\partial u_N / \partial t = 0$ mamy

$$\mu \frac{\partial^2 u_N}{\partial r^2} - \frac{1}{R} \frac{\partial p_N}{\partial \theta} = 0 \quad ; \quad (3.8)$$

dla $n = 1$

$$\mu \frac{\partial^2 u_{N1}}{\partial r^2} - \frac{1}{R} \frac{\partial p_{N1}}{\partial \theta} = i \rho \omega u_{N1} \quad . \quad (3.9)$$

Rozwiązanie równania (3.8) jest znane. Jest to przypadek ustalonego ruchu czopa z warunkami brzegowymi (3.4), dla ciśnienia p_N i warunkami brzegowymi dla prędkości u_N w postaci:

$$u_N \Big|_{r=R} = U \quad , \quad u_N \Big|_{r=R+h} = 0 \quad . \quad (3.10)$$

Wykorzystując wyniki zawarte w pracach [1,5] mamy:

$$u_N = U \left(1 - \frac{z}{h} \right) + \frac{1}{R} \frac{\partial p}{\partial \theta} \frac{1}{2\mu} z(z-h) \quad , \quad (3.11)$$

$$\frac{\partial u_N}{\partial z} = - \frac{U}{h} + \frac{1}{\mu} \frac{1}{R} \frac{\partial p}{\partial \theta} \left(z - \frac{h}{2} \right) \quad , \quad (3.12)$$

$$\frac{dp_N}{d\theta} = \frac{\delta U \mu R}{c^2} \left[\frac{1}{(1 + \varepsilon \cos \theta)^2} + \frac{1 - \varepsilon^2}{(1 + \varepsilon^2/2)(1 + \varepsilon \cos \theta)^3} \right], \quad (3.13)$$

$$p_N = \frac{\delta U \mu R \varepsilon \sin \theta (2 + \varepsilon \cos \theta)}{c^2 (2 + \varepsilon^2) (1 + \varepsilon \cos \theta)^2}. \quad (3.14)$$

W równaniach (3.11)÷(3.14) występuje zmienna z , określona związkiem $r = R + z$. Wyprowadzając tę zmienną do równania ruchu (3.9) oraz do warunków brzegowych (3.5) problem określenia prędkości u_{N1} sprowadza się do rozwiązania równania:

$$\mu \frac{\partial^2 u_{N1}}{\partial z^2} - \frac{1}{R} \frac{dp_{N1}}{d\theta} = \rho i \omega u_{N1}, \quad (3.15)$$

z warunkami brzegowymi

$$u_{N1} \Big|_{z=0} = u, \quad (3.16)$$

$$u_{N1} \Big|_{z=h} = 0.$$

Rozwiązanie równania (3.15) ma postać:

$$u_{N1} = A \cosh(kz) + B \sinh(kz) + \frac{i}{\rho R \omega} \frac{dp_{N1}}{d\theta} , \quad (3.17)$$

gdzie A, B są stałymi całkowania, natomiast k określone jest związkiem

$$k^2 = \frac{i \rho \omega}{\eta} . \quad (3.18)$$

Z definicji (3.18) wynika, że istnieją dwie wartości k, które oznaczymy odpowiednio przez k_1 i k_2 . Obliczymy je następująco:

$$k_{1,2} = \pm \sqrt{i} \sqrt{\frac{\rho \omega}{2\eta}} ; \quad \sqrt{i} = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}} ,$$

stąd

$$k_1 = \sqrt{\frac{\rho \omega}{2\eta}} + i \sqrt{\frac{\rho \omega}{2\eta}} , \quad k_2 = -\sqrt{\frac{\rho \omega}{2\eta}} - i \sqrt{\frac{\rho \omega}{2\eta}} , \quad (3.19)$$

lub

$$k_1 = \nu + i\nu , \quad k_2 = -\nu - i\nu , \quad (3.20)$$

$$\nu = \sqrt{\frac{\rho \omega}{2\eta}} .$$

Aby z równania (3.17) określić stałe całkowania A i B, rozpatrzeć musimy dwa przypadki: jeden dla k_1 drugi dla k_2 .

W obydwu przypadkach przyjmujemy jednak, że częstość dodatkowych drgań skrętnych czopa ω jest na tyle duża, że $\nu \gg 1$. Założenie to prowadzić będzie do znacznego uproszczenia zależności (3.17).

Nie precyzując chwilowo wartości k wykorzystanie warunków brzegowych (3.16) w równaniu (3.17) prowadzi do następujących wyrażeń na stałe A i B :

$$A = u - \frac{i}{\rho \omega R} \frac{dp_{N1}}{d\theta} \quad , \quad (3.21)$$

$$B = - \left(u - \frac{i}{\rho \omega R} \frac{dp_{N1}}{d\theta} \right) \operatorname{ctg} h(kh) + \frac{i}{\sinh(kh) \rho \omega R} \frac{dp_{N1}}{d\theta} \quad . \quad (3.22)$$

Dalsze obliczenia przeprowadzimy oddzielnie dla $k_1 = \nu + i\nu$ i oddzielnie dla $k_2 = -\nu - i\nu$.

Przypadek $k_1 = \nu + i\nu$, $\nu \gg 1$

Obliczymy najpierw przybliżone wartości funkcji $\sinh(k_1 h)$, $\cosh(k_1 h)$, $\operatorname{ctgh}(k_1 h)$ uwzględniając warunek $\nu \gg 1$. Mamy więc

$$\sinh(k_1 h) \approx \frac{1}{2} \exp(k_1 h) \quad , \quad (3.23)$$

$$\cosh(k_1 h) \approx \frac{1}{2} \exp(k_1 h) \quad , \quad (3.24)$$

$$\operatorname{ctgh}(k_1 h) \approx \operatorname{tgh}(k_1 h) \approx 1 \quad . \quad (3.25)$$

Dokonując uproszczeń w wyrażeniach (3.23), (3.24), (3.25) wykorzystano założenie, że $\exp v h \gg \exp(-v h)$. W łożyskach rzeczywistych grubość warstwy smarującej h jest mała. Odpowiednia wartość $v h$, przy której zachodzi powyższa nierówność otrzymamy dla dużych ω , a więc pośrednio dla $v \gg 1$.

Wykorzystując dane liczbowe zawarte w monografii Fullera [6] oszacujemy wymagany rząd wielkości ω dla typowego łożyska poprzecznego zapewniający spełnienie warunku $\exp v h \gg \exp -v h$. Przyjmijmy dla przykładu, że $v h \geq 2 [\exp 2 = 7,3891, \exp -2 = 0,1353]$. Z tablicy 28 zamieszczonej w tej monografii odczytujemy, że dla łożyska szybkoobrotowego (powyżej 600 obr.min.) o średnicy czopa $d \approx 60$ mm maksymalna wartość luzu promieniowego wynosi $c_{\max} = 0,015$ cm. Zakładamy, że czynnikiem smarującym jest olej o lepkości dynamicznej $\eta = 20 \text{ cP} = 0,2 \text{ g (cm s)}^{-1}$ i gęstości $\rho = 0,8 \text{ g cm}^{-3}$ a także, że zmienna grubość warstwy smarującej h jest tego samego rzędu co luz promieniowy c . Wymagana wartość prędkości kątowej ω lub częstotliwości f dodatkowych drgań skrętnych czopa otrzymamy przekształcając wzór (3.20)₃ do postaci

$$v h = \sqrt{\frac{\rho \omega}{2 \eta}} \cdot h ; \quad \omega = \frac{2 \eta (v h)^2}{\rho h^2} ; \quad f = (2 \pi)^{-1} \omega . \quad (3.26)$$

Po podstawieniu danych liczbowych mamy:

$$\omega \Big|_{v h = 2} \approx 9000 \text{ s}^{-1} , \quad f \Big|_{v h = 2} \approx 1,4 \text{ kHz} . \quad (3.27)$$

Wykorzystując wzory (3.23) i (3.25) określające przybliżone wartości funkcji $\sinh(k_1 h)$, $\text{ctgh}(k_1 h)$ do równania (3.22) otrzymujemy

$$\begin{aligned}
 B &= -u + \frac{i}{\rho\omega R} \frac{dp_{N1}}{d\theta} - 2e^{-k_1 h} \frac{i}{\rho\omega R} \frac{dp_{N1}}{d\theta} = \\
 &= -u + \frac{i}{\rho\omega R} \frac{dp_{N1}}{d\theta} (1 - 2e^{-k_1 h}) = \\
 &= -u + \frac{i}{\rho\omega R} \frac{dp_{N1}}{d\theta} \left[1 - 2e^{-vh} (\cos vh + \right. \\
 &\quad \left. - i \sin vh) \right] = \\
 &= -u - 2e^{-vh} \sin vh \frac{1}{\rho\omega R} \frac{dp_{N1}}{d\theta} + \tag{3.28} \\
 &\quad + i \left(\frac{dp_{N1}}{d\theta} \frac{1}{\rho\omega R} - 2e^{-vh} \cos vh \frac{dp_{N1}}{d\theta} \frac{1}{\rho\omega R} \right) = \\
 &= \left(-u - 2e^{-vh} \frac{1}{\rho\omega R} \frac{dp_{N1}}{d\theta} \sin vh \right) + \\
 &\quad + \frac{i}{\rho\omega R} \frac{dp_{N1}}{d\theta} (1 - 2e^{-vh} \cos vh) ,
 \end{aligned}$$

a po dalszych uproszczeniach

$$B = -A = -u + i \frac{dp_{N1}}{d\theta} \frac{1}{\rho\omega R} \tag{3.29}$$

W przekształceniach zależności (3.28) przyjęto, że ciśnienie p_{N1} jest rzeczywistą funkcją kąta θ , tzn. $\text{Im}(dp_{N1}/d\theta) = 0$, a przy przejściu od wzoru (3.28) do (3.29) oprócz założenia $v \gg 1$ należy przyjąć, że pochodna $|dp_{N1}/d\theta|$ jest co najmniej rzędu $\rho\omega R$, tj.:

$$\left| \frac{dp_{N1}}{d\theta} \right| \leq O(\rho u \omega R) . \quad (3.30)$$

Ostatecznie rozkład prędkości u_{N1} w warstwie smarującej, po uwzględnieniu wyników (3.21) i (3.29) w równaniu (3.17), jest w postaci

$$u_{N1} = \left(u - \frac{i}{\rho \omega R} \frac{dp_{N1}}{d\theta} \right) e^{-k_1 z} + \frac{i}{\rho \omega R} \frac{dp_{N1}}{d\theta} . \quad (3.31)$$

Przypadek $k_2 = -v - iv, \quad v \gg 1$

Zachowując analogiczną kolejność obliczeń oraz identyczne założenia upraszczające jak w przypadku poprzednim dochodzimy do następujących wyników:

$$\sinh(k_2 h) \approx -\frac{1}{2} e^{-k_2 h} , \quad (3.32)$$

$$\cosh(k_2 h) \approx \frac{1}{2} e^{-k_2 h} , \quad (3.33)$$

$$\operatorname{ctg} h(k_2 h) \approx \operatorname{tg} h(k_2 h) \approx -1 , \quad (3.34)$$

$$\begin{aligned}
 B &= - \left(u - \frac{i}{\rho \omega R} \frac{dp_{M1}}{d\theta} \right) \operatorname{ctg} h(k_2 h) + \\
 &\quad - \frac{1}{\sinh(k_2 h)} \frac{i}{\rho \omega R} \frac{dp_{M1}}{d\theta} = \\
 &= u - \frac{i}{\rho \omega R} \frac{dp_{M1}}{d\theta} + 2 e^{k_2 h} \frac{i}{\rho \omega R} \frac{dp_{M1}}{d\theta} = \\
 &= u - \frac{i}{\rho \omega R} \frac{dp_{M1}}{d\theta} + 2 e^{-\nu h} \frac{i}{\rho \omega R} \frac{dp_{M1}}{d\theta} \cos \nu h + \\
 &\quad + 2 e^{-\nu h} \frac{i}{\rho \omega R} \frac{dp_{M1}}{d\theta} \sin \nu h = \\
 &= \left(u + 2 e^{-\nu h} \frac{1}{\rho \omega R} \frac{dp_{M1}}{d\theta} \sin \nu h \right) + \\
 &\quad - \frac{i}{\rho \omega R} \frac{dp_{M1}}{d\theta} \left(1 - 2 e^{-\nu h} \cos \nu h \right),
 \end{aligned} \tag{3.35}$$

$$B = A = u - i \frac{dp_{M1}}{d\theta} \frac{1}{\rho \omega R}, \tag{3.36}$$

$$\begin{aligned}
 u_{M1} &= A \cosh(k_2 z) + B \sinh(k_2 z) + \frac{i}{\rho \omega R} \frac{dp_{M1}}{d\theta} = \\
 &= \left(u - i \frac{dp_{M1}}{d\theta} \frac{1}{\rho \omega R} \right) \frac{e^{k_2 z} + e^{-k_2 z}}{2} + \\
 &\quad + \left(u - \frac{i}{\rho \omega R} \frac{dp_{M1}}{d\theta} \right) \frac{e^{k_2 z} - e^{-k_2 z}}{2} + \\
 &\quad + \frac{i}{\rho \omega R} \frac{dp_{M1}}{d\theta},
 \end{aligned}$$

$$u_{N1} = \left(u - \frac{i}{\rho \omega R} \frac{dp_{N1}}{d\theta} \right) e^{k_2 z} + \frac{i}{\rho \omega R} \frac{dp_{N1}}{d\theta} \quad (3.37)$$

Porównując wyniki (3.31) oraz (3.37) określające rozkład prędkości u_{N1} odpowiednio dla $k = k_1$ i $k = k_2$ stwierdzamy, że są one identyczne. W dalszej części pracy ograniczymy się więc tylko do przypadku $k_1 = v + iv \stackrel{\text{ozn}}{=} k$.

3.2.2. Określenie "ciśnienia dodatkowego" p_{N1}

Oznaczmy wydatek przypadający na jednostkę szerokości łożyska w kierunku osi x przez q . Warunek ciągłości wymaga, aby $dq/d\theta = 0$, a zatem

$$q_v = \text{const.} \quad (3.38)$$

Wydatek ten obliczymy następująco:

$$q_v = \int_0^h u_{N1} dz, \quad (3.39)$$

a po przedstawieniu rozwiązania (3.31) i scałkowaniu

$$q_v = \frac{u}{k} + \frac{i}{\rho \omega R} \frac{dp_{N1}}{d\theta} \frac{1+kh}{k} \approx \frac{u}{k} + \frac{i}{\rho \omega R} h \frac{dp_{N1}}{d\theta} \quad (3.40)$$

W równaniu (3.40) przyjęto, że dla $v \gg 1$, $1 + kh \approx kh$. Wykorzystując warunek ciągłości przepływu otrzymamy zależność

$$\frac{d}{d\theta} \left[\frac{u}{k} + i \frac{1}{\rho \omega R} h(\theta) \cdot \frac{dp_{N1}}{d\theta} \right] = 0, \quad (3.41)$$

z której wynika równanie różniczkowe określające ciśnienie p_{N1} w postaci

$$\frac{d^2 p_{N1}}{d\theta^2} + \frac{1}{h} \frac{dh}{d\theta} \frac{dp_{N1}}{d\theta} = 0. \quad (3.42)$$

Całkując kolejno mamy (por.[5]):

$$\frac{dp_{N1}}{d\theta} = \frac{C_1}{h(\theta)} = \frac{C_1}{c(1 + \varepsilon \cos \theta)}, \quad (3.43)$$

$$p_{N1} = \delta \frac{C_1}{c} \frac{1}{(1 - \varepsilon^2)^{1/2}} \arccos \frac{\varepsilon + \cos \theta}{1 + \varepsilon \cos \theta} + C_2, \quad (3.44)$$

$$\delta = \begin{cases} 1; & \sin \theta \geq 0 \\ -1; & \sin \theta < 0 \end{cases}.$$

Warunki brzegowe Sommerfelda (3.4)₂ mogą być spełnione przez równanie (3.44), nie wystarczają jednak na określenie stałych całkowania C_1 i C_2 . W szczególności, jak wykaże to późniejsza analiza zadania, potrzebna będzie znajomość stałej C_1 . Aby ją znaleźć zażądamy ścisłego spełnienia kinematycznych warunków brzegowych (3.16). Łatwo można się przekonać, że na brzegu panewki tzn. dla $z = h$ warunek (3.16)₂ jest spełniony przez prędkość u_{N1} daną zależnością (3.31) tylko w przybliżeniu, ściśle natomiast na powierzchni czopa. Dochodzimy w ten sposób do postulatu, aby

$$\operatorname{Re} u_{N1} = 0 \quad \Big|_{z=h} \quad (3.45)$$

Podstawiając do powyższego warunku równanie (3.31) określające prędkość u_{N1} otrzymujemy:

$$e^{-\nu h} \left(u \cos \nu h - \frac{1}{\rho \omega R} \frac{dp_{N1}}{d\theta} \sin \nu h \right) = 0 \quad ; \quad (3.46)$$

skąd znajdujemy

$$\frac{dp_{N1}}{d\theta} = \rho u \omega R \operatorname{ctg} \nu h \quad . \quad (3.47)$$

Porównanie wyników (3.43) i (3.47) określających pochodną $dp_{N1}/d\theta$ pozwala stwierdzić, że

$$C_1 = c(1 + \varepsilon \cos \theta) \rho u \omega R \operatorname{ctg}(\nu h) \quad . \quad (3.48)$$

Wielkość C_1 określiliśmy wcześniej jako stałą całkowania niezależną od kąta θ . Z postaci powyższego wzoru wynika, że jest ona funkcją tego kąta. Przyczyną tej rozbieżności jest przyjęcie założenia upraszczającego $vh \gg 1$. Przybliżenie funkcji $\text{ctg } vh$ za pomocą pierwszego wyrazu szeregu Taylora pozwala jednak ponownie wielkość C_1 nazwać stałą, co pokaże poniższa analiza.

Wzór (3.48) pozwala wnosić, że możemy wyróżnić dwa zakresy zmienności argumentu vh , w których stała C_1 zachowuje znak, a mianowicie:

$$C_1 > 0 \quad \text{dla} \quad n\pi < vh < \pi/2 + n\pi \quad - \text{zakres I}$$

$$C_1 < 0 \quad \text{dla} \quad \pi/2 + n\pi < vh < \pi + n\pi \quad - \text{zakres II}$$

$$n = 0, 1, 2, \dots$$

Z rozwinięcie $\text{ctg } vh$ w szereg Taylora wynika dla zakresu I:

$$\text{ctg } vh = \frac{1}{(vh)_{\text{obl}}} , \quad C_1 = \frac{1}{v} \rho u \omega R ,$$

(3.49)

$$\frac{dp_{n1}}{d\theta} = \frac{\rho u \omega R}{vc (1 + \epsilon \cos \theta)} ,$$

gdzie $(vh)_{\text{obl}} = vh - n\pi$;

dla zakresu II:

$$\operatorname{ctg} \nu h = - \frac{1}{(\nu h)_{\text{obl}}} , \quad C_1 = - \frac{1}{\nu} \rho U \omega R , \quad (3.50)$$

$$\frac{dp_{N1}}{d\theta} = - \frac{\rho U \omega R}{\nu c (1 + \epsilon \cos \theta)} ,$$

gdzie $(\nu h)_{\text{obl}} = n\pi - \nu h$.

W dalszej części pracy dla prostoty zapisu będziemy opuszczać indeks "obl" pisząc (νh) zamiast $(\nu h)_{\text{obl}}$, pamiętając jednocześnie o tym, że parametr ten przybiera wartości obliczeniowe zgodne z powyższymi definicjami.

3.3. Siła nośna łożyska.

Jak wynika z obliczeń w p.3.1. i 3.2.2. ciśnienie p_N^w wyraża się następująco:

$$p_N^w = p_N + p_{N1} \exp i \omega t , \quad p_{N1} = p_{N1}(\theta) \neq p_{N1}(t) . \quad (3.51)$$

Ze wzoru (3.51) wynika, że ciśnienie p_N^w składa się z dwóch części: stałej p_N i okresowo zmiennej zależnej od czasu $p_{N1} \exp i \omega t$. Z uwagi na występowanie w części harmoniczej dodatkowego parametru - czasu t , zachodzi konieczność uśredniania ciśnienia p_N^w w wybranym przedziale czasu, np. jednego pełnego cyklu. W ten sposób dochodzimy do definicji składowych siły nośnej

$$X_{\omega N} = \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \int_0^{2\pi} \operatorname{Re}(p_N + \epsilon p_{N1} \exp i \omega t) R \cos \theta d\theta dt , \quad (3.52)$$

$$Z_{\omega N} = \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \operatorname{Re}(p_N + \varepsilon p_{N1} \exp i \omega t) R \sin \theta d\theta dt, \quad (3.53)$$

gdzie $X_{\omega N}$, $Z_{\omega N}$ oznaczają składowe siły nośnej odpowiednio równoległe i prostopadłe do odcinka OC (por. Rys.1). Ponieważ $\int_0^{2\pi/\omega} \operatorname{Re}(\exp i \omega t) dt = 0$, to ze wzorów (3.51), (3.52) i (3.53) wynika, że dodatkowe drgania skrętne czopa nie wpływają na nośność łożyska w przypadku cieczy newtonowskiej. Mamy więc

$$X_{\omega N} = X_{0N} = 0, \quad Z_{\omega N} = Z_{CN}, \quad (3.54)$$

gdzie X_{0N} , Z_{0N} oznaczają odpowiednie składowe siły nośnej w przypadku ustalonego ruchu czopa. Korzystając z wyników pracy [1] możemy napisać

$$Z_{0N} = \frac{6 \mu \eta R^2 \pi \varepsilon}{\varepsilon^2 (1 - \varepsilon^2)^{1/2} (1 + \varepsilon^2/2)} \quad (3.55)$$

4. PRZEPŁYW CIECZY DRUGIEGO RZĘDU W ŁOŻYSKU POPRZECZNYM

4.1. Równanie konstytutywne.

Model nieściśliwego płynu drugiego rzędu jest najprostszym modelem umożliwiającym opis efektów naprężeń normalnych

w cieczach lepkosprężystych. Możemy stosować go wówczas, gdy przepływy charakteryzują się małą liczbą Debory, tzn. dla małych prędkości lub krótkich efektów pamięci (por.[7]).

Równanie konstytutywne ma postać

$$\underline{T} = -p \underline{1} + \eta \underline{\hat{A}}_1 + \alpha_1 (\underline{\hat{A}}_2 - \underline{\hat{A}}_1^2) + (\alpha_1 + \alpha_2) \underline{\hat{A}}_1^2, \quad (4.1)$$

$$t_r \underline{\hat{A}}_1 = 0,$$

gdzie \underline{T} oznacza tensor naprężenia, p - ciśnienie hydrostatyczne, $\underline{\hat{A}}_1, \underline{\hat{A}}_2$ są kinematycznymi tensorami Rivlina-Ericksena zdefiniowanymi następująco:

$$\underline{\hat{A}}_1 = \nabla \underline{\vec{v}} + (\nabla \underline{\vec{v}})^T, \quad (4.2)$$

$$\underline{\hat{A}}_2 = \dot{\underline{\hat{A}}}_1 + \underline{\hat{A}}_1 \nabla \underline{\vec{v}} + (\nabla \underline{\vec{v}})^T \underline{\hat{A}}_1.$$

Wskaźnik T oznacza transpozycję. Współczynniki η, α_1, α_2 są stałymi materiałowymi i zwykle dla rzeczywistych cieczy

$$\eta > 0; \quad \alpha_1 < 0; \quad \alpha_2 > 0. \quad (4.3)$$

Wyrazimy pole prędkości $\underline{\vec{v}}$ cieczy drugiego rzędu i ciśnienia p w następujący sposób (por.[4,7]):

$$\underline{\vec{v}} = \underline{\vec{v}}_N + \underline{\vec{v}}^i, \quad p = p_N + p^i \quad (4.4)$$

gdzie wskaźnik N dotyczy cieczy newtonowskiej, natomiast prim oznacza odpowiednie przyrosty dla cieczy drugiego rzędu. Podstawiając do równania ruchu zawierającego jedynie zlinearyzowane człony bezwładności związek konstytutywny (4.1) oraz zależności (4.4) otrzymamy

$$\nabla p_N - \eta \nabla^2 \vec{v}_N = -\rho \frac{\partial}{\partial t} \vec{v}_N, \quad (4.5)$$

$$\begin{aligned} \nabla p' - \eta \nabla^2 \vec{v}' = & -\rho \frac{\partial}{\partial t} \vec{v}' + \alpha_1 \operatorname{div} \left[\tilde{A}_2(\vec{v}_N) + \right. \\ & \left. - \tilde{A}_1^2(\vec{v}_N) \right] + (\alpha_1 + \alpha_2) \operatorname{div} \tilde{A}_1^2(\vec{v}_N). \end{aligned} \quad (4.6)$$

W płaskim przepływie płynu nieściśliwego, a taki mamy w szczelinie łożyska, w którym określone są warunki brzegowe dla prędkości stwierdzamy, że równanie (4.6) jest spełnione dla $\vec{v}' = 0$ jeśli (por.[8])

$$p = p_N + \frac{\alpha_1}{\eta} \frac{dp_N}{dt} + \left(\frac{3}{2} \alpha_1 + \alpha_2 \right) \mathfrak{A}^2; \quad (4.7)$$

$$\mathfrak{A}^2 = \frac{1}{2} t_r \tilde{A}_1^2(\vec{v}_N).$$

Powyższy wynik zwany jest twierdzeniem Tannera [9]. Twierdzenie to pozwala rozszerzyć rozwiązanie dla cieczy newtonowskiej na przypadek cieczy drugiego rzędu, przy zachowaniu identycznych kinematycznych warunków brzegowych.

Dla obliczenia siły nośnej łożyska niezbędna będzie

znajomość składowej T_{zz} tensora naprężenia. Określimy ją z równania konstytutywnego (4.1) dokonując w nim uproszczeń wynikających z założenia cienkiej warstwy smarującej. Skorzystamy z wyników pracy [1]. Składowa T_{zz} wyraża się następująco:

$$-T_{zz} = p_N + \frac{\alpha_1}{\eta} \frac{dp_N}{dt} - \frac{1}{2} \alpha_1 \dot{\gamma}^2, \quad (4.8)$$

$$\dot{\gamma}^2 = (v_{\theta,r})^2 - \frac{2}{r} v_{\theta} v_{\theta,r} + \left(\frac{v_{\theta}}{r}\right)^2, \quad (4.9)$$

gdzie w równaniu (4.9) oś r układu biegunowego pokrywa się z promieniem czopa, natomiast v_{θ} jest prędkością obwodową.

4.2. Siła nośna łożyska.

Zgodnie z twierdzeniem Tannera punktem wyjścia do obliczenia siły nośnej łożyska smarowanego cieczą drugiego rzędu będą newtonowskie rozkłady prędkości u_N^w i ciśnienia p_N^w obliczone w p.3.2. Zastępując w równaniach (4.8) i (4.9) p_N przez p_N^w , v_{θ} przez u_N^w , $\partial/\partial r$ przez $\partial/\partial z$, r przez R otrzymujemy:

$$\begin{aligned} -T_{zz}^w = p_N^w + \frac{\alpha_1}{\eta} \frac{dp_N^w}{dt} - \frac{1}{2} \alpha_1 \left[\left(\frac{\partial u_N^w}{\partial z} \right)^2 + \right. \\ \left. - 2 \frac{\partial u_N^w}{\partial z} \frac{u_N^w}{R} + \left(\frac{u_N^w}{R} \right)^2 \right], \end{aligned} \quad (4.10)$$

gdzie T_{zz}^w oznacza składową tensora naprężenia w cieczy

drugiego rzędu, w przypadku gdy czop wykonuje dodatkowe drgania skrętne o częstotliwości ω .

Zgodnie z oznaczeniami przyjętymi w p.3 rozkłady prędkości u_N^{ω} i ciśnienia p_N^{ω} dane są wzorami (3.2) i (3.3). Ponieważ w tych wzorach występują wielkości zespolone, fizyczny sens będą miały odpowiednie części rzeczywiste. Na podstawie wyników (3.11) i (3.14) określających rozkłady prędkości u_N i ciśnienia p_N w przepływie ustalonym stwierdzamy, że

$$\operatorname{Re} u_N = u_N, \quad \operatorname{Re} p_N = p_N. \quad (4.11)$$

Rzeczywiste części rozkładu p_N^{ω} i u_N^{ω} zapiszemy w postaci

$$u_N^{\omega} = u_N + \vartheta \operatorname{Re}(u_{N1} e^{i\omega t}), \quad (4.12)$$

$$p_N^{\omega} = p_N + \vartheta \operatorname{Re}(p_{N1} e^{i\omega t}).$$

Po podstawieniu do równania (4.10) w miejsce p_N^{ω} i u_N^{ω} odpowiednich związków (4.12) otrzymamy wyrażenie na T_{zz}^{ω} jako sumę trzech składników rzędu ϑ^0 , ϑ^1 , ϑ^2 . Oznaczając poszczególne człony tej sumy odpowiednio przez T_{ϑ^0} , T_{ϑ^1} , T_{ϑ^2} możemy napisać

$$-T_{zz} = T_{\vartheta^0} + \vartheta T_{\vartheta^1} + \vartheta T_{\vartheta^2}. \quad (4.13)$$

Po przeprowadzeniu odpowiednich obliczeń mamy (por. Dodatek A):

$$T_{\vartheta^0} = p_N + \frac{\alpha_1}{\eta} \frac{1}{R} \frac{dp_N}{d\theta} u_N +$$

$$- \frac{1}{2} \alpha_1 \left[\left(\frac{\partial u_N}{\partial z} \right)^2 - \frac{2}{R} \frac{\partial u_N}{\partial z} u_N + \frac{u_N}{R^2} \right], \quad (4.14)$$

$$\begin{aligned}
 T_{31} = & \operatorname{Re} (p_{N1} e^{i\omega t}) + \\
 & + \frac{\alpha_1}{\eta} \left[\frac{1}{R} \frac{dp_N}{d\theta} \operatorname{Re} (u_{N1} e^{i\omega t}) + \right. \\
 & + \frac{1}{R} \operatorname{Re} \left(\frac{dp_{N1}}{d\theta} u_N e^{i\omega t} \right) + \\
 & \left. + \operatorname{Re} (p_{N1} i \omega e^{i\omega t}) \right] + \\
 & - \frac{1}{2} \alpha_1 \left\{ 2 \frac{\partial u_N}{\partial z} \operatorname{Re} \left(\frac{\partial u_{N1}}{\partial z} e^{i\omega t} \right) + \right. \\
 & - \frac{2}{R} \left[\frac{\partial u_N}{\partial z} \operatorname{Re} (u_{N1} e^{i\omega t}) + \right. \\
 & + u_N \operatorname{Re} \left(\frac{\partial u_{N1}}{\partial z} e^{i\omega t} \right) \left. \right] + \\
 & \left. + \frac{1}{R^2} 2 u_N \operatorname{Re} (u_{N1} e^{i\omega t}) \right\}, \tag{4.15}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 T_{32} = & - \frac{1}{2} \alpha_1 \left\{ \left[\operatorname{Re} \left(\frac{\partial u_{N1}}{\partial z} e^{i\omega t} \right) \right]^2 + \right. \\
 & - \frac{2}{R} \operatorname{Re} \left(\frac{\partial u_{N1}}{\partial z} e^{i\omega t} \right) \operatorname{Re} (u_{N1} e^{i\omega t}) + \\
 & \left. + \frac{1}{R^2} \left[\operatorname{Re} (u_{N1} e^{i\omega t}) \right]^2 \right\} + \\
 & + \frac{\alpha_1}{\eta} \operatorname{Re} \left[\frac{1}{R} \frac{dp_{N1}}{d\theta} \operatorname{Re} (u_{N1} e^{i\omega t}) e^{i\omega t} \right]. \tag{4.16}
 \end{aligned}$$

Podobnie jak w zagadnieniu dotyczącym harmonicznych zmian ciśnienia w cieczy newtonowskiej (por. p.3.3) mamy teraz do czynienia ze zmienną w czasie składową T_{zz}^w tensora naprężenia. Składowe jednostkowej siły nośnej łożyska X_w oraz Z_w obliczamy jako wielkości uśrednione dla jednego pełnego cyklu, analogicznie do definicji (3.52) oraz (3.53). Mamy więc

$$X_{\omega} = \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \int_0^{2\pi} \left(-T_{zz}^{\omega} \right) R \cos \theta d\theta dt, \quad (4.17)$$

$$Z_{\omega} = \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \int_0^{2\pi} \left(-T_{zz}^{\omega} \right) R \sin \theta d\theta dt \quad (4.18)$$

gdzie T_{zz}^{ω} określone jest wyrażeniem (4.13).

Wykorzystując zależności

$$\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \operatorname{Re}(\exp i\omega t) dt = \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \operatorname{Re}(i\omega \exp i\omega t) dt = 0 \quad (4.19)$$

w równaniach (4.17) i (4.18) oraz biorąc pod uwagę postać związku (4.15) otrzymamy

$$X_{\omega} = \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \int_0^{2\pi} \left(T_{\vartheta^0} + \vartheta^2 T_{\vartheta^2} \right) R \cos \theta d\theta dt, \quad (4.20)_1$$

$$Z_{\omega} = \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \int_0^{2\pi} \left(T_{\vartheta^0} + \vartheta^2 T_{\vartheta^2} \right) R \sin \theta d\theta dt. \quad (4.20)_2$$

Ponieważ $\omega/2\pi \int_0^{2\pi/\omega} dt = 1$, siłę nośną obliczymy z zależności

$$X_{\omega} = \int_0^{2\pi} T_{\theta^0} \Big|_{z=0} R \cos \theta d\theta +$$

$$+ 3^2 \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \int_0^{2\pi} T_{\theta^2} \Big|_{z=0} R \cos \theta d\theta dt, \quad (4.21)$$

$$Z_{\omega} = \int_0^{2\pi} T_{\theta^0} \Big|_{z=0} R \sin \theta d\theta +$$

$$+ 3^2 \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \int_0^{2\pi} T_{\theta^2} \Big|_{z=0} R \sin \theta d\theta dt. \quad (4.22)$$

Pierwsze całki po prawej stronie równań (4.21) i (4.22) są składowymi siły nośnej łożyska dla ustalonego przepływu cieczy drugiego rzędu. W poprzedniej pracy [1] zostały one oznaczone odpowiednio przez X_0 , Z_0 . Składowa Z_0 jak wykazano ma taką samą wartość jak składowa Z_{0N} w rozwiązaniu dla cieczy newtonowskiej.

Korzystając z wyników tej pracy mamy:

$$X_0 = 4\pi \alpha_1 \frac{U^2}{c^2} R \varepsilon \frac{(2+\varepsilon^2)(13-7\varepsilon^2)+9}{(2+\varepsilon^2)(1-\varepsilon^2)^{3/2}} +$$

$$+ 4\pi \alpha_1 \frac{c}{R} \frac{U^2}{c^2} R \left[\frac{2}{\varepsilon(1-\varepsilon^2)^{1/2}} - \frac{2}{\varepsilon} + \right.$$

$$\left. - \frac{3\varepsilon}{(2+\varepsilon^2)(1-\varepsilon^2)^{1/2}} \right], \quad (4.23)$$

$$Z_0 = Z_{0N} = \frac{6U\eta R^2}{c^2} \pi \varepsilon \frac{1}{(1-\varepsilon^2)^{1/2}(1+\varepsilon^2/2)}. \quad (4.24)$$

Przyrost siły nośnej łożyska wynikający z nałożenia dodatkowych drgań reprezentują drugie całki po prawych stronach równań (4.21) i (4.22). Oznaczamy te przyrosty odpowiednio przez

$$X_{\omega\vartheta^2} = \vartheta^2 \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \int_0^{2\pi} T_{\vartheta^2} R \cos \theta d\theta dt, \quad (4.25)$$

$$Z_{\omega\vartheta^2} = \vartheta^2 \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \int_0^{2\pi} T_{\vartheta^2} R \sin \theta dt d\theta, \quad (4.26)$$

Podstawiając do wzorów (4.25) i (4.26) wyrażenie (4.16) otrzymamy następujące sumy całek:

$$X_{\omega\vartheta^2} = \vartheta^2 (J_1 + J_2 + J_3 + J_4), \quad (4.27)$$

$$Z_{\omega\vartheta^2} = \vartheta^2 (\bar{J}_1 + \bar{J}_2 + \bar{J}_3 + \bar{J}_4), \quad (4.28)$$

gdzie

$$J_1 = \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \int_0^{2\pi} -\frac{1}{2} \alpha_1 \left[\operatorname{Re} \left(\frac{\partial u_{N1}}{\partial z} \right) e^{i\omega t} \right]_{z=0}^2 R \cos \theta d\theta dt, \quad (4.29)$$

$$J_2 = \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \int_0^{2\pi} \frac{\alpha_1}{R} \operatorname{Re} \left(\frac{\partial u_{N1}}{\partial z} e^{i\omega t} \right)_{z=0} \operatorname{Re} (u_{N1} e^{i\omega t})_{z=0} R \cos \theta d\theta dt, \quad (4.30)$$

$$J_3 = \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \int_0^{2\pi} -\frac{1}{2} \alpha_1 \frac{1}{R^2} \left[\operatorname{Re} (u_{M1} e^{i\omega t}) \right]_{z=0}^2 R \cos \theta d\theta dt, \quad (4.31)$$

$$J_4 = \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \int_0^{2\pi} \frac{\alpha_1}{\eta} \operatorname{Re} \left[\frac{1}{R} \frac{d p_{M1}}{d \theta} \operatorname{Re} (u_{M1} e^{i\omega t}) e^{i\omega t} \right]_{z=0} R \cos \theta d\theta dt, \quad (4.32)$$

natomiast całki J_1, J_2, J_3, J_4 otrzymamy podstawiając w całkach I_1, I_2, I_3, I_4 w miejsce $\cos \theta$ funkcję $\sin \theta$.

Znając wyniki obliczeń całek I_k, J_k ($k = 1, 2, 3, 4$) (por. Dodatek B) powrócimy do wzorów (4.27) i (4.28) przedstawiających odpowiednio składowe $X_{\omega \varnothing^2}$ i $Z_{\omega \varnothing^2}$. Otrzymamy

$$X_{\omega \varnothing^2} = \pi \alpha_1 \frac{u^2}{c^2} R \left\{ \frac{\varepsilon}{(1-\varepsilon^2)^{3/2}} \pm \frac{c}{R} \frac{1}{\varepsilon} \left[1 + \frac{1}{(1-\varepsilon^2)^{1/2}} \right] \pm 2(vh) \frac{1}{\varepsilon} \left[1 - \frac{1}{(1-\varepsilon^2)^{1/2}} \right] \right\}, \quad (4.33)$$

$$Z_{\omega \varnothing^2} = 0 \quad (4.34)$$

lub

$$X_{\omega \varnothing^2} = \pi \alpha_1 \frac{u^2}{c^2} R \left[F_1(\varepsilon) \pm \frac{c}{R} F_2(\varepsilon) + \pm 2(vh) F_3(\varepsilon) \right], \quad (4.35)$$

gdzie

$$F_1(\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{(1-\varepsilon^2)^{3/2}} \quad , \quad (4.36)$$

$$F_2(\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon} \left[1 - \frac{1}{(1-\varepsilon^2)^{1/2}} \right] \quad .$$

4.3. Określenie względnego przyrostu siły nośnej łożyska dla cieczy drugiego rzędu.

4.3.1. Definicja współczynnika wzrostu siły nośnej.

Wzrost siły nośnej łożyska wywołany dodatkowymi drganiami skrętnymi czopa reprezentować będzie bezwymiarowy współczynnik K_1 zdefiniowany poniżej:

$$K_1 = \frac{\text{dodatkowa siła nośna wynikająca z nałożenia drgań}}{\text{siła nośna dla ruchu ustalonego czopa}} \quad , (4.37)$$

który zgodnie z wcześniejszymi oznaczeniami przyjmuje formę

$$K_1 = \frac{\vartheta^2 (X_{\omega\vartheta}^2 + Z_{\omega\vartheta}^2)^{1/2}}{(X_0^2 + Z_0^2)^{1/2}} = \frac{\vartheta^2 X_{\omega\vartheta}^2}{(X_0^2 + Z_0^2)^{1/2}} \quad . \quad (4.38)$$

Na podstawie wzorów (4.23) i (4.24) mamy

$$X_0 = \pi \alpha_1 \frac{U^2}{c^2} R \left[f_1(\varepsilon) + \frac{c}{R} f_2(\varepsilon) \right] \quad , \quad (4.39)$$

$$Z_0 = \pi \frac{u \eta R^2}{c^2} f_3(\varepsilon) , \quad (4.40)$$

gdzie

$$f_1(\varepsilon) = 4 \varepsilon \frac{(2 + \varepsilon^2)(13 - 7\varepsilon^2) + 9}{(2 + \varepsilon^2)(1 - \varepsilon^2)^{3/2}} , \quad (4.41)$$

$$f_2(\varepsilon) = 4 \left[\frac{2}{\varepsilon(1 - \varepsilon^2)^{1/2}} - \frac{2}{\varepsilon} + \right. \\ \left. - \frac{3\varepsilon}{(2 + \varepsilon^2)(1 - \varepsilon^2)^{1/2}} \right] , \quad (4.42)$$

$$f_3(\varepsilon) = \frac{6\varepsilon}{(1 - \varepsilon^2)^{1/2}(1 + \varepsilon^2/2)} . \quad (4.43)$$

Podstawiając do wzoru (4.38) zależności (4.39)÷(4.43) oraz $X_w \approx 2$ określone przez związki (4.35) i (4.36) otrzymamy wyrażenie, które nazwiemy współczynnikiem wzrostu siły nośnej łożyska K:

$$K = \frac{De [F_1(\varepsilon) \pm \frac{c}{R} F_2(\varepsilon) \pm 2(vh) F_2(\varepsilon)]}{\sqrt{De^2 [f_1(\varepsilon) + \frac{c}{R} f_2(\varepsilon)]^2 + f_3^2(\varepsilon)}} , \quad (4.44)$$

gdzie De (liczba Debory) = $\frac{\alpha_1}{\eta} \frac{u}{R}$, $K = \vartheta^{-2} K_1$.

Tabela 1. podaje zestawienie wartości liczbowych funkcji $F_1(\epsilon)$, $F_2(\epsilon)$, $f_1(\epsilon)$, $f_2(\epsilon)$, $f_3(\epsilon)$ dla różnych wartości parametru ϵ .

W łożyskach rzeczywistych (por. [6]) parametr $c/R < 1 \cdot 10^{-3}$, co pozwala po uwzględnieniu danych numerycznych zawartych w Tabeli 1 uprościć wyrażenie (4.44) do postaci

$$K = \frac{De [F_1(\epsilon) \pm 2vh F_2(\epsilon)]}{\sqrt{[Def_1(\epsilon)]^2 + f_3^2(\epsilon)}} \quad (4.45)$$

4.3.2. Obliczenia numeryczne współczynnika wzrostu siły nośnej.

Zgodnie z uwagami podanymi w p.3.2.1. stwierdzono, że uproszczenia przyjęte w rozwiązaniu równania ruchu prowadzą się do warunku $vh \gg 1$. Wykazano ponadto, że począwszy od wartości $vh = 2$, co dla szybkoobrotowego łożyska o średnicy rzędu 6 cm oznacza, że częstotliwość dodatkowych drgań czopa jest rzędu 1,4 kHz, dopuszczalne jest zastosowanie upraszczających założeń. Dla większych częstości, czyli przy wzroście parametru vh dokładność rozwiązania zwiększa się.

Z definicji podanej na końcu p.3.2.2. łatwo zauważyć, że dla dowolnych wartości vh parametr obliczeniowy $(vh)_{obl}$ przyjmuje wartość z przedziału

$$0 < (vh)_{obl} < \pi/2.$$

Na Rys.2 przedstawione są wykresy zmian współczynnika wzrostu siły nośnej dla

$$\pi < vh < 2\pi,$$

Tablica 1.

ϵ	$P_1(\epsilon)$	$P_2(\epsilon)$	$f_1(\epsilon)$	$f_2(\epsilon)$	$f_3(\epsilon)$
0,1	0,101519	- 0,050383	7,06881	- 0,19699	0,6002257
0,2	0,212629	- 0,103104	14,5706	- 0,375901	1,2007302
0,3	0,345588	- 0,160949	23,05243	- 0,51806	1,805658
0,4	0,519566	- 0,227724	33,34923	- 0,60285	2,424643
0,5	0,76900	- 0,309401	46,95782	- 0,60399	3,0792014
0,6	1,171815	- 0,416667	67,00106	- 0,48022	3,81355932
0,7	2,040816	- 0,612245	101,3596	- 0,14920	4,723836
0,8	3,703704	- 0,83332	176,72727	+ 0,60606	6,060606
0,9	10,86705	- 1,43795	457,84366	2,686218	8,8179019

ustalonych wartości mimośrodów względnego ϵ i liczb Debory równych 0.2, 0.3, 0.4.

Zakres I zmienności parametru (νh) zawarty jest w przedziale $\pi < \nu h < 3/2 \pi$, natomiast zakres II w przedziale $3/2 \pi < \nu h < 2\pi$.

Dla parametru $\nu h > 2\pi$ odpowiednią wartość współczynnika K znaleźć można z wykresu na Rys.2, po określeniu $(\nu h)_{obl}$ dla tego (νh) .

5. WNIOSKI

W oparciu o wyniki uzyskane w pracy można sformułować następujące wnioski:

- 1^o Nałożenie na ruch ustalony czopa dodatkowych harmonicznych drgań skrętnych o wysokiej częstotliwości i małej amplitudzie nie powoduje zmian siły nośnej łożyska w przypadku cieczy newtonowskiej.
- 2^o Dla łożyska poprzecznego, w którym czynnikiem smarującym jest ciecz opisywana modelem cieczy drugiego rzędu, w przypadku nałożenia na ruch podstawowy czopa dodatkowych drgań o wysokiej częstotliwości, następuje zmiana siły nośnej łożyska. Zmienia się składowa tej siły równoległa do mimośrodów (wzdłuż kierunku odcinka OC z Rys.1) zarówno w zakresie ruchu ustalonego czopa (por.[1]) jak i w przypadku dodatkowych drgań skrętnych.
- 3^o Na podstawie wykresu przedstawionego na Rys.2 możemy stwierdzić, że:
 - a) zmiany siły nośnej wywołane drganiami, których miarą jest współczynnik K zależą okresowo od argumentu (νh) ;
 - b) dla małych wartości mimośrodu względnego ϵ dodatkowe drgania mogą w pewnych zakresach argumentu (νh) powodować nieznaczny spadek siły nośnej łożyska. Należy

zauważyć, że mała wartość mimośrodów ϵ w rzeczywistości oznacza niedociążenie łożyska i dlatego nie ma większego znaczenia technicznego. Dla mimośrodu $\epsilon > 0,5$ następuje wzrost siły nośnej łożyska;

- c) współczynnik wzrostu siły nośnej K dla przypadku drgań dodatkowych o wysokiej częstotliwości jest średnio o rząd mniejszy niż w przypadku drgań o małych częstotliwościach (por. [1]);
- d) wielkość współczynnika K praktycznie nie zależy od liczby Debory.

LITERATURA

1. M. Miksa, Wpływ małych drgań skrętnych czopa na nośność łożyska poprzecznego, Prace IPPT 11/1986.
2. T.E.R. Jones, K. Walters, The behaviour of materials under combined steady and oscillatory shear, J. Phys. A. Gen. Phys., 4, 85, 1971.
3. S. Zahorski, Effect of small-amplitude harmonic vibrations on viscoelastic flows in a plane slider bearing, Arch. Mech., 34, 1, 75-88, 1982.
4. S. Zahorski, Effects of inertia and high-frequency harmonic vibrations on the lift and friction forces on viscoelastic slider bearing flows, Arch. Mech., 34, 3, 359-373, 1982.
5. A. Cameron, The principles of lubrication, Longmans 1966.
6. D.D. Fuller, Teoria i praktyka smarowania, PWT Warszawa 1960.
7. S. Zahorski, Mechanics of viscoelastic fluids, Martinus Nijhoff - Polish Sci. Publ., The Hague-Warszawa 1982.
8. A.C. Pipkin, Lectures on viscoelasticity theory, Springer, New York-Heidelberg-Berlin 1972.
9. R.I. Tanner, Plane creeping flows of incompressible second-order fluids, Phys. Fluids, 9, 1246, 1966.
10. J.F. Booker, A table of the journal-bearing integrals, Trans. of ASME, ser. D, 533-535, June 1965.

DODATEK A.

1. Obliczenie wyrażeń dp^{ω}/dt i κ^2 .

Punktem wyjścia do obliczeń jest rozkład ciśnienia p_N^{ω} i prędkości u_N^{ω} dany zależnościami (por. rozdz. 3.1)

$$p_N^{\omega} = p_N + \vartheta \operatorname{Re} (p_{N1} e^{i\omega t}) , \quad (\text{A.1})$$

$$u_N^{\omega} = u_N + \vartheta \operatorname{Re} (u_{N1} e^{i\omega t}) .$$

1.1. Obliczenie pochodnej dp_N^{ω}/dt

Różniczkując po czasie ciśnienie p_N^{ω} dane równaniem (A.1), otrzymujemy

$$\frac{dp_N^{\omega}}{dt} = \frac{dp_N}{dt} + \vartheta \operatorname{Re} \left(\frac{dp_{N1}}{dt} e^{i\omega t} + p_{N1} i\omega e^{i\omega t} \right) . \quad (\text{A.2})$$

W następnej kolejności określimy pochodne dp_v/dt oraz dp_{N1}/dt występujące w wyrażeniu (A.2). Mamy więc

$$\frac{dp_N}{dt} = \frac{d}{dt} p_N [\theta(t)] = \frac{dp_N}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} \frac{R}{R} , \quad (\text{A.3})$$

a zauważając, że $R \frac{d\theta}{dt} = u_N^{\omega}$ dochodzimy do związku

$$\frac{dp_N}{dt} = \frac{1}{R} \frac{dp_N}{d\theta} u_N^\omega \quad (\text{A.4})$$

Podstawiając do powyższego równania zależność (A.1)₂ otrzymujemy

$$\begin{aligned} \frac{dp_N}{dt} &= \frac{1}{R} \frac{dp_N}{d\theta} u_N + \\ &+ \vartheta \frac{1}{R} \frac{dp_N}{d\theta} \operatorname{Re}(u_{N1} e^{i\omega t}) \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

Postępując analogicznie wyznaczamy pochodną ciśnienia dodatkowego dp_{N1}/dt . Są to następujące wyrażenia

$$\begin{aligned} \frac{dp_{N1}}{dt} &= \frac{d}{dt} p_{N1}[\theta(t)] = \\ &= \frac{dp_{N1}}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} R = \frac{1}{R} \frac{dp_{N1}}{d\theta} u_N^\omega = \\ &= \frac{1}{R} \frac{dp_{N1}}{d\theta} u_N + \\ &+ \vartheta \frac{1}{R} \frac{dp_{N1}}{d\theta} \operatorname{Re}(u_{N1} e^{i\omega t}) \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

Podstawienie zależności (A.5) i (A.6) do równania (A.2) po uporządkowaniu składników sumy ze względu na człony zawierające czynniki ϑ^0 , ϑ^1 , ϑ^2 daje

$$\begin{aligned} \frac{dp_N^\omega}{dt} &= \frac{1}{R} \frac{dp_N}{d\theta} u_N + \vartheta \left\{ \frac{1}{R} \frac{dp_N}{d\theta} \times \right. \\ &\quad \times \operatorname{Re} (u_{N1} e^{i\omega t}) + \frac{1}{R} \operatorname{Re} \left(\frac{dp_{N1}}{d\theta} u_N e^{i\omega t} \right) + \\ &\quad \left. + \operatorname{Re} (p_{N1} i\omega e^{i\omega t}) \right\} + \vartheta^2 \operatorname{Re} \left[\frac{1}{R} \frac{dp_{N1}}{d\theta} \times \right. \\ &\quad \left. \times \operatorname{Re} (u_{N1} e^{i\omega t}) e^{i\omega t} \right]. \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

1.2. Obliczenie wyrażenia κ^2

Zgodnie z definicją (4.9) i uwagami podanymi na początku rozdziału (4.2) κ^2 określamy w następujący sposób:

$$\kappa^2 = \left(\frac{\partial u_N^\omega}{\partial z} \right)^2 - 2 \frac{\partial u_N^\omega}{\partial z} \frac{u_N^\omega}{R} + \left(\frac{u_N^\omega}{R} \right)^2. \quad (\text{A.8})$$

Podstawiając do równania (A.8) zależności (A.1) otrzymujemy kolejno

$$\begin{aligned} \kappa^2 &= \left[\frac{\partial u_N}{\partial z} + \vartheta \operatorname{Re} \left(\frac{\partial u_{N1}}{\partial z} e^{i\omega t} \right) \right]^2 + \\ &\quad - \frac{2}{R} \left[\frac{\partial u_N}{\partial z} + \vartheta \operatorname{Re} \left(\frac{\partial u_{N1}}{\partial z} e^{i\omega t} \right) \right] \times \\ &\quad \times \left[u_N + \vartheta \operatorname{Re} (u_{N1} e^{i\omega t}) \right] + \\ &\quad + \frac{1}{R^2} \left[u_N + \vartheta \operatorname{Re} (u_{N1} e^{i\omega t}) \right]^2, \end{aligned}$$

http://rcin.org.pl

$$\begin{aligned} \partial^2 = & \left(\frac{\partial u_N}{\partial z} \right)^2 + 2 \partial \frac{\partial u_N}{\partial z} \operatorname{Re} \left(\frac{\partial u_{N1}}{\partial z} e^{i\omega t} \right) + \\ & + \partial^2 \left[\operatorname{Re} \left(\frac{\partial u_{N1}}{\partial z} e^{i\omega t} \right) \right]^2 - 2 \left\{ \frac{\partial u_N}{\partial z} u_N + \right. \\ & + \partial \operatorname{Re} \left(\frac{\partial u_{N1}}{\partial z} e^{i\omega t} \right) u_N + \partial \operatorname{Re} \left(\frac{\partial u_{N1}}{\partial z} e^{i\omega t} \right) \times \\ & \times \partial \operatorname{Re} \left(u_{N1} e^{i\omega t} \right) + \partial \operatorname{Re} \left(u_{N1} e^{i\omega t} \right) \frac{\partial u_N}{\partial z} \left. \right\} \frac{1}{R} + \\ & + \frac{1}{R^2} \left\{ u_N^2 + \partial 2 u_N \operatorname{Re} \left(u_{N1} e^{i\omega t} \right) + \right. \\ & \left. + \partial^2 \left[\operatorname{Re} \left(u_{N1} e^{i\omega t} \right) \right]^2 \right\} , \end{aligned}$$

a po uporządkowaniu ze względu na człony zawierające ∂^0 , ∂^1 , ∂^2 mamy

$$\begin{aligned} \partial^2 = & \left(\frac{\partial u_N}{\partial z} \right)^2 - \frac{2}{R} \frac{\partial u_N}{\partial z} u_N + \frac{u_N^2}{R^2} + \\ & + \partial \left\{ 2 \frac{\partial u_N}{\partial z} \operatorname{Re} \left(\frac{\partial u_{N1}}{\partial z} e^{i\omega t} \right) + \right. \\ & - \frac{2}{R} \left[\operatorname{Re} \left(\frac{\partial u_{N1}}{\partial z} e^{i\omega t} \right) u_N + \operatorname{Re} \left(u_{N1} e^{i\omega t} \right) \times \right. \\ & \left. \left. \times \frac{\partial u_N}{\partial z} \right] + \frac{1}{R^2} 2 u_N \operatorname{Re} \left(u_{N1} e^{i\omega t} \right) \right\} + \\ & + \partial^2 \left\{ \left[\operatorname{Re} \left(\frac{\partial u_{N1}}{\partial z} e^{i\omega t} \right) \right]^2 + \right. \\ & - \frac{2}{R} \operatorname{Re} \left(\frac{\partial u_{N1}}{\partial z} e^{i\omega t} \right) \operatorname{Re} \left(u_{N1} e^{i\omega t} \right) + \\ & \left. + \frac{1}{R^2} \left[\operatorname{Re} \left(u_{N1} e^{i\omega t} \right) \right]^2 \right\} . \end{aligned} \tag{A.9}$$

DODATEK B.

1. Obliczenie całek I_k, J_k ($k = 1, 2, 3, 4$).

1.1. Całki I_1 i J_1 .

Definicje całek I_k, J_k zawarte są w rozdziale (4.2). Zgodnie z treścią tego rozdziału mamy

$$J_1 = \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \int_0^{2\pi} -\frac{1}{2} \alpha_1 \left[\operatorname{Re} \left(\frac{\partial u_{N1}}{\partial z} \right) e^{i\omega t} \right]_{z=0}^2 \cos \theta \sin \theta \, d\theta dt \quad (\text{B.1})$$

Prędkość u_{N1} opisuje zależność (3.31) w postaci

$$u_{N1} = \left(u - \frac{i}{\rho\omega R} \frac{dp_{N1}}{d\theta} \right) e^{-k_1 z} + \frac{i}{\rho\omega R} \frac{dp_{N1}}{d\theta} \quad (\text{B.2})$$

gdzie $k_1 = \nu + i\nu$, $\nu = (\rho\omega/2\eta)^{\frac{1}{2}}$.

Korzystając ze wzoru (B.2) obliczymy pochodną w następujący sposób

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_{N1}}{\partial z} \Big|_{z=0} &= - \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{\rho\omega}{\eta}} + i \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{\rho\omega}{\eta}} \right) \left(u - \frac{i}{\rho\omega R} \frac{dp_{N1}}{d\theta} \right) = \\ &= \sqrt{\frac{\rho\omega}{2\eta}} \left[- \left(\frac{1}{\rho\omega R} \frac{dp_{N1}}{d\theta} + u \right) + i \left(\frac{1}{\rho\omega R} \frac{dp_{N1}}{d\theta} - u \right) \right]. \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

Wyrażając funkcję zespoloną (B.3) w postaci wykładniczej dochodzimy do wyrażenia

$$\frac{\partial u_{N1}}{\partial z} \Big|_{z=0} = \sqrt{\frac{\rho\omega}{\eta}} \cdot \sqrt{u^2 + \frac{1}{(\rho\omega R)^2} \left(\frac{dp_{N1}}{d\theta} \right)^2} e^{i\varphi}, \quad (\text{B.4})$$

gdzie

$$\text{tg } \varphi = \frac{u - \frac{1}{\rho\omega R} \frac{dp_{N1}}{d\theta}}{u + \frac{1}{\rho\omega R} \frac{dp_{N1}}{d\theta}} \quad (\text{B.5})$$

Przechodząc od wzoru (B.3) do wzoru (B.4) lub (B.5), przyjęliśmy podobnie jak w p.3.2.1. [por. wzory (3.28) i (3.29)], że ciśnienie p_{N1} jest funkcją rzeczywistą tzn.: $\text{Re } p_{N1} = p_{N1}$, $\text{Im } p_{N1} = 0$.

Wykonujemy następujące obliczenia pomocnicze

$$\begin{aligned} \left[\text{Re} \left(\frac{\partial u_{N1}}{\partial z} e^{i\omega t} \right) \Big|_{z=0} \right]^2 &= \left[\text{Re} (M e^{i\varphi} e^{i\omega t}) \right]^2 = \\ &= M^2 \cos^2(\varphi + \omega t), \end{aligned}$$

$$\text{gdzie } M = \left(\frac{\rho\omega}{\eta} \right)^{1/2} \left[u^2 + \frac{1}{(\rho\omega R)^2} \left(\frac{dp_{N1}}{d\theta} \right)^2 \right]^{1/2},$$

$$\left[\text{Re} \left(\frac{\partial u_{N1}}{\partial z} \right) e^{i\omega t} \Big|_{z=0} \right]^2 = A^* \cos^2(\omega t + \varphi), \quad (\text{B.6})$$

$$A^* = \frac{\rho \omega u^2}{\eta} + \frac{1}{R^2} \frac{1}{\rho \omega \eta} \left(\frac{dp_{M1}}{d\theta} \right)^2, \quad (\text{B.7})$$

$$\begin{aligned} \cos^2(\omega t + \varphi) &= \cos^2 \omega t \cos^2 \varphi + \\ &\quad - \frac{1}{2} \sin 2\varphi \sin 2\omega t + \\ &\quad + \sin^2 \omega t \sin^2 \varphi. \end{aligned} \quad (\text{B.8})$$

Podstawiając wyrażenia (B.6), (B.7) i (B.8) do wzoru (B.1) definiującego całkę J_1 mamy

$$\begin{aligned} J_1 = -\frac{1}{2} \alpha_1 \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \int_0^{2\pi} A^* &\left(\cos^2 \omega t \cos^2 \varphi + \right. \\ &\left. - \frac{1}{2} \sin 2\varphi \sin 2\omega t + \sin^2 \omega t \sin^2 \varphi \right) R \cos \theta d\theta dt, \end{aligned}$$

a po uwzględnieniu, że

$$\int_0^{2\pi/\omega} \cos^2 \omega t dt = \int_0^{2\pi/\omega} \sin^2 \omega t dt = \frac{\pi}{\omega},$$

$$J_1 = -\frac{1}{4} \alpha_1 \int_0^{2\pi} \left[\frac{\rho \omega u^2}{\eta} + \frac{1}{R^2} \frac{1}{\rho \omega R} \left(\frac{dp_{M1}}{d\theta} \right)^2 \right] R \cos \theta d\theta.$$

Ponieważ $\int_0^{2\pi} \sin\theta \, d\theta = \int_0^{2\pi} \cos\theta \, d\theta = 0$ to wzór na całkę I_1 redukuje się do postaci

$$J_1 = -\frac{1}{4} \alpha_1 \frac{1}{R \rho \omega \eta} \int_0^{2\pi} \left(\frac{dp_{N1}}{d\theta} \right)^2 \cos\theta \, d\theta. \quad (\text{B.9})$$

Zgodnie z definicją (B.1) mamy

$$J_1 = -\frac{1}{4} \alpha_1 \frac{1}{R \rho \omega \eta} \int_0^{2\pi} \left(\frac{dp_{N1}}{d\theta} \right)^2 \cos\theta \, d\theta. \quad (\text{B.10})$$

Korzystając z tablic J.F.Bookera [10] znajdujemy

$$J_1 = \pi \alpha_1 \frac{U^2}{c^2} R \frac{\varepsilon}{(1-\varepsilon^2)^{3/2}}, \quad (\text{B.11})$$

$$J_1 = 0. \quad (\text{B.12})$$

Warto zauważyć, że ze względu na występowanie w wyrażeniach (B.9) i (B.10) pochodnej ciśnienia p_{N1} w kwadracie, wyniki całek I_1 i J_1 nie zależą od znaku stałej całkowania C_1 [por. p.3.2.2. wzory (3.49) i (3.50)].

1.2. Całki I_2 i J_2 .

Całki I_2 i J_2 definiujemy następująco

$$J_2 = \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\alpha_1}{R} \operatorname{Re} \left(\frac{\partial u_{N1}}{\partial z} \right) \exp i\omega t \times$$

$$\times \operatorname{Re} \left(u_{N1} e^{i\omega t} \right) R \frac{\cos \theta}{\sin \theta} d\theta dt$$

(B.13)

W oparciu o wynik (B.4) oraz to, że $\operatorname{Re}(u_{N1} e^{i\omega t})|_{z=0} = U \cos \omega t$ mamy

$$\operatorname{Re} \left(\frac{\partial u_{N1}}{\partial z} e^{i\omega t} \right) \operatorname{Re} \left(u_{N1} e^{i\omega t} \right) =$$

$$= U \sqrt{\frac{\rho\omega}{2\eta}} \sqrt{U^2 + \frac{1}{(\rho\omega R)^2} \left(\frac{dp_{N1}}{d\theta} \right)^2} \cos(\omega t + \varphi) \cos \omega t =$$

$$= B^* \left(\cos^2 \omega t \cos \varphi - \frac{1}{2} \sin 2\omega t \sin 2\varphi \right)$$

gdzie $B^* = U \left(\frac{\rho\omega}{\eta} \right)^{1/2} \left[U^2 + \frac{1}{(\rho\omega R)^2} \left(\frac{dp_{N1}}{d\theta} \right)^2 \right]^{1/2}$,

a φ określone jest zależnością (B.5).

Podstawiając powyższe zależności do równania (B.13) definiującego całkę J_2 , a także biorąc pod uwagę tożsamość trygonometryczną

$$\cos(\omega t + \varphi) \cos \omega t = \cos^2 \omega t \cos \varphi - \frac{1}{2} \sin 2\omega t \sin \varphi$$

otrzymujemy

$$J_2 = \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \int_0^{2\pi} \frac{\alpha_A}{R} B^* \cos^2 \omega t \cos \varphi R \cos \theta d\theta dt +$$

(B.14)

$$- \frac{1}{2} \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \int_0^{2\pi} \frac{\alpha_A}{R} B^* \sin 2\omega t \sin \varphi R \cos \theta d\theta dt .$$

Druga całka w wyrażeniu (B.14) jest równa zeru, gdyż

$$\int_0^{2\pi/\omega} \sin 2\omega t dt = 0; \text{ stąd}$$

$$J_2 = \frac{\alpha_A}{R} \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \int_0^{2\pi} u \sqrt{\frac{\rho \omega}{\eta}} \sqrt{u^2 + \frac{1}{(\rho \omega R)^2} \left(\frac{d p_{N1}}{d \theta} \right)^2} \times$$

(B.15)

$$\times \cos \varphi \cos \theta \cos^2 \omega t R d\theta dt .$$

Aby wyrażenie (B.15) można było scałkować musimy wcześniej obliczyć $\cos \varphi$, pamiętając, że $\varphi = \varphi(\theta)$. Wykorzystując w tym

celu równanie (B.5) oraz tożsamość dochodzimy do następującego układu równań:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{u - \frac{1}{\rho \omega R} \frac{dp_{M1}}{d\theta}}{u + \frac{1}{\rho \omega R} \frac{dp_{M1}}{d\theta}}, \quad (\text{B.16})$$

$$\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi = 1,$$

z którego

$$\cos \varphi = \pm \frac{\frac{1}{\rho \omega R} \frac{dp_{M1}}{d\theta} + u}{\sqrt{2} \sqrt{u^2 + \left(\frac{1}{\rho \omega R}\right)^2 \left(\frac{dp_{M1}}{d\theta}\right)^2}} \quad (\text{B.17})$$

Utrzymanie w mocy ograniczenia nałożonego na $dp_{M1}/d\theta$ (por. p.3.2.1.), jest równoznaczne z przyjęciem formalnego warunku dla (B.16) w formie

$$\operatorname{tg} \varphi > 0. \quad (\text{B.18})$$

Nierówność (B.18) prowadzi bezpośrednio do wniosku, że rozwiązanie (B.17) jest jednoznaczne i ma postać

$$\cos \varphi = \frac{\frac{1}{\rho \omega R} \frac{dp_{M1}}{d\theta} + u}{\sqrt{2} \sqrt{u^2 + \left(\frac{1}{\rho \omega R}\right)^2 \left(\frac{dp_{M1}}{d\theta}\right)^2}} \quad (\text{B.19})$$

Podstawienie powyższej zależności do całki (B.15) daje

$$J_2 = \frac{\alpha_1}{R} \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} u \sqrt{\frac{\rho\omega}{2\eta}} \left[\frac{1}{\rho\omega R} \left(\frac{dp_{M1}}{d\theta} \right) + u \right] R \cos\theta \cos^2\omega t d\theta dt$$

lub po uwzględnieniu, że $\int_0^{2\pi} \cos\theta d\theta = 0$,

$$J_2 = \frac{\alpha_1}{R} u \frac{1}{2\sqrt{2\eta\rho\omega}} \int_0^{2\pi} \frac{dp_{M1}}{d\theta} \cos\theta d\theta \quad (B.20)$$

Z definicji (B.13) łatwo zauważymy, że

$$J_2 = \frac{\alpha_1}{R} u \frac{1}{2\sqrt{2\eta\rho\omega}} \int_0^{2\pi} \frac{dp_{M1}}{d\theta} \sin\theta d\theta \quad (B.21)$$

Całkowanie wyrażeń (B.20) i (B.21) z uwzględnieniem wyników (3.49) i (3.50) daje

$$J_2 = \pm \alpha_1 \frac{u^2}{c^2} R \frac{c}{R} \pi \frac{1}{\varepsilon} \left[1 - \frac{1}{(1-\varepsilon^2)^{1/2}} \right] \quad (B.22)$$

$$J_2 = 0 \quad (B.23)$$

Znaki \pm we wzorze (B.22) zgodnie z definicją podaną w p.3.2.2. dotyczą odpowiednio zakresu I i II zmienności ϑ .

1.3. Całki I_3 , J_3 .

Definicje tych całek są następujące:

$$J_3 = \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \int_0^{2\pi} -\frac{1}{2} \frac{\alpha_1}{R^2} \left[\operatorname{Re}(u_{M1} \exp i\omega t) \right]^2 R \frac{\cos\theta}{\sin\theta} d\theta dt \quad (\text{B.24})$$

Z postaci funkcji u_{M1} wynika, że

$$\operatorname{Re}(u_{M1} e^{i\omega t}) \Big|_{z=0} = U \cos \omega t \quad (\text{B.25})$$

Podstawiając powyższą zależność do definicji całki I_3 i J_3 dochodzimy do wyników

$$I_3 = 0 \quad , \quad J_3 = 0 \quad . \quad (\text{B.26})$$

1.4. Całki I_4 i J_4 .

Powyższe całki określone są następująco:

$$J_4 = \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \int_0^{2\pi} \frac{\alpha_1}{\eta} \operatorname{Re} \left[\frac{1}{R} \frac{dp_{M1}}{d\theta} \operatorname{Re} (u_{M1} \exp i\omega t) \right] \times \exp i\omega t \Big] R \begin{matrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{matrix} d\theta dt \quad (\text{B.27})$$

Wykorzystując wyrażenie (B.25) we wzorze (B.27) oraz zakładając, że ciśnienie jest tylko rzeczywistą funkcją zmiennej θ otrzymujemy

$$J_4 = \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \int_0^{2\pi} \frac{\alpha_1}{\eta} \frac{1}{R} \frac{dp_{M1}}{d\theta} u \cos^2 \omega t R \cos \theta d\theta dt, \quad (\text{B.28})$$

a po scałkowaniu

$$J_4 = \pm 2\alpha_1 u^2 \frac{1}{c} R \sqrt{\frac{\rho\omega}{2\eta}} \frac{\pi}{\varepsilon} \left[1 - \frac{1}{(1-\varepsilon^2)^{1/2}} \right] \quad (\text{B.29})$$

Ponieważ luz promieniowy c jest rzędu h tzn. $c = O(h)$, to przyjmując w (B.29) $c \approx h$ dochodzimy do

$$J_4 = \pm 2\alpha_1 \frac{u^2}{c^2} R \vee h \frac{\pi}{\varepsilon} \left[1 - \frac{1}{(1-\varepsilon^2)^{1/2}} \right], \quad (\text{B.30})$$

gdzie znaki \pm , podobnie jak wcześniej, odnoszą się odpowiednio do zakresu I i II iloczynu $\vee h$.

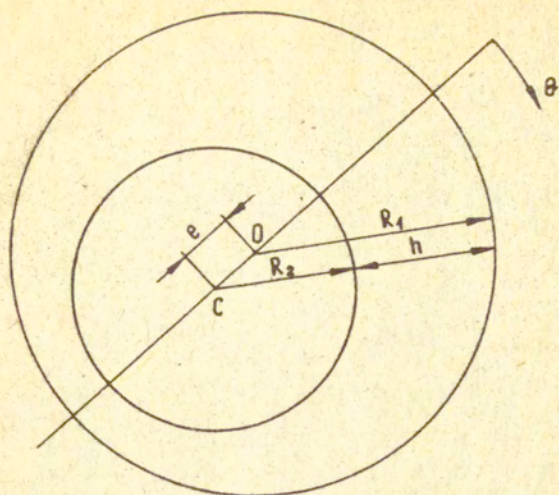
Obliczenia całki J_4 dają $J_4 = 0$.

Abstract

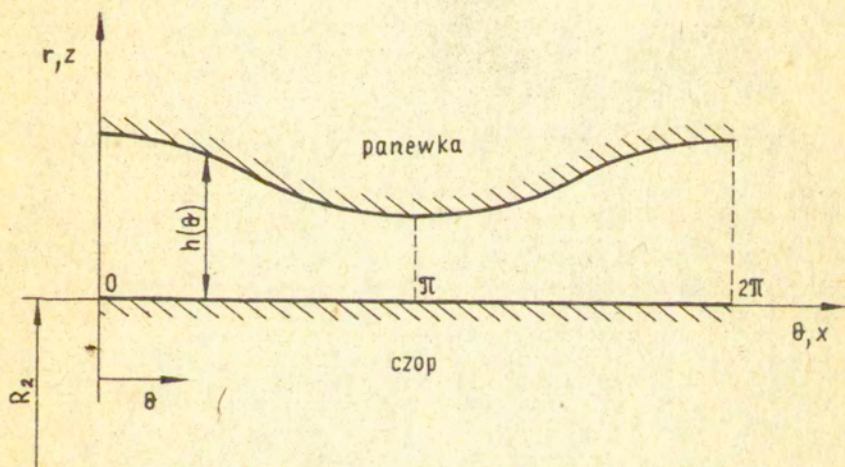
EFFECT OF SMALL TORSIONAL VIBRATIONS AND INERTIA FORCES
ON THE LOAD CAPACITY OF A JOURNAL BEARING

In the present paper, being a direct continuation of the previous considerations [3] valid for low frequency torsional vibrations of the shaft, inertia terms in the corresponding equations of motion are taken into account. On using a perturbation method, particular solutions are discussed for small-amplitude but high-frequency torsional vibrations imposed on a steady motion of shaft. The lubricating medium is described by the model of second-order fluid. Comparisons of the present results with those obtained in [1] are also made.

a/



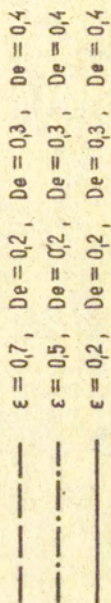
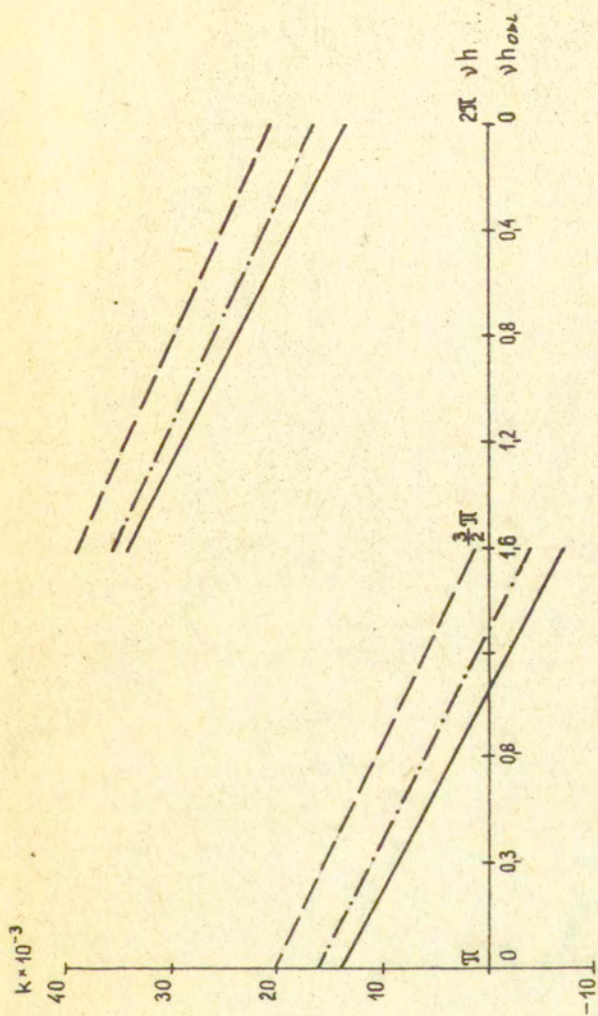
b/



Rys. 1. Geometria łożyska

a, naturalna (przybliżona)

b, w rozwinięciu



Rys. 2.