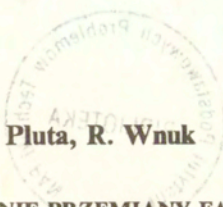


- 7.2. — transport ciepła, konwekcja,
przewodnictwo i promieniowanie
1.3. — metody różnic skończonych


Z. Pluta, R. Wnuk

MODELOWANIE PRZEMIANY FAZOWEJ
W MAGAZYNIE ENERGII SŁONECZNEJ
Z KULISTYM ZŁOŻEM MAGAZYNUJĄCYM

26/1993

P. 269

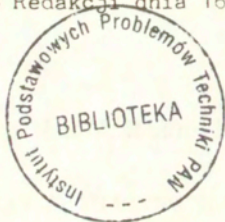


W A R S Z A W A 1 9 9 3

<http://rcin.org.pl>

ISSN 0208-5658

Praca wpłynęła do Redakcji dnia 16 marca 1993 r.



56664



Na prawach rękopisu

Instytut Podstawowych Problemów Techniki PAN
Nakład 100 egz. Ark.wyd.1,5 Ark.druk. 2,00
Oddano do drukarni w maju 1993 r.

Wydawnictwo Spółdzielcze sp. z o.o.
Warszawa, ul.Jasna 1

<http://rcin.org.pl>

Zbysław Pluta
Ryszard Wnuk

Pracownia Energetyki Słonecznej
Centrum Helio - Ekostruktur IPPT PAN

MODELOWANIE PRZEMIANY FAZOWEJ W MAGAZYNIE ENERGII SŁONECZNEJ Z KULISTYM ZŁOŻEM MAGAZYNUJĄCYM

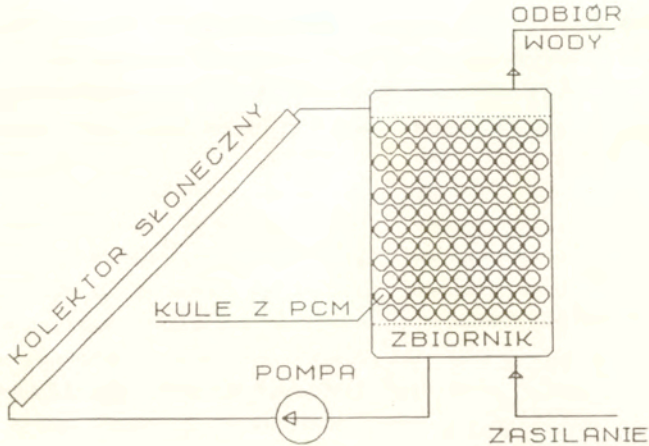
Pojemność cieplną magazynu energii słonecznej instalacji przygotowania ciepłej wody użytkowej można zwiększyć poprzez częściowe wypełnienie wodnego zbiornika magazynującego materiałem ulegającym przemianie fazowej (PCM) w zakresie temperatur pracy instalacji. Dodatkowym efektem takiego wypełnienia zbiornika jest polepszenie jego charakterystyk eksploatacyjnych. Właściwy dobór medium magazynującego, określenie optymalnego stopnia wypełnienia i rozmiaru elementów z PCM wymaga przeprowadzenia obliczeń symulacyjnych pracy instalacji w reprezentatywnym okresie czasu z uwzględnieniem procesów przemiany fazowej w zbiorniku. Cytowane w literaturze metody modelowania przemiany fazowej nie spełniały warunków wymaganych przy tego typu symulacji - prostoty metody z równoczesną dużą dokładnością, szczególnie w zakresie zamknięcia bilansu energetycznego układu. Było to bodźcem do opracowania własnego, zmodyfikowanego schematu numerycznego łączącego w sobie dużą szybkość obliczeń z możliwością modelowania zjawisk niestabilnego przewodzenia ciepła z przemianą fazową w układach niejednorodnych.

Wstęp

Symulacja numeryczna pracy w stanie niestabilnym systemów energetycznych złożonych z wielu modułów, z których każdy jest opisany odrębnym układem równań, nastęrcza wielu problemów związanych głównie z uzyskaniem zamkniętego bilansu energetycznego całego systemu. Przy wyborze metody rozwiązania zagadnienia spotykamy się często z problemem właściwego wyważenia stopnia dokładności opisu matematycznego zjawisk zachodzących w poszczególnych modułach systemu i możliwości wykorzystania

tych opisów w modelu matematycznym całego układu. Typowym przykładem takiego systemu jest słoneczna instalacja grzewcza składająca się z zespołu kolektorów słonecznych, zbiorników magazynujących energię, wymienników ciepła, układu rurociągów, pomp, urządzeń sterujących itp. W szczególności uwaga powyższa dotyczy systemów, w których w procesach magazynowania energii cieplnej wykorzystywane jest się ciepło przemian fazowych. Rozwiązanie samego tylko zagadnienia nieustalanej wymiany ciepła z równoczesną przemianą fazową w układzie magazynującym jest problemem samym w sobie, nawet bez powiązania go z pozostałymi modułami instalacji [3] - [9]. Dlatego też w opisie matematycznym zbiornika magazynującego jako całości, jak i procesów termicznych w nim zachodzących, konieczne są daleko idące uproszczenia.

Rozważany obecnie w Pracowni Energetyki Słonecznej problem dotyczy nowej koncepcji zbiornika magazynującego ciepło w słonecznej instalacji przygotowania ciepłej wody użytkowej (rys.1) [1]. W zbiorniku tym występują równocześnie dwa media magazynujące energię: złożo w postaci sztywnych kulek wypełnionych materiałem ulegającym przemianie fazowej (w skrócie PCM - phase change material) w zakresie temperatur pracy instalacji oraz woda wypełniająca przestrzeń pomiędzy kulkami i pozostałą część zbiornika. Woda pełni zarazem rolę nośnika energii pomiędzy kolektorami słonecznymi, a układem magazynującym. W okresie pracy instalacji, woda podgrzana w kolektorach słonecznych przepływa przez złożo z PCM w kierunku z góry ku dołowi zbiornika przekazując mu część nagromadzonej energii. W zbiorniku magazynującym wytwarza się wówczas pionowy gradient temperatury, zależny w czasie od aktualnych chwilowych warunków pracy instalacji i stopnia "naładowania" zbiornika. Tak więc poszczególne warstwy złoża z materiałem PCM pracują w odmiennych warunkach i fakt ten należy uwzględnić w symulacji pracy instalacji jako całości. Oznacza to, że należy równocześnie rozwiązywać zagadnienie przemian fazowych dla wielu warstw złoża mając zarazem na uwadze konieczność zamknięcia bilansu energetycznego zarówno całego zbiornika jak i jego poszczególnych warstw. Dodatkowym utrud-



Rys.1 Schemat instalacji słonecznej z magazynowaniem energii w dwóch mediach

nieniem jest w omawianym przypadku fakt, iż stosowane obecnie niskotemperaturowe materiały PCM, głównie kwasy stearynowe i woski [2,14], charakteryzują się silną zależnością ciepła właściwego i przewodności cieplnej od temperatury, zarówno fazy ciekłej jak i stałej, niezależnie od zmian tych parametrów w zakresie temperatury przemiany fazowej. Pociąga to za sobą konieczność zastosowania prostej, nie wymagającej długich czasów pracy komputera, numerycznej metody obliczeniowej, która jednocześnie uwzględni powyższe uwarunkowania i spełnia zasadę zachowania energii. Z uwagi na złożoność problemu, przedstawione dalej rozważania ograniczono do zagadnienia jednowymiarowego nieustalonego przewodzenia ciepła z przemianą fazową w układzie współrzędnych kulistych, jakkolwiek opisaną metodę rozwiązania przetestowano z pozytywnymi wynikami także dla dwuwymiarowych układów współrzędnych prostokątnych i walcowych.

1. Metody rozwiązywania zagadnień przewodzenia ciepła z przemianami fazowymi

Zagadnienie nieustalonego przewodzenia ciepła w kuli z równoczesną przemianą fazową jej materiału (zagadnienie Stefana) przy założeniu jednowymiarowości tego zjawiska (promieniomowy przepływ ciepła) może być opisane układem równań o następującej postaci:

Faza stała:

$$(1) \quad \rho_s c_s \frac{\partial T_s}{\partial t} = \lambda_s \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial T_s}{\partial r} \right)$$

Powierzchnia międzyfazowa:

$$(2) \quad \lambda_s \frac{\partial T_s}{\partial r} \Big|_j - \lambda_1 \frac{\partial T_1}{\partial r} \Big|_j = \rho_f c_f v_j \quad ; \quad T_s = T_1 = T_f$$

Faza ciekła:

$$(3) \quad \rho_1 c_1 \frac{\partial T_1}{\partial t} = \lambda_1 \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial T_1}{\partial r} \right)$$

gdzie: c - ciepło właściwe

ρ - gęstość

λ - przewodność cieplna

T - temperatura

t - czas

r - współrzędna promieniowa

c_f - ciepło przemiany fazowej

T_f - temperatura przemiany fazowej

v_j - prędkość ruchu powierzchni międzyfazowej

j - wskaźnik położenia powierzchni międzyfazowej

zas indeksy "s" oraz "1" oznaczają fazę stałą i ciekłą odpowiednio. Równania powyższe muszą być uzupełnione odpowiednimi warunkami brzegowymi i początkowymi. Wyrażenie (2) jest równaniem ruchu powierzchni międzyfazowej, a zarazem jej bilansem cieplnym.

Powszechnie stosowane są dwa podejścia do rozwiązywania zagadnień przemiany fazowej [3]. W pierwszym z nich [4,5,6], zwanym metodą zmiennych obszarów (lub metodą dwuobszarową),

rozwiązywane są równania o postaci takiej, jak podane powyżej. Oba równania energii (1) i (3) rozwiązywane są w dwóch odrębnych obszarach oddzielonych powierzchnią międzyfazową. Obszary te wraz z własnymi układami współrzędnych są w każdym kroku czasowym modyfikowane w ślad za ruchem powierzchni międzyfazowej, której położenie może być wyznaczone jedynie metodami iteracyjnymi. Metoda ta jest bardzo pracochłonna, wymagająca wykonywania dużej ilości obliczeń i narażona na występowanie tzw. pseudo-konwekcji numerycznej, prowadzącej w efekcie do niespełniania bilansu energii [3]. Dodatkowym problemem jest konieczność wyliczenia metodami iteracyjnymi warunku początkowego dla równania ruchu powierzchni międzyfazowej (2) w przypadku, gdy temperatura początkowa układu różna jest od temperatury przemiany fazowej [6].

Drugą, znacznie powszechniejszą grupę metod rozwiązywania zagadnień Stefana stanowią tzw. metody entalpowe, zwane czasami metodami stałego obszaru [3]. Istnieje szereg odmian metod entalpowych, jednak wszystkie one wychodzą z tego samego założenia: główną zmienną niezależną w równaniu energii jest entalpia, nie zaś temperatura. W ten sposób zamiast dwóch równań energii (1) i (3) ważnych w różnych obszarach związanych warunkiem (2), mamy jedno równanie obejmujące zarówno fazę stałą, jak i ciekłą wraz z powierzchnią międzyfazową.

$$(4) \quad \frac{\partial H}{\partial t} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \lambda \frac{\partial T}{\partial r} \right)$$

gdzie $H = \rho cT$ jest entalpią. Równanie powyższe zawiera dwie zmienne niezależne, entalpię i temperaturę, więc musi być uzupełnione odpowiednimi relacjami wiążącymi te dwie wielkości. Poszczególne odmiany metod entalpowych różnią się między sobą głównie zapisem tych relacji i sposobem związania ich z wartościami temperatury w węzłach siatki numerycznej metody różnic skończonych.

Powszechnie stosowanym założeniem jest przyjęcie stałej gęstości fazy stałej i ciekłej, niezależnej od czasu i temperatury. Wówczas w równaniu (4) można wydzielić gęstość z

członu zmiany entalpii H dochodząc do równania na zmianę energii właściwej wewnętrznej materiału kuli (dla stałej gęstości przyrost energii wewnętrznej jest równy przyrostowi entalpii):

$$(5) \quad \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{\rho r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \lambda \frac{\partial T}{\partial r} \right)$$

gdzie $u = c T$

Kolejnym uproszczeniem jest przyjęcie założenia, że przemiana fazowa zachodzi w pewnym przedziale temperatury ΔT_f (w obszarze tym mamy do czynienia z mieszaniną fazy stałej i ciekłej). Gdy temperatura T elementu jest mniejsza lub równa wartości $(T_f - \Delta T_f / 2)$ tzn. gdy mamy do czynienia z fazą stałą, można zapisać przy przyjęciu, że energię wewnętrzną odnosimy do temperatury początkowej:

$$(6) \quad u = c_s \cdot (T - T_0)$$

T_0 - temperatura początkowa kuli (różna od temperatury przemiany fazowej T_f)

zaś współczynnik λ występujący po prawej stronie równania (5) jest stały i równy przewodności cieplnej fazy stałej λ_s . Zatem równanie (5) można sprowadzić do postaci:

$$(7) \quad \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\lambda_s}{\rho \cdot c_s} \cdot \left(\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \cdot \frac{\partial T}{\partial r} \right)$$

Gdy temperatura T elementu kuli będzie większa od $(T_f - \Delta T_f / 2)$ i jednocześnie mniejsza od $(T_f + \Delta T_f / 2)$, wówczas materiał wypełniający kulę będzie ulegał przemianie fazowej i składał się będzie z mieszaniny fazy stałej i cieczy. Jego energia wewnętrzna u wyrazi się zależnością:

$$(8) \quad u = c_s \cdot (T_f - \Delta T_f / 2 - T_0) + \epsilon \cdot c_f$$

gdzie ϵ jest udziałem objętościowym fazy ciekłej w mieszaninie i wyraża się liniową zależnością nadwyżki temperatury ponad temperaturę początku przemiany fazowej:

$$(9) \quad \varepsilon = (T - T_f + \Delta T_f / 2) / \Delta T_f$$

Współczynnik przewodności cieplnej λ w równaniu energii określa się analogicznie jako liniową zależność stopnia "przetopienia" materiału:

$$(10) \quad \lambda = \varepsilon \cdot \lambda_1 + (1 - \varepsilon) \cdot \lambda_s$$

Po podstawieniu (8) - (10) do równania (5) otrzymujemy jego postać ważną dla zakresu temperatury przemiany fazowej:

(11)

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{2 \cdot \lambda \cdot \Delta T_f}{\rho \cdot r \cdot c_f} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\lambda \cdot \Delta T_f}{\rho \cdot c_f} \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{\lambda_1 - \lambda_s}{\rho \cdot c_f} \left(\frac{\partial T}{\partial r} \right)^2$$

Natomiast gdy temperatura kuli jest większa od $(T_f + \Delta T_f / 2)$ - tylko faza ciekła:

$$(12) \quad u = c_s \cdot (T_f - \Delta T_f / 2 - T_0) + c_f + c_1 (T - T_f - \Delta T_f / 2)$$

zas współczynnik λ po prawej stronie równania energii jest niezależny od temperatury i równy λ_1 . Zatem:

$$(13) \quad \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\lambda_1}{\rho \cdot c_1} \cdot \left(\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \cdot \frac{\partial T}{\partial r} \right)$$

Tak przedstawione równania (7) (11) (13) należy rozwiązać dla zadanych warunków początkowych i brzegowych.

Rozwiązanie numeryczne powyższych równań wymaga równoczesnego wprowadzenia dwóch różnych postaci równań różnicowych dla każdego węzła siatki różnicowej (dla fazy stałej i ciekłej oraz dla mieszaniny). Wyboru właściwego schematu dokonuje się na bieżąco w trakcie obliczeń w zależności od temperatury w danym węzle. Dodatkowo, także w zależności od temperatury, zmienia się w każdym kroku czasowym współczynniki równań podstawiając aktualne wartości przewodności cieplnych λ i ciepła właściwego c zgodnie z równaniami (8) - (10). Stosowanie do rozwiązywania równań (7), (11) i (13) jawnych schema-

tów numerycznych wymaga przyjmowania bardzo małych kroków czasowych celem zapewnienia stabilności schematu, co pociąga za sobą znaczne wydłużenie czasu obliczeń. Dodatkowo, wartości λ i c są zawsze podstawiane z opóźnieniem jednego kroku czasowego. Wykorzystanie stabilnych niejawnych schematów numerycznych, np. schematu Cranka - Nicolsona lub ADI, pozwalających na zwiększenie kroku czasowego, pociąga za sobą konieczność rozwiązywania nieliniowego układu równań algebraicznych w każdym kroku czasowym.

3. Proponowana metoda rozwiązania zagadnienie Stefana dla kuli

Zaproponowana nowa, różniąca się od powyżej opisanej, metoda rozwiązania numerycznego równania (4) jest w istocie metodą entalpową, w której parametry cieplne i materiałowe wyraża się w postaci odpowiednich funkcji temperatury. W klasycznych metodach entalpowych [7,8,9] rozwiązanie numeryczne dotyczy jednak postaci rozwiniętej równania (4) uwzględniającej założone uprzednio zależności funkcyjne własności termofizycznych substancji od temperatury. Pojawiają się wówczas człony pochodnej przewodności cieplnej względem temperatury (gdy chcemy uwzględnić zmienność tej wielkości wraz z temperaturą), zaś w przypadku przemiany fazowej w układzie współrzędnych kulistych, dodatkowy człon nieliniowy z pierwszą pochodną temperatury w kwadracie. Nieliniowość ta komplikuje schemat numeryczny rozwiązania i prowadzi w wielu przypadkach do braku spełnienia zasady zachowania energii w uzyskanym rozwiązaniu.

W schematach różnicowych stosowanych do rozwiązywania zagadnień klasyczną metodą entalpową stosuje się aproksymacje zarówno pierwszych, jak i drugich pochodnych temperatury przy wstępnym założeniu niezmienności przestrzennej parametrów materiałowych i cieplnych w otoczeniu węzła siatki numerycznej (czyli przy założeniu jednorodności i izotropowości materiału wewnątrz elementu bilanowanego). Parametry te zmieniają się w czasie i przestrzeni jedynie jako implikacja zmian temperatury i w trakcie rozwiązywania zagadnienia ich wartości są sukce-

sywnie poprawiane.

Metoda przedstawiona poniżej zakłada a priori już na etapie tworzenia schematu różnicowego istnienie przestrzennej, nawet skokowej zmienności ciepła właściwego, przewodności cieplnej lub gęstości materiału. Przyjęto przy tym, że ewentualne zmiany parametrów materiałowych następują w węzle siatki numerycznej, a co za tym idzie - nie musi być zachowana jednorodność materiału w obrębie elementu bilansowego wokół węzła siatki numerycznej. Nie zakłada się także żadnej określonej z góry zależności funkcyjnej od temperatury parametrów termofizycznych substancji. Jedynym warunkiem, wspólnym zresztą dla wszystkich metod entalpowych, jest warunek ciągłości entalpii i jej różniczkowalności względem temperatury. Warunek ten zawsze spełniony jest w przypadku ciał bezpostaciowych, gdzie przemiana fazowa zachodzi w pewnym zakresie temperatur. Dla substancji chemicznie czystych ze stałą temperaturą przemiany i związanym z nią uskokiem entalpii, należy zastosować omówione uprzednio "rozmycie" przemiany fazowej na pewien zakres temperatury ΔT_f , tak, jak to zostało omówione wcześniej.

Przy założonej uprzednio ciągłości entalpii względem temperatury, wychodząc z równania definicyjnego entalpii:

$$(14) \quad H = \int_0^T \rho c_p dT$$

gdzie c_p jest ciepłem właściwym przy stałym ciśnieniu, można równanie (4) przekształcić do postaci:

$$(15) \quad c_p(T(t)) \rho(T(t)) \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \lambda \frac{\partial T}{\partial r} \right)$$

gdzie c_p i ρ są nieznanymi funkcjami zależnymi od czasu t . W rozwiązaniu numerycznym jednak, w którym całkujemy równanie (15) po czasie, można te funkcje wyznaczać w dyskretnych odcinkach czasu, jeżeli znamy ich wartości w chwili początkowej wraz z początkowym rozkładem temperatury. Ponieważ jednak są one zależne bezpośrednio od temperatury zmiennej przestrzennie w obszarze rozwiązania, więc schemat różnicowy dla równania (15) powinien także uwzględniać możliwość ich zmiany w przestrzeni (wzdłuż promienia kuli).

Zaproponowana metoda numeryczna oparta jest na schemacie różnicowym DuFort - Frankela [9,10,11], jakkolwiek może być wykorzystana także przy dowolnym innym jawnym schemacie różnicowym dla równań typu parabolicznego.

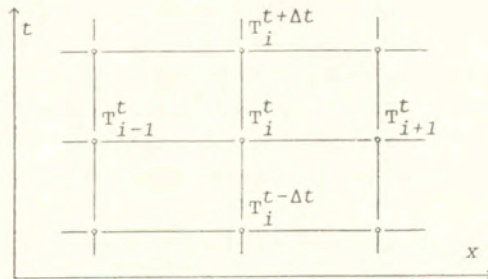
Klasyczny schemat DuFort - Frankela jest schematem jawnym trójpoziomowym, a jednowymiarowe równanie przewodnictwa we współrzędnych prostokątnych

$$(16) \quad \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\lambda}{\rho c} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

aproksymuje równaniem różnicowym o postaci:

$$(17) \quad \frac{T_i^{t+\Delta t} - T_i^{t-\Delta t}}{2\Delta t} = \frac{\lambda}{\rho c} \frac{T_{i+1}^t - T_i^{t+\Delta t} - T_i^{t-\Delta t} + T_{i-1}^t}{\Delta x^2}$$

zgodnie z oznaczeniami przedstawionymi na rysunku poniżej

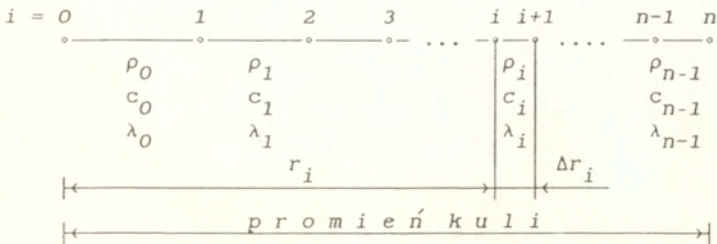


Rys.2 Siatka numeryczna metody DuFort - Frankela dla współrzędnych prostokątnych.

gdzie i jest wskaźnikiem siatki przestrzennej o kroku Δx , zaś Δt krokiem czasowym.

Schemat różnicowy dla równania (15) budujemy według następujących zasad. Załóżmy, że początek układu współrzędnych równania (15) umieścimy w środku kuli, a jej promień podzielimy na n odcinków o wymiarach Δr_i (z góry zakładamy siatkę nierównomierną, z możliwością jej zagęszczenia w obszarze z dużymi gradientami temperatury, np. w pobliżu powierzchni zewnętrznej kuli). Przyjmujemy numerację węzłów i oznaczenia parametrów materiałowych w poszczególnych warstwach

sferycznych jak na rysunku poniżej:



Rys.3 Symbolika przyjęta przy dyskretyzacji równania energii dla kuli.

Założmy, że w węzle i są w kontakcie dwie warstwy A i B o różnych właściwościach jak na rys.4, schemat (a):

Przyjmijmy chwilowo, że obie warstwy $i-1$ oraz i zbudowane są z tego samego materiału A, schemat (b). Wówczas rozbicie równania (15) w różnice skończone przy oznaczeniu temperatury w węzłach symbolem A oraz rozłożeniu temperatury w czasach $t+\Delta t$ i $t-\Delta t$ w węzle i równomiernie dla obu warstw wg schematu (17) daje (bilans elementu kontrolnego zawartego w obszarze od $i-1/2$ do $i+1/2$):

$$(18) \quad (\rho_a c_a)^t \frac{A_i^{t+\Delta t} - A_i^{t-\Delta t}}{2\Delta t} =$$

$$\frac{\lambda_a^t r_{i+1/2}^2 \left(A_{i+1}^t - \frac{1}{2} (A_i^{t+\Delta t} + A_i^{t-\Delta t}) \right)}{\Delta r_i} - \frac{\lambda_a^t r_{i-1/2}^2 \left(\frac{1}{2} (A_i^{t+\Delta t} + A_i^{t-\Delta t}) - A_{i-1}^t \right)}{\Delta r_{i-1}}$$

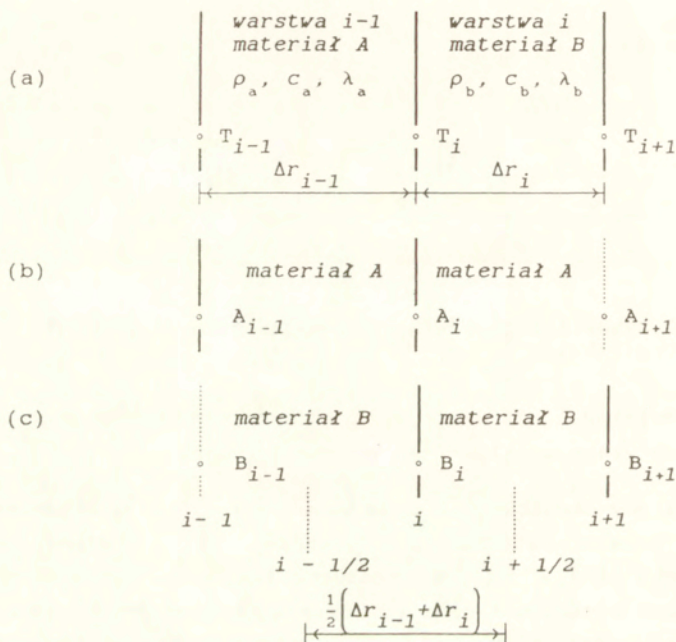
$$\frac{1}{2} (\Delta r_i + \Delta r_{i-1}) r_i^2$$

$$r_{i+1/2} = r_i + \frac{1}{2} \Delta r_i$$

$$r_{i-1/2} = r_i - \frac{1}{2} \Delta r_{i-1}$$

Dodatkowo założono, że własności cieplne i materiałowe (ρ , c , λ) przyjmowane są przy temperaturze odpowiadającej czasowi, dla którego została rozpisana pochodna czasowa, czyli dla

czasu t .



A_i, B_i itd. - chwilowe oznaczenia temperatury węzłów, a zarazem symbole materiałów o różnych własnościach

Rys.4 Rysunek pomocniczy do wyjaśnienia zasady budowy schematu numerycznego.

Po uporządkowaniu powyższego względem przyrostu temperatury w pochodnej czasowej otrzymujemy (dla uproszczenia w dalszym zapisie pomijane będzie oznaczenia chwili czasu dla parametrów materiałowych):

$$(19) \quad A_i^{t+\Delta t} - A_i^{t-\Delta t} = \frac{2\Delta t \lambda_a}{\rho_a c_a} \left\{ R_{i+1/2} \left[A_{i+1}^t - \frac{1}{2} (A_i^{t+\Delta t} + A_i^{t-\Delta t}) \right] + \right. \\ \left. - R_{i-1/2} \left[\frac{1}{2} (A_i^{t+\Delta t} + A_i^{t-\Delta t}) - A_{i-1}^t \right] \right\}$$

gdzie przyjęto oznaczenia:

$$(20) \quad R_{i+1/2} = \frac{2 \left(r_i + \frac{1}{2} \Delta r_i \right)^2}{r_i^2 \Delta r_i \left(\Delta r_i + \Delta r_{i-1} \right)}$$

$$(21) \quad R_{i-1/2} = \frac{2 \left(r_i - \frac{1}{2} \Delta r_{i-1} \right)^2}{r_i^2 \Delta r_i \left(\Delta r_i + \Delta r_{i-1} \right)}$$

Analogiczne równanie uzyskamy przy założeniu, że obie warstwy składają się z materiału B, schemat (c):

$$(22) \quad B_i^{t+\Delta t} - B_i^{t-\Delta t} = \frac{2\Delta t \lambda_b}{\rho_b c_b} \left\{ R_{i+1/2} \left[B_{i+1}^t - \frac{1}{2} \left(B_i^{t+\Delta t} + B_i^{t-\Delta t} \right) \right] + \right. \\ \left. - R_{i-1/2} \left[\frac{1}{2} \left(B_i^{t+\Delta t} + B_i^{t-\Delta t} \right) - B_{i-1}^t \right] \right\}$$

Temperatury oznaczone symbolami B_{i-1}^t oraz A_{i+1}^t w powyższych równaniach są temperaturami fikcyjnymi, gdyż przypisane są do materiałów nie istniejących w danych węzłach siatki numerycznej. Można je wyeliminować wstawiając w ich miejsce temperatury materiałów rzeczywiście występujących w danych węzłach zgodnie z zasadą, że eliminacja ta nie zmieni strumieni ciepła przepływających przez powierzchnie kontrolne $i-1/2$ oraz $i+1/2$, t.zn. przy spełnieniu warunków:

$$(23) \quad \lambda_a \left(A_{i+1}^t - \frac{1}{2} \left(A_i^{t+\Delta t} + A_i^{t-\Delta t} \right) \right) = \lambda_b \left(B_{i+1}^t - \frac{1}{2} \left(B_i^{t+\Delta t} + B_i^{t-\Delta t} \right) \right)$$

$$(24) \quad \lambda_a \left(\frac{1}{2} \left(A_i^{t+\Delta t} + A_i^{t-\Delta t} \right) - A_{i-1}^t \right) = \lambda_b \left(\frac{1}{2} \left(B_i^{t+\Delta t} + B_i^{t-\Delta t} \right) - B_{i-1}^t \right)$$

Oznaczając symbolem φ_i stosunek przewodności cieplnej w dwóch kolejnych warstwach

$$(25) \quad \varphi_i = \frac{\lambda_b}{\lambda_a} = \frac{\lambda_i}{\lambda_{i-1}}$$

oraz uwzględniając (23) -(24), równania (19) i (22) przyjmują postać:

$$(26) \quad A_i^{t+\Delta t} - A_i^{t-\Delta t} = \frac{2\Delta t \lambda_a}{\rho_a c_a} \left\{ \varphi_i R_{i+1/2} \left[B_{i+1}^t - \frac{1}{2} (B_i^{t+\Delta t} + B_i^{t-\Delta t}) \right] + \right. \\ \left. - R_{i-1/2} \left[\frac{1}{2} (A_i^{t+\Delta t} + A_i^{t-\Delta t}) - A_{i-1}^t \right] \right\}$$

$$(27) \quad B_i^{t+\Delta t} - B_i^{t-\Delta t} = \frac{2\Delta t \lambda_b}{\rho_b c_b} \left\{ R_{i+1/2} \left[B_{i+1}^t - \frac{1}{2} (B_i^{t+\Delta t} + B_i^{t-\Delta t}) \right] + \right. \\ \left. - R_{i-1/2} \frac{1}{\varphi_i} \left[\frac{1}{2} (A_i^{t+\Delta t} + A_i^{t-\Delta t}) - A_{i-1}^t \right] \right\}$$

W równaniach (26) i (27) występują już tylko węzły rzeczywiste siatki, jednak w dalszym ciągu opisują one przyrost entalpii w objętości kontrolnej przy założeniu, że wypełnia ją tylko jeden materiał: A - równanie (26), schemat (b), lub B - równanie (27), schemat (c). Dla objętości kontrolnej zestawionej z dwóch materiałów, schemat (a) z rys.4, przyrost entalpii będzie opisany kombinacją liniową równań (26) i (27) uwzględniającą różne pojemności cieplne obu materiałów.

Założmy, że strumienie ciepła dopływającego i odpływającego przez powierzchnie kontrolne $i-1/2$ oraz $i+1/2$ w czasie $2\Delta t$ dają pewną nadwyżkę energii ΔQ , która zmienia entalpię substancji w objętości kontrolnej V_i . Wówczas przy założeniu, że cała objętość kontrolna wypełniona jest materiałem A, przyrost temperatury w tej objętości będzie równy:

$$(28) \quad A_i^{t+\Delta t} - A_i^{t-\Delta t} = \frac{\Delta Q}{V_i \rho_a c_a}$$

gdzie V_i jest objętością zawartą pomiędzy powierzchniami kontrolnymi $i-1/2$ i $i+1/2$. To samo dla materiału B daje:

$$(29) \quad B_i^{t+\Delta t} - B_i^{t-\Delta t} = \frac{\Delta Q}{V_i \rho_b c_b}$$

zas dla dwóch materiałów jednocześnie przy założeniu, że materiał A wypełnia objętość V_a , materiał B odpowiednio V_b , przy czym $V_a + V_b = V_i$ oraz oznaczeniu temperatury wspólnej obu materiałów symbolem T:

$$(30) \quad T_i^{t+\Delta t} - T_i^{t-\Delta t} = \frac{\Delta Q}{V_i \left(\frac{V_a}{V_i} c_a \rho_a + \frac{V_b}{V_i} c_b \rho_b \right)}$$

Stosunki objętości V_a i V_b do V_i można wyrazić odpowiednimi funkcjami promienia r_i oraz jego różnic skonczonech Δr_{i-1} i Δr_i .

Zależności (28) - (30) pozwalają na określenie udziału równan (26) i (27) w bilansie objętości kontrolnej złożonej z dwóch materiałów:

$$(31) \quad T_i^{t+\Delta t} - T_i^{t-\Delta t} = \left(A_i^{t+\Delta t} - A_i^{t-\Delta t} \right) \frac{\rho_a c_a}{\frac{V_a}{V_i} c_a \rho_a + \frac{V_b}{V_i} c_b \rho_b}$$

$$(32) \quad T_i^{t+\Delta t} - T_i^{t-\Delta t} = \left(B_i^{t+\Delta t} - B_i^{t-\Delta t} \right) \frac{\rho_b c_b}{\frac{V_a}{V_i} c_a \rho_a + \frac{V_b}{V_i} c_b \rho_b}$$

Po uwzględnieniu podanych powyżej udziałów równan (26) i (27), przyrost temperatury elementu złożonego z dwóch materiałów wyrazi się zależnością:

$$\begin{aligned}
 (33) \quad T_i^{t+\Delta t} - T_i^{t-\Delta t} = & \frac{2 \Delta t}{\left[\frac{V_a}{V_i} \rho_a c_a + \frac{V_b}{V_i} \rho_b c_b \right]} \cdot \\
 & \left\{ \lambda_a \left\{ R_{i+1/2} \varphi_i \left(B_{i+1}^t - \frac{1}{2} (B_i^{t+\Delta t} + B_i^{t-\Delta t}) \right) \right\} + \right. \\
 & \quad \left. - R_{i-1/2} \left[\frac{1}{2} (A_i^{t+\Delta t} + A_i^{t-\Delta t}) - A_{i-1}^t \right] \right\} + \\
 & + \lambda_b \left\{ R_{i+1/2} \left[B_{i+1}^t - \frac{1}{2} (B_i^{t+\Delta t} + B_i^{t-\Delta t}) \right] + \right. \\
 & \quad \left. - R_{i-1/2} \frac{1}{\varphi_i} \left[\frac{1}{2} (A_i^{t+\Delta t} + A_i^{t-\Delta t}) - A_{i-1}^t \right] \right\} \Bigg\}
 \end{aligned}$$

Ponieważ z warunku ciągłości temperatury na styku materiałów wynika $A_i = B_i = T_i$, zaś temperatury B_{i+1} oraz A_{i-1} występujące w powyższym równaniu oznaczają temperatury materiałów rzeczywiście istniejących w danych węzłach, więc możemy w miejsce dotychczasowych chwilowych oznaczeń na temperaturę w węzłach zamiast symboli A lub B wstawić odpowiadającą im temperaturę T. Po zastąpieniu chwilowych oznaczeń własności materiałowych ρ_a , ρ_b , λ_a , λ_b , c_a i c_b oznaczeniami wynikającymi z przyjętej zasady numeracji warstw materiału, rozwiązując powyższe równanie względem $T_i^{t+\Delta t}$, otrzymujemy zależność pozwalającą na sukcesywne wyliczanie temperatury w kolejnych płaszczyznach czasowych:

$$\begin{aligned}
 (34) \quad T_i^{t+\Delta t} = & \frac{1 - C_i}{1 + C_i} T_i^{t-\Delta t} + \\
 & + \frac{2 C_i}{1 + C_i} \left(R_{i+1/2} \varphi_i T_{i+1}^t - R_{i-1/2} T_{i-1}^t \right)
 \end{aligned}$$

gdzie

$$(35) \quad C_i = \frac{\Delta t \lambda_{i-1} \left(R_{i+1/2} \varphi_i + R_{i-1/2} \right)}{V_{i-1/2} \rho_{i-1} C_{i-1} + V_{i+1/2} \rho_i C_i}$$

Oznaczenia $V_{i-1/2}$ oraz $V_{i+1/2}$ w powyższym są stosunkami objętości V_a i V_b do V_i ze wzorów (31)-(33) wyrażonymi odpowiednimi funkcjami r_i , Δr_i oraz Δr_{i-1} :

$$(36) \quad V_{i+1/2} = \frac{V_b}{V_i} = \frac{\left(r_i + \frac{1}{2} \Delta r_i \right)^3 - r_i^3}{\left(r_i + \frac{1}{2} \Delta r_i \right)^3 - \left(r_i - \frac{1}{2} \Delta r_{i-1} \right)^3}$$

$$(37) \quad V_{i-1/2} = \frac{V_a}{V_i} = \frac{r_i^3 - \left(r_i - \frac{1}{2} \Delta r_i \right)^3}{\left(r_i + \frac{1}{2} \Delta r_i \right)^3 - \left(r_i - \frac{1}{2} \Delta r_{i-1} \right)^3}$$

Własności materiałowe i ciepłne (ρ , λ , c) w równaniu (34) określone są przy znanej już temperaturze T^t dla odpowiednich węzłów. Są one w trakcie rozwiązywania zagadnienia na bieżąco korygowane wraz ze zmianami temperatury i wstawiane do wyrażenia na współczynniki C_i (35). Umożliwia to budowanie w trakcie rozwiązywania zagadnienia funkcji $c(T(t))$ oraz $\rho(T(t))$ występujących w równaniu (15). Schemat (34) pozwala więc na rozwiązywanie zagadnień z własnościami materiału zarówno zmiennymi z temperaturą, jak też w przestrzeni (niejednorodność) z uwagi na zmienność współczynników C_i wraz ze współrzędną promieniową. Dla przestrzeni dwuwymiarowej wyprowadzony na tej samej zasadzie schemat różnicowy pozwala na uwzględnienie zagadnienia anizotropii przewodności cieplnej, charakterystycznej w szczególności dla materiałów kompozytowych.

Poprawne wykorzystanie wzoru różnicowego (34) jest oczywiście uwarunkowane właściwą aproksymacją warunków brzegowych dla równania (15) w różnicach skonczonych. W przypadku warunków pierwszego rodzaju (zadana temperatura na brzegu obszaru) wystarczy jedynie podstawić odpowiednią wartość temperatury w węzłach brzegowych (34). Dla warunków II-go lub III-go rodzaju wymagana jest poprawna aproksymacja pochodnej nor-

malnej na brzegach obszaru rozwiązania. Można ją uzyskać rozwijając temperatury w otoczeniu punktu brzegowego w szereg Taylora z dokładnością do drugiej pochodnej włącznie, np. w otoczeniu węzła n :

$$T_{n-1} = T_n - \Delta r_{n-1} \left. \frac{\partial T}{\partial r} \right|_n + \frac{\Delta r_{n-1}^2}{2!} \left. \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} \right|_n - \dots$$

$$T_{n-2} = T_n - \left(\Delta r_{n-1} + \Delta r_{n-2} \right) \left. \frac{\partial T}{\partial r} \right|_n + \frac{\left(\Delta r_{n-1} + \Delta r_{n-2} \right)^2}{2!} \left. \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} \right|_n - \dots$$

Rozwiązanie powyższego układu daje ogólną zależność na pierwszej pochodną temperatury na brzegu obszaru od strony jego wnętrza:

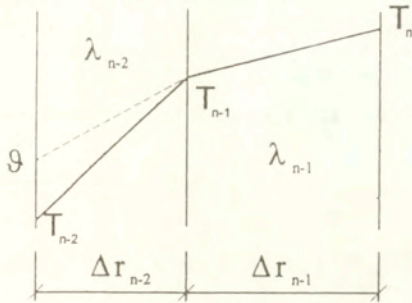
(38)

$$\left. \frac{\partial T}{\partial r} \right|_n = \frac{T_{n-2} \Delta r_{n-1}^2 + T_{n-1} (\Delta r_{n-1} - \Delta r_{n-2})^2 + T_n (2 \Delta r_{n-1} \Delta r_{n-2} + \Delta r_{n-2}^2)}{\Delta r_{n-1} \Delta r_{n-2} (\Delta r_{n-1} + \Delta r_{n-2})}$$

Zależność powyższa wyprowadzana jest jednak przy założeniu w otoczeniu węzła n ciągłości zarówno temperatury, jak i jej pochodnych do rzędu drugiego włącznie. W zaproponowanym powyżej schemacie różnicowym, wskutek założonych na wstępie możliwych zmian przewodności cieplnej materiału w przestrzeni, ciągłość pierwszej pochodnej może nie być zachowana. Zależność (38) musi zostać odpowiednio zmodyfikowana, zgodnie z poniższym rozumowaniem.

Wskutek różnych przewodności cieplnych warstw $n-1$ oraz $n-2$, rozkład temperatury ulega załamaniu przy przejściu od warstwy $n-1$ do $n-2$ kształtując na granicy tej ostatniej temperaturę T_{n-2} . Gdyby przewodności cieplne obu warstw były takie same i równe przewodności cieplnej warstwy zewnętrznej λ_{n-1} , wówczas załamanie to nie wystąpiłoby i w miejsce temperatury T_{n+2} pojawiłaby się pewna temperatura ϑ zapewniająca ciągłość pierwszej pochodnej rozkładu temperatury. Tą też temperaturę należy podstawić do wzoru różnicowego (38) w miejsce temperatury T_{n+2} . Można ją określić z prawa zachowania ciągłości strumienia ciepła:

$$(39) \quad \lambda_{n-2} (T_{n-1} - T_{n-2}) = \lambda_{n-1} (T_n - T_{n-1})$$



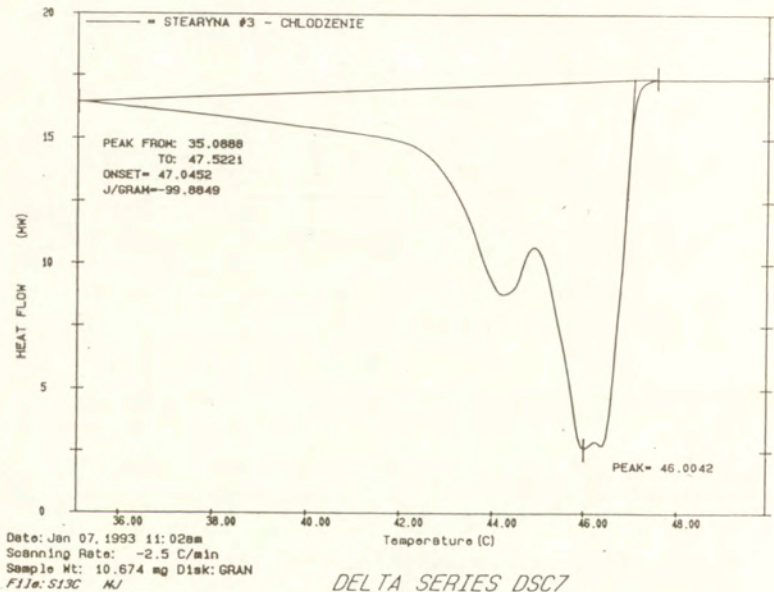
Rys.5 Temperatura zastępcza w warunku brzegowym.

4. Przykład zastosowania metody

Celem zweryfikowania poprawności przedstawionej metody obliczeniowej wykonano prosty eksperyment polegający na pomiarze zmiany w czasie temperatury w środku kulki o średnicy 38 mm (piłeczka ping-pongowa) wypełnionej stearyną. Kulka została wychłodzona do temperatury 0°C w całej swojej objętości, a następnie umieszczona w ultratermostacie z wodą o stabilizowanej przez cały czas temperaturze 65°C . Pomiaru temperatury dokonywano mikrotermoparą Cu-Ko podłączoną do rejestratora cyfrowego.

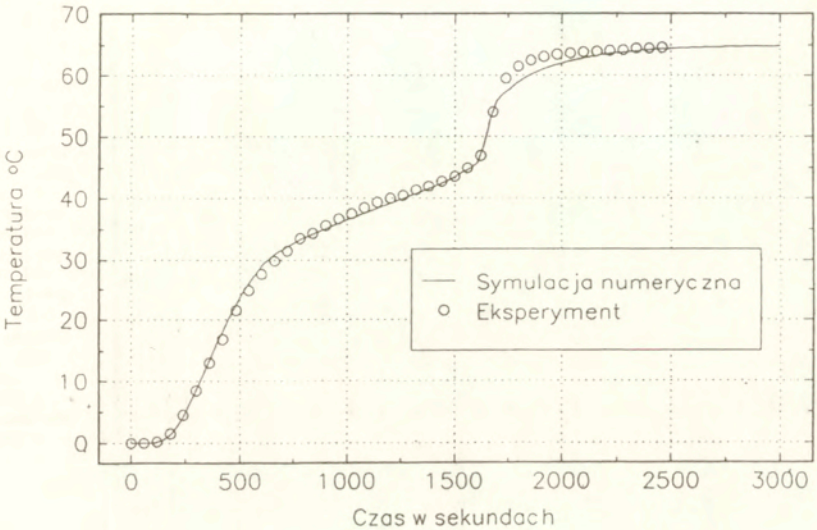
Stearyna użyta do wypełnienia piłeczki została najpierw przebadana w kalorymetrze scaningowym DSC celem określenia zależności jej ciepła właściwego od temperatury [13]. Rys.6 przedstawia wykres zmian w czasie strumienia ciepła odprowadzanego z kalorymetru DSC w trakcie tego pomiaru. Zmiany ciepła właściwego są proporcjonalne do zmian strumienia ciepła rejestrowanego przez układ pomiarowy kalorymetru. Wykres na

rys.6 świadczy o występowaniu dwóch przemian fazowych (dla dwóch podstawowych składników stearyny) różniących się temperaturą przemiany o około 2°C , przy czym całkowity proces topnienia lub zestalania zachodzi w zakresie temperatury od 35 do 48°C . Dla potrzeb modelowania numerycznego zmienność ciepła właściwego stearyny wraz z temperaturą przybliżono odcinkami łamanej.



Rys.6 Diagram DSC obrazujący zmiany strumienia ciepła odprowadzanego w trakcie przemiany fazowej stearyny.

Rys.7 przedstawia porównanie wyników eksperymentu z jego symulacją numeryczną. Widoczne różnice pomiędzy eksperymentem, a obliczeniami pojawiają się jedynie na odcinku dochodzenia temperatury środka kulki do temperatury osrodka, już po przetopieniu całego materiału kulki. Różnice te są wynikiem występowania w roztopionej stearynie prądów konwekcyjnych, nie uwzględnianych w obliczeniach.



Rys.7 Porównanie wyników eksperymentu z obliczeniami (opis w tekście).

Rys.8 - 10 ilustrują możliwości wykorzystania opisanej metody do modelowania stanów nieustalonych układów ze skokowo zmiennymi parametrami materiałowymi i cieplnymi. Przedstawiają one obliczenia wykonane dla pojedynczego elementu magazynującego wypełnionego woskiem PPW-20. W obliczeniach przyjęto następujące parametry termofizyczne wosku [2,13]:

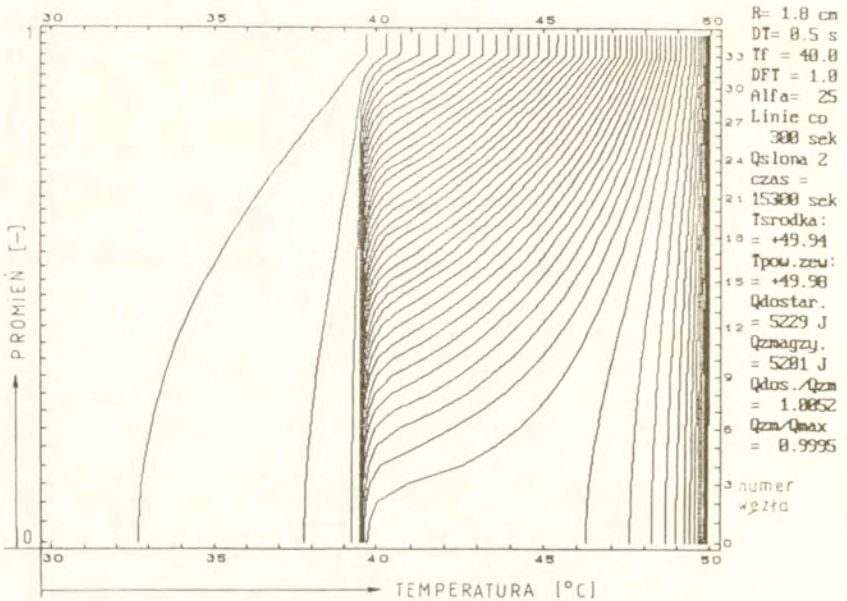
Faza stała:

gęstość $\rho = 900 \text{ kg/m}^3$
 ciepło właściwe $c_p = 1850 \text{ J/kg K}$
 przewodność cieplna $\lambda = 0.25 \text{ W/m K}$

Faza ciekła:

$\rho = 900 \text{ kg/m}^3$
 $c_p = 3100 \text{ J/kg K}$
 $\lambda = 0.15 \text{ W/m K}$

Dla celów demonstracyjnych założono, że przemiana fazowa wosku zachodzi w stałej temperaturze $T_f = 40^\circ\text{C}$ (w rzeczywistości jest ona rozmyta w zakresie $37 - 42^\circ\text{C}$) i połączona jest z

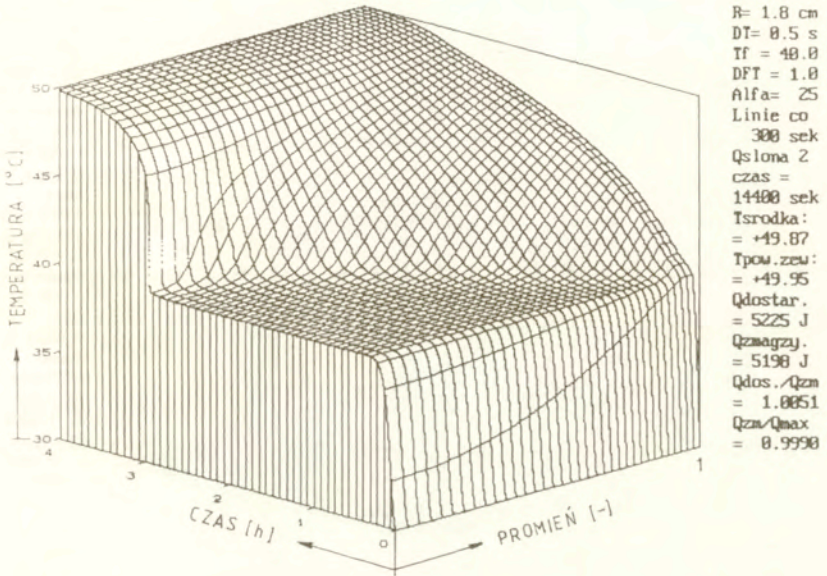


Rys.8 Przebieg izoterm przy nagrzewaniu kulistego pojemnika metalowego wypełnionego woskiem PPW-20.

efektem cieplnym równym $c_f = 200000 \text{ J/kg}$. Ciągłość entalpii wraz z temperaturą niezbędna dla metody entalpowej zapewniono przyjmując prostokątny rozkład zastępczego ciepła właściwego równego liczbowo c_f w zakresie od 39.5 do 40.5°C . Założono przy tym, że wosk umieszczony jest w pojemniku kulistym o średnicy zewnętrznej równej 36 mm i grubości ścianek 0.72 mm , wykonany ze stali stopowej (gęstość 7800 kg/m^3 , ciepło właściwe 450 J/kg K , przewodność cieplna 30 W/m K).

Obliczenia przedstawione na rys.8 i 9 były wykonywane dla nagrzewania elementu od temperatury początkowej równej 30°C w całej jego objętości przy założeniu, że wymiana ciepła z otoczeniem o stałej temperaturze 50°C odbywa się za pośrednictwem konwekcji ze współczynnikiem przejmowania ciepła $\alpha = 25 \text{ W/m}^2\text{K}$. Przy dyskretyzacji promień kuli został podzielony na $n = 35$ elementów Δr_i o wymiarach malejących wraz ze

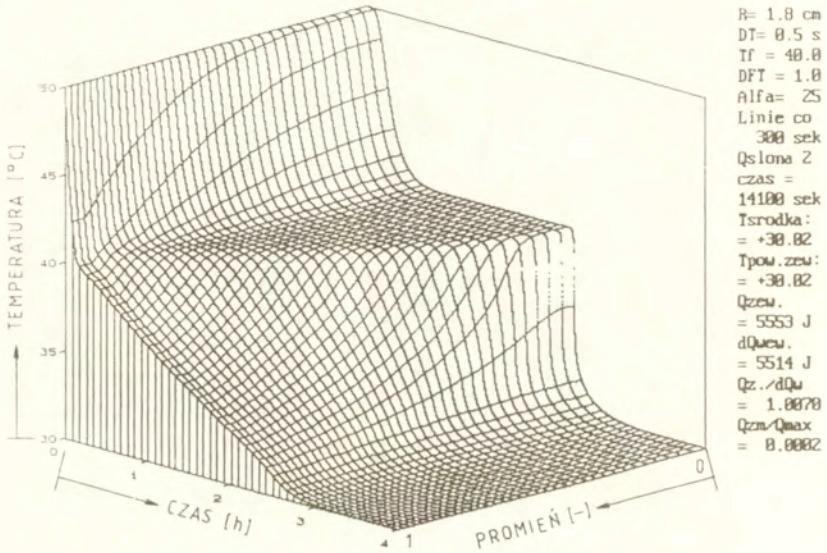
wzrostem promienia zgodnie z szeregiem geometrycznym o ilorazie $q = 0.98$.



Rys.9 Ilustracja zmian temperatury w pojemniku kulistym wypełnionym woskiem PPW-20 podczas nagrzewania z występującą przemianą fazową w stałej temperaturze.

Krzywe na rys.8 przedstawiają chwilowe rozkłady temperatury w kolejnych stanach oddległych od siebie o 300 sekund. W ciągu pierwszych dziewięciuset sekund procesu nagrzewania następuje szybkie dojście do dolnej temperatury przedziału przemiany fazowej (39.5°C) w całej objętości kuli. Od tej chwili narastanie temperatury jest znacznie powolniejsze, gdyż energia dostarczona z zewnątrz konsumowana jest przez przemianę fazową. Zjawisku temu towarzyszą duże promieniowe gradienty temperatury w fazie ciekłej wosku przy praktycznie zerowym gradiencie w fazie stałej. Pomijalnie mały promieniowy gradient temperatury utrzymuje się też przez cały czas procesu

nagrzewania w metalowej osłonie elementu, jako rezultat jej dużej przewodności cieplnej w stosunku do przewodności cieplnej wosku.



Rys.10 Ilustracja zmian teperatury przy zestalaniu wosku PPW-20 w trakcie chłodzenia pojemnika kulistego.

Omawiane procesy wyraźniej widoczne są na przestrzennym wykresie przedstawionym na rys.9, gdzie podstawę bryły temperatury tworzą osie współrzędnej promieniowej i czasu symulacji.

Rys.10 przedstawia symulację procesu schładzania tego samego elementu od temperatury początkowej 50°C przy temperaturze otoczenia 30°C i identycznych, jak powyżej pozostałych parametrach obliczeniowych. Wskutek mniejszej założonej przewodności cieplnej fazy ciekłej niż stałej, proces krzepnięcia zachodzi szybciej niż topienia, przy tych samych warunkach

wymiany ciepła.

W symulacji numerycznej przedstawioną metodą obliczeniową, w przypadku jej zastosowania do modelowania wąskotemperaturowych przejść fazowych, faktyczny zakres przemiany fazowej jest determinowany przyjętym w obliczeniach krokiem czasowym. Należy stosować ogólną zasadę, że przy określonych warunkach brzegowych przyrost temperatury w dowolnym węzle siatki numerycznej w jednym kroku czasowym musi być zawsze mniejszy, niż założony zakres temperatury przemiany fazowej. Niespełnienie tej zasady może prowadzić do "zgubienia" przemiany fazowej w trakcie obliczeń. Z drugiej strony, prezentowana metoda powoduje numeryczne przesunięcie temperatury przemiany w kierunku przeciwnym, niż kierunek narastania temperatury w obiekcie. W omawianym przypadku, jak to wynika z rys.8, przy nagrzewaniu kulki przemiana zachodzi w zakresie $39.5 - 39.7^{\circ}\text{C}$ pomimo założenia w procesie obliczeniowym zakresu $39.5 - 40.5^{\circ}\text{C}$. Odchyłka ta nie ma znaczenia w obliczeniach bilansowych, zaś w razie konieczności może być skorygowana poprzez założenie niesymetrycznego względem temperatury przemiany fazowej przedziału ΔT_f .

5. Podsumowanie

Celem realizowanej pracy było opracowanie efektywnego schematu numerycznego rozwiązującego omawiane zagadnienie fizyczne. Weryfikacja eksperymentalna i zgodność bilansu cieplnego potwierdziły poprawność zaproponowanej metody. Testy numeryczne wykazały jej stabilność dla szerokiego zakresu zmienności wartości poszczególnych parametrów procesu (np. współczynnika przejmowania ciepła przy grzaniu lub chłodzeniu próbki, różnicy temperatur pomiędzy otoczeniem, a temperaturą początkową próbki). Zaproponowany zmodyfikowany różnicowy schemat Dufort - Frankel'a może znaleźć zastosowanie nie tylko do rozwiązywania zadania Stefana, ale w ogólności do rozwiązywania zagadnień nieustalanej wymiany ciepła w obszarach ze skokowymi zmianami parametrów termofizycznych materiałów (np. dla wielowarstwowych ścian budynków).

Schemat powyżej opisany zachowuje poprawność nie tylko dla współrzędnych kulistych. Warto zaznaczyć, że jeżeli we wzorach na współczynniki (20) i (21) równania (34), w miejscach kwadratów promieni wstawimy potęgi o rząd niższe, zaś w (35) ilorazy objętości kłupin kuli zastąpimy odpowiednimi ilorazami powierzchni pierścieni, wówczas bez żadnych przerobek otrzymujemy schemat różnicowy aproksymujący równanie nieustalonego przewodnictwa dla walca nieskończenie długiego. Analogicznie, przejście do granicy $r_i \rightarrow \infty$ w wyrażeniach (20) i (21) i przyjęcie stosunku objętości w (35) równego stosunkowi odpowiednich Δr_i daje schemat dla ścianki płaskiej.

Zagadnienie wymiany ciepła z przemianą fazową dla elementu magazynującego energię jest jednym z wielu, jakie trzeba rozwiązać przy numerycznym modelowaniu pracy całej instalacji przygotowania ciepłej wody użytkowej ze zbiornikiem z podwójnym medium magazynującym wykorzystującej np. energię promieniowania słonecznego. Stabilność i zgodność schematu numerycznego oraz poprawność bilansu energii jest niezbędnym warunkiem dla poprawnego opisu całej instalacji. Warunek ten został osiągnięty, a możliwość szerszego zastosowania opisanej metody, skłania do wyeksponowania uzyskanych rezultatów.

Praca stanowi fragment badań prowadzonych w ramach projektu badawczego Nr 9 9332 92 03 finansowanego przez Komitet Badan Naukowych.

Literatura

1. Praca zbiorowa: *Budynki i ich elementy przystosowane do uzysku i akumulacji energii cieplnej ze źródeł odnawialnych promieniowania słonecznego i ciepła powierzchniowych warstw gruntu*, Prace IPPT PAN 27/1990
2. R.Domanski: "Badania właściwości cieplnych wybranych materiałów w magazynowaniu energii cieplnej", *Archiwum Termodynamiki*, Vol.6, No 1-2, 1985
3. A.W.Date, *Novel strongly implicit enthalpy formulation for multidimensional Stefan problems*, *Numerical Heat Transfer*, Part B, Vol.21, pp- 231-251, 1992
4. F.E.Moore, Y.Bayazoglu, *Melting Within a Spherical Enclosure*, *Journal of Heat Transfer*, Vol.104, pp. 19-23, 1982
5. M.De Lucia, A.Bbejan, *Thermodynamics of Phase - Change Energy Storage: The Effects of Liquid Superheating During Melting, and Irreversibility During Solidification*, *Journal of Solar Energy Engineering*, Vol.113, pp. 2-10, 1991
6. S.K.Roy, S.Senagupta, *Melting of a Free Solid in a Spherical Enclosure: Effects of Subcooling*, *Journal of Solar Energy Engineering*, Vol.111, pp.32-36, 1989
7. J.S.Hsiao, *An efficient algorithm for finite - difference analyses of heat transfer with melting and solidification*, *Numerical Heat Transfer*, Vol.8, pp. 653-666, 1985
8. Y.Cao, A.Faghari, *Performance characteristics of a thermal energy storage module: a transient PCM/forced convection conjugate analysis*, *Int. J.Heat Mass Transfer*, Vol.34, No.1, pp. 93-101,1991
9. D.J.Morrison, S.I.Abdel-Khalik, *Effects of Phase-Change Energy Storage on the Performance of Air-Based and Liquid-Based Solar Heating Systems*, *Solar Energy*, Vol. 20, pp.57-67, 1978
- 10.K.E.Torrance, *Comparison of Finite-Difference Computations of Natural Convection*, *Journal of Research of the National Bureau of Standards-B*, Vol. 72B, No.4, pp.281-301, 1968
- 11.D.Potter, *Metody obliczeniowe fizyki, fizyka komputerowa*, PWN, Warszawa, 1977
- 12.R.D.Richtmayer, K.W.Morton, *Difference Methods for Initial - Value Problems*, Interscience Publishers, New York, 1967
- 13.M.Jaworski, *Badania właściwości cieplnych materiałów do magazynowania energii, opracowanie wewnętrzne IPPT PAN, 1993, nie publikowane.*
- 14.R.Domanski, *"Magazynowanie energii cieplnej"*, PWN Warszawa, 1990