

**Marek Sokołowski**

**O METODZIE MOMENTÓW  
ZASTĘPCZYCH W DYNAMICZNYCH  
ZAGADNIENIACH OSRODKÓW  
SPRĘŻYSTYCH Z INKLUZJAMI**

30/1987



P.269a

**WARSZAWA 1987**

ISSN 0208-5658

Praca wpłynęła do Redakcji dnia 3 września 1987 r.



56857



---

Instytut Podstawowych Problemów Techniki PAN  
Nakład 190 egz. Ark.wyd. 2,45 Ark.druk. 3  
Oddano do drukarni we wrześniu 1987 r.  
Nr zamówienia 473/87.

---

Warszawska Drukarnia Naukowa, Warszawa,  
ul. Śniadeckich 8

O METODZIE MOMENTÓW ZASTĘPCZYCH W DYNAMICZNYCH  
ZAGADNIENIACH OŚRODKÓW SPRĘŻYSTYCH Z INKLUZJAMI

Streszczenie

W szeregu wcześniejszych prac [1-4] autor zajmował się przybliżoną analizą ustalonych stanów naprężenia w ośrodkach sprężystych zawierających pewną liczbę inkluzji lub pustek cylindrycznych. Proponowana metoda analizy polegała na zastępowaniu tych defektów momentami skupionymi różnych rzędów. Obecna praca ma na celu pokazanie, że metoda ta może również znaleźć zastosowanie w badaniu zagadnień dynamicznych dotyczących propagacji fal sprężystych w nieograniczonych ośrodkach z inkluzjami. Rozważania ograniczono do antypłaskich stanów odkształcenia.

1. Wstęp

W kilku wcześniejszych pracach [1-4] autor zajmował się zagadnieniami przybliżonej analizy ustalonego rozkładu naprężeń w nieograniczonych ośrodkach sprężystych zawierających inkluzje /wtrącenia/ z materiałów sprężystych o odmiennych stałych materiałowych  $E$ ,  $\mu$  i  $\nu$ . Inkluzje te /a w szczególnym przypadku - przy  $E = \mu = 0$  - otwory/ miały kształt walców o równoległych osiach i przekroju kołowym /o promieniu  $a$ / lub eliptycznym /o półosiach  $a$ ,  $b$ /; w granicznym przypadku  $b \rightarrow 0$  otwory takie przekształcają się w szczeliny o długości  $2a$ ; warunki obciążenia zapewniają dwuwymiarowość całego zagadnienia.

Analiza tego rodzaju układów wykazuje, że - zwłaszcza w przypadku większej liczby inkluzji - ścisłe określenie rozkładu naprężeń w ośrodku jest praktycznie niemożliwe i należy stosować metody przybliżone. Wydaje się, że najlepsze wyniki uzyskać tu można posługując się metodą, w której poszczególne inkluzje /niejednorodności/ zastępuje się odpowiednimi rozkładami momentów różnego rzędu /multipoli/ działających w ośrodku jednorodnym.

Dodatkową zaletą tej metody wydaje się być fakt, że intensywności tych momentów zastępczych wyznacza się z układów prostych, algebraicznych równań warunkowych przypominających znane z elementarnej mechaniki budowli układy równań stosowane w analizie układów statycznie nie wyznaczalnych. Liczba tych równań jest ponadto nieporównanie mniejsza aniżeli w przypadku stosowanych tu zazwyczaj metod różnic lub elementów skończonych.

Celem obecnej pracy jest wykazanie, że istnieje możliwość zastosowania podobnej metody w zagadnieniach dynamicznych związanych z propagacją fal w ośrodkach zawierających inkluzje lub otwory cylindryczne. Podobnej próby w odniesieniu do nieustalonego przepływu ciepła dokonano w pracy [5].

Dla zachowania maksymalnej prostoty rozumowania wprowadzamy tu następujące uproszczenia i ograniczenia.

/1/ Rozważać będziemy jedynie antyplaski stan odkształcenia ośrodka sprężystego scharakteryzowanego stałą Lamé'go /modułem odkształcenia postaciowego/  $\mu$ ; w stanie tym wektor przemieszczenia ma jedyną nieznikającą składową  $u_3 = w$  skierowaną równoległe do osi z prostokątnego  $x, y, z$  lub walcowego  $r, \theta, z$  układu współrzędnych, przy czym składowa ta jest funkcją tylko dwóch współrzędnych przestrzennych  $x, y$  lub  $r, \theta$  i ewentualnie czasu  $t$ ,  $w = w(x, y, t)$  lub  $w = w(r, \theta, t)$ . Tensor naprężenia zawiera dwie składowe  $\sigma_{xz} = \sigma_{zx} = \mu \partial w / \partial x$ ,  $\sigma_{yz} = \sigma_{zy} = \mu \partial w / \partial y$  lub  $\sigma_{rz} = \sigma_{zr} = \mu \partial w / \partial r$ ,  $\sigma_{\theta z} = \sigma_{z\theta} = r^{-1} \mu \partial w / \partial \theta$ .

/2/ Przy omawianiu problemów dwuwymiarowych ograniczymy się jedynie do inkluzji lub otworów kołowo-cylindrycznych o osiach równoległych do osi z układu współrzędnych.

/3/ W przedstawionych przykładach ograniczymy się ponadto do pierwszych przybliżeń rozwiązań, w których inkluzje zastępuje się momentami pierwszego rzędu  $M^{10}$  i  $M^{01}$ , a więc odmiennie niż to miało miejsce w pracy [4].

W części 2 rozważanie rozpoczniemy od przedstawienia zasad analizy problemów jednowymiarowych; są to zagadnienia elementarne, ale pozwalają wyjaśnić sens fizyczny pojęć stosowanych w omawianej metodzie. W części 3 przedstawimy ogólne zasady stosowania metody w rozwiązywaniu statycznych zagadnień dwuwymiarowych oraz podstawowe wyniki osiągnięte w tym zakresie w pracy 4. Część 4 poświęcona jest analizie jednowymiarowych zagadnień dynamicznych.

a więc propagacji fal sprężystych w ośrodkach zawierających warstwy wykonane z materiałów o różnych własnościach sprężystych. W części 5 pokażemy w jaki sposób wyniki części 3 można uogólnić na przypadek dwuwymiarowych zagadnień dynamicznych dotyczących ośrodka nieograniczonego zawierającego pełną liczbę cylindrycznych inkluzji lub otworów. Uzyskane wyniki pozwalają ocenić nie tylko wpływ inkluzji na pierwotne pole naprężeń w ośrodku, ale również wzajemne oddziaływanie między inkluzjami.

## 2. Statyczne zagadnienia jednowymiarowe

Rozważamy na wstępie proste, jednowymiarowe zagadnienie antypłaskiego stanu odkształcenia /ścianania/ ośrodka sprężystego o module odkształcenia postaciowego  $\mu$  zawierającego "inkluzję", czyli warstwę wykonaną z innego materiału sprężystego o module  $\mu_1$ . Zadanie takie rozwiązać można w przypadku statycznym bez trudu w sposób ścisły; omówienie tego zadania ma tu na celu jedynie przedstawienie ogólnych zasad metody momentów zastępczych, ich sensu fizycznego, dokładności uzyskiwanych wyników oraz analogii z metodami analizy układów statycznie niewyznaczalnych stosowanymi w elementarnej mechanice budowli.

Rozważmy dwa przypadki szczególne: /1/ - warstwa  $0 < x < \ell$  podlega antypłaskiemu odkształceniu /ściananiu/ przez unieruchomienie płaszczyzny  $x = 0$  i przesunięcie równoległe płaszczyzny  $x = \ell$  o wielkość  $w_0$ ; /2/ - warstwa jest unieruchomiona na płaszczyźnie  $x = 0$ , a w płaszczyźnie  $x = \ell$  obciążona równomiernie rozłożonymi siłami stycznymi o intensywności  $P$ . Siły te, o kierunku zgodnym z kierunkiem osi  $z$ , również powodują antypłaskie odkształcenie ośrodka. W obu przypadkach zakładamy, że ośrodek zawiera inkluzję /warstwę/ ograniczoną płaszczyznami  $x = a$  i  $x = a + d$  o module  $\mu_1$ .

Ścisłe rozwiązanie obu zadań łatwo otrzymać rozwiązując równanie różniczkowe dla przemieszczeń  $u_3 = x(x)$

$$\frac{d^2 w(x)}{dx^2} = 0$$

z warunkami przegowymi

- w przypadku /1/

$$/2.1/ \quad w(0) = 0, \quad w(l) = w_0,$$

a w przypadku /2/

$$/2.2/ \quad w(0) = 0, \quad \sigma_{xz}(l) = P,$$

przy czym naprężenie  $\sigma_{xz} = \mu \partial w / \partial x$ .

Przebieg funkcji  $w(x)$  w obszarach ograniczonych płaszczyznami  $x = 0$ ,  $x = a$ ,  $x = a + d$ ,  $x = l$  jest prostoliniowy,  $w = A_1 x + B_1$ , a sześć współczynników  $A_1$ ,  $B_1$  wyznaczamy z warunków brzegowych /2.1/ lub /2.2/ oraz z czterech warunków ciągłości przemieszczenia i naprężenia na płaszczyznach ograniczających inkluzję. Otrzymujemy w ten sposób

- dla przypadku /1/:

$$/2.3/ \quad w_{\text{I}} = \frac{w_0 \xi}{1 + \delta(\varphi - 1)}, \quad w_{\text{II}} = \frac{w_0 [\varphi \xi - \alpha(\varphi - 1)]}{1 + \delta(\varphi - 1)},$$

$$w_{\text{III}} = \frac{w_0 [\xi + \delta(\varphi - 1)]}{1 + \delta(\varphi - 1)}, \quad \sigma_{\text{I}} = \sigma_{\text{II}} = \sigma_{\text{III}} = \frac{\mu w_0}{1 + \delta(\varphi - 1)};$$

- dla przypadku /2/

$$w_{\text{I}} = \frac{Pl}{\mu} \xi, \quad w_{\text{II}} = \frac{Pl}{\mu} [\varphi \xi - \alpha(\varphi - 1)],$$

/2.4/

$$w_{\text{III}} = \frac{Pl}{\mu} [\xi + \delta(\varphi - 1)], \quad \sigma_{\text{I}} = \sigma_{\text{II}} = \sigma_{\text{III}} = P.$$

Wprowadzono tu oznaczenia

$$\xi = x/l, \quad \alpha = a/l, \quad \delta = d/l, \\ \varphi = \mu/\mu_1, \quad \sigma = \sigma_{xz}.$$

a wekaźniki rzymskie I, II, III odnoszą się odpowiednio do obszarów  $0 \leq x \leq a$ ,  $a \leq x \leq a + d$ ,  $a + d \leq x \leq l$ .

Na rys. 3 i 4 pokazano przebieg zmienności przemieszczeń w obu przypadkach obciążenia /1/ i /2/. Linie kreskowane wskazują przemieszczenia, jakich doznałby ośrodek jednorodny poddany takim samym warunkom brzegowym. Zakreskowane części wykresów obrazują więc przemieszczenia będące bezpośrednim efektem istnienia inkluzji.

Łatwo zauważyć, że podobny efekt uzyskać można w warstwie jednorodnej  $0 < x < l$  obciążając ją odpowiednio dobranym układem sił  $T$  i  $-T$  rozłożonych równomiernie w płaszczyznach  $x = a$  i  $x = a + d$ ; siły te tworzą moment  $T \cdot d = M$ . Na rys. 5 i 6 pokazano wykresy przemieszczeń  $w(x)$  wywołane, w warstwie dwustronnie /rys. 5/ i jednostronnie /rys. 6/ unieruchomionej, układem sił  $T$  i  $-T$  /wykresy A/ i momentów  $M = T \cdot d$  działających w płaszczyźnie środkowej inkluzji,  $x = a + d/2$  /wykresy B/. Rozwiązanie B otrzymujemy z A stosując przejścia graniczne  $d \rightarrow 0$  i zachowując stałość iloczynu  $T \cdot d = M = \text{const}$ . Jeśli  $d \ll 1$ , wykresy A i B mało różnią się od siebie. Porównanie ich z zakreskowanymi obszarami na rys. 3 i 4 i wykorzystanie wzorów /2.3/, /2.4/ pozwala stwierdzić, że efekt niejednorodności jest formalnie równoważny /w obszarach poza inkluzją/ efektowi obciążenia warstwy jednorodnej momentami  $M$  rozłożonymi w płaszczyźnie  $x = a + d/2$ , przy czym

- w przypadku /1/

$$/2.5/ \quad M = -\mu w_0 \frac{\delta(\varphi - 1)}{1 + \delta(\varphi - 1)}$$

a w przypadku /2/

$$/2.6/ \quad M = -P \ell \delta(\varphi - 1)$$

Uwzględniając teraz fakt, że poddanie warstwy jednorodnej warunkom brzegowym /2.1/, /2.2/ prowadziłoby do naprężeń  $\sigma_{xz} = \mu w_0 / \ell$  w przypadku /1/ i  $\sigma_{xz} = P$  w przypadku /2/, określając te wielkości jako naprężenia pierwotne i oznaczając symbolem  $\sigma_{xz}^{pr}$  a, możemy przepisać wzory /2.5/ i /2.6/ w postaci

$$/2.7/ \quad M = -\sigma_{xz}^{pr}(a) d \frac{\varphi - 1}{1 + \delta(\varphi - 1)}$$

$$/2.8/ \quad M = - \sigma_{xz}^{pr}(a) d (\varphi - 1).$$

Przy malejącej grubości inkluzji,  $\delta \rightarrow 0$  i  $\delta(\varphi - 1) \ll 1$ , oba te wzory stają się identyczne i przedstawiają ujemny iloczyn trzech czynników: wartości naprężenia pierwotnego w miejscu położenia inkluzji /  $\sigma_{xz}^{pr}(a)$  /, jej rozmiaru / grubość  $d$  / oraz pewnej miary niejednorodności /  $\varphi - 1 = \mu / \mu_1 - 1$  /.

Należy tu ponadto podkreślić, że wyniki uzyskane za pomocą momentu zastępczego  $M$  /2.7/, /2.8/ są w obszarach I i III /poza inkluzję/ ściślej; ze względu na prostoliniowy przebieg funkcji  $w(x)$  rozwiązanie to można w łatwy wykreślny sposób rozszerzyć na obszar inkluzji.

Wzory /2.7/, /2.8/ można teraz wykorzystać do analizy ośrodka zawierającego większą liczbę inkluzji. Załóżmy, że ośrodek  $0 < x < l$  o module  $\mu$  zawiera  $n$  warstw o grubościach  $d_i$  i płaszczyzn środkowych  $x = a_i$ , wykonanych z materiałów o modułach  $\mu_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ . W wyniku przemieszczenia brzegu  $x = l$  o wielkości  $w_0$  względem brzegu  $x = 0$  /przypadek /1//, w warstwie jednorodnej powstałby jednorodny stan naprężenia  $\sigma_{xz} = \sigma_{xz}^0 = \mu w_0 / l$ .

Stan naprężenia w takiej warstwie obustronnie utwierdzonej i obciążonej w płaszczyznach  $x = a_i$  momentami  $M_i$  jest również jednorodny i  $\sigma_{xz}(x) = (M_1 + M_2 + \dots + M_n) / l$ . W tej sytuacji za naprężenie pierwotne  $\sigma_{xz}^{pr}(a_k)$  potrzebne do określenia intensywności momentu  $M_k$  zgodnie ze wzorem /2.7/ uznać należy wyrażenie

$$/2.9/ \quad \sigma_{xz}^{pr}(a_k) = \sigma_{xz}^0 + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^n M_i / l.$$

Oznaczając teraz występujący we wzorze /2.7/ współczynnik  $d(\varphi - 1) / [1 + \delta(\varphi - 1)]$  symbolem  $\Phi$ , a

$$\Phi_k = l \delta_k \frac{\varphi_k - 1}{1 + \delta_k (\varphi_k - 1)}, \quad \varphi_k = \frac{\mu}{\mu_k}, \quad \delta_k = \frac{d_k}{l}.$$



otrzymujemy prosty wzór na intensywność momentu zastępczego  $M_k$  dla inkluzji  $x = a_k \pm d_k/2$ ,

$$/2.10/ \quad M_k = - \left( \begin{matrix} \sigma \\ \tau \end{matrix} \right)_{xz} + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^n M_i / \ell \Phi_k .$$

Równania typu /2.10/ napisane dla wszystkich warstw  $a_k$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$ , stanowią układ  $n$  liniowych równań algebraicznych pozwalających wyznaczyć wszystkie niewiadome wielkości  $M_k$ .

Dla ilustracji tej metody rozważmy prosty przykład warstwy obustronnie utwierdzonej o grubości  $\ell$  zawierającej dwie inkluzje o grubościach  $d_1 = d_2 = \ell/10$  wykonane z materiałów o modułach  $\mu_1 = \mu/6$  i  $\mu_2 = \mu/3$ , ograniczone płaszczyznami  $x = 0.25\ell \pm 0.05\ell$  oraz  $x = 0.65\ell \pm 0.05\ell$ . Współczynniki  $\Phi_k$  wynoszą więc odpowiednio  $\Phi_1 = 1/3$ ,  $\Phi_2 = 1/6$ , a układ równań /2.10/ ma postać

$$M_1 = - \frac{1}{3} (\mu w_0 + M_2), \quad M_2 = - \frac{1}{6} (\mu w_0 + M_1)$$

i rozwiązanie  $M_1 = -(5/17) \mu w_0$ ,  $M_2 = -(2/17) \mu w_0$ . Na rys. 7 pokazano ostateczny wykres funkcji przemieszczeń  $w(x)$  dla warstwy niejednorodnej, stanowiący superpozycję funkcji liniowej  $w_0(x)$  dla warstwy jednorodnej oraz przemieszczeń  $w_1(x)$  i  $w_2(x)$  pochodzących od momentów  $M_1$  i  $M_2$ . Uzupełnienie tego wykresu /linia ciągła/ w obrębie inkluzji odcinkami prostoliniowymi /linie kreskowane/ prowadzi do ścisłego rozwiązania całego zadania.

Z analizy powyższej widzimy, że:

/1/ Momenty zastępcze  $M_i$  spełniają w omawianej metodzie tę samą rolę jak nadliczbowe reakcje i momenty podporowe znane z mechaniki ośrodków statycznie niewyznaczalnych;

/2/ Liczba niewiadomych występująca w tej metodzie jest równa liczbie inkluzji  $n$  i jest ponad dwukrotnie mniejsza od liczby niewiadomych występujących przy bezpośrednim całkowaniu równania różniczkowego  $d^2w(x)/dx^2 = 0$ ;

/3/ Ścisłość otrzymanych wyników /2.10/ jest rezultatem prostoliniowego przebiegu funkcji  $w(x)$  w poszczególnych obszarach jednowymiarowego zadania dla ośrodka z inkluzjami.

### 3. Statyczne zagadnienie dwuwymiarowe

Nieograniczony ośrodek sprężysty w antypłaskim stanie odkształcenia obciążony siłami masowymi równoległymi do osi  $z$  o intensywności  $p(x,y)$  /niezależnej od  $z$  /, opisany jest równaniem /por. np. [4]/

$$/3.1/ \quad \mu \nabla^2 w(x,y) = - p(x,y) ,$$

przy czym jedynie nieznikające składowe stanu odkształcenia i naprężenia oblicza się ze wzorów

$$\varepsilon_{xz} = \frac{1}{2} \frac{\partial w}{\partial x} , \quad \varepsilon_{yz} = \frac{1}{2} \frac{\partial w}{\partial y} ,$$

$$/3.2/ \quad \sigma_{xz} = \mu \frac{\partial w}{\partial x} , \quad \sigma_{yz} = \mu \frac{\partial w}{\partial y} .$$

W cylindrycznym układzie współrzędnych  $r$  ,  $\theta$  ,  $z$  mamy

$$/3.3/ \quad \sigma_{rz} = \sigma_{zr} = \mu \frac{\partial w}{\partial r} , \quad \sigma_{\theta z} = \sigma_{z\theta} = \mu \frac{\partial w}{r \partial \theta} .$$

W przypadku obciążenia ośrodka siłami rozłożonymi wzdłuż prostej  $x = y = 0$  , czyli gdy  $p(x,y) = P \delta(x) \delta(y)$  , przy czym  $\delta(x)$  ,  $\delta(y)$  oznaczają delty Diraca /obciążenie takie określamy czasem mianem siły skupionej/, otrzymujemy następujące rozwiązanie równania /3.1/:

$$/3.4/ \quad w(x,y) = \frac{P}{2\pi\mu} \log \frac{\text{const}}{r} ; \quad \sigma_{rz} = - \frac{P}{2\pi} \frac{1}{r} ,$$
$$\sigma_{xz} = - \frac{\cos \theta}{r} \frac{P}{2\pi} , \quad \sigma_{yz} = - \frac{\sin \theta}{r} \frac{P}{2\pi} .$$

Obciążenie "momentem skupionym"  $M^{10}$  otrzymujemy stosując obciążenie dwiema siłami  $P \delta(x+d) \delta(y)$  i  $-P \delta(x-d) \delta(y)$  oraz przejście graniczne  $d \rightarrow 0$  przy założeniu, że iloczyn  $P \cdot d = M^{10}$  ma wartość stałą. W podobny sposób otrzymujemy rozwiązanie odpowiadające momentowi skupionemu  $M^{01}$ ; posługujemy się wtedy dwiema siłami  $P \delta(x) \delta(y+d)$  i  $-P \delta(x) \delta(y-d)$ . Otrzymujemy w ten sposób rozwiązania [4]

$$w = - \frac{M^{10}}{2\pi\mu} \frac{\cos \theta}{r}, \quad \sigma_{rz} = \frac{M^{10}}{2\pi} \frac{\cos \theta}{r^2},$$

/3.5/

$$\sigma_{xz} = \frac{M^{10}}{2\pi} \frac{\cos 2\theta}{r^2}, \quad \sigma_{yz} = \frac{M^{10}}{2\pi} \frac{\sin 2\theta}{r^2},$$

oraz

$$w = - \frac{M^{01}}{2\pi\mu} \frac{\sin \theta}{r}, \quad \sigma_{rz} = \frac{M^{01}}{2\pi} \frac{\sin \theta}{r^2},$$

/3.6/

$$\sigma_{xz} = \frac{M^{01}}{2\pi} \frac{\sin 2\theta}{r^2}, \quad \sigma_{yz} = - \frac{M^{01}}{2\pi} \frac{\cos 2\theta}{r^2}.$$

Powtórzenie tej procedury, np. przez zastosowanie dwóch momentów  $M^{10} \delta(x+d) \delta(y)$  i  $-M^{10} \delta(x-d) \delta(y)$  /lub  $M^{10} \delta(x) \delta(y+d)$  i  $-M^{10} \delta(x) \delta(y-d)$ / i odpowiednie przejście graniczne prowadzi do obciążenia momentami wyższego /drugiego/ rzędu  $M^{20}$  /lub  $M^{11}$ /. Kolejne rozwiązania otrzymujemy formalnie z poprzednich przez proste różniczkowanie względem zmiennej  $x$  lub  $y$ . W pracy [4] podano również prosty wzór ogólny dla pola naprężeń odpowiadającego obciążeniu nieograniczonego ośrodka momentem  $M^{mn}$  rzędu  $m+n$ . Wprowadzając zespoloną funkcję naprężeń  $\Sigma = \sigma_{yz} + i \sigma_{xz}$  otrzymujemy mianowicie

$$\Sigma^{mn}(z) = \frac{1}{2\pi} (-1)^{m+n+1} i^{n+1} (m+n)! z^{-m-n-1};$$

Tutaj  $z$  oznacza zmienną zespoloną,  $z = x + iy$ .

Zgodnie z wynikami pracy [4], działanie inkluzji eliptycznej o półosiach  $a, b$  i module  $\mu_2$  w ośrodku nieograniczonym o module  $\mu_1$ , obciążonym w nieskończoności stałymi i równomiernie rozłożonymi obciążeniami  $q_0$  i  $p_0$ ,

$$\sigma_{xz}^{\infty} = q_0, \quad \sigma_{yz}^{\infty} = p_0$$

zastąpić można w przybliżeniu działaniem momentów

$$/3.8/ \quad M^{10} = -\frac{\pi}{2} q_0 K_b, \quad M^{01} = -\frac{\pi}{2} p_0 K_a,$$

w punkcie odpowiadającym środkowi inkluzji ośrodka jednorodnego. We wzorze /3.8/ wprowadzono oznaczenia

$$K_a = \frac{2ab(a+b)(\mu_1 - \mu_2)}{\mu_1 b + \mu_2 a}, \quad K_b = \frac{2ab(a+b)(\mu_1 - \mu_2)}{\mu_1 a + \mu_2 b}.$$

W szczególnym przypadku  $\mu_2 = 0$  oraz  $b/a \rightarrow 0$  otrzymujemy otwór w kształcie zdegenerowanej elipsy, czyli szczelinę poziomą o długości  $2a$ ; wtedy  $K_a = 2a^2$ ,  $K_b = 0$  i otrzymujemy jeden tylko moment zastępczy  $M^{01} \neq 0$ , a mianowicie  $M^{01} = -\pi p_0 a^2$ , podczas gdy  $M^{10} = 0$ .

Otrzymane w ten sposób rozwiązania przybliżone będą bliskie rozwiązaniom ścisłym w obszarze na zewnątrz inkluzji, w dostatecznie dużej odległości od jej brzegów.

W przypadku inkluzji kołowo-cylindrycznej o promieniu  $a$ , momenty zastępcze /3.8/ wyrażają się prostymi wzorami

$$/3.9/ \quad M^{10} = -2\pi a^2 q_0 \mathcal{H}, \quad M^{01} = -2\pi a^2 p_0 \mathcal{H},$$

gdzie współczynnik  $\mathcal{H}$  jest pewną miarą niejednorodności

$$\mathcal{H} = \frac{\mu_1 - \mu_2}{\mu_1 + \mu_2}, \quad -1 \leq \mathcal{H} \leq 1.$$

W przypadku otworu kołowego  $\mathcal{H} = 1$ , inkluzja doskonale sztywna odpowiada wartości  $\mathcal{H} = -1$ , zaś w ośrodku jednorodnym, w którym  $\mu_1 = \mu_2$ ,  $\mathcal{H} = 0$ .

Ponadto w przypadku inkluzji kołowo-cylindrycznej superpozycja naprężeń pierwotnych, a więc obliczonych dla nieograniczonego ośrodka bez inkluzji,

$$\sigma_{xz}^{pr} = q_0 \quad , \quad \sigma_{yz}^{pr} = p_0$$

oraz naprężeń pochodzących od momentów zastępczych  $M^{10}$ ,  $M^{01}$  /3.9/ prowadzi do rozwiązania, które jest ściśle wszędzie na zewnątrz inkluzji oraz na jej powierzchni,

$$\sigma_{rz} = q_0 \left(1 - \frac{\partial \ell}{\rho^2}\right) \cos \theta + p_0 \left(1 - \frac{\partial \ell}{\rho^2}\right) \sin \theta \quad .$$

Tutaj  $\rho = r/a$ . Wewnątrz inkluzji naprężenia obliczamy z innego wzoru,

$$\sigma_{rz} = \frac{2\mu_2}{\mu_1 + \mu_2} \left( q_0 \cos \theta + p_0 \sin \theta \right) \quad .$$

Jeśli naprężenia pierwotne w rejonie inkluzji nie są stałe, w miejsce wielkości  $q_0$  i  $p_0$  do wzoru /3.9/ należy wstawić średnie wartości naprężeń  $\sigma_{xz}^{pr}$  i  $\sigma_{yz}^{pr}$  obliczone dla obszaru zajętego przez inkluzję, a więc np. ich wartości w środku inkluzji /lub otworu/. Superpozycja naprężeń pierwotnych oraz naprężeń wywołanych przez momenty /3.9/ prowadzić będzie wtedy jednak do rozwiązania przybliżonego. Będzie ono tym bliższe rozwiązaniu ścisłemu, im mniejszy jest gradient naprężeń pierwotnych w rejonie odpowiadającym inkluzji oraz im większa jest odległość rozważanego punktu od jej brzegu.

Dokładność rozwiązania przybliżonego można podwyższyć wprowadzając dodatkowe momenty zastępcze wyższego rzędu, np.  $M^{11}$  i  $M^{12}$ . Problem ten, podobnie jak zagadnienie dokładności rozwiązań omówiono szerzej w pracy [4]. Tutaj, jak już wspomiano na wstępie, ograniczymy się do stosowania pierwszego przybliżenia i momentów pierwszego rzędu /3.9/; wzór ten napisać można również w ogólniejszej postaci

$$\text{/3.10/} \quad M^{10} = -2\pi a^2 \partial \ell \sigma_{xz}^{pr}(A) \quad , \quad M^{01} = -2\pi a^2 \partial \ell \sigma_{yz}^{pr}(A) \quad .$$

Symbol  $\sigma^{pr}(A)$  oznacza tu wielkość odpowiedniego naprężenia w środku obszaru zajętego przez inkluzję /otwór/  $A$ .

Podobnie jak w przypadku jednowymiarowym /por. wzory /2.7/ i /2.8/ /, momenty zastępcze /3.10/ wyrażają się /ujemnym/iłoczynem rozmiaru inkluzji /tutaj  $2\mathcal{J} a^2$ /, miary niejednorodności / $\mathcal{L}$ / oraz wartości odpowiedniego naprężenia pierwotnego w obszarze zajętych przez rozważaną inkluzję.

Wzory /3.10/ wykorzystać można następnie do budowania układów równań pozwalających wyznaczyć wartości momentów zastępczych w przypadku większej liczby oddziaływujących między sobą inkluzji i otworów. I tak np. jeśli mamy do czynienia z dwiema inkluzjami kołowo -cylindrycznymi o promieniach  $a_1$ ,  $a_2$ , modułach  $\mu_1$ ,  $\mu_2$  i środkach umieszczonych w punktach  $(0,0)$  i  $(h,0)$  ośrodka nieskończonego poddanego obciążeniom  $q_0 = \sigma_{xz}^{\infty}$  i  $p_0 = \sigma_{yz}^{\infty}$  /rys. 9/, określamy najpierw wartości naprężeń pierwotnych  $\sigma_{xz}^{pr}(0,0)$  i  $\sigma_{yz}^{pr}(0,0)$  w środku pierwszej inkluzji. Posługując się wzorami /3.5/ i kładąc w nich  $\theta = \mathcal{J}$  oraz  $r = h$ , otrzymujemy

$$\sigma_{xz}^{pr}(0,0) = q_0 + \frac{M_2^{10}}{2\mathcal{J}} \frac{1}{h^2} \quad ,$$

$$\sigma_{yz}^{pr}(0,0) = p_0 - \frac{M_2^{01}}{2\mathcal{J}} \frac{1}{h^2} \quad ;$$

pierwsze dwa równania /3.10/ poszukiwanego układu równań mają więc postać

$$M_1^{10} = - 2\mathcal{J} a_1^2 \mathcal{L}_1 \left( q_0 + \frac{M_2^{10}}{2\mathcal{J} h^2} \right) \quad ,$$

/3.11/

$$M_1^{01} = - 2\mathcal{J} a_1^2 \mathcal{L}_1 \left( p_0 - \frac{M_2^{01}}{2\mathcal{J} h^2} \right) \quad .$$

Pozostałe dwa równania otrzymujemy warażając momenty zastępcze  $M_2^{10}$ ,  $M_2^{01}$  za pomocą obciążeń zewnętrznych  $q_0$  i  $p_0$  oraz

momentów  $M_1^{10}$ ,  $M_1^{01}$  zastępujących pierwszą inkluzję,

$$M_2^{10} = -2\pi a_2^2 \alpha_2 \left( q_0 + \frac{M_1^{10}}{2\pi h^2} \right),$$

/3.12/

$$M_2^{01} = -2\pi a_2^2 \alpha_2 \left( p_0 - \frac{M_1^{01}}{2\pi h^2} \right).$$

Rozwiązaniem układu równań /3.11/, /3.12/ jest następujący układ momentów zastępczych:

$$M_1^{10} = -2\pi a_1^2 \alpha_1 q_0 \frac{1 - \alpha_2^2 \alpha_2}{1 - \alpha_1^2 \alpha_2^2 \alpha_1 \alpha_2},$$

$$M_1^{01} = -2\pi a_1^2 \alpha_1 p_0 \frac{1 + \alpha_2^2 \alpha_2}{1 - \alpha_1^2 \alpha_2^2 \alpha_1 \alpha_2},$$

/3.13/

$$M_2^{10} = -2\pi a_2^2 \alpha_2 q_0 \frac{1 - \alpha_1^2 \alpha_1}{1 - \alpha_1^2 \alpha_2^2 \alpha_1 \alpha_2},$$

$$M_2^{01} = -2\pi a_2^2 \alpha_2 p_0 \frac{1 + \alpha_1^2 \alpha_1}{1 - \alpha_1^2 \alpha_2^2 \alpha_1 \alpha_2}.$$

Tutaj wprowadzono oznaczenia  $\alpha_1 = a_1/h_1$ ,  $\alpha_2 = a_2/h_2$ .  
Jeśli rozmiary i własności fizyczne obu inkluzji są identyczne,  
 $a_1 = a_2 = a$  i  $\mu_1 = \mu_2$ , wartości obu momentów zastępczych  
będą również takie same,

$$M_1^{10} = M_2^{10} = -\frac{2\pi a^2 \alpha}{1 + \alpha^2 \alpha} q_0,$$

/3.14/

$$M_1^{01} = M_2^{01} = -\frac{2\pi a^2 \alpha}{1 - \alpha^2 \alpha} p_0.$$

Założmy teraz we wzorach /3.13/, że  $\alpha_1 \ll 1$ ,  $\alpha_2 \ll 1$ .  
 W przybliżonych założeniach typu  $M_1^{10} \approx -2\pi a_1^2 \alpha_1 q_0 (1 - \alpha_2^2 \alpha_2^2)$   
 człon  $-2\pi a_1^2 \alpha_1 q_0$  uznać można za efekt oddziaływania inkluzji  
 z zewnętrznym polem naprężeń, podczas gdy człon  $2\pi a_1^2 a_2^2 \alpha_1 \alpha_2 q_0 / h^2$   
 odpowiada wzajemnemu oddziaływaniu inkluzji między sobą.

Superpozycja naprężeń pochodzących od obciążeń zewnętrznych  
 $q_0$  i  $p_0$  oraz naprężeń /3.5/, /3.6/ wywołanych momentami /3.11/  
 prowadzi do wyników, których dokładność wzrasta szybko ze wzros-  
 tem odległości od granicy inkluzji. W najbliższym otoczeniu in-  
 kluzji, otworu lub szczeliny posługiwać się można innymi wzorami,  
 takimi jak np. tzw. rozwinięcia przywierzchołkowe/"near-tip expan-  
 sions"/ znane z teorii szczelin. We wnętrzu inkluzji wzory /3.5/,  
 /3.6/ tracą ważność, prowadzą bowiem do osobliwości pól przemiesz-  
 czenia i naprężenia w punktach przyłożenia momentów. W części 5  
 okaże się, że w zagadnieniach związanych z propagacją fal spręży-  
 stych w ośrodku z inkluzjami stosowany tu model inkluzji prowa-  
 dzić może do rozprzestrzeniania się osobliwości pola naprężenia  
 na cały obszar ośrodka, także poza inkluzjami.

#### 4. Dynamiczne zagadnienia jednowymiarowe

Równanie ruchu ośrodka sprężystego poddanego antypłaskiemu  
 stanowi odkształcenia pod działaniem sił masowych  $p = p(x, y, t)$   
 ma postać

$$/4.1/ \quad \nabla^2 w - \frac{1}{c_1^2} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = - \frac{p}{\mu_1}$$

przy czym  $c_1 = \sqrt{\mu_1 / \rho_1}$  jest prędkością propagacji poprzecznych  
 fal sprężystych w ośrodku, a  $\rho_1$  - jego gęstością. W przypadku  
 jednowymiarowym  $w = w(x, t)$  i przy braku sił masowych, równanie

$$/4.2/ \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{1}{c_1^2} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0$$

po zastosowaniu transformacji Laplace'a

$$\bar{w}(x, p) = \mathcal{L} \{ w(x, t) \} = \int_0^{\infty} w(x, t) e^{-pt} dt$$



przybiera postać równania zwyczajnego

$$\frac{d^2 w}{dx^2} - \left(\frac{p}{c_1}\right)^2 w = 0$$

z rozwiązaniem

$$/4.3/ \quad \bar{w}(x, p) = A(p) e^{-px/c_1} + B(p) e^{px/c_1}$$

Dobór współczynników  $A(p)$   $B(p)$  zależy od warunków brzegowych i początkowych zadania. Jeśli rozważymy np. półprzestrzeń jednorodną  $x > 0$  o jednorodnych warunkach początkowych  $w(x, 0) = 0$ , o znanym przemieszczeniu na powierzchni  $x = 0$ ,  $w(0, t) = w_0(t) \eta(t)$  oraz o znikającym przemieszczeniu w nieskończoności,  $w(\infty, t) = 0$ , to z /4.3/ otrzymamy

$$/4.4/ \quad \bar{w}(x, p) = \bar{w}_0(p) e^{-pc/c_1}$$

Jeśli  $w_0(t) = w_0 = \text{const}$ ,  $\bar{w}_0(p) = w_0/p$ , rozwiązanie w postaci transformaty /4.4/ można odwrócić otrzymując

$$/4.5/ \quad w(x, t) = w_0 \eta(t - x/c_1) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x/c_1 > t \\ w_0 & \text{dla } x/c_1 < t \end{cases}$$

Tutaj symbol  $\eta(t - x/c_1)$  oznacza funkcję Heaviside'a.

Jeśli półprzestrzeń  $x > 0$  zawiera "inkluzję", czyli warstwę sprężystą  $a < x < a+d$  o module  $\mu_2$ , to przy niezmiennych warunkach brzegowych i początkowych transformaty rozwiązania  $\bar{w}(x, p)$  mają następującą postać w kolejnych przedziałach  $0 \leq x \leq a$ ,  $a \leq x \leq b = a+d$ ,  $b \leq x < \infty$  oznaczonych odpowiednio wskaźnikami rzymskimi I, II, III :

$$/4.6/ \quad \begin{aligned} \bar{w}_I(x, p) &= \bar{w}_0(p) \frac{R_1 e^{q_1(a-x)} + R_2 e^{-q_1(a-x)}}{\mathcal{M}} \\ \bar{w}_{II}(x, p) &= \bar{w}_0(p) \frac{2L_1 [(L_1 + L_2) e^{q_2(b-x)} - (L_1 - L_2) e^{-q_2(b-x)}]}{\mathcal{M}} \\ \bar{w}_{III}(x, p) &= \bar{w}_0(p) \frac{4 L_1 L_2 e^{q_1(b-x)}}{\mathcal{M}} \end{aligned}$$

Wprowadzono tu oznaczenia

$$R_1 = R_1(p) = (L_1 + L_2)^2 e^{q_2 d} - (L_1 - L_2)^2 e^{-q_2 d} ,$$

$$R_2 = R_2(p) = (L_1^2 - L_2^2) (e^{q_2 d} - e^{-q_2 d}) .$$

$$\mathcal{M} = R_1 e^{q_1 a} + R_2 e^{-q_1 a} ,$$

$$L_1 = \mu_1 / c_1 , \quad L_2 = \mu_2 / c_2 , \quad q_1 = p / c_1 , \quad q_2 = p / c_2 ,$$

$c_1$  i  $c_2$  są prędkościami propagacji sprężystych fal poprzecznych w ośrodkach o gęstościach  $\rho_1$ ,  $\rho_2$  i modułach odkształcenia postaciowego  $\mu_1$ ,  $\mu_2$ .

Poza warunkami brzegowymi  $\bar{w}(0, p) = \bar{w}_0(p)$ ,  $\bar{w}(\infty, p) = 0$ , rozwiązania /4.6/ spełniają wymagane warunki ciągłości przemieszczenia  $\bar{w}(x, p)$  i naprężenia  $\bar{\sigma}_{xz}(x, p) = \bar{\sigma}(x, p)$  na powierzchniach rozdziału  $x = a$  i  $x = b$ .

Otrzymanie jawnych postaci transformat odwrotnych do /4.6/ w ogólnym przypadku dowolnej niejednorodności i dowolnej funkcji  $w(0, t) = w_0(t)$  nie jest możliwe. Można natomiast dla oceny wpływu niejednorodności na przebieg przemieszczeń porównać ze sobą przebiegi transformat /4.6/ i /4.4/, traktując je jako funkcje zmiennej  $x$ ; na rys. 10 naszkicowano wykresy tych rozwiązań przy założeniu pewnej /rzeczywistej/ wartości parametru  $p$ . W szczególności porównanie obu rozwiązań pozwala określić wartość skoku transformaty przemieszczenia  $\bar{w}$  na grubości inkluzji  $d$  /oznaczonego symbolem  $[\Delta \bar{w}]_d$ / oraz skoku transformaty naprężenia na tym samym odcinku /oznaczonego symbolem  $[\Delta \bar{\sigma}]_d$ / ,

$$\begin{aligned} [\Delta \bar{w}]_d &= \bar{w}_{III}(b) - \bar{w}_I(b) = \\ &= \bar{w}_0(p) \frac{4 L_1 L_2 - R_1 e^{-q_1 d} - R_2 e^{q_1 d}}{\mathcal{M}} , \end{aligned}$$

/4.7/

$$\begin{aligned} [\Delta \bar{\sigma}]_d &= \bar{\sigma}_{III}(b) - \bar{\sigma}_I(b) = \\ &= -\bar{w}_0(p) \mu_1 q_1 \frac{4 L_1 L_2 - R_1 e^{-q_1 d} + R_2 e^{q_1 d}}{\mathcal{M}} . \end{aligned}$$

Wyrażenia powyższe można znacznie uprościć korzystając z założeń, że  $d \ll a$ ,  $|q_1 d| \ll 1$ , a więc  $e^{-q_1 d} \approx 1 - q_1 d$  oraz, że  $|e^{-w_1 a}| \ll 1$ . W tych warunkach równania /4.7/ przybierają postać przybliżoną

$$\begin{aligned} /4.8/ \quad [\Delta \bar{w}]_d &\approx -\bar{w}_0(p) q_1 e^{-q_1 a} d (\mu_1 / \mu_2 - 1) , \\ [\Delta \bar{\sigma}]_d &\approx \bar{w}_0(p) q_1^2 e^{-q_1 a} d (1 - \rho_2 / \rho_1) . \end{aligned}$$

Przez analogię z przypadkiem statycznym /por. rys. 7, 8/ możemy przypuścić, że podobne efekty nieciągłości rozwiązań osiągnąć można również obciążając ośrodek jednorodny w chwili  $t = t_a$  /gdy czoło fali sprężystej osiąga płaszczyznę inkluzji/ momentami  $M_a(t)$  lub siłami  $P_a(t)$  rozłożonymi w płaszczyźnie inkluzji.

Łatwo uzyskać transformaty rozwiązań tych zadań. Przyłożenie obciążeń w chwili  $t = 0$  i w płaszczyźnie  $x = 0$  nieograniczonego ośrodka sprężystego prowadzi do rozwiązań: w przypadku obciążenia siłami  $p_0(t)\eta(t)$

$$\bar{w}_I = \frac{P_0(p)}{2\mu_1 q_1} e^{q_1 x} , \quad \bar{\sigma}_I = \frac{1}{2} P_0(p) e^{q_1 x} , \quad x < 0 ,$$

/4.9/

$$\bar{w}_{II} = \frac{P_0(p)}{2\mu_1 q_1} e^{-q_1 x} , \quad \bar{\sigma}_{II} = -\frac{1}{2} P_0(p) e^{-q_1 x} , \quad x > 0 ,$$

a przy obciążeniu momentami  $M_0(t)\eta(t)$

$$\bar{w}_I = \frac{M_0(p)}{2\mu_1} e^{q_1 x} , \quad \bar{\sigma}_I = \frac{1}{2} M_0(p) q_1 e^{q_1 x} , \quad x < 0 ,$$

/4.10/

$$\bar{w}_{II} = -\frac{M_0(p)}{2\mu_1} e^{-q_1 x} , \quad \bar{\sigma}_{II} = \frac{1}{2} M_0(p) q_1 e^{-q_1 x} , \quad x > 0 .$$

Przebieg tych rozwiązań naszkicowano na rys. 11 i 12.

Z rozwiązań /4.9/, /4.10/ i wykresów na rys. 11 i 12 widać, że obciążenie siłami  $P_0(t)$  prowadzi do skoku transformaty naprężenia w punkcie  $x = 0$

$$/4.11/ \quad [\Delta \bar{\sigma}]_0 = - \bar{P}_0(p) ,$$

a obciążenie momentami  $M_0(t)$  - do skoku transformaty przemieszczenia

$$/4.12/ \quad [\Delta \bar{w}]_0 = - \frac{\bar{M}_0(p)}{\mu_1} .$$

Porównując teraz skoki przemieszczenia /4.8/ i /4.12/ dojdziemy do wniosku, że efekt inkluzji o grubości  $d$  i stałych materiałowych  $\mu_2$ ,  $c_2$  zastąpić można z pewnym przybliżeniem efektem obciążenia ośrodka jednorodnego układem momentów  $M_a(t)$  rozłożonych na płaszczyźnie  $x = a$ , przy czym

$$/4.13/ \quad \bar{M}_a(p) \approx \bar{w}_0(p) \mu_1 q_1 e^{-q_1 a} d (\varphi - 1) .$$

Uwzględniając postać rozwiązania /4.4/, które traktować należy jako rozwiązanie pierwotne,

$$\bar{w}^{pr}(x, p) = \bar{w}_0(p) e^{-q_1 x} ,$$

$$\bar{\sigma}^{pr}(x, p) = -\mu_1 q_1 \bar{w}_0(p) e^{-q_1 x} ,$$

transformatę momentu zastępczego /4.13/ przedstawić można w postaci

$$/4.14/ \quad \bar{M}_a(p) \approx - [\bar{\sigma}^{pr}(a)] \cdot d \cdot (\varphi - 1) ,$$

w pełni analogicznej do postaci wzorów /2.8/ lub /3.10/, choć odnoszącej się do transformat Laplace'a rozwiązań.

W jednowymiarowym zagadnieniu dynamicznym okazuje się ponadto, że dla uzyskania efektu inkluzji konieczne jest jeszcze zastosowanie obciążenia siłami  $P_0(t)$  o intensywności odpowiadającej wyrażeniu /4.8/2, czyli

$$/4.15/ \quad \bar{P}_0(p) \approx \bar{w}_0(p) q_1^2 e^{-q_1 a} \mu_1 d (1 - \xi_2/\xi_1) = \\ = \left[ \frac{\partial \bar{G}^{Pr}}{\partial x} \right]_{x=a} \cdot d \cdot (1 - \xi_2/\xi_1) .$$

Wzory /4.14/, /4.15/ są oczywiście przybliżone i dotyczą zarazem transformat Laplace'a poszukiwanych obciążeń zastępczych, co utrudnia ocenę dokładności rozwiązań. Aby uzyskać możliwość dokonania takiej oceny, należałoby porównać ściśle rozwiązanie jakiegoś zagadnienia początkowo-brzegowego /a więc transformatę odwrotną rozwiązań /4.6/ / z rozwiązaniem przybliżonym, stanowiącym superpozycję rozwiązań /4.4/, /4.9/ i /4.10/ z odpowiednio dobranymi funkcjami  $M_a(t)$  i  $P_a(t)$ . Jawną postać rozwiązania  $w = w(x, t)$  otrzymać można ze wzorów /4.6/ w szczególnym przypadku  $L_1 = L_2$ , czyli  $\mu_1/\mu_2 = c_1/c_2$ . Przyjmując zatem  $R_2 = 0$  otrzymujemy

$$\bar{w}_I(x, p) = \bar{w}_0(p) e^{-px/c_1} ,$$

$$/4.16/ \quad \bar{w}_{II}(x, p) = \bar{w}_0(p) e^{-p[x/c_2 - a(1/c_2 - 1/c_1)]} ,$$

$$\bar{w}_{III}(x, p) = \bar{w}_0(p) e^{-p[x/c_1 + d(1/c_2 - 1/c_1)]} ,$$

a przy założeniu, że ponadto  $w_0(t) = w_0 \eta(t)$ ,  $\bar{w}_0(p) = \frac{w_0}{p}$ ,

$$w_I(x, t) = w_0 \eta(t - x/c_1) ,$$

$$/4.17/ \quad w_{II}(x, t) = w_0 \eta[t - a/c_1 - (x - a)/c_2] ,$$

$$w_{III}(x, t) = w_0 \eta[(t - d/c_2) - (x - a)/c_1] .$$

Rozwiązanie to przedstawia sobą propagację stałej wartości przemieszczenia  $w_0$  z prędkością  $c_1$  na odcinku  $(0, a)$ , z prędkością  $c_2$  w obszarze inkluzji  $(a, a+d)$  i, ponownie z prędkością  $c_1$ , dla  $x > a+d$ .

Na rys. 13a przedstawiono zasięg fali  $w = w(x, t)$  zgodny ze wzorem /4.17/3, a więc po przekroczeniu przez czoło fali strefy inkluzji. Wykres funkcji  $w = w_0 \eta(t - x/c_1)$  odpowiadający propagacji zaburzenia w półprzestrzeni jednorodnej przedstawia rys. 13b; różnica obu wykresów to funkcja stała o wartości  $-w_0$  na odcinku o długości  $d(c_1/c_2 - 1)$  przesuwanym się z prędkością  $c_1$ . Jeśli  $d \ll a$ , to za efekt inkluzji /określony różnicą wykresów pokazanych na rys. 13a i 13b/ uznać można w przybliżeniu falę typu delty Diraca o intensywności  $-w_0 d(\varphi - 1)$ , wyemitowaną w chwili  $t_a = a/c_1$  na płaszczyźnie  $x = a$  w dodatnim kierunku osi  $x$  z prędkością  $c_1$ , a więc dla  $t < t_a$   $w = 0$ , a dla  $t > t_a$

$$/4.18/ \quad w(x, t) = -w_0 d(\varphi - 1) \delta[(t - t_a) - (x - a)/c_1] \quad ,$$

Rozważmy teraz rozwiązanie przybliżone; wielkości zastępczych sił i momentów, które należy przyłożyć w płaszczyźnie  $x = a$  wynoszą /por. /4.14/, /4.15/ przy  $L_1 = L_2$ ,  $\bar{w}_0 = \frac{w_0}{p}$  /

$$/4.19/ \quad \bar{M}_a = \mu_1 w_0 d(\varphi - 1) \frac{1}{c_1} e^{-pa/c_1} \quad ,$$

$$/4.20/ \quad \bar{P}_a = -\mu_1 w_0 d(\varphi - 1) \frac{p}{c_1} e^{-pa/c_1} \quad .$$

Transformaty przemieszczeń wywołanych momentem /4.19/ /oznaczone  $\bar{w}_I^M$ / i siłą /4.20/ /oznaczone  $\bar{w}_I^P$ / wyrażają się, zgodnie ze wzorami /4.9/, /4.10/, funkcjami

$$\bar{w}_I^M(x, p) = \frac{1}{2} w_0 d(\varphi - 1) \frac{1}{c_1} e^{-pa/c_1} + p(x - a)/c_1 \quad ,$$

$$/4.21/ \quad \bar{w}_{II}^M(x, p) = -\frac{1}{2} w_0 d(\varphi - 1) \frac{1}{c_1} e^{-pa/c_1} - p(x - a)/c_1 \quad ,$$

oraz

$$\bar{w}_I^P(x, p) = -\frac{1}{2} w_0 d(\varphi - 1) \frac{1}{c_1} e^{-pa/c_1} + p(x - a)/c_1 \quad ,$$

$$/4.22/ \quad \bar{w}_{II}^P(x, p) = -\frac{11}{2} w_0 d(\varphi - 1) \frac{1}{c_1} e^{-pa/c_1} - p(x - a)/c_1 \quad .$$

Transformaty te można odwrócić

$$/4.23/ \quad w_{II}^M(x, t) = \frac{1}{2} w_0 d(\varphi - 1) \delta(2a - x - c_1 t),$$

$$w_{II}^M(x, t) = -\frac{1}{2} w_0 d(\varphi - 1) \delta(x - c_1 t),$$

$$/4.24 \quad w_{II}^P(x, t) = -\frac{1}{2} w_0 d(\varphi - 1) \delta(2a - x - c_1 t),$$

$$w_{II}^P(x, t) = \frac{1}{2} w_0 d(\varphi - 1) \delta(x - c_1 t).$$

Superpozycja /4.23/ i /4.24/ prowadzi więc, dla  $x < a$ , do  $w_{II}^M + w_{II}^P = 0$ , a dla  $x > a$  do rozwiązania

$$w_{II}^M + w_{II}^P = -w_0 d(\varphi - 1) \delta(x - c_1 t).$$

Jak widać, wzór ten jest w pełni zgodny ze wzorem przybliżonym /4.18/.

## 5. Dynamiczne zagadnienia dwuwymiarowe

Rozważmy przypadek nieograniczonej przestrzeni sprężystej, która w chwili  $t = 0$  zostaje obciążona siłami rozłożonymi jednostajnie wzdłuż osi  $z$  z intensywnością  $P(t)$ . Rozwiązaniem równania falowego /4.1/ napisanego w postaci przetransformowanej

$$/5.1/ \quad \nabla^2 \bar{w}(x, y, p) - \frac{p^2}{c_1^2} \bar{w}(x, y, p) = -\frac{\bar{P}(p)}{\mu_1} \delta(x) \delta(y)$$

jest funkcja  $\bar{w}(r, p)$ ,  $r^2 = x^2 + y^2$ ,

$$/5.2/ \quad \bar{w}(r, p) = \frac{\bar{P}(p)}{2\pi\mu_1} K_0(pr/c_1),$$

zaś odpowiednie naprężenie  $\bar{\sigma}_{rz}(r, p)$  wyraża się wzorem

$$/5.3/ \quad \bar{\delta}_{rz}(r, p) = - \frac{p \bar{P}(p)}{2 \mathcal{J}_1 c_1} K_1(pr/c_1) .$$

W powyższych wzorach  $K_0$  i  $K_1$  oznaczają zmodyfikowane funkcje Bessela drugiego rodzaju, rzędu zerowego i pierwszego. Przez analogię z przypadkiem statycznym omówionym w części 3 przytoczymy tu również rozwiązanie odpowiadające obciążeniu nieograniczonego ośrodka momentami  $M^{10}(t)\eta(t)$  oraz  $M^{01}(t)\eta(t)$  rozłożonymi równomiernie wzdłuż osi  $z$ ,

$$/5.4/ \quad \bar{w} = - \frac{(\bar{M}^{10} \cos \theta + \bar{M}^{01} \sin \theta) p}{2 \mathcal{J}_1 \mu_1 c_1} K_1(pr/c_1) ,$$

$$/5.5/ \quad \bar{\delta}_{rz} = \frac{(\bar{M}^{10} \cos \theta + \bar{M}^{01} \sin \theta) p}{2 \mathcal{J}_1 c_1} \left[ \frac{1}{r} K_1\left(\frac{pr}{c_1}\right) + \frac{p}{c_1} K_0\left(\frac{pr}{c_1}\right) \right] .$$

Transformaty /5.2/ - /5.5/ można odwrócić w pewnych szczególnych przypadkach funkcji obciążeń  $P(t)$ ,  $M^{10}(t)$ ,  $M^{01}(t)$ ; jeśli są to np. obciążenia stałe, a więc jeśli

$$P(t) = P_0 \eta(t) , \quad M^{10}(t) = M_0^{10} \eta(t) , \quad M^{01}(t) = M_0^{01} \eta(t) ,$$

to transformacja odwrotna wyrażen /5.2/ - /5.5/ prowadzi do następujących, jawnych postaci funkcji przemieszczeń i naprężeń:

Przy obciążeniu siłami  $P_0$ , dla  $\tilde{\xi} = r/c_1 t < 1$ :

$$w(r, t) = \frac{P_0}{2 \mathcal{J}_1 \mu_1} \log \left( \frac{1}{\tilde{\xi}} + \sqrt{\frac{1}{\tilde{\xi}^2} - 1} \right) ,$$

/5.6/

$$\delta_{rz}(r, t) = - \frac{P_0}{2 \mathcal{J}_1} \frac{1}{r} \frac{1}{\sqrt{1 - \tilde{\xi}^2}} .$$



Przy obciążeniu momentami  $M_0$  i  $M_0$ , dla  $\tilde{\xi} = r/c_1 t < 1$

$$w(r, t) = - \frac{M_0^{10} \cos \theta + M_0^{01} \sin \theta}{2 \pi \mu_1} \frac{1}{r} \frac{1}{\sqrt{1 - \tilde{\xi}^2}}$$

/5.7/

$$\sigma_{rz}(r, t) = \frac{M_0^{10} \cos \theta + M_0^{01} \sin \theta}{2 \pi} \frac{1}{r^2} \left( \frac{1}{\sqrt{1 - \tilde{\xi}^2}} - \frac{\tilde{\xi}^2}{\sqrt{1 - \tilde{\xi}^2}^3} \right).$$

Dla  $r/c_1 t > 1$  przemieszczenia i naprężenia /5.6/, /5.7/ są tożsamościowo równe zeru, gdyż zaburzenia wprowadzone w chwili  $t = 0$  do ośrodka rozprzestrzeniają się z prędkością  $c_1$ . Rozwiązania powyższe charakteryzują się osobliwościami dwójakiego rodzaju: w punkcie /a właściwie na osi/ przyłożenia obciążenia  $r = 0$  oraz na czole fali  $r = c_1 t$ , czyli  $\tilde{\xi} = 1$ ; pierwsza z wymienionych osobliwość pojawiła się również w zagadnieniach statycznych /por. równania /3.5/, /3.6//. Łatwo stwierdzić, że przy ustalonej wartości  $r$  oraz przy  $t \rightarrow \infty$ , czyli przy  $\tilde{\xi} \rightarrow 0$ , wzory /5.7/ przekształcają się w /3.5/, /3.6/, otrzymujemy bowiem

$$w(r, \infty) = - \frac{M_0^{10} \cos \theta + M_0^{01} \sin \theta}{2 \pi \mu_1} \frac{1}{r}$$

/5.8/

$$\sigma_{rz}(r, \infty) = \frac{M_0^{10} \cos \theta + M_0^{01} \sin \theta}{2 \pi} \frac{1}{r^2}$$

Zasięg tych osobliwość ograniczony jest jednak tylko do wnętrza inkluzji  $r < a$  i nie zmniejsza w istotny sposób dokładności rozwiązań przybliżonych poza inkluzjami. Osobliwości występujące na czole fali rozprzestrzeniają się jednak w całym ośrodku i mogą w istotny sposób zaburzyć prawidłowy obraz pola naprężeń w ośrodku z inkluzjami.

Dla ilustracji tego problemu rozpatrzmy przykład nieskończonego ośrodka sprężystego z otworem cylindrycznym  $r = a$ ,

którego pobocznica zostaje w chwili  $t = 0$  obciążona nagle równomiernie rozłożonymi siłami stycznymi  $\sigma_0$ ; tak więc warunki brzegowe zadania mają postać

$$\sigma_{rz}(a, t) = -\sigma_0 \eta(t), \quad \sigma_{rz}(\infty, t) = 0.$$

Rozwiązanie tego zadania w postaci transformat Laplace'a

$$\bar{w}(r, p) = \frac{\sigma_0 c_1}{\mu_1} \frac{1}{p^2} \frac{r_0(pr/c_1)}{K_1(pa/c_1)},$$

/5.9/

$$\sigma_{rz}(r, p) = -\sigma_0 \frac{1}{p} \frac{K_1(pr/c_1)}{K_1(pa/c_1)}$$

porównać można z rozwiązaniami /5.2/, /5.3/, w których podstawiono  $\bar{P} = 2J_1$  a  $\sigma_0/p$ ,

$$\bar{w}(r, p) = \sigma_0 \frac{a}{\mu_1} \frac{1}{p} K_0(pr/c_1),$$

/5.10/

$$\sigma_{rz}(r, p) = -\sigma_0 \frac{a}{c_1} K_1(pr/c_1).$$

Przy małych wartościach bezwzględnych argumentu  $pa/c_1$  funkcji Bessela  $K_1$  można wykorzystać we wzorze /5.9/ znaną zależność przybliżoną,

$$K_1(z) \approx \frac{1}{z}$$

i przekształcić wzory /5.9/ do postaci przybliżonej, pokrywającej się jednak dokładnie z /5.10/. Oba naprężenia  $\sigma_{rz}(r, t)$  obliczone ze wzorów /5.9/<sub>2</sub> i /5.10/<sub>2</sub> wykazują ten sam rząd osobliwości przy  $r \rightarrow 0$  i  $t \rightarrow \infty$ ,

$$\sigma_{rz} \sim -\sigma_0 \frac{a}{r}.$$

Rozwiązanie /5.10/<sub>2</sub> wykazuje jednak ponadto osobliwość na czole fali /czyli na pobocznicy walca o promieniu  $r = c_1 t$  /; nie ma zaś podstaw, by spodziewać się takiej osobliwości w naprężeniach /5.9/<sub>2</sub>, spowodowanych przyłożeniem sił stycznych o skończonej intensywności do granicy otworu.

Wydaje się, że dobrym przybliżeniem transformaty odwrotnej do funkcji /5.9/<sub>2</sub> może być naprężenie

$$\sigma_{rz}(r, t) \approx -\sigma_0 \frac{a}{r} \eta(t - r/c_1).$$

Przez analogię przypuścić można, że ścisły wzór /5.7/<sub>2</sub> na naprężenia wywołane momentami rozłożonymi wzdłuż osi z można zmodyfikować usuwając zarazem osobliwości występujące na czole fali,

$$\sigma_{rz}(r, t) \approx \frac{M_0^{10} \cos \theta + M_0^{01} \sin \theta}{2J} \frac{1}{r^2} \eta(t - r/c_1),$$

/5.11/

$$\sigma_{r\theta}(r, t) \approx \frac{M_0^{10} \sin \theta - M_0^{01} \cos \theta}{2J} \frac{1}{r^2} \eta(t - r/c_1).$$

Po tych uwagach wstępnych przystąpimy do próby rozważenia problemu propagacji fali  $w = w(x, y, t)$  w ośrodku sprężystym o module  $\mu_1$  zawierającym inkluzję kołowo-cylindryczną  $r = a$  z materiału o module  $\mu_2$ . Niech ośrodek zajmuje obszar  $x > -h$  i niech  $h \gg a$ . W chwili  $t = 0$  do powierzchni półprzestrzeni  $x = -h$  przykładamy równomiernie rozłożone obciążenie styczne  $\sigma_0$  spełniając warunek brzegowy

$\sigma_{xz}(-h, t) = \sigma_0 \eta(t)$  /rys. 14/. Rozwiązaniem tak postawionego problemu dla czasów  $t < (h - a)/c_1$  są następujące funkcje przemieszczeń i naprężeń:

$$\bar{w}(x, p) = - \bar{\sigma}_0 \frac{c_1}{\mu_1} \frac{1}{p^2} e^{-px/c_1}$$

$$\bar{\sigma}_{xz}(x, p) = \bar{\sigma}_0 \frac{1}{p} e^{-px/c_1}$$

/5.12/

$$w(x, t) = \frac{\bar{\sigma}_0}{\mu_1} (c_1 t - h - x) \eta(c_1 t - h - x)$$

$$\sigma_{xz}(x, t) = \bar{\sigma}_0 \eta(c_1 t - h - x)$$

W chwili  $t = t_0 = h/c_1$  czoło fali osiąga płaszczyznę  $x = 0$  zawierającą oś cylindrycznej inkluzji i naprężenie  $\bar{\sigma}_{xz}$  w punkcie  $x = y = 0$  miałyby od tej chwili wartość stałą  $\bar{\sigma}_0$ , gdyby ośrodek był jednorodny. Możemy więc przyjąć, że transformata naprężenia pierwotnego w tym punkcie wynosi  $\bar{\sigma}_{xz}^{pr}(0) = \bar{\sigma}_0 e^{-pt_0} p^{-1}$ .

Posłużmy się teraz analogią ze statycznym zagadnieniem dwuwymiarowym dla ośrodka z inkluzją, omówionym w części 3. Przypuśćmy mianowicie, że działanie inkluzji w punkcie  $(0, 0)$  zastąpić można działaniem momentu  $M^{10}(t)$ , przy czym transformatę tej funkcji określić można ze wzoru analogicznego do /3.10/ mnożąc przez siebie podwojone pole przekroju inkluzji, miarę niejednorodności  $\mathcal{R}$  oraz transformatę naprężenia pierwotnego  $\bar{\sigma}_{xz}^{pr}(0)$ .

Wprowadzając nową zmianę czasową  $t^* = t - t_0$ , dzięki której  $\bar{\sigma}_{xz}^{pr}(0) = \bar{\sigma}_0/p$ , przewidujemy uogólnienie wzoru /3.10/ w postaci

$$/5.13/ \quad M^{10}(p) = -2 \mathcal{J} a^2 \mathcal{R} \bar{\sigma}_{xz}^{pr}(0, 0, p) = - \frac{2 \mathcal{J} a^2 \mathcal{R} \bar{\sigma}_0}{p}$$

Transformatę naprężenia  $\bar{\sigma}_{rz}$  wywołanego momentem  $M^{10}(t^*)$  wyznaczonym z /5.13/ i przyłożonym w chwili  $t^* = 0$  obliczamy ze wzoru /5.5/. Po podstawieniu /5.13/ do /5.5/ dokonujemy transformacji odwrotnej /można w tym celu wykorzystać wzór /5.7/₂/ i otrzymujemy w postaci jawnej wzór na naprężenia

$\sigma_{rz}$  wywołane momentem zastępczym  $M^{10}$  /5.13/,

$$/5.14/ \quad \sigma_{rz}(r, t) = -\sigma_0 \alpha \frac{a^2}{r^2} \cos \theta \left( \frac{1}{\sqrt{1-\tilde{\xi}^2}} - \frac{\tilde{\xi}^2}{\sqrt{1-\tilde{\xi}^2^3}} \right) \eta(c_1 t' - r).$$

Superpozycja tego naprężenia z naprężeniem /5.12/ pochodzącym od obciążenia zewnętrznego  $\sigma_{xz}(x, t') = \sigma_0 \eta(c_1 t' - x)$ , czyli

$$/5.15/ \quad \sigma_{rz}(r, t') = \sigma_0 \cos \theta \eta(c_1 t' - r \cos \theta)$$

prowadzi do ostatecznego wzoru przybliżonego na naprężenie  $\sigma_{rz}$  w ośrodku zawierającym inkluzję. Zakładając dla uproszczenia, że  $t' > r/c_1$ , możemy napisać

$$/5.16/ \quad \sigma_{rz}(r, t') = \sigma_0 \cos \theta \left[ 1 - \alpha \frac{a^2}{r^2} \left( \frac{1}{\sqrt{1-\tilde{\xi}^2}} - \frac{\tilde{\xi}^2}{\sqrt{1-\tilde{\xi}^2^3}} \right) \right].$$

Tutaj  $\tilde{\alpha}$  oznacza stosunek  $a/c_1 t'$ . Jak widać, przy dostatecznie dużych wartościach  $t'$  warunek brzegowy  $\sigma_{rz}(a, t') = 0$  będzie spełniony z dobrym przybliżeniem, gdyż przy  $t' \rightarrow \infty$  parametr  $\tilde{\alpha} \rightarrow 0$  i naprężenie  $\sigma_{rz}(a, t) \approx \frac{1}{2} \tilde{\alpha}^2 \sigma_0 \cos \theta \rightarrow 0$ ,  $\alpha = 1$ .

Warunek ten spełnić można w sposób ścisły, gdy zamiast naprężenia /5.5/ wywołanego momentem  $M^{10}$  posłużymy się wzorem przybliżonym /5.11/,

$$/5.17/ \quad \sigma_{rz}(r, t') = \sigma_0 \cos \theta \left( 1 - \frac{a^2}{r^2} \right), \quad t' > r/c_1.$$

Omówiony powyżej przypadek szczególny pozwala przypuszczać, że metodę momentów zastępczych, która okazała się tak efektywna w dwuwymiarowych zagadnieniach statycznych, można będzie z powodzeniem stosować do przybliżonej analizy zagadnień dynamicznych propagacji fal w ośrodkach zawierających większą liczbę cylindrycznych inkluzji lub otworów, omijając przy tym konieczność złożonej analizy procesów odbicia i rozproszenia fal sprężystych na granicach inkluzji.

Przypuszczenie to potwierdza inny przykład, dotyczący propagacji płaskiej fali sprężystej /5.12/ w ośrodku zawierającym otwory cylindryczne. Rozważmy ośrodek sprężysty  $x > -h$  zawierający dwa otwory o promieniu  $a$  umieszczone w odległości  $L$  od siebie, w dwóch konfiguracjach przedstawionych na rys. 15a, b. Fala naprężenia  $\sigma_{xz}$

$$/5.18/ \quad \sigma_{xz}(x, t) = \sigma_0 \eta(c_1 t - x)$$

powstała w chwili  $t = -t_0$  na powierzchni  $x = -h = -c_1 t_0$  osiąga w chwili  $t=0$  płaszczyznę  $x=0$  i leżące na niej osie otworów  $A(0, -L/2)$  i  $B(0, L/2)$ , rys. 15a.

Posługując się modelem przestrzeni jednorodnej z momentami zastępczymi w punktach tych, w chwili  $t = 0$ , przykładamy momenty  $M_{A(1)}^{10} \eta(t)$  i  $M_{B(1)}^{10} \eta(t)$  o intensywnościach wyznaczonych ze wzoru /5.13/

$$/5.19/ \quad M_{A(1)}^{10} = M_{B(1)}^{10} = -2\pi a^2 \sigma_0 .$$

Momenty te są źródłami dodatkowych, cylindrycznych fal naprężenia opisanych wzorami przybliżonymi /5.11/,

$$\sigma_{rz}(r, \theta, t) = -\sigma_0 \left(\frac{a}{r}\right)^2 \cos \theta \eta(t - r/c_1) ,$$

$$\sigma_{\theta z}(r, \theta, t) = -\sigma_0 \left(\frac{a}{r}\right)^2 \sin \theta \eta(t - r/c_1) ,$$

a więc, wobec  $\sigma_{xz} = \sigma_{rz} \cos \theta - \sigma_{\theta z} \sin \theta$  ,

$$/5.20/ \quad \sigma_{xz}(r, \theta, t) = -\sigma_0 \left(\frac{a}{r}\right)^2 \cos 2\theta \eta(t - r/c_1) .$$

Fale te, rozprzestrzeniając się od punktów A i B i nakładając się na fale naprężenia  $\sigma_{xz}$  /5.18/ prowadzą do jego redukcji w kierunkach równoległych do osi x / $\theta = 0$  i  $\theta = \pi$ / i do jego spiętrzenia wzdłuż osi y / $\theta = \pm \pi/2$ /. Na krawędzi otworu A, w punkcie S o współrzędnych  $(0, -L/2 + a)$ , naprężenie  $\sigma_{xz}$  wywołane momentem  $M_{A(1)}^{10}$ , zgodnie ze wzorem /5.20/ przy  $r = 0$ ,  $\theta = \pi/2$ , wynosi

$$/5.21/ \quad \sigma_{xz}^{A(1)}(s) = \sigma_0 .$$

a naprężenie wywołane momentem  $M_{B(1)}^{10}$  ( $r = L$ ,  $\theta = -\pi/2$ )

$$/5.22/ \quad \sigma_{xz}^{B(1)}(s) = \sigma_0 \left(\frac{a}{L}\right)^2 .$$

Czoła fal naprężeń /5.20/ emitowanych w punktach A i B spotykają się na osi y w punkcie O, a w chwili  $t_L = L/c_1$  osiągają punkty B i A. Powoduje to konieczność kolejnego przyłożenia w tych punktach momentów  $M_{(2)}$  o intensywności

$$/5.23/ \quad M_{B(2)}^{10} = M_{A(2)}^{10} = -2\mathcal{J} a^2 \sigma_0 \left(\frac{a}{L}\right)^2 .$$

Fale te zwiększają ponownie wartość naprężenia  $\sigma_{xz}(s)$  o wielkości

$$/5.24/ \quad \sigma_{xz}^{A(2)}(s) = \sigma_0 \left(\frac{a}{L}\right)^2 , \quad \sigma_{xz}^{B(2)}(s) = \sigma_0 \left(\frac{a}{L}\right)^4 .$$

Z dalszym upływem czasu, przy  $t \rightarrow \infty$ , naprężenie ostateczne  $\sigma_{xz}^{\infty}(s)$  przedstawić można jako sumę nieskończoną wyrazów /5.18/ oraz /5.21/, /5.22/, /5.24/ itd. Otrzymujemy więc przy  $t \rightarrow \infty$

$$/5.25/ \quad \sigma_{xz}^{\infty}(s) = \sigma_0 \left[ 1 + \left(1 + \frac{a^2}{L^2}\right) + \left(\frac{a^2}{L^2} + \frac{a^4}{L^4}\right) + \dots \right] = \\ = \frac{2\sigma_0}{1 - (a/L)^2} .$$

Wynik ten porównać można z wynikiem uzyskanym w części 3 i dotyczącym zagadnienia statycznego dla ośrodka z dwiema inkluzjami w punktach (0,0) i (h,0), poddanego działaniu równomiernie rozłożonych sił ścinających w nieskończoności,

$\sigma_{yz}(x, \pm\infty) = p_0$  /por. rys. 9/. Ze wzoru /3.14/ przy  $\lambda l = 1$  i  $q_0 = 0$  otrzymujemy

$$/5.26/ \quad M_1^{01} = M_2^{01} = -2\mathcal{J} a^2 \frac{p_0}{1 - \alpha^2} , \quad \alpha = \frac{a}{h} .$$

Naprężenie  $\sigma_{yz}(a,0)$  stanowi superpozycję naprężenia  $p_0$  oraz naprężeń /3.6/ wywołanych momentami /5.26/ ,

$$/5.27/ \quad \sigma_{yz}^1 = p_0 \frac{1}{1 - \alpha^2}, \quad \sigma_{yz}^2 = p_0 \frac{\alpha^2}{1 - \alpha^2} .$$

Suma naprężeń  $p_0$  oraz /5.27/ prowadzi do wyrażenia

$$p_0 \left( 1 + \frac{1}{1 - \alpha^2} + \frac{\alpha^2}{1 - \alpha^2} \right) = \frac{2 p_0}{1 - \alpha^2} ,$$

identycznego z /5.25/.

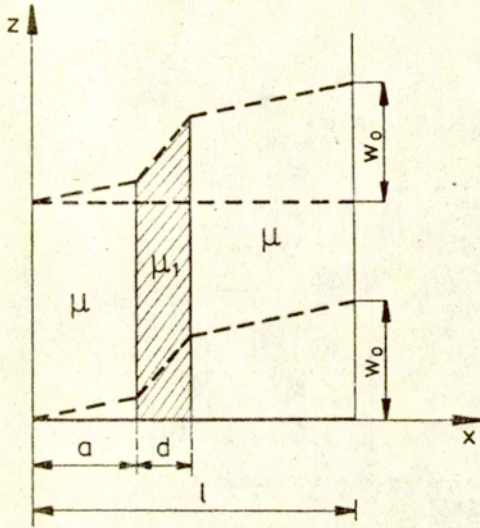
Podobną zgodność wyników uzyskuje się z analizy zagadnienia zilustrowanego rys. 15b. W tym przypadku naprężenie  $\sigma_{xz}$  na odcinku osi  $x$  zawartym między otworami ulega redukcji /w szczególności naprężenia te znikają na brzegu otworu  $x = \pm a$ ,  $y = 0$  / w stosunku do pierwotnego pola naprężenia  $\sigma_{xz} = \sigma_0 \eta(t - x/c_1)$ , gdyż znak naprężeń  $\sigma_{xz}(x, 0, t)$  wywołany kolejnymi momentami  $M_A^{10}(k)$ ,  $M_B^{10}(k)$  jest przeciwny do znaku  $\sigma_0$ .

Na rys. 16 i 17 przedstawiono schematycznie kilka kolejnych etapów omówionych wyżej procesów ewolucji pola naprężenia w przypadku propagacji płaskiej fali sprężystej w ośrodku zawierającym dwa otwory cylindryczne.

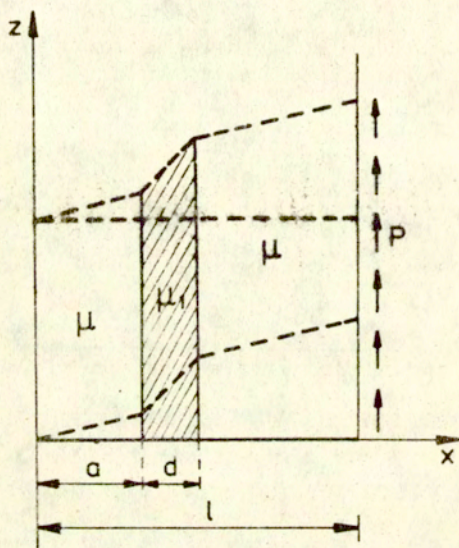
#### Literatura

1. A.Kaczyński, M.Sokołowski, Interaction of cracks and inclusions in elastic media, Arch.Mech. 28, 2, 1976.
2. M.Matczyński, M.Sokołowski, Interaction of cracks in elastic media, Arch.Mech. 34, 1 1982.
3. M.Sokołowski, E.Turska-Kłębek, On the approximate evaluation of interaction of cracks in elastic media, Engrg.Trans., 31, 1, 1983.
4. M.Sokołowski, On an effective method of evaluation of the effect of cavities, inclusions and cracks upon the stress field in elastic media, Engrg.Trans. 34, 1-2, 1986.
5. A.Erdélyi et.al., Tables of Integral Transforms, McGraw-Hill, New York, Toronto, London 1954.

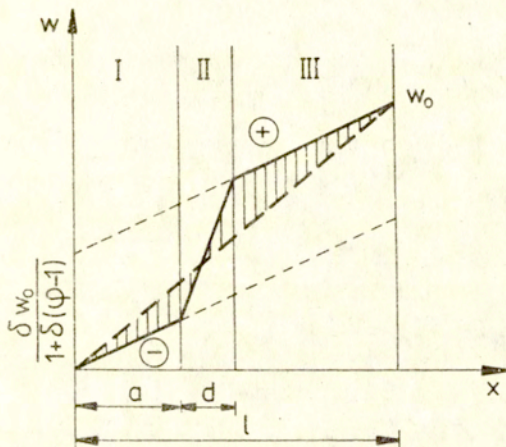




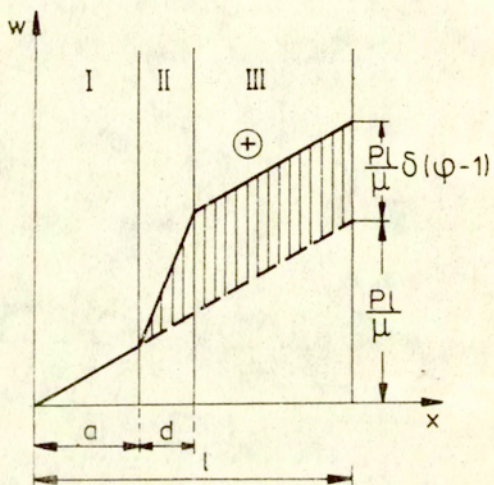
Rys. 1



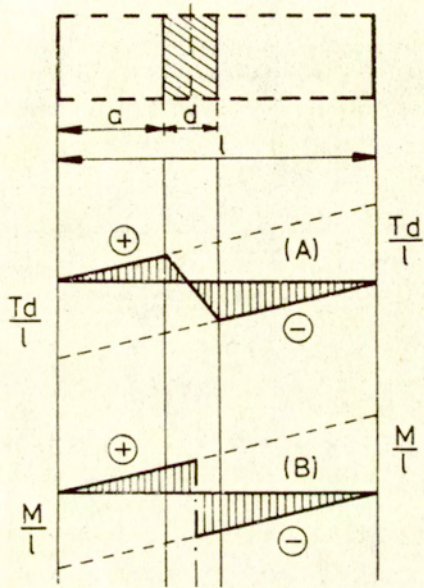
Rys. 2



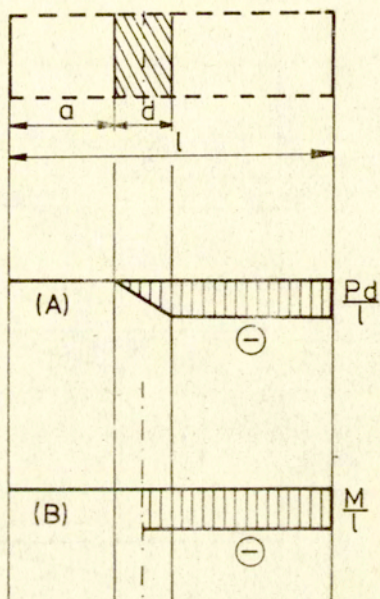
Rys. 3



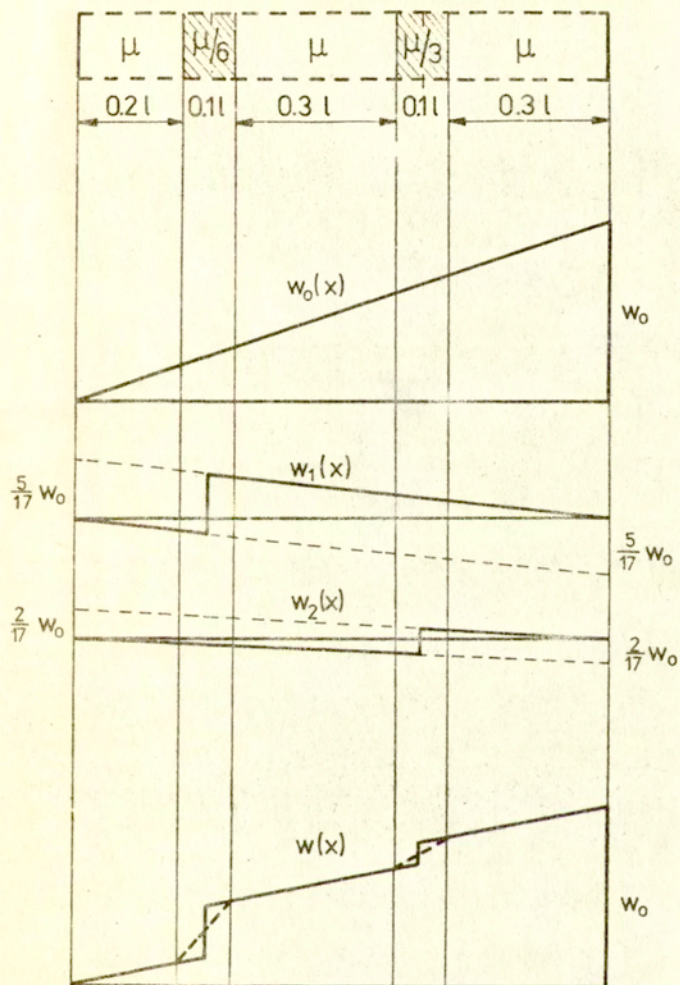
Rys.4



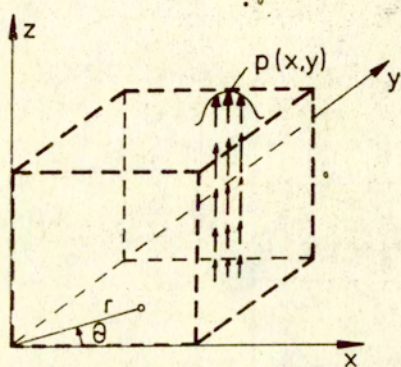
Rys. 5



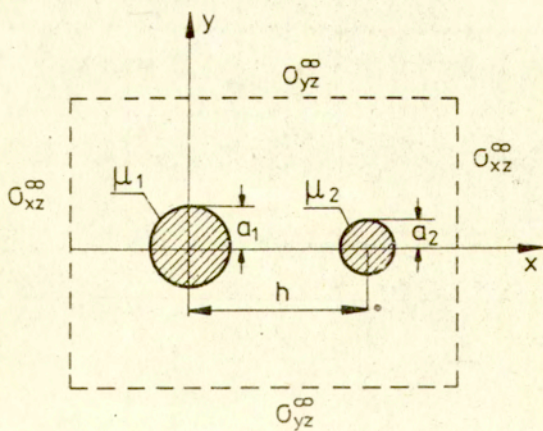
Rys. 6



Rys. 7

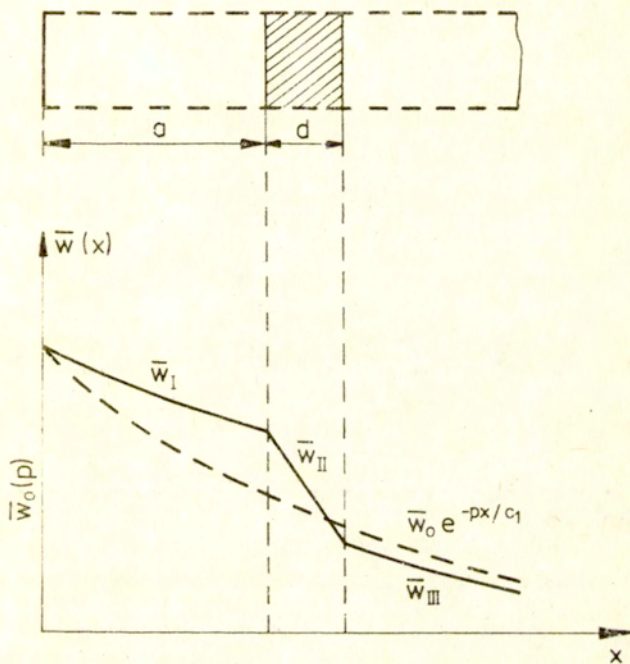


Rys. 8

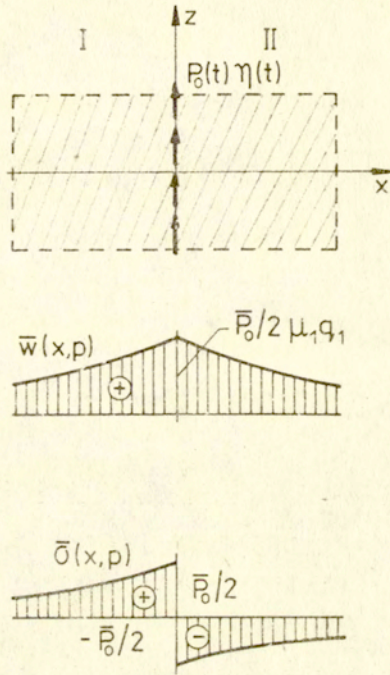


Rys. 9

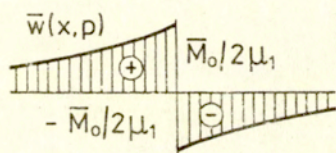
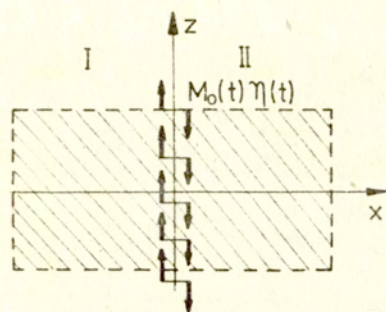




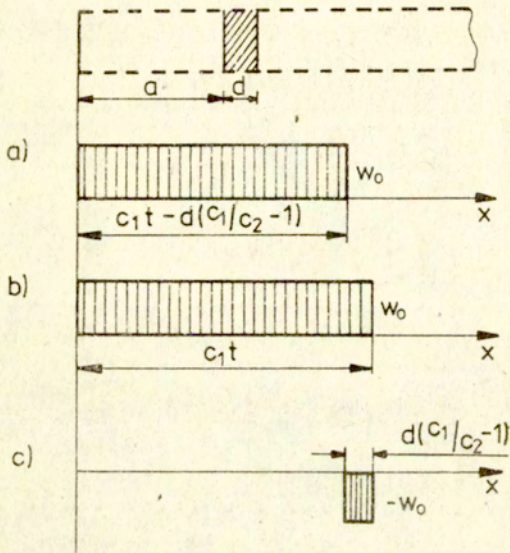
Rys. 10



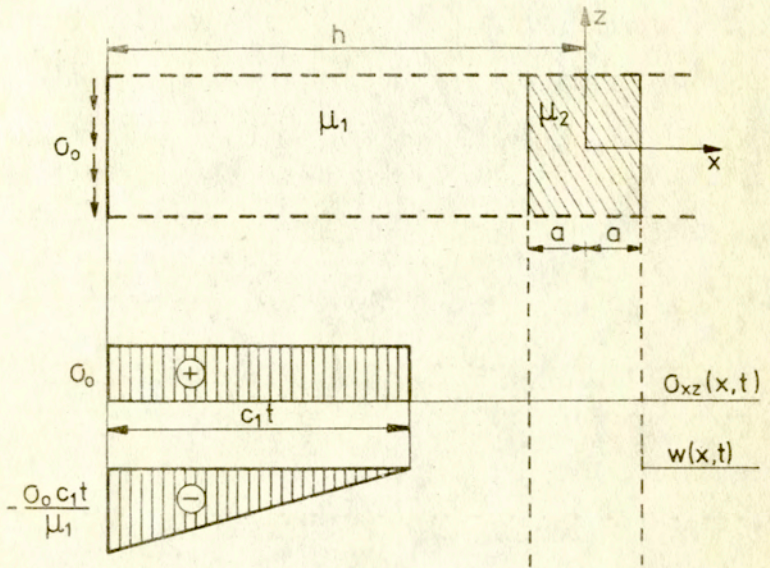
Rys. 11



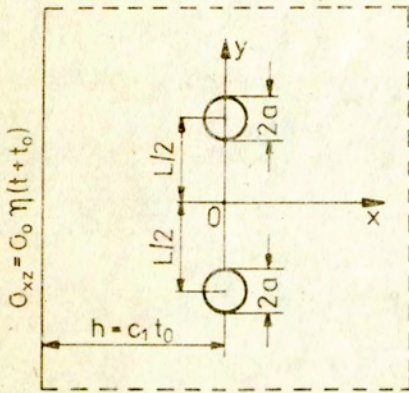
Rys.12



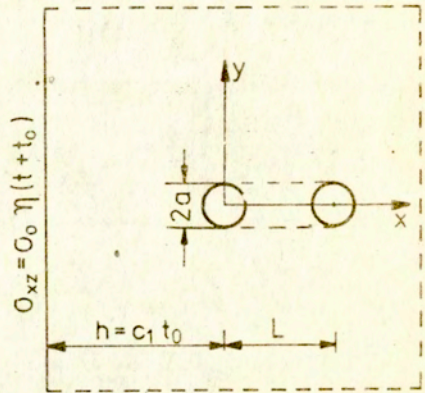
Rys.13



Rys. 14

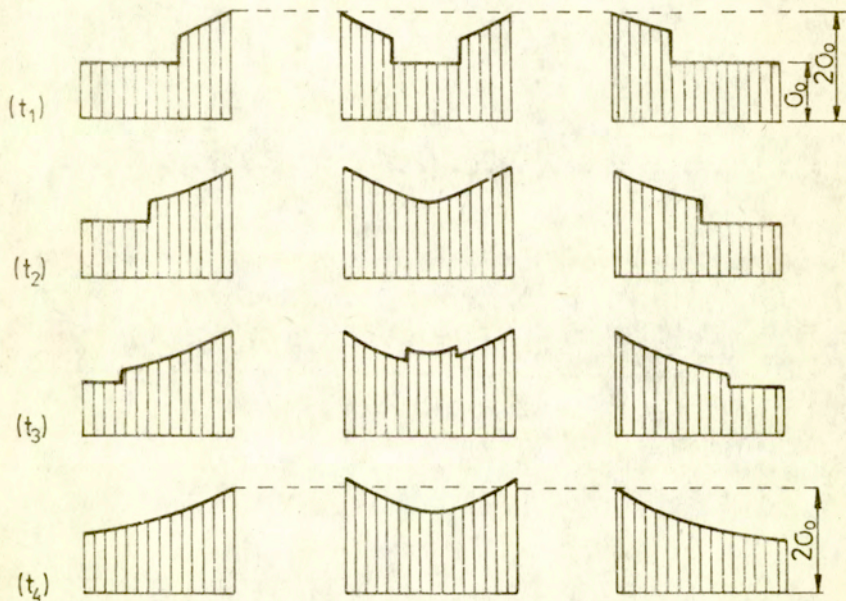
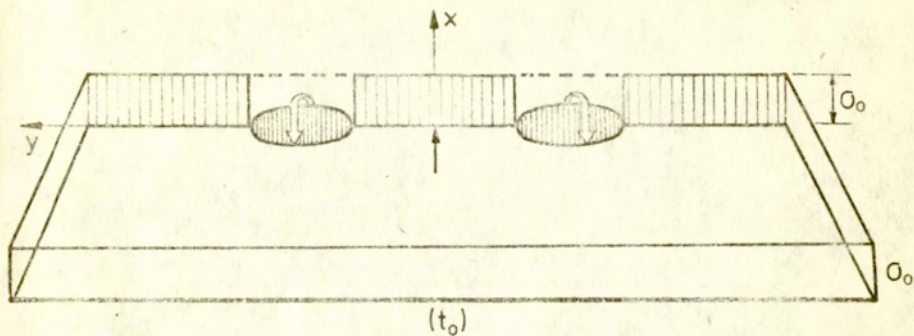


a)



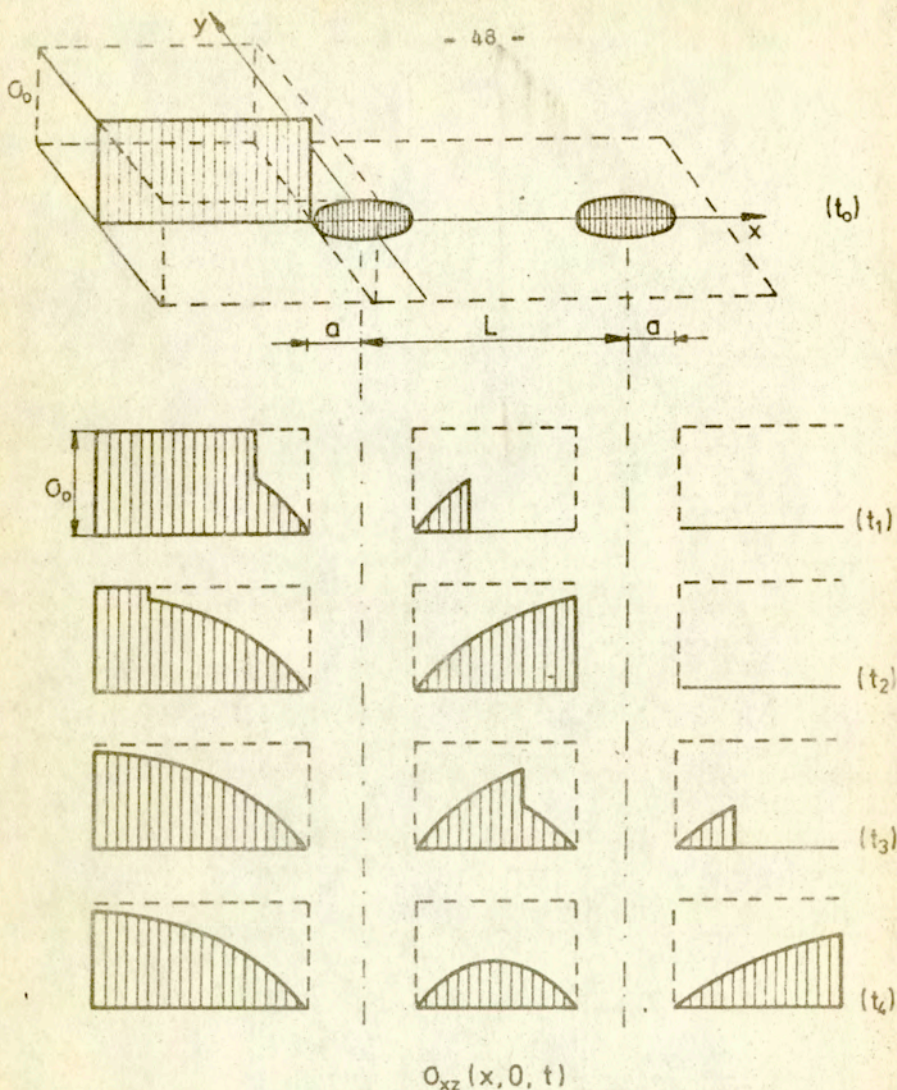
b)

Rys. 15



$\sigma_{xz}(0, y, t)$

Rys. 16



Rys.17