

11 / 1982

Andrzej J. Turski

SOLITONOWE I ANTYSOLITONOWE  
FALE ŁADUNKU PRZESTRZENNEGO  
WIELOSKŁADNIKOWEJ  
W PEŁNI NIELINIOWEJ PLAZMY WŁASOWA

p. 269



WARSZAWA 1982

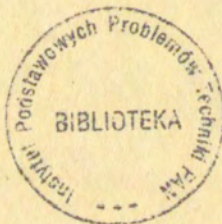
ISSN 0208-5658

Prace Zakładu Teorii Fal Elektromagnetycznych

Praca nr 189

Praca wpłynęła do Redakcji dnia 9 marca 1982 r.

Zarejestrowana pod nr: 11/1982



57063



Na prawach rękopisu

---

Instytut Podstawowych Problemów Techniki PAN

Nakład 150 egz. Ark.wyd.2,25. Ark.druk. 3,5.

Oddano do drukarni w kwietniu 1982 r.

Nr zamówienia 136/0/82 | Z - 87

---

Warszawska Drukarnia Naukowa, Warszawa,  
ul.Śniadeckich 8

Andrzej J. Turski  
Zakład Teorii Fal  
Elektromagnetycznych

SOLITONOWE I ANTYSOLITONOWE FALE ŁADUNKU  
PRZESTRZENNEGO WIELOSKŁADNIKOWEJ W PEŁNI  
NIELINIOWEJ PLAZMY WŁASOWA

1. Wstęp

Badania zjawisk falowych plazmy przestrzeni międzyplanetarnej a w szczególności jonosfery i magnetosfery prowadzone są przy pomocy systematycznych pomiarów satelitarnych i rakietowych "in situ" oraz przy pomocy naziemnych obserwacji zjawisk plazmowych za pośrednictwem fal elektromagnetycznych, np. sondowanie radarowe strefy zorzy polarnej, obserwacje radiogwizdów i fal radiowych. Do pomiaru plazmy np. gęstości cząstek, szczególnie użyteczne są zjawiska falowe.

Celem tej pracy jest sprowadzenie równań Własowa-Poissona dla wieloskładnikowej /elektrony, jony dodatnie i ujemne/ w pełni nieliniowej jednowymiarowej plazmy do równań typu szeregu abstrakcyjnego, całkowo-różniczkowego /Lyapunowa-Schmidta/. Równania te - w przypadku stacjonarnym - sprowadzono do równań oscylatora nieliniowego, które rozwiązuje się metodami płaszczyzny fazowej. Wyznaczona w ten sposób odpowiedź plazmy nieliniowej - w przypadku elektronów i jonów dodatnich - prowadzi do fal solitonowych ładunku przestrzennego, a w przypadku elektronów, jonów dodatnich i ujemnych - do fal solitonowych i antysolitonowych ładunku przestrzennego. Wyznaczona odpowiedź wieloskładnikowej plazmy, przy zachowaniu globalnej neutralności plazmy, zależy od składu plazmy, relacji masy jonów i ich kon-

centracji.

Wyniki pracy przedstawione są według następującego planu. Pierwsze trzy rozdziały stanowią wprowadzenie do zagadnień analizy grupowej równań Własowa-Poissona i fal solitonowych w plazmie. Rozdz. 4 i 5 przedstawia wyprowadzenie równań typu szeregu abstrakcyjnego dla problemu początkowego i adiabaticznego włączenia pola dla równań Własowa-Poissona.

Wskazano na najważniejsze własności otrzymanych szeregów abstrakcyjnych. W Rozdz. 6 otrzymano asymptotyczne rozwiązania w postaci fal solitonowych i antysolitonowych dla "kanonicznych" problemów wieloskładnikowej plazmy będącej kombinacją "zimnych" składników o funkcji równowagowej w postaci delty Dirac'a i "gorących" składników o funkcji równowagowej w postaci funkcji skoku jednostkowego. Rozdz. 7 i 8 przedstawiają najważniejsze wyniki z punktu widzenia fizyki plazmy, tj. strukturę solitonów i ich oddziaływanie.

## 2. Analiza grupowa równań Własowa-Poissona

Często w badaniach matematycznych spostrzegamy taką sytuację, że decydującym czynnikiem problemu nie są konkretne własności rozpatrywanych tworów a tylko własności działań na nich określonych. Po zbadaniu tych działań okazuje się, że mamy do czynienia z konkretnym przykładem znanego typu tworów algebraicznych, np. grupą lub strukturą, i że dla rozwiązania całości problemu wystarczy zbadać tę grupę lub strukturę.

Z taką sytuacją spotykamy się badając nieliniowe równania różniczkowe lub całkowo-różniczkowe. W celu opisanie potencjalnych /podłużnych/ drgań i ruchu plazmy w ramach kinetycznej teorii posługujemy się równaniami Własowa-Poissona. Matematyczna złożoność tego układu całkowo-różniczkowych równań sprowadza się do tego, że nawet gdyby udało się wyznaczyć jego <sup>ogólne</sup> rozwiązanie, to okazałoby się ono zbyt skomplikowane i dlatego praktycznie nieprzydatne. Z drugiej strony całkowanie numeryczne tego układu napotyka na ogromne trudności związane na przykład z tzw. "katastrofą gradientową".

Układ równań Własowa-Poissona dla plazmy elektronowej na tle nieruchomych jonów, zależny od jednej zmiennej przestrzennej,

zapisany w bezwymiarowych zmiennych przyjmuje postać:

$$(1) \quad \begin{aligned} (a) \quad & \partial_t f + u \partial_x f - E \partial_u f = 0, \quad f = f(t, x, u) \\ (b) \quad & \partial_t E = \int_{-\infty}^{\infty} u f du, \quad E = E(t, x) \\ (c) \quad & \partial_x E = 1 - \int_{-\infty}^{\infty} f du, \quad \partial_x \equiv \partial / \partial x, \quad \partial_t \equiv \partial / \partial t \end{aligned}$$

gdzie  $u = \tilde{u} / \omega_0 L$ ,  $E = \epsilon_0 \tilde{E} / e N_0 L$  i  $f = \tilde{f} \omega_0 L / N_0$  są odpowiednio bezwymiarową składową prędkości wzdłuż osi  $x$ -ów, składową pola elektrycznego i rozkładem prędkości. Również bezwymiarowe zmienne czasu i przestrzeni  $(t, x)$  są mierzone względem częstości plazmowej  $\omega_0$  i stałej rozmiaru długości  $L$ .  $N_0$  jest koncentracją elektronową. Równania (1b) i (1c) nie stanowią równań niezależnych.

Mnożąc równanie (1) przez  $u^k$ , gdzie  $k = 0, 1, 2, \dots$  i całkując względem  $u$ , otrzymuje się

$$(2) \quad \begin{aligned} & \partial_t M_k + \partial_x M_{k+1} + k E M_{k-1} = 0 \\ & \partial_t E = M_1, \quad \partial_x E = 1 - M_0 \end{aligned}$$

gdzie 
$$M_k(t, x) = \int_{-\infty}^{\infty} u^k f(t, x, u) du$$

Korzystając z metod analizy grupowej równań różniczkowych cząstkowych Ovsjannikova [1], Taranov [2] zestawił i rozwiązał tzw. układ określających równań grupy stwierdzając, że równania (2) dopuszczają ciągłą grupę przekształceń Liego o infinitesimalnych operacjach

$$X_1 = \partial_t, \quad X_2 = \partial_x$$

$$X_3 = x \partial_x + E \partial_E + \sum_{k=1}^{\infty} k M_k \partial_{M_k}$$

$$(3) \quad \begin{aligned} X_4 &= \text{cost} (\partial_x + \partial_E) - \sum_{k=1}^{\infty} k M_{k-1} \text{sint} \partial_{M_k} \\ X_5 &= \text{sint} (\partial_x + \partial_E) + \sum_{k=1}^{\infty} k M_{k-1} \text{cost} \partial_{M_k} \end{aligned}$$

Można dalej wykazać, że przekształcenia grupy (3) w przestrzeni zmiennych  $t, x, E, M_k$  generują następującą grupę przekształceń w przestrzeni zmiennych  $t, x, u, E, f$ ;

$$(4) \quad \begin{aligned} X_1 &= \partial_t, \quad X_2 = \partial_x \\ X_3 &= x \partial_x + u \partial_u + E \partial_E - f \partial_f \\ X_4 &= \text{cost} \partial_x - \text{sint} \partial_u + \text{cost} \partial_E \\ X_5 &= \text{sint} \partial_x + \text{cost} \partial_u + \text{sint} \partial_E \end{aligned}$$

Wykazano, że układ równań (1) depuszcza grupę Liego (4). Badania algebry operatorów (4) pozwalają określić obszary inwariantnych rozwiązań układu (1). Układ ten jest inwariantny względem następujących ciągłych przekształceń w przestrzeni zmiennych  $t, x, u, E, f$

- (i) Translacja czasowa;  $\tilde{t} = t + a$
- (ii) Translacja przestrzenna;  $\tilde{x} = x + b$
- (iii) Przekształcenie rozciągające;  $\tilde{x} = e^c x, \tilde{u} = e^c u$   
 $\tilde{E} = e^c E, \tilde{f} = e^{-c} f$ .
- (iv) Przekształcenie przesunięcia fazowego oscylującego z częstością plazmową

$$\tilde{x} = x + p \text{cost}, \quad \tilde{u} = u - p \text{sint}, \quad \tilde{E} = E + p \text{cost}$$

lub

$$\tilde{x} = x + q \text{sint}, \quad \tilde{u} = u + q \text{cost}, \quad \tilde{E} = E + q \text{sint}$$

gdzie  $a, b, c, p$  i  $q$  są dowolnymi stałymi. W punktach (i) - (iv) wypisano tylko te zmienne, które ulegają zmianie przy danym przekształceniu. Wymienione przekształcenia pozwalają uogólnić znane już rozwiązanie, wg następującego schematu:

Rozwiązanie znane,

$$E = \varphi(t, x), \quad f = \psi(t, x, u)$$

Rozwiązanie uogólnione,

$$E = \varphi(\tilde{t}, \tilde{x}), \quad f = \psi(\tilde{t}, \tilde{x}, \tilde{u})$$

np:  $f = \psi(t, x + q \sin t, u + q \cos t)$

$$E = \varphi(t, x + q \sin t) + q \sin t$$

Na podstawie analizy grupowej układu (1) można przewidzieć wszelkie typy rozwiązań i tak np: fale biegnące postaci -  $E(x-t)$ ,  $f(x-t, u)$ , drgania langmuirewskie z częstotliwością plazmową, solitony Langmuira, rozwiązania postaci

$$(5) \quad f = e^{t/\tau} f_0(\xi, \eta), \quad E = e^{-t/\tau} E_0(\xi)$$

gdzie  $\xi = x e^{t/\tau}$ ,  $\eta = u e^{t/\tau}$  i  $\tau$  jest dowolną stałą, tak że przy  $t = 0$  zmienne  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $f_0$  i  $E_0$  pokrywają się ze zmiennymi  $x, u, f$  i  $E$  przy czym warunek początkowy będzie

$$f(0, x, u) = f_0(x, u) \text{ oraz } E(0, x) = E_0(x)$$

Podstawiając (5) do (1) uzyskuje się układ równań, który muszą spełniać  $E_0(\xi)$  i  $f_0(\xi, \eta)$ , by dalsza ewolucja czasowa przebiegała zgodnie z (5).

Dalsze omówienie zagadnień postaci rozwiązań w pełni nieliniowego układu równań Własowa-Poissona można znaleźć w [2]. Celem pracy jest wieloskładnikowa w pełni nieliniowa plazma, w której

mogą powstać solitonowe fale ładunku przestrzennego. Przytoczony przykład jednoskładnikowej plazmy wskazuje na możliwości dalszych uogólnień uzyskanych szczególnych rozwiązań i w przypadku nas interesującym, gdyby znane były wyniki analizy grupowej dla wieloskładnikowej plazmy.

### 3. Ważniejsze nieliniowe równania dla fal solitonowych

Wyróżniamy fale solitonowe, tj. fale biegnące i zachowujące kształt "dzwonu" i solitony, tj. fale solitonowe oddziaływające ze sobą jak cząstki elementarne. Solitony po zderzeniu zachowują swój kształt i prędkość a jedynie ich faza może ulec przesunięciu. Przytoczymy równania różniczkowe, których problemy początkowe prowadzą do rozwiązań w postaci sumy solitonów - po upływie dostatecznie długiego czasu. Dla prostoty, przedstawimy prosty sposób wyznaczania rozwiązań stacjonarnych, tj. poszukiwanie rozwiązania zależnego od  $\xi = x - Ut$ .

a/ Równanie Boussinesq'a wyprowadzone dla fal na płytce wodzie opisuje również fale jono-dźwiękowe:

$$(6) \quad u_{tt} - c_s^2 u_{xx} - \lambda_e^2 u_{xxtt} + \frac{1}{2} \beta (u^2)_{xx} = 0$$

gdzie  $c_s$ ,  $\lambda_e$  i  $\beta$  są odpowiednio prędkością dźwięku, długością Debye'a i współczynnikiem nieliniowości. Równanie to przyjmuje postać

$$(U^2 - c_s^2) u_{\xi\xi} - \lambda_e^2 U^2 u_{\xi\xi\xi\xi} + \beta (u^2)_{\xi\xi} = 0$$

dla  $u = u(\xi)$ ,  $\xi = x - Ut$

lub

$$(7) \quad u_{\xi\xi} - \delta u - \frac{1}{2} \beta u^2 \text{ oraz } u_{\xi\xi}^2 - \delta u^2 - \frac{1}{3} \beta u^3$$

Ostatnie równanie oscylatora nieliniowego ma następujące rozwiązanie zmierzające do zera dla  $\xi = \pm \infty$



$$(8) \quad u = 3 \frac{\delta}{\beta} \operatorname{sech}^2 \left[ \frac{1}{2} \sqrt{\delta'} (\xi - \xi_0) \right]$$

gdzie  $\delta = \frac{1 - c_s^2/U^2}{\lambda^2}$  oraz  $\xi_0$  jest stałą całkowania.

Dalszym przybliżeniem równania Boussinesq'a jest równanie Kortewega de Vriesa,

$$(9) \quad u_t + (c_s + \beta u) u_x + u_{xxx} = 0$$

którego stacjonarne rozwiązanie przyjmuje postać (8) gdzie

$$\delta' = U - c_s$$

b/ Równanie sinusowe Gordona /Sin-Gordon/

$$(8') \quad u_{\xi\xi} - c^2 u_{\xi\xi\xi} = c^2 \sin u$$

dla  $u = u(x - Ut)$ ,  $\xi = x - Ut$

przyjmuje postać równania oscylatora anharmonicznego

$$u_{\xi\xi}^2 = (1 - U^2/c^2)^{-1} \sin u$$

$$u_{\xi}^2 = 2 \frac{1 - \cos u}{1 - U^2/c^2}$$

Rozwiązanie solitonowe można uzyskać metodą płaszczyzny fazowej, w przypadku małych amplitud

$$u_{\xi}^2 \approx \frac{(u^2 - u^4/12)}{1 - U^2/c^2}$$

i wtedy

$$(9') \quad u = \pm \sqrt{12} \operatorname{sech} \left[ \sqrt{2/(1 - U^2/c^2)} (\xi - \xi_0) \right]$$

Zacharov i Szabat [3] uzyskali N-solitonowe rozwiązanie rów. (8') metodą odwrotnego problemu rozpraszania. Solitony /antysolitony/ (9') naszą nazwę solitonów Zacharova. Różnią się od solitonów na płytkiej wodzie tym, że amplituda może być ujemna i sekans hyperboliczny występuje w pierwszej potędze.

c/ Równanie Schrödingera,

$$(10) \quad i u_t + u_{xx} + \beta/u^2/u = 0$$

odgrywa ważną rolę w przypadku wysokoczęstotliwościowych drgań nieliniowych plazmy a w szczególności solitonów Langmuira. Poszukujemy rozwiązania w postaci

$$u = e^{irx - ist} v(\xi), \quad \xi = x - Ut$$

gdzie r i s są stałymi spełniającymi zależności

$$r = U/2, \quad s = U^2/4 - \alpha$$

a  $v(\xi)$  spełnia równanie

$$v_{\xi\xi} = \alpha v - \beta v^3, \quad v_{\xi}^2 = \alpha v^2 - \frac{1}{4} \beta v^4$$

i rozwiązanie zanikające w nieskończoności

$$(11) \quad v(\xi) = \pm \left( \frac{2\alpha}{\beta} \right)^{1/2} \operatorname{sech} \left[ \sqrt{\alpha} (\xi - \xi_0) \right]$$

jest solitonem Zacharova.

#### 4. Uogólnione równania Lyapunowa-Schmidta dla wieloskładnikowej plazmy Własewa-Poissona.

W badaniach fal solitonowych niezmiernie ważnym zagadnieniem jest ustalenie i rozwiązanie problemu początkowego i wyznaczenie rozwiązań wielosolitonowych. Ogromnym sukcesem w tym względzie były numeryczne i analityczne prace [4], [5], [6], [7] z zakresu rozwiązania problemu początkowego dla równania Kortewega de Vriesa oraz oddziaływanie solitonów. Podobnego opracowania doczekały się również nieliniowe równania Kleina-Gordona, sinusowe Gordona i Schrödingera, np. [3], [6]. Fale solitonowe i solitony w plazmie badane są za pośrednictwem równań Boussinesq'a [8] lub KdV, które natomiast otrzymuje się z równań dwupłynowego opisu plazmy na drodze przybliżonej. Mamy wtedy do czynienia z falami jonowo-akustycznymi typu (8). Solitony Langmuira, zwane też wysokoczęstotliwościowymi solitonami - /envelop solitions/ - otrzymuje się za pośrednictwem równania Schrödingera, do którego sprowadza się równania plazmy uwzględniające opis kinetyczny i stosując odpowiednie przybliżenia [9]. Omówimy tu pokrótce najbardziej rozpowszechnioną metodę otrzymywania równania KdV dla fal jonowo-dźwiękowych [10].

Dla bezzderzeniowej, jednowymiarowej plazmy składającej się z zimnych jonów i gorących elektronów przyjmuje się następujące równania hydrodynamiki

$$\begin{aligned}
 (12) \quad & \partial_t n + \partial_x (nu) = 0 \\
 & \partial_t u + u \partial_x u = -\partial_x \varphi \\
 & \partial_{xx} \varphi = n_e - n, \quad n_e = \exp \varphi
 \end{aligned}$$

gdzie  $n = \tilde{n}_i / n_0$ ,  $n_e = \tilde{n}_e / n_0$ ,  $u = \tilde{u} (\kappa T_e / m_e)^{-1/2}$   
 i  $\varphi = \tilde{\varphi} (\kappa T_e / e)^{-1}$  są bezwymiarową koncentracją jonową, koncentracją elektronową, prędkością jonów i potencjałem elektrycznym. Bezwymiarowe zmienne niezależne przestrzeni -  $x$  i czasu -  $t$  są odniesione odpowiednio do długości Debye'a  $-(\kappa T_e \epsilon_0 / e^2 n_0)^{1/2}$  i jonowej częstości plazmowej  $-(n_0 e^2 / \epsilon_0 m_i)^{1/2}$

Wprowadzając następującą zamianę współrzędnych, zwanych współrzędnymi "ściągniętymi"

$$\eta = \varepsilon^{1/2} (x-t)$$

$$\tau = \varepsilon^{3/2} t$$

możemy rów. (12) przekształcić do postaci

$$\begin{aligned} \varepsilon \partial_{\tau} n - \partial_{\eta} n + \partial_{\eta} (n u) &= 0 \\ (13) \quad \varepsilon \partial_{\tau} u - \partial_{\eta} u + u \partial_{\eta} u &= -\partial_{\eta} \varphi \\ \varepsilon \partial_{\eta\eta} \varphi &= \exp \varphi - n \end{aligned}$$

podstawiając następujące rozwinięcia

$$n = 1 + \varepsilon n^{(1)} + \varepsilon^2 n^{(2)} + \dots$$

$$u = \varepsilon u^{(1)} + \varepsilon^2 u^{(2)} + \dots$$

$$\varphi = \varepsilon \varphi^{(1)} + \varepsilon^2 \varphi^{(2)} + \dots$$

do (13), otrzymujemy następującą relację wielkości pierwszego rzędu

$$(14) \quad \varphi^{(1)} = n^{(1)} = u^{(1)} = n_e^{(1)}$$

przezyczym wielkości te spełniają następujące równania KdV

$$\partial_{\tau} \varphi^{(1)} + \frac{1}{2} \partial_{\eta\eta\eta} \varphi^{(1)} + \varphi^{(1)} \partial_{\eta} \varphi^{(1)} = 0$$

Zgodnie z relacją (14) przebieg potencjału gęstości ładunku i prądu są jednakowe. Jest to bardzo niedokładne przybliżenie, które nie spełnia równania Poissona, zachowania ładunku i i. Oczywiście równania te byłyby spełnione gdyby wyznaczone ściśle

rozwiązania. Dysponując przybliżeniem (14) nie jesteśmy w stanie ustalić rzeczywistego przebiegu potencjału, gęstości ładunku i prądu fali solitonowej. Przebiegi takie będą wyznaczone dla jedno-solitonowego rozwiązania asymptotycznego ( $t \rightarrow \infty$ ) wieloskładnikowej w pełni nieliniowej plazmy Własowa-Poissona.

W pełni nieliniowa analiza równań Własowa-Poissona jest zadaniem niezmiernie skomplikowanym a komputerowe obliczenia napotykają na ogromne trudności, związane, np.: z "katastrofą gradientową".

Zadaniem tego rozdziału jest sprowadzenie problemu początkowego dla równań Własowa-Poissona do równania typu abstrakcyjnego szeregu potęgowego całkowe-różniczkowego na pole elektryczne.

Równania Własowa-Poissona dla wieloskładnikowej izotropowej plazmy, zapiszemy

$$(15) \quad \partial_t f_\alpha + u \partial_x f_\alpha + (q_\alpha / m_\alpha) E \partial_u f_\alpha = 0$$

$$(16) \quad \epsilon_0 \partial_t E + \sum_\alpha q_\alpha \int_{-\infty}^{\infty} u f_\alpha du = 0$$

$$(17) \quad \epsilon_0 \partial_x E = g = \sum_\alpha q_\alpha \int_{-\infty}^{\infty} f_\alpha du, \quad E = -\partial_x \varphi$$

gdzie;  $x, u$  i  $t$  są zmiennymi niezależnymi przestrzeni, prędkości i czasu, natomiast

$$E = E(x, t), \quad \varphi = \varphi(x, t), \quad f_\alpha = f_\alpha(u, x, t), \quad q_\alpha \text{ i } m_\alpha$$

są odpowiednio polem elektrycznym, potencjałem, funkcją rozkładu prędkości, ładunkiem i masą składnika  $\alpha$  plazmy.

Równania (16) i (17) są wzajemnie zależne, ze względu na równanie zachowania ładunku

$$\partial_t \xi + \partial_x J = 0, \quad J = \sum_{\alpha} q_{\alpha} \int_{-\infty}^{\infty} u f_{\alpha} du,$$

które otrzymuje się całkując równ. (15) względem prędkości  $u$ .  
Równoważność równ. (16) i (17) uzyskujemy nakładając odpowiednie  
więzy na warunek początkowy dla równ. (16). Warunek ten jest po-  
dany w pracy [11].

Zakłada się postać funkcji rozkładu prędkości:

$$(18) \quad f_{\alpha} = N_{\alpha\alpha} f_{\alpha\alpha} + \sum_{n \neq 1} f_{n,\alpha}$$

gdzie;  $N_{\alpha\alpha}$ ,  $f_{\alpha\alpha} = f_{\alpha\alpha}(u)$  są odpowiednio koncentracją skład-  
nika  $\alpha$  i rozkładem równowagowym gdy  $E = 0$  i  $f_{n,\alpha} = f_{n,\alpha}(u, x, t)$   
jest nieliniowym funkcjonałem zależnym od  $E$  rzędu  $n$ , tzn.

$$(19) \quad f_{n,\alpha}(kE) = k^n f_{n,\alpha}(E) \quad \text{i} \quad f_{n,\alpha} \cdot f_{m,\alpha} = f_{n+m,\alpha}$$

lub

$$\|f_{n,\alpha}\|_1 = C_n \|E\|_2^n$$

gdzie  $C_n$  jest stałą a  $\|\cdot\|_{1,2}$  oznacza odpowiednie normy  
przestrzeni funkcyjnych.

Podstawiając (18) do (15) otrzymuje się następującą hierar-  
chię równań:

$$(20) \quad (\partial_t + u \partial_x) f_{1,\alpha} + (N_{\alpha\alpha} q_{\alpha} / m_{\alpha}) E \partial_u f_{0\alpha} = 0$$

$$\dots \dots \dots$$

$$(\partial_t + u \partial_x) f_{n,\alpha} + (q_{\alpha} / m_{\alpha}) E \partial_u f_{n-1,\alpha} = 0$$

$$\dots \dots \dots$$

**Problem początkowy**

$$E(x, t_0) = 0, \quad f_{1,\alpha}(u, x, t_0) = g_\alpha(u, x)$$

$$f_{n,\alpha}(u, x, t_0) = 0 \quad \text{dla } n = 1, 2, \dots$$

prowadzi do następujących rozwiązań na  $f_{n,\alpha}$ :

$$f_{1,\alpha} = -(N_{0\alpha} q / m_\alpha) f'_{0\alpha}(u) \int_{t_0}^t E(1) du + g_\alpha[u, x - u(t - t_0)]$$

$$(21) \quad f_{n,\alpha} = (-1)^n N_{0\alpha} (q / m_\alpha)^n \int_{t_0}^t E(1) \partial_u \int_{t_0}^{t_1} E(2) \partial_u \dots \int_{t_0}^{t_{n-1}} E(n) f'_{0\alpha}(u) dt_1 \dots dt_{n-1} +$$

$$+ \left(\frac{-q_\alpha}{m_\alpha}\right)^{n-1} \int_{t_0}^t E(1) \partial_u \dots \int_{t_0}^{t_{n-2}} E(n-1) \partial_u q_\alpha(u, x - u(t - t_0)) dt_1 \dots dt_{n-1}$$

gdzie

$$E(1) = E(x - u(t - t_1), t_1) \dots E(n) = E(x - u(t - t_n), t_n)$$

Jeżeli zaburzenie  $g_\alpha$  jest tego samego rzędu co E warunki (19) są spełnione. W celu otrzymania równania na wzdluzne pole E, nalezy podstawic (21) do (16). Załozenie  $E(x, t_0) = 0$  i równanie (17) naklada nastepujace więzy na zaburzenie początkowe rozkładu prędkości

$$\int_{-\infty}^{\infty} g_\alpha(u, x) du = 0 \quad \text{dla } t = t_0$$

Znaczy to, że zaburzenie początkowe nie wprowadza dodatkowego ładunku do układu. Na podstawie (21) i (16) otrzymuje się następujące równanie typu Lyapunowa-Schmidta [12] ;

$$(22) \quad E(x, t) + \int_{t_0}^t dt_1 \int_{-\infty}^{\infty} K(x-x_1, t-t_1) E(x_1, t_1) dx_1 = G_1(x, t) + P_9\left(\frac{x, t}{E}\right) + P\left(\frac{x, t}{E}\right)$$

gdzie

$$K(x, t) = \sum_{\alpha} \omega_{\alpha}^2 f_{\alpha}\left(\frac{x}{t}\right), \quad \omega_{\alpha}^2 = N_{\alpha} q_{\alpha}^2 / \epsilon_0 m_{\alpha}$$

$$G_1(x, t) = -\left(\frac{1}{\epsilon_0}\right) \sum_{\alpha} \int_{t_0}^t dt_1 \int_{-\infty}^{\infty} u g_{\alpha}(u; x-u(t_1-t_0)) du$$

i uogólnione operatory Lyapunowa-Schmidta

$$P\left(\frac{x, t}{E}\right) = - \int_{t_0}^t \left( \sum_{n=2}^{\infty} P_n\left(\frac{x, t_1}{E}\right) \right) dt_1$$

(22a)

$$P_9\left(\frac{x, t}{E}\right) = - \int_{t_0}^t \left( \sum_{n=2}^{\infty} G_n\left(\frac{x, t_1}{E}\right) \right) dt_1$$

gdzie

$$P_n\left(\frac{x, t}{E}\right) = (-1)^n \int_{-\infty}^{\infty} du \int_{t_0}^t dt_1 \dots \int_{t_0}^{t_{n-1}} dt_n u E(1) \partial_u \{E(2) \dots \partial_u [E(n) K_n]\}$$

(22b)

$$G_n\left(\frac{x, t}{E}\right) = (-1)^{n-1} \int_{-\infty}^{\infty} du \int_{t_0}^t dt_1 \dots \int_{t_0}^{t_{n-2}} dt_{n-1} u E(1) \partial_u \{E(2) \dots \partial_u [E(n-1) g_n]\}$$



$$K_n = \sum_{\alpha} \frac{N_{0\alpha}}{\epsilon_0} q_{\alpha} (q_{\alpha}/m_{\alpha})^n f_{0\alpha}'(u), \quad g_n = \sum_{\alpha} (q_{\alpha}/\epsilon_0) (q_{\alpha}/m_{\alpha})^{n-1} \partial_u g_{\alpha}(u, x-u(t-t_0))$$

Wyrażenie  $P_g$  przedstawia przyczynek do pola elektrycznego spowodowany fluktuacją  $g_{\alpha}$  rozkładu równowagowego natomiast  $P$  zależy od przyjętego stanu równowagi  $f_{0\alpha}$  i przedstawia nieliniową odpowiedź plazmy.

Rozwiązanie rów. (22) można poszukiwać metodą iteracji, np. jeżeli znamy rozwiązanie części liniowej rów. (22), t.j.

$$(23) \quad E_0 + E_0 * K = G_1$$

wtedy

$$E_1 = E_0 + P_g(x, t) + P(x, t)$$

oraz

$$E_n = G_1 - E_{n-1} * K + P_g(x, t) + P(x, t)$$

Jeżeli procedura iteracji okaże się zbieżna, co zależy od przyjętego rozkładu równowagi  $f_{0\alpha}$  i zaburzenia początkowego  $g_{\alpha}$ , to otrzymamy rozwiązanie rów. (22). Zagadnienie liniowego rów. (23) było rozpatrywane w pracy [11].

#### 5. Adiabaticzne włączenie pola w czasie $t_0 = -\infty$

Zabusky i Kruskal [13] a także Lax [14] wykazali, że rozwiązanie problemu początkowego równania KdV dla czasu zmierzającego do nieskończoności, które jest określone na całej osi  $x$ -ów i znika dla  $x = \pm \infty$ , zawiera fale solitonowe. Stwierdzono, że każdemu takiemu rozwiązaniu odpowiada skończona liczba prędkości  $U_1, U_2, \dots, U_N$ , które można nazwać prędkościami własnymi, tak że

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(x-Ut, t) = \begin{cases} S(x-\theta_j^{\pm}, U_j) \\ 0 \end{cases}$$

gdzie  $U = U_j$ ,  $j = 1, \dots, N$ . Symbol  $S(x - \theta_j^{\pm}, U_j)$  oznacza falę solitonową rozchodzącą się z prędkością  $U_j$  i przesuniętą o  $\theta_j^{\pm}$  na osi  $x$ -ów. Natomiast  $U_j$  [y] stanowi funkcjonal związany z całką pierwszą odpowiedniego równania sprowadzającego rozwiązanie równanie KdV do odwrotnego problemu teorii rozpraszania.

Interesującym jest czy w przypadku rów. (22) istnieje rozwiązanie asymptotyczne i czy będzie ono postaci fal solitonowych. Zadaniem bardzo trudnym byłoby wyznaczenie rozwiązania rów. (22) przy  $t \rightarrow \infty$ . Znacznie prościej jest sprowadzić to równanie do takiej postaci, która opisuje rozwiązanie asymptotyczne. Zmierzając z chwilą początkowego zaburzenia  $t_0$  do nieskończonej przeszłości, w której  $G_1 = 0$  i  $P_g = 0$ , otrzymuje się takie równanie. Postawiony tu problem nazywa się adiabaticznym włączeniem pola w nieskończonej przeszłości a rozwiązanie równania

$$(24) \quad E(x, t) + \int_{-\infty}^t dt_1 \int_{-\infty}^{\infty} K(x-x_1, t-t_1) E(x_1, t_1) dx_1 = P\left(\frac{x_1 t}{E}\right)_{t_0=-\infty}$$

jest nieliniową odpowiedzią plazmy niezależną od postaci zaburzenia  $g_{\alpha}(x, u)$ .

Bardzo ciekawą własnością rów. (24) jest to, że wszystkie wyrazy abstrakcyjnego szeregu

$$P_n\left(\frac{x_1 t}{E}\right)_{t_0=-\infty} = P_n(x \pm Ut)$$

jeżeli  $E = E(x \pm Ut)$ . Dowód tej własności polega na odpowiedniej zamianie zmiennych całkowania wielokrotnych całek określających  $P_n$  i został tu pominięty. Można zatem spodziewać się niezerowych rozwiązań rów. (24) w postaci fali biegnącej. W dalszej części pracy wyznaczmy właśnie takie rozwiązania, które będą

falami solitonowymi i antysolitonowymi.

W przypadku nieliniowych równań różniczkowych z dyspersją, pojawienie się rozwiązań typu fali solitonowej tłumaczy się zrównoważeniem działania nieliniowości "zaostrażającej" front fali z działaniem "rozmywającym" dyspersji. W przypadkach rozpatrywanych w następnym rozdziale występują nieliniowe wyrazy całkowo-różniczkowe dowolnego stopnia i każdy z tych wyrazów zawiera dyspersję wyrażoną przez wielokrotne całkowanie względem czasu /dyspersywność czasowa ośrodka/ i całkowanie względem prędkości  $u$ . Jądro  $K_n(u)$  (22b) zależne od stanu równowagowego  $f_{0n}(u)$  i wielokrotne różniczkowanie względem  $u$  wraz z całkowaniem względem  $u$  stanowi o nielekalnej zależności pola, tj. przestrzennej dyspersywności ośrodka. Spestrzegamy następującą własność wyrazu  $P(x, t)$ . Jeżeli rozkład  $f_{0n}(u)$ , klasy  $C^\infty$ , zadany jest na całej osi  $u$ , tak jak rozkład Maxwella, wtedy "rozmywające" działanie dyspersji przestrzennej jest silniejsze niż "zaostrażające" działanie nieliniowości i rów. (24) ma tylko zerowe rozwiązania. Oznacza to, że przeważające działanie dyspersywności ośrodka powoduje, że każde skończone zaburzenie lokalne ośrodka po dostatecznie długim czasie zostaje "rozmyte" w całej przestrzeni.

Nie wdając się w matematyczne rozważania własności równania (24) wyrażamy przypuszczenie, że niezerowe rozwiązania tego równania określone na całej osi  $x$ -ów i znikające dla  $x = \pm \infty$  mają postać fali biegnącej typu solitonowego.

Takie rozwiązania dla dobranych rozkładów równowagowych przedstawimy w następnym rozdziale.

## 6. Przykłady wieloskładnikowej plazmy

Najogólniejsza forma rozwiązania problemu tu rozważanego polegałaby na ustaleniu warunków zbieżności występujących tu potęgowych szeregów abstrakcyjnych, ustaleniu warunków istnienia i jednoznaczności rozwiązań oraz wyznaczeniu rozwiązań równań (22) i (24). Tak ogólnie postawiony problem jest niezmiernie trudny lecz z pomocą pewnych upraszczających założeń może on być sprowadzony do stosunkowo prosto rozwiązywalnych zagadnień.

W tym celu będziemy starali się w tej pracy ustanowić modele uproszczone, zawierające jednak najistotniejsze cechy problemu pobudzania fal solitonowych i antysolitonowych wieloskładnikowej w pełni nieliniowej plazmy. Tak ustanowione kanoniczne problemy fal solitonowych pozwalają na głęboki wgląd w strukturę solitonu, tj. przebiegi gęstości poszczególnych składników, pola i potencjału elektrycznego oraz ich oddziaływania. Upraszczające założenia dotyczą przede wszystkim rozkładu równowagowego składników plazmy, tj. elektronów, jonów dodatnich i ujemnych. Przyjmuje się, że składniki te są "zimne" lub "gorące", tzn. opisywane odpowiednio przez deltę Dirac'a i funkcję skoku jednostkowego zadaną na ograniczonym nośniku. Ponieważ rozkłady te są wielokrotnie całkowane i różniczkowane należy je traktować jako funkcje uogólnione.

W ostatnich dwudziestu latach cieszyły się ogromnym zainteresowaniem problemy zderzeniowych oddziaływań fal solitonowych dla równań wymienionych w Rozdz.3, które zawierają kwadratową nieliniowość i dyspersję. Jak stwierdzono, z niemałym zdziwieniem, fale te oddziałują jak cząstki kulombowskie, co spowodowało nadanie im nazw solitonów, kwazi-cząstek, makre-cząstek itp.

Natomiast, głównym zadaniem tej pracy jest wyznaczenie jednosolitonowego rozwiązania asymptotycznego równań wieloskładnikowej w pełni nieliniowej plazmy, będącego odpowiedzią plazmy na "adiabaticzne włączenie pola w nieskończoności" i określenie wszystkich wielkości związanych z tą odpowiedzią, tzn. przebiegu potencjału, pola elektrycznego, gęstości ładunku i prądu.

Tak np. okazuje się, że przebieg gęstości ładunku solitonu elektronowo-jonowej plazmy przybiera postać "zgęstka" jonów dodatnich zajmujących ograniczony obszar centralny otoczony obszarem z nadmiarem elektronów wynikłym z niedomiaru jonów skupionych w części centralnej. Takie rozkłady gęstości ładunku przestrzennego fali stanowią "cząstki" kulombowskie poruszające się ze stałą lecz różną prędkością ruchem bezwładnym "zgęstka masy". Należy zatem oczekiwać, że takie fale ładunku przestrzennego oddziałują będą jak cząstki kulombowskie. Przez poznanie struktury fizycznej fali ładunku przestrzennego można

spodziewać się określenia własności solitonów i antysolitonów w plazmie Własowa-Peissena.

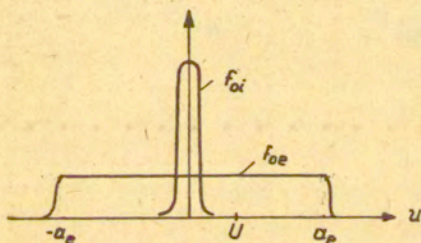
Rozpatrzmy następujące przykłady:

a/ Plazma składająca się z gorących elektronów i zimnych jonów.

Przyjmujemy, że rozkład równowagowy elektronów i jonów jest następującej postaci:

$$(25) \quad f_{oe} = \frac{1}{2\alpha_e} [H(u + \alpha_e) - H(u - \alpha_e)], \quad f_{oi} = \delta^2(u)$$

gdzie  $H(u)$  jest funkcją Heaviside'a oraz  $\alpha_e$  jest termiczną prędkością elektronów. Rys.1 wyjaśnia relację rozkładu równowagowego jonów i elektronów. Relacja ta usprawiedliwia przyjęcie uproszczonych rozkładów (25) dla fal jonowo-akustycznych.



Rys.1

Jądro  $K(x, t)$  rów. (22) i (24) przyjmuje postać:

$$(25a) \quad K(x, t) = \omega_{oi}^2 t \delta(x) + \frac{\omega_{oe}^2}{2\alpha_e^2} [H(x + \alpha_e t) - (x - \alpha_e t)]$$

Można sprawdzić, np. przy pomocy transformacji Fouriera względem  $t$  i  $x$ , że liniowa część równania (24) daje się sprowadzić do liniowego operatora różniczkowego. Obliczając liniową operację

$$L_1 = \partial_{tttt} - \alpha_e^2 \partial_{xxtt}$$

lewej i prawej strony (24), otrzymujemy

$$(26) \quad E_{tttt} - \alpha_e^2 E_{xxtt} + (\omega_{oi}^2 + \omega_{oe}^2) E_{tt} - \alpha_e^2 \omega_{oi}^2 E_{xx} = L_1 \{P(x, t)\}$$

Zakładając, że  $\omega_{oi}/\omega_{oe} \ll 1$  i oznaczając jonowo-dźwiękową prędkość przez  $c_s = \alpha_e \omega_{oi}/\omega_{oe}$ , mamy:

$$E_{tt} - c_s^2 E_{xx} - (\alpha_e^2/\omega_{oe}^2) E_{xxtt} = (1/\omega_{oe}^2) L_1 \{P(x, t)\}$$

Lewa strona tego równania jest liniowym operatorem Boussinesq'a. Liniowa część rów. (26) jest operatorem hiperbolicznym czwartego rzędu. Operator ten jest dokładniejszy niż operator Boussinesq'a przyjmowany dla liniowych fal jonowo-dźwiękowych. Zaniedbując prawą stronę (26), otrzymuje się równanie hiperboliczne, dyspersywne. Rozwiązanie tego równania będzie falą propagującą się ze skończoną prędkością. Podczas gdy rozwiązanie liniowego równania Boussinesq'a jest o nieograniczonym nośniku w przypadku funkcji początkowej zadanej na skończonym nośniku. Zatem prędkość sygnału nie jest ograniczona.

Wyznamy rozwiązanie równania (24), gdzie  $f_{oi}(u)$  dane są wzorami (25), w postaci  $E(x, t) = E(\xi)$ , gdzie  $\xi = x - Ut$  oraz  $U < \alpha_e$ .

Dokonując odpowiedniej zamiany zmiennych całkowania w wyrazach abstrakcyjnego szeregu potęgowego.

$$P_n(x, t) = (-1)^n \int_{-\infty}^{\infty} du \int_{-\infty}^t dt_1 \dots \int_{-\infty}^{t_{n-1}} dt_n u E(x-u(t-t_1)-Ut_1) \partial_u \{ \\ E(x-u(t-t_2)-Ut_2) \dots \partial_u [E(x-u(t-t_n)-Ut_n) K_n(u)] \}$$

gdzie

$$K_n(u) = \frac{N_{oi}}{\varepsilon_o} q_i \left( \frac{q_i}{m_i} \right)^n \delta'(u) + \frac{N_{oe}}{\varepsilon_o} q_e \left( \frac{q_e}{m_e} \right)^n \frac{1}{2a_e} [\delta(u+a_e) - \delta(u-a_e)]$$

otrzymujemy

$$(26a) \quad P_n(\xi, t) = C_n \int_{\xi}^{\infty} \dots \int_{\xi_{n-1}}^{\infty} E(\xi_1) \dots E(\xi_n) d\xi_n \dots d\xi_1$$

gdzie

$$C_n = (-1)^n \int_{-\infty}^{\infty} u d_u (u-U)^{-1} d_u \dots d_u (u-U)^{-1} K_n(u) du$$

Na podstawie tych zależności i równań (21) i (18) funkcja rozkładu prędkości wyraża się następująco:

$$(27) \quad f_{\alpha}(u, \xi) = N_{o\alpha} f_{o\alpha}(u) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{n,\alpha}(u)}{n!} \varphi^n(\xi),$$

gdzie

$$c_{n,\alpha}(u) = N_{o\alpha} \left( \frac{q_{\alpha}}{m_{\alpha}} \right)^n (u-U)^{-1} d_u \left\{ \dots d_u \left[ (u-U)^{-1} f'_{o\alpha}(u) \right] \right\}$$

oraz

$$\varphi(\xi) = \int_{\xi}^{\infty} E(\xi_1) d\xi_1$$

Wyrażenia na  $c_{n,\alpha}(u)$  wykazują osobliwości dla  $u = U$ . W przypadku przyjętych przez nas rozkładów równowagowych (25) osobliwości te są usuwalne ponieważ  $f_{\alpha,\alpha}^{(n)}(U) = 0$  dla  $n = 1, 2, \dots$ . Szereg prawej strony równ. (27) jest wtedy szeregiem dystrybucyjnym, którego zbieżność określa się w sensie teorii funkcji uogólnionych, tzn. jeżeli dla każdej funkcji  $d(u)$  należącej do przestrzeni funkcji tworzonych daną klasę dystrybucji, zbieżny jest następujący szereg potęgowy

$$(27a) \quad \int_{-\infty}^{\infty} d(u) f_{\alpha}(u, \xi) du = \sum_{n=0}^{\infty} D_n \varphi(\xi)^n$$

gdzie 
$$D_0 = N_{\alpha,\alpha} \int_{-\infty}^{\infty} d(u) f_{\alpha,\alpha}(u) du$$

$$D_n = \frac{1}{n!} \int_{-\infty}^{\infty} c_{n,\alpha}(u) d(u) du, \quad n = 1, 2, \dots$$

ten szereg (27) jest zbieżny dystrybucyjnie. Przyczym, szereg ten jest zbieżny do  $f_{\alpha}(u, \xi)$ , jeżeli zachodzi równość (27a). Należy zauważyć, że współczynniki  $c_n(u)$  dla  $u$  bliskich  $U$  przedstawiają przyczynek do funkcji  $f_{\alpha,\alpha}(u)$ , wynikły z rezonansu cząstek typu  $\alpha$  poruszających się z prędkością  $u \approx U$ . Prowadząc analizę Fouriera względem  $x$  i Laplace'a względem  $t$  równań liniowych (20), spostrzegamy, że otoczenie  $u = \omega/k \rightarrow U$  daje tłumienie lub narastanie Landau'a  $n$ -tego rzędu. Tłumienie to, jak wiadomo, zależy od pochodnych  $f'_{\alpha,\alpha}(\omega/k), \dots, f^{(n)}_{\alpha,\alpha}(\omega/k)$ . W przypadku gdy pochodne te są równe zeru - nie występuje tłumienie czy niestabilność Landau'a. Zasługuje na podkreślenie, że udział cząstek rezonansowych, wyrażający się przekazem energii pól. en. kint. do  $\alpha$  cząstek lub odwrotnie, dotyczy  $n$ -tych wyrazów pełnego



rozkładu, tj.  $f_{n,\alpha}(u)$ . Innymi słowy, liniowe równania (20), zbadane przy pomocy odpowiednich kryteriów, np: Władimirowa [15], wykazują własności dysypatywne lub aktywne. Czy zatem, po zsumowaniu tych efektów, tj. w przypadku pełnej nieliniowości, układ będzie w każdej chwili czasowej zachowawczy, tzn. przepływ energii przez każdą zamkniętą powierzchnię i w każdym przedziale czasowym będzie odbywał się bez strat i zysków, czy też w pewnych przedziałach czasowych, np. przypadek fali monochromatycznej rozpatrzony w [16], wystąpi nieliniowe tłumienie Landau'a?

W pracy [17] wyznaczone bilans przepływu energii kinetycznej i elektrycznej dla pełnego nieliniowego układu równań Maxwella-Własowa i dla przypadku wieloskładnikowej plazmy Własowa-Poissona, mamy następujące prawa zachowania energii

$$(28) \quad \partial_t W_k + \nabla \cdot S_k = -E \cdot J$$

$$\partial_t W_E = E \cdot J$$

gdzie gęstość energii kinetycznej i elektrycznej oznaczamy odpowiednio

$$W_k = \frac{1}{2} \sum_{\alpha} m_{\alpha} \int v^2 f_{\alpha}(v, x, t) d^3v, \quad W_E = \epsilon_0 E^2$$

oraz gęstość prądu elektrycznego i strumienia energii kinetycznej

$$J = \sum_{\alpha} q_{\alpha} \int v f_{\alpha}(v, x, t) d^3v$$

$$S_k = \frac{1}{2} \sum_{\alpha} m_{\alpha} \int v^2 v f_{\alpha}(v, x, t) d^3v$$

Suma energii kinetycznej i elektrycznej jest zachowana w każdej chwili czasowej, lecz w zależności od tego czy wyraz  $\underline{E} \cdot \underline{j}$  jest dodatni czy ujemny energie pola elektrycznego jest przekazywana cząstkom lub odwrotnie. Ciekawą ilustracją tej własności jest rozwiązanie postaci (5) dla jednoskładnikowej plazmy, gdzie wykładniczemu narastaniu funkcji rozkładu odpowiada wykładnicze zanikanie pola. Tłumienie Landau'a, jest związane z przekazem energii elektrycznej cząstkom ( $\underline{E} \cdot \underline{j} > 0$ ) i może mieć miejsce w pewnym przedziale czasowym a w innym zmienić się w narastanie, tj. w niestabilność Landau'a, lub wreszcie może nie występować w ogóle. Fale BGK /Bernsteine-Greene-Kruskal/, które zostały potwierdzone doświadczalnie, np. [16], należą do tej ostatniej klasy. Również tu rozpatrywane fale należą do tej klasy i wtedy dla całego obszaru plazmy i być może dla pewnych jej podobszarów  $\Omega$ , mamy

$$\int_{\Omega} \underline{E} \cdot \underline{j} d^3x = 0$$

dla każdego t, co świadczy, że nie występuje wymiana energii elektrycznej z kinetyczną w obszarze  $\Omega$ .

Korzystając z otrzymanego wyrażenia na  $P_n$ , (26a), równanie (24) przyjmie postać

$$(29) \quad E(\xi) = - \sum_{n=1}^{\infty} (A_n^e + A_n^i) \int_{\xi}^{\infty} (\xi - \xi_1) \int_{\xi_1}^{\infty} \dots \int_{\xi_{n-1}}^{\infty} E(\xi_1) \dots E(\xi_{n-1}) d\xi_1 \dots d\xi_{n-1}$$

gdzie

$$A_n^e = 1 \cdot 3 \dots (2n-1) \frac{N_{0e} q_e}{2 \epsilon_0 a_e} (q_e / m_e)^n \left[ \frac{1}{(a_e + U)^{2n-1}} + \frac{1}{(a_e - U)^{2n-1}} \right]$$

$$A_n^i = 1 \cdot 3 \dots (2n-1) \frac{N_{0i} q_i}{\epsilon_0} (q_i / m_i)^n U^{-2n}$$

Prawa strona równ. (29) jest całkowym szeregiem potęgowym typu Laypunowa-Schmidta.

Ponieważ,

$$\varphi(\xi) = \int_{\xi}^{\infty} E(\xi_1) d\xi_1$$

więc

$$E(\xi) = -\dot{\varphi}'(\xi) = \int_{\xi}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} (A_n^e + A_n^i) \varphi^n(\xi_1) d\xi_1$$

Szereg pod całką daje się zsumować i otrzymuje się następujące równanie nieliniowego oscylatora;

$$(30) \quad \varphi_{\xi\xi} = \frac{N_0 q}{\epsilon_0} \left\{ \frac{\alpha_e + U}{2\alpha_e} \left[ 1 + \frac{2q\varphi}{m_e(\alpha_e + U)^2} \right]^{1/2} + \frac{\alpha_e - U}{2\alpha_e} \left[ 1 + \frac{2q\varphi}{m_e(\alpha_e - U)^2} \right]^{1/2} - \left( 1 - \frac{2q\varphi}{m_i U^2} \right)^{-1/2} \right\}, \quad \varphi = \varphi(\xi)$$

gdzie przyjęto  $N_{e0} = N_{i0} = N_0$  oraz  $q_i = -q_e = q$  co zapewnia globalną neutralność plazmy. Pierwsze dwa wyrazy prawej strony równania stanowią gęstość elektronów  $\xi_e$  natomiast wyraz ostatni gęstość jonów  $\xi_i$ . Równanie (30) zapiszemy w następującej postaci wygodnej do obliczeń numerycznych

$$(31) \quad \varphi_{\xi\xi} = \frac{2\omega_{pe}^2}{\alpha_e^2} \left\{ \frac{1+\nu}{2} \left[ 1 + \frac{y}{(1+\nu)^2} \right]^{1/2} + \frac{1-\nu}{2} \left[ 1 + \frac{y}{(1-\nu)^2} \right]^{1/2} - (1-z^2 y)^{-1/2} \right\}$$

oraz

$$(31a) \quad y_\xi^2 = 4 \frac{\omega_{oe}^2}{a_e^2} \left\{ \frac{(1+\nu)^3}{3} \left[ \left( 1 + \frac{y}{(1+\nu)^2} \right)^{3/2} - 1 \right] + \right. \\ \left. + \frac{(1-\nu)^3}{3} \left[ \left( 1 + \frac{y}{(1-\nu)^2} \right)^{3/2} - 1 \right] + \frac{z}{z^2} \left[ (1-z^2 y)^{1/2} - 1 \right] \right\}$$

gdzie

$$y = \frac{2q\varphi}{m_e a_e^2}, \quad \nu = \frac{U}{a_e}, \quad z^2 = \frac{a_e^2 m_e}{U^2 m_i} = \frac{c_s^2}{U^2}, \quad \omega_{oe}^2 = \frac{N_0 q^2}{\epsilon_0 m_e}$$

Tak więc sprowadziliśmy abstrakcyjny szereg potęgowy do zwyczajnego szeregu potęgowego funkcji  $\varphi(\xi)$ . Szereg ten jest sumowalny do odpowiedniej kombinacji pierwiastków kwadratowych zawierających sumę lub różnicę energii potencjalnej i kinetycznej naładowanych cząstek plazmy. Takiego wyniku należało się spodziewać na podstawie analizy równań Własowa-Poissona (15) i (17) metodą charakterystyk. Bernstein, Greene, Kruskal [16] zastosowali tę metodę dla wyznaczenia stacjonarnych fal w pełni nieliniowego układu równań Własowa-Poissona. W części końcowej tej pracy będzie omówiona istotna różnica w podejściu BGK i tu przedstawionym. Równanie (30) może być rozwiązane analitycznie dla fal o małej amplitudzie, tj. gdy ograniczymy się do członów nieliniowych drugiego stopnia, i wtedy

$$\varphi = \frac{3d'}{\beta_0} \operatorname{sech}^2 \left[ (1/2) \sqrt{d'} (\xi - \xi_0) \right]$$

gdzie

$$d' = A_1^e + A_1^i, \quad \text{oraz} \quad \beta_0 = -(A_2^e + A_2^i).$$

Współczynniki  $d$  i  $\beta$  są tu wyznaczone z większą dokładnością niż w zwykle stosowanym hydrodynamicznym opisie jonowo-akustycznych solitonów. Korzystając z metody wykresów w płaszczyźnie fazowej, możemy wyznaczyć fale solitonowe dla przypadku pełnej dynamiki. Amplitudy tych fal solitonowych zawierają się

$$0 < y_a < 6.46$$

podczas gdy prędkość fali zmienia się odpowiednio

$$c_s < U < 2.54c_s$$

Zasluguje na uwagę to, że w plazmie składającej się z wielu rodzajów dodatnich jonów, tzn. o różnych masach i elektronów, przy zachowaniu globalnej neutralności plazmy, nie mogą powstać fale antysolitonowe.

b/ Plazma składająca się z gorących jonów i elektronów

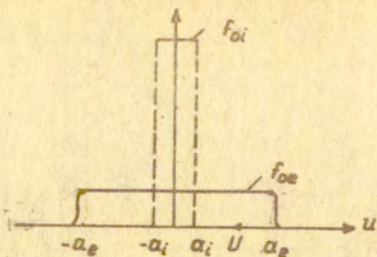
Przyjmujemy, że rozkład równowagowy elektronów i jonów jest następujący,

$$(32) \quad f_{oe}(u) = \frac{1}{2a_e} [H(u+a_e) - H(u-a_e)]$$

$$f_{oi}(u) = \frac{1}{2a_i} [H(u+a_i) - H(u-a_i)]$$

oraz zakładamy, że "temperatury" elektronów i jonów są jednokowe, tzn.  $a_i^2 m_i = a_e^2 m_e$  i ponieważ  $m_e \gg m_i$  więc  $a_e \gg a_i$  i relacje rozkładów (32) przedstawione na Rys.2. Przyjęcie takich rozkładów usprawiedliwia fakt, że jak wykażemy, prędkość fal solitonowych zawiera się  $a_i < U < 1,58a_i$ . Przyjmując rozkłady Maxwella dla jonów i elektronów

$$f_{\alpha\alpha}^M(u) = \frac{c_{\alpha\alpha}}{\sqrt{\pi}} e^{-c_{\alpha\alpha}^2 u^2}$$



Rys. 2.

mamy

$$\langle u_\alpha^2 \rangle = 1/2 C_\alpha^2 = \alpha_\alpha^2$$

Prędkość  $U = 1 / \sqrt{2} c_1 = a_1$  jest zarazem punktem przegięcia funkcji  $f_{oi}^M$  i dla  $u > a_1$  funkcja ta niemal pokrywa się z osią  $u$ . Następnie dla  $U < 1,58 a_1 \approx 3,7 \times 10^{-2} a_e$ , gdzie  $a_e/a_1 = (m_1/m_e)^{1/2} \approx 42,7$  dla elektronów i protonów, funkcja  $f_{oe}^M$  jest niemal równoległa do osi  $u$ . Zatem w otoczeniu  $u \approx U$  rozkłady Maxwellewskie mogą być aproksymowane przez rozkłady (32), eliminując wpływ tłumienia Landau'a. Kształt pozostałych części krzywych  $f_{oi}$  i  $f_{oe}$  wpływa w mniejszym stopniu na przebiegi rozwiązań faliowych. Plazma ze składnikiem jenowym o wielokrotnej masie protonu jest odpowiednio lepiej aproksymowana przez rozkłady (32) ponieważ  $a_e$  jest jeszcze większe od  $a_1$ .

Jądro  $K(x, t)$  rów. (24) przyjmuje postać;

$$K(x, t) = \sum_{\alpha} \frac{\omega_{0\alpha}}{2\alpha} [H(x + \alpha t) - H(x - \alpha t)], \quad \alpha = e, i$$

i liniowa część równania (24) daje się sprowadzić do liniowego operatora różniczkowego. Obliczając operację różniczkową

$$L_2 = (\partial_{tt}^2 - \alpha_e^2 \partial_{xx}) (\partial_{tt}^2 - \alpha_i^2 \partial_{xx})$$

z lewej i prawej strony (24), mamy

$$(33) \quad L_2 \{E\} + (\omega_{oe}^2 + \omega_{oi}^2) E_{ii} - (\alpha_e^2 \omega_e^2 + \alpha_i^2 \omega_i^2) E_{xx} = L_2 \left\{ P \left( \frac{x, t}{E} \right) \right\}$$

Zaniedbując prawą stronę (33) otrzymuje się równanie hiperboliczne czwartego rzędu z członem dyspersywnym. Równanie to dość znacznie odbiega od znanych równań hydrodynamiki ale dodając doń odpowiedni człon nieliniowy będzie ono prowadzić do rozwiązań typu fal solitonowych.

Podstawiając (32) do (24) i postępując tak jak w poprzednim przykładzie, otrzymuje się:

$$\varphi_{\xi\xi} = -\frac{1}{\epsilon_0} \sum_{\alpha} \xi_{\alpha} \quad , \quad \alpha = e, i$$

gdzie

$$(33a) \quad \xi_{\alpha} = N_{\alpha} q_{\alpha} \left\{ \frac{\alpha_{\alpha} + U}{2\alpha_{\alpha}} \left[ 1 - \frac{2q_{\alpha} \varphi(\xi)}{m_{\alpha} (\alpha_{\alpha} + U)^2} \right]^{1/2} + \frac{\alpha_{\alpha} - U}{2\alpha_{\alpha}} \left[ 1 - \frac{2q_{\alpha} \varphi(\xi)}{m_{\alpha} (\alpha_{\alpha} - U)^2} \right]^{1/2} \right\}$$

Przyjmując  $N_{oe} = N_{oi} = N_0$  oraz  $q_i = -q_e = q$  co zapewnia globalną neutralność oraz wprowadzając następujące oznaczenia

$$y = \frac{2q \varphi(\xi)}{m_e \alpha_e^2} \quad , \quad v_{\alpha} = \frac{U}{\alpha_{\alpha}} \quad , \quad \alpha = e, i$$

i pamiętając, że  $a_e^2 m_e = a_i^2 m_i$ , otrzymuje się

$$y = 2 \frac{\omega_e^2}{\alpha_e^2} \left\{ \frac{1+v_e}{2} \left[ 1 + \frac{y}{(1+v_e)^2} \right]^{1/2} + \frac{1-v_e}{2} \left[ 1 + \frac{y}{(1-v_e)^2} \right]^{1/2} \right. \\ \left. - \frac{1+v_i}{2} \left[ 1 - \frac{y}{(1+v_i)^2} \right]^{1/2} - \frac{1-v_i}{2} \left[ 1 - \frac{y}{(1-v_i)^2} \right]^{1/2} \right\}$$

Mnożąc ostatnie równanie przez  $y_\xi$ , całkując względem  $y$  i zakładając, że  $y(\pm\infty) = 0$  oraz ponieważ  $v_e \ll 1$ , a więc przyjmując  $1 \pm v_e \approx 1$ , możemy napisać

$$y_\xi^2 = 4 \frac{\omega_e^2}{\alpha_e^2} \left\{ \frac{2}{3} [(1+y)^{3/2} - 1] + \frac{(1+v_i)^3}{3} \left[ \left(1 - \frac{y}{(1+v_i)^2}\right)^{3/2} - 1 \right] - \right. \\ \left. + \frac{(1-v_i)^3}{3} \left[ \left(1 - \frac{y}{(1-v_i)^2}\right)^{3/2} - 1 \right] \right\}$$

Korzystając z metod płaszczyzny fazowej, możemy wyznaczyć fale solitonowe dla pełnej nieliniowości plazmy. Amplitudy fal solitonowych zawierają się

$$0 < y_a < 0.34$$

podczas gdy prędkość fali zmienia się odpowiednio

$$\alpha_i < U < 1.58 \alpha_i$$

Przypominamy, że przyjęte przybliżenia rozkładu jonowego przy pomocy funkcji skeku jednostkowego jest znacznie gorsze dla  $a_1 \lesssim U$  niż dla  $U \lesssim 1.58 a_1$ .

W przypadku kombinacji wielu składników jonowych o różnych masach i temperaturach nie można doprowadzić do odpowiedzi plazmy w postaci fal antysolitonowych.



c/ Plasma składająca się z gorących elektrenów oraz zimnych jonów dodatnich i ujemnych.

Przyjmujemy, że rozkłady równowagowe elektrenów i jonów dodatnich i ujemnych są:

$$(34) \quad f_{oe}(u) = \frac{1}{2\alpha_e} [H(u + \alpha_e) - H(u - \alpha_e)], \quad f_{oi}^+(u) = f_{oi}^-(u) = \delta(u)$$

Jądro  $K(x, t)$  jest tu postaci (25a) a zatem i część liniowa rów. (24) przyjmują postać (26), a więc

$$L_1 = \partial_{tt} (\partial_{tt} - \alpha_e^2 \partial_{xx})$$

$$L_1 \{E\} + (\omega_{oe}^2 + \omega_{oi}^{*2} + \omega_{oi}^{-2}) E_{tt} - (\omega_{oi}^{*2} + \omega_{oi}^{-2}) E_{xx} = L_1 \{P(x, t)\}$$

W celu spełnienia założenia całkowitej neutralności plazmy, zakładamy  $N_{oi}^+ = N_{oe} + N_{oi}^-$  oraz  $S_e + S_i = 1$ , gdzie  $S_e = N_{oe}/N_{oi}^+$  i  $S_i = N_{oi}^-/N_{oi}^+$ . Następnie, tak jak w przykładach a/ i b/, przyjmuje się jednowartościowe jony, tzn.  $q_1^+ = -q_1^- = -q_e = q$ .

Podstawiając (34) do (24) i postępując tak jak w poprzednich przykładach, otrzymuje się:

$$(35) \quad \varphi_{\xi\xi} = -\frac{1}{\epsilon_0} (\varrho_e + \varrho_i^- + \varrho_i^+)$$

gdzie

$$\varrho_e = -N_{oe} q \left\{ \frac{1 + \nu_e}{2} \left[ 1 + \frac{y}{(1 + \nu_e)^2} \right]^{1/2} + \frac{1 - \nu_e}{2} \left[ 1 + \frac{y}{(1 - \nu_e)^2} \right]^{1/2} \right\}$$

(36)

$$\varrho_i^- = -N_{oi}^- q [(1 + Rz^2y)^{-1/2}], \quad \varrho_i^+ = N_{oi}^+ q [(1 - z^2y)^{-1/2}]$$

gdzie

$$y = \frac{2q\varphi}{m_e a_e^2}, \quad R = \frac{m_i^*}{m_i}, \quad z^2 = \frac{m_e a_e^2}{m_i^* U^2} = \frac{c_s^{*2}}{U^2}$$

Mnożąc rów. (35) przez  $\varphi_\xi$  i całkując względem  $\varphi$  otrzymuje się równanie, które rozwiązuje się metodą płaszczyzny fazowej

$$(37) \quad y_\xi^2 = 4 \frac{\omega_e^2}{a_e^2} \left\{ S_e \frac{(1+\nu_e)^3}{3} \left[ (1+y/(1+\nu_e)^2)^{3/2} - 1 \right] + S_e \frac{(1-\nu_e)^3}{3} \left[ (1+y/(1-\nu_e)^2)^{3/2} - 1 \right] \right. \\ \left. + \frac{2S_i}{Rz^2} \left[ (1+Rz^2y)^{1/2} - 1 \right] + \frac{2}{z^2} \left[ (1-z^2y)^{1/2} - 1 \right] \right\},$$

gdzie  $\omega_e^2 = N_{oi}^* q^2 / m_e \epsilon_0$  oraz  $y(\pm\infty) = 0$

Dla małych amplitud, tzn.  $|y| \ll 1$ ,  $|z^2y| \ll 1$  i  $|Rz^2y| \ll 1$ , możemy prawą stronę rów. (35) rozwinąć w następujący szereg potęgowy

$$(38) \quad y = (2\omega_e^2/a_e^2) [\delta y + \beta_0 y^2 - \beta y^3 + \dots]$$

gdzie

$$\delta = \frac{1}{2} (S_e - S_i R z^2 - z^2), \quad \beta_0 = \frac{1}{8} (-S_e + 3S_i R z^4 - 3z^4)$$

$$\beta = \frac{1}{16} (-S_e + 5S_i R z^6 + 5z^6).$$

Przyjęto, że  $\nu_e \ll 1$  i  $1 \pm \nu_e \approx 1$ .

Dobieramy  $S_e$ ,  $R$  i  $z^2$  tak by otrzymać rozwiązanie rów. (38) w postaci solitonów Zacharewa. Jeżeli

$$S_e = \frac{3z^4(R^2-1)}{1+3R^2z^4} \text{ oraz } R > 3$$

wtedy  $\beta_0 = 0$ ,  $\sigma > 0$ ,  $\beta > 0$  i otrzymujemy rozwiązanie rów. (38) w postaci:

$$(38a) \quad y = \pm \sqrt{2\delta/\beta} \operatorname{sech} [V\sigma (\xi - \xi_0)]$$

Odpowiedź trójskładnikowej plazmy, tu rozpatrywanej dla składnika o ujemnych jonach przynajmniej trzy razy lżejszy od jonów dodatnich, może mieć charakter solitonów Zacharewa, tj. solitonów i antysolitonów nie występujących w opisie hydrodynamicznym plazmy. Przytoczymy kilka przykładów numerycznych:

(i) dla  $R = 4$ ,  $S_0 = 0,886$  wyznaczone solitony Zacharewa o amplitudach  $y_a \approx \pm 0,161$  przy prędkości  $U \approx 1,291 C_s^+$  i weryfikując założenia małych amplitud mamy  $|z\dot{y}_a| \approx 0,097$ ,  $|Rz\dot{y}_a| \approx 0,387$ , (ii) dla  $R = 4$ ,  $S_0 = 0,888$  mamy  $y_a \approx \pm 0,0241$ , przy prędkości  $U \approx 1,276 C_s^+$  oraz  $|z\dot{y}_a| \approx 0,015$  i  $|Rz\dot{y}_a| \approx 0,059$ ; (iii) dla  $R = 6$ ,  $S_0 = 0,956$  mamy  $y_a = \pm 0,090$  przy prędkości  $U \approx 1,155 C_s^+$  oraz  $|z\dot{y}_a| \approx 0,051$  i  $|Rz\dot{y}_a| \approx 0,304$ ; (iv) i dla  $R = 10$ ,  $S_0 = 0,986$  mamy  $y_a = \pm 0,066$  przy prędkości  $U \approx 1,085 C_s^+$  oraz  $|z\dot{y}_a| \approx 0,056$  i  $|Rz\dot{y}_a| \approx 0,56$ . Ostatni przykład niezbyt dobrze spełnia założenie rozwinięcia w szereg potęgowy wyrażenia

$$(1 + Rz^2y)^{-1/2}$$

Korzystając z metody płaszczyzny fazowej, możemy wyznaczyć fale solitonowe i antysolitonowe, bez ograniczenia amplitudy, na podstawie rów. (37).

Przytoczymy kilka numerycznie rozwiązanych przykładów:

(i) Dla  $S_0 = 0,9$  i  $R = \frac{n_1^+}{m_1^-} = 4$  wyznaczone falę solitonową o amplitudzie  $y_a^+ \approx 1,7$  i antysolitonową o amplitudzie  $y_a^- = -0,6$ , propagującą się z prędkością  $U \approx 1,561 c_s^+$ .

Przy zadanym składzie plazmy, tj. 90% elektronów oraz 10% jonów ujemnych zneutralizowanych przez jony dodatnie o masie 4-krotnie większej od masy jonów ujemnych, możemy spodziewać się zarówno fal solitonowych jak i antysolitonowych w pewnym zakresie prędkości propagacji tych fal.

Bardziej ogólnie mówiąc, może pojawić się, przy pewnych proporcjach składników, zakres prędkości, dla którego będą istnieć tylko fale solitonowe lub antysolitonowe.

(ii) Dla  $S_e = 0.747$  i  $R = 16$  wyznaczone fale antysolitonową o amplitudzie  $y_a^- \approx -0,98$  propagującą się z prędkością  $U \approx 4c_s^+$  i dla tej prędkości nie istnieje fala solitonowa. Natomiast, dla prędkości  $U \approx 2,673c_s^+$  występuje soliton o znacznej amplitudzie  $y_a^+ \approx 6,75$  i antysoliton o bardzo małej amplitudzie, tj.  $y_a^- \approx -0.05$ .

(iii) Dla  $S_e = 0.99$  i  $R = 20$  wyznaczone fale solitonową o amplitudzie  $y_a^+ \approx 1,365$  propagującą się z prędkością  $U \approx 1,414c_s^+$  i dla tej prędkości nie może istnieć fala antysolitonowa. Natomiast, dla prędkości  $U \approx 1,118c_s^+$  występuje fala solitonowa o amplitudzie  $y_a^+ \approx 0.25$  i antysolitonowa o amplitudzie  $y_a^- = -0.025$ .

(iv) Dla  $S_e = 0,4$  i  $R = 20$  wyznaczone fale solitonową o amplitudzie  $y_a^+ \approx 33$  i antysolitonową o amplitudzie  $y_a^- \approx -0,225$  propagujące się z prędkością  $U \approx 5,77c_s^+$ . Przypadek ten wyróżnia się dużą amplitudą fali solitonowej nie występującą w plazmie dwuskładnikowej. Stosunek energii potencjalnej do energii kinetycznej poruszających się elektronów, tj.

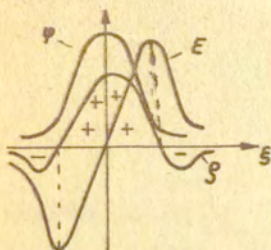
$$y_a = q \varphi_a / (m_e \sigma_e^2 / 2)$$

wynosi aż 33.

(v) Dla  $S_e = 0,99$  i  $R = 0,1 / 10$  razy lżejsze jony dodatnie od jonów ujemnych/ wyznaczone fale solitonową o amplitudzie  $y_a^+ = 0,94$  propagującą się z prędkością  $U \approx 1,29c_s^+$ .

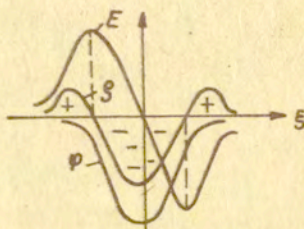
## 7. Struktura fal solitonowych i antysolitonowych

Na Rys. 3 i 4 przedstawione przebieg potencjału elektrycznego  $\varphi(\xi)$ , pola elektrycznego  $E(\xi)$  i gęstości ładunku elektrycznego  $\rho(\xi)$  fal solitonowych i antysolitonowych w zależności od zmiennej  $\xi = x - Ut$ .



Rys. 3

Przebieg potencjału, pola i gęstości ładunku solitonu.



Rys. 4

Przebieg potencjału, pola i gęstości ładunku antysolitonu.

Przypominamy, że  $E = -\varphi_{\xi}$  oraz  $\rho = -\epsilon_0 \varphi_{\xi\xi}$ . Punktowi ekstremum przebiegu  $\varphi$  dla  $\xi = 0$  odpowiada punkt przegięcia funkcji  $E(\xi)$  i następnie punkt ekstremum funkcji  $\rho(\xi)$ . Natomiast punktem przegięcia funkcji  $\varphi(\xi)$  odpowiadają punkty ekstremum funkcji  $E(\xi)$  i następnie punkty zerowe funkcji  $\rho(\xi)$ . Soliton stanowi więc "zgęstka" ładunku dodatniego otoczonego "zgęstką" elektrenowym. Zgęstka ładunku dodatniego zajmuje ograniczoną centralną część solitonu natomiast nadmiar elektronów otaczających część centralną ma z każdej strony minimum i zanika wykładniczo do zera dla  $\xi \rightarrow \pm\infty$ . Całkowity ładunek fali solitonowej i antysolitonowej jest równy zero, tzn.

$$\frac{1}{\epsilon_0} \int_{-\infty}^{\infty} \rho(x - Ut) dx = \varphi_{\xi}(-\infty) - \varphi_{\xi}(+\infty) = 0$$

Również, jak widać z Rys. 3 i 4, znikają następujące całki

$$(39) \quad \int_{-\infty}^{\infty} E(x-Ut) J(x-Ut) dx = U \int_{-\infty}^{\infty} E(x-Ut) g(x-Ut) dx = 0$$

oraz

$$\int_{-\xi}^{\xi} E(\xi_1) J(\xi_1) d\xi_1 = 0 \quad \text{dla każdego } \xi.$$

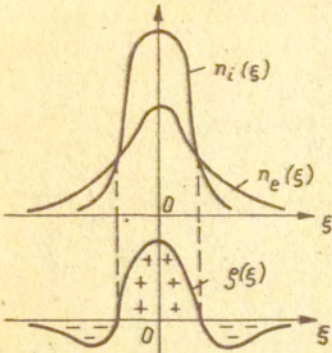
Oznacza to, że przepływ energii pola elektrycznego solitenu i antysolitenu jest zero lub, że zachowana jest zarówno energia elektryczna jak i kinetyczna. Nie występuje więc przepływ energii pola elektrycznego do energii kinetycznej cząstek lub odwrotnie. Z falą solitenuwą i antysolitenuwą związany jest tylko przepływ energii kinetycznej cząstek, które związane są z przepływem fali. Na Rys.5,6 i 7 przedstawione przebiegi zgęszczeń i rozrzedzeń cząstek składników plazmy dla fal solitenuwych i antysolitenuwych, tj.

$$(39a) \quad n_e(\xi) = N_e(\xi) - N_{oe}, \quad n_i^-(\xi) = N_i^-(\xi) - N_{oi}^- \\ n_i^+(\xi) = N_i^+(\xi) - N_{oi}^+, \quad g = q n(\xi)$$

Wszystkie przebiegi tych zgęszczeń mają kształt dzwonowy i w tym sensie przybliżenia hydrodynamicznego opisu gęstości (14) potwierdzają się, natomiast nie potwierdza się przebieg  $u^{(1)}$ , ponieważ

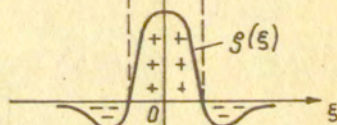
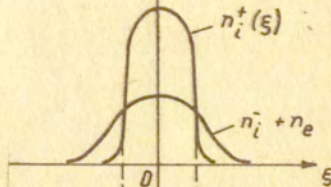
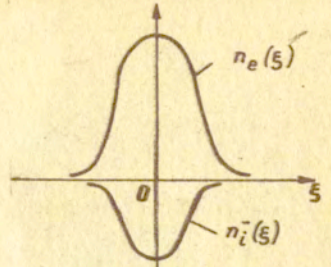
$$qu^{(1)} = J = U \cdot g$$

co związane jest z tym, że rozkłady gęstości jonów i elektronów nie są równe. Na Rys.5 przedstawione te przebiegi dla fali solitenuwej dwuskładnikowej plazmy. W części centralnej solitenu, tj. między punktami przegięcia funkcji potencjału  $\varphi(\xi)$  przeważa zgęszczenie jonów nad zgęszczeniem elektronów podczas



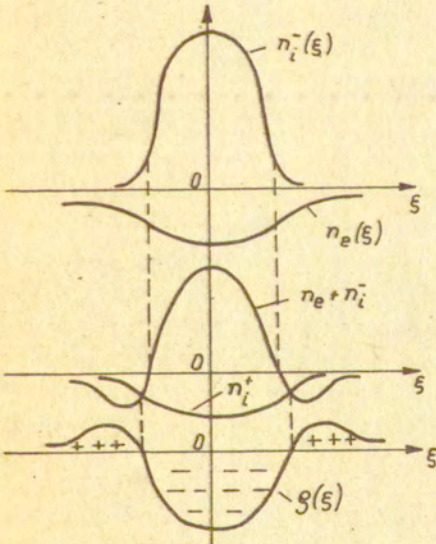
Rys. 5

Przebiegi zgęszczenia jonów- $n_i$  i elektronów- $n_e$  dla zęstka solitonowego- $\xi^e$  plazmy dwuskładnikowej.



Rys. 6

Przebiegi zgęszczenia jonów- $n_i^+$  i elektronów- $n_e$  oraz rozrzedzenia jonów ujemnych- $n_i^-$  dla zęstka solitonowego- $\xi$ , plazmy trójskładnikowej.



Rys. 7. Przebiegi zgęszczenia jonów ujemnych- $n_i^-$  i rozrzedzenia elektronów- $n_e$  oraz dodatnich jonów- $n_i^+$  dla zęstka antysolitonowego- $\xi$  plazmy trójskładnikowej.

gdym na zewnątrz obszaru centralnego przeważa zgęszczenie elektronów. Przepływ energii związany z propagacją solitonu wynosi

$$(40) \quad S_K = U \left( \frac{M_e U^2}{2} + \frac{M_i U^2}{2} \right)$$

gdzie

$$M_e = m_e \int_{-\infty}^{\infty} n_e(\xi) d\xi, \quad M_i = m_i \int_{-\infty}^{\infty} n_i(\xi) d\xi \quad [kg/m^2]$$

Tak więc fala solitonowa stanowi makro-cząstkę typu kulombewskiego o masie bezwładności  $M_e + M_i$ . Znając strukturę tej makro-cząstki możemy przewidywać wiele własności fizycznych fal solitonowych, a w szczególności efekty oddziaływań zderzeniowych i promieniowanie związane z zaburzeniem ruchu jednostajnego solitonu. Fala solitonowa może istnieć dla pewnego zakresu prędkości  $U$  i od tej prędkości zależy amplituda solitonu  $\varphi_a$ . Ze wzrostem prędkości  $U$  rośnie amplituda  $\varphi_a$ . Dla maksymalnej amplitudy  $\kappa \varphi_{a,m} = m_i U^2/2$  gęstość jonowa jest nieograniczona lecz cała z tej gęstości względem  $\xi$  istnieje i stanowi maksymalną ilość jonów (schwytych) a zatem i największą energię kinetyczną makro-cząstki.

Elektrony o energiach  $m_e a^2/2$  są również schwytywane w jamie potencjału dodatniego ale ich gęstość w centralnej części jest mniejsza niż gęstość jonów, natomiast w obszarze otaczającym jest odwrotnie. Jony o prędkościach  $U > (2\kappa \varphi_{a,m} / m_i)^{1/2}$  nie mogą być schwytywane w jamie potencjału i nie biorą udziału w tworzeniu "zgęstka solitonowego". Różny przebieg gęstości jonów i elektronów we wspólnym polu elektrycznym jest wywołany tym, że gorące elektrony i zimne jony są na różnych "poziomach energetycznych". W pewnym zakresie prędkości naddźwiękowych  $U$  ( $1 < U/c_s < U_m/c_s$ ) przebieg tych gęstości jest taki, że  $g(\xi)$  odpowiada drugiej pochodnej potencjału  $\varphi_{\xi\xi}$  i ten potencjał ma kształt "dzwonowy". Udział w tworzeniu solitonu mogą brać tylko te jony, które mają prędkości w przedziale określonym dla danego



składu plazmy.

Peuczający przykład, omówiony w punkcie b/ poprzedniego rozdziału, stanowią solitony w plazmie o gorących elektronach i jonach, tzn.

$$m_e a_e^2 / 2 = m_i a_i^2 / 2 ,$$

czyli w stanie równowagowym jony i elektrony są na tym samym poziomie energetycznym.

Zgodnie z wzorami (33a), przebieg  $n_1(\xi)$  i  $n_e(\xi)$  dla odpowiedniego przedziału prędkości  $U$  będzie taki jak na Rys.5. Prędkość fali solitonowej  $U$  jest tu odniesiona do prędkości termicznej jonów  $a_i$  i zawiera się w przedziale

$$a_i < U < 1.58 a_i = U_m .$$

Nie mamy więc tu do czynienia z falą akustyczną.

Według interpretacji stosowanej w odniesieniu do oscylatorów nieliniowych, mamy tu następującą sytuację. Jony o energii  $m_i (a_i - U)^2 / 2$ , która jest znacznie mniejsza od energii elektronów  $m_e (a_e \pm U)^2 / 2 \approx m_e a_e^2 / 2$ , zostaną schwyte w jamie potencjalnej, dając zgęstka jonowy, który jest równoważony przez zgęstka gorących elektronów o przebiegu gęstości  $\rho_e$  bardziej płaskim. W rezultacie otrzymamy przebieg gęstości w postaci podanej na Rys.5. Natomiast jony o energii  $m_i (a_i + U)^2 / 2$  nie mogą być schwyte, ponieważ ich energia jest znacznie większa od energii gorących elektronów i od maksymalnej energii potencjalnej jamy potencjału. Również i w tym przypadku, występowanie fal solitonowych związane jest z cząstkami na różnych "poziomach energetycznych" fali solitonowej.

Masa solitonu równa się masie zgęstka jonowego oraz masie zgęstka elektronowego z tym, że tę ostatnią możemy pominąć. Natomiast ładunek części centralnej solitonu, tj. jego jądra równa się ładunkowi zgęstka jonowego pomniejszonemu przez ładunek zgęstka elektronowego. W obszarze zewnętrznym rozłożony jest ładunek neutralizujący ładunek jądra.

Fale solitonowe trójskładnikowej plazmy, Rys.6, powstają w wyniku bardziej stromej przebiegu gęstości jonów w stosunku do przebiegu sumy koncentracji elektronów i jonów ujemnych. Zgęsz-

czeniu jonów dodatnich i elektrenów towarzyszy rozrzedzenie jonów ujemnych. W wyniku tego otrzymuje się większe amplitudy potencjału fali  $\varphi_a$  i z tym związane większe prędkości fali  $U$ . Masa jądra selitenu równa się masie zgęstka jonów dodatnich pomniejszonej przez masę rozgęszczenia jonów ujemnych. Natomiast ładunek jądra jest ładunkiem zgęstka jonów dodatnich pomniejszony przez ujemny ładunek zgęstka elektrenowego i powiększony przez ubytek ładunku jonów ujemnych. Im mniejsze masy jonów ujemnych tym ich większe rozrzedzenie i większa amplituda selitenu  $\varphi_a$  oraz jego prędkość.

Fale antyselitenowe, Rys. 7, których nie obserwuje się w plazmie dwuskładnikowej, otrzymuje się dzięki stromej charakterystyce koncentracji jonów ujemnych.

Wypadkowa charakterystyka koncentracji jonów ujemnych i elektrenów wykazuje zgęszczenie w części centralnej - uwidocznionej na Rys. 7, i rozrzedzenie w pozostałym obszarze. Zgęszczeniu jonów ujemnych odpowiada rozrzedzenie elektrenów i rozrzedzenie jonów dodatnich. W obszarze otaczającym występuje dodatnie zgęszczenie ładunku wynikające z przewagi rozrzedzenia elektrenów nad rozrzedzeniem jonów dodatnich. Dodatnia gęstość ładunku w obszarze zewnętrznym w stosunku do części centralnej wykazuje dwa wyraźne maksima. Masa jądra antyselitenu składa się z masy zgęstka ujemnych jonów pomniejszonej przez masę rozrzedzenia jonów dodatnich. Natomiast ładunek jądra antyselitenu składa się z ładunku zgęstka jonów ujemnych powiększonego przez ładunek rozrzedzenia jonów dodatnich i pomniejszony przez rozrzedzenie elektrenów.

Rozpatrzmy zagadnienie pobudzania fal selitonowych. W modelu rozpatrywanym w tym i poprzednim rozdziale, nie może być przekazana energia kinetyczna cząstek pelu elektrycznemu i odwrotnie w skali całego obszaru i w każdej chwili czasowej, co wyraża wzór (39). Pobudzenie plazmy może więc być realizowane przez strumień jonów o jednakowych prędkościach  $U$ , przyczym  $U$  zawiera się w zakresie prędkości selitenów danego składu plazmy. W celu zachowania ograniczeń nałożonych na warunki początkowe /Rozdz. 4/, strumień pobudzający nie może wprowadzać dodatkowego ładunku i dodatkowych cząstek. Przy takim pobudzeniu mogą pew-

stać solitony o jednakowych prędkościach, amplitudzie i energii. Od koncentracji jonów wiązki pobudzającej, czyli od ilości jonów, może zależeć tylko ilość fal solitonowych i będzie ona wyznikać z ilości jonów w zgęstkach jonych. W każdym zgęstku jonym znajduje się niezmienna ilość jonów, dla ustalonej prędkości  $U$ . Sytuacja jest tu podobna do efektu fotoelektrycznego, gdzie energia fotoelektronów jest proporcjonalna do częstości pobudzającej fali monochromatycznej a ich ilość od natężenia tej fali. Na podstawie obliczeń numerycznych zauważono, że ze wzrostem prędkości solitonu dwuskładnikowej plazmy rośnie masa zgęstka jonego, który stanowi masę jądra solitonu, przy czym zależność ta ma następującą postać

$$M_i(U) = h(U) \cdot M_i(U_m) \quad \text{dla } c_s < U < U_m$$

gdzie  $h(U)$  jest funkcją monotonicznie rosnącą i przyjmuje następujące wartości  $h(c_s) = 0$  oraz  $h(U_m) = 1$ . Całkowita energia solitonu będzie energią kinetyczną jego jądra, tj.

$$W_k = U^2 h(U) \cdot M_i(U_m) / 2$$

gdzie  $M_i(U_m)$  jest maksymalną masą solitonu.

Odpowiedź plazmy na zaburzenie wiązką jonów o jednakowych prędkościach wyraża się solitonami o stałych prędkościach i energiach, przy czym zależność energii od prędkości jest nieliniową funkcją monotonicznie rosnącą.

## 8. Zderzenia solitonów i antysolitonów

Na podstawie przedstawionej struktury fal solitonowych ładunku przestrzennego można wnioskować o oddziaływaniu zderzeniowym tych fal. Rozpatrzmy przypadek dwóch identycznych solitonów o jednakowych ce do wartości prędkościach  $U$  lecz przeciwnie skierowanych. Będą one zbliżać się do siebie z prędkością  $2U$  a płaszczyzna symetrii tzn. płaszczyzna jednakowe odległa od każdego solitonu, znajdować będzie się w punkcie  $x = x_0$ .

Solitonny zbliżając się do siebie będą odpychać się elektrestatycznie zmniejszając swoją prędkość i zmieniając kształt. Energia kinetyczna solitonów będzie przekazywana energii pola elektrycznego. Na płaszczyźnie symetrii wypadkowe pole elektryczne jest zawsze zero a potencjał tego pola posiada ekstremum czyli możemy ją traktować jako płaszczyznę doskonale przewodzącą. W miarę przekazywania energii kinetycznej solitonów rośnie energia potencjalna układu. Zbliżanie się solitonów powoduje ładowanie elektryczne płaszczyzny przewodzącej, tak jak ładowanie kondensatora z centralną płaszczyzną zasilaną dodatnim potencjałem i dwoma bocznymi płaszczyznami umieszczonymi w  $\pm \infty$  a potencjale zerowym. Oznacza to, że w otoczeniu płaszczyzny symetrii zbiera się ładunek elektryczny ujemny tak jak w kondensatorze plazmowym. Ze zmniejszeniem się prędkości odpychających się solitonów przestają obowiązywać przyjęte przez nas przybliżone przedstawienie rozkładu गरących elektronów i zimnych jonów przy pomocy rozkładów (25).

Przedstawienie to oparte jest na założeniu, że dla prędkości fali  $U$  rozkłady te zmieniają się według płaskiej krzywej równoległej do osi  $u$  /Rys.1/. Dla małych prędkości  $U$  należałoby przyjąć rozkłady równowagowe Maxwella i rozwiązać odpowiedni problem początkowy. Stanowi to niezwykle trudny problem. Natomiast w przypadku gdy całkowita energia kinetyczna solitonów zostanie przekazana polu w otoczeniu płaszczyzny symetrii, wtedy będziemy mieć do czynienia z elektrestatycznym zagadnieniem brzegowym kondensatora symetrycznego. Pole w tym kondensatorze opisane jest równaniem, patrz np. [18]

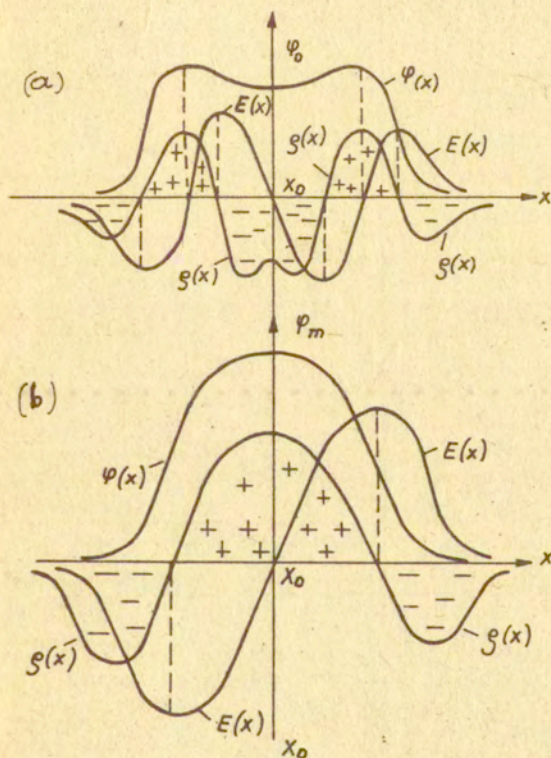
$$(41) \quad \varphi_{xx} = -\frac{1}{\epsilon_0} (\rho_e + \rho_i)$$

$$\rho_e = \frac{-q \tilde{N}_0}{\int_{-\infty}^{\infty} e^y dx} e^y, \quad \rho_i = \frac{q \tilde{N}_0 e^{-z^2 y}}{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-z^2 y} dx}$$

gdzie

$$y = q \psi / \kappa T_e, \quad z^2 = T_e / T_i \gg 1.$$

Rys.8 przedstawia przebiegi potencjału  $\varphi(x)$ , pola  $E(x)$  oraz gęstości ładunku  $g(x)$  dla potencjału  $\varphi_0$  i  $\varphi_m$  płyty centralnej kondensatora. Potencjał  $\varphi_m$  jest największym potencjałem ekranowania, tj. potencjałem progowym powyżej, którego układ przestaje gromadzić ładunek wokół płyty tak jak nieliniowy kondensator plazmowy i staje się b. dobrym przewodnikiem. Płyta centralna nie może więc w zasadzie osiągnąć większego potencjału.



Rys.8. Przebiegi potencjału -  $\varphi(x)$ , pola elektrycznego -  $E(x)$  i gęstości ładunku plazmowego -  $g(x)$  przewodzącej płyty centralnej o potencjale a/  $\varphi_0 < \varphi_m$ , b/  $\varphi_m$  - maksymalny potencjał ekranowania.

Jeżeli suma kinetycznej energii obu solitonów będzie mniejsza od maksymalnej energii nieliniowego kondensatora plazmowego, wtedy stan "elektrostatyczny", tj. zatrzymanie się solitonów, nastąpi w momencie pokazanym na Rys.8a. W przypadku gdy energia kinetyczna obu zderzających się solitonów będzie równa energii potencjalnej ładunku przestrzennego skupionego w otoczeniu płaszczyzny symetrii, wówczas stan elektrostatyczny będzie jak na Rys.8b. Zwraca się uwagę, że przebiegi  $\varphi(x)$ ,  $-E(x)$  i  $\xi(x)$  dla symetrycznego kondensatora plazmowego /Rys.8a/, mają taki kształt jak suma odpowiednich charakterystyk obu identycznych solitonów. Stan elektrostatyczny jest stanem zderzenia obu solitonów. Od tej chwili rozpoczyna się reładowanie ładunku przestrzennego skupionego wokół płaszczyzny symetrii, tj. odbicie się solitonów. Całkowita energia potencjalna zostanie przekazana energii kinetycznej solitonów, które po dostatecznie długim czasie będą prepagować się z tymi samymi prędkościami i będą tego samego kształtu jak gdyby nie nastąpiło zderzenie. Oczywiście wynikiem zderzenia będzie fazowe opóźnienie w czasie obu fal solitonowych. Jeżeli jony solitonu znajdującego się po lewej stronie płaszczyzny symetrii przed zderzeniem oznaczylibyśmy te po zderzeniu te same jony znajdowałyby się też po lewej stronie. Podobnie byłoby ze zgrupowaniem jonowym prawej strony. Opisane zderzenie jest analogiczne do zderzenia kulek doskonale sprężystych z tym, że w miejsce energii sprężystej występuje energia potencjalna ładunku przestrzennego.

Weryfikacja doświadczalna opisanego zjawiska mogłaby zostać zrealizowana przez pobudzenie dwóch solitonów o jednakowych lecz przeciwnych prędkościach metodą reładowania symetrycznego kondensatora plazmowego, tj. siatkowej elektrody centralnej o potencjale nie większym niż  $\varphi_m$  i dwóch elektrod o potencjale zerowym umieszczonych z obu stron elektrody centralnej w odległości wielu długości Debye'a, tj. umieszczonych w nieskończoności. Jeżeli energia obu solitonów przekracza energię ładowania płyty symetrycznej, wtedy nie wszystkie jony zostaną "wyhamowane" do zerowych prędkości i w równych ilościach przejdą z lewej strony do prawej strony płaszczyzny symetrii i odwrotnie, tak że prąd i pole elektryczne na płaszczyźnie symetrii

będą równe zero. Po każdej stronie płaszczyzny znajdują się jony wyładowania i te, które przedostały się z przeciwnej strony. Od chwili "naładowania" centralnej płyty rozpoczyna się ruch szęstków plazmowych po każdej stronie płyty centralnej. Energia kinetyczna tych szęstków to energia kinetyczna jonów, które przedostały się przez płaszczyznę symetrii i jonów zwolnionych do prędkości zerowych następnie przyspieszanych energią potencjalną rozładowania elektrycznego, tj. "odbitych". Mamy więc tu do czynienia z transmisją części energii kinetycznej przez płaszczyznę symetrii i całkowitym odbiciem pozostałej części energii.

W przypadku dwóch różnych solitonów zbliżających się do siebie płaszczyzna zerowego pola elektrycznego znajdzie się bliżej mniejszego i wolniejszego solitonu. Następnie, w miarę zbliżania się solitonów i tym samym wyrównywania się ich prędkości i amplitud, płaszczyzna ta będzie przesuwać się w kierunku większego solitonu. W momencie pełnego "naładowania" tej płaszczyzny będzie ona miała prędkość w kierunku solitonu, który miał większą prędkość. W wyniku energii pędu tego szęstka i energii rozładowania elektrestatycznego nastąpi całkowite odbicie podobne do odbicia doskonale sprężystych kulek o różnych energiach kinetycznych. Gdy suma energii solitonów jest większa niż maksymalna energia ekranowana elektrestatycznego wtedy mamy znowu do czynienia z transmisją tej samej części energii kinetycznej solitonów przez poruszającą się płaszczyznę, z każdej jej strony. Wehce praw zachowania - jakie spełnia układ równań Własewa-Peissena odbicie i transmisja jonów nie wprowadza zmian w kształcie i prędkości solitonów po dostatecznie długim czasie od chwili zderzenia. W podobny sposób można ustalić mechanizm zderzenia solitonu większego ścigającego soliton mniejszy. Moment zderzenia jest określony chwilą czasową, w której solitony zrównają swe prędkości i amplitudy, tj. chwila naładowania płaszczyzny symetrii. Prędkość tego szęstka będzie prędkością wypadkową solitonów przed zderzeniem i wyniesie będzie tyle ile wynika z prawa zachowania energii. Równe pereje energii każdego solitonu ulegną zamianie na energię elektrestatyczną centralnego szęstka jonowego. Energia kinetyczna szybszego solitonu - związana z

jego hamowaniem - zostanie przekazana na przyspieszenie mniejszego solitonu. Jednocześnie będzie zwiększać się ładunek przestrzenny w eteczeniu płaszozyzny symetrii, względem której lewy i prawy zgęstek będzie symetryczny i nieruchomy w chwili zderzenia. "Odbicie" nastąpi kosztem energii elektrestatycznej rezładowania i energii pędu symetrycznego zgęstka. Bilans energetyczny przed zderzeniem, w czasie zderzenia i po zderzeniu będzie następujący:

$$W_1 + W_2 \Rightarrow W_{el-st} + W_{pędu} \Rightarrow \frac{1}{2} W_{el-st} + W_{pędu} + W_{pędu} - \frac{1}{2} W_{el-st} \Rightarrow W_1 + W_2$$

gdzie

$$W_1 > W_2, \quad W_1 = \frac{1}{2} W_{el-st} + W_{pędu}, \quad W_2 = W_{pędu} - \frac{1}{2} W_{el-st}$$

$$W_1 + W_2 = 2W_{pędu} = 2W_{el-st}$$

oraz  $W_1$  i  $W_2$  jest energią kinetyczną jonów odpowiednio większege i mniejszego solitonu, natomiast  $W_{pędu}$  przedstawia energię kinetyczną symetrycznego zgęstka w chwili zderzenia i  $W_{el-st}$  jest energią elektrestatyczną ładunku przestrzennego tego zgęstka.

Inny jest mechanizm zderzenia antyselitonu i solitonu. Zbliżanie się tych fal przewadzić będzie do zwiększania ich prędkości wynikającej z sił przyciągania różnoimiennych ładunków. Soliton lub antyseliton, który pierwszy osiągnie maksymalną prędkość a zatem i maksymalną amplitudę ulegnie rozpadowi. Jony, które osiągnęły prędkości większe od prędkości maksymalnej fali solitonowej lub antyselitonowej nigdy już nie będą tworzyć tej fali. Zostaną one po dostatecznie długim czasie rozproszone w całym obszarze plazmy. Dotyczy to zarówno jonów dodatnich jak i ujemnych.

Można wprowadzić umowne pojęcie "płaszczozyzny wyładowania" o zerowym ładunku, znajdującej się między solitonem i antyselitonem posiadającą zerowy potencjał i różne od zera natężenie



pela elektrycznego, osiągające na tej płaszczyźnie ekstremum. Płaszczyzna ta odgrywa istotną rolę w procesie zderzeniowym podobnie jak w przypadkach zderzeń dwóch selitenów płaszczyzna ładowania o zerowym polu elektrycznym i różnym od zera potencjale i gęstości ładunku przyjmujących ekstremalne wartości, /Rys.8/. Płaszczyzna ta może być zlekalizowana w jednym miejscu tylko w przypadku selitemu oddziałyującego z antyselitemem o jednakowej energii, amplitudzie i prędkości, tj. selitenów Zacharewa, (38a). W pozostałych przypadkach będzie to ruchoma płaszczyzna o zerowym ładunku. Rozpędzone jony mogą przedostać się na drugą stronę płaszczyzny gdzie będą neutralizowane przez jony przeciwnego znaku. Może okazać się konieczne uwzględnienie procesów rekombinacji jonów, które nie są uwzględnione w opisie Własewa-Peissena.

Jeżeli w wyniku różnych ilości jonów dodatnich jądra selitemu i jonów ujemnych jądra antyselitemu - zostanie nadmiar jonów odpowiedniego znaku i odpowiedniej energii wówczas, poza lokalnym zjawiskiem falowym, może być pobudzona fala selitenowa lub antyselitenowa, edmienna od fal przedzderzeniowych. W trójskładnikowej plazmie o ustalonym składzie, dla którego mogą być pobudzone seliteny i antyseliteny, które będą podlegać zderzeniom, zostaną tylko albo fale selitenowe albo antyselitenowe. Zderzenia antyselitenów odbywają się według tych samych reguł co seliteny.

Zasługuje na uwagę lokalne i raptowne wydzielenie energii jakie towarzyszy zderzeniu selitemu z antyselitemem.

Wymienimy trzy rodzaje niestabilności jakie mogą się pojawić w związku z falami selitenowymi.

Pierwszy - to niestabilności wynikłe z niedotrzymania warunku zależności tylko od jednej zmiennej  $x$  oraz niejednorodności rozkładów równowagowych. Drugi - to niestabilności typu Landau'a - już tu wspomniane. Wreszcie ostatnia grupa niestabilności, to promieniowanie elektromagnetyczne wysekich częstotliwości związane z raptownym przyspieszaniem lub opóźnieniem selitenów wywołanym, np. procesami zderzeniowymi. Dla określenia efektów promieniowania należałoby uwzględnić pełny opis Maxwella-Własewa. Do tej grupy możnaby zaliczyć niestabilności medulacyjne. Otrzymane rozwiązania selitenowe możnaby uogólnić me-

tedą przekształcenia zmiennych otrzymanych na podstawie analizy grupowej. Stesując przekształcenie przesunięcia fazowego oscylującego z częstotliwością plazmową - omówione w Rozdz.2 (iv), otrzymalibyśmy solitony Langmuira.

### 9. Wnioski końcowe

H. Schamel [9] wyraził opinię, że problem początkowy w pełni nieliniowego układu równań Własowa-Peissena nie nadaje się do efektywnego przeanalizowania i musimy zadowelić się rozwiązaniami stacjonarnymi, jeżeli mamy na uwadze pełną nieliniowość. Aczkolwiek, nie rozwiązaliśmy tu tego kompleksowego problemu to posunęliśmy się o krok w kierunku rozwiązania tego zagadnienia. Sprowadziliśmy problem początkowy dla równania Własowa-Peissona do równania typu szeregu abstrakcyjnego i równanie to można rozwiązywać np. numerycznie metodą iteracji. Wyznaczono asymptotyczne rozwiązanie tego równania dla  $t \rightarrow \infty$  w postaci pojedynczych fal solitonowych i antysolitonowych. Rozwiązanie to jest odpowiedzią plazmy na adiabaticzne włączenie pola w nieskończonej przeszłości. Wreszcie zbadano strukturę solitonu i antysolitonu w pełni nieliniowej plazmy i na tej podstawie wyjaśniono mechanizm zderzeniowy tych fal.

Porównamy tu stosowaną metodę do metody zastosowanej przez BGK [16], [19]. Równanie (15) można rozwiązywać metodą charakterystyk i wtedy rozwiązanie przyjmie postać

$$f_{\alpha} = F_{\alpha} [X(u, x, t), V(u, x, t)]$$

gdzie  $V = \partial_t X(u, x, t)$  oraz  $\partial_t V = (q_{\alpha}/m_{\alpha}) E(x, t)$ .

Metoda BGK odniesiona została do szczególnego przypadku fal biegnących i wtedy

$$F_{\alpha} = F_{\alpha} [(u-U)^2 + 2q_{\alpha} \psi / m_{\alpha}], \quad E = -\psi_x$$

W celu rozwiązania układu równań (15) do (17), BGK zadają dobraną funkcję  $F_{\alpha}$  i przy pomocy (17) wyznaczają  $\psi$  lub dobierają

rając  $\varphi$  wyznaczają  $F_{\alpha}$  za pośrednictwem równania całkowe wyprowadzonego w pracy [19]. Natomiast w tu przedstawionej metodzie debiera się funkcję rozkładu równowagowego zgodnie ze zrozumieniem, że pewne problemy pobudzania plazmy są adekwatnie opisane przez w pełni nieliniowy układ równań Własowa-Peissena, jeżeli jest on odniesiony do odpowiednio wybranego ekwilibrium. Tak więc, wyprowadzamy szereg abstrakcyjny dla  $F_{\alpha}$  w postaci

$$E_{\alpha}[X(u, x, t), V(u, x, t)] = N_{\alpha} f_{\alpha} + \sum_{n=1}^{\infty} f_{n, \alpha}$$

gdzie  $f_{\alpha}$  - jest odpowiednio dobranym rozkładem równowagowym i  $f_{n, \alpha}$  są wyznaczone na podstawie (21). Korzystając z rów. (16) i (17) wyznaczamy  $E(x, t)$  lub  $\varphi(x, t)$ . Jawną postać rozwiązania uzyskane dla przypadku fal biegnących podobnie jak w przypadku BGK.

## 10. Literatura

- [1] L.V. Ovsjannikow "Gruppenvej analiz differencjalnych uravnenii" - Moskwa, "Nauka", 1978.
- [2] V.B. Taranev - Żur.Tech.Fiz. 46, 6, 1271, /1976/.
- [3] V.E. Zacharev, A.B. Szabat - Żur.Eksp.Teoret.Fiz. 61, 118 /1971/.
- [4] H.J..Zabusky, M.D. Kruskal - Phys.Rev.Lett. 15, 240 /1965/ /Interaction of "solitons" in a collisionless plasma and the recurrence of initial states/.
- [5] C.S. Gardner, J.M. Greene, M.D. Kruskal, R.M. Miura - Phys.Rev.Lett. 19, 1095 /1967/. /Method for solving the KdV equation/.
- [6] P.D. Lax - Comm.Pure Appl.Math. 21, 467 /1968/. /Integrals of nonlinear equations of evolution and solitary waves/.
- [7] R. Hirota - Phys.Rev.Lett. 27, 1192 /1971/. /Exact solution of KdV equation for multiple collisions of solitons/.

- [8] Gupta - Phys.Lett.A., Mar. 211 /1979/.  
/Description of the ion-acoustic solitons by a Boussinesq type Equation/.
- [9] H. Schamel - Physica Scripta, 20, 306 /1979/. /Role of trapped particles and waves in plasmas, solitons - theory and application/.
- [10] Y.H. Ichikawa - Physica Scripta, 20, 296 /1979/.  
/Topics on solitons in plasmas/.
- [11] A.J. Turski - Prace IPPT, No 16 /1972/. /Problemy początkowe dla równań liniowej elektrodynamiki środków z czasowo-przestrzenną dyspersją/.
- [12] M.M. Veinberg, V.A. Trenegin - Theory of branching of solutions of non-linear equations, Noordhoff Intern. Publishing, 1974.
- [13] N.I. Zabusky, M.D. Kruskal - Phys.Rev.Letters 15, 40 /1965/.  
/Interaction of "Solitons" in a collisionless plasma and the recurrence of initial states/.
- [14] P.D. Lax - Comm.Pure Appl.Math., 21, 467 /1968/.  
/Integrals of nonlinear equations of evolution and solitary waves/.
- [15] N.I. Muskhelishvili - Continuum mechanics and related problems of analysis, p.121-133, "Nauka" Publishing House, Moscow 1972.
- [16] R.C. Davidson - Methods in Nonlinear Plasma Theory, Academic Press, New York and London, 1972.
- [17] A.J. Turski - Prace IPPT, No 19 /1973/. /Pasywność równań liniowej elektrodynamiki gorącej plazmy a tłumienie Landau'a/ oraz A.J. Turski - XIth International Conference on Phenomena in Ionized Gases, /1973/, Prague - Czechoslovakia, p.284 /Dissipative properties of linearized Vlasov-Maxwell equations and Landau's damping/.
- [18] A.J. Turski - Zeszyty Naukowe Politechniki Świętokrzyskiej Elektryka No 4, 43 /1978/. /Rozkład pola i pojemność płaskich elektrod zawierających naelektryzowane cząstki/.
- [19] I.B. Bernstein, J.M. Greene, M.D. Kruskal - Phys.Rev., 108, 546 /1957/.

## Spis rzeczy

1. Wstęp
2. Analiza grupowa równań Własewa-Peissena
3. Ważniejsze nieliniowe równania dla fal solitonowych
4. Uogólnione równanie Lyapunowa-Schmidta dla wieloskładnikowej plazmy Własewa-Peissena
5. Adiabaticzne włączenie pola w czasie  $t_0 = -\infty$
6. Przykłady wieloskładnikowej plazmy
7. Struktura fal solitonowych i antysolitonowych
8. Zderzenia solitonów i antysolitonów
9. Własści końcowe
10. Literatura