

3.31 — optyka zintegrowana, siatki  
dielektryczne

2.21 — fale powierzchniowe

Maciej Sowiński

TEORIE I METODY  
ANALIZY PLANARNYCH STRUKTUR  
Z SIATKĄ DIELEKTRYCZNĄ

21/1984

P. 269



WARSZAWA 1984.

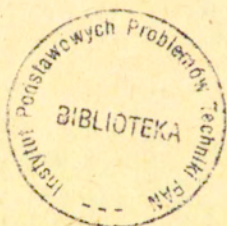
<http://rcin.org.pl>

Prace Zakładu Teorii Fal Elektromagnetycznych

Praca nr 209

Praca wpłynęła do Redakcji dnia 21 lutego 1984 r.

56969



N a p r a w a c h r ę k o p i s u

---

Instytut Podstawowych Problemów Techniki PAN

Nakład 160 egz. Ark.wyd. 3,4. Ark. druk. 5 .

Oddano do drukarni w maju 1984 r.

Nr zamówienia 357/84.

---

Warszawska Drukarnia Naukowa, Warszawa,  
ul. Śniadeckich 8

Maciej Sowiński  
Zakład Teorii Fal  
Elektromagnetycznych  
IPPT - PAN

TEORIE I METODY ANALIZY PLANARNYCH  
STRUKTUR Z SIATKĄ DIELEKTRYCZNĄ

Streszczenie

Praca zawiera przegląd ważniejszych teorii opisu pola elektromagnetycznego i metod jego obliczania w planarnych strukturach, których integralną częścią jest periodyczna warstwa dielektryka. Szczególny nacisk położony został na te metody, które mają lub mogą mieć zastosowanie w optyce zintegrowanej. Bardziej powierzchownie zostały potraktowane te metody, które z racji licznych uproszczeń mogą mieć zastosowanie tylko w konkretnych dziedzinach, jak na przykład metody zaniedbujące efekt fali powierzchniowej lub wyciekającej stosowane w holografii. Dwie najbardziej znane metody; metoda modów własnych i metoda fal sprzężonych zostały w pełnej formie zaprezentowane w rozdziałach 3 i 4. Obie te metody stosują się bezpośrednio do warstw o zmodulowanej przenikalności dielektrycznej i w formie nieuproszczonej mogą być obie stosowane w analizie struktur przewodzących fale wyciekające. Jednak w optyce zintegrowanej stosowana jest przede wszystkim pierwsza z nich, zaś druga cieszy się dużą popularnością w holografii ze względu na jej liczne uproszczone wersje.

Rozdziały 3 i 4 zostały poprzedzone rozdziałem 2, w którym autor niniejszego opracowania zawarł matematyczne rozważania nad ogólną postacią rozwiązań stacjonarnego równania falowego w warstwie periodycznej. Pozwoliło to uniknąć odwoływanie się podczas opisu kolejnych metod do twierdzenia Floquet'a i dało pewien ogólny obraz złożonej struktury pola w warstwie periodycznej.

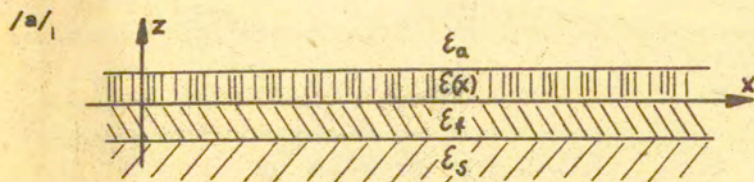
W rozdziale 5 opisane zostały metody perturbacyjne. Ważnym wynikiem klasycznych metod perturbacyjnych, startujących z reprezentacji pola dla płaskiej struktury niezaburzonej, jest odpowiedź na pytanie co dzieje się z ciągłym widmem modów falowodu płaskiego w przypadku wprowadzenia periodycznego zaburzenia. W punkcie tym, szczegółowo opisana też została ulepszona metoda perturbacyjna, opracowana przez Tamira i współautorów, z uwagi na oryginalność ujęcia mechanizmu oddziaływania warstwy periodycznej z falą powierzchniową i dużą przydatność w optyce zintegrowanej. Rozdział 6 poświęcony został metodom, które jakkolwiek nie niosą ze sobą tak pełnego i oryginalnego opisu zjawisk w periodycznej warstwie jak metody z punktów 3, 4 i 5, to jednak są one efektywne numerycznie i można je stosować zarówno do struktur z warstwą o zmodulowanej przenikalności dielektrycznej jak i do struktur z warstwą o periodycznie zmieniającej się grubości.

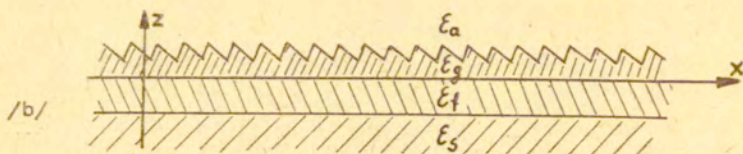
## 1. W s t ę p

Cienkie planarne struktury zawierające periodycznie zmodulowaną warstwę lub też warstwę o periodycznie porowkowanej powierzchni, są w ostatnich latach tematem bardzo wielu prac z różnych dziedzin techniki. Klasyczną dziedziną zastosowań była do niedawna głównie holografia /13/, /32/, /33/, /34/, /35/, której specyficzne metody i techniki obliczeniowe są dzisiaj klasyfikowane jako

przybliżone wersje tej samej teorii fal sprzężonych /12/.  
Dzisiaj takich dziedzin zastosowań można wymienić znacznie  
więcej, jak choćby akustooptyka /61/, gdzie płaskie stru-  
ktury periodyczne stosuje się w akustooptycznych mo-  
dulatorach światła /21/, /24/, /60/, deflektorach fali po-  
wierzchniowej /62/ i konwerterach modów /63/. Struktury  
z periodyczną warstwą stosuje się poza tym w technice  
anten /20/, /52/, laserach dużej mocy /14/, /16/, mase-  
rach /56/, technikach pomiarowych laserów /58/, optyce  
zintegrowanej, a ostatnio również w spektroskopii, /53/,  
/54/. Szczególnie dynamicznie rozszerza się w ostatnich  
latach zakres zastosowań warstw periodycznych w optyce  
zintegrowanej, obejmując już dzisiaj takie urządzenia jak  
filtry /64/ i konwertery modów /40/, /64/, wzmacniacze  
i lasery małej mocy /21/, /48/, /55/, /56/, /39/, urządze-  
nia sterujące typu Bragg'a oraz sprzęgacze wiązki z falą  
powierzchniową i falą powierzchniową z wiązką /18/, /21/  
/22/, /36/, /37/, /38/, /39/, /44/, /51/.

Poza niektórymi strukturami stosowanymi w akustooptyce i  
holografii, pozostałe są wytwarzane w postaci cienkich  
siatek dielektrycznych nanoszonych na zewnętrzną powierz-  
chnię podłoża lub na warstwową strukturę przewodzącą.  
Siatki te wytwarzane są bądź poprzez periodyczną modula-  
cję przenikalności dielektrycznej warstwy dielektryka na-  
niesionego na strukturę, rys. 1 /a/, bądź poprzez periody-  
czne rowkowanie powierzchni jednorodnego materiału tej  
warstwy, rys. 1 /b/.





Rys. 1. Planarne struktury periodyczne /a/ z siatką modulowaną /b/ z siatką rowkową

Struktury pokazane na rys. 1, cieszą się szczególnym zainteresowaniem w optyce zintegrowanej, która jak zgodnie stwierdza większość autorów, powinna stać się wiodącą techniką w budowie urządzeń współpracujących z włóknami światłowodów. Istnieją co prawda alternatywne propozycje rozwiązań, jak na przykład technika proponowana w pracy /65/ jednak najnowsze osiągnięcia w dziedzinie mikrolaserów i diod emitujących /LED/, /66/, wyraźnie sugerują na przyszłość rozwiązania planarne.

Charakterystyczną cechą siatek dielektrycznych, pokazanych na rys. 1, jest konwersja fali powierzchniowej, prowadzonej przez struktury warstwowe powstałe z nich w przypadku braku modulacji,  $\epsilon/x/ = \text{const.}$ , lub braku rowkowania, w falę wyciekającą. Po raz pierwszy ściśle opis powstawania tych fal podany został przez Oliner<sup>a</sup> i Hesse<sup>l</sup> w pracy /70/, co pozwoliło wyjaśnić wiele tak zwanych anomalii siatek, jak na przykład anomalie Wood<sup>a</sup> /19/, /20/. Charakterystyczną cechą fali wyciekającej, w siatce dielektrycznej jest jej powolny, wykładniczy zanik w kierunku propagacji oraz przekazywanie swojej energii tak znanym harmonikom przestrzennym, które klasycznie nazywano rzędami ugięcia. Harmoniki te występują w postaci promieniujących pod ściśle określonymi kątami wiązek, nad siatką, jak również w warstwie podłoża. W miarę zmiany częstotliwości prowadzonej fali lub zmian częstotliwości i kąta podającej na siatkę fali płaskiej, liczba powstałych harmonik jak też ich amplitudy i kąty ulegają w pew-

nych zakresach powolnym a w innych raptownym zmianom. Te właśnie raptowne zmiany pola wypromieniowywanego przez siatkę, zwane dawniej anomaliami, możemy dzisiaj ściśle wyjaśnić na gruncie prezentowanych w tej pracy teorii. Są one bowiem wynikiem rezonansów związanych z periodycznością struktury i z geometrią warstwową struktury jak również są one wynikiem wzajemnego oddziaływania tych rezonansów. Szczególnym zainteresowaniem autorów cieszą się anomalie związane ze zjawiskiem Bragg'a /6/, zwane zależnie od zastosowań odbiciem Bragg'a,

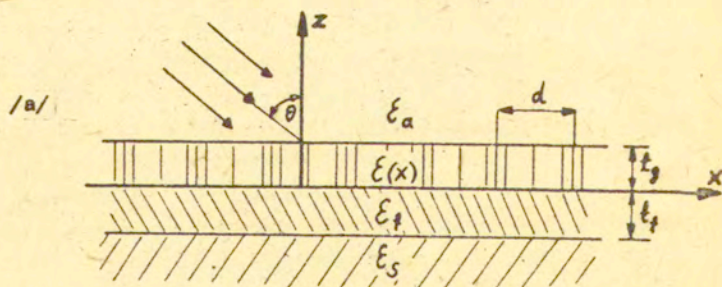
lub rezonansem typu Bragg'a. Dzieje się tak z dwóch powodów. Pierwszym z nich jest niepewność co do otrzymywanych wyników w wielu przybliżonych metodach lub wręcz załamywanie się tych metod dla wymienionego zakresu pracy siatek. Drugim powodem jest duże bogactwo różnych anomalii występujących w zakresie Bragg'a, obejmujące wszystkie poprzednio wymienione anomalie wraz z raptowną zmianą własności samej fali wyciekającej, co ma swoje odbicie w licznych zastosowaniach tego zjawiska, jak na przykład w mikrolaserach zbudowanych w oparciu o heterostruktury, /21/, /55/ lub inne konfiguracje /56/. Wśród szerokiego wachlarza stosowanych metod można więc znaleźć i takie, które stosują się tylko do omówionego zakresu Bragg'a i tylko w konkretnych zastosowaniach samej siatki.

W ostatnim czasie, ze względu na tak wszechstronne zastosowanie efektu fali wyciekającej występującego w strukturach prowadzących z siatką dielektryczną, zaczęto rozważać możliwość budowy innych struktur planarnych, które mogłyby prowadzić taką falę. Przykładem może być praca /66/, w której autorzy rozważają wielowarstwową strukturę płaską z conajmniej jedną warstwą ośrodka strątnego. Nie wydaje się jednak możliwe uzyskanie tak szerokiej <sup>gamy</sup> anomalii w tego typu strukturach, jaką posiadają

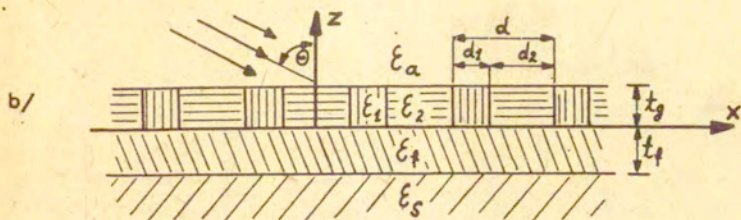
rozważane w tej pracy siatki dielektryczne.

Metody i teorie przedstawione w prezentowanej tu pracy stanowią pewne podsumowanie tego co już dziś wiemy o polach elektromagnetycznych występujących w dielektrycznych siatkach. W żadnym wypadku nie należy jednak tego opracowania traktować jako kompletny wykład, a to choćby z powodu ciągłego rozwoju omawianej dziedziny i to w wielu kierunkach. Pojawiają się nowe zastosowania znanych od dawna metod, /68/, rozszerza się samo pojęcie siatek na siatki aperiodyczne, do których zaliczają się oprócz siatek o statystycznym rozkładzie zaburzeń powierzchni, siatki periodyczne ale o skończonej liczbie rowków /69/. Istnieje poza tym możliwość użycia do budowy siatek materiałów stratnych, anizotropowych o silnej anizotropii czy wreszcie nieliniowych. Pola elektromagnetyczne powstałe w takich strukturach nie są w tej chwili możliwe do bezpośredniej analizy przez żadną z prezentowanych metod. Należy jednak sądzić, że zaprezentowane w tej pracy teorie i metody są dobrym punktem startowym do dalszych rozważań i analizy struktur o bardziej skomplikowanej budowie zawierających siatki dielektryczne.

## 2. Reprezentacja pola w strukturach periodycznych







Rys. 2. Siatki dielektryczne /a/ z periodyczną, ciągłą modulacją przenikalności dielektrycznej w warstwie siatki /b/ z periodyczną prostokątną modulacją  $\epsilon/x$ .

Szerokość stosowanych siatek /wzdłuż  $y$ / jest zawsze duża w porównaniu z długością fali  $\lambda$ , będziemy więc pola w strukturach pokazanych na rys. 2, jak i same struktury uważali za niezależne od zmiennej  $y$ , ( $\partial/\partial y = 0$ ). O przenikalności magnetycznej założymy, że jest jednakowa we wszystkich warstwach i równa przenikalności próżni  $\mu_0$ . Zależność od czasu przyjmujemy typu  $\exp - i\omega t$ .

Przenikalności dielektryczne  $\epsilon_j$ , gdzie  $j=a$  / powietrze /,  $j=f$  / warstwa przewodząca /,  $j=s$  / podłoże /, są względnymi przenikalnościami dielektrycznymi  $j$ -tego ośrodka. Dla przenikalności dielektrycznej próżni przyjmujemy oznaczenie  $\epsilon_0$ . We wszystkich jednorodnych ośrodkach struktury, składowe pola elektromagnetycznego spełniają jednorodne równania Helmholtza /2.1/:

$$/2.1/ \quad \nabla^2 F_j /x, z/ + k_j^2 F_j /x, z/ = 0 ; \quad j = a, f, s$$

$$\text{gdzie: } k_j^2 = k_0^2 \cdot \epsilon_j ; \quad k_0 = 2\pi/\lambda = \omega\sqrt{\mu_0 \cdot \epsilon_0}$$

W warstwie siatki, pola spełniają układ równań Maxwella ze zmiennym współczynnikiem  $\epsilon/r$ .  $r = /x, z/$ . Z uwagi na niezależność pól od zmiennej  $y$ , pola te można rozłożyć na pola typu TE i TM wzdłuż dowolnej osi układu współrzędnych

$x, z$ , przyjmując dla każdej z osi taki sam rozkład pola, /2.2/:

$$/2.2/ \quad \begin{pmatrix} \underline{E} \\ \underline{H} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0, E_y, 0 \\ H_x, 0, H_z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} E_x, 0, E_z \\ 0, E_y, 0 \end{pmatrix}$$

Pierwsze pole w rozkładzie /2.2/ oznaczone jest w pracach z zakresu siatek dielektrycznych jako TE, H LSM, lub P - polaryzacja zaś drugie TM, E, LSE, S-polaryzacja. My przyjmujemy konwencję pola typu TE i TM. Jako niewiadome funkcje przyjmuje się dla polaryzacji TE składową  $E_y$ , która spełnia w warstwie siatki równanie skalarne /2.3/, a pozostałe składowe wyznacza się z równań Maxwella:

$$/2.3/ \quad \nabla^2 E_y + k^2 / \underline{\epsilon} / E_y = 0 ; \quad k^2 / \underline{\epsilon} / = k_0^2 \cdot \underline{\epsilon} / \underline{\epsilon} / ;$$

$$\underline{H} = - \frac{1}{\omega \mu_0} \quad \underline{x} \quad \underline{E}$$

zaś dla polaryzacji TM jako niewiadomą funkcję przyjmuje się składową  $H_y$ , np.: /3/, spełniającą skalarne równanie /2.4/ :

$$/2.4/ \quad \nabla^2 H_y - \frac{\nabla \underline{\epsilon} / \underline{\epsilon} /}{\underline{\epsilon} / \underline{\epsilon} /} \circ \nabla H_y + k^2 / \underline{\epsilon} / H_y = 0$$

Stosując podstawienie,  $H_y = \sqrt{\underline{\epsilon} / \underline{\epsilon} /} \cdot F_g$ , zastosowane po raz pierwszy w pracy /5/, otrzymujemy z równania /2.4/ równanie typu /2.3/ dla skalarnej funkcji  $F_g(x, y)$  i problem dla polaryzacji TM formułuje się następująco :

$$/2.5/ \quad \nabla^2 F_g + k^2 / \underline{\epsilon} / F_g = 0 ; \quad \underline{E} = \frac{1}{\omega \underline{\epsilon}_0 \underline{\epsilon} / \underline{\epsilon} /} \nabla \times \underline{y}_0 \sqrt{\underline{\epsilon} / \underline{\epsilon} /} \cdot F_g$$

$$/2.6/ \quad k^2 / \underline{\epsilon} / = k_0^2 \cdot \sqrt{\underline{\epsilon} / \underline{\epsilon} /} + \frac{\nabla^2 \underline{\epsilon} / \underline{\epsilon} /}{2 \cdot \underline{\epsilon} / \underline{\epsilon} /} - \frac{3}{4} \cdot \left( \frac{|\nabla \underline{\epsilon} / \underline{\epsilon} /|}{\underline{\epsilon} / \underline{\epsilon} /} \right)^2$$

czyli poza różnicą w definicji  $k^2 / \underline{\epsilon} /$  tak samo dla obu

polaryzacji.

W warstwie siatki, przenikalność dielektryczna jest funkcją okresową,  $\epsilon /x, z/ = \epsilon /x + d, z/$ , stąd funkcja  $k^2 /r/$  zarówno w równaniu /2.3/ jak i /2.5/ jest okresową funkcją zmiennej  $x$ , o okresie  $d$ .

Założymy teraz, że  $k^2$  w równaniach /2.3/ i /2.5/ jest funkcją tylko jednej zmiennej  $x$ , jak to ma miejsce w przypadku siatek dielektrycznych pokazanych na rys. 2. W ogólności, funkcję tą możemy przedstawić w postaci jej szeregu Fouriera

$$/2.7/ \quad k^2 /x/ = k_0^2 \sum_{n=-\infty}^{+\infty} p_n \exp /i n K x/ ; \quad K = 2\pi /d$$

gdzie współczynniki  $p_n$  rozwinięcia /2.7/ są jednoznacznie określone dla danej siatki dielektrycznej.

Zajmiemy się teraz znalezieniem ogólnej postaci pola w ośrodku siatki, nie uwzględniając w tym miejscu warstwowej budowy struktury. Poszukiwane przez nas pole spełnia w nieograniczonym ośrodku zmodulowanym okresowo następujące równanie:

$$/2.8/ \quad \left[ -\frac{d^2}{dx^2} + -\frac{d^2}{dz^2} + k^2 /x/ \right] F_g /x, z/ = 0$$

Założymy postać poszukiwanego pola  $F_g$  w formie fali, propagującej się wzdłuż osi  $Z$ , z pewną stałą propagacji  $\beta$  :

$$/2.9/ \quad F_g /x, z/ = \exp /i \beta z / A /x/$$

Wstawiając /2.9/ do równania /2.8/ otrzymujemy równanie różniczkowe zwyczajne, spełniane przez funkcję  $A /x/$  :

$$/2.10/ \quad \left[ \frac{d^2}{dx^2} + k^2 /x/ - \beta^2 \right] A /x/ = 0$$

Ze względu na okresowość funkcji  $k^2/x/ = \beta^2$  możemy do równania /2.10/ zastosować twierdzenie Floquet'a, /1/, otrzymując ogólną postać rozwiązań tego równania:

$$/2.11/ \quad A /x/ = \exp /i \mathcal{K} x/ \Phi /x/ ; \quad \Phi /x + d/ = \Phi /x/$$

gdzie  $\Phi$  jest funkcją okresową o okresie  $d$ , zaś  $\mathcal{K}$  jest liczbą zespoloną zwaną dalej stałą charakterystyczną. Liczba ta jest w ogólności funkcją stałych propagacji  $\beta$  i  $k_0$  oraz współczynników  $p_n$  występujących w rozwinięciu /2.7/.

$$/2.12/ \quad \mathcal{K} = \mathcal{K} / \beta, k_0, p_0, p_1, p_{-1}, p_2, \dots /$$

Funkcję okresową  $\Phi$ , występującą w /2.11/, możemy podobnie jak funkcję  $k^2$  przedstawić w postaci jej szeregu Fouriera:

$$/2.13/ \quad \Phi /x/ = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} a_m \exp /i m \mathcal{K} x/$$

gdzie współczynniki  $a_m = a_m / \beta /$  są podobnie jak stała charakterystyczna  $\mathcal{K}$  funkcjami stałej propagacji  $\beta$ .

Korzystając z /2.11/ i /2.13/ możemy napisać ogólne rozwiązanie równania /2.10/ w formie szeregu:

$$/2.14/ \quad A /x/ = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} a_m / \beta / \exp /i h_m x/$$

gdzie;

$$/2.15/ \quad h_m = \mathcal{K} + 2\pi m/d = \mathcal{K} + m\mathcal{K}$$

Stała propagacji  $\beta$  odgrywa w prezentowanym tu wyprowadzeniu postaci pola w zmodulowanym okresowo ośrodku rolę stałej separacji.

Ten sam wynik otrzymalibyśmy stosując do równania /2.8/ jednowymiarową transformatę Fouriera względem zmiennej  $z$ : Aby więc otrzymać ogólną reprezentację pola  $F_g / x, z /$ , będącego rozwiązaniem równania /2.8/, należy zgodnie z teorią transformacji Fouriera, /9/, scałkować /2.9/ wzdłuż osi rzeczywistej  $\beta$  podstawiając w miejsce  $A / x /$  szereg /2.14/ :

$$/2.16/ \quad F_g / x, z / = \int_{-\infty}^{+\infty} f / \beta / \exp / i \beta z / \sum_{m=-\infty}^{+\infty} a_m / \beta / \exp [ i h_m / \beta / x ] d\beta$$

Funkcja  $f$  występująca w reprezentacji /2.16/ jest nieznaną funkcją amplitudy zależną od  $\beta$ .

Reprezentacja /2.16/ zawiera w sobie ciągłe widmo rozwiązań postaci /2.9/ zwanych w literaturze modami /o widnie ciągłym/, /2/, z których każdy scharakteryzowany jest stałą propagacji  $\beta$ . Każdy, określony tak mod spełnia równanie /2.8/, może więc samodzielnie propagować się w opisanym tu, okresowo zmodulowanym ośrodku. Z kolei każdy mod składa się z nieskończonej liczby związanych z nim harmonik, które mają postać fal płaskich i scharakteryzowane są stałymi propagacji  $h_m$ .

Przechodząc z całkowaniem pod znak sumy możemy z reprezentacji /2.16/ uzyskać, w sytuacjach kiedy przejście takie jest matematycznie poprawne, równoważną jej reprezentację:

$$/2.17/ \quad F_g / x, z / = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f / \beta / a_m / \beta / \exp [ i h_m / \beta / x + i \beta z ] d\beta$$

w postaci nieskończonej sumy, której poszczególne składniki w ogólności nie spełniają samodzielnie równania /2.8/.

Okazuje się, że w wielu problemach rozważanych dla warstwowych struktur periodycznych pokazanych na rys. 2, możemy określić albo wyliczyć taką jedną stałą charakterystyczną  $\mathcal{K}$ , z dokładnością do krotności  $mK$ , która będzie słuszna dla tych modów z reprezentacji /2.16/, z których chcemy zbudować rozwiązanie danego problemu. Wtedy z reprezentacji /2.17/ otrzymamy szczególną postać pól w ośrodku siatki:

$$/2.18/ \quad F_g / x, z / = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \exp / i h_m x / \int_{-\infty}^{+\infty} f / \beta / a_m / \beta / \exp / i \beta z / d\beta$$

szczególnie często wykorzystywaną w problemach optyki zintegrowanej.

Bardziej szczegółowe omówienie reprezentacji /2.18/ będzie przedstawione w dalszych rozdziałach pracy w miarę opisu poszczególnych metod obliczania pól w planarnych strukturach periodycznych.

W ośrodkach jednorodnych, czyli w podłożu, warstwie prowadzącej i powietrzu, pola elektromagnetyczne spełniają jednorodne równania Helmholtza /2.1/. Pola te ponadto muszą mieć taką postać aby było możliwe spełnienie warunków zszycia na płaszczyznach styku tych ośrodków z warstwą siatki. Jeśli więc w danym problemie pole w periodycznej warstwie siatki możemy opisać reprezentacją /2.18/, to pola w przyległych, jednorodnych ośrodkach struktury muszą być zbudowane z takich składników, które są zależne od zmiennej  $x$  jak  $\exp / i h_m x /$ , gdyż w przeciwnym przypadku wymienione powyżej warunki zszycia nie będą mogły być spełnione.

Wniosek ten prowadzi do wyrażenia pól w tych ośrodkach w postaci nieskończonej sumy fal płaskich;

$$/2.19/ \quad F_j(x, z) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \left[ e_1^{/+} \exp / i \beta_m^{/j} z / + \right. \\ \left. + e_1^{/-} \exp / - i \beta_m^{/j} z / \right] .$$

$$\cdot \exp / i h_m x / ; \quad j = a, f, s$$

z których każda posiada pożądaną zależność od zmiennej  $x$ . Każda fala z reprezentacji /2.19/ będzie niezależnie od innych fal spełniała równanie Helmholtza /2.1/ jeżeli stałe propagacji  $\beta_m^{/j}$  będą spełniać odpowiednie równania dyspersji:

$$/2.20/ \quad / \beta_m^{/j} / ^2 + h_m^2 = k_j^2 ; \quad j = a, f, s$$

Stąd stałe propagacji  $\beta_m^{/j}$  określimy wzorem:

$$/2.21/ \quad \beta_m^{/j} = \sqrt{k_j^2 - h_m^2} = \sqrt{k_j^2 - / \mathcal{K} + m K / ^2}$$

Reprezentacja /2.19/ nazywana bywa często w literaturze postacią Floquet'a /2/, /5/, /12/, z uwagi na istotną rolę cytowanego uprzednio twierdzenia Floquet'a w jej otrzymaniu.

Pierwszym, który użył reprezentacji /2.19/ do opisu pól w periodycznej strukturze był lord Rayleigh /15/, stąd historycznie starszą nazwą omawianej reprezentacji jest nazwa: rozwinięcie Rayleigh'a. Używają jej niektórzy autorzy, szczególnie w tych zagadnieniach, które dotyczą padania fali płaskiej na planarne struktury periodyczne /14/.

W tym ostatnim przypadku stałą charakterystyczną  $\kappa$  przyjmuje się równą rzutowi na oś  $x$  wektora falowego  $k_a$ , padającej na siatkę pod kątem  $\theta$  jednorodnej fali płaskiej, rys. 2:

$$/2.22/ \quad \kappa = k_a \sin \theta = k_0 \sqrt{\epsilon} a \sin \theta$$

Tak więc w przypadku padania fali płaskiej mamy w ośrodkach jednorodnych periodycznej struktury określone wszystkie wielkości z reprezentacji /2.19/ poza amplitudami, które należy wyznaczyć.

W dalszej części pracy, która ma charakter przeglądu używana jest, poza kilkoma wyjątkami, reprezentacja /2.18/ do opisu pól w warstwie siatki oraz /2.19/ do opisu pól w ośrodkach jednorodnych, tak jak to czynią cytowani autorzy.

### 3. Teoria modów własnych

Przepiszemy reprezentację /2.18/ w postaci:

$$/3.1/ \quad F_g/x, z/ = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} q_m/z/ \exp /i h_m x/$$

Następnie wstawmy postać /3.1/ oraz rozwinięcie /2.7/ funkcji  $k^2/x/$  bezpośrednio do równania /2.8/. Otrzymamy, por. /5/, układ równań różniczkowych zwyczajnych, który w macierzowej postaci możemy zapisać:

$$/3.2/ \quad \frac{d^2}{dz^2} \underline{q} = - \underline{P} \cdot \underline{q}$$

gdzie  $\underline{q} = q/z/$  jest wektorem kolumnowym z elementami  $q_m/z/$ , zaś  $\underline{P} = P_{m,n}$  jest niezależną od  $z$  macierzą:

$$/3.3/ \quad P_{m,n} = k_0^2 \quad p_{m-n} = h_m^2 \delta_{m,n}$$



gdzie  $\delta_{m,n}$  oznacza deltę Kronecker'a

Fundamentalnym krokiem, zarówno w teorii modów własnych, jak i w bliźniaczej do niej teorii fal sprzężonych /12/, /13/, jest założenie postaci rozwiązania układu równań /3.2/ w formie fali ;

$$/3.4/ \quad \underline{q} /z/ = \underline{C} \exp /i \gamma z/$$

gdzie  $\gamma$  jest stałą propagacji w kierunku  $z$ , zaś  $\underline{C}$  niezależnym od  $z$  wektorem.

Wstawiając /3.4/ do /3.2/ otrzymujemy jednorodny układ algebraicznych równań liniowych;

$$/3.5/ \quad \underline{P} \cdot \underline{C} = \gamma^2 \underline{C}$$

w którym  $\gamma^2$  okazuje się być wartością własną macierzy  $\underline{P}$ . Równanie charakterystyczne dla /3.5/ ma postać :

$$/3.6/ \quad \det \left[ \underline{P} - \gamma^2 \underline{1} \right] = 0$$

gdzie  $\underline{1}$  jest macierzą jednostkową nieskończonego rzędu. Niech  $\gamma^2_1$  będą wartościami własnymi  $\underline{P}$  zaś  $\underline{C}^1$  odpowiadającymi im wektorami własnymi o elementach  $C^1_m$ .

Z /3.4/ otrzymujemy nieskończony ciąg par rozwiązań własnych układu /3.2/ ;

$$q^{+/1} /z/ = \underline{C}^1 \exp /i \gamma_1 \cdot z/$$

$$/3.7/ \quad q^{-/1} /z/ = \underline{C}^1 \exp /- i \gamma_1 \cdot z/$$

Wstawiając /3.7/ do /3.1/ otrzymujemy reprezentację pola w obszarze siatki w postaci /5/, /28/ ;

$$/3.8/ \quad F_g /x, z/ = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \left[ e^{+/1} \exp /i \gamma_1 \cdot z/ + e^{-/1} \exp /-i \gamma_1 \cdot z/ \right] C^1_m \exp /i h_m x/$$

Otrzymana reprezentacja pola w obszarze siatki /3.8/, w postaci podwójnej sumy fali płaskich daje pozorne tylko wrażenie prostoty rozważanego problemu. Ze wzorów /3.3/, /3.5/ i /3.6/ wynika bowiem, że zarówno stałe propagacji  $\gamma_1$  jak i współczynniki amplitudowe  $C_m^1$  są funkcjami wielu parametrów występujących w opisywanym zagadnieniu.

$$/3.9/ \quad \gamma_1 = \gamma_1(\mathcal{K}, d, \omega, p_0, p_1, p_{-1}, p_2, \dots) = \sqrt{\gamma_1^2}$$

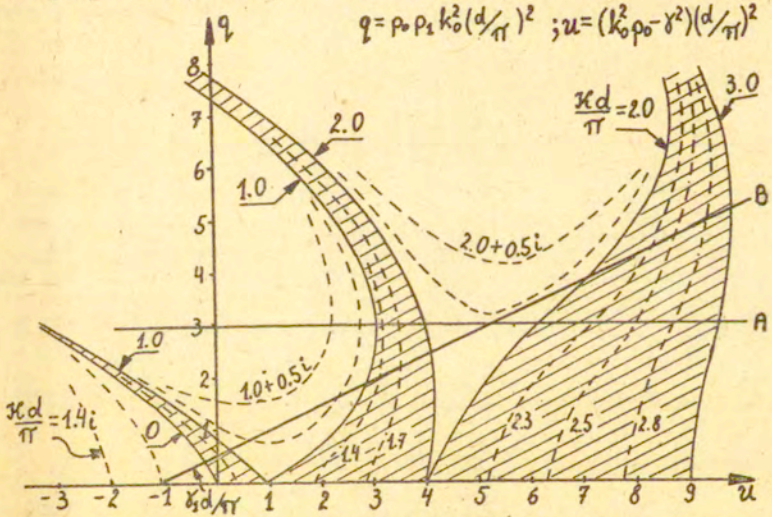
$$/3.10/ \quad C_m^1 = C_m^1(\mathcal{K}, d, \omega, p_0, p_1, p_{-1}, p_2, \dots)$$

Najbardziej przykrą własnością /3.9/ i /3.10/ jest zależność  $\gamma_1$  i  $C_m^1$  od dwóch, często nie znanych parametrów: stałej charakterystycznej  $\mathcal{K}$  i częstości  $\omega$ . Pozostałe parametry są znane jeśli rozpatrujemy konkretną siatkę. Jeśli z zależnościami /3.9/ i /3.10/ porównać /2.12/ z poprzedniego rozdziału /rolę stałej propagacji  $\beta$  odgrywa teraz dyskretny zbiór stałych  $\gamma_1$ / widzimy uwikłany charakter zależności stałej charakterystycznej  $\mathcal{K}$ , wartości własnych  $\gamma_1^2$  i wektorów  $C^1$ . Trudność ta nie występuje tylko w przypadku, w którym  $\mathcal{K}$  i  $\omega$  określone są z góry przez warunki zadania jak na przykład w zagadnieniach padania na siatkę fali płaskiej pod określonym kątem. Jeśli chodzi o sposób liczenia wartości własnych macierzy  $\underline{P}$  to należy zauważyć, że wyznacznik /3.6/ jest wyznacznikiem typu Hill'a i wartości własne mogą być liczone dla macierzy  $\underline{P}_N$ , obciętej do wymiaru  $N \times N$  macierzy  $\underline{P}$ . Stosując twierdzenie o nieskończonych systemach równań, /16/, autorzy pracy /5/ wyprowadzają warunek dla układu równań /3.5/:

$$/3.11/ \quad \left( 1 / k_0^2 \right) | k_0^2 \cdot p_0 - h_m^2 - \gamma^2 | > \sum_{i \neq m} | p_i |$$

który musi być spełniony dla  $|m| > N - 1/2$ , aby omawiane obcięcie było możliwe. Jak widać z /3.11/ warunek ten

będzie dla układu /3.5/ spełniony, wtedy, kiedy rozwinięcie funkcji  $k^2/x$ , /2.7/, będzie szeregiem absolutnie zbieżnym. Tak więc, proponowana tutaj metoda nie da się zastosować do siatki dielektrycznej pokazanej na rys. 2/b/. Szczegółowy opis liczenia wartości i wektorów własnych w przypadku cosinusoidalnej modulacji ośrodków siatki można znaleźć w pracy /17/. Bardziej poglądowym, aczkolwiek mniej dokładnym, jest wyznaczenie wartości własnych  $\gamma_1$  przy użyciu tak zwanych map stabilności, używanych w teorii równania Mathieu /6/, /7/. Przykład takiej mapy stabilności dla ośrodka zmodulowanego cosinusoidalnie,  $p_1=p_{-1} \neq 0$ ,  $p_0 \neq 0$ ,  $p_n=0$  dla  $|n|>1$ , pokazany jest na rys. 3;

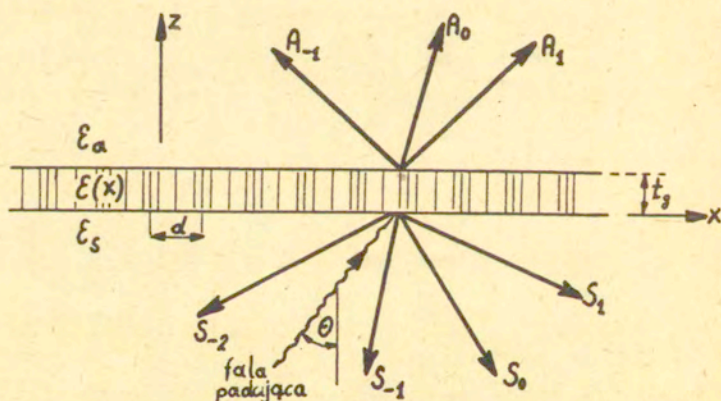


Rys. 3 Mapa stabilności dla ośrodka zmodulowanego cosinusoidalnie dla pól o polaryzacji TE /równanie /2.3/, /za pracę /2/.

Rejony zakreślowane, w których stała charakterystyczna  $\kappa$ , porównaj /2.12/, /2.15/, /3.9/ i /3.10/, jest liczbą rzeczywistą, nazywane są rejonami stabilności. Jeśli punkt pracy dla danego modu znajduje się w rejonie niestabilnym mod ten posiada tłumienie w kierunku osi x, stała  $\kappa$  jest w tym rejonie zespolona, mamy więc do czynienia z falą tłumioną.

Krzywa A na rys. 3 obrazuje nam  $\omega = \text{const}$  zaś krzywa B obrazuje nam możliwe punkty pracy dla  $\gamma = \gamma_1 = 1$ . Znacznie bardziej skomplikowany charakter mają mapy stabilności w przypadku siatki zmodulowanej prostokątnie, rys. 2 /b/, przedstawione w pracy Lewisa i Hessela /4/. Tam też, autorzy przedstawiają metodę, przy pomocy której można policzyć wartości własne  $\gamma_1$  i wektory własne  $C_1^1$ , pomimo niemożności obcięcia nieskończonego wyznacznika /3.6/.

Rozważmy teraz dla pojedynczej warstwy periodycznej, rys. 4, sposób, w jaki metoda modów własnych uwzględnia warunki zszycia na płaszczyznach styku warstwy z ośrodkiem



Rys. 4. Struktura pojedynczej warstwy periodycznej o grubości  $t_g$

Wewnątrz warstwy, pole elektromagnetyczne, prostopadłe do osi  $z$ , możemy zgodnie ze wzorem /3.8/ zapisać w postaci:

$$/3.12/ \quad E_g/x, z/ = \sum_1 [e_1^{+/} \exp /i \gamma_1 \cdot z/ + e_1^{-/} \exp /-i \gamma_1 \cdot z/] \sum_m V_{1,m} \exp /i h_m \cdot x/$$

rystyczne admitancje modowe w ośrodku jednorodnym, dane są wzorem:

$$/3.18/ \quad Y_1^{/j/} = \begin{cases} \beta_1^{/j/} / \omega \cdot \mu_0 & \text{dla modów TE} \\ \omega \cdot \epsilon_0 \cdot \epsilon_j / \beta_1^{/j/} & \text{dla modów TM} \end{cases} \quad /j \neq g/$$

W celu spełnienia warunków wypromieniowania, w /3.16/ i /3.17/ uwzględnione zostały tylko mody biegnące w kierunku ujemnych z.

Podobnie w ośrodku nad siatką, powietrzu, pola prostopadłe do osi z zgodnie z /2.19/ zapiszemy w postaci:

$$/3.19/ \quad E_a /x, z/ = \sum_1 A_1 \exp /i h_1 \cdot x + i \beta_1^{/a/} \cdot z /$$

$$/3.20/ \quad H_a /x, z/ = \sum_1 A_1 Y_1^{/a/} \exp /i \cdot h_1 \cdot x + \beta_1^{/a/} \cdot z /$$

Amplitudy  $e_1^{/+}/$ ,  $e_1^{-}/$ ,  $S_1$ ,  $A_1$  należy wyznaczyć, żądając aby na płaszczyznach  $z = 0$  i  $z = t_g$ , odpowiednie pola z /3.12/, /3.16/ i /3.19/ oraz /3.13/, /3.17/ i /3.20/ były równe.

W efekcie otrzymamy cztery układy równań liniowych, po dwa układy dla każdej płaszczyzny, które w zapisie macierzowym posiadają następujące rozwiązania, zgodnie z pracą /5/ :

$$/3.21/ \quad \underline{S}_g \circ e^{/+}/ = \underline{T}_0 \circ e$$

$$/3.22/ \quad \underline{e}^{-}/ = \text{Exp} /i \gamma t_g / \circ R_g \circ \text{Exp} /i \gamma t_g / \circ \underline{e}^{/+}/$$

$$/3.23/ \quad \underline{S} = \underline{T}_0^{-1} \circ \left[ \text{Exp} /i \gamma t_g / \circ R_g \circ \text{Exp} /i \gamma t_g / - \right. \\ \left. - R_0 \right] \circ \underline{S}_g^{-1} \circ \underline{T}_0 \circ e$$

Wektory  $e^{/+}/$ ,  $e^{-}/$ ,  $\underline{S}$  są wektorami poszukiwanych amplitud  $e_1^{/+}/$ ,  $e_1^{-}/$ ,  $S_1$ . Wektor  $\underline{e}$  jest wektorem pobudzenia

$$/3.13/ \quad H_g / x, z / = \sum_1 [e_1^{/+ /} \exp / i \delta_1 \cdot z / + \\ + e_1^{/- /} \exp / -i \delta_1 \cdot z / ] \sum_m I_{1,m} \exp / i h_m \cdot x /$$

Stałe  $e_1^{/+ /}$ ,  $e_1^{/- /}$  są amplitudami poszczególnych, niezależnych modów, które należy wyznaczyć. Dla polaryzacji TE mamy  $V_{1,m} = C_m^1$ , zaś dla polaryzacji TM,  $I_{1,m} = C_m^1$ , przy czym w drugim przypadku zarówno  $\delta_1$  jak i  $C_m^1$  muszą być liczone dla  $k^2/x/$  określonego wzorem /2.6/. Pozostałe amplitudy harmonik liczymy z równań Maxwell'a, otrzymując :

$$/3.14/ \quad V_{1,m} = \sum_n z_{1,m-n}^{/g/} I_{1,n}$$

Impedancja  $Z_{1,m-n}^{/g/}$  reprezentuje sprzężenie n-tej harmoniki pola magnetycznego z m-tą harmoniką pola elektrycznego i liczymy je z równań Maxwell'a /3.15/ oddzielnie dla każdego modu:

$$/3.15/ \quad TE ; H_g = - 1/\omega \mu_0 \nabla \times E_g, \quad TM ; E_g = \frac{1}{\omega \cdot \epsilon / x /} \nabla \times H_g$$

Rozważmy problem dla pobudzenia falą płaską podającą od strony podłoża, rys. 4. Zgodnie z /2.22/, stała charakterystyczna  $\mathcal{K}$  jest znana,  $\mathcal{K} = k_s \sin \theta$ .

Zgodnie z otrzymaną w rozdziale 2 reprezentacją /2.19/ pole prostopadłe do osi z w podłożu,  $j = s$ , możemy zapisać :

$$/3.16/ \quad E_s / x, z / = \exp / i \mathcal{K} \cdot x + i \beta_0^{/s/} \cdot z / + \\ + \sum_l S_1 \cdot \exp / i h_l \cdot x - i \beta_1^{/s/} \cdot z /$$

$$/3.17/ \quad H_s / x, z / = Y_0^{/s/} \exp / i \mathcal{K} \cdot x + i \beta_0^{/s/} \cdot z / - \\ - \sum_1 S_1 Y_1^{/s/} \exp / i h_1 \cdot x - i \beta_1^{/s/} \cdot z /$$

gdzie;  $\beta_1^{/s/}$  dane są wzorem /2.21/, zaś  $Y_1^{/j/}$ , charakte-

o elementach  $\sigma_{0,l}$ , zaś macierz  $\text{Exp} /i \underline{\delta} t_g/$  jest diagonalną macierzą o elementach  $\sigma_{1,m} \exp /i \underline{\gamma}_1 \cdot t_g/$ . Pozostałe macierze mają postacie:

$$/3.24/ \quad \underline{T}_0 = 2 / \underline{I} + \underline{Y}_s \circ \underline{V} /^{-1} \circ \underline{Y}_s$$

$$/3.25/ \quad \underline{R}_0 = / \underline{I} + \underline{Y}_s \circ \underline{V} /^{-1} \circ / \underline{I} - \underline{Y}_s \circ \underline{V} /$$

$$/3.26/ \quad \underline{R}_g = / \underline{I} + \underline{Y}_a \circ \underline{V} /^{-1} \circ / \underline{I} - \underline{Y}_a \circ \underline{V} /$$

$$/3.27/ \quad \underline{S}_g = \underline{1} - \underline{R}_0 \circ \text{Exp} /i \underline{\delta} t_g/ \circ \underline{R}_g \circ \text{Exp} /i \underline{\delta} t_g/$$

Macierze  $\underline{I}$  i  $\underline{V}$  są kwadratowymi macierzami o elementach  $I_{1,m}$  i  $V_{1,m}$ , zaś macierze  $\underline{Y}_s$  i  $\underline{Y}_a$  są diagonalnymi macierzami o elementach  $\sigma_{1,m} \underline{Y}_1^{s/a}$  i  $\sigma_{1,m} \underline{Y}_1^{a/s}$  odpowiednio. W podobny do /3.23/ sposób, można przedstawić rozwiązanie dla amplitud modów w górnym ośrodku.

Jak wynika ze wzorów /3.24/ - /3.27/ oraz /3.10/, jeśli mamy zadane pobudzenie falą płaską oraz geometrię siatki, wszystkie macierze występujące w /3.21/ - /3.23/ są zdefiniowane i możemy je wyliczyć. Jeśli dodatkowo  $\det / \underline{S}_g / \neq 0$  to znając wektor pobudzenia  $\underline{e}$  liczymy interesujące nas amplitudy modów ze wzorów /3.21/ - /3.23/. W przypadku kiedy wyznacznik macierzy  $\underline{S}_g$  znika, czyli,

$$/3.28/ \quad \det \left[ \underline{1} - \underline{R}_0 \circ \text{Exp} /i \underline{\delta} t_g/ \circ \underline{R}_g \circ \text{Exp} /i \underline{\delta} t_g/ \right] = 0$$

mamy do czynienia z rezonansem omawianej warstwy periodycznej a /3.28/ jest równaniem rezonansu poprzecznego dla prowadzonych /powierzchniowych lub wyciekających/ fal przez siatkę dielektryczną, pokazaną na rys. 4.

Z warunku /3.28/ możemy wyznaczyć stałe charakterystyczne  $\mathcal{K}$ , dla których, przy zadanej częstotliwości, geometrii oraz polaryzacji mogą propagować się pola elektromagnetyczne w postaci opisanych poprzednio modów, bez koniecz-

ności pobudzania ich jakimkolwiek źródłem położonym na zewnątrz siatki. Zapisując stałą charakterystyczną w postaci :

$$/3.29/ \quad \mathcal{K} = h_0 = \mathcal{K}_0 + i\alpha$$

rozpoznajemy stałą tłumienia  $\alpha$  jako tak zwany parametr wyciekania /18/ odpowiedzialny za wyciek energii z siatki dielektrycznej do podłoża lub w rejon powietrza. Opis fal wyciekających można znaleźć w /19/, /20/ i /21/, gdzie omówione zostały zastosowania tych fal w teorii periodycznych anten, anomalii Wood'a /19/, /20/ oraz w zastosowaniu do sprzęgaczy optyki zintegrowanej /21/.

Należy też zauważyć, że w przypadku nieskończonego wyznacznika równania rezonansu /3.28/, jeżeli  $\mathcal{K} = \mathcal{K}_0 + i\alpha$  jest dla danej geometrii i częstości  $\omega$  rozwiązaniem równania /3.28/, to również wartości:

$$/3.30/ \quad \mathcal{K}^n = \mathcal{K} + n \cdot K = \mathcal{K}_0 + i\alpha + n \cdot K, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

są rozwiązaniami /3.28/ co wynika z /3.3/, /3.8/ jak również postaci pól użytych do wyprowadzenia omawianego równania.

Wniosek ten jest odpowiednikiem własności wyprowadzanej z dowodu twierdzenia Floquet'a /1/.

W przypadku braku modulacji,  $p_0 \neq 0$ ,  $p_n = 0$ ,  $n = \pm 1, \pm 2, \dots$  wszystkie macierze występujące w równaniu /3.28/ stają się macierzami diagonalnymi i równanie rezonansu rozpada się na nieskończoną liczbę równań:

$$/3.31/ \quad 1 - \Gamma_{0,1} \cdot \Gamma_{g,1} \cdot \exp /2 \cdot i \cdot \gamma_1 \cdot t_g/ = 0$$

gdzie  $\gamma_1$  w przypadku braku modulacji jest równa:

$$/3.32/ \quad \gamma_1 = \sqrt{k_0^2 \cdot p_0 - \mathcal{K}' + 1 \cdot K'^2}$$



Z uwagi na własność /3.30/, wystarczy rozwiązać /3.31/ dla  $l = 0$ . Tak więc równanie macierzowe /3.28/ okazało się być uogólnieniem znanego warunku rezonansu dla warstwy dielektrycznej /3.31/, mówiącego, że fala po odbiciu od górnej i od dolnej granicy ośrodka nie powinna się zmienić.

Rozwiązywanie równania /3.28/ jest w ogólnym przypadku znacznie bardziej skomplikowane niż /3.31/, na szczęście wyznacznik /3.28/ jest podobnie jak /3.6/ wyznacznikiem typu Hill'a, możliwe jest więc obcięcie go do wymiaru  $N \times N$  przy zachowaniu analogicznego warunku do /3.11/, por. /16/.

W przypadku, kiedy pod siatką dielektryczną znajduje się jeszcze jedna warstwa, jak na rys. 2, należy w równaniu /3.28/ zamiast macierzy  $\underline{R}_0$  użyć macierzy  $\underline{R}_0'$  powstałej z  $\underline{R}_0$  przez zamianę we wzorze /3.25/ macierzy  $\underline{Y}_s$  na macierz  $\underline{Y}_{in}$ , będącą macierzą wejściowej admitancji, patrząc znad płaszczyzny  $z = 0$  w dół struktury, rys. 2. Macierz ta dana jest wzorem, /5/:

$$/3.33/ \quad Y_n^{/in/} = \frac{1 - \rho_n \exp /2 i \beta_n^{/f/} \cdot t_f/}{1 + \rho_n \exp /2 i \beta_n^{/f/} \cdot t_f/} Y_n^{/f/}$$

gdzie  $\rho_n$  jest współczynnikiem odbicia od płaszczyzny  $z = -t_f$ , rys. 2, patrząc w dół od tej płaszczyzny, zaś  $Y_n^{/f/}$  jest admitancją modową w warstwie prowadzącej, daną wzorem /3.18/.

$$/3.34/ \quad \rho_n = \frac{Y_n^{/f/} - Y_n^{/s/}}{Y_n^{/f/} + Y_n^{/s/}}$$

W przypadku struktury złożonej z siatki i warstwy prowadzącej często zdarza się, że większy wpływ na powstawanie rezonansu ma warstwa prowadząca niż siatka. Powoduje to powolną zbieżność rozwiązań równania /3.28/, co wiąże się

z koniecznością liczenia dużych wyznaczników. Autorzy pracy /5/ podają prosty sposób przyśpieszenia zbieżności procesu liczenia stałej charakterystycznej  $\mathcal{K}$ .

Równanie /3.31/, opisujące rezonanse w warstwie z rys.4, w przypadku braku modulacji ośrodka warstwy jest w gruncie rzeczy równaniem trygonometrycznym i może generować wiele rozwiązań. Oznaczając we wzorze /3.31/  $r_{0,1} = r_0$ ,  $r_{g,1} = r_g$  oraz:

$$/3.35/ \quad r_0 = e^{2i\Phi_s(\mathcal{K})}; \quad r_g = e^{2i\Phi_c(\mathcal{K})}$$

otrzymujemy z /3.31/, por. /21/ rozdz. 2:

$$/3.36/ \quad \gamma/\mathcal{K}/ \cdot t_g + \Phi_s/\mathcal{K}/ + \Phi_c/\mathcal{K}/ = \nu \cdot \pi \quad ; \quad \nu = 0, 1, 2, \dots$$

Dla rzeczywistych przesunięć fazowych  $\Phi_s$  i  $\Phi_c$  otrzymujemy z /3.36/ właściwe mody prowadzone falowodu płaskiego z rys. 4, dla  $\mathcal{K} = \mathcal{K}_v^{sw/}$  będących rzeczywistymi rozwiązaniami /3.36/, spełniającymi nierówność

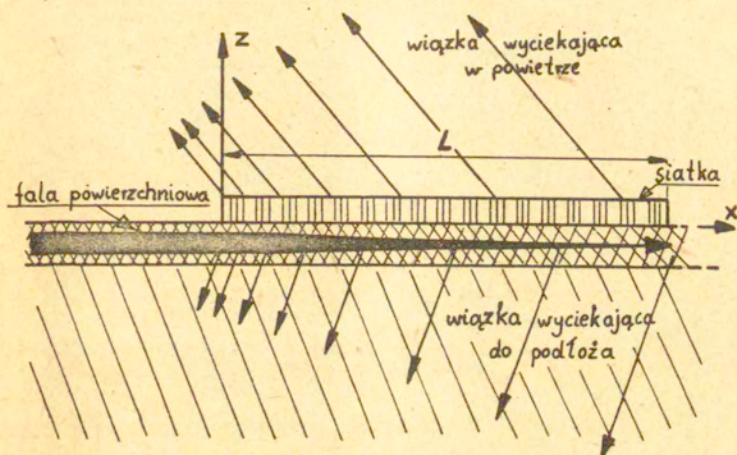
$$/3.37/ \quad k_0^2 \cdot p_0 > / \mathcal{K}_v^{sw/} /^2 > k_0^2 \cdot \max / \epsilon_s, \epsilon_a /$$

Dla mniejszych co do modułu wartości  $\mathcal{K}_v^{sw/}$  niż dolna granica /3.37/ będą to mody promieniowania falowodu do podłoża /powietrza/ lub zdegenerowane mody promieniowania falowodu do podłoża i powietrza.

Dla urojonych  $\mathcal{K}_v$ , spełniających /3.36/ otrzymamy mody zanikające, por. /21/, str. 46.

Ponieważ równanie rezonansu siatki dielektrycznej /3.28/ jest uogólnieniem równania /3.31/, a więc i /3.36/, należy od jego rozwiązań oczekiwać podobnych własności, i to w znacznie bardziej skomplikowanej formie z uwagi na własność /3.30/.

Typowym przykładem, do którego stosuje się omawianą teorię modów własnych, jest sytuacja pokazana na rys. 5.



Rys. 5. Fala powierzchniowa /mod przewodny/ falowodu płaskiego / $x < 0$ / dobiega do rejonu, w którym na powierzchni płaskiego falowodu została naniesiona siatka dielektryczna.

Siatka dielektryczna o długości  $L$  została naniesiona na powierzchni falowodu płaskiego. Od strony obszaru jednorodnego / $x < 0$ /, rys. 5 nadbiega fala powierzchniowa, która w rejonie siatki dielektrycznej staje się falą wyciekającą, opisaną wzorami /3.12/, /3.13/, /3.19/ i /3.20/ w warstwie siatki i powietrza, wzorami /3.16/ i /3.17/, /po opuszczeniu członów opisujących falę płaską pobudzającą z rys. 4/, w warstwie podłoża oraz w warstwie przewodzącej

$$/3.38/ \quad E_f / x, z / = \sum_1 \left[ f_1^{+/} \exp / i \beta_1^{/f/} \cdot z / + \right. \\ \left. + f_1^{-/} \exp / -i \beta_1^{/f/} \cdot z / \right] \exp / i h_l x /$$

$$\begin{aligned} /3.39/ \quad H_f/x, z/ &= \sum_1 \gamma_1^{/f/} \cdot \left\{ f_1^{/+} \exp /i \beta_1^{/f/} \cdot z/ + \right. \\ &\left. - f_1^{/-} \exp /- i \beta_1^{/f/} \cdot z/ \right\} \exp /i h_1 \cdot x/ \end{aligned}$$

Jeżeli fala powierzchniowa, pobudzająca strukturę z rys. 5, jest pewnym, właściwym modem prowadzonym danego falowodu płaskiego, na przykład TE, to poprzeczne do osi z pole tej fali będzie miało w warstwie f postać:

$$\begin{aligned} /3.40/ \quad E_{sw}/x, z/ &= f_v^{/sw/} \cdot \cos / \beta_v^{/f/} \cdot z/ \exp /i \mathcal{K}_v^{/sw/} \cdot x/ = \\ &= 1/2 \left[ f_v^{/sw/} \exp /i \beta_v^{/f/} \cdot z/ + f_v^{/sw/} \cdot \exp /-i \cdot \right. \\ &\left. \beta_v^{/f/} \cdot z/ \right] \exp /i \mathcal{K}_v^{/sw/} \cdot x/ \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} /3.41/ \quad H_{sw}/x, z/ &= i \gamma_v^{/f/} \sin / \beta_v^{/f/} \cdot z/ \exp /i \mathcal{K}_v^{/sw/} \cdot x/ = \\ &= 1/2 \gamma_v^{/f/} \left[ f_v^{/sw/} \exp /i \beta_v^{/f/} \cdot z/ - \right. \\ &\left. - f_v^{/sw/} \exp /- i \beta_v^{/f/} \cdot z/ \right] \exp /i \mathcal{K}_v^{/sw/} \cdot x/ \end{aligned}$$

gdzie,  $f_v^{/sw/}$  - amplituda modu  $/TE/v$ ,  $\gamma_v^{/f/}$  - modowa admitancja w warstwie f dana wzorem /3.18/,  $\mathcal{K}_v^{/sw/}$  - liczba falowa w kierunku propagacji modu  $/TE/v$  generowana równaniem /3.36/, oraz  $\beta_v^{/f/}$  - liczba falowa modu  $/TE/v$  w kierunku osi z dana w warstwie f falowodu płaskiego wzorem:

$$/3.42/ \quad \beta_v^{/f/} = \sqrt{k_0^2 \cdot \epsilon_f - \mathcal{K}_v^{/sw/} / ^2}$$

Jak wykazują obliczenia numeryczne prowadzone przez autorów wielu prac, w których rozważa się sytuację pokazaną na rys. 5, zarówno dla siatek o modulowanej przenikalności  $\epsilon/x/$  w warstwie siatki jak i dla siatek rowkowanych /o krzywoliniowym profilu/, /5/, /18/, /21/, stałe cha-

rakterystyczne  $\mathcal{K}_V$ , generowane macierzowym równaniem rezonansu /3.28/ są w przybliżeniu równe liczbom falowym  $\mathcal{K}^{sw}$  generowanym równaniem /3.36/, dla falowodu płaskiego z usuniętą warstwą siatki. Dokładniej:

$$/3.43/ \quad \mathcal{K}_V^{sw} \simeq \operatorname{Re}(\mathcal{K}_V) = \mathcal{K}_{0V} \gg d_V$$

$$\text{gdzie: } \mathcal{K}_V = \mathcal{K}_{0V} + i d_V$$

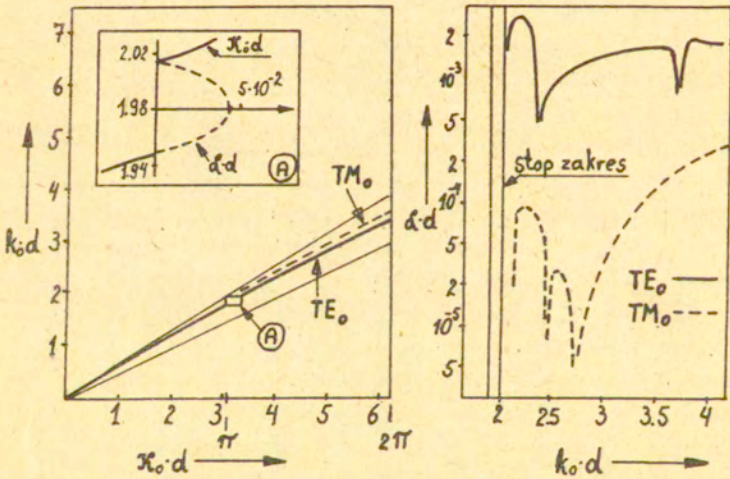
Własność /3.43/ jest tym lepiej spełniona im zaburzenie geometrii z rys. 5 spowodowane warstwą siatki jest mniejsze. W ogólności, staramy się tak dobierać parametry siatki aby własność /3.43/ była spełniona, co pozwala uniknąć rozpatrywania wpływu efektów związanych z krawędzią siatki jako pomijalnie małych. Mówimy wtedy, że fala powierzchniowa, dla której zachodzi /3.43/ gładko wślizguje się w rejon siatki dielektrycznej.

Aby jeszcze bardziej wyjaśnić uwikłaną zależność macierzy /3.24/ - /3.27/ i wyznacznika /3.28/ od stałej charakterystycznej  $\mathcal{K}$  opiszmy standardowy proces obliczeniowy dla przypadku pobudzenia struktury z rys. 5 pewnym właściwym modem falowodu płaskiego, na przykład  $TE_{1V}$ .

Pierwszym krokiem jest zbudowanie algorytmu obliczeniowego liczącego wartości własne  $\chi_1$  wyznacznika /3.6/ oraz związane z nimi wektory własne  $\underline{c}^1$ , czyli współczynniki  $C_m^1$ , dla dowolnej kombinacji  $k_0$  i  $\mathcal{K}$  traktowanych jako parametry. W tym algorytmie szczególną uwagę należy zwrócić na proces obcinania liczonych macierzy jeżeli znajdujemy się w pobliżu warunku Bragg'a, czyli dla  $\mathcal{K}$ :  $\operatorname{Re} \mathcal{K} \simeq n\pi/d$ ,  $n = \pm 1, \pm 2, \dots$ , por. /11/. Następnie algorytm ten wejdzie w skład programu liczącego macierze /3.24/ - /3.27/ oraz wyznacznik /3.28/, zmodyfikowany dodaniem warstwy prowadzącej /3.33, 3.34/, dla  $k_0$  i  $\mathcal{K}$  traktowanych jako parametry. Teraz należy tak prowadzić obliczenia aby dla pewnej, lub zadanej, częstości  $\omega$  znaleźć stałą  $\mathcal{K}$  taką, aby dla danego modu pobudzającego był spełniony warunek /3.43/ oraz równanie /3.28/.

Mając wyliczoną stałą  $\mathcal{K}$ , rozwiązujemy /3.21/ dla  $\underline{g} = \underline{0}$ , po czym wyliczamy amplitudy  $A_1$  i  $S_1$  tak aby w warstwie f  $f_v^{+/} = 1/2 f_v^{sw/} = f_v^{-/}$ , gdzie  $f_v^{sw/}$  amplituda właściwego modu  $/TE_v/$ , porównaj /3.38/ i /3.40/. Aby bliżej wyjaśnić z jaką dokładnością można spełnić warunek /3.43/, zamieścimy za pracą /5/, wykresy uzyskane dla siatki dielektrycznej z rys. 2/a/, dla której przyjęto:

$$/3.44/ \quad \mathcal{E}/x/ = \mathcal{E}_g /1 + M \cos \frac{2\pi}{d} \cdot x /$$



rys. 6. Zależność stałej charakterystycznej  $\mathcal{K} = \mathcal{K} + i\alpha$  od częstotliwości dla podstawowych modów falowodu płaskiego  $TE_0$  i  $TM_0$ . Warstwa siatki znajduje się bezpośrednio na podłożu, rys. 5 i jest zmodulowana cosinusoidalnie zgodnie z /3.44/.  $\mathcal{E}_g = 1$ ,  $\mathcal{E}_s = 3,61$ ,  $\mathcal{E}_s = 2,25$ ,  $M = 0,08^B$ ,  $t_g = 2 d/\pi$  /za pracą /5/.

Pierwszy z wykresów rys. 6, tradycyjnie odwrócony, przedstawia zależność części rzeczywistej  $\mathcal{K}$  od częstotliwości.

Wykresy tego typu, po raz pierwszy wprowadzone przez Brilluin'a, por. /6/, noszą nazwę wykresu Brilluin'a lub krzywej dyspersji. W liczyonym przykładzie, wykres ten nie ulegnie zauważalnej na skali rys. 6 zmianie, jeżeli  $0 \leq M < 0,5$ , poza wstawką (A), która obrazuje skok stałej  $K_0$  oraz zależność współczynnika tłumienia  $\alpha$  w sąsiedztwie warunku Bragg'a,  $K_0 \cdot d = \pi$ . Zakres częstotliwości, dla którego zachodzi to zjawisko, w naszym przypadku  $1,95 < k_0 \cdot d < 2,01$  nazywany jest stop-zakresem i związany jest z wejściem punktu pracy siatki w rejon niestabilny na mapie stabilności, rys. 3. Stała  $\alpha$  jest w tym zakresie tak duża, że wychodzi znacznie poza skalę prawego wykresu z rys. 6, obrazującego zależność  $\alpha$  od częstotliwości. Zakres warunku Bragg'a wykorzystywany jest w konstrukcji laserów w optyce zintegrowanej, /21/ i szczegółowo rozważany przez wielu autorów /3/, /11/, /22/. Poszczególne ostre skoki na wykresie  $\alpha$  vs  $k_0$ , rys.6, związane są z pojawieniem się dla danej częstotliwości kolejnych wiązek /propagujących się w powietrze lub do podłoża, kolejnych modów własnych/. Historycznie nazywane jest to zjawisko anomaliami Wood'a, por. /19/, /23/.

Podsumowując, obraz pola elektromagnetycznego w nieskończonej w kierunku osi x i jednolitej w kierunku osi y, siatce dielektrycznej, rys. 2, oraz warstwach i ośrodkach przyległych jest następujący: Pole jest nieskończoną sumą właściwych modów siatki, generowanych równaniem rezonansu /3.28/, z których każdy może propagować się w strukturze niezależnie, nie sprzęgając się z pozostałymi ani w warstwie siatki ani poprzez warunki brzegowe. Każdy mod właściwy siatki, opisany stałą charakterystyczną  $K_y$ , jest z kolei nieskończoną sumą modów własnych generowanych równaniem /3.6/. Mody własne siatki propagują się niezależnie wewnątrz każdej z warstw doznając sprzężeń na płaszczyznach styku warstwy siatki z przylegającymi do niej ośrodkami. W warstwie siatki, każdy mod własny, opisany poprzeczną liczbą falową  $\gamma_1^{(N)}$ , jest nieskoń-

czoną sumą harmonik przestrzennych opisanych podłużnymi liczbami falowymi  $h_m^{/v/}$ , które nie mogą się samodzielnie propagować w tej warstwie. W warstwach jednorodnych przyległych do siatki każdy mod własny posiada tylko jedną harmonikę przestrzenną o indeksie równym indeksowi danego modu własnego, dzięki czemu harmoniki w ośrodkach jednorodnych mogą się już, podobnie jak mody własne, propagować samodzielnie.

Pobudzając strukturę z rys. 5, pewnym właściwym modem prowadzonym falowodu płaskiego, tak aby był spełniony warunek /3.43/, nie rozważa się rozwiązania w postaci sumy po wszystkich właściwych modach siatki, tylko w postaci jednego modu, dla którego warunek /3.43/ jest spełniony. Jest to tak zwane gładkie wślizgiwanie się fali w rejon siatki.

W przypadku podania jednorodnej fali płaskiej opisanej liczbą falową  $k_j$ , /z j-tego ośrodka jednorodnego na płaszczyznę warstwy siatki/ pod kątem  $\theta$ , rys.4, rozróżnia się dwa przypadki:

$$/3.45/ \quad k_j \sin \theta \neq \mathcal{K}_v \pm 1 \cdot K$$

żaden mod właściwy siatki nie zostaje wzbudzony a do obliczeń przyjmuje się stałą charakterystyczną  $\mathcal{K} = k_j \cdot \sin \theta$ , niespełniającą warunku rezonansu /3.28/.

$$/3.46/ \quad k_j \sin \theta \cong \mathcal{K}_v \pm 1 \cdot K, \text{ dla pewnego } v \text{ i } 1, \\ / \text{por. /3.43/ } /.$$

W siatce będzie się wzbudzać  $v$ -ty mod właściwy o ile  $1$ -ty mod własny jest propagujący się  $j$ -tym ośrodkiem. W tym ostatnim przypadku poszukujemy rozwiązania w postaci  $v$ -tego modu właściwego siatki oraz stosujemy twierdzenie o wzajemności zwracając uwagę na zagadnienie zgodności amplitudy padającej fali z amplitudą  $1$ -tego modu własnego wzdłuż osi siatki, por. /21/, str. 116.



Autor niniejszego opracowania nie spotkał się z ~~pracy~~ opartą na metodzie modów własnych i uwzględniającą więcej niż jeden mod właściwy siatki, aczkolwiek wydaje się, że w sytuacji złego spełnienia warunku /3.43/ lub /3.46/, takie podejście mogłoby okazać się celowe.

#### 4. Teoria fal sprzężonych

Teoria fal sprzężonych, zwana też przez niektórych autorów teorią fal prowadzonych, /24/, jest historycznie starsza od teorii modów własnych i znana jest przede wszystkim ze swoich licznych przybliżonych wersji, jak teoria Kogelnika /32/, Raman'a - Nath'a, lub teoria amplitud transmitancyjnych /27/. W swojej ścisłej wersji przedstawionej przez Gaylord'a i Moharam'a w pracy /12/ jest ona w pełni równoważna teorii modów własnych w przypadku padania na siatkę dielektryczną jednorodnej fali płaskiej. Na fakt ten zwrócili już uwagę cytowani autorzy we wcześniejszej pracy /26/.

Obraz pola elektromagnetycznego w nieskończonej siatce dielektrycznej, rys. 4, oraz ośrodkach przyległych, jest według teorii fal sprzężonych następujący: Pole jest nieskończoną sumą fal, które w ośrodkach jednorodnych propagują się niezależnie, nie są sprzęgane poprzez warunki zszycia na płaszczyznach styku siatki z przylegającymi ośrodkami, ale w niejednorodnym ośrodku siatki dielektrycznej doznają sprzężeń pomiędzy sobą. Jedną z możliwych reprezentacji pola wewnątrz siatki dielektrycznej może być reprezentacja /3.1/, gdzie  $q_m/z$  są amplitudami poszczególnych fal sprzężonych.

Reprezentacja ta powstała z ogólniejszej reprezentacji /2.17/, wyprowadzonej w rozdziale 2 dla ośrodka, w którym przenikalność dielektryczna jest funkcją zmiennej podłużnej  $x$ ,  $\epsilon = \epsilon(x)$ . Reprezentacja pola w ośrodkach jednorodnych /4.1/ jest tożsama z reprezentacją /2.19/, różniąc się tylko oznaczeniem amplitud i literą indeksu

sumowania w porównaniu z wzorami /3.16/, /3.17/, /3.19/ i /3.20/.

$$/3.1/ \quad F_g/x, z/ = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} q_m /z/ \exp /i h_m \cdot x/$$

$$/4.1/ \quad F_j/x, z/ = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \left[ \bar{A}_m^{/j/} \exp /i \beta_m^{/j/} \cdot z/ + \right. \\ \left. + \bar{A}_m^{/j/} \exp /-i \beta_m^{/j/} \cdot z/ \right] \exp /i h_m \cdot x/ ; j \neq g$$

Podłużne liczby falowe  $h_m$  dane są wzorem /2.15/, dla stałej charakterystycznej danej dla padającej na siatkę fali płaskiej wzorem /2.22/, zaś poprzeczne liczby falowe  $\beta_m^{/j/}$  dane są wzorem /2.21/. Mamy więc w ośrodkach jednorodnych taką samą reprezentację pola jak w teorii modów własnych tylko teraz interpretujemy to w ten sposób, że w ośrodkach jednorodnych, przyległych do siatki występuje tylko jeden mod własny posiadający nieskończenie wiele harmonik przestrzennych, nazywanych tutaj falami sprzężonymi.

Jak wiadomo z rozważań rozdziału 3, amplitudy fal  $q_m/z/$  spełniają układ równań /3.2/, który jest teraz nazywany układem równań fal sprzężonych:

$$/3.2/ \quad \frac{d^2}{dz^2} \underline{q}/z/ = - \underline{P} \cdot \underline{q} /z/$$

gdzie  $\underline{P}$ -macierz o współczynnikach niezależnych od zmiennej  $z$ , danych wzorem /3.3/.

Opisane na początku tego rozdziału sprzęganie się fal odbywa się właśnie poprzez układ równań /3.2/.

Dalszy tok rozwiązywania układu /3.2/ jest identyczny jak w rozdziale 3 co powoduje, że w opisanym przypadku metoda fal sprzężonych jest nie tylko równoważna poprzedniej ale prowadzi do tych samych rezultatów co metoda modów własnych.

Znacznie częściej jednak, w metodzie fal sprzężonych, zamiast reprezentacji pola wewnątrz siatki /3.1/ używa się reprezentacji równoważnej:

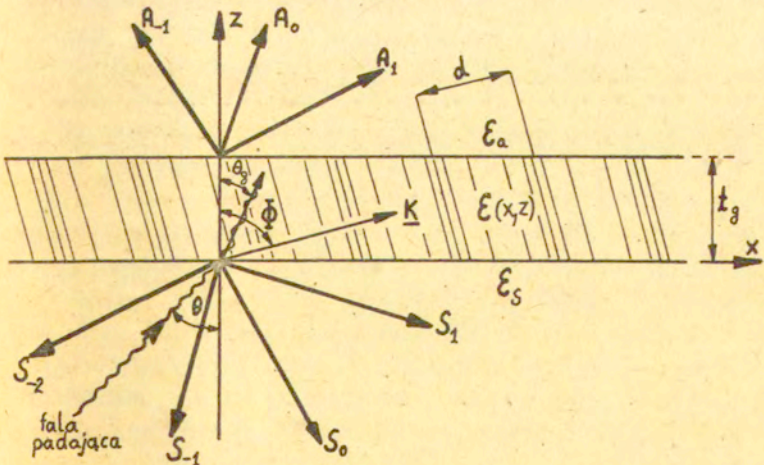
$$/4.2/ \quad F_g/x, z/ = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \mathcal{J}_m /z/ \exp /i \tilde{\beta}_m \cdot z/ \exp /i h_m \cdot x/$$

Wstawiając /4.2/ i /2.7/ do równania /2.8/ otrzymujemy dla amplitud  $\mathcal{J}_m/z/$  następujący układ równań;

$$/4.3/ \quad \frac{d^2}{dz^2} \underline{\mathcal{J}} + \tilde{\underline{\beta}} \cdot \frac{d}{dz} \underline{\mathcal{J}} = - \tilde{\underline{P}} \cdot \underline{\mathcal{J}}$$

gdzie  $\underline{\mathcal{J}} = \mathcal{J}/z/$  jest wektorem kolumnowym o elementach  $\mathcal{J}_m/z/$ ,  $\tilde{\underline{\beta}}$  jest macierzą diagonalną o elementach  $\tilde{\beta}_{m,1} = 2 i \tilde{\beta}_m \delta_{m,1}$  zaś  $\tilde{\underline{P}}$  - macierzą o elementach  $P_{m,1} = k_0^2 \cdot P_{m-1} - / \tilde{\beta}_m^2 + h_m^2 / \delta_{m,1}$ , gdzie  $\delta_{m1}$  jest delta Kronecker'a.

Reprezentacja pola /4.2/ jest szczególnie przydatna przy rozwiązywaniu zagadnień dla tak zwanych skośnych siatek dielektrycznych, rys. 7



Rys. 7. Jednorodna fala płaska padająca na skośną siatkę dielektryczną o kącie skoku  $\phi$ .

Liczba falowa ośrodka zmodulowanego siatki skośnej z rys. 7 zapisuje się wzorem:

$$/4.4/ \quad k^2 /x,z/ = k_0^2 \sum_{n=-\infty}^{+\infty} p_n \exp /i n \underline{K} \cdot r/ \quad \text{gdzie,}$$

$$/4.5/ \quad \underline{K} = K / \sin \Phi, \cos \Phi / = (2\pi/d) \cdot [ \sin \Phi, \cos \Phi ],$$

$$\underline{r} = /x,z/$$

Podłużne i poprzeczne liczby falowe w reprezentacji

/4.2/ przyjmujemy jak następuje:

$$/4.6/ \quad h_m = \mathcal{K} + m \cdot K \cdot \sin \Phi = k_s \sin \theta + m \cdot K \cdot \sin \Phi =$$

$$= k_0^2 p_0 \sin^2 \theta + m \cdot K \cdot \sin \Phi$$

$$/4.7/ \quad \tilde{\beta}_m = \tilde{\beta}_0 + m \cdot K \cdot \cos \Phi = \sqrt{k_0^2 p_0 - k_s^2 \sin^2 \theta} +$$

$$+ m \cdot K \cdot \cos \Phi = k_0^2 p_0 \cos^2 \theta + m \cdot K \cdot \cos \Phi$$

O ile zależność /4.6/ nie wymaga komentarza, gdyż jest zgodna z poprzednimi rozważaniami, o tyle zależność /4.7/ wprowadza poważne zmiany. W granicznym przypadku,  $\Phi = \pi/2$ ,  $h_m$  określone przez /4.6/ pokrywają się z liczbami  $h_m$  określonymi przez /2.15/, są więc uogólnieniem podłużnych liczb falowych na przypadek skośnej siatki dielektrycznej, stąd to samo oznaczenie. W przypadku poprzecznych liczb falowych  $\tilde{\beta}_m$ , dla kąta skosu  $\Phi = \pi/2$  mamy  $\tilde{\beta}_m = \tilde{\beta}_0 \neq 0$  dla  $|k_s \sin \theta| \neq k_0 \sqrt{p_0}$ , co powoduje nie znikanie w układzie równań fal sprzężonych /4.3/ części zawierającej pierwszą pochodną wektora  $\underline{s}$ , dla nieskośnej siatki rozważanej poprzednio rys. 4.

Tak więc układ równań fal sprzężonych jest w przypadku reprezentacji /4.2/ istotnie różny od układu /3.2/ dla reprezentacji /3.1/. Układ równań /4.3/ ma nad układem równań /3.2/ tą przewagę, że macierze  $\tilde{\beta}$  i  $\tilde{P}$  nie zależą od zmiennej  $z$ , zaś

gdyby reprezentację /3.1/ zastosować do siatki skośnej, rys. 7, to macierz  $\underline{P}$  w układzie równań /3.2/ stałaby się macierzową funkcją zmiennej  $z$ , por. /12/.

Drugą zaletą układu /4.3/ jest możliwość wyprowadzenia z niego wszystkich przybliżonych wersji teorii fal sprzężonych, stosowanych z powodzeniem w poszczególnych zakresach pracy siatek dielektrycznych.

Układ równań różniczkowych /4.3/ rozwiązuje się w oparciu o metody analizy systemów liniowych /29/, dokonując podstawienia;

$$/4.8/ \quad \underline{\mathcal{J}}_1 /z/ = \underline{\mathcal{J}} /z/, \quad \underline{\mathcal{J}}_2 /z/ = \frac{d}{dz} \underline{\mathcal{J}} /z/$$

które transformuje układ równań /4.3/ w dwa nieskończone liniowe układy równań różniczkowych pierwszego rzędu:

$$/4.9/ \quad \frac{d}{dz} \underline{\mathcal{J}}_1 = \underline{\mathcal{J}}_2$$

$$/4.10/ \quad \frac{d}{dz} \underline{\mathcal{J}} + \underline{\tilde{\beta}} \underline{\mathcal{J}} = - \underline{\tilde{P}} \circ \underline{\mathcal{J}}_1$$

Ponieważ układy równań /4.9/ i /4.10/ są jednorodne, rozwiązań będziemy poszukiwać, podobnie jak w przypadku układu równań /3.2/, w postaci nieskończonej sumy rozwiązań własnych, z nieznanymi współczynnikami  $\tilde{\epsilon}_1$ ;

$$/4.11/ \quad /z/ = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \tilde{\epsilon}_1 \cdot \tilde{C}_{p;m}^l \exp /i \tilde{\gamma}_1 \cdot z/ ;$$

p = 1, 2.

Wartości własne  $\tilde{\gamma}_1$  i wektory własne  $\tilde{C}_p^l$ , występujące w /4.11/, generowane są przez układy równań /4.9/ i /4.10/, które w macierzowej formie zapisujemy :

$$/4.12/ \quad \begin{bmatrix} \underline{\mathcal{J}}_1 \\ \underline{\mathcal{J}}_2 \end{bmatrix} = \underline{B} \circ \begin{bmatrix} \underline{\mathcal{J}}_1 \\ \underline{\mathcal{J}}_2 \end{bmatrix} \quad \underline{B} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{0} \\ \underline{I} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \underline{I} \\ \underline{0} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} -\underline{\tilde{P}} \\ \underline{0} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} -\underline{\tilde{\beta}} \\ \underline{0} \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

Wartości własne układu /4.12/ są pierwiastkami równania charakterystycznego ;

$$/4.13/ \quad \det \left[ \underline{\underline{B}} - i \tilde{\gamma} \cdot \underline{\underline{I}} \right] = 0$$

zaś wektory własne  $\tilde{c}_1^1$  i  $\tilde{c}_2^1$ , odpowiadające wartości własnej  $\tilde{\gamma}_1$ , liczymy z równania ;

$$/4.14/ \quad \left[ \underline{\underline{B}} - i \tilde{\gamma}_1 \cdot \underline{\underline{I}} \right] \cdot \begin{pmatrix} \tilde{c}_1^1 \\ \tilde{c}_2^1 \end{pmatrix} = 0$$

gdzie  $\underline{\underline{I}}$  nieskończona macierz jednostkowa.

Macierz  $\underline{\underline{B}}$  można obcinać, /12/, /29/, do wymiaru  $2N \times 2N$  obcinając do wymiaru  $N \times N$  każdą z podmacierzy /4.12/, przy czym, w miarę wzrostu  $N$  dokładność obliczeń bardzo szybko wzrasta, /12/.

Założmy teraz, że fala płaska, padająca od strony podłoża na siatkę, rys. 7. jest typu TE. Pole elektryczne posiada wtedy tylko składową  $E_y$ , daną w warstwie siatki wzorem /4.2/. Zgodnie z /4.1/, pole elektryczne nad siatką będzie miało postać:

$$/4.15/ \quad E_a(x,z) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} A_m \exp /i \beta_m^{/a/} \cdot z/ \exp /ih_m \cdot x/$$

zaś pod siatką, w ośrodku podłoża;

$$/4.16/ \quad E_s(x,z) = \exp [ ik_s /x \cdot \sin \theta + z \cdot \cos \theta /] + \\ + \sum_{m=-\infty}^{+\infty} S_m \exp [- i \beta_m^{/s/} \cdot z/ \exp /i h_m \cdot X/$$

Ządając ciągłości składowych stycznych pola elektrycznego i magnetycznego na płaszczyznach  $z = 0, t_g$ , otrzymujemy układ 4-ech równań liniowych;

$$/4.17/ \quad \delta_{m,0} + S_m = \mathcal{J}_m /0/$$

$$/4.18/ \quad i \beta_m^{/s/} / \delta_{m,0} - S_m / = i \tilde{\beta}_m \cdot \mathcal{J}_m /0/ + \frac{d \mathcal{J}_m}{dz} /0/$$

$$/4.19/ \quad A_m = \mathcal{J}_m / t_g / \cdot \exp \left[ i \cdot t_g / \tilde{\beta}_m - \beta_m^{/a/} / \right]$$

$$/4.20/ \quad i \beta_m^{/a/} \cdot A_m = \left[ i \tilde{\beta}_m \cdot \mathcal{J}_m / t_g / + \right. \\ \left. + \frac{d\mathcal{J}_m}{dz} / t_g / \right] \exp \left[ i \cdot t_g / \tilde{\beta}_m - \beta_m^{/a/} / \right]$$

Aby z układu równań /4.27/ - /4.20/ wyliczyć interesujące nas amplitudy  $S_m$  i  $A_m$  należy podstawić w miejscu  $\mathcal{J}_m(0)$ ,  $\mathcal{J}_m / t_g /$ ,  $\dot{\mathcal{J}}_m / 0 /$  i  $\mathcal{J}_m / t_g /$ , szeregi otrzymane z /4.11/ z niewiadomymi współczynnikami  $\tilde{\epsilon}_1$  i dopiero wtedy łączyć otrzymany algebraiczny układ równań liniowych. Należy tu zwrócić uwagę na fakt następujący; obcinając podmacierze macierzy  $\underline{B}$ , /4.12/, do wymiaru  $N \times N$ , otrzymamy  $N$  amplitud  $S_m$ ,  $N$  amplitud  $A_m$  i  $2N$  współczynników  $\tilde{\epsilon}_1$  występujących jako niewiadome w /4.11/. Jest to odpowiednikiem tego, że w przypadku zastosowania reprezentacji pola w warstwie siatki danej przez /3.1/ i zszycia poszczególnych fal na płaszczyznach  $z = 0$  i  $t_g$ , należało uwzględnić  $N$  amplitud  $e_1^{/+/}$  i  $N$  amplitud  $e_1^{/-/}$ , a więc razem także  $2N$  współczynników, które należy potem wyznaczyć z warunków brzegowych.

Jak już było wspomniane wcześniej, zaniebując poszczególne części układu równań fal sprzężonych /4.3/, możemy otrzymywać kolejne, przybliżone metody, stosowane do siatek dielektrycznych. Przeprowadzimy teraz krótki przegląd tych metod, zgodny z pracą /12/.

#### Dwu-falowa, drugiego rzędu metoda fal sprzężonych

W metodzie tej przyjmujemy  $N = 2$ , co oznacza, że uwzględniamy tylko po dwie fale w powietrzu i w podłożu, oraz 4 fale w ośrodku siatki. Metoda ta jest ściśle równoważna dwumodowej metodzie modów własnych. Aby móc stosować tę metodę należy upewnić się, że w zakresie w jakim będzie pracowała liczona siatka, tylko dwie fale mogą się propagować, co na przykład robią autorzy pracy /24/. Są to zazwyczaj albo fale  $\mathcal{J}_0$  i  $\mathcal{J}_1$  albo fale  $\mathcal{J}_0$  i  $\mathcal{J}_{-1}$ .

Warunek ten jest dobrze spełniony w pobliżu kąta Bragg'a;

$$/4.21/ \quad k_s \cdot \sin \theta_B = 1/2 \cdot K \cdot \sin \Phi ; \theta_B - \text{kąt Bragg'a}$$

Błędy wynikające z zastosowanego przybliżenia omawianej metody, są w tym zakresie bardzo małe na co zwraca uwagę autor pracy /12/, str. 10.

Użycie tych dwóch fal, czyli dwóch modów własnych, nie tylko upraszcza opisaną procedurę obliczania pola, ale pozwala w niektórych przypadkach uzyskać analityczne rozwiązania, jak na przykład w pracy /13/, str.241, dla fali padającej pod kątem bliskim kątowi Bragg'a na zmodulowaną periodycznie półprzestrzeń. Jednak kryterium pracy w pobliżu kąta Bragg'a nie może być stosowane bezkrytycznie, gdyż dla struktur falowodowych z siatką dielektryczną rowkowaną, rys. 1/b/ dla których  $k_f \approx k_g$ , oraz kierunek propagacji fali tworzy pewien kąt z osią x w płaszczyźnie /XY/, zachodzi sprzężenie pomiędzy falami TE i TM, /31/, wtedy nawet w pobliżu kąta Bragg'a należy stosować co najmniej 4 falową analizę /30/, dwie fale TE i dwie TM.

#### Wielofalowa metoda fal sprzężonych

Polega na zaniedbaniu w układzie równań /4.3/, części, zawierającej drugą pochodną. Prowadzi to do układu równań :

$$/4.22/ \quad \tilde{\beta} \circ \frac{d}{dz} \underline{\mathcal{J}} + \tilde{P} \circ \underline{\mathcal{J}} = 0$$

Układ równań /4.22/ opisuje sytuację, w której we wszystkich trzech ośrodkach; podłożu, siatce i powietrzu mamy N fal, będących rozwiązaniami tego układu równań, przy czym fale w ośrodku siatki są sumą tylko N rozwiązań własnych układu /4.22/ a nie 2N, jak to ma miejsce dla układu równań /4.3/. Uniemożliwia to realizację pełnego zszycia pól na płaszczyznach  $z = 0, t_g$ . Realizuje się



więc tylko zszywanie dla składowej  $E_y$  w przypadku polaryzacji TE, równania /4.17/ i /4.19/, lub dla składowej  $H_y$ , w przypadku polaryzacji TM. Powoduje to, por. /12/ str.8, jednoczesne zaniedbanie efektów brzegowych, zaś płaszczyzny  $z = 0$  i  $z = t$ , stają się fikcyjne, /12/, normujące tylko wielkości liczonych amplitud.

Metoda ta daje jednak zadowalające rezultaty w przypadku siatek transmisyjnych, stosowanych w holografii /27/.

Dwufalowa, pierwszego rzędu metoda fal sprzężonych

Po raz pierwszy zaprezentowana w akusto optyce przez Phariseau w 1956 roku i zaadaptowana do holografii przez Kogelnika /32/. Kogelnik zakłada, że w ośrodku siatki są tylko dwie fale  $\mathcal{J}_0$  i  $\mathcal{J}_1$  a następnie, że przepływ energii pomiędzy tymi falami jest powolny /w kierunku osi z, rys. 7/, co pozwala z równań /4.3/ usunąć drugie pochodne, /32/ ;

$$/4.23/ \quad \begin{cases} 2 i \tilde{\beta}_0 \cdot \dot{\mathcal{J}}_0 + [k_0^2 p_0 - \tilde{\beta}_0^2 - h^2_0] \mathcal{J}_0 + k_0^2 p_1 \mathcal{J}_1 = 0 \\ 2 i \tilde{\beta}_1 \cdot \dot{\mathcal{J}}_1 + [k_0^2 p_0 - \tilde{\beta}_1^2 - h_1^2] \mathcal{J}_1 + k_0^2 p_1 \mathcal{J}_0 = 0 \end{cases}$$

Metoda ta ma te same wady co poprzednia, oraz podobnie jak metoda dwufalowa drugiego rzędu, daje zadowalające wyniki w pobliżu kąta Bragg'a, /4.21/, por. /12/, /28/. Metoda ta nazywana teorią Kogelnika jest często wykorzystywana w holografii; /33/, /34/, /35/ a jej podstawową zaletą jest możliwość otrzymywania prostych analitycznych rozwiązań. Na przykład, dla sinusoidalnej nieskośnej, ( $\Phi = \pi/2$ ), siatki, oświetlanej pod kątem Bragg'a /4.21/, amplituda fali  $\mathcal{J}_1$  w siatce wyraża się wzorem, /32/ ;

$$/4.24/ \quad \mathcal{J}_1/z/ = -i \sin \left( \frac{k_0 \cdot \xi_s \cdot z}{4 \sqrt{p_0} \cdot \cos \theta^0} \right)$$

W optyce zintegrowanej teoria Kogelnika nie jest stosowana

### Metoda Raman - Nath'a

Można ją wyprowadzić z wielofalowej metody fal sprzężonych, układ równań /4.22/, przez przyrównanie do zera wyrazów stojących na głównej przekątnej macierzy  $\tilde{P}$ . W metodzie tej, zakłada się więc, że wszystkie brane do obliczeń fale spełniają jednocześnie warunek Bragg'a. Metoda ta, podobnie jak poprzednia pozwala otrzymywać analityczne rozwiązania. Na przykład, dla sinusoidalnej nieskośnej, ( $\Phi = \pi/2$ ), siatki, pracującej jako siatka transmisyjna, amplitudy fal  $J_m/z/$  wewnątrz siatki wyrażają się wzorem /12/:

$$/4.25/ \quad J_m/z/ = /- i/^{m/2} J_m \left( \frac{k_0 \cdot \xi_s \cdot z}{2 \sqrt{\rho_0} \cdot \cos \theta^g} \right)$$

gdzie  $J_m$  - funkcja Bessel'a rzędu  $m$ .

Zakres słuszności wzoru /4.25/ jest dla siatek transmisyjnych nazywany zakresem Raman-Nath'a.

### Metoda amplitud transmitancji

Stosuje się tylko do siatek transmisyjnych. W metodzie tej określa się amplitudę transmitancji  $\tau/x,z/$  jako stosunek amplitudy pola na wyjściowej płaszczyźnie siatki,  $z = t_g$ , rys. 7, do amplitudy pola na wejściowej płaszczyźnie siatki,  $z = 0$ , rys. 7. Dla siatki nieskośnej, ( $\Phi = \pi/2$ ), funkcja amplitudy transmitancji wynosi, /12/:

$$/4.26/ \quad \tau/x,z/ = \exp \left( - i k_0 \sqrt{\epsilon/x/} \cdot z / \cos \theta^g \right)$$

Ponieważ  $\tau/x,z/$  jest okresowa wzdłuż  $x$ , rozwija się ją w szereg Fouriera;

$$/4.27/ \quad \tau/x,z/ = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} J_m/z/ \exp (i \cdot m \cdot K \cdot x)$$

licząc amplitudy fal  $J_m/s/$  wewnątrz siatki ze wzoru /4.28/, /fala płaska, padająca na siatkę ma amplitudę

równą 1/.

$$/4.28/ \quad \mathcal{J}_m/z/ = \frac{1}{d} \int_0^d \exp(-i k_0 \sqrt{\epsilon/x} \cdot z / \cos \theta^s) \exp(-im \cdot K \cdot x / dx$$

Rozwiązania liczone ze wzoru /4.28/ pokrywają się dla nieskończonych siatek i dla małej amplitudy modulacji ośrodka siatki z rozwiązaniami /4.25/ uzyskanymi metodą Raman-Natha, /12/, /27/.

W konkluzji do opisanych tutaj przybliżonych metod liczenia pola w siatkach dielektrycznych, należy stwierdzić, że wszystkie metody używające równań różniczkowych pierwszego rzędu zaniedbują efekty brzegowe związane z płaszczyznami styku siatki z ośrodkami przyległymi,  $z = 0, t_g$ . Tak więc, poza dwufalową, drugiego rzędu metodą fal sprzężonych, równoważną dwumodowej metodzie modów własnych, żadna z opisanych przybliżonych metod nie może dawać poprawnych wyników dla siatek pobudzanych falą powierzchniową. Jest to powodem niestosowania tych metod w optyce zintegrowanej.

Aby zastosować opisaną w tym rozdziale metodę fal sprzężonych do przykładu, w którym fala powierzchniowa pobudza wielowarstwą strukturę, której jedna z warstw jest periodyczna w kierunku propagacji pobudzającej fali powierzchniowej, rys. 5, należałoby zmodyfikować opisany tu tok postępowania. Przede wszystkim, stałą charakterystyczną  $\mathcal{K}$ , przyjętą we wzorze /4.6/ jako  $\mathcal{K} = k_s \cdot \sin \theta$ , przyjąć teraz jako nieznaną parametr. Następnie należy podstawić do równań /4.17/ - /4.20/, w miejsce wielkości  $\mathcal{J}_m/0/$ ,  $\mathcal{J}_m/t_g/$ ,  $\mathcal{J}_m^*/0/$  i  $\mathcal{J}_m^*/t_g/$ , szeregi uzyskane z /4.11/ i niewiadomymi współczynnikami  $\tilde{\epsilon}_\ell$  i  $\tilde{C}_{p;m}^1$  oraz wartościami własnymi  $\tilde{\gamma}_\ell$ , które będą teraz funkcjami stałej charakterystycznej  $\mathcal{K}$  oraz częstości  $\omega$ . Konsekwencją tego będzie otrzymanie macierzowych równań algebraicznych na amplitudy fal  $A_m$  i  $S_m$  oraz współczynniki  $\tilde{\epsilon}_1$ , analogiczne do równań /3.21/ - /3.23/

uzskane w metodzie modów własnych. Również, jak to miało miejsce w metodzie modów własnych, najbardziej interesującym dla nas przypadkiem będzie zerowanie się wyznacznika otrzymanego układu liniowych równań algebraicznych dla pewnej częstości  $\omega$  i stałej charakterystycznej  $\mathcal{K}$ . Doprowadzi nas to w konsekwencji do analogicznego jak /3.28/, równania rezonansu, w tym przypadku słusznego również dla siatek dielektrycznych o skośnej modulacji, będących warstwą pewnej płaskiej struktury prowadzącej fale powierzchniowe.

W przypadku granicznym, dla kąta skosu siatki  $\angle \Phi = 0$ , czyli dla ściśle prostopadłego do kierunku propagacji fali powierzchniowej wektora  $\underline{K}$  modulacji ośrodka /4.5/, struktura przestaje być periodyczna w kierunku osi  $x$ . W przypadku pobudzenia takiej siatki jednorodną falą płaską padającą na nią pod pewnym kątem autorzy pracy /25/ proponują metodą inną, nazwaną przez nich metodą macierzy łańcuchowych.

## 5. Metody perturbacyjne

Metody perturbacyjne, jakkolwiek należą do metod przybliżonych, nie dają się ustawić w szeregu metod, otrzymanych w rozdziale 4., tej pracy, poprzez eliminację kolejnych członów w układzie równań fal sprzężonych /4.3/. Po raz pierwszy, w zastosowaniu do optyki zintegrowanej użył metody perturbacyjnej Marcuse w pracy /40/. Wyprowadził tam w sposób ścisły równania w oparciu o założenie, że w dielektrycznym falowodzie płaskim, który dążył zaburzenia  $\Delta \epsilon_j / x, z /$  w  $j$ -tej warstwie lub ośrodku, rys.8, całkowite pole, spełniające w poszczególnych warstwach równanie /5.1/.

$$\begin{aligned} /5.1/ \quad \nabla^2 F_j / x, z / + k_0^2 \left\{ \epsilon_j + \Delta \epsilon_j / x, z / \right\} F_j / x, z / &= 0 ; \\ j &= a, f, s . \end{aligned}$$

oraz odpowiednie warunki zszycia na brzegach warstw, da się wyrazić w postaci sumy właściwych modów niezaburzonego falowodu płaskiego /5.2/, ze zmodyfikowanym rozkładem amplitud w kierunku osi propagacji  $x$ .

$$/5.2/ \quad F_j / x, z / = \sum_V c_{j,v} / x / \mathcal{E}_{j,v} / x, z / + \sum_p \int_0^{\infty} g_{p,j} (\bar{\beta}_j, x) \cdot \mathcal{E}_j^{/p/} (\bar{\beta}_j, x, z) d\bar{\beta}_j$$

Przez  $\mathcal{E}_{j,v} / x, z /$  oznaczono rozkład pola dyskretnego modu właściwego w niezaburzonej falowodzie płaskim, o stałej propagacji w kierunku  $x$ , równej  $\kappa^{/sw/}$ , generowanej równaniem /3.36/. Drugie wyrażenie do prawej stronie /5.2/, przedstawia ciągle widmo modów, przy czym suma w tym wyrażeniu rozciąga się na różne typy modów o ciągłym widmie określane dla danego falowodu płaskiego, por. /21/, str. 46.

Wstawiając reprezentację /5.2/ do równania /5.1/, autor pracy /40/ otrzymuje następujące równania :

$$/5.3/ \quad \frac{d^2 C_v}{dx^2} + 2i \kappa_v^{/sw/} \frac{d C_v}{dx} = D_v / x /$$

$$/5.4/ \quad \frac{d^2 g}{dx^2} + 2i \kappa^{/sw/} \frac{d g}{dx} = G / \bar{\beta}_j, x / ;$$

$$\bar{\beta}_j = \sqrt{k_0^2 \epsilon_j - (\kappa^{/sw/})^2}$$

Indeksy;  $j$  - oznaczający warstwę oraz  $p$  - typ modów o ciągłym widmie, zostały dla uproszczenia opuszczone. Funkcje  $D_v / x /$  oraz  $G / \bar{\beta}_j, x /$  zależą od wszystkich nieznanych amplitud  $C_v / x /$  oraz  $g / \bar{\beta}_j, x /$  dla ustalonego w danej warstwie indeksu  $j$ .

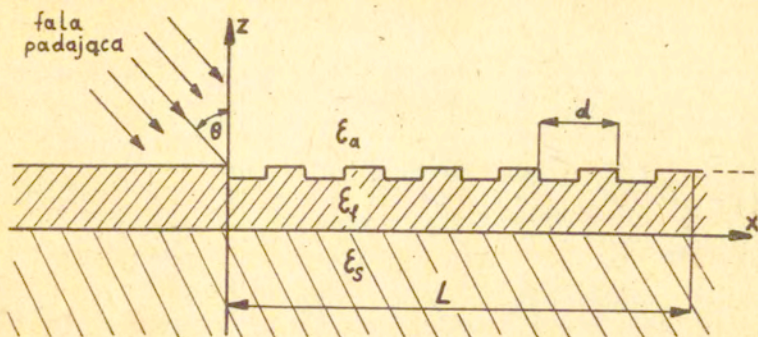
Autor pracy /40/ sprowadza równania /5.3/ i /5.4/ do postaci równań całkowych Volterry oraz przyjmując skoń-

czoną długość zaburzonego odcinka falowodu  $L$ , nakłada na amplitudy  $C_y/x/$  i  $g/\beta, x/$  warunki początkowe dla  $x = 0, L$ . Aby móc efektywnie rozwiązywać te równania zakłada się dalej, że zaburzenia  $\Delta \xi_j$  są małe i wyprowadza się dla funkcji  $D_y/x/$  oraz  $G/\beta, x/$  mocno uproszczone zależności.

Zakładając, że porowkowana sinusoidalnie od punktu  $x = 0$  warstwa, pobudzana jest modem podstawowym falowodu płaskiego, na przykład  $TE_0$ , autor pracy /40/ otrzymuje warunek na konwersję tego modu w inny mod TE o indeksie  $\nu$ :

$$/5.5/ \quad K = 2\pi/d = K_0^{sw}/ - K_\nu^{sw}/$$

Z /5.5/ widzimy, że tylko jeden mod lub żaden, może dla danej częstości  $\omega$  i okresu siatki  $d$ , być wzbudzany przez mod nadbiegający, tutaj  $TE_0$ . Możemy więc w reprezentacji /5.2/ wziąć pod uwagę albo tylko jeden mod dyskretny w przypadku braku konwersji /na przykład sprzęgacze/ albo dwa, pobudzający i wzbudzony /w przypadku konwertera/. Jeśli chodzi o energię oddawaną przed mod pobudzający do ciągłego spektrum, druga część reprezentacji /5.2/, to zależy ona liniowo od długości siatki  $L$  i dla sinusoidalnie porowkowanej powierzchni warstwy wyniosła około 1 % energii pobieranej przez mod wzbudzony /40/. Ciekawą analizę sprzęgacza wiązki z falą powierzchniową przy użyciu siatki dielektrycznej rowkowanej na powierzchni warstwy prowadzącej, przeprowadzili autorzy pracy /36/, rys.8.



Rys. 8 Schemat sprzęgacza realizowanego przy pomocy siatki rowkowej na powierzchni warstwy przewodzącej.

Rozwiązania dla pola całkowitego poszukują w postaci sumy

$$/5.6/ \quad F(x, z) = F_u(x, z) + F_p(x, z)$$

gdzie  $F_u(x, z)$  jest rozwiązaniem dla niezaburzonego falowodu przy danym pobudzeniu. Części perturbacyjnej pola,  $F_p(x, z)$ , autorzy pracy /36/ szukają w postaci tak zwanej reprezentacji podłużnej dla danego falowodu płaskiego, /5.7/, w odróżnieniu od reprezentacji /5.2/, która jest nazywana reprezentacją poprzeczną.

$$/5.7/ \quad F_p(x, z) = \sum_v \Psi_v(x) \cdot w_v(z) + \int_0^{k_0 \sqrt{\epsilon_a}} \Psi(\xi, x) \cdot w(\xi, z) d\xi + \int_{k_0 \sqrt{\epsilon_s}}^{k_0 \sqrt{\epsilon_a}} \Psi(\xi, x) \cdot w(\xi, z) d\xi$$

Jednym z wniosków otrzymanych przez autorów cytowanej pracy jest fakt skupiania się ciągłej części widma modów promieniowania, występującej w postaci całek w reprezentacji /5.7/, w otoczeniu kierunków wyznaczonych przez podłużne liczby falowe harmonik przestrzennych  $\bar{h}_m$  ;

$$/2.15/ \quad \bar{h}_m = \bar{x} + m \cdot K = \bar{x} + 2 \cdot \pi \cdot m / d$$

$$/2.22/ \quad \bar{x} = k_0 \cdot \sqrt{\epsilon_a} \cdot \sin \theta$$

w miarę jak długość siatki  $N \cdot d = 1$  staje się coraz większa /3.6/ :

$$/5.8/ \quad \Psi / \bar{f}, x / = \frac{\sin [ (\bar{f} - \bar{h}_m) \cdot N \cdot d / 2 ]}{\pi / \bar{f} - \bar{h}_m /} \cdot N \cdot d$$

$$\exp \{ i / \bar{f} - \bar{h}_m / \cdot N \cdot d / 2 - i \cdot \bar{f} \cdot x \}$$

dla  $\bar{f} \cong \bar{h}_m$

W granicznym przypadku, nieskończonej siatki dielektrycznej otrzymujemy z /5.8/ :

$$/5.9/ \quad \Psi / \bar{f}, x / = \delta / \bar{f} - \bar{h}_m / \exp \{ -i \cdot \bar{f} \cdot x / \}, \text{ dla } \bar{f} \cong \bar{h}_m$$

Tak więc z ciągłej części widma modów reprezentacji /5.7/ wyłania się dyskretna reprezentacja w postaci sumy harmonik przestrzennych, danych reprezentacjami /3.1/ i /4.1/.

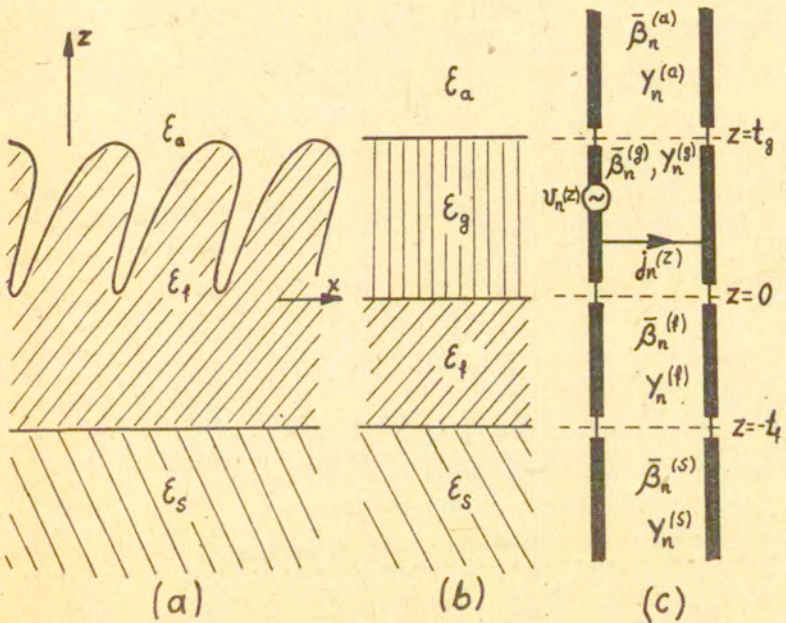
Jakkolwiek wyniki uzyskane w pracy /36/ i /40/ stosują się tylko do siatek o małej amplitudzie modulacji ośrodka /bądź płytkiego rowkowania powierzchni warstwy, reprezentacje /3.1/, /4.1/ przyjmuje się jako pełną dla nieskończonych periodycznych struktur warstwowych, por. /12/.

Zasadniczą wadą opisanych metod perturbacyjnych jest to, że w przypadku dużych zaburzeń wprowadzanych przez głęboką modulację lub rowkowanie jednej z warstw nawet pełne reprezentacje /5.2/ lub /5.7/ nie gwarantują poprawnych wyników.

Autorzy pracy /37/ pokonują opisaną wadę tych metod rozpoczynając proces rozwiązywania od inaczej określonego rozwiązania  $F_u / x, z /$  we wzorze /5.6/. Na rysunku 9, pokazana została zasadnicza koncepcja tak zwanej ulepszo-



nej metody perturbacyjnej opracowanej przez autorów prac /37/, /38/ i /18/. Rozwiązanie  $F_U/x,z/$  przyjmuje się teraz jako rozwiązanie dla dwuwarstwowego falowodu płaskiego, rys. 9/b/, przy czym przenikalność dielektryczną  $\epsilon_g$ , w warstwie siatki, przyjmuje się jako wartość średnią przenikalności  $\epsilon/x,z/$  w tej warstwie.



Rys. 9. Graficzne przedstawienie ulepszonej metody perturbacyjnej; /a/ Siatka dielektryczna rowkowana w warstwie przewodzącej, /b/ Bazowy falowód płaski odpowiadający tej siatce, /c/ Równoważny schemat linii transmisyjnej w kierunku poprzecznym.

Przenikalność dielektryczna w poszczególnych warstwach struktury z rys. 9/a/ dana jest wzorem:

$$/5.10/ \quad \epsilon/x,z/ = \epsilon_u + \epsilon_p/x,z/ ; \quad u = a, g, f, s$$

Funkcja  $\epsilon_p/x,z/$  jest równa zero we wszystkich warstwach

za wyjątkiem warstwy siatki, w której

$$/5.11/ \quad \epsilon_p = \epsilon_p(x, z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} p_n(z) \exp(i \cdot n \cdot K \cdot x)$$

Ponieważ przenikalność  $\epsilon_g$  została zdefiniowana jako średnia wartość  $\epsilon(x, z)$  w warstwie siatki,  $p_0(z)$  spełnia:

$$/5.12/ \quad \int_0^{tg} p_0(z) dz = 0$$

Pola elektrycznego  $\underline{E}$  i magnetycznego  $\underline{H}$  w strukturze z rys. 9/a/ poszukujemy w postaci /5.6/ a stąd i z jednorodnego układu równań Maxwella spełnionego przez pola  $\underline{E}$  i  $\underline{H}$ , otrzymujemy dla perturbacyjnych części tych pól układ równań :

$$/5.13/ \quad \nabla \times \underline{E}_p = i\omega \mu_0 \underline{H}_p$$

$$/5.14/ \quad \nabla \times \underline{H}_p = -i\omega \epsilon_0 (\epsilon_u \cdot \underline{E}_p + \underline{P}) ;$$

$$\underline{P} = \epsilon_p \cdot \underline{E}_u$$

Zakładając mały wpływ na pole całkowite członu  $\epsilon_p \underline{E}_p$  w równaniu /5.14/ otrzymujemy zamiast niego równanie:

$$/5.15/ \quad \nabla \times \underline{H}_p = -i\omega \epsilon_0 (\epsilon_u \cdot \underline{E}_p + \underline{P})$$

Pola  $\underline{E}_u$  i  $\underline{H}_u$  spełniają jednorodny /beźródłowy/ układ równań Maxwella i są bądź pewną kombinacją liniową modów właściwych prowadzonych przez strukturę z rys. 9/b/ bądź polem powstałym w tej strukturze po oświetleniu jej falą płaską lub wiązką, padającą z powietrza lub podłoża. Dla pól typu TE poszukujemy ich w postaci, /18/;

$$/5.16/ \quad E_{y,u} = V_u(z) \exp(i \vec{k} \cdot x)$$

$$/5.17/ \quad H_{x,u} = -U_u(z) \exp(i \vec{k} \cdot x)$$

$$/5.18/ \quad H_{z,u} = (\bar{\kappa}/\omega \cdot \mu_0) \cdot E_{y,u}$$

zaś dla pól typu TM w postaci ;

$$/5.19/ \quad -H_{y,u} = I_u/z/ \exp /i \bar{\kappa} \cdot x/$$

$$/5.20/ \quad E_{x,u} = V_u/z/ \exp /i \bar{\kappa} \cdot x/$$

$$/5.21/ \quad E_{z,u} = - (\bar{\kappa}/\omega \epsilon_0 \cdot \epsilon_u) \cdot H_{y,u}$$

Używając prądów i napięć definiujących  $\underline{E}_u$  i  $\underline{H}_u$  /5.16/ /5.21/, w strukturze z rys. 9/b/, otrzymujemy z układu równań Maxwella reprezentację tych pól w postaci napięcia i prądu linii transmisyjnej pokazanej na rys. 9/c/, przy czym napięcia  $V_u$  i prądy  $I_u$  spełniają w poszczególnych odcinkach linii równania ;

$$/5.22/ \quad \frac{d V_u}{dz} = i \bar{\beta}_0^{/u/} \cdot Z_0^{/u/} \cdot I_u$$

$$/5.23/ \quad \frac{d I_u}{dz} = i \bar{\beta}_0^{/u/} \cdot Y_0^{/u/} \cdot V_u \quad u = a, g, f, s$$

gdzie ;

$$/2.26/ \quad \bar{\beta}_n^{/u/} = \sqrt{k_o^2 \cdot \epsilon_u - \bar{h}_n^2}$$

zaś impedancje i admitancje dla pól TE dane są wzorem;

$$/5.25/ \quad Y_n^{/u/} = 1 / Z_n^{/u/} = \bar{\beta}_n^{(u)}/\omega \cdot \mu_0$$

a dla pól TM ;

$$/5.25/ \quad Y_n^{/u/} = 1 / Z_n^{/u/} = \omega \cdot \epsilon_0 \cdot \epsilon_u / \bar{\beta}_n^{/u/}$$

Wielkości  $\bar{\kappa}$ ,  $\bar{\beta}_n^{/u/}$  i  $\bar{h}_m$  zostały oznaczone kreską na górze symbolu dla odróżnienia ich od analogicznych wielkości używanych w poprzednich rozdziałach, por. /2.15/, /2.21/. Kreska nad symbolem podkreśla fakt, że wielko-

ści te są ściśle w odniesieniu do struktury z rys. 9/b/ a nie do faktycznie liczonej struktury z rys. 9/a/. Stałą charakterystyczną  $\bar{\kappa}$  wyznacza się z równania rezonansu /5.26/ dla struktury planarnej z rys. 9 /b/, por. /3.31/ lub /21/ ;

$$/5.26/ \quad R_{u,o} = 1 - r_{u,o}^{+/} \cdot r_{u,o}^{-/} \cdot \exp \{ i 2 \bar{\beta}_o^{u/} \cdot t_u \} ;$$

$$u = t, g$$

gdzie ;

$$/5.27/ \quad r_{f,n}^{+/} = \frac{\gamma_n^{f/} - \gamma_n^{g/} + \gamma_n^{f/} + \gamma_n^{g/} r_{g,n}^{+/} \exp / i 2 \bar{\beta}_n^{g/} \cdot t_g}{\gamma_n^{f/} + \gamma_n^{g/} + \gamma_n^{f/} - \gamma_n^{g/} / r_{g,n}^{+/} \exp / i 2 \bar{\beta}_n^{g/} \cdot t_g /}$$

$$/5.28/ \quad r_{f,n}^{-/} = \frac{\gamma_o^{f/} - \gamma_o^{s/}}{\gamma_o^{f/} + \gamma_o^{s/}}$$

$$/5.29/ \quad r_{g,n}^{+/} = \frac{\gamma_n^{g/} - \gamma_n^{a/}}{\gamma_n^{g/} + \gamma_n^{a/}}$$

$$/5.30/ \quad r_{g,n}^{-/} = \frac{\gamma_n^{g/} - \gamma_n^{f/} + \gamma_n^{g/} + \gamma_n^{f/} r_{t,n}^{-/} \exp / 2 i \bar{\beta}_n^{f/} \cdot t_f}{\gamma_n^{g/} + \gamma_n^{f/} + \gamma_n^{g/} - \gamma_n^{f/} / r_{g,n}^{-/} \exp / i 2 \bar{\beta}_n^{f/} \cdot t_f}$$

Wersję równania rezonansu /5.26/, która zazwyczaj szybciej daje numeryczne rezultaty jest wersja, w której liczymy  $R_{f,o}$  ponieważ w większości przypadków warstwa f struktury z rys. 9/b/ jest najbardziej za ten rezonans odpowiedzialna, /18/.

Po znalezieniu stałej charakterystycznej  $\bar{\kappa}$  rozwiązujemy równania /5.22/ i /5.23/, żądając spełnienia warunków ciągłości dla  $z = t_g, 0, - t_f$ . W ten sposób znajdujemy pola  $\underline{E}_u$  i  $\underline{H}_u$  dane wzorami /5.16/ + /5.21/.

Perturbacyjnych części pól,  $\underline{E}_p$ , i  $\underline{H}_p$  szukamy w postaci nieskończonej sumy harmonik przestrzennych, opisanych podłużnymi liczbami falowymi  $\bar{h}_n$  struktury periodycznej, danymi wzorem /2.15/. Używając jak poprzednio prądów

i napięć otrzymujemy dla pól typu TE postać ;

$$/5.31/ \quad E_{y,p} = \sum_n V_n^{(p)}(z) \exp(i \bar{h}_n \cdot x)$$

$$/5.32/ \quad H_{x,p} = - \sum_n I_n^{(p)}(z) \exp(i \bar{h}_n \cdot x) \quad p=a,f,g,s$$

$$/5.33/ \quad H_{z,p} = \sum_n (\bar{h}_n / \omega \cdot \mu_0) \cdot V_n^{(p)}(z) \exp(i \bar{h}_n \cdot x)$$

zaś dla pól typu TM ;

$$/5.34/ \quad H_{y,p} = \sum_n I_n^{(p)}(z) \exp(i \bar{h}_n \cdot x)$$

$$/5.35/ \quad E_{x,p} = \sum_n V_n^{(p)}(z) \exp(i \bar{h}_n \cdot x) \quad p=a,f,g,s$$

$$/5.36/ \quad E_{z,p} = - \sum_n (\bar{h}_n / \omega \cdot \epsilon_0 \cdot \xi_u) \cdot I_n^{(p)}(z) \cdot \exp(i \bar{h}_n \cdot x)$$

Wstawiając pola dane wzorami /5.31/ + /5.37/ do równań /5.13/ i /5.15/ otrzymujemy, że każda para  $I_n^{(p)}$ ,  $V_n^{(p)}$  spełnia, niezależnie od innych harmonik przestrzennych, równania linii transmisyjnej pobudzonej źródłami:

$$/5.37/ \quad \frac{d V_n^{(j)}}{dz} = i \bar{\beta}_n^{(j)} \cdot z_n^{(j)} \cdot I_n^{(j)} - v_n$$

$$/5.38/ \quad \frac{d I_n^{(j)}}{dz} = i \bar{\beta}_n^{(j)} \cdot y_n^{(j)} \cdot V_n^{(j)} - j_n \quad j = a, f, g, s$$

przy czym źródła występują tylko w odcinku linii odpowiadającym warstwie siatki, rys. 9 /c/ i są dane wzorami

$$/5.39/ \quad \text{pola TE: } v_n = 0, \quad j_n(z) = i \omega \epsilon_0 \cdot p_n(z) \cdot V_g(z)$$

$$/5.40/ \quad \text{pola TM: } v_n(z) = -i \frac{\bar{h}_0 \cdot \bar{h}_n \cdot p_n(z)}{\omega \cdot \epsilon_0 \cdot \xi_g^2} I_g(z),$$

$$j_n(z) = i \omega \cdot \epsilon_0 \cdot p_n(z) \cdot V_g(z)$$

Aby uprościć rozwiązywanie układu równań /5.37/, /5.38/, autorzy pracy /18/ wprowadzają tak zwane fale napięciowe

$$/5.41/ \quad U_n^{/j/ \pm} = \frac{1}{2} (V_n^{/j/ \pm} + Z_n^{/j/} \cdot I_n^{/j/}) \quad j=a, f, g, s$$

spełniające równanie;

$$/5.42/ \quad \frac{d U_n^{/j/ \pm}}{dz} = \pm i \bar{\beta}_n^{/j/} U_n^{/j/ \pm} - u_n^{\pm};$$

$$u_n^{\pm} = \frac{1}{2} (V_n \pm Z_n^{/g/} \cdot j_n)$$

W warstwie siatki  $0 < z < t_g$ , rozwiązanie /5.42/ dane jest wzorem, /18/ ;

$$/5.43/ \quad U_n^{/g/ \pm}(z) = \left[ U_n^{/g/ \pm}(0) - \int_0^z u_n^{\pm}(z') \exp(\mp i \bar{\beta}_n^{/g/} \cdot z') dz' \right] \cdot \exp(\pm i \bar{\beta}_n^{/g/} \cdot z)$$

gdzie wartości początkowe n-tej fali napięciowej wyznacza się z zależności ;

$$/5.44/ \quad U_n^{/g/ +}(0) = r_{g,n}^{/-/} \cdot U_n^{/g/ -}(0) ;$$

$$U_n^{/g/ +}(t_g) = r_{g,n}^{/+/} \cdot U_n^{/g/ +}(t_g)$$

zaś współczynniki odbicia  $r_{g,n}^{/+/}$  dane są wzorami /5.29/ i /5.30/. Wstawiając /5.43/ do /5.44/ otrzymamy ;

$$/5.45/ \quad U_n^{/g/ -}(0) = \frac{G_n^{/+/} \cdot r_{g,n}^{/+/} \cdot \exp(i 2 \bar{\beta}_n^{/g/} \cdot t_g) - G_n^{/-/}}{R_{g,n}}$$

$$/5.46/ \quad U_n^{/g/ +}(t_g) = \frac{(G_n^{/+/} - r_{g,n}^{/-/} \cdot G_n^{/-/}) \exp(i \bar{\beta}_n^{/g/} \cdot t_g)}{R_{g,n}}$$

$$/5.47/ \quad G_n^{/+/-/} = - \int_0^{t_g} u_n^{/+/}(z) \cdot \exp(\mp i \bar{\beta}_n^{/g/} \cdot z) dz$$

$R_{g,n}$  otrzymujemy ze wzoru /5.26/ podstawiając zamiast zera indeks  $n$ . Jakkolwiek  $R_{g,0} = 0$  to na ogół  $R_{g,n} \neq 0$  dla  $n \neq 0$  i wartości  $U_n / g / - g_{,0}$ ,  $U_n / g / + (t, /$  dobrze się wyznaczają ze wzorów /5.45/, /5.46/. Warunek  $R_{g,n} \neq 0$  wyklucza rezonansowy przypadek odbicia Bragg'a dla

$$\bar{\kappa} \cdot d = n \cdot \pi$$

Najbardziej trudnym do wyznaczenia parametrem dla prowadzących struktur warstwowych z siatką dielektryczną jest stała charakterystyczna  $\kappa$ , będąca rozwiązaniem równania rezonansu /3.28/. Opisana w rozdziale 3 procedura rozwiązywania tego równania nie jest ani prosta ani szybka a bez znajomości, choćby przybliżonej wartości, stałej charakterystycznej  $\kappa$  nie można praktycznie niczego policzyć dla siatek stosowanych w urządzeniach optyki zintegrowanej.

Opisana tutaj szczegółowo, za pracą /18/, ulepszona metoda perturbacyjna, pozwala na obliczanie stałej  $\kappa$  w następujący, przybliżony sposób. Zakładamy, że ;

$$/5.48/ \quad \kappa = \bar{\kappa} + i\delta$$

gdzie  $\bar{\kappa}$  wyznaczona jest z równania /5.26/, dla pewnego właściwego modu prowadzonego przez strukturę z rys. 9/b/. Logicznym następstwem /5.48/ jest przyjęcie, że moc fali powierzchniowej, prowadzonej przez strukturę z rys. 9/a/ maleje w kierunku propagacji jak  $\exp /-2\delta \cdot x/$ . Stąd :

$$/5.49/ \quad \frac{dP}{dx} = -2\delta P$$

Ubytek mocy fali powierzchniowej  $dP$  musi być równy mocy promieniowania harmonik przestrzennych na zewnątrz struktury, mierzonej na jednostkę długości wzdłuż  $x$ :

$$/5.50/ \quad -\frac{dP}{dx} = P_{\text{rad}} = \sum_n P_n = \sum_n /P_n /s/ + P_n /a/ /$$

gdzie  $P_n^{/s/}$  i  $P_n^{/a/}$  są mocami na jednostkę długości n-tych harmonik, promieniujących do podłoża i do powietrza. Z /5.49/ i /5.50/ otrzymujemy, że szukany parametr wycieku  $\alpha$  dany jest :

$$/5.51/ \quad \alpha = \frac{P_{rad}}{2 \mathcal{P}} = \frac{1}{2 \mathcal{P}} \sum_n (P_n^{/s/} + P_n^{/a/})$$

Moc  $\mathcal{P}$ , niesioną przez falę powierzchniową, liczymy całkując odpowiedni wektor Poynting'a :

$$/5.52/ \quad \mathcal{P} = \int_{-\infty}^{+\infty} \underline{E}_u \times \underline{H}_u^* \cdot \underline{x}_0 \, dz ; \quad \underline{x}_0 - \text{wersor osi } x$$

Gwiazdka w /5.52/ oznacza sprzężenie w sensie liczb zespolonych. Moce poszczególnych harmonik, występujące w /5.51/, możemy w oparciu o poprzednio uzyskane rozwiązania wyliczyć w postaci /18/ :

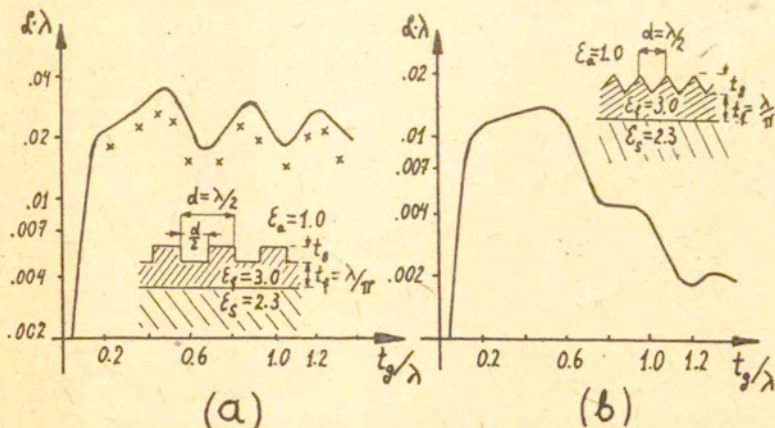
$$/5.53/ \quad P_n^{/a/} = \text{Re} \left\{ Y_n^{/a/} |V_n^{/a/} / t_g|^2 \right\} = |1 - |r_{g,n}^{/+}/|^2 / \cdot |U_n^{/g/+} / t_g|^2 \cdot \text{Re} \left\{ Y_n^{/g/} \right\}$$

$$/5.54/ \quad P_n^{/s/} = \text{Re} \left\{ Y_n^{/s/} |V_n^{/s/} / -t_f|^2 \right\} = |1 - |r_{g,n}^{/-}/|^2 / \cdot |U_n^{/g/-}/0|^2 \cdot \text{Re} \left\{ Y_n^{/g/} \right\}$$

Szczegółowe rozważania i obliczenia przeprowadzone dla struktury z siatką porowkowaną prostokątnie, rys. 8, w oparciu o zależności /5.10/ + /5.54/ można znaleźć w Dodatku pracy /18/.

W oparciu o opisaną tu metodę autorzy pracy /18/ przeprowadzili cały szereg obliczeń badając zależność parametru wycieku  $\alpha$  dla siatek rowkowanych w warstwie prowadzącej, od kształtu i głębokości rowkowania.





Rys. 10. Zależność parametru wycieku  $\Delta$  od głębokości rowkowania siatki.  $\epsilon_f = 3,0$ ,  $\epsilon_s = 2,3$ ,  $\lambda$  - długość fali w próżni, (za pracę /18/).

Krzyżyki na wykresie 10/a/ oznaczają wyniki uzyskane metodą dokładną, w oparciu o rozwiązywanie równania rezonansu /3.28/. Z rysunku 10/a/ widzimy, że nawet dla głębokości rowkowania  $t_g \approx 3 t_f$  wyniki uzyskane ulepszoną metodą perturbacyjną są zadowalająco zgodne z rozwiązaniami równania /3.28/. Charakterystyczną cechą obu wykresów jest występowanie zakresu nasycenią dla głębokości rowkowania  $t_g$  przekraczającej pewną wielkość. Dla siatki o zębach trójkątnych rys. 10/b/, w zakresie nasycenia,  $\Delta$  maleje wraz ze wzrostem  $t_g$ , co jest charakterystyczną cechą dla wszystkich siatek o trójkątnym rowkowaniu, por. /18/.

Podsumowując, ulepszona metoda perturbacyjna jest jedyną z opisanych w tym punkcie metod, która stosuje się do siatek o głębokim rowkowaniu. Nie należy jednak zapominać, że wyprowadzając równanie /5.15/ pominieliśmy człon  $\xi_p \underline{E}_p$  co daje największy wkład błęd popełnianego w tej metodzie. Drugą przyczyną błędu jest przyjmowanie, że  $Re \sqrt{\kappa} = \bar{\kappa}$ , co porównując z wynikami rozdziału 3, rys. 6, pozwala ją uznać jako pomijalnie małą przy-

czynę błędu. Aby wyeliminować wpływ pominięcia  $\xi_p \underline{E}_p$  w równaniu /5.15/, można dokonać iteracji całego procesu przyjmując jako  $\underline{E}_p /x,z/$  we wzorze /5.14/ dla drugiej iteracji, pole otrzymane z pierwszej a następnie powtórzyć cały proces obliczeń, jak to robią autorzy pracy /39/, przyjmując  $\underline{P}^{/2/} = \xi_p \cdot \underline{E}_u + \underline{E}_p^{/1/}$  / w równaniu /5.15/.

Obraz pola elektromagnetycznego w ulepszonej metodzie perturbacyjnej jest następujący: pole jest sumą fali powierzchniowej prowadzonej przez zmodyfikowaną strukturę planarną, rys. 9/b/, oraz nieskończonej sumy harmonik przestrzennych. Wszystkie harmoniki propagują się w strukturze niezależnie, nie doznając sprzężeń pomiędzy sobą ani poprzez równania ani poprzez warunki brzegowe. Każda n-ta harmonika jest wzbudzana oddzielnie przez propagującą się falę powierzchniową, proporcjonalnie do n-tego współczynnika fourierowskiego, funkcji zaburzenia ośrodka  $\xi_p /x,z/$ .

Gdybyśmy dokonali wspomnianej wyżej iteracji, obraz ten uległ by zmianie gdyż wprowadzilibyśmy sprzężenie pomiędzy harmonikami poprzez funkcje opisujące źródła /5.39/, /5.40/. Obraz ten niewiele by się różnił od obrazu pola który daje rygorystyczna teoria fal sprzężonych, rozdział 4. W wymienionej teorii harmoniki sprzęgają się w obszarze siatki pomiędzy sobą, zaś w drugiej iteracji ulepszonej metody perturbacyjnej harmoniki liczone sprzęgałyby się w obszarze siatki harmonikami otrzymanymi w pierwszej iteracji.

W przypadku pobudzenia struktury wiązką lub falą płaską należy w opisanym obrazie pola zamienić falę powierzchniową na pole powstałe w strukturze planarnej, rys. 9/b/, pod wpływem danego pobudzenia.

## 6. Inne metody obliczania pola w strukturach z periodyczną warstwą

W rozdziałach 3, 4 i 5 podane zostały trzy znane i według autora niniejszej pracy, ważne w teorii siatek dielektrycznych grupy metod obliczania pól elektromagnetycznych. Pozwalają one prowadzić obliczenia pól w szerokim zakresie stosowania siatek dielektrycznych zarówno w optyce zintegrowanej, akustooptyce, holografii, teorii anten jak i wielu innych w dziedzinach zastosowań. Metody te ponadto, dają pełny obraz zachodzących w siatkach dielektrycznych zjawisk takich jak wyciek energii z prowadzonej fali w strukturach warstwowych, powstawanie kolejnych rzędów ugięcia, zwanych tutaj falami sprzężonymi lub harmonikami przestrzennymi oraz liczne rezonanse powodowane periodycznością siatki, warstwowością ośrodka lub wzajemnym oddziaływaniem tych dwóch przyczyn.

W praktyce obliczeniowej, oprócz opisanych do tego momentu metod stosuje się również i inne, które jakkolwiek nie są już tak pogładowe jak poprzednie, za to w szczególnych zakresach pracy siatek okazują się bądź to szybsze od poprzednich, bądź dokładniejsze.

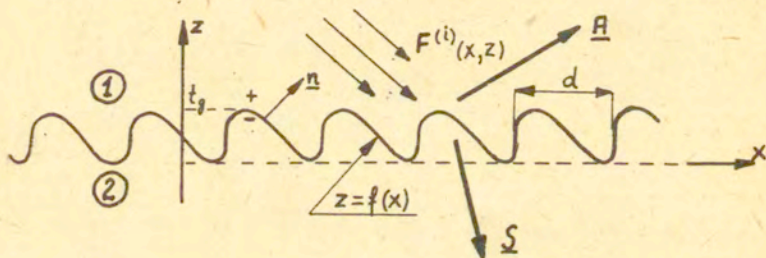
Chcąc zrobić w miarę szeroki przegląd pozostałych metod trudno nie wspomnieć o najstarszej, nazywanej w literaturze metodą Rayleigh'a. W metodzie tej zakłada się jednakową postać pól we wszystkich ośrodkach struktury. Nad powierzchnią rozdziału przyjmujemy, że pole jest postaci:

$$/6.1/ \quad F(x, z) = F^{i/}(x, z) + \sum_n A_n \cdot \exp[i \cdot h_n \cdot x + i \cdot \beta_n^{(a)} \cdot z];$$

$z > f(x)$

gdzie  $F^{i/}(x, z)$  jest falą padającą na periodycznie porowkowaną powierzchnię rozdziału ośrodków, rys. 11.

Najważniejszym założeniem tej metody jest to, że rozwinięcie pola ugiętego w szereg występujący we wzorze /6.1/, jest słuszne również pomiędzy zębami siatki, co jak wiemy z poprzednich rozdziałów, nie jest prawdą, gdyż amplitudy  $A_n$  w /6.1/ powinny być funkcjami zmiennej  $z$ , por. /3.1/. Założenie to, zwane założeniem Rayleigha /14/, niezwykle upraszcza obliczenia.



Rys. 11. Struktura periodyczna o rowkowaniu danym funkcją  $z = f(x)$ .

Zakładając, że ośrodek ① na rys. 11 to powietrze, zaś ośrodek ② - idealny przewodnik, otrzymujemy stosując do /6.1/ warunek brzegowy Dirichleta na powierzchni  $z = f(x)$ , równość;

$$/6.2/ \quad \sum_{n=-\infty}^{+\infty} A_n \cdot \exp[/-h_n \cdot x + i \beta_n^{/a/} \cdot f(x)] = - E_y^{/i/} [x, f(x)]$$

słuszną dla pól typu TE. Otrzymane równanie /6.2/ okazuje się być klasycznym problemem rozwinięcia funkcji  $-E_y^{/i/} [x, f(x)]$  w szereg funkcyjny.

Zaprezentowane tu podejście można stosować również do siatek dielektrycznych, kiedy ośrodek ② jest dielektrykiem, zakładając postać pola transmitowanego w postaci /6.1/, z odpowiednio dobranymi poprzecznymi liczbami falowymi  $\beta_n^{/s/}$  i amplitudami  $S_n$  w warstwie podłoża. Metoda ta daje dobre wyniki dla płytkiego rowkowania ośrodka, załamując się /szereg /6.1/ przestaje być zbieżny/ dla pewnej głębokości rowków, /14/. Ponieważ

metoda ta najszybciej daje wyniki, w odniesieniu do pozostałych metod, do dziś leży w kręgu zainteresowań wielu autorów wzbudzając dyskusje i komentarze na temat granic jej stosowalności, /41/, /42/, /43/.

Ciekawą wersję, dosyć daleką od pierwowzoru, metody Rayleigh'a podają autorzy pracy /46/ w zastosowaniu do metalowej siatki z wielowarstwową, dielektryczną warstwą płaszcza.

Stosując reprezentację /6.1/ dokonują transformacji współrzędnych:

$$/6.3/ \quad x' = x, \quad y' = y, \quad z' = z - f / x /$$

Transformując następnie pobudzenie, reprezentację /6.1/ oraz układ równań Maxwella do nowych współrzędnych. Okazuje się, że jakkolwiek dla  $N \rightarrow \infty$  metoda ich jest równoważna metodzie Rayleigh'a to dla skończonej liczby  $N$ , - liczonych harmonik przestrzennych, wyniki uzyskane ich metodą są dobre, w odróżnieniu od wyników klasycznej wersji metody. Autorzy pracy /46/ mają nadzieję zastosować w przyszłości omówioną metodę do struktur prowadzących, zawierających siatkę dielektryczną porowkowaną. Wydaje się to jednak mało trafionym pomysłem, ponieważ transformacja /6.3/ przekształcająca powierzchnię siatki w płaszczyznę, przekształci płaszczyznę struktury prowadzącej w powierzchnie rowkowane.

Ciekawą grupę metod stanowią, opracowane przez autorów książki /14/, różniczkowe metody obliczania pola w siatkach. Mogą być one stosowane zarówno do siatek modułowanych, rys. 5, jak i rowkowanych, rys. 11. Metody te posługują się reprezentacjami pola /3.1/ i /4.1/, co w obszarze warstwy siatki prowadzi tak jak i w metodzie modów własnych oraz w metodzie fal sprzężonych do równania /3.2/. W przypadku siatek rowkowanych macierz  $\underline{P}$  występująca w tym równaniu będzie już funkcją macierzową  $\underline{P} / z /$  i równanie /3.2/ będzie miało postać :

$$/6.4/ \quad \frac{d^2 \underline{q} /z/}{dz^2} = - \underline{P} /z/ \circ \underline{q} /z/$$

gdzie  $\underline{q} /z/$  wektory kolumnowe amplitud fal  $q_n /z/$ , w warstwie siatki. Pierwszym, ważnym spostrzeżeniem autorów jest fakt liniowości całego procesu dla liniowych ośrodków dielektrycznych, co widoczne jest dla siatek modulowanych z zależności /3.21/ + /3.27/. Postulują więc istnienie macierzy  $\underline{T}$ ,  $\underline{R}$  oraz  $\underline{M}$  takich, że :

$$/6.5/ \quad \underline{F} /i/ = \underline{T}^{-1} \circ \underline{S}$$

$$/6.6/ \quad \underline{A} = \underline{M} \circ \underline{S}$$

$$/6.7/ \quad \underline{A} = \underline{R} \circ \underline{F} /i/ ; \quad \underline{R} = \underline{M} \circ \underline{T}$$

gdzie  $\underline{A}$  wektor kolumnowy amplitud fal  $A_n$  w powietrzu,  $\underline{S}$  wektor kolumnowy amplitud fal  $S_n$  w podłożu,  $\underline{F} /i/$  wektor fal pobudzenia, rys. 11. Jak wiemy z rozdziału 4, warunki brzegowe spełniane są przez każdą falę sprzężoną oddzielnie i w przypadku  $N$  - fal sprowadzają się do  $2N$  par równań liniowych, por. /4.17/ + /4.20/.

Przyjmujemy, że dla fali pobudzającej od strony powietrza znamy wektor  $\underline{S}$ . Z  $N$  - par warunków brzegowych wyliczamy wektory  $\underline{q} /0/$  i  $\frac{d \underline{q} /0/}{dz}$ , co stanowi wystarczającą informację do bezpośredniego przecałkowania równania /6.4/. W ten sposób wyliczymy  $\underline{q} /t_s/$  i  $\frac{d \underline{q} /t_s/}{dz}$  co pozwoli z pozostałych  $N$ -par warunków wyliczyć wektory  $\underline{A}$  i  $\underline{F} /i/$ .

Otrzymaliśmy więc rozwiązanie nie dla zadanego ale dla wyliczonego pobudzenia  $\underline{F} /i/$ . Powtarzając ten proces  $N$  razy dla  $N$  wybranych liniowo niezależnych wektorów  $\underline{S}$ , jesteśmy w stanie wyliczyć macierze  $\underline{T}$  i  $\underline{M} /z$  równań 6.5/ + /6.7/, co stanowi wynik ten metody. Problemem ważnym w tej metodzie jest dobór odpowiedniego algorytmu całkowania układu równań fal sprzężonych /6.4/. Autorzy

pracy /14/ proponują algorytm Numerov'a /45/, w zastosowaniu do dyfrakcji fali płaskiej na siatce dielektrycznej. Autorzy pracy /44/, w zastosowaniu do struktur przewodzących, proponują algorytm Adamsa - Multona, /44/, /45/.

Całkiem odmienną grupę metod stanowią metody całkowe, opisane w /14/. Autorzy tej pracy, specjalnie dla struktur periodycznych definiują przestrzeń dwuwymiarowych dystrybucji  $R_{d,k}^*$  określoną nad przestrzenią różniczkowalnych funkcji pseudoperiodycznych,  $R_{d,k}, o$  nośnikach zwartych w kierunku zmiennej transwersalnej  $z$  i pseudoperiodycznych w kierunku  $x$  ;

$$/6.8/ \quad \Psi \in R_{d,k} \Leftrightarrow \Psi \in C_{/oz/}^{\infty} \text{ oraz } \Psi /x+d, z/ = \Psi /x, z/ \exp(-ikd)$$

W przestrzeni tej określają dystrybucję  $G^{/j/} /x, z/$  ;

$$/6.9/ \quad G^{/j/} = (1/2 \text{ id}) \cdot \sum_{n=-\infty}^{+\infty} [1/\beta_n^{/j/}] \cdot \exp[ih_n \cdot x + i\beta_n^{/j/} |z|]$$

posiadającą tą własność , że dowolna  $/d, k/$  pseudoperiodyczna funkcja  $U /x, z/$  spełniająca w obydwu ośrodkach ① i ② z rys. 11, to samo jednorodne równanie Helmholtz'a ze stałą  $k_j^2$  oraz odpowiednie warunki wypromieniowania dla  $z \rightarrow \pm \infty$ , posiada następującą reprezentację ;

$$/6.10/ \quad U /x, z/ = \int_0^d G^{/j/} [x-x', z-f/x'] \eta /x' \text{ dl}' + \int_0^d \frac{d G^{/j/}}{dn} [x-x', z-f/x'] \mathcal{H} /x' \text{ dl}'$$

gdzie

$$/6.11/ \quad \mathcal{H} /x/ = U_+ [x, f/x/] - U_- [x, f/x/]$$

$$/6.12/ \quad \eta /x/ = \frac{d U}{dn_+} [x, f/x/] - \frac{d U}{dn_-} [x, f/x/]$$

są skokami funkcji  $U$  i jej pochodnej normalnej na krzywej  $z = f(x)$ , rys. 11, przy czym całkowanie w /6.10/ odbywa się wzdłuż krzywej i rozciąga się na jeden dowolnie ustalony odcinek tej krzywej obejmujący jeden okres siatki. Znaki  $+$  i  $-$  w /6.11/ i /6.12/ oznaczają graniczne wartości oznakowanych wielkości; dla punktu  $(x, z)$  zbiegającego do krzywej  $z = f(x)$  wzdłuż kierunku wyznaczonego przez wektor normalny  $\underline{n}$  do krzywej, w punkcie  $(x, f(x))$ , od góry lub od dołu, rys. 11.

W oparciu o zależności /6.10/ + /6.12/ można otrzymywać równania całkowe na wiele sposobów zarówno dla siatek metalowych, metalowych z płaszczem oraz dielektrycznych, /14/, przy czym, we wszystkich tych równaniach, całkowanie rozciąga się na jeden, ustalony odcinek krzywej, obejmujący jeden okres siatki.

Najbardziej efektywny sposób otrzymywania równań, bo prowadzący problem tylko do jednego równania całkowego dla pewnej nieznannej funkcji  $\Phi(x, z)$ , określonej na opisanym odcinku krzywej, podaje Maystre, /14/. Dla padającej fali płaskiej  $F^i(x, z)$  na siatkę dielektryczną, rys. 11, określa się dwa następująca pola:

$$/6.13/ \quad U(x, z) = F(x, z) - F^{i/}(x, z) \quad w \quad (1)$$

$$/6.14/ \quad \nabla^2 U(x, z) + k^2 U(x, z) = 0 \quad w \quad (2)$$

$$/6.15/ \quad U_-(x, f(x)) = U_+(x, f(x))$$

oraz drugie pole  $V(x, z)$ ;

$$/6.16/ \quad V(x, z) = \begin{cases} 0 & w \quad (1) \\ F(x, z) & w \quad (2) \end{cases}$$

gdzie  $F(x, z)$ , całkowite poszukiwane pole; dla pobudeń TE;  $F = E_y$  zaś dla pobudeń TM;  $F = H_y$ , spełniające na krzywej  $z = f(x)$  odpowiednie warunki brzegowe



$$/6.17/ \quad F_{+} /x, f/x/ / = F_{-} /x, f/x/ /,$$

$$\frac{dF}{d\eta_{+}} /x, f/x/ / = \frac{C_1}{C_2} \quad \frac{dF}{d\eta_{-}} /x, f/x/ /$$

gdzie  $c_j = \mu_j$  - dla TE,  $\epsilon_j$  - dla TM/

Obie funkcje  $U$  i  $V$  spełniają to samo równanie Helmholtza w obu ośrodkach,  $U$  ze stałą  $k_1^2$  zaś  $V$  ze stałą  $k_2^2$ , możemy więc do nich stosować zależności /6.10/ + /6.12/.

Funkcja  $U$  nie doznaje skoku na krzywej, możemy jej więc poszukiwać w postaci tylko pierwszej całki /6.10/ z pewną, nieznaną funkcją skoku pochodnej normalnej,  $\Phi$ , która będzie szukaną niewiadomą funkcją.

Na mocy /6.13/ całkowite pole w ośrodku ① da się teraz zapisać jako:

$$/6.18/ \quad F /x, z/ = F^{1/} /x, z/ + \int_0^d G^{1/} \{x-x', z-f/x'\} /x' dl'^2$$

Funkcją  $V$  należy natomiast wyrazić pełnym wzorem /6.10/ dla  $j = 2$  przy czym  $\eta /x/ = -\frac{dF}{d\eta_{-}} (x, f(x))$  oraz  $K/x/ = -F_{-} /x, f/x/ /$ . Przechodząc z /6.18/ oraz postacią funkcji  $V$  granicznie do krzywej  $z = f /x/$ , wykorzystując następnie warunki brzegowe /6.17/, por. /14/, /47/, otrzymamy dla poszukiwanej funkcji  $\Phi$  singularne równanie całkowe pierwszego rodzaju, które w operatorowym zapisie ma postać :

$$/6.19/ \left\{ \frac{C_2}{C_1} G^{2/} \circ N^{1/} + N^{2/} \circ G^{1/} + \frac{C_2}{2C_1} G^{2/} + \frac{1}{2} G^{1/} \right\} / \Phi / =$$

$$= -\frac{C_2}{C_1} G^{2/} \left( \frac{dF^{1/}}{d\eta_{+}} \right) - N^{2/} \left( F_{+}^{1/} \right) - \frac{1}{2} F_{+}^{1/}$$

gdzie przez  $N^{j/}$  oznaczono całkowy operator o jądrze równym pochodnej normalnej funkcji  $G^{j/}$ . Na podobnym pomysle, prowadzącym do analogicznego jak /6.19/ równania, oparta jest metoda zawarta w /47/, niezależnie

opracowana przez autora niniejszej pracy w zastosowaniu do problemu rozpraszania na żyrotropowym rdzeniu w falowodzie zamkniętym.

Opisaną procedurę wyprowadzenia równania /6.19/ można zastosować do struktur zawierających więcej niż jedną warstwę, przy czym, również warstw rowkowanych może być kilka. W tym przypadku otrzymamy układ  $Q$  równań całkowych z  $Q$  - niewiadomymi funkcjami  $\Phi_q$ , gdzie  $Q$  - liczba krzywych rozdziału. Układ ten rozwiązuje się dosyć łatwo, /14/, gdyż ostatnie z równań zawiera tylko jedną funkcję niewiadomą i nie jest sprzężone z pozostałymi. Po rozwiązaniu tego równania np: na funkcję  $\Phi_1$  podstawiamy ją do przedostatniego równania i otrzymujemy niesprężone z innymi równanie na  $\Phi_2$ . W ten sposób możemy po kolei wyliczyć wszystkie funkcje  $\Phi_q$ , /14/, a z nich żądane pole.

Opisana metoda jest szczególnie chętnie stosowana do siatek metalowych z wielowarstwowym płaszczem, używanych na przykład w laserach dużej mocy. Nie zastosowano jej do tej pory do struktur prowadzących, gdzie jak wiemy większą rolę odgrywają rezonanse związane z warstwowością ośrodka. Wydaje się też, że jak w przypadku każdej całkowej metody dokładność jej będzie malała wraz ze wzrostem zmienności szukanej funkcji  $\Phi$  w przedziale jednego okresu siatki, co będzie miało miejsce w przypadku wzrostu znaczenia wyższych harmonik przestrzennych. Osobną pozycję wśród metod całkowych zajmują metody oparte na zastosowaniu funkcji Greena. Metody te polegają w tym przypadku na zastosowaniu pewnej reprezentacji całkowej pola, w której występują pod całką funkcje opisujące przyczynę powstania pola w strukturze oraz funkcja źródła zwana funkcją Greena. W pewnym sensie, funkcję  $G^{(j)}(x, x', z, z')$  daną wzorem /6.9/, można by nazwać funkcją Greena dowolnej struktury, periodycznej o okresie  $d$  wzdłuż osi  $x$ . Również macierz  $\underline{R} = \underline{M} \otimes \underline{I}$ , dana

wzorem /6.7/, jest numerycznym odpowiednikiem funkcji Greena, tym razem odnoszącej się ściśle tylko do liczonego zadania. Dostyc częste jest użycie przybliżonej funkcji Greena, jak na przykład w pracy /36/. Autorzy tej pracy rozpatrują siatkę dielektryczną rowkowaną o małej głębokości rowkowania używając reprezentacji:

$$/6.20/ \quad F(x,z) = F_u(x,z) + \iint \Delta \varepsilon(x',z') G(x',z'; x,z) F_u(x',z') dx'dz'$$

gdzie  $G$  jest dobrze znaną i niejednokrotnie omawianą /49/, /50/ funkcją Greena falowodu płaskiego,  $\Delta \varepsilon$  jest zaburzeniem struktury spowodowanym rowkowaniem lub modulacją a  $F_u$  polem występującym w niezaburzonym falowodzie. Jeśli znaną funkcję  $F_u$ , występującą pod całką /6.20/ zastąpić nieznanym polem  $F$  to otrzymamy równanie całkowe /6.21/:

$$/6.21/ \quad F(r) = F_u(r) + \iint \Delta \varepsilon(r') \cdot G(r, r') \cdot F(r') dr'$$

które jest równoważne równaniu falowodu spełnianemu przez pole  $F$  w całej strukturze z siatką, łącznie z warunkami zszycia, /48/. Wychodząc z równania /6.21/ i korzystając ze znanych własności funkcji  $G(r, r')$  dla falowodu płaskiego, autorzy pracy /48/ wyprowadzają całkową wersję równania rezonansu siatki dielektrycznej, por. /3.28/, umieszczonej w strukturze warstwowej.

Opisane tu w dużym skrócie metody, łącznie z metodami opisanymi w rozdziałach 3, 4 i 5, nie wyczerpują oczywiście wszystkich metod stosowanych do obliczania pola w strukturach zawierających siatki. Ostatnio, zaczęła zdobywać popularność, bardzo prosta i szybka pod względem obliczeń numerycznych metoda, opracowana przez Chang'a i Tamira, /51/, dla rowkowanych siatek o profilu trójkątnym rys. 10/b/, umieszczonych na warstwowej strukturze prowadzącej. Autorzy tej metody rozpatrują siatkę jako dwa układy równoległych płaszczyzn,

wyprowadzając dla każdego z tych układów tak zwany, zmodyfikowany warunek Bragg'a, /51/;

$$/6.22/ \quad \kappa^{sw/p} d + k_0 \sqrt{\epsilon_f} \cdot \cos 2 \theta_p = 2\pi ; p = 1, 2$$

gdzie;  $\theta$  - kąty nachylenia płaszczyzn mierzone od osi z,  $\kappa^{sw/p}$  - stała charakterystyczna prowadzonej przez strukturę fali powierzchniowej.

W zależności od lepszego lub gorszego spełniania warunku /6.22/ dla  $p = 1$  lub  $p = 2$  następuje określony podział wypromieniowywanej energii do powietrza lub podłoża, co autorzy pracy /51/ demonstrują graficznie. Dla niesymetrycznej, trójkątnej siatki rowkowanej, o odpowiednio dla danej fali powierzchniowej dobranej asymetrii, można uzyskać od 0% do 100% wypromieniowania energii do ośrodka nad siatką. Widać, więc że odpowiedni dobór profilu rowkowania ma pierwszoplanowy wpływ na sprawność takich urządzeń jak sprzęgacze optyczne.

## 7. Uwagi końcowe

Oprócz opisanych w przedstawionej tu pracy teorii i metod opisujących pole elektromagnetyczne w strukturach z siatkami dielektrycznymi i pozwalających to pole efektywnie liczyć, pojawiają się nadal i prawdopodobnie będą się jeszcze pojawiały nowe metody, a to z uwagi na ciągłe i żywe zainteresowanie tymi strukturami w technice oraz ze względu na duże możliwości nowych ich zastosowań. Z ogólnych rozważań nad postacią rozwiązań w strukturach z siatką modulowaną w rozdziale 2 widać wyraźnie, że omówione w rozdziałach 3 i 4 podstawowe w teorii siatek metody, bynajmniej nie wyczerpują zagadnienia. A przecież pozostają jeszcze siatki rowkowane, do których metody modów własnych i fal sprzężonych, dające oprócz rygorystycznych rozwiązań pełen opis pól i zjawisk, nie stosują się bezpośrednio. Fakt ten

jest głównym powodem powstania całego szeregu metod opisanych w rozdziałach 5 i 6, a dotyczących przede wszystkim siatek rowkowanych. W siatkach tych ścisła postać pól jest conajmniej tak skomplikowana jak w siatkach modulowanych a jeśli idzie o zastosowania, to właśnie siatki rowkowane znajdują ich ostatnio coraz więcej, wymieniając choćby tylko optykę zintegrowaną, /21/. Co się tyczy siatek modulowanych to i ten temat nie został całkowicie wyczerpany. Nowe zastosowania tych siatek w urządzeniach akusto optycznych powodują dodatkową komplikację pól z uwagi na ruch siatki względem układu współrzędnych z prędkością rozchodzenia się fal akustycznych w ośrodku siatki, /38/, /61/.

Mozna jednak już dziś śmiało stwierdzić, że dla dowolnej konfiguracji siatki, modulowanej lub rowkowanej, w dowolnej strukturze; prowadzącej, transmisyjnej lub odbijającej, możemy, choćby z zaprezentowanych w tej pracy metod wybrać taką, która w sposób dokładny lub tylko przybliżony pozwoli policzyć interesujące w danym zagadnieniu pola lub inne wielkości fizyczne.

Należy więc oczekiwać teraz przede wszystkim nowych zastosowań dla opisanych tutaj siatek, choćby z uwagi na duże bogactwo zjawisk elektromagnetycznych występujących w tych strukturach oraz na już istniejącą możliwość teoretycznego przewidzenia współdziałania siatek z innymi urządzeniami, mogącymi z nimi współpracować. To oczywiście, stanie się bodźcem do ulepszania i modyfikowania już istniejących metod, oraz do powstawania nowych, co być może w przyszłości pozwoli narysować bardziej przejrzysty i zwarty obraz pól i zjawisk w periodycznych siatkach niż przedstawiony w zaprezentowanej pracy.

L i t e r a t u r a

- /1/ R.E. Collin - "Field Theory of Guided Waves" New York: Mc Graw-Hill 1960, sec 9.1, p. 368.
- /2/ T.Tamir, H.C.Wang, A.A.Oliner - "Wave propagation i Sinusoidally Stratified Dielectric Media", IEEE Trans. Microwave Theory Tech., vol. MTT-12, pp. 323-335, May 1964.
- /3/ C.Yeh, K.F.Casey, Z.A.Kaprielian - "Transvere Magnetic Wave Propagation in Sinusoidally Stratified Dielectric Media" IEEE Trans., Microwave Theory Tech., vol. MTT-13, pp.297-302, May 1965.
- /4/ L.R.Lewis, A.Hessel - "Propagation Characteristics of Peridic Arrays of Dielectric Slabs", IEEE Trans. Microwave Theory Techn., vol. MTT-19 pp.276-286, May 1971.
- /5/ S.T.Peng, T.Tamir, H.L.Bertoni - "Theory of Periodic Dielectric Waveguides", IEEE Trans. Microwave Theory Tech., vol. MTT-23, pp.123-133, Jan 1975.
- /6/ L.Brillouin - "Wave Propagation in Periodic Structures", Dover Publications, Inc. 1953, chapt.VIII.
- /7/ N.W. McLachlan - "Theory and Application of Mathieu Functions, Oxford University Press, London 1951.
- /8/ D.C.Champeney - "Fourier Transforms and their Physical Applications", Academic Press, London and New York 1973.
- /9/ Z.Szmydt - "Transformacja Fouriera i równania różniczkowe liniowe", PWN, Warszawa 1972.
- /10/ T.Tamir, H.C.Wang - "Scattering of Electromagnetic Waves by a Sinusoidally Stratified Half - Space", part . 1, Can.J.Phys 44, p.2073, 1966.

- /11/ T.Tamir, H.C.Wang - "Scattering of Electromagnetic Waves by a Sinusoidally Stratified Half - Space", part.2, Can. J.Phys. 44, p.2461, 1966.
- /12/ T.K.Gaylord, M.G.Moharam - "Planar Dielectric Grating Diffraction Theories", Appl.Phys. B-28, p.1-14, 1982.
- /13/ P.St.J.Russel - "Optical Volume Holography", Phys: Rep.71, p.209-312, 1981.
- /14/ R.Petit /Editor/ - "Electromagnetic Theory of Gratings", Springer - Verlag Berlin Heidelberg New York 1980.
- /15/ J.W.S.Reyleigh - "On the maintenance of vibrations by forces of double frequency, and on the propagation of waves through a medium endowed with a periodic structure", Phil. Mag., vol.24, pp.145-159, 1887.
- /16/ L.V.Kantorovich, V.I.Krylov - "Approximate Methods of Higher Analysis", New York p.26-31, I3, Interscience - 1958.
- /17/ T.Tamir, H.C.Wang - "Characteristic Relations for Nonperiodic Solutions of Mathieu's Equation", J.Res. Nat.Bur.Stand., Sec.B., vol 69B, p.101, 1965.
- /18/ T.Tamir, S.T.Peng - "Analysis and Design of Grating Couplers", Appl.Phys.vol.14, p.235-254,1977.
- /19/ A.Hessel, A.A.Oliner - "Wood's Anomalies and Leaky Waves", Electromagnetic Theory and Antennas Pergamon Press, p.887, Oxford 1963.
- /20/ A.A.Oliner - "Leaky Waves in Electrimagnetic Phenomena", Electromagnetic Theory and Antennas, Pergamon Press, p.837, Oxford 1963.

- /21/ T.Tamir - "Integrated Optics", Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York 1975.
- /22/ D.L.Jaggard, C.Elachi - "Floquet and Coupled - Waves Analysis of Higher - order Bragg Coupling in a Periodic Medium", J.Opt. Soc.Am.vol.66, no.7, p.674,1976.
- /23/ A.Hessel, A.A.Oliner - "A New Theory of Wood's Anomalies on Optical Grating", Appl. Opt.vol 4, no 10, p.1275, 1965.
- /24/ R.S.Chu, T.Tamir - "Guided - Wave Theory of Light Diffraction by Acoustic Microwaves", IEEE Trans. Microwave Theory Tech., vol MTT-18, no 8, p.486, 1970.
- /25/ M.G.Moharam, T.K.Gaylord - "Chain-Matrix Analysis of Arbitrary-Thickness Dielectric Reflection Gratings", J.Opt.Soc.Am. vol 72, no 2, p.187, 1982.
- /26/ R.Magnusson, T.K.Gaylord - "Equivalence of Multi-wave Coupled-Wave Theory and Modal Theory for Periodic-Media Diffraction", J.Opt. Soc.Am., vol.68, no 12, p.1777,1978.
- /27/ R.Magnusson, T.K.Gaylord - "Diffraction Efficiencies of Thin Phase Gratings with Arbitrary Grating Shape", J.Opt.Soc., Am. vol.68, no 6, p.806, 1978.
- /28/ F.G.Kaspar - "Diffraction by Thick, Periodically Stratified Gratings with Complex Dielectric Constant", J.Opt. Soc.Am. vol.63, no 1, p.37, 1973.
- /29/ C.L.Liu, J.W.S. Liu - "Linear Systems Analysis", Mc Graw-Hill, New York 1975.



- /30/ M.G.F.Wilson, S.W.ChanWong - "Theory of Intergrated Optic Diffraction Gratings in Low  $\Delta n$  Waveguides", Electronics Lett, vol.19, No 22, 27th October 1983.
- /31/ K.Wagatsuma, H.Sakaki, S.Saito - "Mode Conversion and Optical Filtering of Obliquely Incident Waves in Corrugated Waveguide Filters", IEEE J.Quant. Electron, QE-15, pp.632-637, 1979.
- /32/ H.Kogelnik/ - "Coupled Wave Theory for Thick Hologram Gratings", Bell Syst.Tech. J.vol.48, no 9, pp.2909-2947, 1969.
- /33/ D.Kermisch - "Nonuniform Sinusoidally Modulated Dielectric Gratings", J.Opt.Soc.Am., vol. 59, no 11, p.1409, 1969.
- /34/ N.Uchida - "Calculation of Diffraction Efficiency in Hologram Gratings Attenuated along the Direction Perpendicular to the Grating Vector", J.Opt.Soc. Am., vol.63, no 3, p.280, 1973.
- /35/ R.Alferness - "Analysis of Propagation at the Second Order Bragg Angle of a Thick Holographic Grating", J.Opt. Soc. Am, vol.66, no 4, p.353, 1976.
- /36/ K.Ogawa, W.S.C.Chang, B.L.Sopotil, F.J.Rosenbaum - "A Theoretical Analysis of Etched Grating Couplers for Integrated Optics", IEEE J.Quant. Electron, QE-9, pp.29-42, 1973.
- /37/ K.Handa. S.T.Peng, T.Tamir - "Improved Perturbation Analysis of Dielectric Gratings", Appl. Phys, vol.5, pp.325-328, 1975.

- /38/ S.T.Peng, T.Tamir - "TM-Mode Perturbation Analysis of Dielectric Gratings", Appl.Phys.,vol.7, pp.35-38, 1975.
- /39/ W.Streifer, D.R.Scifres, R.D.Burnham - "Analysis of Grating-Coupled Radiation in GaAs: GaAlAs Lasers and Waveguides", IEEE J.Quant. Electron.,QE-12, no 7, pp.422-428, 1976.
- /40/ D.Marcuse - "Mode Conversion Couused by Surface Imperfections of a Dielectric Slab Waveguide", Bell Syst.Tech. J. vol.48, no 10, pp.3187-3215, 1969.
- /41/ A.Wirgin - "Plane-Wave Expansion Used to Describe the Field Diffracted by a Grating: Comments", J.Opt. Soc., Am., vol.72, no 6, p.812, 1982.
- /42/ A.Wirgin - "Reflection by a Grating: Rayleigh Methods; Comments", J.Opt. Soc. Am., vol.72, no 7,p. 963, 1982.
- /43/ P.M.van den Berg - "Reflection by a Grating: Rayleigh Methods: Autor's Reply to Comments by A.Wirgin", J.Opt.Soc Am., vol. 72, no 7, p. 970, 1982.
- /44/ K.C.Chang, V.Shah, T.Tamir" - Scattering and Guiding of Waves by Dielectric Gratings with Arbitrary Profiles", J.Opt. Soc. Am., vol.70, no 7, pp.804-813, 1980.
- /45/ M.A.Melkanoff, J.Raynal, F.Sawada - "Methods in Computational Physics", Academic Press, New York 1966.
- /46/ J.Chandezon, M.T.Dupuis, G.Cornet, D.Maystre - "Multicoated Gratings; a Differential Formalizm Applicable in the Entire Optical Region", J.Opt.Soc.Am.,vol 72, no 7, pp. 839-846, 1982.

- /47/ M.Sowiński - "Rozpraszanie na obiektach żyotropowych i anizotropowych umieszczonych w fałowodzie", IFTR Reports, 55/1980, nr 103, Warszawa 1980.
- /48/ C.S.Ghizoni, J.M.Ballatyne, Ch.L.Tang - "Theory of Optical - Waveguide Distributed Feedback Lasers: A.Green's Functions Approach", J.Quant. Electron., QE-13, no 10, p.843, 1977.
- /49/ L.B.Felsen, A.Kamel - "Hybrid Ray - Mode Formulation of Parallel Plane Waveguide Green's Functions" - Dep. Electr. Eng. Polytechnic Institute of New York, N.Y. 11735, 1980.
- /50/ M.Sowiński - "Funkcja Greena dla dielektrycznego fałowodu wypełnionego ośrodkiem dyspersyjnym", IFTR - Reports 8/1983, nr 197, Warszawa 1983.
- /51/ K.C.Chang, T.Tamir - "Simplified Approach to Surface Wave Scattering by Blazed Dielectric Gratings" Appl.Opt., vol.19, no 2, pp. 282+288, 1980.
- /52/ F.K.Schwering, S-T. Peng - "Design of Dielectric Gratings Antennas for Multimeter - Wave Applications", IEEE Trans. Microwave Theory Tech., vol. MTT-31, pp.199-209, Feb. 1983.
- /53/ S.Engmann, P.Lindblom - "Multiechelle Grating Mountings with High Spectral Resolution and Dispersion", Appl. Opt., vol.21, no 23, pp. 4363-4367, 1982.
- /54/ N.M.Ceglio, R.L.Kauffman, A.M.Hawryluk, H.Medecki - "Time-Resolved X-Ray Transmission Grating Spectrometer for Studying Laser-Produced Plasmas", Appl. Opt., vol.22, no 2, pp.318-327, 1983.

- /55/ E.Kapon., A.Hardy, A.Katzir - "TE and TM Coupling Coefficients in Distributed Feedback Double-Heterostructure Pb Sn Te Lasers", IEEE J.Quant. Electron., QE-17, no 3, pp.391-397, 1981.
- /56/ K.Utaka, K-I. Kobayaski, Y.Suematsu - "Lasing Characteristics of 1,5+1,6  $\mu\text{m}$  Ga In AsP/ InP Integrated Twin-Guide Lasers with First-Order Distributed Bragg Reflectors", IEEE J.Quant.Electron., vol. QE-17, no5, pp.651-657, 1981.
- /57/ V.L.Bratman, G.G.Denisov, N.S.Ginzburg, M.I.Petelin "FEL's with Bragg Reflection Resonators: Cyclotron Autoresonans Masers Versus Ubitrons", IEEE J.Quant. Electron, QE-19, no 3, pp.282-295, 1983.
- /58/ N.Gade, J.H.Osmundsen - "Gain Measurements on Semiconductor Lasers by Optical Feedback from an External Grating Cavity", IEEE J. Quant. Electron., QE-19, no 8, pp.1238-1242, 1983.
- /59/ F.Calligaris, P.Ciuti, I.Gabrielli - "Extended Theory of Light Modulation in Thin-Screen Diffraction by Ultrasound", J.Opt. Soc. Am., vol.63, nr 287-292, 1973.
- /60/ R.S.Chu., T.Tamir - "Bragg Diffraction Beams by Periodically Modulated Media", J.Opt.Soc. Am., vol.66, no 3, pp. 220-226, 1976.
- /61/ I.C.Chang - "Acoustooptic Devices and Applications" IEEE Trans. Son. and Ultrason., vol. SU-23, no 1, pp.2+22, 1976.
- /62/ R.V.Schmidt - "Acoustooptics Interactions Between Guided Optical Waves and Acoustic Surface Waves", IEEE Trans.Son.and Ultrason, vol.SU-23, no 1, pp.22+33, 1976.

- /63/ W.S.Goruk, P.J.Vella, G.I.Stegman - "Optical Probing Measurements of Surface Wave Generation and Reflection in Interdigital Transducers on  $\text{LiNbO}_3$ ", IEEE Trans. Son. and Ultrason., vol. SU-27, no 6, pp.341-355, 1980.
- /64/ K.Wagatsuma, H.Sakaki, S.Saito - "Mode Conversion and Optical Filtering of Obliquely Incident Waves in Corrugated Waveguide Filters", IEEE, J.Quant. Electron, vol. QE-15, no 7, pp.632-637, 1979.
- /65/ K.Iga, M.Oikawa, J.Banno, Y.Kokubun - "Stacked Planar Optics: An Application of the Planar Microlens", Appl. Opt., vol.21, no 19, pp.3456-3460, 1982.
- /66/ K.Shirahata, W.Susaki, H.Namizaki - "Recent Developments in Fiber Optics Devices", IEEE Trans. Microwave, Theory Tech., vol. MIT 30, no 2, pp.121+131, 1982.
- /67/ V.Shah, T.Tamir - "Absorption and Lateral Shift of Beams Incident upon Lossy Multilayered Media", J.Opt.Soc. Am., vol.73, no 1, pp.37+44, 1983.
- /68/ W.E.Baird, M.G.Moharam, T.K.Gaylord - "Diffraction Characteristics of Planar Absorption Gratings", Appl. Phys. B-32, pp. 15+20, 1983.
- /69/ O.M.Mendez, A.Roger, D.Maystre - "Numerical Solution for an Inverse Scattering Problem of Non-Periodic Rough Surfaces", Appl. Phys. B-32, pp. 199-206, 1983.
- /70/ A.A.Oliner, A.Heßel - "Guided Waves on Sinusoidally Modulated Reactance Surfaces", IRE Trans. Antennas Propag. vol.AP-7, Special Supplement, pp,S 201+S208, Dec. 1959.

S p i s   t r e ś c i

Streszczenie . . . . .	3
1. W s t ę p . . . . .	4
2. Reprezentacja pola w strukturach periodycznych . . . . .	8
3. Teoria modów własnych. . . . .	16
4. Teoria fal sprzężonych . . . . .	33
5. Metody perturbacyjne . . . . .	44
6. Inne metody obliczania pola w strukturach z periodyczną warstwą. . . . .	59
7. Uwagi końcowe . . . . .	68
8. Literatura . . . . .	70
Spis treści. . . . .	78