

W. Nadolski, A. Pielorz

**WYKORZYSTANIE SKRĘTNYCH FAL
W BADANIACH DYNAMICZNYCH
WAŁU KORBOWEGO
SILNIKA DWUCYLINDROWEGO
Z UWZGLĘDNIENIEM OPORÓW**

19/81

P. 269

WARSZAWA 1981



Praca wpłynęła do Redakcji dnia 8 kwietnia 1981 r.

Zarejestrowana pod nr 19/1981



57094



Na prawach rękopisu

Instytut Podstawowych Problemów Techniki PAN

Nakład 140 egz. Ark.wyd. 1,1. Ark. druk.1,75

Oddano do drukarni w maju 1981 r.

Nr zamówienia 292/0/81

Warszawska Drukarnia Naukowa, Warszawa,
ul.Śniadeckich 8

Władysław Nadolski

Amalia Pielorz

Zakład Układów Mechanicznych

4.45 - Silniki

7.76 - Zagadnienia dynamiczne

WYKORZYSTANIE SKRĘTNYCH PAŁ W BADANIACH
DYNAMICZNYCH WAŁU KORBOWEGO SILNIKA
DWUCYLINDROWEGO Z UWZGLĘDNIENIEM OPORÓW

1. Wstęp.

W rzeczywistych wałach korbowych, w czasie pracy silników spalinowych, występują złożone zjawiska i procesy fizyczne, które mają istotny wpływ na przemieszczenia i odkształcenia czopów głównych. Dokładny opis tych zjawisk i procesów jest właściwie niemożliwy. W związku z tym w zagadnieniach technicznych ograniczamy się do badania uproszczonych zjawisk i procesów fizycznych, które można opisać za pomocą znanego aparatu matematycznego. Istotny przy tym jest wybór zmiennych parametrów, które z jednej strony wystarczająco wiernie opisują zjawiska i procesy fizyczne w rzeczywistych czopach głównych, z drugiej strony natomiast umożliwiają otrzymanie prostych zależności matematycznych.

W tym celu przyjmuje się model fizyczny, który przedstawia uproszczoną strukturę wału korbowego wraz ze współpracującymi elementami. Wybór możliwie adekwatnego modelu fizycznego wału korbowego ułatwiają zgromadzone informacje odnośnie charakteru i wielkości wartości odkształceń i przemieszczeń samego wału i współpracujących elementów. Dotyczy to również informacji odnośnie własności dysypacyjnych energii oraz charakteru wymuszeń zewnętrznych. Należy przy tym podkreślić, że prawidłowość uzyskanych wyników teoretycznych można sprawdzić jedynie doświadczalnie białając rzeczywisty wał korbowy.

Dotychczasowe badania dynamiczne wałów korbowych, jak wynika z literatury [1,2], w zasadzie przeprowadza się za pomocą metod wypracowanych w teorii drgań, które jednak w wielu przypadkach są niezadawalające, zwłaszcza gdy chcemy badać odkształcenia i przemieszczenia czopów głównych w różnych przekrojach poprzecznych wału korbowego.

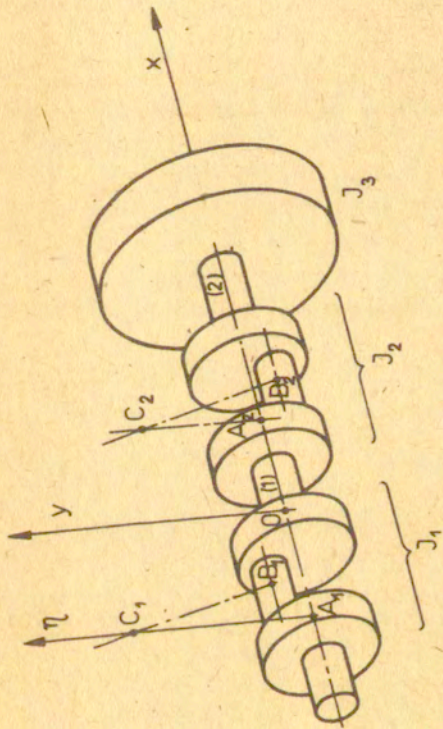
W tej pracy zaproponowano podejście falowe do wyznaczania przemieszczeń przekrojów poprzecznych wału przy krótkotrwałych obciążeniach zewnętrznych, jakie występują w silnikach spalinyowych, z równoczesnym uwzględnieniem tłumienia. Tłumienie w rzeczywistych konstrukcjach jest procesem niezmiernie złożonym. Znane są wprawdzie liczne teorie opisujące zjawisko tłumienia, jednak dla konkretnych obliczeń nie zawsze są one przydatne. W pracy tej proponujemy uwzględnienie tłumienia poprzez tłumienie zastępcze.

2. Model fizyczny wału korbowego silnika dwucylindrowego.

W pracy rozpatrywany jest model fizyczny wału korbowego silnika dwucylindrowego, czteresusowego w skład którego wchodzi: ruchome elementy łożysk tocznych, na których podwieszony jest rozpatrywany wał, korbówód wraz z tłokami, koło zamachowe i inne elementy związane z wałem. Na rysunku 1 pokazany jest schemat wału korbowego wraz z kołem zamachowym silnika dwucylindrowego czteresusowego, którego osie czopów są równoległe, [3]. Przypadek wału korbowego o pokrywających się osiach czopów nie jest pokazany, lecz również jest on uwzględniony w pracy.

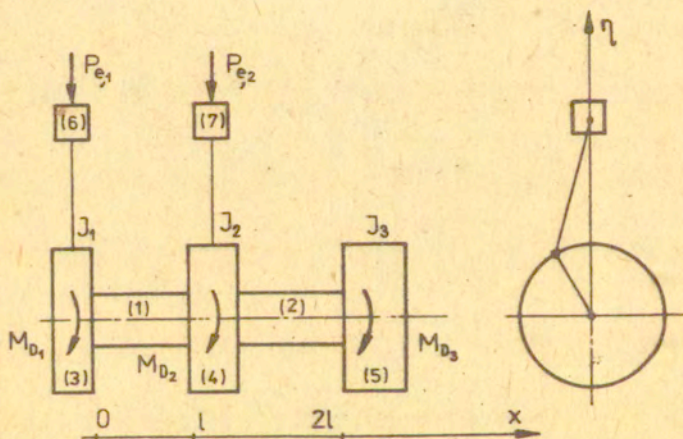
Niech punkty A_1, A_2 , rys.1, leżą na osiach czopów głównych a punkty B_1, B_2 na osiach czopów korbówódów w płaszczyźnie symetrii między ramionami wału korbowego. Ponadto niech punkty C_1, C_2 leżą na osiach sworzni tłoków i na osiach cylindrów. Przyjmujemy ortokartezjański układ odniesienia xy związany ze sztywną obudową wału korbowego. Środek układu xy obieramy w punkcie O , rys.1. Oś y ma kierunek i zwrot pomocniczej osi η , która jest zwrócona od punktu A_1 do C_1 .

Zakładamy, że czopy główne (1), (2) odkształcalne są tylko skrętnie, w granicach prawa Hooke'a, natomiast pozostałe elemen-



Rys. 1. Fizyczny model wału korbowego silnika dwucylindrowego

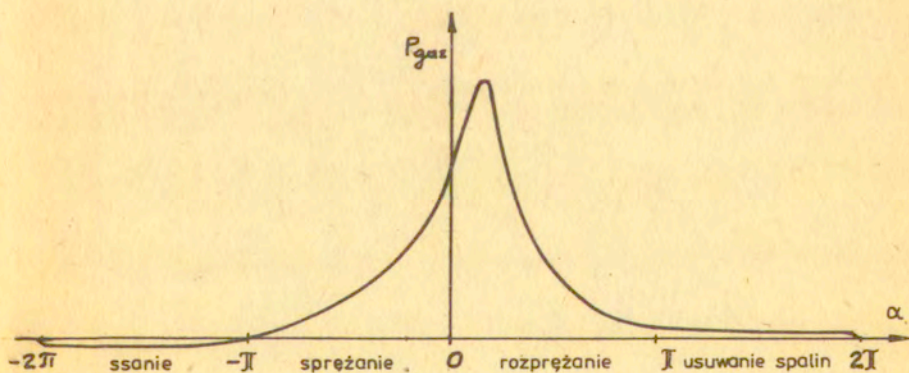
ty wału korbowego są nieodkształcalne. W pracy nie uwzględniamy odkształceń giętych czopów głównych, ponieważ są one małe w porównaniu z odkształceniami skrętnymi i nie przekraczają 3%, [3]. Pomijamy również odkształcenia czopów korbowodowych i ramion wału korbowego. Przy tych założeniach model wału korbowego składa się ze sprężyste odkształcalnych czopów głównych (1), (2), z 3 nieodkształcalnych brył (3), (4), (5) o masowych momentach bezwładności J_1, J_2, J_3 względem osi obrotu, połączonych z bryłami sztywnymi (6), (7) o masach $m_{C_i}, i = 1, 2$, za pomocą nieodkształcalnego i nieważkiego układu korbowego, jak pokazano na rysunku 2.



Rys.2. Model wału korbowego

W przyjętym modelu fizycznym wału korbowego, zmienne w czasie masowe momenty bezwładności $J_1(t), J_2(t)$ brył (3), (4) względem osi x są równe sumie masowych momentów bezwładności samego wału korbowego i elementów sztywno związanych z wałem,

/np. wewnętrznych pierścieni łożysk tocznych, pewnej części korbwodów, [3], i innych elementów/. Masowy moment bezwładności J_3 bryły (5) względem osi x jest równy masowemu momentowi bezwładności koła zamachowego. W przypadku połączenia koła zamachowego z innymi mechanizmami, wartość masowego momentu bezwładności J_3 zwiększa się o wartość zastępczego masowego momentu elementów w ruchu obrotowym. Masa $m_{c_i}(t)$ jest równa sumie masy tłoka i części masy korbwodu, [3]. W dalszych rozważaniach przyjmujemy stałe wartości momentów J_1, J_2 i stałe wartości mas m_{c_i} , $i = 1, 2$. Czopy główne (1), (2) scharakteryzowane są modułem sprężystości poprzecznej G [N/m²], biegunowym momentem bezwładności pola przekroju J_0 [m⁴] względem osi obrotu, długością l [m] i gęstością ρ [kg/m³]. Bryły (6), (7) obciążone są siłami zewnętrznymi czynnymi $P_{e,i}(t)$ złożonymi z powtarzających się okresowo tzw. sił gazowych, $i = 1, 2$. Natomiast bryły (3), (4), (5) obciążone są momentami oporowymi $M_{D_i}(t)$ $i = 1, 2, 3$. Wykres siły gazowej w funkcji $\alpha = 2\pi n_0 t$ przykładowo pokazany jest na rys.3, [3].



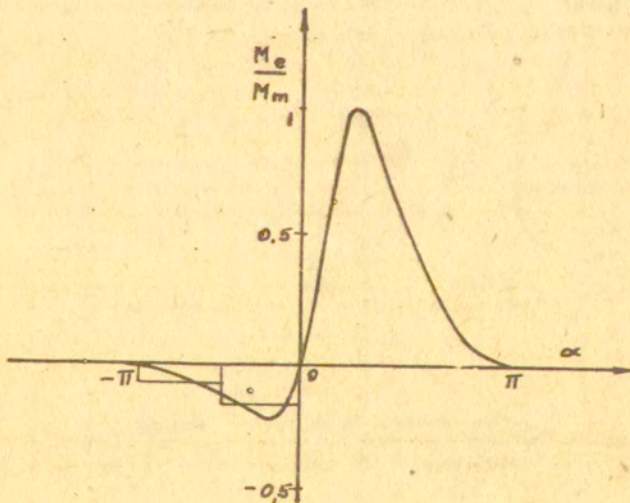
Rys.3. Wykres siły gazowej

Chwila czasu, w której ma miejsce początek działania k -tej siły gazowej w i -tym cylindrze, określona jest wzorem

$$(1) \quad T_{ik} = [(i-1)k_0 + 2(k-1)]/n_0, \quad k = 1, 2, \dots, N, \quad i = 1, 2,$$

gdzie $k_0 = 0.5$ dla przesuniętych osi czopów korbwodów,
 $k_0 = 1$ dla wspólnej osi czopów korbwodów, n_0 jest liczbą obrotów wału korbowego silnika dwucylindrowego czterosuwowego w ciągu jednej sekundy, N jest liczbą sił gazowych.

Badania dynamiczne wału korbowego przeprowadzamy w przypadku, gdy siły gazowe są aproksymowane funkcjami odcinkowo stałymi. Wykres momentu siły gazowej, opisanego znanymi wzorami, [3] i aproksymowanego funkcją odcinkami stałą, przykładowo pokazany jest na rys.4, przy czym $M_{\max} = \max M_e$.



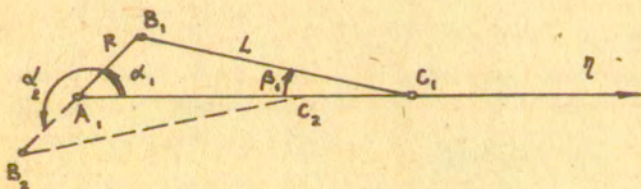
Rys.4. Wykres momentu siły gazowej

Bryły (3), (4) obciążone są nie tylko momentami zewnętrznymi $M_{e,i}$, lecz również momentami masowymi $M_{r,i}$, które opisuje funkcja, [3],

$$(2) \quad M_{r,i}(t) = -m_{c_i} \ddot{\eta}_{c_i} R \frac{\sin(\alpha_i + \beta_i)}{\cos \beta_i}, \quad i = 1, 2,$$

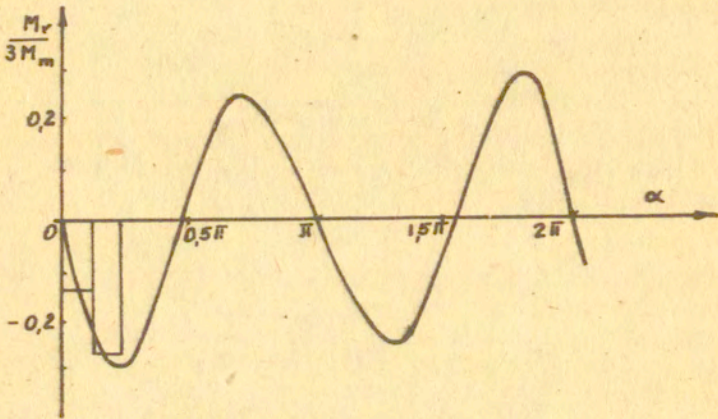
gdzie R [m] jest długością ramienia korby, $\alpha_1 = \alpha_2 = 2\pi n_0 t$ przy pokrywających się osiach ośpów korbodów, przy osiach przesuniętych o $2R$, rys.5, $\alpha_1 = 2\pi n_0 t$, a $\alpha_2 = 2\pi(0,5 + n_0 t)$, natomiast $\beta_1 = \arcsin(R/L \sin \alpha_i)$, L [m] jest długością ramienia korbododu. Przyspieszenie $\ddot{\eta}_{c_i}$ punktu C_i , $i = 1, 2$ przy $n_0 = \text{const}$ ma postać:

$$(3) \quad \ddot{\eta}_{c_i}(t) = 4\pi^2 R n_0^2 \cos \alpha_i \left[1 - \text{tg} \alpha_i \text{tg} \beta_i + \frac{R}{L} \frac{\cos \alpha_i}{\cos^3 \beta_i} \right], \quad i = 1, 2.$$



Rys.5. Układ korbowy silnika

Wykres momentu masowego $\frac{4}{3M_{\max}} M_r(\alpha)$ przy założeniu, że $4\pi^2 R^2 n_0^2 m_{c_i} = 3M_{\max}$ i równoległych osiach ($\alpha = \alpha_1$) pokazany jest na rys.6. Krzywą momentu masowego zastępujemy linią schodkową, podobnie jak krzywą momentu siły zewnętrznej czynnej.



Rys.6. Wykres momentu masowego

W rozważaniach przyjmujemy, że tłumienie w badanym układzie jest uwzględnione poprzez tłumienie zastępcze. Momenty oporowe obciążające bryły (3), (4) i (5), rys.2, przyjmujemy w postaci

$$(4) \quad M_{D_i}(t) = -D_i \left[\frac{\partial \theta_i(x, t)}{\partial t} - \omega_0 \right], \quad x = (i-1)l \quad \text{dla } i = 1, 2$$

$$(5) \quad M_{D_3}(t) = -D_3 \left[\frac{\partial \theta_2(x, t)}{\partial t} - \omega_0 \right], \quad x = 2l,$$

gdzie $\omega_0 = 2\pi n_0$ jest stałą prędkością kątową wału korbowego, $\theta_i(x, t)$ jest przemieszczeniem kątowym i -tego czopa głównego wału korbowego, D_i , $i = 1, 2, 3$, są zastępczymi współczynnikami tłumienia typu wiskotycznego. Momenty oporowe

M_{D_1} , M_{D_2} w rozpatrywanych przekrojach czopów głównych uwzględniają tłumienie wewnętrzne /rozłożoną w sposób ciągły/ i tłumienie zewnętrzne badanego układu. Przyjmujemy więc, że tłumienie zewnętrzne, występujące w łożyskach jest również typu wiskotycznego, podobnie jak tłumienie wewnętrzne. Moment oporowy M_{D_3} dodatkowo uwzględnia tłumik zewnętrzny typu wiskotycznego, który w naszych rozważaniach umieszczony jest przy kole zamachowym.

3. Równania ruchu i wzory rekurencyjne.

Badanie przemieszczeń i odkształceń poprzecznych czopów głównych wału korbowego przy przyjętych założeniach sprowadza się do rozwiązania klasycznego równania falowego [4],

$$(6) \quad \frac{\partial^2 \theta_i(x,t)}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 \theta_i(x,t)}{\partial x^2} = 0, \quad i=1,2,$$

z następującymi warunkami brzegowymi

$$(7) \quad \begin{aligned} M_1(t) - J_1 \frac{\partial^2 \theta_1}{\partial t^2} + G J_0 \frac{\partial \theta_1}{\partial x} - D_1 \left(\frac{\partial \theta_1}{\partial t} - \omega_0 \right) &= 0, \quad x=0 \\ M_2(t) - J_1 \frac{\partial^2 \theta_2}{\partial t^2} - G J_0 \left(\frac{\partial \theta_1}{\partial x} - \frac{\partial \theta_2}{\partial x} \right) - D_2 \left(\frac{\partial \theta_2}{\partial t} - \omega_0 \right) &= 0, \quad x=l \\ \theta_1(x,t) &= \theta_2(x,t), \quad x=l \\ -J_3 \frac{\partial^2 \theta_2}{\partial t^2} - G J_0 \frac{\partial \theta_2}{\partial x} - D_3 \left(\frac{\partial \theta_2}{\partial t} - \omega_0 \right) &= 0, \quad x=2l \end{aligned}$$

i warunkami początkowymi

$$(8) \quad \theta_i(x,t) = 0, \quad \frac{\partial \theta_i(x,t)}{\partial t} = \omega_0 \quad \text{dla } t = 0, \quad i = 1,2,$$

przy czym $c^2 = G/\rho$, natomiast

$$(9) \quad M_i(t) = M_{e,i}(t) + \frac{1}{3} M_{\pi,i}(t) = \sum_{k=1}^{m_i} M_{i,k} H(t-t_{i,k}), \quad i=1,2.$$

gdzie M_{ik} są stałymi wartościami momentu.

Przy rozwiązywaniu problemu początkowo-brzegowego. (6) - (8) wygodnie jest wprowadzić następujące wielkości bezwymiarowe.

$$(10) \quad \bar{x} = \frac{x}{l}, \quad \bar{t} = \frac{ct}{l}, \quad \bar{\theta}_i = \frac{\theta_i}{\theta_0}, \quad \bar{M}_i = M_i \frac{l^2}{J_2 \theta_0 c^2}, \quad \bar{D}_i = D_i \frac{l}{J_2 c},$$

$$\bar{\omega}_0 = \omega_0 \frac{l}{\theta_0 c}, \quad \kappa_i = \frac{J_0 g l}{J_i}, \quad i = 1, 2, 3,$$

gdzie θ_0 jest zadany przemieszczeniem kątowym.

Związki (6) - (8) wówczas przyjmują postać;

$$(11) \quad \frac{\partial^2 \bar{\theta}_i(\bar{x}, \bar{t})}{\partial \bar{t}^2} - \frac{\partial^2 \bar{\theta}_i(\bar{x}, \bar{t})}{\partial \bar{x}^2} = 0, \quad i = 1, 2,$$

$$\frac{\kappa_1}{\kappa_2} \bar{M}_1(\bar{t}) - \frac{\partial^2 \bar{\theta}_1}{\partial \bar{t}^2} + \kappa_1 \frac{\partial \bar{\theta}_1}{\partial \bar{x}} - \bar{D}_1 \frac{\kappa_1}{\kappa_2} \left(\frac{\partial \bar{\theta}_1}{\partial \bar{t}} - \bar{\omega}_0 \right) = 0, \quad \bar{x} = 0$$

$$\bar{M}_2(\bar{t}) - \frac{\partial^2 \bar{\theta}_2}{\partial \bar{t}^2} - \kappa_2 \left(\frac{\partial \bar{\theta}_1}{\partial \bar{x}} - \frac{\partial \bar{\theta}_2}{\partial \bar{x}} \right) - \bar{D}_2 \left(\frac{\partial \bar{\theta}_2}{\partial \bar{t}} - \bar{\omega}_0 \right) = 0, \quad \bar{x} = 1$$

$$(12) \quad \bar{\theta}_1(\bar{x}, \bar{t}) = \bar{\theta}_2(\bar{x}, \bar{t}), \quad \bar{x} = 1$$

$$\frac{\partial^2 \bar{\theta}_2}{\partial \bar{t}^2} + \kappa_3 \frac{\partial \bar{\theta}_2}{\partial \bar{x}} + \bar{D}_3 \frac{\kappa_3}{\kappa_2} \left(\frac{\partial \bar{\theta}_2}{\partial \bar{t}} - \bar{\omega}_0 \right) = 0, \quad \bar{x} = 2$$

$$(13) \quad \bar{\theta}_i(\bar{x}, \bar{t}) = 0, \quad \frac{\partial \bar{\theta}_i(\bar{x}, \bar{t})}{\partial \bar{t}} = \bar{\omega}_0, \quad t = 0, \quad i = 1, 2.$$

Rozwiązanie równania (11) poszukujemy w postaci

$$(14) \quad \bar{\theta}_1(\bar{x}, \bar{t}) = f_1(\bar{t} - \bar{x}) + g_1(\bar{t} + \bar{x}) + \bar{\omega}_0 \bar{t}$$

$$\bar{\theta}_2(\bar{x}, \bar{t}) = f_2(\bar{t} - \bar{x} + 1) + g_2(\bar{t} + \bar{x} - 1) + \bar{\omega}_0 \bar{t}.$$

Po wykorzystaniu warunków brzegowych (12) otrzymujemy następujący układ równań różniczkowych zwyczajnych pierwszego i drugiego rzędu dla funkcji $f_i(z)$, $g_i(z)$, $i = 1, 2$,

$$g_1'(z) = -f_1'(z-2) + f_2'(z-2) + g_2'(z-1)$$

$$(15) \quad g_2''(z) + \tau_3 g_2'(z) = -\psi_2''(z-2) + \tau_6 \psi_2'(z-2)$$

$$f_1''(z) + \tau_1 f_1'(z) = \frac{\kappa_1}{\kappa_2} \bar{M}_1(z) - g_1''(z) + \tau_4 g_1'(z)$$

$$\psi_2''(z) + \tau_2 \psi_2'(z) = \bar{M}_2(z) - g_2''(z) + \tau_5 g_2'(z) + \tau_7 \psi_1'(z-1)$$

gdzie $\tau_1 = \kappa_1(1 + \frac{1}{\kappa_2} \bar{D}_1)$, $\tau_2 = 2\kappa_2 + \bar{D}_2$, $\tau_3 = \kappa_3 + \bar{D}_3 \frac{J_2}{J_3}$, $\tau_5 = -\bar{D}_2$,

$\tau_4 = \kappa_1(1 - \frac{1}{\kappa_2} \bar{D}_1)$, $\tau_6 = \kappa_3 - \bar{D}_3 \frac{J_2}{J_3}$, $\tau_7 = 2\kappa_2$, $\kappa_i = \frac{J_0 \rho_i}{J_i}$, $i=1,2,3$.

Sposób całkowania równań typu (15) podany jest w pracy [5].

Analityczne rozwiązania funkcji $f_1'(z)$, $\psi_2'(z)$, $g_2'(z)$ dla dowolnego argumentu z otrzymujemy w postaci wzorów rekurencyjnych ze względu na przedział zmienności argumentu z, podobnie jak w [6] dla układów bez tłumienia. Postać tych wzorów pozostaje niezmienna wewnątrz przedziałów zmienności argumentu z, których końce są kolejnymi liczbami całkowitymi.

W przedziałach rozpoczynających się od liczb parzystych wzory dla funkcji $f_1'(z)$ zawierają wyrażenia zależne od momentu $\bar{M}_1(z)$, gdy tymczasem wzory dla funkcji $f_2'(z)$, $g_2'(z)$ zawierają wyrażenia zależne od momentu $\bar{M}_2(z)$. W pozostałych przedziałach na odwrót, funkcja $f_1'(z)$ zależy od momentu $\bar{M}_2(z)$, natomiast $f_2'(z)$, $g_2'(z)$ zależą od momentu $\bar{M}_1(z)$.

Wzory dla funkcji $f_1'(z)$, $f_2'(z)$, $g_2'(z)$ w obu wspomnianych przedziałach zmienności argumentu z podane są poniżej.

$$I_1: \quad \underline{2n \leq z < 2n+1}, \quad n=0,1,\dots$$

$$(16) \quad f_{1,2n+1}'(z) = f_{1,2n}'(z) + \frac{\kappa_1}{\kappa_2} \sum_{k=1}^{m_1} \bar{M}_{1k} H(z-2n-\xi_{1k}) [e^{-\tau_1(z-2n-\xi_{1k})} \sum_{i=0}^n f_{11i}^{1,2n+1} \cdot (z-2n-\xi_{1k})^i + e^{-\tau_2(z-2n-\xi_{1k})} \sum_{i=0}^{n-1} f_{12i}^{1,2n+1} (z-2n-\xi_{1k})^i +$$

$$+ e^{-\pi_3(z-2n-\xi_{1k})} \sum_{i=0}^{n-2} \left[\rho_{13i}^{1,2n+1} (z-2n-\xi_{1k})^i + \rho_{13i}^{1,2n+1} \right]$$

$$(17) \quad \begin{aligned} g'_{2,2n+1}(z) = & g'_{2,2n}(z) + \sum_{k=1}^{m_2} \bar{M}_{2k} H(z-2n-\xi_{2k}) \left[e^{-\pi_1(z-2n-\xi_{2k})} \sum_{i=0}^{n-2} g_{21i}^{2,2n+1} \right. \\ & \cdot (z-2n-\xi_{2k})^i + e^{-\pi_2(z-2n-\xi_{2k})} \sum_{i=0}^{n-1} g_{22i}^{2,2n+1} (z-2n-\xi_{2k})^i + \\ & \left. + e^{-\pi_3(z-2n-\xi_{2k})} \sum_{i=0}^{n-1} g_{23i}^{2,2n+1} (z-2n-\xi_{2k})^i + g_{23i}^{2,2n+1} \right] \end{aligned}$$

$$(18) \quad \begin{aligned} f'_{2,2n+1}(z) = & f'_{2,2n}(z) + \sum_{k=1}^{m_2} \bar{M}_{2k} H(z-2n-\xi_{2k}) \left[e^{-\pi_1(z-2n-\xi_{2k})} \sum_{i=0}^{n-1} f_{21i}^{2,2n+1} \right. \\ & \cdot (z-2n-\xi_{2k})^i + e^{-\pi_2(z-2n-\xi_{2k})} \sum_{i=0}^n f_{22i}^{2,2n+1} (z-2n-\xi_{2k})^i + \\ & \left. + e^{-\pi_3(z-2n-\xi_{2k})} \sum_{i=0}^{n-1} f_{23i}^{2,2n+1} (z-2n-\xi_{2k})^i + f_{23i}^{2,2n+1} \right] \end{aligned}$$

gdzie $f'_{1,0}(z) = f'_{2,0}(z) = g'_{2,0}(z) = 0.$

$I_2: \quad \underline{2n+1 \leq z < 2n+2}, \quad n=0,1,\dots$

$$(19) \quad \begin{aligned} f'_{1,2n+2}(z) = & f'_{1,2n+1}(z) + \sum_{k=1}^{m_2} \bar{M}_{2k} H(z-2n-1-\xi_{2k}) \left[e^{-\pi_1(z-2n-1-\xi_{2k})} \sum_{i=0}^n f_{21i}^{1,2n+2} \right. \\ & \cdot (z-2n-1-\xi_{2k})^i + e^{-\pi_2(z-2n-1-\xi_{2k})} \sum_{i=0}^n f_{22i}^{1,2n+2} (z-2n-1-\xi_{2k})^i + \end{aligned}$$

$$+ e^{-\tau_3(z-2n-1-\xi_{2k})} \sum_{i=0}^{n-1} f_{23i}^{1,2n+2} (z-2n-1-\xi_{2k})^i + f^{1,2n+2}]$$

$$g'_{2,2n+2}(z) = g'_{2,2n+1}(z) + \frac{\chi_1}{\chi_2} \sum_{k=1}^{m_1} \bar{M}_{1k} H(z-2n-1-\xi_{1k}) \left[e^{-\tau_1(z-2n-1-\xi_{1k})} \sum_{i=0}^{n-1} g_{11i}^{2,2n+2} \right. \\ (20) \quad \cdot (z-2n-1-\xi_{1k})^i + e^{-\tau_2(z-2n-1-\xi_{1k})} \sum_{i=0}^{n-1} g_{12i}^{2,2n+2} (z-2n-1-\xi_{1k})^i + \\ \left. + e^{-\tau_3(z-2n-1-\xi_{1k})} \sum_{i=0}^{n-1} g_{13i}^{2,2n+2} (z-2n-1-\xi_{1k})^i + g^{2,2n+2} \right]$$

$$f'_{2,2n+2}(z) = f'_{2,2n+1}(z) + \frac{\chi_1}{\chi_2} \sum_{k=1}^{m_2} \bar{M}_{1k} H(z-2n-1-\xi_{1k}) \left[e^{-\tau_1(z-2n-1-\xi_{1k})} \sum_{i=0}^n f_{11i}^{2,2n+2} \right. \\ (21) \quad \cdot (z-2n-1-\xi_{1k})^i + e^{-\tau_2(z-2n-1-\xi_{1k})} \sum_{i=0}^n f_{12i}^{2,2n+2} (z-2n-1-\xi_{1k})^i + \\ \left. + e^{-\tau_3(z-2n-1-\xi_{1k})} \sum_{i=0}^{n-1} f_{13i}^{2,2n+2} (z-2n-1-\xi_{1k})^i + f^{2,2n+2} \right]$$

Stałe $f_{rki}^{j,m}$, $f_{rki}^{j,m}$, $g_{rki}^{2,m}$, $g^{2,m}$ występujące we wzorach (16) - (21) podane są w Aneksie.

Pochodne funkcji $f_1(z)$, $f_2(z)$; $g_2(z)$ oznaczone we wzorach (16) - (21) odpowiednio przez $f'_{1,m}(z)$, $f'_{2,m}(z)$, $g'_{2,m}(z)$ w zależności od najmniejszej liczby całkowitej, większej od wartości rozpatrywanego argumentu z , tj. $m=2n+1$, $2n+1$ oraz $n=0,1,\dots$. Jak wynika ze wzorów (16) - (21) funkcje $f_1(z)$, $f_2(z)$, $g_2(z)$ zależne są exponencjalnie od stałych τ_1 , τ_2 , τ_3 , tzn. od momentów masowych brył sztywnych i od zastępczych współczynników tłumienia rozważanego układu. Zauważyć można, że zmienne współczynniki występujące przy funkcjach exponencjalnych są szeregami potęgowymi odpowiednich argumentów. Wszystkie stałe współczynniki występujące we wzorach (16) - (21) mają wskaźniki górne i dolne. Wskaźniki górne tych argumentów informują o przynależności do funkcji o od-

powiednim numerze i o przedziale argumentu z , natomiast wskaźniki dolne o zależności od momentu zewnętrznego i stałej τ_1 oraz o miejscu tego współczynnika w odpowiednim szeregu potęgowym. Przykładowo, współczynnik $\varphi_{42i}^{4,2n+4}$ związany jest z funkcją $\varphi_1^i(z)$ dla argumentu $z \in \langle 2n, 2n+4 \rangle$, zależny jest od momentu zewnętrznego $\bar{M}_4(z)$, znajduje się przy wyrażeniu zależnym od τ_2 i jest mnożony przez i -tą potęgę $z-2n-\varphi_{4k}$.

Wzory (16) - (21) są wzorami rekurencyjnymi dla pochodnych odpowiednich funkcji. Oznacza to, że do wyznaczenia pochodnej odpowiedniej funkcji dla argumentu z z ustalonego przedziału, potrzebna jest znajomość postaci pochodnej tej funkcji we wszystkich poprzednich przedziałach argumentu z . Informuje o tym pierwszy składnik tych wzorów, a ponadto widoczne to jest przy wyznaczaniu stałych podanych w Aneksie.

Za pomocą wzorów (16) - (21) można znaleźć prędkości i odkształcenia dla dowolnego φ i dowolnego przekroju poprzecznego czopów głównych (1), (2). W celu znalezienia przemieszczeń, należy scałkować wzory (16) - (21) i wykorzystać związek (14).

4. Wyniki numeryczne.

W obliczeniach numerycznych uwzględniono zarówno przypadek równoległych jak i przesuniętych o \bar{T} osi czopów korbowodowych przy $\theta_0 = 4$ [rad], $c = 3200$ [m/s], $l = 0.05$ [m], $J_2 = 3 \cdot 10^{-3}$ [kgm²], $M_{max} = 130$ [kgm], $n_0 = 500/3$ [obr/s]. Momenty zewnętrzne czynne i momenty masowe aproksymowane są funkcjami odcinkowo stałymi przy uwzględnieniu, że /rys.4 i 6/

$$(22) \quad (\bar{T} M_{max})^{-1} \int_{-\bar{T}}^0 M_e(\alpha) d\alpha \approx 0.1, \quad (\bar{T} M_{max})^{-1} \int_0^{\bar{T}} M_e(\alpha) d\alpha \approx 0.45,$$

$$(3 \cdot 0.44 \bar{T} M_{max})^{-1} \int_0^{0.44 \bar{T}} M_\tau(\alpha) d\alpha \approx -0.3, \quad (3 \cdot 0.56 \bar{T} M_{max})^{-1} \int_{0.44 \bar{T}}^{\bar{T}} M_\tau(\alpha) d\alpha \approx 0.2.$$

Wtedy, dla pokrywających się osi czopów korbowodowych $\bar{M}_{e,1}(\bar{r}) = \bar{M}_e(\bar{r})$, $\bar{M}_{e,2}(\bar{r}) = \bar{M}_e(\bar{r}-384)$ ($\bar{M}_{e,2}(\alpha) = M_e(\alpha-2\bar{T})$, $\alpha = 2\bar{T}n_0 \frac{1}{c} \bar{r}$), $\bar{M}_{\tau,1}(\bar{r}) = \bar{M}_{\tau,2}(\bar{r}) = \bar{M}_\tau(\bar{r})$ i zgodnie ze związkami (9), (22) mamy:

$$\bar{M}_1(\tau) = 10^{-5} [0.15 H(\tau) + 0.5 H(\tau-83) - 0.85 H(\tau-192) + \dots]$$

$$(23) \quad \bar{M}_2(\tau) = 10^{-5} [-0.3 H(\tau) + 0.5 H(\tau-83) - 0.5 H(\tau-192) + \dots]$$

Gdy osie czopów korbowodowych są przesunięte o $\bar{\pi}$, wtedy

$\bar{M}_{e,1}(\tau) = \bar{M}_e(\tau)$, $\bar{M}_{e,2}(\tau) = \bar{M}_e(\tau-192)$, $\bar{M}_{\pi,1}(\tau) = \bar{M}_{\pi}(\tau)$, $\bar{M}_{\pi,2}(\tau) = \bar{M}_{\pi}(\tau-192)$, natomiast momenty zewnętrzne przyjmujemy następujące:

$$\bar{M}_1(\tau) = 10^{-5} [0.15 H(\tau) + 0.5 H(\tau-83) - 0.85 H(\tau-192) + \dots]$$

(24)

$$\bar{M}_2(\tau) = 10^{-5} [-0.3 H(\tau) + 0.6 H(\tau-83) - 0.45 H(\tau-192) + \dots]$$

Na podstawie aneksu można zauważyć, że współczynniki $\left\{ \begin{matrix} i, m \\ \pi k i \end{matrix} \right\}$, $\left\{ \begin{matrix} i, m \\ 0 \pi k i \end{matrix} \right\}$, występujące we wzorach (16) - (21) zależne są od następujących stałych

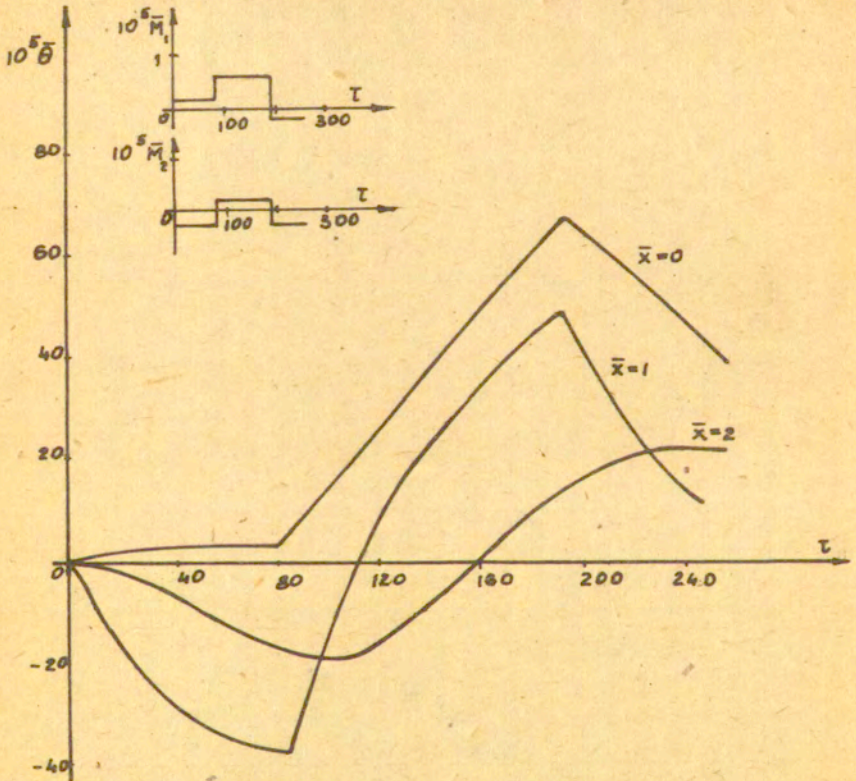
$$(25) \quad \frac{\tau_2 + \tau_4}{\tau_1 - \tau_2}, \quad \frac{\tau_4 + \tau_6}{\tau_1 - \tau_3}, \quad \frac{\tau_2 + \tau_6}{\tau_2 - \tau_3}, \quad \frac{\tau_4 + \tau_5}{\tau_4 - \tau_2}, \quad \frac{\tau_3 + \tau_5}{\tau_2 - \tau_3}$$

W trakcie obliczeń numerycznych okazało się, że stałe (25) mają istotny wpływ na przemieszczenia badanych przekrojów czopów głównych wału korbowego. Przy bezwzględnych wartościach stałych (25) dużo większych od jedynki otrzymuje się duże wartości przemieszczeń, natomiast przy ich bezwzględnych wartościach zbliżonych do jedynki przemieszczenia są stosunkowo małe. Decydują o tym stałe parametry układu \mathcal{K}_i oraz współczynniki tłumienia \bar{D}_i , $i = 1, 2, 3$.

Mimo bogatej literatury dotyczącej zjawiska tłumienia, bardzo duże trudności spotyka się przy określaniu wartości liczbowych tłumienia wewnętrznego i konstrukcyjnego. W naszych rozważaniach wartości \bar{D}_i , przy $\mathcal{K}_1 = 0.04$, $\mathcal{K}_2 = 0.004$, $\mathcal{K}_3 = 0.05$ dobieramy tak, by spełniona była uwaga dotycząca stałych (25).

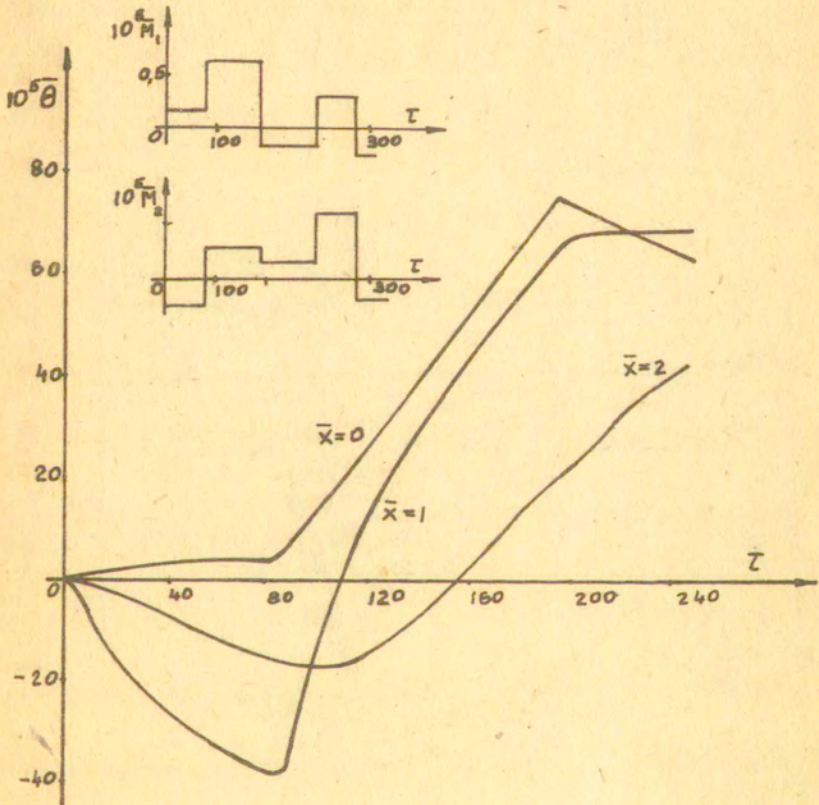
Wykresy przemieszczeń przekrojów $\bar{x} = 0, 1, 2$ czopów głównych wału korbowego naniesiono na rys. 7 i 8 w przypadku pokrywających się i przesuniętych o $\bar{\pi}$ osi czopów korbowodowych dla $\tau \in \langle 0, 250 \rangle$, $\bar{\omega}_0 = 0$. Z porównania wykresów wynika, że naj-

większe bezwzględne przemieszczenia występują odpowiednio w przekrojach: $\bar{x}=0$ dla $\tau=192$, $\bar{x}=2$ dla $\tau=250$, natomiast w przekroju $\bar{x}=1$ odpowiednio dla $\tau=193$, rys.7, i dla $\tau=250$, rys.8. Ponadto z rys.7 i 8 wynika, że maksymalne przemieszczenia są mniejsze w przypadku pokrywających się osi korbowodowych.



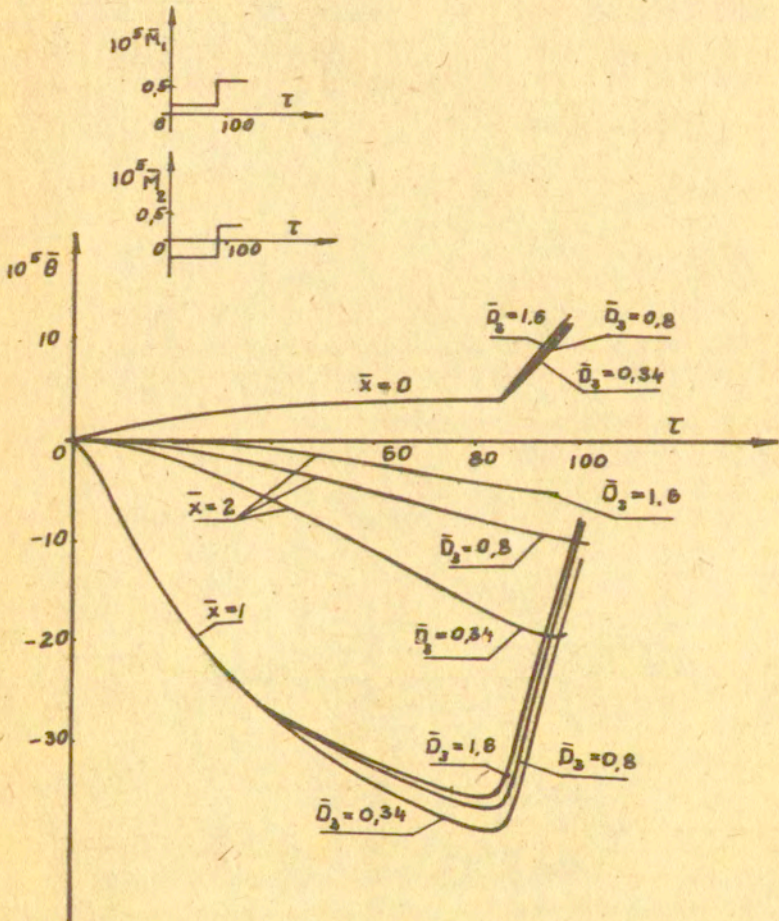
Rys.7. Przemieszczenia dla $\kappa_1=0.01$, $\kappa_2=0.004$, $\kappa_3=0.05$, $\bar{D}_1=0.9$, $\bar{D}_2=0.25$, $\bar{D}_3=0.34$ przy równoległych osiach czopów korbowodowych

Na rys.9 naniesiono wykresy przemieszczeń dla różnych wartości $\bar{D}_3, \bar{\zeta} \in (0, 100)$ przy zachowaniu wartości pozostałych parametrów. Do obliczeń przyjęto $\bar{D}_3 = 0.34, 0.8, 1.6$ i momenty zewnętrzne (24). Z rys.9 wynika, że w przekroju $\bar{x} = 0$ wpływ współczynnika zastępczego tłumienia \bar{D}_3 jest nieznaczny. W przekroju



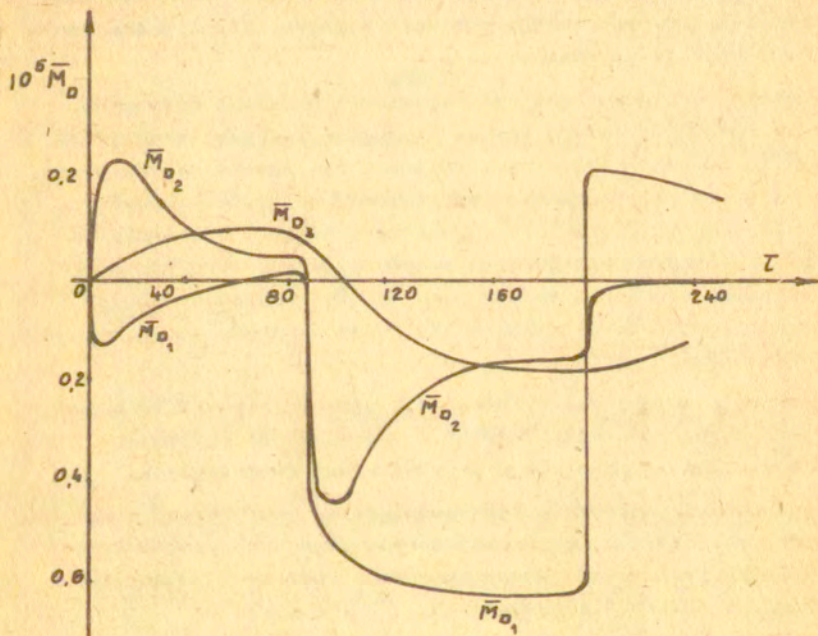
Rys.8. Przemieszczenia dla $\kappa_1=0.01, \kappa_2=0.004, \kappa_3=0.05, \bar{D}_1=0.9, \bar{D}_2=0.25, \bar{D}_3=0.34$ przy przesuniętych osiach czopów korbwodowych

$\bar{x} = 1$ gdy $\tau \in (0, 30)$ wpływ \bar{D}_3 jest bardzo mały, natomiast gdy $\tau > 30$ przy mniejszych wartościach \bar{D}_3 bezwzględne wartości przemieszczeń są większe i na odwrót. W przekroju $\bar{x} = 2$ wpływ współczynnika tłumienia \bar{D}_3 jest istotny w całym badanym przedziale czasu.



Rys.9. Przemieszczenia dla różnych \bar{D}_3 przy przesuniętych osiach czopów korbowodowych

Dodatkowo na rys.10 naniesiono wykresy momentów oporowych \bar{M}_{D_i} , $i = 1, 2, 3$ dla $\alpha_1 = 0.01$, $\alpha_2 = 0.004$, $\alpha_3 = 0.05$, $\bar{D}_1 = 0.9$, $\bar{D}_2 = 0.25$, $\bar{D}_3 = 0.34$ i momentów zewnętrznych (24). Z przebiegu krzywych momentów oporowych \bar{M}_{D_1} , \bar{M}_{D_2} wynika, że są one ściśle zależne od przyjętych do obliczeń momentów zewnętrznych pokazanych na rys.8. Widać to wyraźnie w tych punktach, w których momenty zewnętrzne są nieciągłe. Moment oporowy \bar{M}_{D_3} w badanym przedziale czasu ma charakter oscylacyjny.



Rys.10. Wykresy momentów oporowych przy przesuniętych osiach czopów korbodowych

5. Zakończenie

Rozważania powyższe dotyczą wyznaczania przemieszczeń przekrojów poprzecznych czopów głównych wału korbowego silnika dwucylindrowego czterokortowego, przy wykorzystaniu skrętnych fal sprężystych z uwzględnieniem odbić. Analiza została przeprowadzona dla modelu wału korbowego, rys.2, złożonego z odkształcalnych skrętnie czopów głównych i z brył sztywnych. Przy zadanych

obciążeniach zewnętrznych, momentach masowych i momentach oporowych typu wiskotycznego, otrzymano rozwiązania analityczne dla funkcji, za pomocą których wyznacza się przemieszczenia czopów głównych w dowolnej chwili czasu, w postaci wzorów rekurencyjnych. Zauważono, że przy bezwzględnych wartościach stałych (25) zbliżonych do jedynki, przemieszczenia przekrojów czopów są stosunkowo małe. Decydują o tym stałe parametry $\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3, \bar{D}_1, \bar{D}_2, \bar{D}_3$ badanego układu. Dlatego warunek ten może okazać się pożyteczny dla konstruktorów projektujących wały korbowe, które można modelować podobnie jak rozważany wał.

Istotnym problemem jest opis tłumienia w wałach korbowych. Znane są wprawdzie liczne teorie opisujące zjawisko tłumienia, jednak w przypadku konkretnych obliczeń nie zawsze są one przydatne. W pracy tej tłumienie wewnętrzne /rozłożone w sposób ciągły/ i zewnętrzne zostało wprowadzone poprzez tłumienie zastępcze w wybranych przekrojach czopów głównych wału korbowego. Współczynniki tłumienia zastępczego $\bar{D}_1, \bar{D}_2, \bar{D}_3$ dobrano tak, by bezwzględne wartości stałych (25) przy zadanych $\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3$ były zbliżone do jedynki.

Obliczenia numeryczne wykonano dla przesuniętych i równoległych osi czopów głównych. Z rys.7 i 8 wynika, że maksymalne przemieszczenia są mniejsze w przypadku osi równoległych.

W zakończeniu autorzy pragną podziękować profesorowi W.Matzke za udzielenie cennych informacji dotyczących cech konstrukcyjnych silnika spalinowego dwucylindrowego oraz mgr J.Radzkiemu za wykonanie obliczeń numerycznych.

Literatura

- 1 D.K.RAO, Torsional frequencies of multi-stepped shafts with rotors, Int.J. of Mech. Sci., vol.20, 1978.
- 2 S.TIMOSHENKO, Vibration problems in engineering, D.VAN NOSTRAND COMPANY, Toronto New York London, 1955.
- 3 W.MATZKE, Projektowanie mechanizmów korbowych silników szybkoobrotowych, WKiŁ, Warszawa, 1974.
- 4 K.R.GRAFF, Wave motion in elastic solids, Clarendon Press, Oxford, 1975.

- 5 W. GOLSMITH, Impact, London, 1960.
- 6 A. PIEŁORZ, Wykorzystanie jednowymiarowych fal w badaniach dynamicznych wybranych wielomasowych układów mechanicznych i obiektów budowlanych, Rozprawy Inżynierskie, Nr 3, 1980 /w druku/.

ANEKS

I. Stałe, występujące we wzorach (16) - (18), są następujące:

$$f_{11}^{4,4} = \frac{1}{\alpha_1}, \quad f_{11}^{4,2n+1} = \frac{\alpha_4}{\alpha_1} \left[-f_{11}^{4,2n-1} + f_{11}^{2,2n} + H(n-2)g_{11}^{2,2n} \right] \text{ dla } n \geq 1$$

$$f_{11i}^{4,2n+1} = H(n-1-i) \left(f_{11i}^{4,2n-1} - f_{11i}^{2,2n} \right) - H(n-2-i)g_{11i}^{2,2n} + \frac{\alpha_1 + \alpha_4}{i}$$

$$\cdot \left[f_{11,i-1}^{2,2n} - f_{11,i-1}^{4,2n-1} + H(n-1-i)g_{11,i-1}^{2,2n} \right]^+, \quad i = n, n-1, \dots, 1$$

$$f_{12i}^{4,2n+1} = \frac{1}{\alpha_1 - \alpha_2} \left[-H(n-2-i)(i+1) \left(f_{12,i+1}^{4,2n+1} - f_{12,i+1}^{4,2n-1} H(n-3-i) + \right. \right. \\ \left. \left. + f_{12,i+1}^{2,2n} + H(n-3-i)g_{12,i+1}^{2,2n} \right) + (\alpha_2 + \alpha_4) \left(f_{12i}^{2,2n} + H(n-2-i) \cdot \right. \right. \\ \left. \left. \cdot \left(g_{12i}^{2,2n} - f_{12i}^{4,2n-1} \right) \right) \right], \quad i = n-1, n-2, \dots, 0$$

$$f_{13i}^{4,2n+1} = \frac{1}{\alpha_1 - \alpha_3} \left[- (i+1) \left(H(n-3-i) \left(f_{13,i+1}^{4,2n+1} + f_{13,i+1}^{2,2n} + g_{13,i+1}^{2,2n} \right) - \right. \right. \\ \left. \left. - H(n-4-i) f_{13,i+1}^{4,2n-1} \right) + (\alpha_3 + \alpha_4) \left(f_{13i}^{2,2n} + g_{13i}^{2,2n} - H(n-3-i) \cdot \right. \right.$$

$$\cdot \left[\begin{matrix} 1, 2n-1 \\ f_{13i} \end{matrix} \right], \quad i = n-2, n-3, \dots, 0$$

$$f_{140}^{1, 2n+1} = -f_{140}^{1, 2n+1} - H(n-1) f_{120}^{1, 2n+1} - H(n-2) f_{130}^{1, 2n+1}$$

$$g_{140}^{2, 2n+1} = \frac{r_6}{r_3} H(n-1) f_{140}^{2, 2n-1}$$

$$g_{24i}^{2, 2n+1} = \frac{1}{r_1 - r_3} \left[(i+1) H(n-3-i) (g_{24, i+1}^{2, 2n+1} + f_{24, i+1}^{2, 2n-1}) - (r_1 + r_6) \cdot \right.$$

$$\left. \left[\begin{matrix} 2, 2n-1 \\ f_{24i} \end{matrix} \right], \quad i = n-2, n-3, \dots, 0 \right.$$

$$g_{22i}^{2, 2n+1} = \frac{1}{r_2 - r_3} \left[(i+1) H(n-2-i) (g_{22, i+1}^{2, 2n+1} + f_{22, i+1}^{2, 2n-1}) - (r_2 + r_6) \cdot \right.$$

$$\left. \left[\begin{matrix} 2, 2n-1 \\ f_{22i} \end{matrix} \right], \quad i = n-1, n-2, \dots, 0 \right.$$

$$g_{23i}^{2, 2n+1} = -H(n-2-i) f_{23i}^{2, 2n-1} + \frac{r_3 + r_6}{i} f_{23, i-1}^{2, 2n-1}, \quad i = n-1, n-2, \dots, 1$$

$$g_{230}^{2, 2n+1} = -g_{230}^{2, 2n+1} - H(n-2) g_{240}^{2, 2n+1} - H(n-1) g_{220}^{2, 2n+1}$$

$$f_{140}^{1, 1} = \frac{1}{r_2}, \quad f_{140}^{2, 2n+1} = \frac{1}{r_2} (r_5 g_{140}^{2, 2n+1} + r_7 f_{140}^{1, 2n}) \quad \text{dla } n \geq 1$$

$$f_{24i}^{2, 2n+1} = \frac{1}{r_1 - r_2} \left[(i+1) (H(n-2-i) f_{24, i+1}^{2, 2n+1} + H(n-3-i) g_{24, i+1}^{2, 2n+1}) \right.$$

$$\left. - (r_1 + r_5) g_{24i}^{2, 2n+1} H(n-2-i) - r_7 f_{24i}^{1, 2n} \right], \quad i = n-1, n-2, \dots, 0.$$

$$f_{22i}^{2,2n+1} = -H(n-1-i)g_{22i}^{2,2n+1} + \frac{\tau_2 + \tau_5}{i}g_{22,i-1}^{2,2n+1} + \frac{\tau_7}{i}f_{22,i-1}^{1,2n}, \quad i=n, \dots, 1$$

$$f_{23i}^{2,2n+1} = \frac{1}{\tau_2 - \tau_3} \left[-(i+1)H(n-2-i)(f_{23,i+1}^{2,2n+1} + g_{23,i+1}^{2,2n+1}) + (\tau_3 + \tau_5) \cdot g_{23i}^{2,2n+1} + \tau_7 H(n-2-i)f_{23i}^{1,2n} \right], \quad i=n-1, n-2, \dots, 0$$

$$f_{220}^{2,2n+1} = -f_{240}^{2,2n+1} - H(n-1)(f_{240}^{2,2n+1} + f_{230}^{2,2n+1})$$

II. Stałe, występujące we wzorach (19) - (21), są następujące:

$$f_{\tau_1}^{1,2n+2} = \frac{\tau_4}{\tau_1} \left[f_{\tau_1}^{2,2n+1} + H(n-1)(g_{\tau_1}^{2,2n+1} - f_{\tau_1}^{1,2n}) \right]$$

$$f_{24i}^{1,2n+2} = H(n-1-i) \left(f_{24i}^{1,2n} - f_{24i}^{2,2n+1} \right) - H(n-2-i)g_{24i}^{2,2n+1} + \frac{\tau_1 + \tau_4}{i} \left[f_{24,i-1}^{2,2n+1} - f_{24,i-1}^{1,2n} + H(n-1-i)g_{24,i-1}^{2,2n+1} \right], \quad i=n, n-1, \dots, 1$$

$$f_{22i}^{1,2n+2} = \frac{1}{\tau_1 - \tau_2} \left[-(i+1)H(n-1-i)(f_{22,i+1}^{1,2n+2} + f_{22,i+1}^{2,2n+1}) + H(n-2-i) \cdot (g_{22,i+1}^{2,2n+1} - f_{22,i+1}^{1,2n}) + (\tau_2 + \tau_4)(f_{22i}^{2,2n+1} + H(n-1-i) \cdot (g_{22i}^{2,2n+1} - f_{22i}^{1,2n})) \right], \quad i=n, n-1, \dots, 0$$

$$f_{23i}^{1,2n+2} = \frac{1}{\tau_1 - \tau_3} \left[-(i+1)H(n-2-i)(f_{23,i+1}^{1,2n+2} + f_{23,i+1}^{2,2n+1} + g_{23,i+1}^{2,2n+1}) - \right.$$

$$- H(n-3-i) \left\{ \begin{matrix} 1, 2n \\ 23, i+1 \end{matrix} \right\} + (\tau_3 + \tau_4) \left(\left\{ \begin{matrix} 2, 2n+1 \\ 23i \end{matrix} \right\} + g_{23i}^{2, 2n+1} - H(n-2-i) \cdot \left\{ \begin{matrix} 1, 2n \\ 23i \end{matrix} \right\} \right), \quad i = n-1, n-2, \dots, 0$$

$$f_{210}^{1, 2n+2} = - \left\{ \begin{matrix} 1, 2n+2 \\ 220 \end{matrix} \right\} - \left\{ \begin{matrix} 1, 2n+2 \\ 220 \end{matrix} \right\} - H(n-1) \left\{ \begin{matrix} 1, 2n+2 \\ 230 \end{matrix} \right\}$$

$$g_{210}^{2, 2n+2} = \frac{\tau_6}{\tau_3} H(n-1) \left\{ \begin{matrix} 2, 2n \\ 210 \end{matrix} \right\}$$

$$g_{11i}^{2, 2n+2} = \frac{1}{\tau_1 - \tau_3} \left[(i+1) H(n-2-i) \left(g_{11, i+1}^{2, 2n+2} + \left\{ \begin{matrix} 2, 2n \\ 11, i+1 \end{matrix} \right\} \right) - (\tau_4 + \tau_6) \left\{ \begin{matrix} 2, 2n \\ 11i \end{matrix} \right\} \right], \quad i = n-1, n-2, \dots, 0$$

$$g_{12i}^{2, 2n+2} = \frac{1}{\tau_2 - \tau_3} \left[(i+1) H(n-2-i) \left(g_{12, i+1}^{2, 2n+2} + \left\{ \begin{matrix} 2, 2n \\ 12, i+1 \end{matrix} \right\} \right) - (\tau_2 + \tau_6) \left\{ \begin{matrix} 2, 2n \\ 12i \end{matrix} \right\} \right], \quad i = n-1, n-2, \dots, 0$$

$$g_{13i}^{2, 2n+2} = - H(n-2-i) \left\{ \begin{matrix} 2, 2n \\ 13i \end{matrix} \right\} + \frac{\tau_3 + \tau_6}{i} \left\{ \begin{matrix} 2, 2n \\ 13, i-1 \end{matrix} \right\}, \quad i = n-1, n-2, \dots, 1$$

$$g_{130}^{2, 2n+2} = - g_{130}^{2, 2n+2} - H(n-1) \left(g_{110}^{2, 2n+2} + g_{120}^{2, 2n+2} \right)$$

$$f_{111}^{2, 2n+2} = \frac{1}{\tau_2} \left[\tau_7 \left\{ \begin{matrix} 1, 2n+1 \\ 111 \end{matrix} \right\} + \tau_5 H(n-1) g_{111}^{2, 2n+2} \right]$$

$$f_{11i}^{2, 2n+2} = \frac{1}{\tau_1 - \tau_2} \left[(i+1) \left(H(n-1-i) \left\{ \begin{matrix} 2, 2n+2 \\ 11, i+1 \end{matrix} \right\} + H(n-2-i) g_{11, i+1}^{2, 2n+2} \right) - (\tau_4 + \tau_5) \left\{ \begin{matrix} 2, 2n+2 \\ 11i \end{matrix} \right\} \right], \quad i = n, n-1, \dots, 0$$

$$H(n-1-i) g_{11i}^{2, 2n+2} - \tau_7 \left\{ \begin{matrix} 1, 2n+1 \\ 11i \end{matrix} \right\}, \quad i = n, n-1, \dots, 0$$

$$f_{12i}^{2,2n+2} = -H(n-1-i)g_{12i}^{2,2n+2} + \frac{\tau_2 + \tau_5}{i} g_{12,i-1}^{2,2n+2} + \frac{\tau_7}{i} f_{12,i-1}^{1,2n+1},$$

$i = n, n-1, \dots, 1$

$$f_{13i}^{2,2n+2} = \frac{1}{\tau_2 - \tau_3} \left[-H(n-2-i)(i+1) \left(f_{13,i+1}^{2,2n+2} + g_{13,i+1}^{2,2n+2} \right) + (\tau_3 + \tau_5) g_{13i}^{2,2n+2} + \tau_7 H(n-2-i) f_{13i}^{1,2n+1} \right],$$

$i = n-1, n-2, \dots, 0$

$$f_{120}^{2,2n+2} = -f^{2,2n+2} - f_{110}^{2,2n+2} - H(n-1) f_{130}^{2,2n+2}$$

SPIS TREŚCI

1. Wstęp	3
2. Model fizyczny wału korbowego silnika dwucylindrowego	4
3. Równania ruchu i wzory rekurencyjne	11
4. Wyniki numeryczne	16
5. Zakończenie	21
6. Literatura	22
7. Aneks	23