Andrzej Sławiński

Zakład Układów Mechanicznych

1.12 - Metody numeryczne

7.71 - Ogólna teoria układów mechanicznych

O WYZNACZANIU EKSTREMALNYCH WARTOŚCI WŁASNYCH MACIERZY

W wielu zagadnieniach technicznych duże znaczenie ma znajomość granic obszaru płaszczyzny zespolonej, w którym zawierają się punkty odpowiadające wartościom własnym macierzy /por. [1]/. Jak wiadomo, w układach liniowych o stałych współczynnikach największa część rzeczywista wartości własnych decyduje o stateczności procesu przejściowego zachodzącego w układzie. Moduły części urojonych wartości własnych interpretuje się natomiast jako częstości drgań swobodnych układu. Wyznaczenie zakresu częstości drgań własnych jest istotne w drganiach wymuszonych, gdzie zrównanie się częstości sił wymuszających z częstościami drgań swobodnych może spowodować powstanie niebezpiecznych rezonansów /aby tego uniknąć, odstraja się częstości drgań wymuszonych od częstości drgań swobodnych/.

W pracy [2] pokazano metodę znajdowania największej części rzeczywistej wartości własnych dowolnej macierzy. W metodzie tej wykorzystano własności ekstremalne ilorazu Rayleigha po sprowadzeniu dowolnej danej macierzy za pomocą przekształcenia podobieństwa do macierzy normalnej.

W niniejszej pracy zastosowano analogiczną metodę do poszukiwania największej i najmniejszej części urojonej oraz największego i najmniejszego modułu części urojonych wartości własnych dowolnej macierzy o elementach rzeczywistych. Niniejsza praca rozszerza możliwości wykorzystania zarówno ilorazu Rayleigha, jak i macierzy normalizującej N /por.[2]/ w problemie poszukiwania wartości własnych dowolnej macierzy.

Niech będzie dana macierz zespolona

$$A = C + Di,$$

gdzie $C,\ D \in M_n(R)$ /macierze kwadratowe $n \times n$ o elementach rzeczywistych/. Rozważmy macierz

$$\hat{A} = i\bar{A} = D + Ci.$$

Własność 1

Wartości własne macierzy $A = C + Di$ oraz $\hat{A} = D + Ci$ związane są zależnościami:

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \lambda_j (A) &= \operatorname{Im} \lambda_j(\hat{A}) \\ \operatorname{Im} \lambda_j (A) &= \operatorname{Re} \lambda_j (\hat{A}) \end{aligned} \qquad (j = 1 \ldots n) \qquad (1)$$

Dowód

Niech λ, x - wartość i odpowiadający jej wektor własny macierzy A:

$$Ax = \lambda x .$$

Dokonajmy w powyższej równości obustronnego sprzężenia / w sensie liczb zespolonych/ i pomnóżmy ją przez jednostkę urojoną i. Otrzymamy

$$i\bar{A}\bar{x} = i\bar{\lambda}\bar{x}$$

/uwaga: $i\bar{A} = -\overline{iA}$/. Oznacza to, że macierz $\hat{A} = i\bar{A}$ ma wartość własną $\mu = i\bar{\lambda}$ oraz wektor własny $y = \bar{x}$ /$Ay=\mu y$/.

Niech $\lambda = a + bi$, stąd

$$i\bar{\lambda} = i\,(a - bi) = b + ai,$$

a więc

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}\lambda_j(A) &= \operatorname{Im}\lambda_j(\hat{A}) \\ \operatorname{Im}\lambda_j(A) &= \operatorname{Re}\lambda_j(\hat{A}). \end{aligned}$$

W [2] pokazano, że poszukiwanie wartości własnych macierzy zespolonej $A = C + Di$ równoważne jest znajdowaniu wartości własnych macierzy

$$A = \begin{bmatrix} C & -D \\ D & C \end{bmatrix}$$

o dwa razy większym wymiarze.

<u>Własność 2</u>

Macierz $\tilde{A} = \begin{bmatrix} C & -D \\ D & C \end{bmatrix} \in M_{2n}(R)$ ma wartości własne

$$\lambda(\tilde{A}) = \begin{cases} \lambda(A) \\ \bar{\lambda}(A) \end{cases} \quad \text{tzn.} \quad \begin{aligned} \operatorname{Re}\lambda_j(\tilde{A}) \\ \operatorname{Re}\lambda_{j+n}(\tilde{A}) \end{aligned} = \operatorname{Re}\lambda_j(A) \qquad \begin{aligned} \operatorname{Im}\lambda_j(\tilde{A}) &= \operatorname{Im}\lambda_j(A) \\ \operatorname{Im}\lambda_{j+n}(\tilde{A}) &= -\operatorname{Im}\lambda_j(A) \end{aligned} \quad (j = 1\ldots n) \tag{2}$$

oraz wektory własne

$$y(\tilde{A}) = \begin{cases} \begin{bmatrix} x \\ -ix \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \bar{x} \\ i\bar{x} \end{bmatrix} \end{cases} \tag{3}$$

Z własności (2) wynikają dwa istotne wnioski:

Wniosek 1

Poszukiwanie wartości własnych macierzy $\hat{A} = i\bar{A}$ sprowadza się do znajdowania wartości własnych macierzy rzeczywistej

$$\tilde{\hat{A}} = \begin{bmatrix} D & -C \\ C & D \end{bmatrix}$$

Wniosek 2

Jeśli $A \in M_n(R)$ /D=0, A=C/, to B=iA oraz

$$\tilde{\hat{A}} = \begin{bmatrix} 0 & -A \\ A & 0 \end{bmatrix},$$

przy czym

$$\left.\begin{array}{l} \mathrm{Re}\,\lambda_j(\tilde{\hat{A}}) \\ \mathrm{Re}\,\lambda_{j+n}(\tilde{\hat{A}}) \end{array}\right\} = \mathrm{Im}\,\lambda_j(A) \qquad (j = 1\ldots n)$$
$$\mathrm{Im}\,\lambda_j(\tilde{\hat{A}}) = \mathrm{Re}\,\lambda_j(A) \qquad (j = 1\ldots n) \qquad (4)$$
$$\mathrm{Im}\,\lambda_{j+n}(\tilde{\hat{A}}) = -\mathrm{Re}\,\lambda_j(A) \qquad (j = 1\ldots n)$$

W dalszej części pracy ograniczymy się do macierzy o elementach rzeczywistych i wężyk oznaczać będzie macierz

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} 0 & -A \\ A & 0 \end{bmatrix}$$

Przykład 1

Macierz $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$ ma wartości własne $\lambda_{1/2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$. Macierz

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ma wartości własne

$$\lambda_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} i$$

$$\lambda_2 = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} i$$

$$\lambda_3 = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} i$$

$$\lambda_4 = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} i .$$

Części rzeczywiste i urojone macierzy A i $\tilde{A}$ spełniają zależność (4).

Podobnie, jak w [2] do wyznaczenia największej części rzeczywistej wartości własnych macierzy, do wyznaczenia obszaru wartości własnych dowolnej macierzy wykorzystamy własności macierzy normalnej.

Twierdzenie 1

Jeżeli macierz $F \in M_n(C)$ /C - zbiór liczb zespolonych/ jest macierzą normalną, to znaczy $FF^* = F^*F$, to zachodzą następujące zależności:

$$\mathrm{Re}\,\lambda_j(F) = \lambda_j\left[\frac{1}{2}(F+F^*)\right] \qquad (j = 1,\dots,n) \qquad (5)$$

$$\mathrm{Im}\,\lambda_j(F) = \lambda_j\left[\frac{1}{2i}(F-F^*)\right] \qquad (j = 1,\dots,n) \qquad (6)$$

$$|\lambda_j(F)| = \sqrt{\lambda_j(F^*F)} \qquad (j = 1,\dots,n) \qquad (7)$$

W [2] wykazano, że każdą macierz można przekształcić do macierzy normalnej o tych samych wartościach własnych.

Twierdzenie 2

Dla każdej macierzy rzeczywistej A posiadającej prostą strukturę istnieje macierz N - rzeczywista, trójkątna dolna o dodatnich elementach na głównej przekątnej, z których jeden można przyjąć jako jednostkowy, to jest macierz

$$N = \begin{bmatrix} n_{11} & & & 0 \\ \vdots & \ddots & & \\ \vdots & & n_{(n-1)(n-1)} & \\ n_{n1} & \dots & n_{n(n-1)} & 1 \end{bmatrix}, n_{ii} > 0 \quad (i = 1 \dots n) \qquad (8)$$

która przekształca macierz A przez podobieństwo

$$F = NAN^{-1} \qquad (9)$$

do macierzy normalnej o elementach rzeczywistych

$$FF^T = F^TF$$

Uwaga 1

Z własności (2) wynika, że macierz o elementach zespolonych można sprowadzić do macierzy rzeczywistej o równoważnych jej wartościach własnych. Wymiarowość problemu optymalizacji zwiększa się wtedy dwukrotnie.

Uwaga 2

Jeśli macierz $A \in M_n(R)$ nie ma prostej struktury, to istnieje taka osobliwa macierz N - rzeczywista, trójkątna dolna, mająca na głównej przekątnej tyle dodatnich elementów, ile różnych wartości własnych ma macierz A /pozostałe elementy na głównej przekątnej są zerowe/, dla której spełniony jest związek

$$FN = NA,$$

gdzie $F \in M_n(R)$ - macierz normalna /$FF^T = F^TF$/ o wartościach własnych równych wartościom własnym macierzy A

$$\lambda_j(F) = \lambda_j(A) \qquad (j = 1 \ldots n)$$

W dalszej części będziemy zakładać, że macierz A ma prostą strukturę.

Własność 3

Macierz $\tilde{A} = \begin{bmatrix} 0 & -A \\ A & 0 \end{bmatrix} \in M_{2n}(R)$ jest macierzą normalną wtedy i tylko wtedy, gdy macierz $A \in M_n(R)$ jest macierzą normalną.

Dowód

Jeśli $\tilde{A} = \begin{bmatrix} 0 & -A \\ A & 0 \end{bmatrix}$, to $\tilde{A}^T = \begin{bmatrix} 0 & A^T \\ -A^T & 0 \end{bmatrix}$ oraz $\tilde{A}\tilde{A}^T = \begin{bmatrix} AA^T & 0 \\ 0 & AA^T \end{bmatrix}$ i $\tilde{A}^T\tilde{A} = \begin{bmatrix} A^TA & 0 \\ 0 & A^TA \end{bmatrix}$, a stąd $\tilde{A}\tilde{A}^T = \tilde{A}^T\tilde{A}$ wtedy i tylko wtedy, gdy $AA^T = A^TA$.

Niech $N \in M_n(R)$ będzie macierzą postaci (8) spełniającą dla danej macierzy $A \in M_n(R)$ warunki twierdzenia 2. Wprowadźmy oznaczenia:

$$F_1 = \frac{1}{2}(F + F^T) = F_s$$

$$F_2 = \frac{1}{2i}(F - F^T) = -iF_a \qquad (10)$$

$$F_a = \frac{1}{2}(F - F^T),$$

gdzie F_1, F_2 - pierwsza i druga składowa hermitowska macierzy F,

F_s, F_a - część symetryczna i antysymetryczna macierzy F.

Własność 4

Jeśli macierz $F = NAN^{-1}$ /gdzie N - macierz postaci(8)/ jest macierzą normalną, to między wartościami własnymi macierzy A i części symetrycznych macierzy F i $\widetilde{F}$ zachodzą zależności

$$\mathrm{Re}\,\lambda_j(A) = \lambda_j(F_1) \qquad (j = 1\ldots n) \tag{11}$$

$$\mathrm{Im}\,\lambda_j(A) = \begin{cases} \lambda_j(\widetilde{F}_1) \\ \lambda_{j+n}(\widetilde{F}_1) \end{cases} \qquad (j = 1\ldots n)$$

$$\text{gdzie} \quad \widetilde{F}_1 = \frac{1}{2}(\widetilde{F} + \widetilde{F}^T) = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{2}(F-F^T) \\ \frac{1}{2}(F-F^T) & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -F \\ F & 0 \end{bmatrix} \tag{12}$$

Dowód

Z założenia o podobieństwie macierzy F i A mamy

$$\lambda_j(A) = \lambda_j(F) \qquad (j = 1\ldots n) \tag{13}$$

Stąd oraz z równości(5) w twierdzeniu 1 wynika prawdziwość pierwszej z równości (11) . Drugą otrzymujemy następująco:

$$\mathrm{Im}\lambda_j(A) = \mathrm{Im}\lambda_j(F) = \mathrm{Re}\lambda_j(\widetilde{F}) = \lambda_j(\widetilde{F}_1) ,$$

co wynika z(13) , pierwszej z równości (4) oraz z(5) , gdyż na podstawie własności 3 $\widetilde{F}$ jest macierzą normalną.

Własność 5

Poszukiwanie wartości własnych macierzy $\widetilde{B} = \begin{bmatrix} 0 & -B \\ B & 0 \end{bmatrix}$ równoważne jest znajdowaniu wartości własnych macierzy B , tzn.:

$$\begin{aligned} \lambda_j(\widetilde{B}) &= +\sqrt{-\lambda_j(B^2)} \\ \lambda_{j+n}(\widetilde{B}) &= -\sqrt{-\lambda_j(B^2)} \end{aligned} \qquad (j = 1\ldots n) \tag{14}$$

Dowód

Niech λ - wartość własna macierzy $\tilde{B}$, tj.:

$$|\tilde{B} - \lambda E| = 0;$$

stąd

$$|\tilde{B} - \lambda E| = \begin{vmatrix} -\lambda E & -B \\ -B & -\lambda E \end{vmatrix} = \left|\lambda^2 E - (-\lambda E)B(-\tfrac{1}{\lambda}E)(-B)\right| =$$

$$= |\lambda^2 E + B^2| = |B^2 - \mu E| = 0,$$

gdzie $\mu = -\lambda^2$ wartość własna macierzy B^2. Otrzymujemy stąd $\lambda = \pm\sqrt{-\mu}$, co jest równoważne równościom (14).

Wniosek 3

Wartości własne macierzy $\tilde{F}_1$ w równości (11) są równe

$$\lambda_j(\tilde{F}_1) = +\sqrt{-\lambda_j(F_\alpha^2)}$$
$$\lambda_{j+n}(\tilde{F}_1) = -\sqrt{-\lambda_j(F_\alpha^2)} \qquad (j = 1 \ldots n) \qquad (15)$$

Przykład 2

Macierzy $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$ odpowiada macierz normalizująca $N = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}$ /por. [2]/, a stąd

$$F = NAN^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$F_\alpha = \frac{1}{2}(F - F^T) = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

$$F_\alpha^2 = \begin{bmatrix} -\frac{3}{4} & 0 \\ 0 & -\frac{3}{4} \end{bmatrix}$$

$$\lambda(F_\alpha^2) = -\frac{3}{4}, \quad \lambda(\tilde{F}_1) = \pm\sqrt{-\lambda(F_\alpha^2)} = \pm\frac{\sqrt{3}}{2} = \operatorname{Im}\lambda(A).$$

Twierdzenie 3

Granice obszaru wartości własnych macierzy $A \in M_n(R)$ określone są związkami:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \min_{j=1\ldots n} \operatorname{Re}\lambda_j(A) = \min_{x \in R^n} \frac{\langle NAx, Nx\rangle}{\langle Nx, Nx\rangle} \\ \alpha_2 &= \max_{j=1\ldots n} \operatorname{Re}\lambda_j(A) = \max_{x \in R^n} \frac{\langle NAx, Nx\rangle}{\langle Nx, Nx\rangle} \end{aligned} \tag{16}$$

$$\begin{aligned} \beta_1 &= \min_{j=1\ldots n} \operatorname{Im}\lambda_j(A) = \min_{x,y \in R^n} \frac{\langle NAx, Ny\rangle - \langle NAy, Nx\rangle}{\langle Nx, Nx\rangle + \langle Ny, Ny\rangle} \\ \beta_2 &= \max_{j=1\ldots n} \operatorname{Im}\lambda_j(A) = \max_{x,y \in R^n} \frac{\langle NAx, Ny\rangle - \langle NAy, Nx\rangle}{\langle Nx, Nx\rangle + \langle Ny, Ny\rangle} \end{aligned} \tag{17}$$

gdzie N - macierz spełniająca warunki twierdzenia 2.

Dowód

Równości (16) i (17) opierają się na własnościach ilorazu Rayleigha, a mianowicie, że dla każdej macierzy rzeczywistej B

$$\begin{aligned} \min_j \lambda_j(B_s) &= \min_x \frac{\langle Bx, x\rangle}{\langle x, x\rangle} \\ \max_j \lambda_j(B_s) &= \max_x \frac{\langle Bx, x\rangle}{\langle x, x\rangle} \end{aligned} \tag{18}$$

Zależności (16) wynikają z zastosowania (11) i związków (18) do macierzy A, tj.

$$\alpha_1 = \min_i \operatorname{Re}\lambda_i(A) = \min_j \operatorname{Re}\lambda_j(NAN^{-1}) = \min_j \lambda_j\left[\frac{1}{2}\left(NAN^{-1} + (NAN^{-1})^T\right)\right] =$$

$$= \min_x \frac{\langle NAN^{-1}x, x\rangle}{\langle x, x\rangle} = \left| y = N^{-1}x \right| = \min_y \frac{\langle NAy, Ny\rangle}{\langle Ny, Ny\rangle} = \min_x \frac{\langle NAx, Nx\rangle}{\langle Nx, Nx\rangle}.$$

Analogiczne przekształcenia prowadzą do otrzymania α_2.

Do wyznaczenia związków (17) należy w przekształceniach wykorzystać kolejno (11), (12), (18):

$$\beta_1 = \min_{j=1\ldots n} \operatorname{Im} \lambda_j(A) = \min_{j=1\ldots 2n} \lambda_j(\tilde{F}_1) = \min_{j=1\ldots 2n} \lambda_j\left(\begin{bmatrix} 0 & -F_a \\ F_a & 0 \end{bmatrix}\right) =$$

$$= \min_{x,y} \frac{[x^T y^T] \begin{bmatrix} 0 & -F_a \\ F_a & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}}{\langle x, x\rangle + \langle y, y\rangle} = \min_{x,y} \frac{[x^T y^T] \begin{bmatrix} -F_a \cdot y \\ F_a \cdot x \end{bmatrix}}{\langle x, x\rangle + \langle y, y\rangle} =$$

$$= \min_{x,y} \frac{\langle y, F_a x\rangle - \langle x, F_a y\rangle}{\langle x, x\rangle + \langle y, y\rangle} = \min_{x,y} \frac{2\langle F_a x, y\rangle}{\langle x, x\rangle + \langle y; y\rangle} =$$

$$= \min_{x,y} \frac{\langle (F - F^T)x, y\rangle}{\langle x, x\rangle + \langle y, y\rangle} = \min_{x,y} \frac{\langle F x, y\rangle - \langle F y, x\rangle}{\langle x, x\rangle + \langle y, y\rangle} =$$

$$= \left| \begin{array}{l} u = N^{-1}x \\ v = N^{-1}y \end{array} \right| = \min_{u,v} \frac{\langle NAu, Nv\rangle - \langle NAv, Nu\rangle}{\langle Nu, Nu\rangle + \langle Nv, Nv\rangle} =$$

$$= \min_{x,y} \frac{\langle NAx, Ny\rangle - \langle NAy, Nx\rangle}{\langle Nx, Nx\rangle + \langle Ny, Ny\rangle} .$$

Z analogicznych przekształceń otrzymujemy β_2.

Wprowadzenie oznaczenia $z = x + iy$, gdzie $x, y \in R^n$ umożliwia zapisanie wzorów (17) w skróconej postaci:

$$\begin{aligned} \beta_1 &= \min_z \frac{\langle F_2 z, z\rangle}{\langle z, z\rangle} = \min_z \frac{1}{2i} \frac{\langle NAz, Nz\rangle - \langle Nz, NAz\rangle}{\langle Nz, Nz\rangle} \\ &= \max_z \frac{\langle F_2 z, z\rangle}{\langle z, z\rangle} = \max_z \frac{1}{2i} \frac{\langle NAz, Nz\rangle - \langle Nz, NAz\rangle}{\langle Nz, Nz\rangle} , \end{aligned} \tag{19}$$

gdyż $\langle z, z\rangle = \langle x, x\rangle + \langle y, y\rangle$ oraz

$$\frac{\langle F_2 z, z\rangle}{\langle z, z\rangle} = \frac{\langle \frac{1}{2i}(F - F^T) z, z\rangle}{\langle z, z\rangle} = \frac{\langle Fx, y\rangle - \langle Fy, x\rangle}{\langle x, x\rangle + \langle y, y\rangle} = \frac{1}{2i} \frac{\langle NAz, Nz\rangle - \langle Nz, NAz\rangle}{\langle Nz, Nz\rangle}$$

Jak wiadomo, wartości własne każdej macierzy $A \in M_n(R)$ są parami sprzężone. Zachodzi więc związek $\beta_1 = -\beta_2$. Sprawdzimy to korzystając z zależności (17). Należy więc wykazać, że

$$\min_{x,y} f(x,y) = -\max_{x,y} f(x,y)$$

gdzie

$$f(x,y) = \frac{\langle NAx,\ Ny\rangle - \langle NAy,\ Nx\rangle}{\langle Nx,\ Nx\rangle + \langle Ny,\ Ny\rangle}\,.$$

Łatwo sprawdzić, że funkcja $f(x,y)$ ma następujące własności

$$f(x,y) = -f(-x,y) = -f(x,-y) = f(-x,-y)\,.$$

Korzystając z tych własności oraz z zależności między minimum i maksimum funkcji otrzymamy:

$$\beta_1 = \min_{x,y} f(x,y) = \min_{-x,y} f(-x,y) = \min_{-x,y}\left[-f(x,y)\right] = -\max_{-x,y} f(x,y) =$$

$$= -\max_{x,y} f(x,y) = -\beta_2\,.$$

Z punktu widzenia interpretacji technicznej części urojonych wartości własnych macierzy układu jako częstości drgań własnych największe znaczenie ma znajomość zakresu nieujemnych części urojonych wartości własnych, który w przypadku macierzy rzeczywistych jest równoważny zakresowi modułów części urojonych wartości własnych.

<u>Twierdzenie 4</u>

Nieujemne części urojone wartości własnych macierzy $A \in M_n(R)$ zawierają się w przedziale $\langle \beta_3, \beta_2 \rangle$, gdzie

$$\beta_2 = \max_i \operatorname{Im}\lambda_i(A) = \left[\max_x \frac{\langle NAx,\ NAx\rangle - \langle NA^2x,\ Nx\rangle}{2\langle Nx,\ Nx\rangle}\right]^{1/2}$$

$$\beta_3 = \min_i \left|\operatorname{Im}\lambda_i(A)\right| = \left[\min_x \frac{\langle NAx,\ NAx\rangle - \langle NA^2x,\ Nx\rangle}{2\langle Nx,\ Nx\rangle}\right]^{1/2} \tag{20}$$

Dowód

Z własności 4 mamy:

$$\operatorname{Im}\lambda_j(A) = \begin{cases} \lambda_j(\widetilde{F}_1) \\ \lambda_{j+n}(\widetilde{F}_1) \end{cases} \qquad j = 1\ldots n$$

gdzie

$$\widetilde{F}_1 = \frac{1}{2}(\widetilde{F}+\widetilde{F}^T), \quad \widetilde{F} = \begin{bmatrix} 0 & -F \\ F & 0 \end{bmatrix}, \quad F = NAN^{-1}, \quad FF^T = F^TF.$$

Z wniosku 3

$$\operatorname{Im}^2\lambda_i(A) = \lambda_i^2(\widetilde{F}_1) = -\lambda_i(F_a^2), \text{ gdzie } F_a = \frac{1}{2}(F - F^T).$$

Ponieważ $F_a^T = -F_a$, więc $F_a^2 = -F_a^T F_a$, a stąd

$$\operatorname{Im}^2\lambda_i(A) = \lambda_i(F_a^T \cdot F_a).$$

Macierz $F_a^T F_a$ jest symetryczna, można więc jej wartości własne wyznaczyć za pomocą ilorazu Rayleigha

$$\max_i \operatorname{Im}^2\lambda_i(A) = \max_x \frac{\langle F_a^T F_a x,\ x\rangle}{\langle x,\ x\rangle}$$

Po przekształceniach, w których wykorzystamy fakt, że macierz F jest normalna otrzymamy

$$\langle F_a^T F_a x, x\rangle = \langle F_a x, F_a x\rangle = \frac{1}{4}\langle (F-F^T)x, (F-F^T)x\rangle =$$
$$= \frac{1}{4}\left[\langle FF^Tx,x\rangle + \langle F^TFx,x\rangle - \langle x,F^2x\rangle - \langle F^2x,x\rangle\right] =$$
$$= \frac{1}{2}\left[\langle F^TFx,x\rangle - \langle F^2x,x\rangle\right] = \langle Fx,\ \frac{1}{2}(F-F^T)x\rangle = \langle Fx, F_a x\rangle,$$

a stąd po podstawieniu $F = NAN^{-1}$

$$\max_x \frac{\langle Fx, F_a x\rangle}{\langle x,x\rangle} = \max_x \frac{\langle F^T Fx, x\rangle - \langle F^2 x, x\rangle}{2\langle x,x\rangle} =$$

$$= \max_x \frac{\langle NAN^{-1}x, NAN^{-1}x\rangle - \langle NAAN^{-1}x, x\rangle}{2\langle x,x\rangle} = \left| y = N^{-1}x \right| =$$

$$= \max_y \frac{\langle NAy, NAy\rangle - \langle NA^2 y, Ny\rangle}{2\langle Ny, Ny\rangle} = \max_x \frac{\langle NAx, NAx\rangle - \langle NA^2 x, Nx\rangle}{2\langle Nx, Nx\rangle} .$$

Jeśli oznaczymy

$$f(x) = \frac{\langle NAx, NAx\rangle - \langle NA^2 x, Nx\rangle}{2\langle Nx, Nx\rangle}$$

to otrzymamy

$$\max_j \ \mathrm{Im}^2 \lambda_j(A) = \max_x f(x) .$$

Ponieważ

$$\max_j \ \mathrm{Im}^2 \lambda_j(A) = \left[\max_j \left|\mathrm{Im}\, \lambda_j(A)\right|\right]^2$$

oraz

$$\max_j \left| \mathrm{Im}\, \lambda_j(A) \right| = \max_j \ \mathrm{Im}\, \lambda_j(A) \qquad /A \in M_n(R)/$$

więc

$$\beta_2 = \max_j \ \mathrm{Im}\, \lambda_j(A) = \left[\max_x f(x)\right]^{1/2}$$

Analogicznie

$$\beta_3 = \min_j \left| \mathrm{Im}\, \lambda_j(A) \right| = \left[\min_x f(x)\right]^{1/2}$$

Wzory (20) są wygodniejsze w zastosowaniach dzięki dwukrotnemu zmniejszeniu się wymiaru przestrzeni optymalizacji w porównaniu ze wzorami (17).

Przykład

Niech będzie dana macierz

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Wyznaczymy obszar płaszczyzny zespolonej, w którym zawierają się punkty odpowiadające wartościom własnym macierzy A oraz obszar zawierający punkty, którym odpowiadają wartości własne o nieujemnych częściach urojonych. Zastosujemy wzory (16) i (20). Łatwo wykazać, że macierz N odpowiadająca warunkom twierdzenia 2 dla macierzy A ma postać

$$N = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Podstawiając wartości macierzy A i N do wzorów (16) i (20) otrzymamy

$$\alpha_1 = \min_x f(x),$$

$$\alpha_2 = \max_x f(x),$$

$$-\beta_1 = \beta_2 = \left[\max_x g(x)\right]^{1/2},$$

$$\beta_3 = \left[\min_x g(x)\right]^{1/2},$$

gdzie

$$f(x) = \frac{-\frac{1}{2}\left(x_1^2 + x_2^2 + x_1 x_2\right) + x_3^2}{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_1 x_2}$$

$$g(x) = \frac{\frac{3}{4}\left(x_1^2 + x_2^2 + x_1 x_2\right)}{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_1 x_2}$$

Funkcja $f(x)$ ma dwa ekstrema w punktach

$$x_1' = a, \qquad x_1'' = 0,$$
$$x_2' = b, \qquad x_2'' = 0,$$
$$x_3' = 0 \qquad x_3'' = c,$$

gdzie a, b, $c \in R - \{0\}$ - dowolne stałe.

Stąd otrzymujemy

$$\alpha_1 = f(x') = -\frac{1}{2}$$
$$\alpha_2 = f(x'') = 1$$

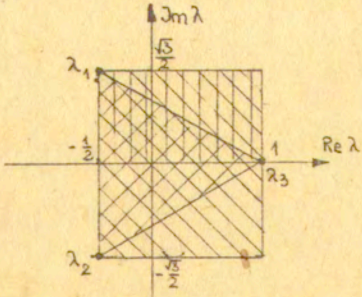
Funkcja $g(x)$ ma dwa ekstrema w punktach

$$x_1' = a \qquad x_1'' = 0$$
$$x_2' = b \qquad x_2'' = 0$$
$$x_3' = 0 \qquad x_3'' = c,$$

stąd

$$-\beta_1 = \beta_2 = \left[g(x')\right]^{1/2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$\beta_3 = \left[g(x'')\right]^{1/2} = 0$$

Wyznaczone granice obszarów można przedstawić na rysunku:



- najmniejsze wypukłe otoczenie wartości własnych /zakres numeryczny macierzy/,

- najmniejsze prostokątne otoczenie obszaru wartości własnych,

- najmniejsze prostokątne otoczenie obszaru wartości własnych o nieujemnych częściach urojonych.

PODSUMOWANIE

W pracy przedstawiono metodę poszukiwania granic obszaru wartości własnych rozszerzającą wyniki uzyskane w [2]. Metoda ta może być przydatna w zagadnieniach, w których konieczne jest kształtowanie obszaru wartości własnych, na przykład przy odstrajaniu częstości drgań wymuszonych od częstości drgań swobodnych lub przy optymalizacji wskaźnika zbieżności wykładniczej /por.[2]/. Pokazany wyżej schemat wyznaczania ekstremalnych części rzeczywistych i urojonych wartości własnych można również wykorzystać do obliczania pozostałych wartości własnych odpowiednio ograniczając przestrzeń optymalizacji /por.[3]/.

Literatura

[1] Radziszewski B. "On the Spectrum Estimation of Some Linear Operators", Euromech Colloquium No. 112, 1979.

[2] Sławiński A. "Algorytm obliczania wskaźnika zbieżności wykładniczej układu równań różniczkowych liniowych o stałych współczynnikach". Prace IPPT.

[3] Беллман Р. "Введение в теорию матриц" Москва 1976, Наука.