6

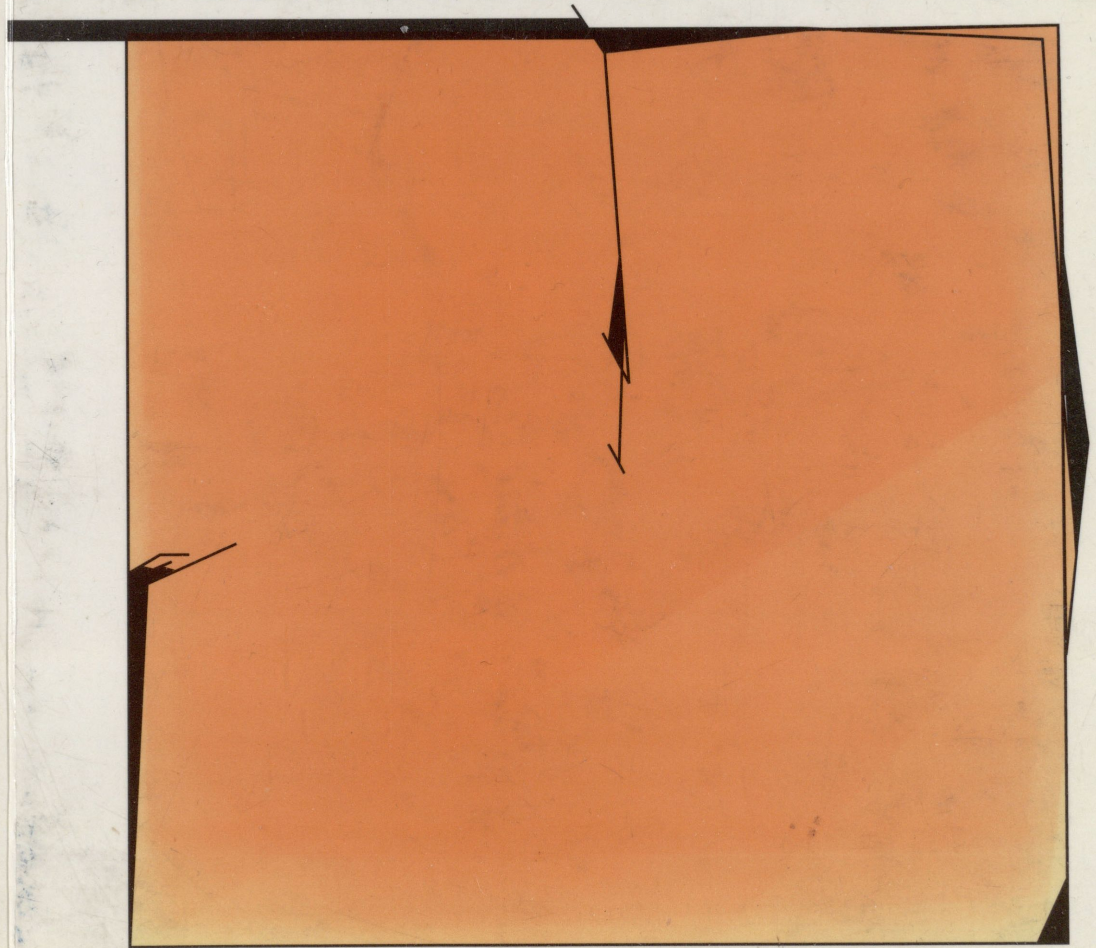
TEORIA GENERAL DE PROCESOS E INTEGRACION ESTOCASTICA

APORTACIONES MATEMATICAS

TEXTOS 6

TOMASZ BOJDECKI

TEORIA GENERAL DE PROCESOS E INTEGRACION ESTOCASTICA



SOCIEDAD MATEMATICA MEXICANA

1995

una publicación de la
SOCIEDAD MATEMATICA MEXICANA

ISBN: 968-36-3591-1 (Aportaciones Matemáticas)
ISBN: 968-36-3594-6 (SERIE TEXTOS)
ISBN: 968-36-4629-8

Printed in Mexico / Impreso en México

CONACYT

CENTRO DE INVESTIGACION EN MATEMATICAS, A.C.

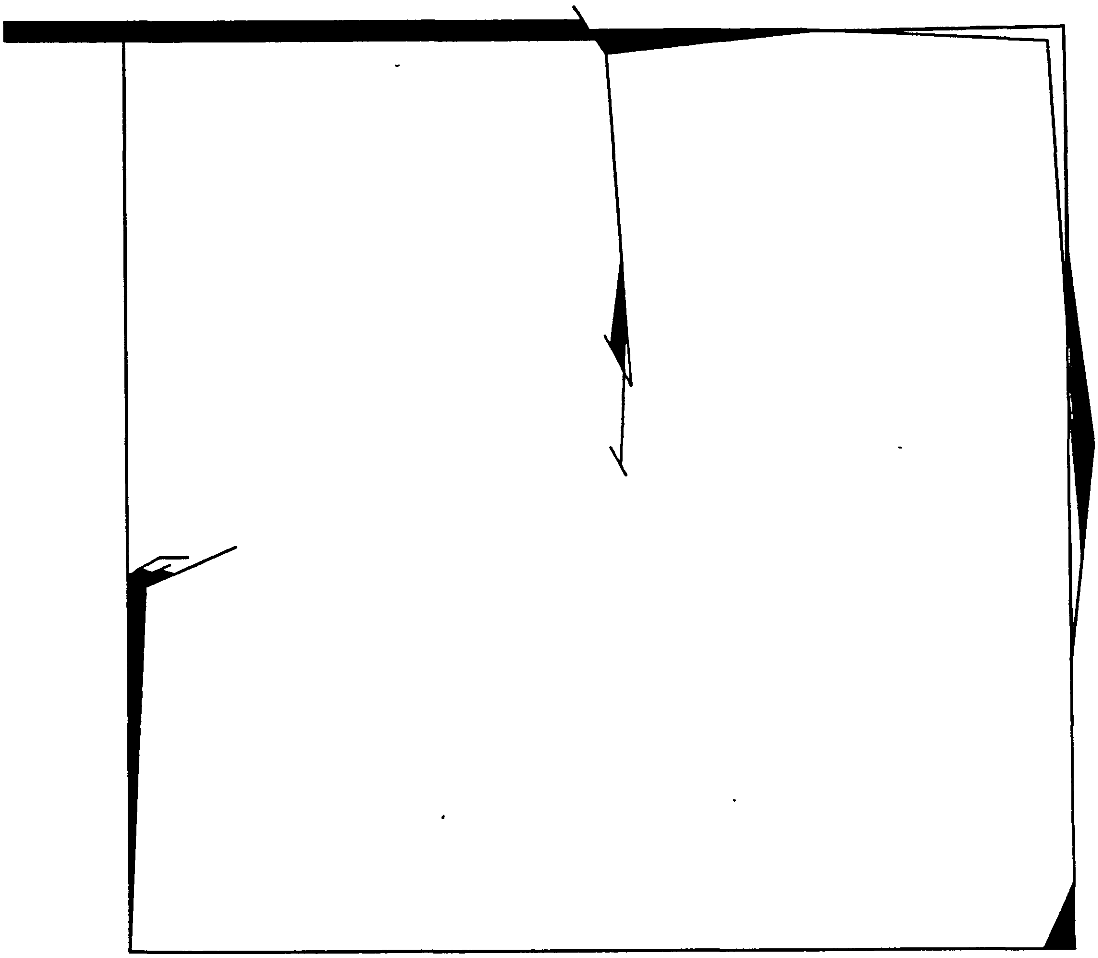
Estas memorias se imprimieron con el apoyo financiero del proyecto 4224E9405 de CONACyT y de la Coordinación de Estudios de Posgrado del CIMAT.

APORTACIONES MATEMATICAS

TEXTOS 6

TOMASZ BOJDECKI

TEORIA GENERAL DE PROCESOS E INTEGRACION ESTOCASTICA



SOCIEDAD MATEMATICA MEXICANA
1995

Tomasz Bojdecki

Universidad de Varsovia, Polonia

Contenido

Prefacio

El temario de esta monografía cubre una gran parte del cálculo estocástico. Es la parte que se podría describir como bases generales; la palabra "generales" se debe al hecho de que se construye la teoría para semimartingalas, obteniendo la teoría para el proceso de Wiener como un caso especial.

Los primeros ocho capítulos (o, más precisamente, los capítulos del dos al ocho) están dedicados a la teoría general de procesos, creada y desarrollada por la escuela francesa (P. A. Meyer, C. Dellacherie, C. Doléans y otros). Esta teoría puede parecer un tanto abstracta y sin aplicaciones inmediatas, pero sucede que es bastante útil para dar los fundamentos del análisis estocástico. El acento está puesto en las partes de la teoría que serán utilizadas después, sobre todo en la noción de predecibilidad de procesos y de tiempos de paro. Por la misma razón nos ocupamos relativamente poco de los procesos opcionales, cuyas propiedades no son tan importantes en la parte posterior. Los teoremas principales aquí son los de "sección" y de "proyección" predecibles, el teorema de Doléans que caracteriza a la proyección dual predecible de una medida admisible sobre $\mathbb{R}_+ \times \Omega$ y, como corolario del último resultado, el teorema de Doob-Meyer sobre la descomposición de supermartingalas. El enfoque adoptado aquí no es completamente tradicional, ya que siguiendo a M. Métivier (o más bien a C. Stricker, quien fue el primero en mostrar la importancia de la noción de cuasimartingala), las consideraciones están basadas en las propiedades de cuasimartingalas. Se dan todas las demostraciones.

Los capítulos restantes están dedicados a la teoría de integración estocástica, primero con respecto a martingalas cuadrado integrables, después con respecto a martingalas locales localmente cuadrado integrables, y finalmente con respecto a semimartingalas. El resultado principal es la fórmula de Itô, que es análogo estocástico del "teorema fundamental del cálculo" en el cálculo diferencial clásico. Se dan varias aplicaciones de esta fórmula al análisis de unas propiedades profundas de las semimartingalas, en particular se obtiene la caracterización de Bichteler-Dellacherie-Mokobodzki, así como una generalización del teorema de Girsanov, la integral de Stratonovich y algunas otras. Por último, se demuestra el teorema de Doléans-Dade y Protter sobre la existencia y unicidad de soluciones de ecuaciones diferenciales estocásticas con respecto a semimartingalas, con coeficientes lipschitzianos.

Se supone que el lector conoce los elementos de la teoría de procesos estocásticos, especialmente algunos hechos básicos sobre martingalas (teoremas de convergencia, el "teorema de muestreo opcional", el teorema de existencia de una modificación regular). Para entender los ejemplos es necesario saber algo sobre los procesos de Wiener y de Poisson. El conocimiento de la teoría de integración estocástica clásica, es decir, con respecto al proceso de Wiener, no es indispensable pero sí sería útil, ya que entonces algunas ideas y métodos se verían naturales. Como buenos libros introductorios se podría recomendar por ejemplo I. Karatzas y S. Shreve [13], o C. Tudor [24].

La teoría contenida en esta monografía no es completa. He aquí algunas de la posibles ramificaciones y continuaciones.

(1) No se ha incluido nada sobre partes muy importantes de la teoría, como medidas aleatorias, sus proyecciones duales predecibles y las características locales de semimartingalas. La fuente más extensa de información sobre estos temas es [10], pero [12] también puede ser útil. Además, el último libro da aplicaciones de la teoría de semimartingalas a la investigación de la convergencia débil de procesos.

(2) [11] contiene una discusión sobre distintas nociones de solución de una ecuación estocástica (soluciones fuertes, soluciones débiles). Hay claramente muchos libros donde se consideran ecuaciones estocásticas "clásicas", es decir con respecto al proceso de Wiener (ver e.g. [13])

(3) En la monografía se consideran únicamente procesos reales. No hay ningún problema con la extensión de una gran parte de la teoría a procesos con valores en $\mathbb{R}^d$ (ver [10]). Los procesos con valores en un espacio de Hilbert están tratados en [15], [16], [6].

(4) Existe otro enfoque interesante en el análisis estocástico, donde la noción de semimartingala aparece desde el principio. Se define como un proceso con respecto al cual se puede construir la integral estocástica con unas propiedades de regularidad mínimas. La definición usual aparece entonces (como el teorema de Dellacherie, Stricker, Mokobodzki) casi al final del curso. El lector interesado en este enfoque puede consultar el libro de P. Protter [21].

Una gran parte de esta monografía está basada en las notas de una serie de conferencias que presenté en el Instituto de Matemáticas y en la Facultad de Ciencias de la UNAM en 1983/84, estando en aquel entonces como profesor visitante en el Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN.

Las dos primeras ediciones de la monografía fueron publicadas en la serie "Monografías del Instituto de Matemáticas de la UNAM" (la primera edición contenía solamente la primera parte, dedicada a la teoría general de procesos).

La edición presente, además de cambios de redacción y correcciones, contiene algunas cosas nuevas. He aquí las más importantes de ellas:

(1) Se ha añadido el primer capítulo dedicado a la discusión de filtraciones. Se demuestra que para procesos tan importantes como los procesos con incrementos independientes o los procesos de Markov con la propiedad de Feller, la filtración generada por el proceso "casi" satisface las condiciones usuales.

(2) Una continuación de esta discusión es el contenido del Apéndice C. Aunque una gran mayoría de los resultados presentados en esta monografía se obtienen bajo las condiciones usuales sobre la filtración básica, muchos de los teoremas se pueden probar bajo hipótesis menos restrictivas. El apéndice contiene indicaciones de cómo lograrlo.

(3) Se da más información sobre los procesos con incrementos independientes; sobre todo se demuestra el teorema de Jacod que da una caracterización de las semimartingalas con incrementos independientes.

(4) El Apéndice A contiene las formulaciones y demostraciones de aquellas versiones de los lemas de clases monótonas que se usan constantemente en esta monografía.

(5) El Apéndice B contiene una demostración elegante del teorema de capacidad de Choquet (en las ediciones anteriores se utilizaba este teorema sin demostrarlo).

(6) Como se mencionó anteriormente, se supone que el lector conoce los teoremas clásicos sobre martingalas. Sin embargo, para facilitar la lectura todos estos teoremas que se utilizan en la monografía, están formulados, sin demostración, en el Apéndice D.

Además, para facilitar la lectura, se ha añadido el índice de términos así como la lista de símbolos. La bibliografía ha sido ampliada. Sin embargo hay que subrayar que no pretende ser completa. Contiene solamente aquellas referencias que, en mi opinión, son las más útiles para completar las bases indispensables para entender la monografía, o bien para continuar los temas iniciados en ella.

Esta nueva versión de la monografía fue elaborada durante mi visita en el año 1994 al Centro de Investigación en Matemáticas, A.C., en Guanajuato, Gto. Agradezco la hospitalidad que recibí en este Centro, en particular de parte de Víctor Pérez Abreu. Esta visita tuvo el apoyo del Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología por medio de la Cátedra Patrimonial 930083 y el Proyecto 1858E9219.

Doy las gracias al Instituto de Matemáticas de la UNAM por el permiso para publicar la presente versión de la monografía en otra editorial.

Las primeras ediciones de la monografía fueron el resultado de la iniciativa de María Emilia Caballero, Luis Briseño y Guillermo Grabinsky, quienes se encargaron de la redacción, a quienes agradezco su esfuerzo. Estas ediciones sirvieron de base para la presente versión.

Expreso mi reconocimiento especial a Luis Gorostiza por su arduo trabajo en la revisión extensa de la versión original de las notas, y por su iniciativa y aliento para preparar la

edición actual.

La formación en LaTeX de la segunda edición estuvo a cargo de Jorge León, a quien agradezco cumplidamente. Dicho trabajo sirvió de base para la preparación en LaTeX de la versión presente hecha por Iván Pacheco, a quien también expreso mi agradecimiento.

Capítulo 1

Filtraciones

Se supone que el lector conoce los fundamentos de la teoría de procesos estocásticos, sin embargo conviene repasar las definiciones básicas.

1.1 Definición. Sea $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ un espacio de probabilidad y $(E, \mathcal{B})$ un espacio medible (o sea un conjunto E con una σ-álgebra fija de sus subconjuntos). Un *proceso estocástico* con valores en $(E, \mathcal{B})$ es una familia $X = (X_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ de aplicaciones medibles $X_t: (\Omega, \mathfrak{F}) \to (E, \mathcal{B})$.

Si no indicamos explícitamente el espacio de estados E, eso significa que consideramos el caso $(E, \mathcal{B}) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. Para abreviar formulaciones vamos a escribir más a menudo "proceso" en lugar de "proceso estocástico".

La teoría de procesos estocásticos es el resultado de un intento por construir modelos matemáticos que describan fenómenos aleatorios que evolucionan en el tiempo.

Si estamos observando un fenómeno aleatorio es natural hablar de los sucesos que pueden ocurrir hasta un instante t (inclusive). Todos estos eventos, para t fijo, forman una σ-álgebra contenida en la σ-álgebra de todos los sucesos. Para incluir el factor de tiempo en el modelo, se supone en la teoría de probabilidad que además de la terna básica $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ se tiene una filtración.

1.2 Definición. Una familia de σ-álgebras $(\mathfrak{F}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ se llama *filtración* si $\mathfrak{F}_t \subset \mathfrak{F}$ para cada $t \in \mathbb{R}_+$ y $t_1 \leq t_2$ implica $\mathfrak{F}_{t_1} \subset \mathfrak{F}_{t_2}$.

Si $(\mathfrak{F}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ es una filtración, definimos $\mathfrak{F}_\infty := \sigma(\cup_{t \in \mathbb{R}_+} \mathfrak{F}_t)$.

Como se ha dicho antes, a $\mathfrak{F}_t$ la interpretamos como todos los sucesos sobre los cuales podemos decir en el instante t si han ocurrido o no han ocurrido. Desde luego, con el transcurso del tiempo sabemos más, lo que se refleja en la hipótesis de que se tiene una familia creciente.

Observación. En lo que sigue siempre vamos a considerar $\mathbb{R}_+ = [0, \infty[$ como el conjunto de tiempos, pero no hay ningún problema en reformular todos los resultados para que valgan en el caso de un intervalo. Se puede considerar también el tiempo discreto. Este último caso, aunque importante y útil, es mucho más sencillo. De hecho, el propósito principal de la teoría general de procesos es tratar sutilezas que aparecen si se considera el tiempo continuo.

1.3 Definición. (a) Decimos que un proceso estocástico $X = (X_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ con valores en $(E, \mathcal{B})$ es *adaptado* a una filtración $(\mathfrak{F}_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ si X_t es $\mathfrak{F}_t$-medible para cada $t \in \mathbb{R}_+$.

(b) La filtración $(\mathfrak{F}_t^X)_{t\in\mathbb{R}_+}$ definida por

$$\mathfrak{F}_t^X = \sigma(X_s; s \leq t)$$

se llama la *filtración generada por* X .

O sea, $(\mathfrak{F}_t^X)_{t\in\mathbb{R}_+}$ es la filtración más pequeña a la cual X es adaptada. La interpretación es muy clara: $\mathfrak{F}_t^X$ está compuesta de los sucesos que dependen solamente del comportamiento del proceso hasta el instante t.

A cada filtración podemos asociar otras filtraciones. He aquí las más importantes de ellas:

1.4 Definición. Sea $(\mathfrak{F}_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ una filtración en un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$.

(a) $\mathfrak{F}_{t+} := \bigcap_{s>t} \mathfrak{F}_s$, $t \in \mathbb{R}_+$.

(b) Si $\mathfrak{F}$ es completa vamos a denotar con $\overline{\mathfrak{F}_t}$ la σ-álgebra más chica que contiene a $\mathfrak{F}_t$ y a todos los elementos de $\mathfrak{F}$ de probabilidad cero.

Es claro que $(\mathfrak{F}_{t+})_{t\in\mathbb{R}_+}$ y $(\overline{\mathfrak{F}_t})_{t\in\mathbb{R}_+}$ también son filtraciones. Si $\mathfrak{F}_t = \mathfrak{F}_{t+}$ para cada t, entonces decimos que la filtración $(\mathfrak{F}_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ es *continua por la derecha* . Es muy fácil verificar, y se deja como ejercicio, que la filtración $(\mathfrak{F}_{t+})_{t\in\mathbb{R}_+}$ es continua por la derecha, o sea $\mathfrak{F}_{t++} = \mathfrak{F}_{t+}$.

1.5 Definición. Decimos que una filtración $(\mathfrak{F}_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ en un espacio de probabilidad completo $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ satisface las *condiciones usuales* si $\mathfrak{F}_t = \mathfrak{F}_{t+} = \overline{\mathfrak{F}_t}$ para cada $t \in \mathbb{R}_+$. Equivalentemente podemos decir que la filtración satisface las condiciones usuales si y sólo si es continua por la derecha y $\mathfrak{F}_0 = \overline{\mathfrak{F}_0}$.

Una gran mayoría de los resultados en esta monografía se obtendrá bajo la suposición de que las condiciones usuales se cumplen. Sin embargo veremos que esta restricción no es muy grave.

¿Por qué son útiles las condiciones usuales? Lo veremos detalladamente más adelante, pero ahora ya podemos observar por ejemplo que bajo esas condiciones cada martingala tiene una versión con trayectorias continuas por la derecha con límites finitos por la izquierda (ver e.g. Apéndice D, Teorema D.13 y Proposición D.14).

Cada filtración se puede transformar, aumentándola un poco, en una filtración que satisface las condiciones usuales. A saber tenemos

1.6 Proposición. *Sea* $(\mathfrak{F}_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ *una filtración en un espacio de probabilidad completo. Entonces la filtración* $(\overline{\mathfrak{F}_{t+}})_{t\in\mathbb{R}_+}$ *satisface las condiciones usuales. Además se tiene que*

$$\overline{(\mathfrak{F}_{t+})} = (\overline{\mathfrak{F}_t})_+.$$

De la segunda aseveración se sigue que la notación $\overline{\mathfrak{F}_{t+}}$ no es ambigua, pues las operaciones "el completar" y "el tomar el +" conmutan.

Demostración. Basta demostrar la segunda afirmación o más explícitamente

$$\overline{\bigcap_{s>t} \mathfrak{F}_s} = \bigcap_{s>t} \overline{\mathfrak{F}_s} \tag{1.1}$$

para cada $t \in \mathbb{R}_+$, porque la filtración definida por el lado derecho de (1.1) claramente satisface las condiciones usuales.

Para $s > t$ se tiene $\mathfrak{F}_{t+} \subset \mathfrak{F}_s$ y eso implica $\overline{(\mathfrak{F}_{t+})} \subset \overline{\mathfrak{F}_s}$, por lo tanto $\overline{\cap_{s>t}\mathfrak{F}_s} \subset \cap_{s>t}\overline{\mathfrak{F}_s}$. Fijemos una $t \geq 0$ y una sucesión arbitraria $(s_n)_n$, tal que $s_n > t$ para $n = 1, 2, \ldots$ y $s_n \downarrow t$. Como $\cap_{s>t}\overline{\mathfrak{F}_s} = \cap_{n=1}^{\infty}\overline{\mathfrak{F}_{s_n}}$ y $\cap_{s>t}\mathfrak{F}_s = \cap_{n=1}^{\infty}\mathfrak{F}_{s_n}$, entonces basta probar que

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{\mathfrak{F}_{s_n}} \subset \overline{\bigcap_{n=1}^{\infty} \mathfrak{F}_{s_n}}.$$

Fijemos $A \in \cap_{n=1}^{\infty}\overline{\mathfrak{F}_{s_n}}$. Para ver que $A \in \overline{\cap_{n=1}^{\infty}\mathfrak{F}_{s_n}}$ basta, por la definición de la completación, encontrar un evento $B \in \cap_{n=1}^{\infty}\mathfrak{F}_{s_n}$, tal que $P(A \triangle B) = 0$ (como siempre, "$\triangle$" significa la diferencia simétrica). Sabemos que para cada n, $A \in \overline{\mathfrak{F}_{s_n}}$ y por lo tanto existe $B_n \in \mathfrak{F}_{s_n}$ tal que $P(A \triangle B_n) = 0$, $n = 1, 2, \ldots$.

Denotemos $B'_n = \cap_{m\geq n} B_m$. Tenemos

$$\begin{aligned} P(A \triangle B'_n) &= P(A - \bigcap_{m\geq n} B_m) + P(B'_n - A) = P(\bigcup_{m\geq n} (A - B_m)) + P(B'_n - A) \\ &\leq \sum_{m\geq n} P(A - B_n) + P(B_n - A) = 0. \end{aligned}$$

Claramente $B'_n \subset B'_{n+1}$, y $m \geq n$ implica que $B_m \in \mathfrak{F}_{s_m} \subset \mathfrak{F}_{s_n}$, por lo tanto $B'_n \in \mathfrak{F}_{s_n}$, $n = 1, 2, \ldots$ Definamos $B = \cup_{n=1}^{\infty} B'_n$. Como $(B'_n)_n$ es creciente entonces para cada m se tiene $B = \cup_{n \geq m} B'_n$ y este último suceso pertenece a $\mathfrak{F}_{s_m}$. En consecuencia $B \in \cap_{n=1}^{\infty} \mathfrak{F}_{s_n}$.

Por otro lado, $\mathbf{1}_{B'_n}(\omega) \to \mathbf{1}_B(\omega)$ para cada $\omega \in \Omega$, entonces por el teorema de convergencia dominada

$$P(A \triangle B) = E|\mathbf{1}_A - \mathbf{1}_B| = \lim_{n \to \infty} E|\mathbf{1}_A - \mathbf{1}_{B'_n}| = \lim_{n \to \infty} P(A \triangle B'_n) = 0,$$

lo que termina la demostración. □

Es natural preguntar qué tanto se aumenta la filtración por medio del procedimiento descrito en la Proposición 1.6. Por ejemplo es fácil ver que cada martingala (o supermartingala, o submartingala) continua por la derecha sigue siendo martingala (o supermartingala, o submartingala, respectivamente) si pasamos a la filtración aumentada.

Sucede que en muchos casos importantes ese aumento es realmente insignificante. Para verlo formularemos primero la siguiente definición.

1.7 Definición. Sea $X = (X_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ un proceso estocástico con valores en $(E, \mathcal{B})$. La filtración $(\overline{\mathfrak{F}^X_{t+}})_{t \in \mathbb{R}_+}$ la vamos a llamar la *filtración usual generada por* X.

1.8 Teorema. *Sea X un proceso d-dimensional (es decir, con valores en $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$) con trayectorias continuas por la derecha, tal que para cada n y cada $0 < t_1 < \cdots < t_n$ las variables aleatorias $X_0, X_{t_1} - X_0, \ldots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}}$ son independientes (o sea, X es un proceso con incrementos independientes). Entonces $\overline{\mathfrak{F}^X_{t+}} = \overline{\mathfrak{F}^X_t}$ para cada $t \in \mathbb{R}_+$.*

Así pues en este caso basta completar la filtración generada por X para obtener una filtración que satisfaga las condiciones usuales, más exactamente, la filtración usual generada por X. Así sucede por ejemplo para el proceso de Wiener o para el proceso de Poisson. Observemos que para el proceso de Wiener $W = (W_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ (o tambien para el proceso de Poisson) el pasar de la filtración $(\mathfrak{F}^W_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ a $(\overline{\mathfrak{F}^W_t})_{t \in \mathbb{R}_+}$ cambia realmente muy poco porque para cada $s > t \geq 0$ el incremento $W_s - W_t$ es independiente de $\overline{\mathfrak{F}^W_t}$, o sea W sigue siendo el proceso de Wiener con respecto a la filtración $(\overline{\mathfrak{F}^W_t})_{t \in \mathbb{R}_+}$.

Pasando a la demostración del teorema primero observemos que

$$\mathfrak{F}^X_\infty = \sigma(X_s; s \in \mathbb{R}_+)$$

(ver la segunda parte de la Definición 1.2) y formulemos el siguiente simple lema:

1.9 Lema. *Para demostrar el teorema basta probar que para cada $t \in \mathbb{R}_+$ y $A \in \mathfrak{F}_\infty^X$ arbitrario se tiene $P(A|\mathfrak{F}_t^X) = P(A|\mathfrak{F}_{t+}^X)$ c.s.*

Demostración del lema. Para demostrar el teorema claramente basta probar que $\mathfrak{F}_{t+}^X \subset \overline{\mathfrak{F}_t^X}$ para cada $t \in \mathbb{R}_+$.

Fijemos un $A \in \mathfrak{F}_{t+}^X$ $(\subset \mathfrak{F}_\infty^X)$ y supongamos que $P(A|\mathfrak{F}_t^X) = P(A|\mathfrak{F}_{t+}^X)$ c.s. Entonces $P(A|\mathfrak{F}_t^X) = \mathbf{1}_A$ c.s.

Sea ξ una versión de $P(A|\mathfrak{F}_t^X)$. Por definición, ξ es una variable aleatoria $\mathfrak{F}_t^X$-medible. Además $\xi = \mathbf{1}_A$ c.s., por lo tanto $P(\xi \notin \{0,1\}) = 0$. En consecuencia $\mathbf{1}_{\{\xi=1\}} = \xi$ c.s. de donde $\mathbf{1}_{\{\xi=1\}} = \mathbf{1}_A$ c.s., o sea $P(A \triangle \{\xi = 1\}) = 0$. En consecuencia $A \in \overline{\mathfrak{F}_t^X}$ porque $\{\xi = 1\} \in \mathfrak{F}_t^X$, y el lema está demostrado. □

Gracias a este lema, para obtener el Teorema 1.8 basta demostrar

1.10 Proposición. *Si $X = (X_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ satisface las suposiciones del Teorema 1.8 entonces*

$$P(A|\mathfrak{F}_{t+}^X) = P(A|\mathfrak{F}_t^X) \quad c.s. \tag{1.2}$$

para cada $t \in \mathbb{R}_+$ y cada $A \in \mathfrak{F}_\infty^X$.

Demostración de la proposición. Fijemos $t \in \mathbb{R}_+$. De las propiedades elementales de la probabilidad condicional se sigue que basta demostrar (1.2) para todos los $A \in \sigma(X_{u_n}, X_{u_{n-1}}, \ldots, X_{u_1}, X_t, X_{s_1}, \ldots, X_{s_{m-1}}, X_{s_m})$ para cada sistema $u_n > \cdots > u_1 > t > s_1 > \cdots > s_m = 0$ (si $t = 0$ no consideramos $s_1, \ldots, s_m$). En efecto, la unión de todos las σ-álgebras de esta forma es un π-sistema que genera a $\mathfrak{F}_\infty^X$; por otro lado, la clase de todos los A para los cuales (1.2) se cumple es λ-sistema, por lo tanto basta aplicar el lema sobre π, λ-sistemas (ver Apéndice A).

Así, fijemos $u_n > \cdots > u_1 > t > s_1 > \cdots > s_m = 0$. Como $\sigma(X_{u_n}, X_{u_{n-1}}, \ldots, X_{u_1}, X_t, X_{s_1}, \ldots, X_{s_{m-1}}, X_{s_m}) = \sigma(X_{u_n} - X_{u_{n-1}}, \ldots, X_{u_2} - X_{u_1}, X_{u_1} - X_t, X_t - X_{s_1}, \ldots, X_{s_{m-1}} - X_{s_m}, X_{s_m})$ entonces otra vez por el lema sobre π, λ-sistemas vemos que basta demostrar (1.2) para A de la forma $A = \{X_{u_n} - X_{u_{n-1}} \in \Gamma_n, \ldots, X_{u_2} - X_{u_1} \in \Gamma_2, X_{u_1} - X_t \in \Gamma_1, X_t - X_{s_1} \in \Gamma'_1, \ldots, X_{s_{m-1}} - X_{s_m} \in \Gamma'_{m-1}, X_{s_m} \in \Gamma'_m\}$ donde $\Gamma_i, \Gamma'_j \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$. Fijemos un tal A. Para abreviar notaciones vamos a escribir $\triangle_{a,b}$ en lugar de $X_b - X_a$.

Puesto que $\mathfrak{F}_{t+}^X \subset \mathfrak{F}_{u_1}^X$, tenemos

$$\begin{aligned} P(A|\mathfrak{F}_{t+}^X) &= E(E(\mathbf{1}_A|\mathfrak{F}_{u_1}^X)|\mathfrak{F}_{t+}^X) \\ &= \mathbf{1}_{\{\triangle_{s_1,t}\in\Gamma'_1,\ldots,\triangle_{s_m,s_{m-1}}\in\Gamma'_{m-1},X_{s_m}\in\Gamma'_m\}} \\ &\quad \times E(\mathbf{1}_{\{\triangle_{t,u_1}\in\Gamma_1\}} P(\triangle_{u_{n-1},u_n} \in \Gamma_n, \ldots, \triangle_{u_1,u_2} \in \Gamma_2|\mathfrak{F}_{u_1}^X)|\mathfrak{F}_{t+}^X). \end{aligned}$$

Pero los eventos $\{\triangle_{u_{n-1},u_n} \in \Gamma_n\}, \ldots, \{\triangle_{u_1,u_2} \in \Gamma_2\}$ son independientes y su intersección es independiente de $\mathfrak{F}_{u_1}^X$, por lo tanto

$$P(A|\mathfrak{F}_{t+}^X) = \mathbf{1}_{\{\triangle_{s_1,t}\in\Gamma_1',\ldots,\triangle_{s_m,s_{m-1}}\in\Gamma_{m-1}',X_{s_m}\in\Gamma_m'\}} \prod_{k=2}^{n} P(\triangle_{u_{k-1},u_k} \in \Gamma_k)P(\triangle_{t,u_1} \in \Gamma_1|\mathfrak{F}_{t+}^X).$$

Idénticamente obtenemos, tomando $\mathfrak{F}_t^X$ en vez de $\mathfrak{F}_{t+}^X$,

$$P(A|\mathfrak{F}_{t}^X) = \mathbf{1}_{\{\triangle_{s_1,t}\in\Gamma_1',\ldots,\triangle_{s_m,s_{m-1}}\in\Gamma_{m-1}',X_{s_m}\in\Gamma_m'\}} \prod_{k=2}^{n} P(\triangle_{u_{k-1},u_k} \in \Gamma_k)P(\triangle_{t,u_1} \in \Gamma_1|\mathfrak{F}_{t}^X).$$

Entonces basta demostrar que para cada $u > t$ y cada $\Gamma \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ se tiene

$$P(X_u - X_t \in \Gamma|\mathfrak{F}_{t+}^X) = P(X_u - X_t \in \Gamma|\mathfrak{F}_{t}^X) \quad (= P(X_u - X_t \in \Gamma)) \quad \text{c.s.},$$

en otras palabras, que $X_u - X_t$ es independiente de $\mathfrak{F}_{t+}^X$. Será más fácil demostrar un hecho más general:

Para cada función $f: \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ boreliana y acotada, y para cada $h > 0$,

$$E(f(X_{t+h}, X_t)|\mathfrak{F}_{t+}^X) = E(f(X_{t+h}, X_t)|\mathfrak{F}_{t}^X) \quad \text{c.s.} \tag{1.3}$$

Por el lema de las clases monótonas (π, λ-sistemas) basta demostrarlo para f de la forma $f(x_1, x_2) = f_1(x_1)f_2(x_2)$ y en consecuencia basta probar que

$$E(f(X_{t+h})|\mathfrak{F}_{t+}^X) = E(f(X_{t+h})|\mathfrak{F}_{t}^X) \quad \text{c.s.} \tag{1.4}$$

para cada función $f: \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ boreliana y acotada. Un argumento estándar muestra que para obtener (1.4) en toda generalidad basta probarlo para f continua y acotada.

Así pues, supongamos que $f: \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ es continua y acotada.

$$E(f(X_{t+h})|\mathfrak{F}_{t}^X) = E(f(X_{t+h} - X_t + X_t)|\mathfrak{F}_{t}^X) = g_h(t, X_t), \tag{1.5}$$

donde $g_h(t,x) = Ef(X_{t+h} - X_t + x)$, ya que $X_{t+h} - X_t$ es independiente de $\mathfrak{F}_t^X$ y X_t es $\mathfrak{F}_t^X$-medible.

Queremos demostrar que $E(f(X_{t+h})|\mathfrak{F}_{t+}^X) = g_h(t, X_t)$. Como $g_h(t, X_t)$ es claramente $\mathfrak{F}_{t+}^X$-medible basta probar que

$$\int_A f(X_{t+h})dP = \int_A g_h(t, X_t)dP \tag{1.6}$$

para cada $A \in \mathfrak{F}_{t+}^X$. Entonces fijemos un $A \in \mathfrak{F}_{t+}^X$ y consideremos una sucesión $t_n > t$, $t_n \downarrow t$. Tenemos $A \in \mathfrak{F}_{t+}^X \subset \mathfrak{F}_{t_n}^X$, entonces por (1.5) sabemos que $\int_A f(X_{t_n+h})dP = \int_A g_h(t_n, X_{t_n})dP$. Pero $t_n \downarrow t$, $x_n \to x$ implican que $g_h(t_n, x_n) \to g_h(t, x)$ si $n \to \infty$, porque f es continua y acotada y $(X_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ es continuo por la derecha. En consecuencia $\int_A g_h(t_n, X_{t_n})dP \to \int_A g_h(t, X_t)dP$ por el teorema de convergencia dominada y otra vez por la suposición de la continuidad por la derecha. También $\int_A f(X_{t_n+h})dP \to \int_A f(X_{t+h})dP$, de donde obtenemos (1.6) y la proposición (y por lo tanto el Teorema 1.8) quedan demostrados. □

1.11 Observación. (para el lector que conoce de procesos de Markov) Un análisis cuidadoso de la demostración muestra que la hipótesis sobre independencia de los incrementos del proceso X es demasiado fuerte. Basta suponer que X es proceso de Markov (continuo por la derecha) con la propiedad de Feller y en el caso no homogeneo suponer (en vez de la propiedad de Feller) que la función $(t, x) \mapsto \int_{\mathbb{R}^d} f(y)P(t, x, t+h, dy)$ es continua para cada $f: \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ continua y acotada, donde $P(\cdot,\cdot,\cdot,\cdot)$ es la función de transición.

En efecto, de la propiedad de Markov se sigue que, manteniendo las notaciones de la demostración, la variable aleatoria $\mathbf{1}_{\{\Delta_{t,u_1}\in\Gamma_1\}}P(\Delta_{u_{n-1},u_n} \in \Gamma_n, \ldots, \Delta_{u_1,u_2} \in \Gamma_2|\mathfrak{F}_{u_1}^X)$ tiene la forma $f(X_{u_1}, X_t)$ para una función medible acotada $f(\cdot,\cdot)$. Así otra vez llegamos a la igualdad (1.3), la cual se demuestra como antes, usando la propiedad de Feller. Vale la pena observar que por el camino hemos demostrado un hecho bien conocido de la teoría de procesos de Markov: Un proceso de Markov (homogeneo) continuo por la derecha, con la propiedad de Feller es también un proceso de Markov con respecto a la filtración $(\mathfrak{F}_{t+}^X)_{t\in\mathbb{R}_+}$.

Para terminar este capítulo veamos un ejemplo sumamente sencillo pero instructivo.

1.12 Ejemplo. Una partícula se mueve a lo largo de una recta hacia la derecha con velocidad 1. En el instante $t = 1$ lanzamos una moneda y si sale "águila" la partícula continua su movimiento, si aparece "cara" cambia la dirección, es decir empieza a moverse hacia la izquierda.

Tenemos aquí $\Omega = \{a, c\}$ (a = "águila", c = "cara"), $\mathfrak{F} = 2^\Omega$, $P(\{a\}) = P(\{c\}) = \frac{1}{2}$. Sea X_t la posición de la partícula en el instante t. Hay solamente dos posibles trayectorias:

$$X_t(a) \equiv t \quad \text{y} \quad X_t(c) = \begin{cases} t & \text{si } t \leq 1 \\ 2-t & \text{si } t > 1 \end{cases}.$$

Obviamente

$$\mathfrak{F}_t^X = \begin{cases} \{\emptyset, \Omega\} & \text{si } t \leq 1 \\ 2^\Omega & \text{si } t > 1 \end{cases} \quad \text{y} \quad \mathfrak{F}_{t+}^X = \begin{cases} \{\emptyset, \Omega\} & \text{si } t < 1 \\ 2^\Omega & \text{si } t \geq 1 \end{cases}.$$

Entonces vemos que X tiene trayectorias continuas pero la filtración generada por X no es continua por la derecha (no satisface las condiciones usuales). Es importante no confundir la continuidad del proceso con la continuidad (por la derecha) de la filtración generada por él. Además este ejemplo permite darnos cuenta de que en el caso de un proceso de Markov no homogeneo , la continuidad de $(t,x) \mapsto \int_{\mathbb{R}^d} f(y)P(t,x,t+h,dy)$ mencionada en la observación anterior, es esencial para que la filtración generada (completada) satisfaga las condiciones usuales. $\square$

Capítulo 2

Tiempos de paro

En este capítulo vamos a formular propiedades básicas de los tiempos de los tiempos de paro, discutiremos también la clasificación de los tiempos de paro.

2.1 Definición. Una función $T\colon \Omega \to \overline{\mathbb{R}}_+ := \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ se llama *tiempo de paro* con respecto a $(\mathfrak{F}_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ si para cada $t \in \mathbb{R}_+$ se cumple $\{T \leq t\} \in \mathfrak{F}_t$.

La noción de tiempo de paro, a veces también llamado tiempo de Markov, es fundamental tanto en la teoría de procesos como en las aplicaciones (análisis secuencial). El nombre proviene de las aplicaciones. Supongamos que estamos observando un experimento aleatorio el cual queremos parar en un momento oportuno. Si $\mathfrak{F}_t$ son todos los sucesos que podemos observar hasta el instante t, entonces los tiempos de paro con respecto a $(\mathfrak{F}_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ son todas las estrategias admisibles (para parar el experimento).

En el futuro, si no hay peligro de confusión, por ejemplo si la filtración está fija, vamos a decir "tiempo de paro" en lugar de "tiempo de paro con respecto a $(\mathfrak{F}_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$".

2.2 Ejemplos. (a) $T\colon \Omega \to \overline{\mathbb{R}}_+$, definido como $T(\omega) = t_0$ para cada $\omega \in \Omega$, ($t_0 \in \mathbb{R}_+$ está fijo) es un tiempo de paro con respecto a cada filtración (tiempo de paro determinista).

(b) Si T es un tiempo de paro y $s \geq 0$ entonces $T + s$ es tiempo de paro. En efecto, $\{T + s \leq t\} = \{T \leq (t-s)^+\} \in \mathfrak{F}_{(t-s)^+} \subset \mathfrak{F}$.

(c) Si T es un tiempo de paro y $s > 0$ entonces $(T-s)^+$ en general no es tiempo de paro.

(d) En el Ejemplo 1.12 definamos $T^{\{a\}} = \inf\{t \in \mathbb{R}_+ : X_t = a\}$ para un $a \in \mathbb{R}$. Entonces $T^{\{a\}}$ es tiempo de paro con respecto a $(\mathfrak{F}_t^X)_{t\in\mathbb{R}_+}$ (ejercicio).

(e) En el Ejemplo 1.12 definamos $T^{]1,\infty[} = \inf\{t \in \mathbb{R}_+ : X_t > 1\}$. Entonces $T^{]1,\infty[}$ no es tiempo de paro con respecto a $(\mathfrak{F}_t^X)_{t\in\mathbb{R}_+}$ pero es tiempo de paro con respecto a $(\mathfrak{F}_{t+}^X)_{t\in\mathbb{R}_+}$ (ejercicio, además vale la pena pensar en la interpretación de este hecho). □

Otra vez nuestro ejemplo trivial nos permitió observar un fenómeno interesante: en general hay más tiempos de paro con respecto a $(\mathfrak{F}_{t+})_{t\in\mathbb{R}_+}$ que con respecto a $(\mathfrak{F}_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$. Entonces "vale la pena" tener una filtración que satisfaga las condiciones usuales.

Vamos a desarrollar los ejemplos (d) y (e). Primero veamos un simple lema.

2.3 Lema. (a) *Si T es un tiempo de paro con respecto a una filtración $(\mathfrak{F}_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ entonces para cada $t\in\mathbb{R}_+$, $\{T<t\}\in\mathfrak{F}_t$.*

(b) *Si $(\mathfrak{F}_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ es una filtración continua por la derecha entonces una función $T:\Omega\to\overline{\mathbb{R}}_+$ es tiempo de paro si y sólo si $\{T<t\}\in\mathfrak{F}_t$ para cada $t\in\mathbb{R}_+$.*

Demostración. (a) $\{T<t\}=\cup_{n=1}^{\infty}\{T\leq(t-1/n)^+\}\in\mathfrak{F}_t$ pues $(t-1/n)^+<t$ si $t>0$ y $\{T<0\}=\emptyset\in\mathfrak{F}_0$.

(b) Gracias a la parte (a) basta probar suficiencia. Tenemos $\{T\leq t\}=\cap_{n=1}^{\infty}\{T<t+1/n\}=\cap_{n=k}^{\infty}\{T<t+1/n\}\in\mathfrak{F}_{t+1/k}$ para cada k natural, por lo tanto $\{T\leq t\}\in\cap_{k=1}^{\infty}\mathfrak{F}_{t+\frac{1}{k}}=\mathfrak{F}_{t+}=\mathfrak{F}_t$. □

2.4 Definición. Sea $X=(X_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ un proceso con valores en un espacio medible $(E,\mathcal{B})$. Para cada $B\in\mathcal{B}$ definamos el *tiempo de la primera llegada de X a B* como

$$T^B=\inf\{t:X_t\in B\}.$$

Como siempre, convenimos en que $\inf\emptyset=\infty$.

Los tiempos de la primera llegada son en general "típicos" tiempos de paro, pero ya hemos visto en los ejemplos 2.2 (d),(e) que la situación puede ser un poco delicada. Es aquí donde la continuidad de tiempo complica las cosas. Sin más hipótesis adicionales no podemos afirmar que T^B es un tiempo de paro con respecto a la filtración $(\mathfrak{F}_t^X)_{t\in\mathbb{R}_+}$. He aquí algunos casos especiales:

2.5 Proposición. *Si E es un espacio métrico, $\mathcal{B}=\mathcal{B}(E)$, y X es un proceso con valores en X con trayectorias continuas por la derecha, entonces para cada conjunto abierto $B\subset E$, T^B es un tiempo de paro con respecto a $(\mathfrak{F}_{t+}^X)_{t\in\mathbb{R}_+}$.*

Demostración. Por el Lema 2.3 basta probar que $\{T^B<t\}\in\mathfrak{F}_{t+}^X$ para cada $t\in\mathbb{R}_+$. Tenemos, para cada $t>0$, $\{T^B<t\}=\{$ existe $s<t$, tal que $X_s\in B\}$ (aquí es importante tener la desigualdad estricta), pero a éste último evento podemos escribirlo como

$$\{\text{existe } s<t,\ s\in\mathbb{Q}_+,\ \text{tal que } X_s\in B\}=\bigcup_{\substack{s<t\\ s\in\mathbb{Q}_+}}\{X_s\in B\}.$$

porque B es abierto y X continuo por la derecha.

Como la unión es numerable y $s < t$ implica $\{X_s \in B\} \in \mathfrak{F}_t^X \subset \mathfrak{F}_{t+}^X$, el lema queda demostrado. □

2.6 Proposición. *Si E es un espacio métrico, $\mathcal{B} = \mathcal{B}(E)$, y X es un proceso con valores en E con trayectorias continuas, entonces para cada conjunto cerrado $B \subset E$, T^B es un tiempo de paro con respecto a $(\mathfrak{F}_t^X)_{t\in\mathbb{R}_+}$.*

Demostración (bosquejo). Sea ρ la métrica en E. Definamos $B_n = \{x \in E : \rho(x, B) < 1/n\}$, $n = 1, 2, \ldots$ B_n es abierto y $B_n \downarrow B$, y también $\overline{B_n} \downarrow B$. De la demostración de la Proposición 2.5 se sigue que $\{T^{B_n} < t\} \in \mathfrak{F}_t^X$ para cada $t \in \mathbb{R}_+$. Entonces para terminar la demostración basta probar que $\{T^B \leq t\} = \cap_{n=1}^{\infty}\{T^{B_n} < t\}$ (para obtener "$\subset$" se demuestra que $T^{B_n} \uparrow T^B$). □

Los detalles de la demostración anterior se dejan como ejercicio (ver también, e.g. [24, Proposición 2.13]).

Como vemos, ya estos casos sencillos exigen un poco de esfuerzo para demostrar que T^B es tiempo de paro. Es interesante, quizás hasta sorprendente, que se cumple un resultado mucho más general:

2.7 Teorema. *Si X es un proceso en un espacio métrico, continuo por la derecha (o por la izquierda), y adaptado a una filtración $(\mathfrak{F}_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ que satisface las condiciones usuales, entonces para cada conjunto de Borel B, T^B es un tiempo de paro.*

La demostración de este teorema profundo la diferimos hasta el Capítulo 4, donde probaremos un teorema aún más general (ver Teorema 4.6).

Ahora pasemos a la discusión de propiedades generales de tiempos de paro y de las σ-álgebras asociadas con ellos.

En los puntos 2.8-2.14 suponemos que tenemos una filtración $(\mathfrak{F}_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ fija en un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$.

2.8 Proposición. (a) *Si S, T son tiempos de paro entonces $S \wedge T$, $S \vee T$ también lo son.*

(b) *Si $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de tiempos de paro entonces $\sup_{n\in\mathbb{N}} T_n$ es un tiempo de paro; mientras que $\inf_{n\in\mathbb{N}} T_n$, $\liminf_{n\to\infty} T_n$ y $\limsup_{n\to\infty} T_n$ son tiempos de paro con respecto a $(\mathfrak{F}_{t+})_{t\in\mathbb{R}_+}$.*

Demostración. (a) $\{S \wedge T \leq t\} = \{S \leq t\} \cup \{T \leq t\}$, $\{S \vee T \leq t\} = \{S \leq t\} \cap \{T \leq t\}$.
(b) Sea $T = \bigvee_n T_n$ y $S = \bigwedge_n T_n$.

$$\{T \leq t\} = \bigcap_n \{T_n \leq t\} \in \mathfrak{F}_t \quad \text{para cada } t \in \mathbb{R}_+ \text{ por definición.}$$

Análogamente, pero utilizando Lema 2.3 en lugar de la definición se tiene

$$\{S < t\} = \bigcup_n \{T_n < t\} \in \mathfrak{F}_t \quad \text{para cada } t \in \mathbb{R}_+.$$

Para terminar la demostración de este punto basta observar que

$$\liminf_{n\to\infty} T_n = \sup_n \inf_{k\geq n} T_k, \quad \limsup_{n\to\infty} T_n = \inf_n \sup_{k\geq n} T_k.$$

□

2.9 Definición. Con cada tiempo de paro T asociamos dos σ-álgebras. Una es la σ-álgebra parada o σ-álgebra de los eventos que ocurren hasta T:

$$\mathfrak{F}_T = \{A \in \mathfrak{F}_\infty : A \cap \{T \leq t\} \in \mathfrak{F}_t \quad \text{para cada } t \in \mathbb{R}_+\}.$$

La otra σ-álgebra es la de los eventos estrictamente anteriores a T:

$$\mathfrak{F}_{T-} = \sigma\{\mathfrak{F}_0 \cup \{A \cap \{t < T\} : A \in \mathfrak{F}_t, \quad t \in \mathbb{R}_+\}\}, \quad \mathfrak{F}_{0-} = \mathfrak{F}_0.$$

Se deja como ejercicio demostrar que $\mathfrak{F}_T$ es efectivamente σ-álgebra y que $\mathfrak{F}_T = \mathfrak{F}_t$ para $T = t$ (así la notación es coherente). El lector demostrará también fácilmente el siguiente lema.

2.10 Lema. *Si la filtración $(\mathfrak{F}_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ es continua por la derecha y T es un tiempo de paro, entonces $A \in \mathfrak{F}_T$ si y sólo si $A \cap \{T < t\} \in \mathfrak{F}_t$ para cada $t \in \mathbb{R}_+$.*

2.11 Proposición. (a) *Si S, T son tiempos de paro y $S \leq T$ entonces $\mathfrak{F}_S \subset \mathfrak{F}_T$.*

(b) *Si S, T son tiempos de paro entonces $\mathfrak{F}_{S\wedge T} = \mathfrak{F}_S \cap \mathfrak{F}_T$.*

(c) *Si T es tiempo de paro entonces T es $(\mathfrak{F}_{T-})$-medible y $\mathfrak{F}_{T-} \subset \mathfrak{F}_T$.*

(d) *Las definiciones de $\mathfrak{F}_T$ y $\mathfrak{F}_{T-}$ pueden darse con tiempos de paro (en lugar de tiempos $t \in \mathbb{R}_+$).*

(i) *$A \in \mathfrak{F}_T$ si y sólo si para cada S tiempo de paro se tiene $A \cap \{T \leq S\} \in \mathfrak{F}_S$.*

(ii) $\mathfrak{F}_{T-} = \sigma\{\mathfrak{F}_0 \cup \{A \cap \{S < T\} : A \in \mathfrak{F}_S,\ S \text{ tiempo de paro}\}\}$

(e) *Si $S \leq T$ S,T, tiempos de paro entonces $\mathfrak{F}_{S^-} \subset \mathfrak{F}_{T^-}$.*

Demostración. (a) Sean $B \in \mathfrak{F}_S$ y $t \geq 0$:

$$B \cap \{T \leq t\} = B \cap \{S \leq t\} \cap \{T \leq t\}$$

El último conjunto pertenece a $\mathfrak{F}_t$ por la definición de $\mathfrak{F}_S$.

(b) $S \wedge T \leq S$, $S \wedge T \leq T$ implican $\mathfrak{F}_{S\wedge T} \subset \mathfrak{F}_S \cap \mathfrak{F}_T$ por (a).

Recíprocamente si $A \in \mathfrak{F}_T \cap \mathfrak{F}_S$ y $t \geq 0$,

$$A \cap \{S \wedge T \leq t\} = (A \cap \{S \leq t\}) \cup (A \cap \{T \leq t\}) \in \mathfrak{F}_t,$$

es decir, $A \in \mathfrak{F}_{S\wedge T}$.

(c)

$$\{a < T\} = \left\{ \begin{array}{ll} \Omega, & a < 0 \\ \Omega \cap \{a < T\}, & a \geq 0 \end{array} \right\} \in \mathfrak{F}_{T^-}$$

($\Omega \in \mathfrak{F}_a$ para cada $a \geq 0$). Esto prueba que T es ($\mathfrak{F}_{T^-}$)-medible. Veamos ahora que $\mathfrak{F}_{T^-} \subset \mathfrak{F}_T$. Para verlo basta mostrar que los generadores de $\mathfrak{F}_{T^-}$ pertenecen a $\mathfrak{F}_T$. Es claro que $\mathfrak{F}_0 \subset \mathfrak{F}_T$.

Sea $B = A \cap \{t < T\}$ con $A \in \mathfrak{F}_t$, y sea $t_0 \in \mathbb{R}_+$. Si $t \geq t_0$ entonces $B \cap \{T \leq t_0\} = \emptyset \in \mathfrak{F}_{t_0}$ y si $t < t_0$ entonces $B \cap \{T \leq t_0\} = A \cap \{T \leq t\}^C \cap \{T \leq t_0\} \in \mathfrak{F}_0$ ya que $\{T \leq t\}^C \in \mathfrak{F}_t \subset \mathfrak{F}_{t_0}$. Esto prueba que $B \in \mathfrak{F}_T$ y entonces $\mathfrak{F}_{T^-} \subset \mathfrak{F}_T$.

(d) (ii) Claramente basta demostrar que si S es tiempo de paro y $A \in \mathfrak{F}_S$ entonces $A \cap \{S < T\} \in \mathfrak{F}_{T^-}$. Pero:

$$\begin{aligned} A \cap \{S < T\} &= \bigcup_{r \in \mathbb{Q}_+} A \cap \{S \leq r\} \cap \{r < T\} \\ &= \bigcup_{r \in \mathbb{Q}_+} A_r \cap \{r < T\} \in \mathfrak{F}_{T^-}\ , \end{aligned}$$

donde $A_r = A \cap \{S \leq r\} \in \mathfrak{F}_r$.
En particular tomando $A = \Omega$ tenemos

$$\{S < T\} \in \mathfrak{F}_{T^-} \quad , \quad \{T \leq S\} \in \mathfrak{F}_{T^-}\ .$$

(i) Supongamos que $A \in \mathfrak{F}_T$, y $t \geq 0$. Tenemos

$$(A \cap \{T \leq S\}) \cap \{S \leq t\} = A \cap \{T \leq t\} \cap \{S \leq t\} \cap \{T \wedge t \leq S \wedge t\}$$
$$A \cap \{T \leq t\} \in \mathfrak{F}_t, \quad \{S \leq t\} \in \mathfrak{F}_t, \quad \{T \wedge t \leq S \wedge t\} \in \mathfrak{F}_{(T\wedge t)^-}$$

pero $\mathfrak{F}_{(T\wedge t)-} \subset \mathfrak{F}_{T\wedge t} \subset \mathfrak{F}_t$ por (a) y (c). Por lo tanto $A \cap \{T \leq S\} \in \mathfrak{F}_S$. El recíproco es inmediato.

(e) Probaremos que los generadores de $\mathfrak{F}_{S^-}$ están en $\mathfrak{F}_{T^-}$: $\mathfrak{F}_0 \subset \mathfrak{F}_{T^-}$. Si $A \in \mathfrak{F}_t$ entonces $A \cap \{t < S\} \in \mathfrak{F}_t$ y por lo tanto

$$(A \cap \{t < S\}) \cap \{t < T\} \in \mathfrak{F}_{T^-},$$

pero si $S \leq T$ entonces

$$A \cap \{t < S\} = A \cap \{t < S\} \cap \{t < T\}$$

por lo que $A \cap \{t < S\} \in \mathfrak{F}_{T^-}$. □

2.12 Corolario. *Si S, T son tiempos de paro entonces*
(a) $\{S < T\}$, $\{T \leq S\} \in \mathfrak{F}_{T^-}$ *(y no necesariamente en $\mathfrak{F}_{S^-}$).*
(b) $\{S \leq T\}$, $\{T \leq S\}$, $\{T = S\}$, $\{S < T\}$, $\{T < S\}$ *pertenecen a $\mathfrak{F}_T \cap \mathfrak{F}_S$.*

2.13 Lema. *Si $A \in \mathfrak{F}_\infty$ entonces $A \cap \{T = \infty\} \in \mathfrak{F}_{T^-}$, para cualquier tiempo de paro T.*

Demostración. Si $A \in \cup_{t \geq 0} \mathfrak{F}_t$, existe t_0 tal que $A \in \mathfrak{F}_{t_0}$ y

$$A \cap \{T = \infty\} = A \cap \Big(\bigcap_{n \geq t_0} \{T > n\}\Big) = \bigcap_{n \geq t_0} A \cap \{T > n\} \in \mathfrak{F}_{T^-},$$

ya que para $n \geq t_0$, $A \in \mathfrak{F}_{t_0} \subset \mathfrak{F}_n$ y por lo tanto $A \cap \{T > n\} \in \mathfrak{F}_{T^-}$. Tenemos así que

$$\bigcup_{t \geq 0} \mathfrak{F}_t \subset \mathcal{A} := \{A \in \mathfrak{F}_\infty : A \cap \{T = \infty\} \in \mathfrak{F}_{T^-}\}$$

Para terminar la demostración basta observar que $\mathcal{A}$ es σ-álgebra. □

2.14 Proposición. *S, T, T_n son tiempos de paro, $n = 1, 2, \ldots$*
(a) *Si $S \leq T$ y $S < T$ sobre $\{0 < T < \infty\}$ entonces $\mathfrak{F}_S \subset \mathfrak{F}_{T^-}$.*
(b) *Si $T_n \uparrow T$ entonces $\mathfrak{F}_{T^-} = \sigma(\bigcup_n \mathfrak{F}_{T_n^-})$.*
(c) *Si $T_n \uparrow T$ y $T_n < T$ sobre $\{0 < T < \infty\}$ para cada $n \in \mathbb{N}$ entonces $\mathfrak{F}_{T^-} = \sigma(\bigcup_n \mathfrak{F}_{T_n})$.*

Supongamos que $(\mathfrak{F}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ es continua por la derecha. Entonces:
(d) *Si $T_n \downarrow T$ entonces $\mathfrak{F}_T = \bigcap_n \mathfrak{F}_{T_n}$ (generalización de la continuidad por la derecha de la filtración).*
(e) *Si $T_n \downarrow T$ y $T_n > T$ sobre $\{0 < T_n < \infty\}$ para cada $n \in \mathbb{N}$ entonces $\mathfrak{F}_T = \bigcap_n \mathfrak{F}_{T_n^-}$.*

Demostración. (a) Sea $A \in \mathfrak{F}_S$

$$A = (A \cap \{T = \infty\}) \cup (A \cap \{S < T\}) \cup (A \cap \{S = 0\}),$$

entonces:

$$\begin{aligned} A &= (A \cap \{T = \infty\}) \cup \bigcup_{r \in \mathbb{Q}_+} (A \cap \{S \leq r\} \cap \{r < T\}) \\ &\quad \cup (A \cap \{S = 0\}). \end{aligned}$$

Pero $A \cap \{T < \infty\} \in \mathfrak{F}_{T^-}$ por el lema 2.13,

$$\begin{aligned} A \cap \{S \leq r\} &\in \mathfrak{F}_r \text{ implica } (A \cap \{S \leq r\}) \cap \{r < T\} \in \mathfrak{F}_{T^-} \\ A \cap \{S = 0\} &\in \mathfrak{F}_0 \subset \mathfrak{F}_{T^-}. \end{aligned}$$

(b) Puesto que $T_n \leq T$, la Proposición 2.11(e) implica $\mathfrak{F}_{T_n^-} \subset \mathfrak{F}_{T^-}$ para cada n y por lo tanto $\sigma(\cup_{n=1}^{\infty} \mathfrak{F}_{T_n^-}) \subset \mathfrak{F}_{T^-}$. Recíprocamente, veremos que los generadores de $\mathfrak{F}_{T^-}$ pertenecen a $\sigma(\cup_{n=1}^{\infty} \mathfrak{F}_{T_n^-})$. Es claro que $\mathfrak{F}_0 \in \sigma(\cup_{n=1}^{\infty} \mathfrak{F}_{T_n^-})$. Sea $B = A \cap \{t < T\}$ con $A \in \mathfrak{F}_t$; se tiene que

$$B = \bigcup_{n=1}^{\infty} A \cap \{t < T_n\} \in \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathfrak{F}_{T_n^-},$$

por lo tanto $\mathfrak{F}_{T^-} \subset \sigma(\cup_{n=1}^{\infty} \mathfrak{F}_{T_n^-})$.

(c) Basta observar que (b), Proposición 2.11(e) y el inciso (a) implican

$$\mathfrak{F}_{T^-} = \sigma(\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathfrak{F}_{T_n^-}) \subset \sigma(\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathfrak{F}_{T_n}) \subset \mathfrak{F}_{T^-}.$$

(d) Tenemos $\mathfrak{F}_T \subset \mathfrak{F}_{T_n}$ para cada n porque $T \leq T_n$ para cada n, y por lo tanto $\mathfrak{F}_T \subset \cap_{n=1}^{\infty} \mathfrak{F}_{T_n}$. Recíprocamente, si $A \in \cap_{n=1}^{\infty} \mathfrak{F}_{T_n}$ entonces

$$A \cap \{T < t\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} A \cap \{T_n < t\} \in \mathfrak{F}_t \quad \text{para cada } t \in \mathbb{R}_+$$

y por lo tanto $A \in \mathfrak{F}_T$ por el Lema 2.10.

(e) Por (a), Proposición 2.11(e) y el inciso (d) tenemos

$$\mathfrak{F}_T \subset \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathfrak{F}_{T_n^-} \subset \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathfrak{F}_{T_n} = \mathfrak{F}_T.$$

□

Todo lo que sigue, casi hasta el fin de la monografía se hará bajo la siguiente suposición:

2.15 Hipótesis. Se tiene un espacio de probabilidad completo $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ fijo y una filtración que satisface las condiciones usuales.

Ya vimos en el capítulo anterior que esta hipótesis no es muy restrictiva. Además en el Apéndice C discutiremos brevemente algunas posibilidades de debilitarla.

2.16 Observación. Hasta ahora hemos visto algunas ventajas de considerar una filtración continua por la derecha (por ejemplo Proposición 2.14(d),(e)). Pero la suposición de que $\mathfrak{F}_t = \overline{\mathfrak{F}_t}$ también también tiene sus ventajas inmediatas. Por ejemplo, si T es un tiempo de paro y S es una función de Ω en $\mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$ tal que $T = S$ c.s. entonces S es también tiempo de paro. Por lo tanto, bajo las condiciones usuales, las propiedades de tiempos de paro formuladas arriba siguen siendo válidas si igualdades o desigualdades de tiempos de paro son reemplazadas por igualdades o desigualdades que se cumplen casi seguramente. Por ejemplo, si $S \leq T$ c.s. entonces $\mathfrak{F}_S \subset \mathfrak{F}_T$.

Pasemos ahora a la clasificación de tiempos de paro.

2.17 Definición. Un tiempo de paro T se llama *predecible* si existe una sucesión $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de tiempos de paro tal que:
(i) $T_n \uparrow T$,
(ii) $T_n < T$ sobre $\{0 < T\}$, para toda $n \in \mathbb{N}$.
Decimos que la sucesión $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *predice a* T.

2.18 Observaciones. (a) Tomando en cuenta la Observación 2.16, la Definición 2.17 puede quedar así:
(i′) $T_n \uparrow T$ c.s.,
(ii′) $T_n < T$ c.s. sobre $\{0 < T\}$ para cada $n \in \mathbb{N}$.

(b) Otra formulación, más débil: (i″) $T_n \to T$ c.s. y (ii′). Si (i″) y (ii′) se cumplen entonces T es predecible porque $T_1 \vee \cdots \vee T_n$ satisfacen (i′), (ii′). Si una sucesión de tiempos de paro satisface (i′),(ii′) o (i″),(ii′) entonces también diremos que $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ predice a T.

2.19 Ejemplos. (a) Si T es tiempo de paro y $t > 0$ entonces $T + t$ es tiempo de paro predecible: $T_n = (T + t - \frac{1}{n}) \wedge n$, con $\frac{1}{n} < t$, satisface las condiciones (i) y (ii).

(b) Sea $W = (W_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ proceso de Wiener con respecto a una filtración $(\mathfrak{F}_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$, sea $a > 0$ y sea $T = \inf\{t > 0 : W_t \geq a\}$. T es predecible ya que $T_n = \inf\{t > 0 : W_t \geq a - \frac{1}{n}\}$ satisface las condiciones (i′) y (ii′) (esto porque casi todas las trayectorias del movimiento browniano son continuas, y en todo intervalo su oscilación es positiva con probabilidad uno). □

Pasando a propiedades de tiempos de paro predecibles veamos primero que bajo la suposición de predecibilidad podemos complementar el Corolario 2.12.

2.20 Proposición. *Si T es un tiempo de paro predecible y S un tiempo de paro arbitrario entonces $\{T \leq S\}$, $\{T = S\} \in \mathfrak{F}_{S^-}$.*

Más generalmente, $A \cap \{T \leq S\} \in \mathfrak{F}_{S^-}$ para cada $A \in \mathfrak{F}_{T^-}$.

Demostración. Si T es predecible y $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ predice a T sabemos (2.14(c)) que

$$\mathfrak{F}_{T^-} = \sigma(\bigcup_n \mathfrak{F}_{T_n}).$$

Sea $\mathcal{A} = \{A \in \mathfrak{F}_\infty : A \cap \{T \leq S\} \in \mathfrak{F}_{S^-}\}$. Probaremos que $\mathcal{A}$ es σ-álgebra y que $\mathcal{A}$ contiene a $\cup_n \mathfrak{F}_{T_n}$, lo cual bastará para terminar la demostración.

Primero veremos que $\cup_{n=1}^{\infty} \mathfrak{F}_{T_n} \subset \mathcal{A}$: Sea $A \in \mathfrak{F}_{T_{n_0}} (\subset \mathfrak{F}_T)$.

$$A \cap \{T \leq S\} = (A \cap \{T = 0\}) \cup (\bigcap_{n \geq n_0} \{T_n < S\} \cap A).$$

Pero $A \cap \{T = 0\} \in \mathfrak{F}_0 \subset \mathfrak{F}_{S^-}$ y $A \cap \{T_n < S\} \in \mathfrak{F}_{S^-}$ para $n \geq n_0$ por 2.11d. En consecuencia $A \cap \{T \leq S\} \in \mathfrak{F}_{S^-}$ y por lo tanto $A \in \mathcal{A}$.

Veamos ahora que $\mathcal{A}$ es σ-álgebra:

(a) $\emptyset \in \mathcal{A}$ y $\Omega \in \mathcal{A}$ ya que $\Omega \in \mathfrak{F}_{T_n}$ para toda n y hemos mostrado que para todo $A \in \mathfrak{F}_{T_n}$, $A \in \mathcal{A}$.

(b) Si $A \in \mathcal{A}$ entonces $A^C \in \mathcal{A}$:

$$\text{Si } A \cap \{T \leq S\} \in \mathfrak{F}_{S^-} \text{ entonces } A^C \cup \{T > S\} \in \mathfrak{F}_{S^-},$$

y sabemos que $\{T \leq S\} = \Omega \cap \{T \leq S\} \in \mathfrak{F}_{S^-}$, por lo tanto

$$(A^C \cup \{T > S\}) \cap \{T \leq S\} = (A^C \cap \{T \leq S\}) \cup \emptyset \in \mathfrak{F}_{S^-}$$

lo que implica que $A^C \in \mathcal{A}$.

(c) Es claro que si $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots \in \mathcal{A}$, entonces

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A},$$

pues

$$(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) \cap \{T \leq S\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} (A_n \cap \{T \leq S\}) \in \mathfrak{F}_{S^-}.$$

2.21 Proposición. (a) *Si S, T son tiempos de paro predecibles entonces $S \wedge T, S \vee T$ son también predecibles.*

(b) *Si $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión de tiempos de paro predecibles entonces $\sup_n S_n$ es predecible.*

Demostración. (a) Sean $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ y $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sucesiones que predicen a S y T respectivamente. Es claro que $(S_n \wedge T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ predice a $S \wedge T$ y que $(S_n \vee T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ predice a $S \vee T$.

(b) Podemos suponer que $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es creciente sustituyendo S_n por $S_1 \vee S_2 \vee \ldots \vee S_n$. Sea $(T_n^k)_{k \in \mathbb{N}}$ una sucesión que predice a S_n, $n = 1, 2, \ldots$ Consideremos a la siguiente sucesión de tiempos de paro:

$$\begin{aligned}
R_1 &= T_1^1 \\
R_2 &= T_1^2 \vee T_2^2 \\
R_3 &= T_1^3 \vee T_2^3 \vee T_3^3 \\
\vdots &\quad \vdots \\
R_k &= T_1^k \vee T_2^k \vee T_3^k \vee \ldots \vee T_k^k \\
\vdots &\quad \vdots
\end{aligned}$$

Se deja al lector probar que la sucesión $(R_n)_{n \in \mathbb{N}}$ predice a T.

Observemos que cada tiempo de paro T es el ínfimo de tiempos de paro predecibles, ya que $T = \inf_n (T + \frac{1}{n})$ y $(T + \frac{1}{n})$ es predecible $n = 1, 2, \ldots$ Como pronto veremos que existen tiempos de paro no predecibles, entonces la Proposición 2.21(b), en general no es válida con el inf en lugar del sup. Sin embargo en algunos casos importantes sí se tiene. A saber tenemos:

2.22 Lema. *Si T_n es tiempo de paro predecible para $n = 1, 2, \ldots,$ y si se cumple la siguiente propiedad: para cada $\omega \in \Omega$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $T_n(\omega) = T_{n_0}(\omega)$ para todo $n \geq n_0$, entonces $T = \inf_n T_n$ es también predecible.*

Demostración. Se puede suponer que $(T_n)_n$ es decreciente, reemplazando T_n por $T_n' = T_1 \wedge T_2 \wedge \cdots \wedge T_n$. Por 2.21(a) T_n' es también predecible. Sea $(T_{n,m})_{m \in \mathbb{N}}$ una sucesión que predice a T_n. Fijemos una métrica en $\mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ (por ejemplo $\rho(x, y) = |e^{-x} - e^{-y}|$).

Como $(T_{n,m})_{m \in \mathbb{N}}$ converge c.s. a T_n entonces converge en probabilidad, por lo tanto, para n podemos encontrar una m_n tal que

$$P(\rho(T_{n,m_n}, T_n) > 1/n) < 1/2^n. \tag{2.1}$$

Ahora definimos tiempos de paro

$$S_k = \inf_{n\geq k} T_{n,m_n}, \quad k = 1, 2, \ldots$$

Demostraremos que $(S_k)_{k\in\mathbb{N}}$ predice a T. Sea $\omega \in \{T > 0\}$ y sea n_0 tal que $T_n(\omega) = T_{n_0}(\omega)$ para cada $n \geq n_0$. Fijemos $k \in \mathbb{N}$ arbitraria y sea $N \geq \max(n_0, k)$. Tenemos

$$\begin{aligned} T(\omega) &= \inf_n T_n(\omega) = \lim_{n\to\infty} T_n(\omega) = T_{n_0}(\omega) \\ &= T_N(\omega) > T_{N,m_N}(\omega) \geq S_k(\omega) \end{aligned}$$

Es decir, $S_k(\omega) < T(\omega)$ sobre $\{T > 0\}$ para cada k. Análogamente se obtiene $S_k(\omega) = 0$ sobre $\{T = 0\}$, por lo tanto $S_k \leq T$ para cada k. Sea

$$S = \lim_{k\to\infty} S_k = \sup_k S_k.$$

Bastará mostrar que $S = T$ c.s. Por (2.1) se tiene, aplicando el lema de Borel-Cantelli, que para P-casi todo ω

$$\rho(T_{n,m_n}(\omega), T_n(\omega)) \leq 1/n \tag{2.2}$$

para n suficientemente grande. Fijemos un tal ω. Probaremos que

$$S(\omega) = T(\omega).$$

Hay dos posibilidades:

(a) Para cada $k \in \mathbb{N}$, $S_k(\omega)$ es alcanzado como ínfimo.

(b) Existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $S_k(\omega)$ no es alcanzado como ínfimo.

En el caso (a) se tiene:

$$S_k(\omega) = T_{n_k,m_{n_k}}(\omega) \text{ para cada } k, \text{ y un } n_k \geq n.$$

Entonces por la hipótesis, para k grande:

$$\frac{1}{n_k} \geq \rho(T_{n_k,m_{n_k}}(\omega), T_{n_k}(\omega)) = \rho(S_k(\omega), T_{n_k}(\omega))$$

lo que implica $T(\omega) = S(\omega)$.

En el caso (b) sabemos que existe $(n_j)_j$ sucesión creciente de naturales tal que $T_{n_j,m_{n_j}}(\omega) \to S_k(\omega)$. Pero entonces $S_k(\omega) = S_{k+1}(\omega) = \ldots = S(\omega)$. Por lo cual $T_{n_j,m_{n_j}}(\omega) \to S(\omega)$. Por lo tanto, aplicando (2.2), tenemos

$$\rho(S(\omega), T(\omega)) = 0, \quad \text{es decir} \quad T(\omega) = S(\omega).$$

2.23 Notación. Si T es un tiempo de paro y A es un evento denotamos por T_A a la variable aleatoria:

$$T_A(\omega) = \begin{cases} T(\omega) & \text{si } \omega \in A \\ +\infty & \text{si } \omega \in A^C \end{cases} .$$

Es claro que T_A no es necesariamente un tiempo de paro. Solamente se tiene:

2.24 Proposición. *Sea T un tiempo de paro y $A \in \mathfrak{F}$.*

(a) *T_A es tiempo de paro si y sólo si $A \in \mathfrak{F}_T$.*

(b) *Si T es predecible entonces: T_A es tiempo de paro predecible si y sólo si $A \in \mathfrak{F}_{T^-}$.*

Demostración. (a) Es inmediato ya que $\{T_A \leq T\} = A \cap \{T \leq t\}$.

(b) Supongamos que T_A es predecible. Tenemos

$$A = \{T_A \leq T\} - (A^C \cap \{T = \infty\})$$

De la Proposición 2.20 se sigue que $\{T_A \leq T\} \in \mathfrak{F}_{T^-}$. Además por el inciso (a) $A \in \mathfrak{F}_T \subset \mathfrak{F}_\infty$ de donde $A^C \in \mathfrak{F}_\infty$ y por el Lema 2.13

$$A^C \cap \{T = \infty\} \in \mathfrak{F}_{T^-}.$$

Esto demuestra que $A \in \mathfrak{F}_{T^-}$. Obsérvese que en esta parte de la demostración no hemos usado la hipótesis de que T es predecible.

Para demostrar el recíproco, consideremos la familia

$$\mathcal{A} = \{A \in \mathfrak{F}_T : T_A \text{ es predecible y } T_{A^C} \text{es predecible }\}.$$

Probaremos que

(i) $\mathcal{A}$ es σ-álgebra,

(ii) $\mathcal{A}$ contiene a un sistema de generadores de $\mathfrak{F}_{T^-}$,

lo cual implicará el resultado.

(i) $\emptyset \in \mathcal{A}$ pues $T_\emptyset \equiv \infty$ y $T_\Omega = T$, y si $A \in \mathcal{A}$ es claro que $A^C \in \mathcal{A}$. Veremos ahora que si $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots \in \mathcal{A}$, entonces $A = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$.

Por hipótesis T_{A_n} y $T_{A_n^C}$ son predecibles $n = 1, 2, \ldots,$

$$T_A = T_{\bigcup\limits_n A_n} = \inf_n T_{\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i},$$

pero

$$(T_{\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i})_{n \in \mathbb{N}} = (T_{A_1} \wedge T_{A_2} \wedge \ldots \wedge T_{A_n})_{n \in \mathbb{N}}$$

es una sucesión de tiempos de paro predecibles que satisfacen las hipótesis del Lema 2.22. Por lo tanto, T_A es predecible.

$$T_{A^C} = T_{(\bigcup_n A_n)^C} = T_{\bigcap_n A_n^C} = \sup_n T_{A_n^C}.$$

Como $T_{A_n^C}$ es predecible, $n = 1, 2, \ldots,$ T_{A^C} también lo es por 2.21.
(ii) Sea $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión que predice a T. Sabemos que $\mathfrak{F}_{T-} = \sigma(\cup_{n=1}^{\infty} \mathfrak{F}_{T_n})$ (Proposición 2.14(c)). Basta mostrar que $\mathfrak{F}_{T_n} \subset \mathcal{A}$, $n = 1, 2, \ldots$.

Sea $A \in \mathfrak{F}_{T_n} \subset \mathfrak{F}_{T_{n+p}}$ $p = 1, 2, \ldots$ Entonces

$$(T_n)_A \wedge n, (T_{n+1})_A \wedge (n+1), \ldots, (T_{n+p})_A \wedge (n+p), \ldots$$

es una sucesión de tiempos de paro que predicen a T_A. Lo mismo para A^C pues $A^C \in \mathfrak{F}_{T_n}$. □

Intuitivamente, los tiempos de paro predecibles son tales cuyos valores "se pueden prever". En el otro extremo de la escala se ubican los tiempos de paro llamados totalmente inaccesibles.

2.25 Definición. Un tiempo de paro T se llama *totalmente inaccesible* si para todo tiempo de paro predecible S, se tiene

$$P(T = S < \infty) = 0.$$

Obsérvese que el tiempo de paro $T = \infty$ es a la vez predecible y totalmente inaccesible. Esta definición tiene una útil interpretación geométrica. Para verla necesitamos las siguientes dos definiciones:

2.26 Definición. Sea $T : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}_+$ una variable aleatoria. La *gráfica* de T es el conjunto $[T] = \{(t, \omega) \in \mathbb{R}_+ \times \Omega : T(\omega) = t\}$.

Nótese que la gráfica de T contiene solamente la parte finita de T.

2.27 Definición. $Z \subset \mathbb{R}_+ \times \Omega$ es *evanescente* si

$$P(\omega \in \Omega : \exists t \in \mathbb{R}_+,\ (t, \omega) \in Z) = 0$$

(es decir si su proyección sobre Ω tiene probabilidad 0).

Con estas definiciones una formulación equivalente de la Definición 2.25 es la siguiente.

2.28 Formulación Equivalente. T es tiempo de paro totalmente inaccesible si y sólo si para todo tiempo de paro predecible S, $[T] \cap [S]$ es evanescente.

2.29 Definición. Un tiempo de paro T se llama *accesible* si existe $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sucesión de tiempos de paro predecibles tal que

$$[T] \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} [S_n]$$

(basta pedir que esta condición se cumpla módulo un conjunto evanescente).

2.30 Ejemplos. (a) $\Omega = [0,1]$, y

$$\mathfrak{F}_t = \begin{cases} \sigma(\mathcal{B}[0,t],]t,1]) & \text{si } t < 1 \\ \mathcal{B}[0,1] & \text{si } t \geq 1 \end{cases} .$$

Se deja como ejercicio probar que la filtración $(\mathfrak{F}_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ es continua por la derecha.

Sea P una probabilidad arbitraria en $(\Omega, \mathcal{B}[0,1]) = (\Omega, \mathfrak{F}_\infty)$. Completamos $\mathfrak{F}_\infty$, y en el espacio de probabilidad $(\Omega, \overline{\mathfrak{F}_\infty}, P)$ consideramos la filtración $(\overline{\mathfrak{F}_t})_{t\in\mathbb{R}_+}$. Por la Proposición 1.6 esta filtración satisface las condiciones usuales.

Definimos ahora $T(\omega) = \omega$. T es tiempo de paro con respecto a $(\mathfrak{F}_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ porque $\{T \leq t\} = [0, t\wedge 1] \in \mathfrak{F}_t \subset \overline{\mathfrak{F}}_t$. Demostraremos que

(i) T no es predecible a menos que exista $t_0 \in [0,1]$ tal que $P(\{0, t_0\}) = 1$.

(ii) Si $P(\{\omega\}) = 0$ para cada $\omega \in \Omega$ entonces T es totalmente inaccesible.

Primero probaremos que si S es un tiempo de paro tal que $S \leq T$, entonces $S = T \wedge t_0$ c.s. para un $t_0 \in [0,1]$.

En efecto, se tiene $[0,t] = \{T \leq t\} \subset \{S \leq t\} \in \overline{\mathfrak{F}}_t$ para $t \in [0,1]$, por lo tanto $\{S \leq t\} = [0,t]$ c.s. ó $\{S \leq t\} = \Omega$ c.s.

Sea $t_0 = \inf\{t \in [0,1] : \{S \leq t\} = \Omega \text{ c.s.}\}$. Claramente $S \leq t_0$ c.s. Supongamos que $P(\{S < t_0\} \cap [t_0, 1]) > 0$. Entonces existe r racional, $r < t_0$, tal que $P(\{S \leq r\} \cap [t_0, 1]) > 0$. Pero

$$P(\{S \leq r\} \cap [t_0, 1]) = P([0,r] \cap [t_0, 1]) = P(\emptyset) = 0,$$

lo que es una contradicción. Por lo tanto $S = t_0$ c.s. sobre $[t_0, 1]$.

Análogamente se prueba que $S = T$ c.s. sobre $[0, t_0[$, porque en el caso contrario tendríamos $P(\{S < T\} \cap [0, t_0[) > 0$, lo que implicaría $P(\{S < r < T\} \cap [0, t_0]) > 0$ para un r racional. Entonces existiría un $\omega \in [0, t_0]$ tal que $S(\omega) < r < T(\omega) = \omega \leq t_0$, por lo tanto $r < t_0$ y $\{S < r\} = [0, r[$ c.s. En consecuencia

$$P(\{S < r < T\} \cap [0, t_0]) = P([0, r[\cap]r, 1] \cap [0, t_0]) = P(\emptyset) = 0.$$

Así pues $S = T \wedge t_0$.

Ahora vamos a demostrar el punto (ii): Supongamos que existe S tiempo de paro predecible tal que $P(S = T) > 0$. Denotemos $A = \{S = T\}$. Sean S_n tiempos de paro, $S_n \uparrow S$, $S_n < S$ sobre $\{S > 0\}$. $S_n \wedge T \uparrow S \wedge T = T$ sobre A. Por lo anterior sabemos que existen t_n's tales que $S_n \wedge T = t_n \wedge T$ c.s. $n = 1, 2, \ldots$. Se puede suponer que $t_n \to t_0 \in [0, 1]$ y entonces $t_n \wedge T \to t_0 \wedge T$. Por lo tanto $T = t_0 \wedge T$ c.s. sobre A, en otras palabras

$$0 = P(A \cap \{T > t_0\}) = P(A \cap]t_0, 1]),$$

o sea $P(A \cap [0, t_0]) = P(A) > 0$.

Por la suposición $P(\{t_0\}) = 0$ y $P(\{0\}) = 0$, por lo tanto existe n tal que $P(A \cap]0, t_n]) > 0$. Sobre $A \cap]0, t_n]$ se tiene $0 < T \leq t_n$, por lo tanto $S = T > 0$ y a la vez

$$S_n = S_n \wedge S = S_n \wedge T = t_n \wedge T = T = S \quad \text{c.s.}$$

sobre este conjunto, lo que es una contradicción.

El punto (i) se demuestra análogamente. Hay que reemplazar S por T, o sea $A = \Omega$, y observar que $P(]0, t_n]) = 0$ para cada n implica $P(]0, t_0[) = 0$. Los detalles se dejan como ejercicio.

Observemos que si definimos

$$X_t(\omega) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq t \leq \omega \\ 1 & \text{si } t \geq \omega \end{cases}$$

entonces $\overline{\mathfrak{F}_t} = \overline{\mathfrak{F}_t^X}$ y $T = T^{\{1\}}$ (ver Definición 2.4). Así vemos que el tiempo de la primera llegada puede ser totalmente inaccesible, así como predecible (Ejemplo 2.19(b)).

(b) Sea $(X_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ un proceso de Poisson y sea $(\mathfrak{F}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ la filtración usual generada por el proceso (Definición 1.7) Sea T el tiempo del primer salto, es decir $T = \inf\{t : X_t = 1\}$. Veremos que T es totalmente inaccesible.

Supongamos que existe S tiempo de paro predecible tal que $P(S = T < \infty) > 0$. Sea $A = \{S = T < \infty\}$ y sea $(S_n)_n$ una sucesión de tiempos de paro que predicen a S, esto es $S_n \uparrow S$, $S_n < S$ sobre $\{S > 0\}$ y se puede suponer que S_n es finito (si no lo es se toma $S_n \wedge n$).

Si $\omega \in A$ entonces $S_n(\omega) \uparrow T(\omega)$ y $S_n(\omega) < T(\omega)$ si $T(\omega) > 0$. Sabemos (propiedad fuerte de Markov) que

$$(X_{t+S_n} - X_{S_n})_{t \in \mathbb{R}_+}$$

es un proceso de Poisson con el mismo parámetro que $(X_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$. Consideremos al tiempo σ_n del primer salto de este nuevo proceso: Sobre A tenemos $X_{S_n} = 0$ c.s. (porque $S_n < T$ sobre $A \cap \{T > 0\}$ y $P(T = 0) = 0$) y $X_{t+S_n} - X_{S_n} = X_{t+S_n}$ por lo tanto c.s. sobre A, $\sigma_n = T - S_n$.

Tenemos entonces una sucesión $(\sigma_i)_{i\in\mathbb{N}}$ de variables aleatorias tales que: σ_i, $i = 1, 2, \ldots$, tienen la misma distribución exponencial, $\sigma_n \to 0$ sobre A, y $P(A) > 0$, lo que es una contradicción.

También el tiempo de segundo, tercero, etc. salto, son tiempos de paro totalmente inaccesibles (demostración análoga).

(c) Sea Ω un conjunto no vacío, y $A \subset \Omega$, $A \neq \emptyset$. $\mathfrak{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$, $\mathfrak{F}_1 = \sigma\{\emptyset, A, \Omega\}$ Construimos la filtración definiendo

$$\mathfrak{F}_t = \begin{cases} \mathfrak{F}_0, & t < 1 \\ \mathfrak{F}_1, & t \geq 1 \end{cases}$$

y sea P una probabilidad tal que $0 < P(A) < 1$. Es una ligera generalización del espacio de probabilidad, con la filtración $(\mathfrak{F}^X_{t+})_{t\in\mathbb{R}_+}$, considerado en en el Ejemplo 1.12. Sea

$$T(\omega) = \begin{cases} 1, & \omega \in A \\ 2, & \omega \notin A \end{cases}$$

T es tiempo de paro con respecto a la filtración completada $(\overline{\mathfrak{F}_t})_{t\in\mathbb{R}_+}$, pero no es predecible ni totalmente inaccesible. Para probar que no es predecible basta demostrar que no existen tiempos de paro no constantes c.s. y estrictamente menores que T.

Sea S un tiempo de paro, entonces para cada $t < 1$, $\{S \leq t\} \in \overline{\mathfrak{F}_t} = \overline{\{\emptyset, \Omega\}}$.

(i) Supongamos que existe $t < 1$, $\{S \leq t\} = \Omega$ c.s. Entonces existe $s < 1$ tal que $S \equiv s$ c.s.; en efecto: sea

$$\begin{aligned} s &= \inf\{t < 1 : \{S \leq t\} = \Omega \text{ c.s.}\}. \\ \{S = s\} &= \{S \leq s\} - \{S < s\} \quad \text{y} \\ \{S \leq s\} &= \Omega \text{ c.s.}, \quad \{S < s\} = \bigcup_n \{S < s - 1/n\} = \emptyset \text{ c.s.} \end{aligned}$$

por lo tanto $\{S = s\} = \Omega$ c.s.

(ii) Supongamos que para cada $t < 1$, $\{S \leq t\} = \emptyset$ c.s. Entonces $S(\omega) \geq 1$ para casi toda $\omega \in \Omega$.

Si existe S tiempo de paro tal que $S < T$ y S no es constante entonces S cumple con $S(\omega) \geq 1$ para casi toda $\omega \in \Omega$. Pero esto no puede ser porque $T = 1$ sobre A. Por lo anterior T no es predecible.

Es claro que T no es totalmente inaccesible porque $[T] \subset [1] \cup [2]$ y 1,2 son tiempos de paro constantes, por lo tanto predecibles. T es claramente accesible. $\square$

Se plantea una pregunta natural: ¿Existen tiempos de paro que no sean ni predecibles ni accesibles ni totalmente accesibles? La respuesta es inmediata: el mínimo de un tiempo de paro accesible y un tiempo de paro totalmente inaccesible en general no pertenece a ninguna de esas tres clases. Pero sucede que ésta ya es la forma general de tiempos de paro. A saber tenemos el siguiente teorema:

2.31 Teorema de representación. *Sea T un tiempo de paro, entonces $T = U \wedge V$ donde U es un tiempo de paro totalmente inaccesible y V es un tiempo de paro accesible.*

Demostración. Sea $\mathcal{H}$ la clase de los eventos de la forma $\cup_n\{S_n = T\}$ donde $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de tiempos de paro predecibles. Claramente $\mathcal{H}$ es cerrada bajo uniones numerables, en consecuencia, existe $H^* \in \mathcal{H}$, $H^* = \cup_n\{S_n^* = T\}$, tal que

$$P(H^*) = \sup\{P(H) : H \in \mathcal{H}\}$$

(si $\alpha = \sup\{P(H) : H \in \mathcal{H}\}$, existe $(H_n)_n$ en $\mathcal{H}$ tal que $\alpha = \lim_{n\to\infty} P(H_n)$ y $H^* = \cup_n H_n$). Definimos $A = H^* \cap \{T < \infty\}$, $B = (H^*)^C \cap \{T < \infty\}$, $V = T_A$ y $U = T_B$ (ver 2.23).

(a) U y V son tiempos de paro porque $A, B \in \mathfrak{F}_T$. En efecto $\{T < \infty\} \in \mathfrak{F}_T$, $H^* = \cup_n\{S_n^* = T\} \in \mathfrak{F}_T$.

También es claro que $T = U \wedge V$, porque A, B y $\{T = \infty\}$ es una partición de Ω.

(b) V es accesible:

$$\begin{aligned}
\{T_A < \infty\} &= A \cap \{T_A < \infty\} \\
&= H^* \cap \{T < \infty\} \cap \{T_A < \infty\} \\
&= \bigcup_n \{S_n^* = T\} \cap \{T = T_A\} \cap \{T_A < \infty\} \\
&= \bigcup_n \{S_n^* = T_A\} \cap \{T_A < \infty\}.
\end{aligned}$$

Esto implica que $[T_A] \subset \cup_n [S_n^*]$.

(c) $U = T_B$ es totalmente inaccesible: sea S un tiempo de paro predecible arbitrario. Es inmediato que $\{S = T_B < \infty\} = \{S = T\} \cap B \subset (H^*)^C$. Como $H^* \cup \{S = T\} \in \mathcal{H}$,

$$\begin{aligned}
P(H^*) &= \sup\{P(H) : H \in \mathcal{H}\} \geq P(H^* \cup \{S = T\}) \\
&\geq P(H^* \cup (\{S = T\} \cap B)) \\
&= P(H^*) + P(S = T_B < \infty).
\end{aligned}$$

Lo que demuestra que $P(S = T_B < \infty) = 0$, y en consecuencia U es totalmente inaccesible. □

2.32 Corolario. *Sean T, U y V como en el teorema anterior. Entonces*

$$[T] = [U] \cup [V].$$

Capítulo 3

σ-álgebras en $\mathbb{R}_+ \times \Omega$ y regularidad de las trayectorias de los procesos

En este capítulo consideraremos varias σ-álgebras de subconjuntos de $\mathbb{R}_+ \times \Omega$ y discutiremos propiedades de procesos vistos como funciones medibles con respecto a estas σ-álgebras. La más importante de ellas será la σ-álgebra de los conjuntos predecibles; investigaremos su relación con los tiempos de paro predecibles.

Recordemos que siempre estamos suponiendo la Hipótesis 2.15.

Primero vamos a recordar algunas generalidades sobre procesos estocásticos.

En la Definición 1.1 definimos un proceso estocástico con valores en $(E, \mathcal{B})$ como una familia $(X_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ de funciones (medibles) de Ω en E. Pero podemos mirarlo también de otra manera: como una colección de funciones $X_\bullet(\omega): \mathbb{R}_+ \to E$, $\omega \in \Omega$. Estas funciones se llaman *trayectorias* y la investigación de sus propiedades forma una parte importante de la teoría de los procesos estocásticos. En los capítulos anteriores hemos mencionado en varias ocasiones algunas propiedades de trayectorias de procesos.

Recordemos que decimos que un proceso X con valores en un espacio métrico tiene trayectorias *cadlag* (o más brevemente: X es cadlag) si sus trayectorias son funciones continuas por la derecha con límites por la izquierda. A veces vamos a usar también los nombres: *caglad* para un proceso con trayectorias continuas por la izquierda con límites por la derecha, *cad* si las trayectorias son continuas por la derecha y *cag* si son continuas por la izquierda. Esta terminología proviene del idioma francés y actualmente se ha vuelto de uso común entre los probabilistas.

En la teoría general de procesos ("en el sentido francés") miramos a un proceso estocástico aún de otra manera: como una función de dos variables $X: \mathbb{R}_+ \times \Omega \to E$.

3.1 Definición. Se dice que dos procesos $X = (X_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ y $Y = (Y_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ son *indistinguibles* si el conjunto $\{(t,\omega) \in \mathbb{R}_+ \times \Omega : X_t(\omega) \neq Y_t(\omega)\}$ es evanescente.

Es decir (ver 2.27) X, Y son indistinguibles si $P(\omega : \exists t\ X_t(\omega) \neq Y_t(\omega)) = 0$, o en otras palabras si P-casi todas las trayectorias de X y Y son idénticas.

3.2 Convención. Dos procesos indistinguibles se considerarán idénticos.

Esto significa que de hecho vamos a considerar clases de equivalencia de procesos, módulo indistinguibilidad. Por ejemplo, cuando decimos "el proceso es cadlag" permitimos que el conjunto de las ω's para las cuales las $X_\bullet$'s no son cadlag no sea vacío, pero tiene que tener probabilidad cero.

En la clase de equivalencia de los procesos indistinguibles de X podemos encontrar un representante para el cual todas las trayectorias sean cadlag.

Hay que subrayar que un proceso X puede ser una versión, o modificación, del proceso Y (es decir, $P(X_t \neq Y_t) = 0$ para cada t) pero X y Y pueden no ser indistinguibles. La indistinguibilidad es en general una propiedad mucho más fuerte. Basta ver un ejemplo trivial: $(\Omega, \mathfrak{F}) = ([0,1], \mathcal{B}([0,1]))$, $P =$ la medida de Lebesgue, $X_t(\omega) \equiv 0$, $Y_t(\omega) = 0$ si $\omega \neq t$ y $Y_t(t) = 1$. Claramente X es una versión de Y, sin embargo ninguna trayectoria de Y es idéntica a la (única) trayectoria de X.

3.3 Proposición. *Sean X, Y dos procesos continuos por la derecha (o continuos por la izquierda). Si X es una versión de Y entonces X y Y son indistinguibles.*

Demostración. Para cada $r \in \mathbb{Q}_+$ denotemos $D_r = \{\omega \in \Omega : X_r(\omega) \neq Y_r(\omega)\}$ y $D = \cup_{r\in\mathbb{Q}_+} D_r$. Por hipótesis $P(D_r) = 0$ y por lo tanto $P(D) = 0$. Si $\omega \in D^C$ entonces para cada $r \in \mathbb{Q}_+$ se tiene $X_r(\omega) = Y_r(\omega)$, de donde, por la regularidad de las trayectorias, se obtiene $X_t(\omega) = Y_t(\omega)$ para todo $t \in \mathbb{R}_+$. □

Recordemos que convenimos en llamar brevemente "proceso" a un proceso estocástico con valores en $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. En lo que sigue vamos a considerar casi siempre el caso de una dimensión aunque muchos de los resultados valen también para casos más generales.

3.4 Definición. (a) Se dice que un proceso X es *medible* si $X : \mathbb{R}_+ \times \Omega \to \mathbb{R}$ es medible con respecto a la σ-álgebra $\mathcal{B}(\mathbb{R}_+) \otimes \mathfrak{F}$.

(b) Se dice que un proceso X es *progresivamente medible* si para cada $t > 0$, X visto como una función de $[0,t] \times \Omega$ es $\mathbb{R}$ es medible con respecto a $\mathcal{B}([0,t]) \otimes \mathfrak{F}_t$.

Observaciones. (a) El que un proceso sea medible depende solamente de $\mathcal{B}(\mathbb{R}_+) \otimes \mathfrak{F}$, en cambio el que sea progresivamente medible depende de la filtración dada.

(b) Es inmediato ver que un proceso progresivamente medible es medible y adaptado (Definición 1.3).

Claramente no todo proceso adaptado es progresivamente medible porque ni siquiera tiene que ser medible (para verlo basta considerar un proceso determinista que sea el indicador de un conjunto no boreliano de $\mathbb{R}_+$). Sin embargo tenemos

3.5 Proposición. *Si X es adaptado y cag (o cad) entonces X es progresivamente medible.*

Demostración. Sólo haremos el caso cag. Para cada $t \in]0,\infty[$ dividimos el intervalo $[0,t]$ en 2^n subintervalos iguales; para

$$s \in]t(k-1)/2^n, tk/2^n] \quad (1 \leq k \leq 2^n)$$

sean

$$X_s^n(\omega) = X_{t(k-1)/2^n}(\omega) \quad \text{y} \quad X_0^n = X_0(\omega).$$

Claramente $X^n\colon [0,t] \times \Omega \to \mathbb{R}$ es $\mathcal{B}([0,t]) \otimes \mathfrak{F}_t$-medible. Si $n \to \infty$ entonces $X^n \to X|_{[0,t]\times\Omega}$, por continuidad a la izquierda de X, lo cual prueba que el mapeo $(s,\omega) \mapsto X_s(\omega)$ es $\mathcal{B}([0,t]) \otimes \mathfrak{F}_t$-medible. □

3.6 Definición. Sea X un proceso medible y T un tiempo de paro. El proceso parado, denotado por X^T, lo definimos por

$$X_t^T(\omega) = X_{t\wedge T(\omega)}(\omega).$$

3.7 Proposición. *Sea $X = (X_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ un proceso progresivamente medible y T un tiempo de paro; entonces*

$$(X_T)(\omega) = X_{T(\omega)}(\omega)$$

es $\mathfrak{F}_T$-medible sobre $\{T < \infty\}$. Además el proceso parado X^T es progresivamente medible.

Demostración. Para probar que X_T es $\mathfrak{F}_T$-medible sobre $\{T < \infty\}$ basta demostrar que para cada $t \in \mathbb{R}_+$ y cada $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$,

$$\{X_T \in B\} \cap \{T \leq t\} \in \mathfrak{F}_t.$$

Pero

$$\{X_T \in B\} \cap \{T \leq t\} = \{X_{t\wedge T} \in B\} \cap \{S \leq t\},$$

entonces basta probar la segunda afirmación de la proposición para establecer la primera, porque

$$\{T \leq t\} \in \mathfrak{F}_t \quad \text{y} \quad \{X_{t\wedge T} \in B\} \in \mathfrak{F}_t$$

si X^T es adaptado.

Sea $\varphi(s,\omega) = s \wedge T(\omega)$. Para cada $t \geq 0$ la función φ es medible como mapeo de $([0,t] \times \Omega, \mathcal{B}([0,t]) \otimes \mathfrak{F}_t)$ en $([0,t], \mathcal{B}([0,t]))$, pues para cada $r \leq t$ se tiene

$$\begin{aligned}
&\{(s,\omega) \in [0,t] \times \Omega : \ s \wedge T(\omega) \leq r\} \\
&\quad = ([0,r] \times \Omega) \cup ([0,t] \times \{\omega : \ T(\omega) \leq r\}) \in \mathcal{B}([0,t]) \otimes \mathfrak{F}_r \\
&\quad \subset \mathcal{B}([0,t]) \otimes \mathfrak{F}_t.
\end{aligned}$$

Por lo tanto la función $\psi(s,\omega) = (\varphi(s,\omega),\omega)$ es medible como mapeo de $([0,t] \times \Omega, \mathcal{B}([0,t]) \otimes \mathfrak{F}_t)$ en sí mismo; en consecuencia $X^T = X \circ \psi$ es progresivamente medible. □

Obsérvese que podemos omitir la restricción "sobre $\{T < \infty\}$" en la formulación de esta proposición si definimos $X_\infty(\omega)$ de un modo arbitrario.

3.8 Definición. Decimos que un conjunto $A \subset \mathbb{R}_+ \times \Omega$ es *progresivamente medible* si su función indicadora $\mathbf{1}_A$ es progresivamente medible (como proceso).

Es inmediato comprobar que la clase de conjuntos progresivamente medibles constituye una sub-σ-álgebra de $\mathcal{B}(\mathbb{R}_+) \otimes \mathfrak{F}$, llamada la σ-álgebra de los conjuntos progresivamente medibles.

Antes de identificar algunos conjuntos progresivamente medibles daremos la siguiente definición:

3.9 Definición. Sean S, T tiempos de paro, $S \leq T$ c.s. El *intervalo estocástico* semiabierto $[S,T[$ es el conjunto

$$\{(t,\omega) \in \mathbb{R}_+ \times \Omega : S(\omega) \leq t < T(\omega)\}.$$

Análogamente se definen $[S,T]$, $]S,T[$, $]S,T]$[1].

3.10 Proposición. *Sean S y T tiempos de paro, entonces $[S,T[$, $]S,T]$, $]S,T[$, $[S,T]$ y $[T]$ son progresivamente medibles.*

[1] Advertencia. Para $s,t \in \mathbb{R}_+$, $[s,t[$ siempre ha significado (y va a significar en el futuro) el conjunto $\{r : s \leq r < t\}$. Por otro lado para los tiempos de paro deterministas $S \equiv s$, $T \equiv t$, $[S,T[= \{(r,\omega) : s \leq r < t, \omega \in \Omega\}$. Esperemos que esta ambigüedad no cause ninguna confusión.

Demostración. Empecemos con $[S,T[$; probaremos que $X = \mathbf{1}_{[S,T[}$ es un proceso cadlag adaptado y por 3.5 obtendremos que es progresivamente medible. Claramente

$$\begin{aligned} X_t^{-1}\{1\} &= \{\omega : S(\omega) \leq t < T(\omega)\} = \{S \leq t\} \cap \{t < T\} \\ &= \{S \leq t\} \cap \{T \leq t\}^C \in \mathfrak{F}_t, \end{aligned}$$

análogamente obtenemos que $X_t^{-1}\{0\} \in \mathfrak{F}_t$, para cada $t \in \mathbb{R}_+$, es decir, X es adaptado.

Sean $\omega \in \Omega$ y $t \geq 0$ fijos y supongamos que $X_t(\omega) = 1$. Sea (s_n) una sucesión en $\mathbb{R}_+$ tal que $s_n \downarrow t$; como $S(\omega) \leq t < T(\omega)$, existe n_0 tal que $S(\omega) \leq s_n < T(\omega)$ para cada $n \geq n_0$ y entonces

$$X_{s_n}(\omega) \to X_t(\omega).$$

Si $X_t(\omega) = 0$ el argumento es análogo. Lo que prueba que X es cad.

Es igualmente sencillo comprobar que X es lag. Por otro lado, empleando el mismo método obtenemos que $\mathbf{1}_{]S,T]}$ es caglad adaptado y entonces es progresivamente medible.

Finalmente observemos que:

$$\begin{aligned}]S,T[&= \bigcup_{n=1}^{\infty} [S + 1/n, T[, \quad [S,T] = \bigcap_{n=1}^{\infty} [S, T + 1/n[\\ \text{y} \quad [T] &= \bigcap_{n=1}^{\infty} [T, T + 1/n[\end{aligned}$$

de donde concluimos que estos conjuntos también son progresivamente medibles. □

Examinaremos con detalle ciertas sub-σ-álgebras de la σ-álgebra de los conjuntos progresivamente medibles, que a continuación definimos.

3.11 Definición. (a) Definimos la σ-álgebra de los conjuntos *opcionales* (denotada por $\mathcal{O}$), como la σ-álgebra generada por los procesos cadlag adaptados, i.e. es la menor σ-álgebra que hace medible a cada proceso cadlag adaptado.

(b) Definimos la σ-álgebra de los conjuntos *predecibles* (denotada por $\mathcal{P}$) como la σ-álgebra generada por los procesos cag adaptados.

Finalmente decimos que un proceso es *opcional* (*predecible*) si es $\mathcal{O}$ ($\mathcal{P}$)-medible.

Como veremos más tarde, los procesos predecibles juegan un papel muy importante en la teoría de integración estocástica.

El lector cuidadoso debería preguntar en este momento si hay alguna relación entre dos nociones de predecibilidad: la de tiempos de paro y la de procesos. La respuesta completa a esta pregunta la daremos en el Capítulo 4, pero ya ahora demostraremos un teorema que nos permitirá entender mejor la estructura de la σ-álgebra predecible.

3.12 Teorema. *La σ-álgebra predecible $\mathcal{P}$ está generada por:*

(a) *Todos los procesos adaptados continuos por la izquierda.*

(b) *Todos los intervalos estocásticos $]S,T]$, con S,T tiempos de paro y además los conjuntos $[0_F] = \{0\} \times F$ con $F \in \mathfrak{F}_0$.*

(c) *Todos los conjuntos de la forma $]u,v] \times F$ con $u,v \in \mathbb{R}_+, u < v$ y $F \in \mathfrak{F}_u$ y además los conjuntos $[0_F]$, $F \in \mathfrak{F}_0$.*

(d) *$\cup_n \mathcal{P}^n$, donde $\mathcal{P}^n$ es la σ-álgebra de los siguientes conjuntos:*

$$\bigcup_k [k/2^n, (k+1)/2^n[\times A_k,$$

$A_0 \in \mathfrak{F}_0$, $A_k \in \mathfrak{F}_{(k-1)/2^n}$ si $k > 0$.

(e) *Todos los intervalos estocásticos de la forma $[S,T[$ donde S,T son tiempos de paro predecibles.*

(f) *Todos los procesos adaptados y continuos.*

Demostración. Denotemos a cada una de las σ-álgebras de los incisos correspondientes por $\mathcal{P}_a$, $\mathcal{P}_b$, $\mathcal{P}_c$, $\mathcal{P}_d$, $\mathcal{P}_e$, $\mathcal{P}_f$. Mostraremos que todas son iguales.

$\mathcal{P}_b \subset \mathcal{P}_a$, porque $\mathbf{1}_{]S,T]}$ es proceso adaptado cag, $\mathbf{1}_{[0_F]}$ es adaptado y tiene trayectorias continuas en $]0,\infty[$.

$\mathcal{P}_c \subset \mathcal{P}_b$, es inmediato porque $]u,v] \times F =]u_F, v_F]$, $F \in \mathfrak{F}_u$.

Para demostrar $\mathcal{P}_a \subset \mathcal{P}_c$ necesitamos el siguiente resultado:

3.13 Lema. *Cada proceso de la forma $\xi \mathbf{1}_{]u,v]}$ donde ξ es una variable aleatoria $\mathfrak{F}_u$-medible y cada proceso $\xi \mathbf{1}_{\{0\}}$ con ξ variable aleatoria $\mathfrak{F}_0$-medible, son $\mathcal{P}_c$-medibles.*

Este lema es inmediato si $\xi = \mathbf{1}_F$, $F \in \mathfrak{F}_u$ o en el segundo caso $\xi = \mathbf{1}_F$, $F \in \mathfrak{F}_0$ y de esto se prueba con el método estándar que vale para todas las variables aleatorias $\mathfrak{F}_u$-medibles (o $\mathfrak{F}_0$-medibles).

Mostremos ahora que $\mathcal{P}_a \subset \mathcal{P}_c$. Sea X un proceso adaptado cag; basta demostrar que X es $\mathcal{P}_c$-medible. Definamos

$$\begin{aligned} X_t^n &= X_{k/2^n} \text{ si } \; k/2^n < t \leq (k+1)/2^n \; k = 0,1,2,\ldots, \; n = 1,2,\ldots \\ X_0^n &= X_0. \end{aligned}$$

Por ser X cag, para cada $t \geq 0$ y cada $\omega \in \Omega$ se cumple:

$$\lim_n X_t^n(\omega) = X_t(\omega).$$

Además

$$X_t^n = X_0 \mathbf{1}_{\{0\}}(t) + \sum_{k=0}^{\infty} X_{k/2^n} \mathbf{1}_{]k/2^n,(k+1)/2^n]}(t).$$

Por el lema cada sumando es $\mathcal{P}_c$-medible, por lo tanto X_t^n también lo es ($n = 1, 2, \ldots$). En consecuencia X es $\mathcal{P}_c$-medible (por ser límite puntual de procesos $\mathcal{P}_c$-medibles).

$\mathcal{P}_c \subset \mathcal{P}_d$: Si $F \in \mathfrak{F}_0$ entonces $[0, 1/2^n[\, \times F \in \mathcal{P}^n$ y por lo tanto $\cap_n [0, 1/2^n[\, \times F = \{0\} \times F \in \mathcal{P}_d$.

Por otra parte, fijemos $u, v \in \mathbb{R}_+$, $u < v$ y $F \in \mathfrak{F}_u$; para n suficientemente grande, digamos $n \geq n_0$, existen j_n, m_n tales que

$$\begin{aligned} \frac{j_n - 1}{2^n} < u \quad &\leq \quad \frac{j_n}{2^n} < \frac{j_n + 1}{2^n} \\ &< \quad \cdots < \frac{j_n + m_n - 1}{2^n} \leq v < \frac{j_n + m_n}{2^n}. \end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned}]u, v] =]u, v[\, \cup \{v\} \quad &= \quad \left(\bigcup_{n \geq n_0} \left[\frac{j_n + 1}{2^n}, \frac{j_n + m_n - 1}{2^n} \right[\right) \\ &\quad \cup \left(\bigcap_{n \geq n_0} \left[\frac{j_n + m_n - 1}{2^n}, \frac{j_n + m_n}{2^n} \right[\right). \end{aligned}$$

Pero

$$\left[\frac{j_n + m_n - 1}{2^n}, \frac{j_n + m_n}{2^n} \right[\times F \in \mathcal{P}^n$$

porque $F \in \mathfrak{F}_u \subset \mathfrak{F}_{(j_n + m_n - 2)/2^n}$, $n \geq n_0$, y también

$$\left[\frac{j_n + 1}{2^n}, \frac{j_n + m_n - 1}{2^n} \right[\times F = \bigcup_{k = j_n + 1}^{j_n + m_n - 1} \left[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n} \right[\times F \in \mathcal{P}^n$$

porque $F \in \mathfrak{F}_u \subset \mathfrak{F}_{(k-1)/2^n}$, $k \geq j_n + 1$. Esto prueba que

$$]u, v] \times F \in \bigcup_n \mathcal{P}^n = \mathcal{P}_d.$$

$\mathcal{P}_d \subset \mathcal{P}_e$: Fijemos n, k y $A \in \mathfrak{F}_{(k-1)/2^n}$. Entonces

$$[k/2^n, (k+1)/2^n[\, \times A = [(k/2^n)_A, ((k+1)/2^n)_A[$$

y $(k/2^n)_A, ((k+1)/2^n)_A$ son tiempos de paro predecibles por el siguiente lema:

3.14 Lema. *Si $s,t \in \mathbb{R}_+$ y $s < t$, $A \in \mathfrak{F}_s$ entonces t_A es un tiempo de paro predecible.*

En efecto, es inmediato que t_A es un tiempo de paro. Es predecible porque existe $(t_n)_n$ tal que $s < t_n < t$ y $t_n \uparrow t$. Entonces $T_n = (t_n)_A \wedge n$ es una sucesión de tiempos de paro que predice a t_A.

Para terminar con la inclusión $\mathcal{P}_d \subset \mathcal{P}_e$, falta probar que los rectángulos de la forma $[0,1/2^n[\times A$ con $A \in \mathfrak{F}_0$ están en $\mathcal{P}_e$, pero $[0,1/2^n[\times A = [0,(1/2^n)_A[$ y nuevamente por el lema $(1/2^n)_A$ es tiempo de paro predecible.

$\mathcal{P}_e \subset \mathcal{P}_b$: Como $[S,T[=[S,\infty[-[T,\infty[$, basta entonces mostrar que $[T,\infty[\in \mathcal{P}_b$ para T tiempo de paro predecible.

Sea $(T_n)_n$ una sucesión de tiempos de paro que predice a T. Entonces:

$$[T,\infty[=(\{0\}\times\{T=0\})\cup(\bigcap_{n=1}^{\infty}]T_n,\infty[).$$

Claramente $\{0\}\times\{T=0\}\in\mathcal{P}_b$ y también $]T_n,\infty[=\cup_{m=1}^{\infty}]T_n,m]\in\mathcal{P}_b$.

$\mathcal{P}_f \subset \mathcal{P}_a$: Es inmediato.

$\mathcal{P}_b \subset \mathcal{P}_f$: Si S,T son tiempos de paro, $]S,T]=]S,\infty[-]T,\infty[$. Por lo tanto, basta mostar que $]T,\infty[\in\mathcal{P}_f$ para todo T tiempo de paro y que $\{0\}\times F\in\mathcal{P}_f$, para todo $F\in\mathfrak{F}_0$.

Se define $X_t=(t-T)^+$. $(X_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ es un proceso continuo. Veremos que es también adaptado:

Sea $a>0$.

$$\begin{aligned}\{X_t\geq a\} &= \{t-T\geq a\}=\{t-a\geq T\}\\ &= \begin{cases}\emptyset & \text{si } t-a<0\\ \in\mathfrak{F}_{t-a}\subset\mathfrak{F}_t & \text{si } t-a\geq 0\end{cases}\end{aligned}$$

es decir, para cada $a>0$, $\{X_t\geq a\}\in\mathfrak{F}_t$ lo que muestra que X_t es $\mathfrak{F}_t$-medible (para cada $t\geq 0$). Entonces,

$$]T,\infty[=\{(t,\omega):T(\omega)<t\}=\{(t,\omega):X_t(\omega)>0\}\in\mathcal{P}_f$$

porque X es continuo y adaptado.

Por último, sea $F\in\mathfrak{F}_0$.

$$\{0\}\times F=([0,\infty[\times F)-(]0,\infty[\times\Omega).$$

El proceso $\mathbf{1}_{[0,\infty[}(t)\mathbf{1}_F(\omega)$ es continuo y adaptado; $\mathbf{1}_{]0,\infty[\times\Omega} = \mathbf{1}_{]0,\infty[}$ es determinista, por lo tanto adaptado y lo podemos aproximar por procesos continuos deterministas. Lo que muestra que $\{0\} \times F \in \mathcal{P}_f$ si $F \in \mathfrak{F}_0$. □

De este teorema obtenemos inmediatamente el siguiente corolario, interesante y hasta quizás un poco sorprendente.

3.15 Corolario. $\mathcal{P} \subset \mathcal{O}$.

Una propiedad análoga a $\mathcal{P}_a = \mathcal{P}_e$ se cumple para la σ-álgebra opcional.

3.16 Teorema. *La σ-álgebra de los conjuntos opcionales $\mathcal{O}$ es idéntica a la σ-álgebra generada por todos los conjuntos de la forma $[S,T[$ con S,T tiempos de paro.*

No vamos a usar este teorema por lo tanto daremos solamente unas sugerencias al lector de cómo demostrarlo.

Sea

$$\mathcal{O}' = \sigma\{[S,T[: S,T \text{ tiempos de paro }\}.$$

Claramente $\mathcal{O}' \subset \mathcal{O}$.

Para probar $\mathcal{O} \subset \mathcal{O}'$ mostrar primero que $\xi\mathbf{1}_{[S,T[}$ es $\mathcal{O}'$-medible para cada ξ variable aleatoria $\mathfrak{F}_S$-medible y tiempos de paro S,T, $S \leq T$, y luego aproximar un proceso X cadlag adaptado arbitrario por los procesos $X^\epsilon = \sum_n X_{T_n^\epsilon}\mathbf{1}_{[T_n^\epsilon, T_{n+1}^\epsilon[}$ $(\epsilon \downarrow 0)$, donde $T_1^\epsilon \equiv 0$, $T_{n+1}^\epsilon = \inf\{t > T_n^\epsilon : |X_t - X_{T_n^\epsilon}| > \epsilon\}$ (demostrar por inducción que T_n^ϵ es tiempo de paro).

Capítulo 4

Teoremas de sección y sus aplicaciones

En este capítulo discutiremos varios resultados profundos y finos que se siguen del teorema de capacidad de Choquet. Demostraremos el Teorema 2.7 en una versión más general y el resultado más importante será el teorema de sección predecible. Este teorema nos permitirá dar una respuesta completa a la pregunta sobre las relaciones entre los tiempos de paro predecibles y los conjuntos predecibles, veremos también cómo aplicar este teorema en las demostraciones de unicidad. Terminaremos el capítulo con el análisis de los saltos de los procesos cadlag adaptados.

Un papel importante lo jugarán las condiciones usuales y sobre todo la completez del espacio de probabilidad y de la filtración (sin embargo, ver Apéndice C).

Antes de formular el teorema de Choquet es necesario dar unas definiciones.

4.1 Definición. (a) Sea E un conjunto y $\mathcal{E}$ una clase de subconjuntos de E. Decimos que $\mathcal{E}$ es un *pavimento*[1] si:

(i) $\emptyset \in \mathcal{E}$,

(ii) Si $A, B \in \mathcal{E}$ entonces $A \cup B \in \mathcal{E}$,

(iii) Si $A_n \in \mathcal{E}$, $n = 1, 2, \ldots$ entonces $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{E}$.

(b) El *mosaico* $\mathcal{M}$ generado por $\mathcal{E}$ es la mínima clase cerrada bajo uniones numerables e intersecciones numerables que contiene a $\mathcal{E}$.

[1] En las ediciones anteriores de la monografía la definición del pavimento fué un poco más general. La formulación actual es suficiente para nuestros propósitos y es más conveniente para la demostración del teorema de Choquet.

(c) Una *capacidad* ($\mathcal{E}$-capacidad, $\mathcal{E}$-capacidad de Choquet) en $(E,\mathcal{E})$ es una función $I\colon 2^E \to \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ tal que:
(i) Si $A \subset B$ entonces $I(A) \leq I(B)$.
(ii) Si $A_n \subset A_{n+1}$, $n = 1,2,\ldots$ entonces $I(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sup_n I(A_n)$.
(iii) Si $A_n \in \mathcal{E}$ y $A_n \supset A_{n+1}$, $n = 1,2,\ldots$, entonces:

$$I(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n) = \inf_n I(A_n).$$

4.2 Teorema de Capacidad de Choquet. *Sea $\mathcal{E}$ un pavimento sobre E y sea I una capacidad sobre $(E,\mathcal{E})$. Entonces para cada $A \in \mathcal{M}$,*

$$I(A) = \sup\{I(K) : K \subset A,\ K \in \mathcal{E}\}$$

donde $\mathcal{M}$ es el mosaico generado por $\mathcal{E}$.

La demostración de este teorema se pospone al Apéndice B.

4.3 Ejemplo Básico. Sea $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ un espacio de probabilidad fijo completo y sea $E = \Gamma \times \Omega$ donde $\Gamma = \mathbb{R}_+$ (o más generalmente, Γ es un espacio métrico localmente compacto y separable).

Denotemos por $\mathcal{E}'$ a la clase de las uniones finitas de conjuntos de la forma $K \times B$, con K compacto en Γ y $B \in \mathfrak{F}$ y sea $\mathcal{E}$ el pavimento generado por $\mathcal{E}'$. Es fácil ver que

$$\mathcal{E} = \{\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n : A_n \in \mathcal{E}',\ n = 1,2,\ldots\} = \{\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n : A_n \in \mathcal{E}',\ A_n \supset A_{n+1},\ n = 1,2,\ldots\}.$$

En efecto, como la clase $\mathcal{E}'$ es claramente cerrada bajo las intersecciones finitas, entonces la segunda igualdad es inmediata. Para demostrar la primera igualdad basta probar que si $A_n, A'_n \in \mathcal{E}'$, $A_n \supset A_{n+1}$, $A'_n \supset A'_{n+1}$ para $n = 1,2,\ldots$, entonces $(\cap_{n=1}^{\infty} A_n) \cup (\cap_{n=1}^{\infty} A'_n) = \cap_{n=1}^{\infty}(A_n \cup A'_n)$, lo cual es muy fácil.

Sea $\Pi : E \to \Omega$ la proyección de E sobre Ω y P^* la probabilidad exterior en 2^{Ω}.

Definamos ahora una capacidad: para cada $A \subset E$,

$$I(A) = P^*(\Pi(A)) = \inf\{P(B) : B \supset \Pi(A) \text{ y } B \in \mathfrak{F}\}.$$

I está bien definida y es una $\mathcal{E}$-capacidad. En efecto:
(i) Es clara.
(ii) Es consecuencia inmediata de:

(1) $\Pi(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \Pi(A_n)$.

(2) Si $B_n \subset B_{n+1} \subset \Omega$, $n = 1, 2, \ldots$ entonces $P^*(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n) = \lim_n P^*(B_n)$.

(1) es claro y para mostrar (2) fijemos $C_n \in \mathfrak{F}$ tal que $C_n \supset B_n$, $P(C_n) \leq P^*(B_n) + 1/n$ para $n = 1, 2, \ldots$ Observemos que los conjuntos $C_n^1 = \cap_{k \geq n} C_k$ tienen las mismas propiedades y además $C_n^1 \subset C_{n+1}^1$, por lo tanto

$$P^*(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n) \leq P(\bigcup_{n=1}^{\infty} C_n^1) = \lim_n P(C_n^1) \leq \lim_n P^*(B_n).$$

La desigualdad "$\geq$"es obvia.

(iii) Basta probar que si $A_n \in \mathcal{E}$ y $A_n \supset A_{n+1}$, $n = 1, 2, \ldots$ entonces

$$\Pi(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n) = \bigcap_{n=1}^{\infty} \Pi(A_n) \tag{4.1}$$

En efecto, supongamos que (4.1) se cumple. Sabemos que cada A_n tiene la forma $A_n = \cap_{m=1}^{\infty} A_n^m$, $A_n^m \in \mathcal{E}'$, $A_n^m \supset A_n^{m+1}$, $m = 1, 2, \ldots$, $n = 1, 2, \ldots$ Entonces $\Pi(\cap_{n=1}^{\infty} A_n) = \cap_{n=1}^{\infty} \Pi(\cap_{m=1}^{\infty} A_n^m) = \cap_{n=1}^{\infty} \cap_{m=1}^{\infty} \Pi(A_n^m) \in \mathfrak{F}$, ya que claramente $\Pi(A) \in \mathfrak{F}$ para cada $A \in \mathcal{E}'$. En consecuencia

$$P^*(\Pi(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n)) = P(\Pi(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n) = P(\bigcap_{n=1}^{\infty} \Pi(A_n)) = \inf_n P(\Pi(A_n)).$$

Demostremos entonces (4.1): la inclusión $\Pi(\cap_{n=1}^{\infty} A_n) \subset \cap_{n=1}^{\infty} \Pi(A_n)$ es clara. Para probar el recíproco observemos que si $\omega \in \cap_{n=1}^{\infty} \Pi(A_n)$ entonces para cada n existe t tal que $(t, \omega) \in A_n$, es decir $A_n^\omega \neq \emptyset$ para cada n, donde

$$A_n^\omega = \{t \in \Gamma : (t, \omega) \in A_n\} \quad \text{(la } \omega\text{-sección de } A_n).$$

Como $A_n \in \mathcal{E}$, A_n^ω es compacto y $A_n^\omega \supset A_{n+1}^\omega$ porque $A_n \supset A_{n+1}$. Por lo que $\cap_{n=1}^{\infty} A_n^\omega \neq \emptyset$, es decir existe t tal que para toda $n \in \mathbb{N}$ $(t, \omega) \in A_n$, pero esto implica que $\omega \in \Pi(\cap_{n=1}^{\infty} A_n)$. □

4.4 Observación. En este ejemplo el mosaico generado por $\mathcal{E}$ es $\mathcal{B}(\Gamma) \otimes \mathfrak{F}$. En efecto, es claro que $\mathcal{M} \subset \mathcal{B}(\Gamma) \otimes \mathfrak{F}$. Sea $\mathcal{K} = \{A \in \mathcal{M} : A^C \in \mathcal{M}\}$; $\mathcal{K}$ es σ-álgebra y veremos que contiene a cada $A = K \times B$ donde $\mathcal{K}$ es compacto y $B \in \mathfrak{F}$. Claramente $A \in \mathcal{E} \subset \mathcal{M}$ y como $K^C = \Gamma - K$ es abierto en Γ, K^C se puede expresar como unión numerable de compactos y por lo tanto $A^C = (K \times B)^C \in \mathcal{M}$. Pero la clase de todos los subconjuntos de la forma $K \times B$ con K compacto y $B \in \mathfrak{F}$ genera a $\mathcal{B}(\Gamma) \otimes \mathfrak{F}$, en consecuencia $\mathcal{M} \supset \mathcal{K} \supset \mathcal{B}(\Gamma) \otimes \mathfrak{F}$.

4.5 Teorema. *Sean* $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ *y* Γ *como en el Ejemplo 4.3. Entonces para toda* $A \in \mathcal{B}(\Gamma) \otimes \mathfrak{F}$, $\Pi(A)$ *es* $\mathfrak{F}$*-medible.*

Demostración. Aplicamos el teorema de Choquet a nuestro ejemplo: tenemos que si $A \in \mathcal{M} = \mathcal{B}(\Gamma) \otimes \mathfrak{F}$ entonces:

$$P^*(\Pi(A)) = \sup\{P^*(\Pi(K)) : K \subset A,\ K \in \mathcal{E}\}.$$

Esto permite afirmar que para cada n existe $K_n \in \mathcal{E}$, $K_n \subset A$, tal que

$$P^*(\Pi(A)) \leq P^*(\Pi(K_n)) + 1/n \leq P^*(\Pi(\bigcup_m K_m) + 1/n.$$

Ya sabemos que (4.1) implica que $\Pi(K_n) \in \mathfrak{F}$ y por lo tanto $\Pi(\cup_n K_n) = \cup_n \Pi(K_n) \in \mathfrak{F}$. Como $\cup_m K_m \subset A$ se tiene que para cada n

$$P(\Pi \bigcup_m K_m) = P^*(\Pi \bigcup_m K_m) \leq P^*(\Pi A) \leq P(\Pi \bigcup_m K_m) + 1/n,$$

es decir $P^*(\Pi A) = P(\Pi \cup_m K_m)$ y por lo tanto $\Pi A = \Pi(\cup_n K_n)$ (menos un conjunto de medida cero) y en consecuencia $\Pi A \in \mathfrak{F}$ (por la completez de $\mathfrak{F}$). □

Este resultado es interesante y profundo pues en general la proyección de un conjunto medible en la σ-álgebra producto no es medible. En nuestro caso gracias al teorema de Choquet vemos que sí lo es. Como una aplicación inmediata obtenemos el siguiente teorema.

4.6 Teorema. *Bajo la Hipótesis 2.15, si* X *es un proceso progresivamente medible, entonces para cada* $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ *el tiempo* T^B *de la de la primera llegada de* X *a* B *es tiempo de paro.*

Demostración. Como $\mathfrak{F}_t = \mathfrak{F}_{t^+}$, basta demostrar que $\{T^B < t\} \in \mathfrak{F}_t$ para cada $t \in \mathbb{R}_+$ (Lema 2.3). Tenemos

$$\begin{aligned} \{T^B < t\} &= \{\omega \in \Omega : \exists s < t, \text{ con } X_s(\omega) \in B\} \\ &= \Pi(([0,t[\times\Omega) \cap X^{-1}(B)). \end{aligned}$$

Como X es progresivamente medible,

$$([0,t[\times\Omega) \cap X^{-1}(B) \in \mathcal{B}([0,t[) \otimes \mathfrak{F}_t$$

y por el teorema anterior, aplicado al espacio de probabilidad completo $(\Omega, \mathfrak{F}_t, P)$ y $\Gamma = [0,t]$, obtenemos $\Pi(([0,t[\times\Omega) \cap X^{-1}(B)) \in \mathfrak{F}_t$. □

4.7 Observación. Sabemos (Proposición 3.5) que cada proceso adaptado y continuo por la derecha es progresivamente medible, entonces el Teorema 2.7 resulta ser un corolario inmediato del Teorema 4.6. Es verdad que en el Teorema 2.7 hablábamos de un proceso con valores en un espacio métrico y ahora estamos considerando procesos reales, pero no es difícil notar que la proposición sigue siendo válida para los procesos con valores en un espacio métrico.

Vamos a formular el Teorema 4.6 aún de otra manera, quizás más en el espíritu de la teoría general de procesos.

4.8 Definición. Para cada $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}_+) \otimes \mathfrak{F}$ definimos el *comienzo* de A como

$$D_A(\omega) = \inf\{t \geq 0 : (t, \omega) \in A\}.$$

En el teorema anterior T^B es el comienzo de $X^{-1}(B)$, esto es $T^B = D_{X^{-1}(B)}$. Recíprocamente, si $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}_+) \otimes \mathfrak{F}$ y $X = \mathbf{1}_A$ entonces D_A es el tiempo de la primera llegada de X a $\{1\}$. Con esta terminología el Teorema 4.6 puede reformularse, claramente bajo las condiciones usuales, de la siguiente manera:

4.9 Teorema. *El comienzo de un conjunto progresivamente medible es un tiempo de paro.*

4.10 Corolario. *Sea $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ un espacio de probabilidad completo, $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}_+) \otimes \mathfrak{F}$. Entonces D_A es una variable aleatoria con valores en $\mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$.*

Esto es consecuencia inmediata de: $\{D_A < t\} = \Pi(([0, t[\times \Omega) \cap A)$.
Estamos ahora en condiciones de mostrar el primer teorema de sección.

4.11 Versión general del Teorema de Sección. *Sea $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ un espacio de probabilidad completo, $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}_+) \otimes \mathfrak{F}$. Entonces para cada $\epsilon > 0$ existe una variable aleatoria U con valores en $\mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ tal que:*
(i) $[U] \subset A$.
(ii) $P(\Pi[U]) + \epsilon \geq P(\Pi(A))$.

Escribimos $P(\Pi(A))$ en vez de $P^*(\Pi(A))$, pues ya sabemos que $\Pi(A) \in \mathfrak{F}$. Observemos además que $P(\Pi[U]) = P(U < \infty)$.

Demostración. Lo más natural sería definir U como D_A pero en general $[D_A] \not\subset A$. Recordemos que en 4.3 definimos la ω-sección del conjunto A como $A^\omega = \{t \in \mathbb{R}_+ : (t, \omega) \in A\}$. Si todas las secciones A^ω son cerradas por la derecha entonces $[D_A] \subset A$. El teorema de

Choquet nos permite aproximar a A por conjuntos que sí tienen esa propiedad. Sea $\epsilon > 0$; existe $K \subset A$, $K \in \mathcal{E}$ tal que:

$$P(\Pi(K)) + \epsilon \geq P(\Pi(A)).$$

Si definimos U como D_K, U es una variable aleatoria por el corolario anterior, $[U] \subset K \subset A$ ya que K^ω es compacto para cada ω, por lo tanto $U(\omega) \in K^\omega$ si $U(\omega) < \infty$. Además $\Pi(K) = \Pi([U])$. Con lo que concluimos. □

Los puntos 4.10 y 4.11 no dependen de la filtración dada. Para subrayar su carácter general, hemos formulado explícitamente la única suposición importante (que $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ es completo). Sin embargo, en lo que sigue siempre suponemos la Hipótesis 2.15.

Ahora pasaremos al teorema más importante entre los teoremas de sección, a saber, el teorema de sección predecible.

4.12 Teorema de Sección Predecible. *Sea $A \in \mathcal{P}$, entonces para toda $\epsilon > 0$ existe un tiempo de paro predecible T tal que $[T] \subset A$ y $P(T < \infty) + \epsilon \geq P(\Pi(A))$.*

La idea de la demostración consiste en construir una clase $\mathcal{G}$ de conjuntos predecibles tales que:

(i) Si $C \in \mathcal{G}$, entonces D_C es un tiempo de paro predecible y $[D_C] \subset C$.

(ii) Todo $A \in \mathcal{P}$ puede "aproximarse" por elementos de $\mathcal{G}$.

Esto requiere, en particular, de un método de aproximación, el cual estará basado en el siguiente resultado de teoría de la medida:

(∗) Si μ es una medida finita sobre $\sigma(\mathfrak{A})$ donde $\mathfrak{A}$ es una álgebra de conjuntos, entonces para toda $\epsilon > 0$ y toda $A \in \sigma(\mathfrak{A})$ existe $C \in \mathfrak{A}_\delta$ tal que $C \subset A$ y

$$\mu(C) + \epsilon \geq \mu(A).$$

Aquí, como siempre, $\mathfrak{A}_\delta$ significa la clase de todas las intersecciones numerables de los elementos de $\mathfrak{A}$ (Este resultado se sigue del Teorema de Choquet 4.2, pero es mucho más elemental).

Para poder aplicar este resultado, se necesitará, además, que la familia $\mathcal{G}$ sea álgebra, que $\sigma(\mathcal{G}) = \mathcal{P}$ y definir una medida adecuada sobre $\mathcal{P}$.

Demostración. Sea $\mathcal{G}$ la clase de todas las uniones finitas de intervalos estocásticos de la forma $[S, R[$, donde, S, R son tiempos de paro predecibles.

Claramente, $\mathcal{G}$ es una álgebra y $\sigma(\mathcal{G}) = \mathcal{P}$ por el Teorema 3.12. Demostraremos que si $C \in \mathcal{G}$, entonces se cumple que D_C es un tiempo de paro predecible y $[D_C] \subset C$.

1. Si $C = [S, R[$ donde S, R son tiempos de paro predecibles

$$D_C = \inf\{t : (t,\omega) \in [S, R[\} = S_{\{S<R\}}$$

y obviamente $[S_{\{S<R\}}] \subset [S, R[$.

En virtud de la Proposición 2.24, para demostrar que $S_{\{S<R\}}$ es predecible basta probar que $\{S < R\} \in \mathfrak{F}_{S^-}$. Pero $\{S < R\} = \{S \geq R\}^C$ y $\{S \geq R\} \in \mathfrak{F}_{S^-}$ por la Proposición 2.20.

2. Si $C = \cup_{j=1}^{n}[S_j, R_j[$ donde S_j, R_j son tiempos de paro predecibles, entonces $D_C = \min_{j\leq n} D_{[S_j,R_j[}$. En consecuencia D_C es predecible ya que el mínimo de un número finito de tiempos de paro predecibles (Proposición 2.21), y claramente $[D_C] \subset C$.

Consideremos a la familia $\mathcal{G}_\delta$. Vamos a demostrar que si $C \in \mathcal{G}_\delta$, entonces D_C es tiempo de paro predecible y $[D_C] \subset C$.

Sea $C = \cap_{n=1}^{\infty} C_n$, donde $C_n \in \mathcal{G}$ para toda n, y podemos suponer adicionalmente que $C_n \supset C_{n+1}$ para toda n. Esto implica que $D_{C_n} \leq D_{C_{n+1}}$ y $D_C = \lim D_{C_n}$ entonces, por la Proposición 2.21, D_C es predecible. Además $[D_C] \subset C$, pues C_n tiene secciones cerradas por la derecha, para toda n, entonces $C = \cap_{n=1}^{\infty} C_n$ también las tiene.

Con todo lo anterior, para aplicar el resultado (*) de la teoría de la medida hay que definir una medida sobre $\mathcal{P}$ (el candidato obvio sería $P(\Pi(\cdot))$ pero esto, en general, no es aditivo). Por el teorema general de sección, tenemos que existe una variable aleatoria U tal que $[U] \subset A$ y

$$P(\Pi[U]) + \epsilon \geq P(\Pi(A)). \tag{4.2}$$

Definimos

$$\mu(B) = P(\Pi(B \cap [U])) = P(U < \infty, (U(\omega), \omega) \in B),$$

la cual es una medida finita sobre $\mathcal{P}$. Aplicando (*) se tiene: existe $C \in \mathcal{G}_\delta$ tal que $C \subset A$ y $\mu(C) + \epsilon \geq \mu(A)$. Esto, junto con (4.2) nos da

$$P(\Pi(C \cap [U])) + \epsilon \geq P(\Pi(A \cap [U])) = P(\Pi[U]) \geq P(\Pi(A)) - \epsilon.$$

En consecuencia,

$$P(D_C < \infty) = P(\Pi[D_C]) \geq P(\Pi(C \cap [U])) \geq P(\Pi(A)) - 2\epsilon.$$

Por lo que D_C es el tiempo de paro que buscábamos. □

4.13 Observaciones. (a) Usando $\mathcal{O} = \sigma([S, T[,\ S, T$ tiempos de paro) y definiendo $\mathcal{G}$ como la clase de todas las uniones finitas de intervalos estocásticos $[S, T[$, se podría demostrar de la misma manera, el *Teorema de Sección Opcional*: si $A \in \mathcal{O}$, entonces para toda $\epsilon > 0$ existe T tiempo de paro, tal que $[T] \subset A$ y

$$P(T < \infty) + \epsilon \geq P(\Pi(A)).$$

(b) Otro teorema de sección: se puede definir la σ-álgebra accesible como $\sigma([S, T[$, donde S, T son tiempos de paro accesibles) y se podría demostrar el *Teorema de Sección Accesible*: si A es un conjunto accesible, entonces para toda $\epsilon > 0$ existe T tiempo de paro accesible tal que: $[T] \subset A$ y

$$P(T < \infty) + \epsilon \geq P(\Pi(A)).$$

Veamos ahora algunas consecuencias del teorema de sección. Primero aclararemos por completo la relación entre las dos nociones de predecibilidad.

4.14 Teorema. *Sea* $T: \Omega \to \mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$.
(a) *T es un tiempo de paro predecible si y sólo si su gráfica es predecible.*
(b) *T es un tiempo de paro si y sólo si su gráfica es opcional.*

Demostración. (a) Supongamos que T es un tiempo de paro predecible, entonces $T + 1/n$ es un tiempo de paro predecible y $[T] = \cap_n [T, T + 1/n[\in \mathcal{P}$ pues $[T, T + 1/n[\in \mathcal{P}$ para toda n. Por lo tanto $[T] \in \mathcal{P}$.

Recíprocamente, supongamos que la gráfica de T es predecible, entonces por el teorema de sección predecible, existe $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sucesión de tiempos de paro predecibles, tales que

$$[T_n] \subset [T] \quad \text{y} \quad P(T_n < \infty) + \frac{1}{n} \geq P(T < \infty). \tag{4.3}$$

para cada n. Reemplazando T_n por $T_n' = T_1 \wedge T_2 \wedge \ldots \wedge T_n$ podemos suponer adicionalmente que $(T_n)_n$ decrece.

Sea $S = \lim_{n \to \infty} T_n$. Vamos a mostrar que S es predecible y que $S = T$ c.s. En efecto, como $[T_n] \subset [T]$ y $T_n \geq T_{n+1}$ entonces para cada $\omega \in \Omega$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $T_n(\omega) = T_{n_0}(\omega)$ para toda $n \geq n_0$. Aplicando el Lema 2.22 obtenemos que S es predecible.

Para probar que $S = T$ c.s. observemos primero que $[S] \subset [T]$ y por lo tanto

$$P(S < \infty) = P(\Pi[S]) \leq P(\Pi[T]) = P(T < \infty).$$

Por otro lado, $T_n \downarrow S$ implica $\{T_n < \infty\} \uparrow \{S < \infty\}$. Entonces por (4.3) obtenemos

$$P(T < \infty) \leq P(S < \infty).$$

Hemos mostrado que $P(T < \infty) = P(S < \infty)$.

Por último, $[S] \subset [T]$ implica $\{S \neq T\} = \{T < \infty \text{ y } S = \infty\} = \{T < \infty\} - \{S < \infty\}$, es decir $P(S \neq T) = 0$, porque $\{S < \infty\} \subset \{T < \infty\}$. En consecuencia T también es predecible (ver Observación 2.16).

(b) La demostración es idéntica, sólo que está basada en el teorema de sección opcional. □

4.15 Corolario. *Sea $A \in \mathcal{P}$, tal que $[D_A] \subset A$ entonces D_A es un tiempo de paro predecible.*

Demostración. Por el teorema anterior basta demostrar que $[D_A] \in \mathcal{P}$. La suposición $[D_A] \subset A$ implica $[D_A] = A -]D_A, \infty[$.

Sabemos por el Teorema 4.9 que D_A es un tiempo de paro, lo que implica $]D_A, n] \in \mathcal{P}$ y por lo tanto $\cup_{n=1}^{\infty}]D_A, n] =]D_A, \infty[\in \mathcal{P}$. En consecuencia $[D_A] \in \mathcal{P}$. □

El teorema de sección (predecible) sucede ser bastante útil en demostraciones de unicidad. He aquí algunos resultados de este tipo.

4.16 Teorema. *Sean $X = (X_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ y $Y = (Y_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ procesos predecibles, tales que para cada T tiempo de paro predecible y acotado*

$$X_T = Y_T \quad \text{c.s.}$$

Entonces X y Y son indistinguibles.

Demostración. Es obvio, que bajo estas hipótesis, uno es modificación del otro, pero, el resultado es más fuerte.

Definimos

$$A = \{(t, \omega) : X_t(\omega) \neq Y_t(\omega)\} \in \mathcal{P}.$$

Vamos a demostrar que A es evanescente. Supongamos que A no es evanescente, en otras palabras, $P(\Pi(A)) > 0$. Entonces, por el teorema de sección predecible existe un tiempo de paro predecible T tal que

$$[T] \subset A \quad \text{y} \quad P(T < \infty) > 0.$$

De la definición de A se sigue que $X_T \neq Y_T$ para todo $\omega \in \{T < \infty\}$. Entonces

$$P(T < \infty) = P(X_T \neq Y_T, \quad T < \infty) > 0.$$

Pero, $\{X_T \neq Y_T, \ T < \infty\} = \cup_{n=1}^{\infty} \{X_T \neq Y_T, \ T \leq n\}$, y por lo tanto, existe n tal que

$$P(X_T \neq Y_T, \ T \leq n) > 0.$$

Finalmente, observemos que

$$0 < P(X_T \neq Y_T,\ T \leq n) \leq P(X_{T\wedge n} \neq Y_{T\wedge n})$$

lo que contradice nuestra suposición, ya que $T \wedge n$ es tiempo de paro predecible y acotado. □

4.17 Observación. Un argumento análogo nos permite afirmar que si X, Y son procesos predecibles, tales que para cada T tiempo de paro predecible y acotado $X_T \leq Y_T$ c.s., entonces el conjunto $\{(t,\omega) : X_t(\omega) > Y_t(\omega)\}$ es evanescente (o sea $X \leq Y$ módulo indistinguibilidad).

4.18 Proposición. *Sean X y Y procesos predecibles tales que para todo T tiempo de paro predecible*

$$E(X_T \mathbf{1}_{[T<\infty]}) = E(Y_T \mathbf{1}_{[T<\infty]}),$$

entonces X y Y son indistinguibles.

Demostración. Si $\{X \neq Y\}$ no es evanescente, entonces uno de los conjuntos $\{X > Y\}$ o $\{X < Y\}$ no es evanescente.

Supongamos que $\{X > Y\}$ no es evanescente, entonces existe T tiempo de paro predecible tal que $[T] \subset \{X > Y\}$ y $[T]$ no es evanescente. Por lo tanto,

$$X_T(\omega) > Y_T(\omega) \quad \text{sobre} \quad \{T < \infty\}$$

y

$$E(X_T \mathbf{1}_{[T<\infty]}) > E(Y_T \mathbf{1}_{[T<\infty]}),$$

lo que es una contradicción. □

Observación. Esta proposición vale si "para todo T tiempo de paro predecible" se reemplaza por "para todo T tiempo de paro predecible y acotado sobre su parte finita".

En efecto, el tiempo de paro T, que aparece en la demostración, se puede reemplazar por $T_n = T_{\{T \leq n\}}$: T_n es predecible por 2.24 y 2.11(c) y $[T] = \cup_n [T_n]$, por lo tanto $P(T_n < \infty) > 0$ para n suficientemente grande.

Nos ocuparemos ahora del análisis de los saltos de los procesos adaptados y cadlag.

4.19 Definición. Sea $X = (X_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ un proceso adaptado cadlag. Decimos que una sucesión $(T_n)_n$ de tiempos de paro *agota los saltos* de X si:

(i) $[T_n] \cap [T_m] = \emptyset$ si $n \neq m$.

(ii) $\{(t,\omega) : \Delta X_t(\omega) \neq 0\} = \cup_n [T_n]$, donde $\Delta X_t = X_t - X_{t-}$.

El siguiente resultado justifica la terminología de la definición anterior.

4.20 Proposición. *Sea X un proceso adaptado cadlag. Supongamos que $(T_n)_n$ agota los saltos de X, entonces las siguientes condiciones se satisfacen:*

(i) $\Delta X_{T_n} \neq 0$ *sobre* $\{T_n < \infty\}$ *para cada* n.

(ii) $[T_n]\bigcap[T_m] = \emptyset$ *si* $n \neq m$.

(iii) *Si S es un tiempo de paro tal que* $[S]\bigcap \bigcup\limits_{n=1}^{\infty}[T_n] = \emptyset$, *entonces* $\Delta X_S = 0$ *sobre* $\{S < \infty\}$.

Recíprocamente si (i), (ii) *y* (iii) *se cumplen para alguna sucesión de tiempos de paro* $(T_n)_n$ *entonces* $\{\Delta X \neq 0\} = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty}[T_n]$ *(mod. evanescentes).*

La demostración se deja al lector.

El siguiente teorema garantiza la existencia de sucesiones de tiempos de paro que agotan los saltos de procesos adaptados cadlag.

4.21 Teorema. *Sea $X = (X_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ un proceso adaptado cadlag, entonces existe una sucesión de tiempos de paro que agotan los saltos de X. Si X es predecible entonces los tiempos de paro pueden tomarse predecibles.*

Demostración. Definimos

$$A_0 = \{(t,\omega) : 1 \leq |\Delta X_t(\omega)| < \infty\}$$

y para $n \geq 1$

$$A_n = \{(t,\omega) : 1/(n+1) \leq |\Delta X_t(\omega)| < 1/n\};$$

obviamente $\{\Delta X_t \neq 0\} = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ (disjunta) y $A_n \in \mathcal{O}$, para cada n, pues ΔX es opcional como la diferencia de un proceso adaptado cadlag y un proceso adaptado caglad. Además para cada $\omega \in \Omega$, A_n^ω es a lo más numerable sin puntos de acumulación, pues $t \mapsto X_t(\omega)$ es una función cadlag.

Definimos inductivamente tiempos de paro como sigue:

$$T_n^1 = D_{A_n} \quad \text{y} \quad T_n^{m+1} = D_{A_n - \bigcup\limits_{j=1}^{m}[T_n^j]}, \quad m \geq 1.$$

Observemos que $T_n^1 < T_n^2 < \cdots$ Así pues, también tenemos:

$$T_n^{m+1}(\omega) = \inf\{t > T_n^m(\omega) : (t,\omega) \in A_n\}.$$

Es decir T_n^m es "el emésimo salto de X con magnitud en $[1/(n+1), 1/n[$".

Es claro que cada T_n^m es un tiempo de paro, por ser el comienzo de un conjunto opcional. Ordenamos los tiempos de paro (T_n^m) en forma de sucesión. Claramente, por construcción, poseen gráficas ajenas y agotan los saltos de X.

Si X es predecible cadlag, entonces ΔX también es predecible, en consecuencia $A_n \in \mathcal{P}$ para toda n. Para terminar basta probar que cada T_n^m es un tiempo de paro predecible.

Sea $n \in \mathbb{N}$ fija, claramente $T_n^1 = D_{A_n}$ es predecible por el Corolario 4.15, pues $[D_{A_n}] \subset A_n$, en virtud de que A_n posee secciones discretas.

Supongamos inductivamente que T_n^j es predecible para $1 \leq j \leq m-1$; entonces

$$A_n - \bigcup_{j=1}^{m-1} [T_n^j] \in \mathcal{P},$$

en consecuencia T_n^m es predecible, pues $[T_n^m] \subset A_n - \cup_{j=1}^{m-1}[T_n^j]$ por el mismo argumento empleado antes, lo cual termina la prueba. □

La construcción que aparece en la demostración anterior motiva la siguiente definición.

4.22 Definición. Sea $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}_+) \otimes \mathfrak{F}$ fijo. Para cada $n \in \mathbb{N}$ defininimos el *enésimo comienzo* de A, denotado D_A^n, como la variable aleatoria:

$$D_A^n(\omega) = \inf\{t \in \mathbb{R}_+ : [0,t] \cap A^\omega \text{ contiene al menos } n \text{ puntos}\}.$$

El hecho de que D_A^n es variable aleatoria se comprueba fácilmente observando que $D_A^1 = D_A$ y $D_A^{n+1} = D_{A\cap]D_A^n,\infty[}$ (Inducción).

Además si A es progresivamente medible entonces D_A^n es un tiempo de paro para cada n. Nuevamente ésto se prueba por inducción de la siguiente manera: Como A es progresivamente medible $D_A^1 = D_A$ es un tiempo de paro. Supongamos que vale para n, entonces $]D_A^n, \infty[$ es progresivamente medible lo que implica que $D_A^{n+1} = D_{A\cap]D_A^n,\infty[}$ es tiempo de paro, por ser el comienzo del conjunto progresivamente medible $A \bigcap]D_A^n, \infty[$.

La siguiente proposición de carácter técnico será de utilidad más adelante.

4.23 Proposición. *Sea $A = \cup_{n=1}^\infty [T_n]$ con $(T_n)_n$ una sucesión dada de tiempos de paro. Entonces existen dos sucesiones de tiempos de paro $(U_n)_n$ y $(V_m)_m$ todos con las gráficas ajenas tales que:*

(i) *U_n es un tiempo de paro predecible para cada n.*

(ii) *V_m es un tiempo de paro totalmente inaccesible para cada m.*

(iii) $A \subset \left(\bigcup_n [U_n]\right) \cup \left(\bigcup_m [V_m]\right)$.

Demostración. Por el teorema de representación 2.31, para cada $n \in \mathbb{N}$, existe un tiempo de paro accesible S_n y un tiempo de paro totalmente inaccesible R_n, con gráficas ajenas tales que $[T_n] = [S_n] \bigcup [R_n]$.

Por definición existe una sucesión $(U_{n,m})_m$ de tiempos de paro predecibles tales que $[S_n] \subset \cup_m [U_{n,m}]$; dicha unión no es necesariamente ajena. Ordenamos las sucesiones $(U_{n,m})_m$, $n \in \mathbb{N}$, en forma de una sola sucesión que denotamos $(U_n')_n$; entonces hemos obtenido $\cup_n [T_n] \subset \cup_n [U_n'] \cup \cup_n [R_n]$.

Procedemos a "ajenizar" las gráficas como sigue: sea $U_1'' = U_1'$ y para $n \geq 1$, $([U_n'] - \cup_{j<n} [U_j']) \in \mathcal{P}$ es la gráfica de un tiempo de paro U_n'' el cual es predecible por el Teorema 4.14. La sucesión $(U_n'')_n$ tiene, ahora sí, las gráficas ajenas y $\cup_n [U_n''] = \cup_n [U_n']$.

Ahora ponemos $V_1' = R_1$ y definimos, para $n > 1$,

$$V_n'(\omega) = \begin{cases} R_n(\omega), & \text{si } R_n(\omega) < \infty \text{ y } R_n(\omega) \neq R_j(\omega) \text{ para } 1 \leq j < n \\ +\infty, & \text{en otro caso .} \end{cases}$$

Es claro que $[V_n'] = [R_n] - \cup_{j<n} [R_j]$ y que para cada n, V_n' es tiempo de paro, pues

$$\{V_n' \leq t\} = \{R_n \leq t\} \cap \bigcap_{j<n} \{R_n \neq R_j\} \quad \text{y} \quad \{R_n \neq R_j\} \in \mathfrak{F}_{R_n}.$$

Como $[V_n'] \subset [R_n]$, los tiempos de paro V_n' son también totalmente inaccesibles.

Observemos que $[U_n''] \cap [V_m']$ no es necesariamente vacío pero sí evanescente lo que implica que $[U_n''] - \cup_m([U_n''] \cap [V_m']) \in \mathcal{P}$ es la gráfica de un tiempo de paro predecible igual a U_n'' c.s.

Análogamente $[V_m'] - \cup_n([U_n'] \cap [V_m'])$ es la gráfica de un tiempo de paro totalmente inaccesible.

Finalmente $[U_n''] \cap [V_m']$ es la gráfica del tiempo de paro $N_{n,m} = \infty$ c.s. que es predecible y totalmente inaccesible, así pues, puede incluirse en cualquiera de las dos listas. Ordenamos los tiempos de paro mencionados en este último parrafo y obtenemos la descomposición buscada. □

4.24 Corolario. *Sea $X = (X_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ un proceso cadlag adaptado, entonces existe una sucesión de tiempos de paro $(T_n)_n$ con las gráficas ajenas y cada T_n predecible o totalmente inaccesible tal que $\{\Delta X \neq 0\} \subset \bigcup_n [T_n]$.*

Demostración. Es una consecuencia inmediata de los últimos dos resultados. □

4.25 Corolario. *Sea $X = (X_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ un proceso cadlag predecible, entonces para todo tiempo de paro totalmente inaccesible T, $\Delta X_T = 0$ c.s. sobre $\{T < \infty\}$.*

Demostración. Sea $(T_n)_n$ una sucesión de tiempos de paro predecibles que agotan los saltos de X; si T es un tiempo de paro totalmente inaccesible, entonces $[T] \cap \cup_{n=1}^{\infty}[T_n]$ es evanescente y por lo tanto

$$P(\Pi([T] \cap \{\Delta X \neq 0\}) = P(\{T < \infty\} \cap \{\Delta X_T \neq 0\}) = 0.$$

En consecuencia $\Delta X_T = 0$ c.s. sobre $\{T < \infty\}$. □

Como una aplicación de los resultados anteriores, en la última parte de este capítulo daremos una caracterización de los procesos cadlag predecibles.

Para esto necesitamos el siguiente teorema, conocido como el lema de las clases monótonas (L.C.M.).

4.26 Teorema (L.C.M.). *Sea Ω un conjunto no vacío y $\mathcal{A}$ un π-sistema de subconjuntos de Ω. Sea $\mathcal{H}$ una clase lineal de funciones reales definidas en Ω tal que:*
(i) *$1 \in \mathcal{H}$.*
(ii) *$\mathbf{1}_A \in \mathcal{H}$, para cada $A \in \mathcal{A}$.*
(iii) *Si $(\zeta_n)_n$ es una sucesión no decreciente de elementos de $\mathcal{H}$ con $\zeta_n \geq 0$ para cada n y $\zeta_n \uparrow \zeta$, entonces $\zeta \in \mathcal{H}$.*
Entonces $\mathcal{H}$ contiene a todas las funciones $\sigma(\mathcal{A})$-medibles.

Otra versión. *Si las funciones en $\mathcal{H}$ son acotadas y reemplazamos la condición* (iii) *por:*
(iii′) *$\zeta_n \in \mathcal{H}$, $\zeta_n \geq 0$ $(n \in \mathbb{N})$, $\zeta_n \uparrow \zeta$ y ζ es acotada entonces $\zeta \in \mathcal{H}$. Entonces $\mathcal{H}$ contiene a todas las funciones $\sigma(\mathcal{A})$-medibles y acotadas.*

Para la demostración de este teorema ver Apéndice A.

4.27 Lema. *Sea $X = (X_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ un proceso predecible, entonces $\mathbf{1}_{\{T<\infty\}} X_T$ es $\mathfrak{F}_{T-}$-medible, para todo tiempo de paro T* (compare con la Proposición 3.7).

Demostración. Sea

$$\mathcal{A} = \{[0_F] : F \in \mathfrak{F}_0\} \cup \{]U, V] : U, V \text{ son tiempos de paro }\}.$$

Claramente $\mathcal{A}$ es un π-sistema tal que $\sigma(\mathcal{A}) = \mathcal{P}$ (Teorema 3.12). Sea $\mathcal{H}$ la clase de procesos Y tales que $\mathbf{1}_{\{T<\infty\}} Y_T$ es $\mathfrak{F}_{T-}$-medible para todo tiempo de paro T.

$\mathcal{H}$ es una clase lineal y $1 \in \mathcal{H}$ pues $\{T < \infty\} = \Omega - \{T = \infty\}$ pertenece a $\mathfrak{F}_{T-}$; además si $(Y_n)_n$ es una sucesión en $\mathcal{H}$ y $Y_n \uparrow Y$, entonces $Y \in \mathcal{H}$. En virtud del L.C.M. 4.26 basta probar que $\mathbf{1}_A \in \mathcal{H}$, para cada $A \in \mathcal{A}$.

Si $A = [0_F]$, $F \in \mathfrak{F}_0$, entonces como $(\mathbf{1}_A)_T = \mathbf{1}_{\{T=0\}\cap F}$ tenemos que:

$$\mathbf{1}_{\{T<\infty\}}(\mathbf{1}_A)_T = \mathbf{1}_{\{T=0\}\cap F}$$

que es $\mathfrak{F}_{T-}$-medible porque $\mathfrak{F}_0 \subset \mathfrak{F}_{T-}$.

Si $A =]U, V]$, entonces $\mathbf{1}_{\{T<\infty\}}(\mathbf{1}_A)_T = \mathbf{1}_{\{T<\infty\}}(\mathbf{1}_{\{U<T\}} - \mathbf{1}_{\{V<T\}})$ que es $\mathfrak{F}_{T-}$-medible, por lo tanto $\mathcal{H}$ contiene a los procesos $\sigma(\mathcal{A}) = \mathcal{P}$-medibles. □

4.28 Lema. *Sea T un tiempo de paro predecible y ζ una variable aleatoria $\mathfrak{F}_{T-}$-medible, entonces el proceso $\zeta\mathbf{1}_{[T,\infty[}$ es predecible.*

Demostración. Si $\zeta = \mathbf{1}_A$ donde $A \in \mathfrak{F}_{T-}$, entonces $\zeta\mathbf{1}_{[T,\infty[} = \mathbf{1}_{[T_A,\infty[}$ es predecible porque T_A es un tiempo de paro predecible (ver 2.24).

Luego aplicamos el razonamiento estándar (consideramos sucesivamente ζ simple, no negativa, arbitraria). □

Estamos en posición de enunciar y probar la caracterización prometida.

4.29 Teorema. *Sea $X = (X_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ un proceso cadlag. Entonces X es predecible si y sólo si*

(i) *$\Delta X_T = 0$ c.s. en $\{T < \infty\}$ para cada T tiempo de paro totalmente inaccesible, y*

(ii) *X_T es $\mathfrak{F}_{T-}$-medible sobre $\{T < \infty\}$ para cada T tiempo de paro predecible.*

Demostración. $\Rightarrow$: (i) es el contenido del Corolario 4.25.

(ii) se sigue del Lema 4.27; observemos que dicho lema es más general.

$\Leftarrow$: (ii) implica que X es adaptado, si tomamos tiempos de paro deterministas.

Como X es cadlag adaptado existe por el Corolario 4.24 una sucesión de tiempos de paro $(T_n)_n$ con cada T_n predecible o totalmente inaccesible y tal que $\{\Delta X \neq 0\} \subset \bigcup_n [T_n]$ (unión disjunta). Si algún T_n es totalmente inaccesible, entonces

$$0 = P(\{T_n < \infty\} \cap \{\Delta X_{T_n} \neq 0\}) = P(\Pi([T_n] \cap \{\Delta X \neq 0\})),$$

por (i), es decir $[T_n] \bigcap \{\Delta X \neq 0\}$ es evanescente.

Sea $T_n' = (T_n)_A$ con $A = \{T_n < \infty\} \bigcap \{\Delta X_{T_n} \neq 0\}$ entonces $T_n' = +\infty$ c.s., por lo tanto T_n' es predecible y $\{\Delta X \neq 0\} \cap [T_n] = [T_n']$, luego entonces si reemplazamos T_n por T_n' podemos suponer que todo tiempo de paro en la sucesión es predecible.

Como las gráficas permanecen ajenas, podemos escribir:

$$X_t = X_{t-} + \sum_n \Delta X_{T_n} \cdot \mathbf{1}_{[T_n]}(t).$$

$(X_{t-})_{t\in\mathbb{R}_+}$ es predecible pues es adaptado cag, cada $\mathbf{1}_{[T_n]}$ es predecible, pues $[T_n] \in \mathcal{P}$. Por (ii) $X_{T_n}\mathbf{1}_{\{T_n<\infty\}}$ es $\mathfrak{F}_{T_n-}$-medible lo que implica $\Delta X_{T_n}\mathbf{1}_{\{T_n<\infty\}}$ es $\mathfrak{F}_{T_n-}$-medible (observe que $\{T_n < \infty\} \in \mathfrak{F}_{T_n-}$).

En efecto, sea $(S_{n,m})_m$ una sucesión de tiempos de paro que predicen a T_n, entonces:

$$X_{T_n-} = \lim_{m\to\infty} X_{S_{n,m}}$$

el cual es $\sigma(\bigcup_m \mathfrak{F}_{S_{n,m}}) = \mathfrak{F}_{T_n-}$-medible. Pero

$$\Delta X_{T_n}\mathbf{1}_{[T_n]} = \Delta X_{T_n}\mathbf{1}_{[T_n,\infty[}\mathbf{1}_{[T_n]} = (\Delta X_{T_n}\mathbf{1}_{\{T_n<\infty\}})\mathbf{1}_{[T_n,\infty[}\mathbf{1}_{[T_n]}$$

que es un proceso predecible por el Lema 4.27. En consecuencia $X = (X_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ es predecible como la suma, posiblemente infinita, de procesos predecibles. □

Como una aplicación de este teorema demostraremos una propiedad interesante de las martingalas. Vamos a necesitar un lema sencillo.

4.30 Lema. *Sea ξ una variable aleatoria integrable. Denotemos por $M = (M_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ a la versión cadlag de la martingala $(E(\xi|\mathfrak{F}_t))_{t\in\mathbb{R}_+}$. Entonces para todo tiempo de paro predecible T se tiene $M_{T-} = E(\xi|\mathfrak{F}_{T-})$.*

Demostración. Sea (T_n) una sucesión de tiempos de paro que predicen a T. Por el teorema clásico de convergencia de martingalas, se tiene que $M_{T_n} = E(\xi|\mathfrak{F}_{T_n}) \to E(\xi|\mathfrak{F}_{T-})$ c.s. y en L^1 (ver Apéndice D, Teorema D.10; recordemos que $\mathfrak{F}_{T-} = \sigma(\cup_n \mathfrak{F}_{T_n})$ por 2.14(c)).

Por otro lado, $\lim_{n\to\infty} M_{T_n}(\omega) = M_{T-}(\omega)$, así pues: $M_{T-} = E(\xi|\mathfrak{F}_{T-})$. □

4.31 Proposición. *Sea M una martingala predecible (versión cadlag) entonces M es continua (módulo indistinguibilidad).*

Demostración. Probaremos que el proceso predecible $\Delta M = M - M_-$ es indistinguible del proceso 0. Por el Teorema 4.16 basta probar que para todo tiempo de paro acotado predecible T, se tiene que $\Delta M_T = M_T - M_{T-}$ es igual a 0 c.s. Pero $M_T - M_{T-}$ es $\mathfrak{F}_{T-}$-medible (por el Teorema 4.29), así pues basta probar que $E((M_T - M_{T-})\mathbf{1}_A) = 0$ para todo $A \in \mathfrak{F}_{T-}$.

Primero notemos que M_T y M_{T-} son integrables por ser T acotado. Sea, por ejemplo, $T \leq \alpha$. El Lema 4.30 (con $\xi = M_\alpha$) implica que $M_{T-} = E(M_\alpha|\mathfrak{F}_{T-})$, entonces:

$$\begin{aligned} E(M_T\mathbf{1}_A) &= E(E(M_\alpha|\mathfrak{F}_T)\mathbf{1}_A) = E(E(E(M_\alpha|\mathfrak{F}_T)\mathbf{1}_A|\mathfrak{F}_{T-})) \\ &= E(E(M_\alpha|\mathfrak{F}_{T-})\mathbf{1}_A) = E(M_{T-}\mathbf{1}_A), \end{aligned}$$

lo cual prueba la proposición. □

Capítulo 5

Cuasimartingalas

En este capítulo investigaremos una clase de procesos, llamados cuasimartingalas, que contiene a martingalas, supermartingalas y submartingalas. A cada cuasimartingala le corresponde una medida finitamente aditiva sobre el anillo de los conjuntos predecibles de una forma especial. El resultado más importante de este capítulo es el Teorema 5.23, el cual nos dice cuándo podemos extender esta medida a una medida σ-aditiva. Esta medida extendida se llama medida de Doléans y jugará un papel fundamental en los capítulos posteriores.

Como siempre suponemos la Hipótesis 2.15 pero esta vez, además de nuestro conjunto de los tiempos $\mathbb{R}_+$ fijemos un conjunto

$$I \subset \mathbb{R}_+ \cup \{\infty\} \quad \text{tal que} \quad \inf I \subset I.$$

Claramente, en particular puede ser $I = \mathbb{R}_+$. Vamos a considerar procesos $(X_t)_{t \in I}$ con el conjunto de tiempos I.

Tomando en cuenta que la noción de cuasimartingala no es tan conocida como la de martingala, vamos a investigarla un poco más detalladamente y por eso queremos incluir también el caso del tiempo discreto y además los casos $I = \overline{\mathbb{R}}_+ (= \mathbb{R}_+ \cup \infty)$ y $I = [0, \alpha]$.

Tiene sentido decir que el proceso $(X_t)_{t \in I}$ es adaptado si convenimos, como siempre, que $\mathfrak{F}_\infty = \sigma(\cup_{t \in \mathbb{R}_+} \mathfrak{F}_t)$.

5.1 Definición. (a) Un subconjunto de $\overline{\mathbb{R}}_+ \times \Omega$ se llama *rectángulo predecible* si tiene la forma

$$]s, t] \times F, \quad \text{donde } s, t \in I,\ F \in \mathfrak{F}_s$$

o bien $[0, \inf I] \times F$, $F \in \mathfrak{F}_0$.
A la clase de todos los rectángulos predecibles la vamos a denotar por $\mathcal{R}_I$.

(b) Por $\mathcal{A}_I$ denotamos el anillo generado por $\mathcal{R}_I$.

5.2 Observación. (a) Cada elemento de $\mathcal{A}_I$ se puede expresar como la unión finita y ajena de elementos de $\mathcal{R}_I$ porque la intersección de los elementos de $\mathcal{R}_I$ está en $\mathcal{R}_I$.

(b) Si $\sup I \notin I$ entonces $[0, \sup I[\times\Omega \notin \mathcal{A}_I$, por lo tanto tenemos un anillo y no un álgebra. Sin embargo, para cada $t \in I$ se tiene $[0,t] \times \Omega \in \mathcal{A}_I$, ya que

$$[0,t] \times \Omega = ([0, \inf I] \times \Omega) \cup (]\inf I, t] \times \Omega).$$

5.3 Definición. Sea $X = (X_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ un proceso integrable (es decir $E|X_t| < \infty$ para cada $t \in I$). La *medida de Föllmer* asociada a X es la medida finitamente aditiva λ_X, definida sobre $\mathcal{A}_I$, tal que

$$\begin{aligned}&\lambda_X(]s,t] \times F) = E((X_t - X_s)\mathbf{1}_F) \quad \text{si } s,t \in I,\ s < t,\ F \in \mathfrak{F}_s, \text{ y}\\ &\lambda_X([0, \inf I] \times F) = 0,\ F \in \mathfrak{F}_0.\end{aligned}$$

Por la observacion anterior es claro que λ_X está bien definida y de manera única sobre $\mathcal{A}_I$.

5.4 Definición. (a) Si $A \in \mathcal{A}_I$ se define la *variación* de λ_X en A como

$$|\lambda_X|(A) = \sup\{\sum_i |\lambda_X(A_i)|\}$$

donde el supremo se toma sobre todas las particiones finitas $\{A_i\}$ de A por elementos de $\mathcal{A}_I$ (ó de R_I).

(b) Se definen λ_X^+ y λ_X^- de modo natural: $A \in \mathcal{A}_I$,

$$\begin{aligned}\lambda_X^+(A) &= 1/2(|\lambda_X|(A) + \lambda_X(A)),\\ \lambda_X^-(A) &= 1/2(|\lambda_X|(A) - \lambda_X(A)).\end{aligned}$$

5.5 Observación. (a) $|\lambda_X|$ es finitamente aditiva: si $A, B \in \mathcal{A}_I$, $A \cap B = \emptyset$, se tiene:

$$\begin{aligned}&\sup(\sum_i |\lambda_X(A_i)|) + \sup(\sum_j |\lambda_X(B_j)|)\\ &= \sup(\sum_i |\lambda_X(A_i)| + \sum_j |\lambda_X(B_j)|),\end{aligned}$$

pues $\{A_i\}$, $\{B_j\}$ es una partición de $A \cup B$ y toda partición finita de $A \cup B$ se puede separar en una partición finita de A y otra de B.

medida de Föllmer

(b) λ_X^+, λ_X^- también se podrían definir como

$$\lambda_X^+(A) = \sup \sum_i [\lambda_X(A_i)]^+, \quad \lambda_X^-(A) = \sup \sum_i [\lambda_X(A_i)]^-,$$

el supremo tomado sobre las mismas particiones de 5.4(a).

5.6 Definición. Un proceso $(X_t)_{t\in I}$ adaptado e integrable se llama *cuasimartingala* si para cada $t \in I$, λ_X tiene variación finita sobre $[0,t] \times \Omega$.

5.7 Observación. Es inmediato ver que las martingalas, submartingalas y supermartingalas son casos particulares de las cuasimartingalas. Concretamente,

(a) $(X_t)_{t\in I}$ es martingala si y sólo si $\lambda_X \equiv 0$.

(b) $(X_t)_{t\in I}$ es submartingala si y sólo si $\lambda_X \geq 0$.

Pero la noción de cuasimartingala es más general. Como la suma de dos cuasimartingalas claramente también es cuasimartingala, entonces la suma de una supermartingala y una submartingala es cuasimartingala.

Otra ventaja importante de esta noción consiste en que esto se generaliza fácilmente a procesos multidimensionales, inclusive a procesos con valores en un espacio de Banach (ver [15] para los detalles). En cambio la noción de supermartingala (o submartingala) no tiene sentido en dimensiones mayores que uno.

5.8 Proposición. *Un proceso $(X_t)_{t\in I}$ integrable y adaptado es cuasimartingala si y sólo si para cada $t \in I$*

$$\sup E\left(\sum_{i=0}^{n-1} |E(X_{t_{i+1}} - X_{t_i} | \mathfrak{F}_{t_i})|\right) < \infty, \tag{5.1}$$

donde el supremo se toma sobre todas las particiones de la forma

$$\inf I = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = t, \text{ y } t_i \in I, \ i = 0, 1, \cdots, n.$$

Demostración. Supongamos que $(X_t)_{t\in I}$ es una cuasimartingala y sea $\inf I = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = t$ una partición. Llamemos $Y_i = E(X_{t_{i+1}} - X_{t_i} | \mathfrak{F}_{t_i})$. Es obvio que

$$|Y_i| = Y_i \cdot \mathbf{1}_{\{Y_i \geq 0\}} - Y_i \cdot \mathbf{1}_{\{Y_i < 0\}}$$

y que $\{Y_i \geq 0\}$, $\{Y_i < 0\} \in \mathfrak{F}_{t_i}$. De esto se deduce:

$$E\left(\sum_i |E(X_{t_{i+1}} - X_{t_i} | \mathfrak{F}_{t_i})|\right) = E\left(\sum_i (Y_i \mathbf{1}_{\{Y_i \geq 0\}} - Y_i \mathbf{1}_{\{Y_i < 0\}})\right)$$

$$
\begin{aligned}
&= E(\sum_i (E((X_{t_{i+1}} - X_{t_i})\mathbf{1}_{\{Y_i \geq 0\}}|\mathfrak{F}_{t_i}) - E((X_{t_{i+1}} - X_{t_i})\mathbf{1}_{\{Y_i < 0\}}|\mathfrak{F}_{t_i})))\\
&= \sum_i (E(X_{t_{i+1}} - X_{t_i})\mathbf{1}_{\{Y_i \geq 0\}} - E(X_{t_{i+1}} - X_{t_i})\mathbf{1}_{\{Y_i < 0\}})\\
&= \sum_i (\lambda_X(]t_i, t_{i+1}] \times \{Y_i \geq 0\}) - \lambda_X(]t_i, t_{i+1}] \times \{Y_i < 0\})\\
&\leq |\lambda_X|([0,t] \times \Omega)
\end{aligned}
$$

ya que

$$[0, \inf I] \times \Omega,\ \left\{]t_i, t_{i+1}] \times \{Y_i \geq 0\}\right\}_{i=0}^{n-1},\ \left\{]t_i, t_{i+1}] \times \{Y_i < 0\}\right\}_{i=0}^{n-1}$$

es una partición finita de $[0,t] \times \Omega$ cuyos elementos están en $\mathcal{R}_I$ y $\lambda_X([0, \inf I] \times \Omega) = 0$. Como por hipótesis $|\lambda_X|([0,t] \times \Omega) < \infty$ concluimos que (5.1) se cumple, para cada $t \in I$.

Recíprocamente, fijemos t y consideremos una partición finita de $]t_0, t] \times \Omega$ compuesta por rectángulos predecibles $\{A_i\}_{i=1}^n$, $A_i \in \mathcal{R}_I$, $i = 1, \ldots, n$. Pasando a una partición más fina (lo cual sólo agranda a la suma $\sum |\lambda_X(A_i)|$) podemos suponer que la partición tiene la forma:

$$A_j^i =]t_i, t_{i+1}] \times B_j^i,\ j = 1, 2, \ldots, m_i,\ i = 0, 1, \ldots, n-1,$$

donde $\inf I = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = t$ y para cada $i \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$ fijo, $\{B_1^i, B_2^i, \ldots B_{m_i}^i\}$ es una partición de Ω tal que $B_j^i \in \mathfrak{F}_{t_i}$, $j = 1, 2, \ldots, m_n$. Para esta partición se tiene:

$$
\begin{aligned}
\sum_{i,j} |\lambda_X(A_j^i)| &= \sum_i \sum_j |E((X_{t_{i+1}} - X_{t_i})\mathbf{1}_{B_j^i})|\\
&= \sum_i \sum_j |E(E((X_{t_{i+1}} - X_{t_i})\mathbf{1}_{B_j^i}|\mathfrak{F}_{t_i}))|\\
&\leq \sum_i \sum_j E(|\mathbf{1}_{B_j^i} E((X_{t_{i+1}} - X_{t_i})|\mathfrak{F}_{t_i})|)\\
&= E(\sum_i \sum_j \mathbf{1}_{B_j^i} |E((X_{t_{i+1}} - X_{t_i})|\mathfrak{F}_{t_i})|\\
&= E(\sum_i |E((X_{t_{i+1}} - X_{t_i})|\mathfrak{F}_{t_i})|)
\end{aligned}
$$

puesto que $\sum_i \mathbf{1}_{B_j^i} = 1$.

Esta desigualdad y la hipótesis (5.1) muestran que $(X_t)_{t \in I}$ es una cuasimartingala. □

5.9 Corolario. *Si $(X_t)_{t \in I}$ es cuasimartingala entonces $(|X_t|)_{t \in I}$ también lo es.*

any quasimartingale is a difference of two supermartingales

Demostración. Tenemos

$$|X_{t_i}| - E(|X_{t_i}|\,|\mathfrak{F}_{t_i}) \leq |X_{t_i} - E(X_{t_i}|\mathfrak{F}_{t_i})|.$$

Ahora basta observar que si $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}_+$ y $a \leq b$, entonces $|a| \leq 2b - a$. Los detalles de la demostración se dejan al lector. □

5.10 Corolario. *Si $I = \mathbb{N}$ entonces todo proceso $(X_t)_{t\in I}$ adaptado e integrable es cuasimartingala.*

Demostración. En efecto, para cada $t \in I$ fija, el supremo en (5.1) es una suma finita de términos finitos. □

Ya hemos observado que la suma de una supermartingala y una submartingala (o, que es lo mismo, la diferencia de dos supermartingalas) es cuasimartingala.

Sucede que esto ya es la forma general de una cuasimartingala.

5.11 Teorema (descomposición de Rao). *Un proceso $X = (X_t)_{t\in I}$ es una cuasimartingala si y sólo si X es la diferencia de dos supermartingalas.*

Demostración. Ya sabemos que hay que demostrar solamente la necesidad, es decir construir las dos supermartingalas a partir de la cuasimartingala X. Esto se hará en varias etapas:

1. Primero supondremos que $t^* = (\sup\ I) \in I$ y que $X_{t^*} \equiv 0$.

Sea $t \in I$ y fijemos una partición τ del intervalo $[t, t^*]$:

$$\tau:\ t = t_0 < t_1 < \cdots < t_m = t^*,\ t_i \in I,\ i = 0, 1, \ldots, m.$$

$X = (X_t)_{t\in I}$ es adaptado e integrable por ser cuasimartingala.

$$\begin{aligned}
X_t = E(X_t|\mathfrak{F}_t) &= E(X_t - X_{t^*}|\mathfrak{F}_t) = E(\sum_{i=0}^{m-1}(X_{t_i} - X_{t_{i+1}})|\mathfrak{F}_t)\\
&= E(\sum_{i=0}^{m-1} E((X_{t_i} - X_{t_{i+1}})|\mathfrak{F}_{t_i})|\mathfrak{F}_t)\\
&= E(\sum_{i=0}^{m-1} E(X_{t_i} - X_{t_{i+1}}|\mathfrak{F}_{t_i})^+|\mathfrak{F}_t)\\
&\quad - E(\sum_{i=0}^{m-1} E(X_{t_i} - X_{t_{i+1}}|\mathfrak{F}_{t_i})^-|\mathfrak{F}_t) = Y_t^1(\tau) - Y_t^2(\tau),
\end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} Y_t^1(\tau) &= E(\sum_{i=0}^{m-1} E(X_{t_i} - X_{t_{i+1}}|\mathfrak{F}_{t_i})^+|\mathfrak{F}_t), \\ Y_t^2(\tau) &= E(\sum_{i=0}^{m-1} E(X_{t_i} - X_{t_{i+1}}|\mathfrak{F}_{t_i})^-|\mathfrak{F}_t). \end{aligned}$$

La clase de las particiones de $[t, t^*]$ es parcialmente ordenada con el orden natural (ser más fina que) y es filtrante creciente.

Vamos a demostrar que si $\tau < \sigma$ entonces $Y_t^1(\tau) \leq Y_t^1(\sigma)$ y $Y_t^2(\tau) \leq Y_t^2(\sigma)$ (estas desigualdades se cumplen c.s.).

Basta suponer que σ tiene la forma siguiente: σ se obtiene de τ añadiendo un punto,

$$\sigma: \; t = t_0 < \cdots < t_i < s < t_{i+1} < \cdots < t_m = t^*;$$

y basta demostar que

$$\begin{aligned} &E(E(X_{t_i} - X_{t_{i+1}}|\mathfrak{F}_{t_i})^+|\mathfrak{F}_t) \leq \\ &\quad E(E(X_{t_i} - X_s|\mathfrak{F}_{t_i})^+|\mathfrak{F}_t) + E(E(X_s - X_{t_{i+1}}|\mathfrak{F}_s)^+|\mathfrak{F}_t). \end{aligned} \tag{5.2}$$

Sea $\Delta = X_s - X_{t_{i+1}}$. Usando la desigualdad de Jensen tenemos:

$$\begin{aligned} &E((E(\Delta|\mathfrak{F}_s))^+|\mathfrak{F}_t) = E(E(E(\Delta|\mathfrak{F}_s)^+|\mathfrak{F}_{t_i})|\mathfrak{F}_t) \\ &\quad \geq E((E(E(\Delta|\mathfrak{F}_s)|\mathfrak{F}_{t_i})^+|\mathfrak{F}_t) = E((E(\Delta|\mathfrak{F}_{t_i}))^+|\mathfrak{F}_t) \\ &\quad = E((E((X_{t_i} - X_{t_{i+1}}) - (X_{t_i} - X_s))|\mathfrak{F}_{t_i})^+|\mathfrak{F}_t) \\ &\quad \geq E(((E(X_{t_i} - X_{t_{i+1}}|\mathfrak{F}_{t_i}))^+ - (E(X_{t_i} - X_s|\mathfrak{F}_{t_i}))^+)|\mathfrak{F}_t) \end{aligned}$$

(en la última desigualdad se usó que $(a-b)^+ \geq a^+ - b^+$ si $a, b \in \mathbb{R}$). Por lo tanto (5.2) se cumple.

Tenemos así que para cada sucesión creciente $(\tau_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de particiones del intervalo $[t, t^*]$:

(i) $(Y_t^1(\tau_n))_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión creciente de variables aleatorias.

(ii) $\sup_\tau E(Y_t^1(\tau)) \leq |\lambda_X|(]t, t^*] \times \Omega) < \infty$ (hipótesis, ver la demostración de la Proposición 5.8).

De (i) y (ii) se concluye que $(Y_t^1(\tau_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge c.s. y en L^1 a una variable aleatoria $Y \in L^1$ (que depende de $(\tau_n)_n$).

Como consecuencia de lo anterior podemos afirmar que $(Y_t^1(\tau))_\tau$ converge según el filtro de las particiones a una (única) v.a. Y_t^1 en L^1 (si esto no fuera cierto, existiría $\epsilon > 0$ y una sucesión creciente de particiones $(\sigma_n)_n$ de $[t_0, t^*]$ para la cual $\|Y_t^1(\sigma_n) - Y_t^1(\sigma_{n-1})\|_{L^1} \geq \epsilon$). Además $Y_t^1 = \operatorname{ess\,sup}_\tau Y_t^1(\tau)$.

Análogamente se muestra que $(Y_t^2(\tau))_\tau$ converge a una variable aleatoria Y_t^2 en L^1 y $Y_t^2 = \operatorname{ess\,sup}_\tau Y_t^2(\tau)$.

Ahora veremos que $X_t = Y_t^1 - Y_t^2$ y que $(Y_t^1)_{t\in I}$, $(Y_t^2)_{t\in I}$ son supermartingalas.

Denotemos por $\Gamma[t, t^*]$ el conjunto de las particiones del $[t, t^*]$ formadas con elementos de I. Para cada $\tau \in \Gamma[t, t^*]$ tenemos

$$X_t = Y_t^1(\tau) - Y_t^2(\tau), \quad t \in I.$$

Sean $(\tau_n^{'})_n$ una sucesión creciente en $\Gamma[t, t^*]$ tal que $\lim_{n\to\infty} Y_t^1(\tau_n^{'}) = Y_t^1$ c.s. y $(\tau_n^{''})_n$ otra sucesión creciente en $\Gamma[t, t^*]$ tal que $\lim_{n\to\infty} Y_t^2(\tau_n^{''}) = Y_t^2$ c.s.

Tomando $\tau_n = \tau_n^{'} \vee \tau_n^{''}$, tenemos

$$\lim_{n\to\infty} Y_t^1(\tau_n) = Y_t^1 \quad \text{y} \quad \lim_{n\to\infty} Y_t^2(\tau_n) = Y_t^2,$$

por lo tanto

$$X_t = \lim_{n\to\infty} (Y_t^1(\tau_n) - Y_t^2(\tau_n)) = Y_t^1 - Y_t^2.$$

Mostremos que $(Y_t^1)_{t\in I}$ es una supermartingala: sea $s < t$, $s, t \in I$. Si $\tau \in \Gamma[t, t^*]$ entonces $\tau \cup \{s\} \in \Gamma[s, t^*]$ y

$$E(Y_t^1(\tau)|\mathfrak{F}_s) \leq Y_s^1(\tau \cup \{s\}) \leq Y_s^1 \quad \text{c.s.}$$

Pasando al límite con $\tau \in \Gamma[t, t^*]$ y usando que la convergencia es en L^1 obtenemos que $E(Y_t^1|\mathfrak{F}_s) \leq Y_s^1$ c.s.

Lo mismo se hace para $(Y_t^2)_{t\in I}$.

Observemos que en este primer caso se obtuvieron dos supermartingalas positivas.

2. Supongamos ahora que $\sup I = t^* \in I$ pero X_{t^*} puede ser ahora no nula. $(X_t - E(X_{t^*}|\mathfrak{F}_t))_{t\in I}$ es un nuevo proceso que satisface las condiciones del primer caso. Por lo tanto existen $(Y_t^1)_{t\in I}$ y $(Y_t^2)_{t\in I}$ supermartingalas positivas tales que:

$$X_t - E(X_{t^*}|\mathfrak{F}_t) = Y_t^1 - Y_t^2, \quad \text{para cada } t \in I$$

de donde $X_t = E(X_{t^*}|\mathfrak{F}_t) + Y_t^1 - Y_t^2$. Ahora basta observar que $(E(X_{t^*}|\mathfrak{F}_t) + Y_t^1)_{t\in I}$ es una supermartingala pues $(E(X_{t^*}|\mathfrak{F}_t))_{t\in I}$ es martingala.

3. Finalmente supongamos que $\sup I = t^* \notin I$. Se toma una sucesión $(t_n)_n$ fija tal que $t_n \in I$, $n \in \mathbb{N}$, $t_0 = \inf I$ y $t_n \uparrow t^*$.

Si hubiera unicidad en la descomposición sería inmediato. Como no la hay tenemos que hacer lo siguiente: el proceso parado $X_t^n = X_{t\wedge t_n}$ es cuasimartingala sobre $I \cup \{t^*\}$ porque a partir de t_n es constante y en t^* la definimos igual a esa constante. Por 2 existen V^n, Z^n supermartingalas tales que $X^n = V^n - Z^n$. Para $t \in [t_n, t_{n+1}[\cap I$ definamos:

$$\begin{aligned} Y_t^1 &= V_{t_0}^0 + (V_{t_1}^1 - V_{t_0}^1) + \cdots + (V_{t_n}^n - V_{t_{n-1}}^n) + (V_t^{n+1} - V_{t_n}^{n+1}) \\ Y_t^2 &= Z_{t_0}^0 + (Z_{t_1}^1 - Z_{t_0}^1) + \cdots + (Z_{t_n}^n - Z_{t_{n-1}}^n) + (Z_t^{n+1} - Z_{t_n}^{n+1}). \end{aligned}$$

Y_t^1 y Y_t^2 son procesos adaptados. Veamos que son supermartingalas:

Sean $s < t$, $s, t \in I$. Supongamos que $s \in [t_m, t_{m+1}[$, $t \in [t_n, t_{n+1}[$.

Si $m = n$,

$$E(Y_t^1 - Y_t^2 | \mathfrak{F}_s) = E(V_t^{n+1} - V_s^{n+1} | \mathfrak{F}_s) \leq 0.$$

Si $n > m$, $s < t_{m+1} < t_{m+2} < \cdots < t_n < t$,

$$\begin{aligned} E(Y_t^1 - Y_t^2 | \mathfrak{F}_s) &= E((V_{t_{m+1}}^{m+1} - V_s^{m+1}) + (V_{t_{m+2}}^{m+2} - V_{t_{m+1}}^{m+2}) \\ &\quad + \cdots + (V_t^{n+1} - V_{t_n}^{n+1}) | \mathfrak{F}_s) \leq 0. \end{aligned}$$

Análogamente se muestra para $(Y_t^2)_{t \in I}$.

Por último, $X_t = Y_t^1 - Y_t^2$, $t \in I$ ya que:

$$\begin{aligned} Y_t^1 - Y_t^2 &= X_{t_0}^0 + (X_{t_1}^1 - X_{t_0}^1) + \cdots + (X_t^{n+1} - X_{t_n}^{n+1}) \\ &= X_{t_0} + (X_{t_1} - X_{t_0}) + \cdots + (X_t - X_{t_n}) = X_t. \end{aligned}$$

□

5.12 Observación. Si $X = (X_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ es una cuasimartingala cad, entonces tiene una descomposición de la forma $X = \overline{Y}^1 - \overline{Y}^2$, donde $\overline{Y}^1$, $\overline{Y}^2$ son supermartingalas cad.

En efecto, si Y^1 y Y^2 son supermartingalas tales que $X = Y^1 - Y^2$, entonces definimos

$$\overline{Y}_t^1 = \begin{cases} \lim\limits_{\substack{s \downarrow t \\ s \in \mathbb{Q}}} Y_s^1, & \text{si el límite existe,} \\ 0, & \text{si no existe .} \end{cases}$$

$\overline{Y}^1$ es una supermartingala con respecto a la filtración $(\mathfrak{F}_{t+})_{t \in \mathbb{R}_+}$ (Apéndice D, Teorema D.12), la cual en nuestro caso es igual a $(\mathfrak{F}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$.

Análogamente definimos $\overline{Y}_t^2$. Es claro que $\overline{Y}^1$ y $\overline{Y}^2$ tienen las propiedades deseadas.

Quizás vale la pena investigar qué forma tienen unos teoremas clásicos sobre (super)martingalas extendidos a cuasimartingalas. El teorema de muestreo opcional de Doob tiene la forma siguiente.

5.13 Proposición. *Sean $I \subset \overline{\mathbb{R}}_+$ y $(X_t)_{t\in I}$ un proceso integrable. Para todos los tiempos de paro S, T, $S \leq T$ que toman sus valores en un subconjunto finito de I se tiene $]S,T] \in \mathcal{A}_I$ y $\lambda_X(]S,T]) = E(X_T - X_S)$.*

Demostración. Sean $t_0 < t_1 < \cdots < t_n$ los valores que toman S y T. Como $]S,T] =]t_0,T] -]t_0,S]$ y $E(X_T - X_S) = E(X_T - X_{t_0}) - E(X_S - X_{t_0})$, basta mostrar que para $]t_0,T]$ se cumple el resultado. Tenemos

$$\begin{aligned}
]t_0,T] &= \bigcup_{i=1}^{n}\{(t,\omega) : t_0 < t \leq t_i \text{ y } T(\omega) = t_i\} \\
&= \bigcup_{i=1}^{n}\bigcup_{j=1}^{i}\{(t,\omega) : t_{j-1} < t \leq t_j \text{ y } T(\omega) = t_i\} \\
&= \bigcup_{j=1}^{n}\bigcup_{i=j}^{n}\{(t,\omega) : t_{j-1} < t \leq t_j \text{ y } T(\omega) = t_i\} \\
&= \bigcup_{j=1}^{n}\{(t,\omega) : t_{j-1} < t \leq t_j \text{ y } t_{j-1} < T(\omega)\} \\
&= \bigcup_{j=1}^{n}(]t_{j-1},t_j] \times F_j) \in \mathcal{A}_I
\end{aligned}$$

ya que $F_j := \{t_{j-1} < T\} \in \mathfrak{F}_{t_{j-1}}$. Además

$$\begin{aligned}
\lambda_X(]t_0,T]) &= \sum_{j=1}^{n}\int_{\{T\geq t_j\}}(X_{t_j} - X_{t_{j-1}})\,dP = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=j}^{n}\int_{\{T=t_i\}}(X_{t_j} - X_{t_{j-1}})\,dP \\
&= \int_{\{T=t_1\}}(X_{t_1} - X_{t_0})\,dP + \int_{\{T=t_2\}}[(X_{t_2} - X_{t_1}) + (X_{t_1} - X_{t_0})]\,dP \\
&\quad + \cdots + \int_{\{T=t_n\}}[(X_{t_n} - X_{t_{n-1}}) + \cdots + (X_{t_1} - X_{t_0})]\,dP \\
&= \sum_{i=1}^{n}\int_{\{T=t_i\}}X_{t_i}\,dP - \int_\Omega X_0\,dP = E(X_T - X_{t_0}).
\end{aligned}$$

□

Ahora mostraremos la desigualdad maximal para cuasimartingalas.

5.14 Teorema. *Sea $I \subset \overline{\mathbb{R}}_+$ tal que $a = \inf I \in I$ y $b = \sup I \in I$. Si $(X_t)_{t\in I}$ es una cuasimartingala continua por la derecha entonces para cada $\alpha > 0$ se tiene*

$$P(A_\alpha) \leq \frac{1}{\alpha}(\lambda_X^-(]a,b] \times \Omega) + \int_{A_\alpha} X_b \, dP),$$

donde $A_\alpha = \{\sup_{t\in I} X_t > \alpha\}$.

Demostración. Basta ver que para cualquier subconjunto finito $F \subset I$, $a, b \in F$, se cumple

$$P(B_F) \leq \frac{1}{\alpha}(\lambda_X^-(]a,b] \times \Omega) + \int_{B_F} X_b \, dP),$$

donde $B_F = \{\max_{t\in F} X_t > \alpha\}$.

Sean $F = \{a = t_0, t_1, \ldots, t_m = b\} \subset I$, $A_0 = \{X_0 > \alpha\}$ y $A_n = \{X_{t_n} > \alpha, \max_{t_0 \leq t_j < t_n} X_{t_j} \leq \alpha\}$, $n = 1, 2, \ldots, m$.

Es claro que $A_n \cap A_j = \emptyset$ si $n \neq j$ y que $B_F = \cup_{n=0}^m A_n$. Por lo tanto

$$P(B_F) = \sum_{n=0}^m P(A_n) \leq \sum_{n=0}^m \frac{1}{\alpha} \int_{A_n} X_{t_n} \, dP.$$

Además $(]t_n, b] \times A_n) \in \mathcal{A}_I$, $n = 0, 1, \ldots, m$ y

$$\lambda_X(]t_n, b] \times A_n) = E[(X_b - X_{t_n})\mathbf{1}_{A_n}] = \int_{A_n} X_b \, dP - \int_{A_n} X_{t_n} \, dP.$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
P(B_F) &\leq \frac{1}{\alpha}(\sum_{n=0}^m(-\lambda_X(]t_n, b] \times A_n) + \int_{A_n} X_b \, dP) \\
&\leq \frac{1}{\alpha}(\sum_{n=0}^m[\lambda_X(]t_n, b] \times A_n)]^-) + \frac{1}{\alpha}\int_{B_F} X_b \, dP \\
&\leq \frac{1}{\alpha}\lambda_X^-(]a, b] \times \Omega) + \frac{1}{\alpha}\int_{B_F} X_b \, dP.
\end{aligned}$$

□

Se recomienda al lector deducir de este teorema las desigualdades maximales clásicas para supermartingalas y submartingalas (Apéndice D, Teorema D.6 y Corolario D.7).

He aquí dos teoremas de convergencia casi segura. No los vamos a demostrar porque no los vamos a usar. Las demostraciones son completamente análogas a las pruebas de los hechos correspondientes para supermartingalas (ver e.g. [3] para el caso de martingalas y [15] para cuasimartingalas).

5.15 Teorema (Convergencia c.s.). *Sea* $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *un proceso adaptado integrable tal que*

$$\sum_{n=1}^{\infty} E(|E(X_{n+1} - X_n|\mathfrak{F}_n)|) < \infty \quad \text{y} \quad \sup_n E(X_n^-) < \infty.$$

Entonces $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge casi seguramente a una variable aleatoria integrable.*

Observación. La condición $\sum\limits_{n=1}^{\infty} E(|E(X_{n+1} - X_n|\mathfrak{F}_n)|) < \infty$ es equivalente a

$$\sup_n |\lambda_X|(]0,n] \times \Omega) < \infty.$$

El teorema para el caso continuo es el siguiente:

5.16 Teorema. *Sea* $(X_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ *un proceso adaptado e integrable tal que*

$$\sup_t |\lambda_X|(]0,t] \times \Omega) < \infty \quad \text{y} \quad \sup_t E(X_t^-) < \infty,$$

entonces X_t *converge casi seguramente a una variable aleatoria integrable cuando* t *tiende a* $+\infty$.

Del teorema de Rao obtenemos inmediatamente el siguiente teorema de regularización para cuasimartingalas.

5.17 Teorema[(1)]. *Si* $(X_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ *es cuasimartingala entonces el proceso definido por*

$$\overline{X_t}(\omega) = \begin{cases} \lim\limits_{\substack{s\downarrow t \\ s\in\mathbb{Q}_+}} X_s(\omega), & \text{si existe} \\ 0, & \text{si no existe} \end{cases}$$

es cuasimartingala cad.

Demostración. Usar el teorema de descomposición de Rao y el teorema correspondiente para supermartingalas (Apéndice D, Teorema D.12). □

[(1)]Obsérvese que en este capítulo (con una única excepción de la Observación 5.12) todavía no hemos usado la suposición de que la filtración satisface las condiciones usuales. Todo se cumple para una filtración arbitraria.

Observación. Análogamente como en el caso de una supermartingala, si no suponemos que la filtración sea continua por la derecha obtenemos que $\overline{X}$ es cuasimartingala con respecto a $(\mathfrak{F}_{t+})_{t\in\mathbb{R}_+}$.

Pasemos ahora al problema más importante para nosotros en este capítulo: el problema de la existencia de una extensión de la medida de Főllmer a una σ-álgebra adecuada.

Antes de formular el teorema correspondiente daremos unas definiciones.

Notación.

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_I &= \text{el conjunto de todos los tiempos de paro con valores en } I, \\ \mathcal{T}_I^f &= \{T \in \mathcal{T}_I : T \text{ toma un número finito de valores }\}. \end{aligned}$$

5.18 Definición. Sea $(X_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ o $(X_t)_{t\in\overline{\mathbb{R}}_+}$ un proceso y sea $I \subset \mathbb{R}_+$ o $I \subset \overline{\mathbb{R}}_+$. Decimos que X *pertenece a la clase D sobre I* si y sólo si la familia $\{X_T : T \in \mathcal{T}_I\}$ es uniformemente integrable.

Además decimos que X *pertenece a la clase DL* si y sólo si pertenece a D sobre $[0,\alpha]$ para todo $\alpha > 0$ y finito.

Para entender mejor el teorema de extensión veamos algunos ejemplos de elementos de estas clases.

5.19 Ejemplos. (a) Sea X una submartingala continua por la derecha y no negativa, entonces $X \in DL$.

Demostración. Sea $\alpha > 0$ finito, entonces para todo $T \in \mathcal{T}_{[0,\alpha]}$ tenemos que si $A = \{X_T > r\}$,

$$\int_A X_T \, dP \le \int_A X_\alpha \, dP,$$

ya que $A \in \mathfrak{F}_T$ y X es submartingala.

Por otro lado, tenemos que

$$P(X_T > r) \le P(\sup_{t\in\alpha} X_t > r) \le \frac{1}{r} E(X_\alpha).$$

De donde obtenemos

$$\sup_{T\in\mathcal{T}_{[0,\alpha]}} P(X_T > r) \to 0 \quad \text{si } r \to \infty.$$

(b) Toda martingala $(X_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ continua por la derecha, pertenece a la clase DL.

En efecto, para todo tiempo de paro $T \leq \alpha$, tenemos por el teorema de muestreo opcional que $X_T = E(X_\alpha|\mathfrak{F}_T)$ por lo que $X \in DL$.

(c) Toda martingala $(X_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ continua por la derecha y uniformemente integrable (o, que es lo mismo, toda martingala $(X_t)_{t\in\overline{\mathbb{R}}_+}$ cad) pertenece a la clase D. En efecto, tenemos $X_T = E(X_\infty|\mathfrak{F}_T)$ para cada T tiempo de paro, por lo que $X \in D$.

(d) Si $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es supermartingala uniformemente integrable, entonces $X \in D$ sobre $\{1, 2, \ldots, +\infty\}$.

En efecto, sabemos que $(X_n)_n$ converge c.s. y en L^1 a una variable aleatoria X_∞ tal que $X_n \geq E(X_\infty|\mathfrak{F}_n)$, para $n \in \mathbb{N}$. Como $(E(X_\infty|\mathfrak{F}_n))_n$ es martingala de la clase D, entonces al reemplazar X_n por $X_n - E(X_\infty|\mathfrak{F}_n)$ podemos suponer que $X_n \geq 0$, $n \in \mathbb{N}$ y $X_n \to 0$ c.s. y en L^1. Por hipótesis $\sup_{T\in\mathcal{T}_{\mathbb{N}\cup\{\infty\}}} EX_T = \sup_{n\in\mathbb{N}} EX_n < \infty$, entonces basta probar que para cada $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $\int_A X_T dP < \epsilon$ para todo evento A con $P(A) < \delta$ y todo tiempo de paro T.

Fijemos $\epsilon > 0$; existen $n \in \mathbb{N}$ y $\delta > 0$ tales que $EX_n < \epsilon/2$ y $\int_A X_k dP < \epsilon/2^n$ para $k = 1, \ldots, n$ y $P(A) < \delta$. Si T es un tiempo de paro arbitrario y $P(A) < \delta$ entonces

$$\begin{aligned}
\int_A X_T dP &= \int_A X_T \mathbf{1}_{\{T\leq n\}} dP + \int_A X_T \mathbf{1}_{\{T>n\}} dP \\
&\leq \sum_{k=1}^{n} \int_A X_k dP + \int_{\{T>n\}} X_{T\vee n} dP \\
&< \frac{\epsilon}{2} + \int_{\{T>n\}} X_n dP < \epsilon;
\end{aligned}$$

para obtener la penúltima desigualdad hemos usado el teorema de muestreo opcional (Apéndice D, Teorema D.3).

En el ejemplo que sigue veremos que la aseveración que acabamos de probar (para el tiempo discreto) no es cierta en el caso de tiempo continuo.

(e) Sea $(W_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ el proceso de Wiener en $\mathbb{R}^3$ que parte de un punto x distinto de 0.

Sea $h(y) = 1/|y|$ la función superarmónica fundamental. Entonces el proceso $h(W_t) = X_t$ es una supermartingala positiva con trayectorias continuas (este hecho, bien conocido, se sigue por ejemplo de 11.8 y 11.9(c)).

Como $|W_t| \to \infty$ c.s. cuando $t \to \infty$, entonces $X_t \to 0$ c.s y en L^1 cuando $t \to \infty$.

Definamos $X_\infty = 0$. La función $t \mapsto X_t$, como mapeo de $[0, \infty]$ en L^1 es continua, entonces el proceso

$$X = (X_t)_{t\in\overline{\mathbb{R}}_+}$$

es uniformemente integrable. Probaremos que $X \notin D$.

Sea $T_n = \inf\{t : X_t \geq n\} = \inf\{t : |W_t| \leq 1/n\}$. Sea $r > 0$ y $n > r$, entonces

$$\int_{\{X_{T_n} > r\}} X_{T_n}\, dP = nP(X_{T_n} > r) = nP(T_n < \infty).$$

Por otro lado, de las propiedades bien conocidas del proceso de Wiener en $\mathbb{R}^3$ (ver e.g. [19, Ch. 3, Proposition 1.6] se sigue que

$$P(T_n < \infty) = \begin{cases} 1, & \text{si } |x| \leq 1/n, \\ 1/(n|x|), & \text{si } |x| > 1/n, \end{cases}$$

entonces

$$\int_{\{X_{T_n} > r\}} X_{T_n}\, dP = n/(n|x|) = 1/|x|.$$

Por lo que se mantiene constante para toda $n > r$, de donde $\{X_{T_n}\}_n$ no es uniformemente integrable, por lo tanto X no pertenece a la clase D. □

5.20 Notación. Sea $\alpha > 0$.

$$\mathcal{P}_\alpha = \text{la clase de subconjuntos predecibles de } [0,\alpha] \times \Omega.$$

A veces vamos a escribir (de manera no completamente rigurosa): $\mathcal{P}_\alpha = \mathcal{P} \cap ([0,\alpha] \times \Omega)$.

5.21 Lema. *Sea $(X_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ una cuasimartingala y $\alpha > 0$. Entonces λ_X tiene extensión σ-aditiva a $\mathcal{P}_\alpha$ si $|\lambda_X|$ la tiene.*

Demostración. Supongamos que λ_X tiene extensión σ-aditiva. Entonces para cada $A \in \mathcal{P}_\alpha$ existe $A_n \in \mathcal{A}_{[0,\alpha]}$ tal que

$$|\lambda_X|(A \triangle A_n) \to 0 \quad \text{si} \quad n \to \infty.$$

Entonces

$$\begin{aligned} |\lambda_X(A_n) - \lambda_X(A_m)| &\leq |\lambda_X(A_n - A_m)| + |\lambda_X(A_m - A_n)| \\ &\leq |\lambda_X|(A_n - A_m) + |\lambda_X|(A_m - A_n) \\ &= |\lambda_X|(A_n \triangle A_m), \end{aligned}$$

de donde $|\lambda_X(A_n) - \lambda_X(A_m)| \to 0$ cuando $n, m \to \infty$. Es decir $(\lambda_X(A_n))_n$ es convergente. Definamos $\lambda_X(A) = \lim_{n\to\infty} \lambda_X(A_n)$ y de esta manera obtenemos la extensión deseada (ejercicio). □

5.22 Observación. Un argumento idéntico muestra que si $|\lambda_X|$ tiene una extensión a una medida σ-aditiva y finita sobre $\mathcal{P}$ entonces λ_X también la tiene.

5.23 Teorema. *Sea $X = (X_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ una cuasimartingala continua por la derecha. Fijemos $\alpha > 0$. Son equivalentes:*

(a) $|\lambda_X|$ *tiene extensión σ-aditiva a $\mathcal{P}_\alpha$.*
(b) $X \in D$ *sobre* $[0,\alpha]$.
(c) $\{X_T : T \in \mathcal{T}^f_{[0,\alpha]}\}$ *es uniformemente integrable.*

Demostración. Obviamente (b) $\Rightarrow$ (c).

(c) $\Rightarrow$ (a): Sabemos que $|\lambda_X|$ es una medida positiva finitamente aditiva en $\mathcal{A}_{[0,\alpha]}$ (Definición 5.1) que es una álgebra de subconjuntos de $[0,\alpha]\times\Omega$ y además que $\sigma(\mathcal{A}_{[0,\alpha]}) = \mathcal{P}_\alpha$. Lo que necesitamos probar es que dada una sucesión $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ con $A_n \in \mathcal{A}_{[0,\alpha]}$, $n = 1,2,\ldots$ y $A_n \downarrow \emptyset$ se cumple que $\lim_n |\lambda_X|(A_n) = 0$. Lo haremos en tres pasos.

1. Primero probaremos que basta considerar los A_n's de una forma especial. A saber, basta demostrar:

(i) Si $A_n =]s,t_n] \times \Omega$, $t_n \downarrow s$, entonces $\lim_{t_n\downarrow s} |\lambda_X|(A_n) = 0$ y
(ii) Si $H_n \in \mathfrak{F}_\alpha$, $H_n \downarrow \emptyset$, entonces

$$\sup\{|\lambda_X|(A) : A \subset [0,\alpha] \times H_n,\ A \in \mathcal{A}_{[0,\alpha]}\} \downarrow 0 \quad \text{si} \quad n \to \infty$$

(nótese que $[0,\alpha] \times H_n$ en general no pertenece a $\mathcal{A}_{[0,\alpha]}$).

En efecto, supongamos que (i),(ii) se cumplen. Definamos

$$\mathcal{C} = \begin{matrix} \text{clase de todas las uniones finitas de conjuntos de la} \\ \text{forma } [s,t] \times F,\ F \in \mathfrak{F}_s,\ s < t \le \alpha \text{ y } \{0\} \times F,\ F \in \mathfrak{F}_0 \end{matrix}$$

y sean $A =]s,t] \times F$, $C = [s+1/n,t] \times F$, $B =]s+1/n,t] \times F$ con $F \in \mathfrak{F}_s$ y $s+1/n < t \le \alpha$. Es claro que $A \supset C \supset B$, $C \in \mathcal{C}$ y $A - B =]s,s+1/n] \times F$.

Si (i) vale entonces

$$0 \le |\lambda_X|(]s,s+1/n] \times F) \le |\lambda_X|(]s,s+1/n] \times \Omega) \to 0$$

cuando $n \to \infty$. Así tendríamos la siguiente propiedad:

(I) Para cada $A \in \mathcal{A}_{[0,\alpha]}$ y $\epsilon > 0$ existen $C \in \mathcal{C}$, $B \in \mathcal{A}_{[0,\alpha]}$ tales que $A \supset C \supset B$ y $|\lambda_X|(A - B) < \epsilon$.

(Esta propiedad es obvia si $A = \{0\} \times F$ con $F \in \mathfrak{F}_0$ pues entonces $A = C = B$).

Ahora supongamos que existe una sucesión $A_n \in \mathcal{A}_{[0,\alpha]}$, $A_n \downarrow \emptyset$ tal que $|\lambda_X|(A_n)$ no converge a 0. Como se trata de una sucesión decreciente de términos positivos esto se traduce a:

$$\exists \delta > 0 \quad \text{tal que} \quad |\lambda_X|(A_n) > \delta \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Apliquemos (I) a cada A_n tomando $\epsilon_n = (\delta/2)1/2^n$: tenemos $C_n \in \mathcal{C}$ y $B_n \in \mathcal{A}_{[0,\alpha]}$ tales que $A_n \supset C_n \supset B_n$, $|\lambda_X|(A_n - B_n) < \epsilon_n$.

Para tener las sucesiones $(C_n)_n$ y $(B_n)_n$ decrecientes se toma $C_n^1 = C_1 \cap C_2 \cap \ldots \cap C_n$ y $B_n^1 = B_1 \cap B_2 \cap \ldots \cap B_n$, y es claro que $A_n \supset C_n^1 \supset B_n^1$, $n = 1, 2, \ldots$ y $C_n^1 \in \mathcal{C}$, $B_n \in \mathcal{A}_{[0,\alpha]}$, $C_n^1 \downarrow \emptyset$, $B_n^1 \downarrow \emptyset$, puesto que por la suposición $A_n \downarrow \emptyset$.

$$\begin{aligned} |\lambda_X|(A_n - B_n^1) &= |\lambda_X|(\bigcap_{j=1}^n A_j - \bigcap_{j=1}^n B_j) \leq \sum_{j=1}^n |\lambda_X|(A_j - B_j) \\ &< \sum_{j=1}^n (\delta/2)1/2^j < \delta/2. \end{aligned}$$

Para cada $\omega \in \Omega$ fijo, sea $C_n^1(\omega) = \omega$-sección de C_n^1, es decir,

$$C_n^1(\omega) = \{t \in [0, \alpha] : (t, \omega) \in C_n^1\}.$$

$C_n^1(\omega)$ es compacto por ser unión finita de intervalos cerrados y acotados. Además $C_n^1(\omega) \downarrow \emptyset$, porque $C_n^1 \downarrow \emptyset$. Esto muestra que:

(II) Para cada $\omega \in \Omega$ existe $N_0(\omega) \in \mathbb{N}$ tal que $C_n^1(\omega) = \emptyset$ si $n \geq N_0(\omega)$.

Ahora definamos $H_n = \{\omega \in \Omega : C_n^1(\omega) \neq \emptyset\}$ (= proyección de C_n^1 sobre Ω). Por (II) se tiene: para cada $\omega \in \Omega$ existe $N_0(\omega) \in \mathbb{N}$ tal que $\omega \notin H_n$ si $n \geq N_0(\omega)$. Así H_n tiene las siguientes propiedades: $H_n \in \mathfrak{F}_\alpha$ para cada n, $H_n \downarrow \emptyset$, y $B_n^1 \subset C_n^1 \subset [0, \alpha] \times H_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Si (ii) vale, podemos concluir que $|\lambda_X|(B_n^1) \downarrow 0$ cuando $n \to \infty$. Pero

$$\delta/2 > |\lambda_X|(A_n - B_n^1) = |\lambda_X|(A_n) - |\lambda_X|(B_n^1) > \delta - |\lambda_X|(B_n^1),$$

lo cual es una contradicción.

Con esto hemos mostrado que (i) y (ii) implican el resultado.

2. Basta mostrar

(i′) $\lim_{t \downarrow s} \lambda_X(]s, t] \times F) = 0$, $F \in \mathfrak{F}_s$.

(ii′) Si $H_n \in \mathfrak{F}_\alpha$, $H_n \downarrow \emptyset$ entonces

$$\sup\{|\lambda_X(]S, T])| : S, T \in \mathcal{T}^f_{[0,\alpha]},\ S \leq T,]S, T] \subset]0, \alpha] \times H_n\} \downarrow 0.$$

(Recordemos que por la Proposición 5.13 $]S,T] \in \mathcal{A}_{[0,\alpha]}$ si $S,T \in \mathcal{T}^f_{[0,\alpha]}$ por lo tanto $\lambda_X(]S,T])$ está bien definido).

En efecto, veremos que (i′) y (ii′) implican (i) y (ii): para ϵ fijo arbitrario, sea $R_1, \ldots, R_k$ una partición de $[0,\alpha] \times \Omega$ compuesta de rectángulos predecibles tal que

$$|\lambda_X|([0,\alpha] \times \Omega) \geq \sum_{i=1}^{k} |\lambda_X(R_i)| \geq |\lambda_X|([0,\alpha] \times \Omega) - \epsilon. \tag{5.3}$$

Entonces, para cada $A \in \mathcal{A}_{[0,\alpha]}$ tenemos además

$$|\lambda_X|(A) \geq \sum_{i=1}^{k} |\lambda_X(R_i \cap A)| \geq |\lambda_X|(A) - \epsilon. \tag{5.4}$$

En efecto, supongamos que existe $A \in \mathcal{A}_{[0,\alpha]}$ tal que

$$\sum_{i=1}^{k} |\lambda_X(R_i \cap A)| < |\lambda_X|(A) - \epsilon.$$

Como $\sum_{i=1}^{k} |\lambda_X(R_i \cap A^C)| \leq |\lambda_X|(A^C)$ se tendría

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{k} |\lambda_X(R_i)| &\leq \sum_{i=1}^{k} [|\lambda_X(R_i \cap A)| + |\lambda_X(R_i \cap A^C)|] \\ &< |\lambda_X|([0,\alpha] \times \Omega) - \epsilon \end{aligned}$$

lo que contradice a (5.3).

Aplicando (5.4) al conjunto $A =]s,t] \times F$, $F \in \mathfrak{F}_s$ tenemos:

$$|\lambda_X|(]s,t] \times F) \leq \sum_{i=1}^{k} |\lambda_X(R_i \cap]s,t] \times F)| + \epsilon.$$

El conjunto $R_i \cap]s,t] \times F$, es de la forma $]u,v] \times G$ con $G \in \mathfrak{F}_u$. Además si $t \downarrow s$ entonces $v \downarrow u$.

Por (i′), tenemos que $|\lambda_X(R_i \cap]s,t] \times F)| \to 0$ si $t \downarrow s$. Por lo tanto

$$0 \leq \limsup_{t \downarrow s} |\lambda_X|(]s,t] \times F) \leq \epsilon$$

y como ϵ es arbitrario, obtenemos $\lim_{t \downarrow s} |\lambda_X|(]s,t] \times F) = 0$, y por lo tanto (i) se cumple.

Veamos ahora (ii): primero demostraremos que si $A \subset [0,\alpha] \times H_n$, $A \in \mathcal{A}_{[0,\alpha]}$ entonces existen $S, T \in \mathcal{T}^f_{[0,\alpha]}$ tales que $S \leq T$ y

$$A \subset]S,T] \cup (\{0\} \times F) \subset [0,\alpha] \times H_n, \tag{5.5}$$

donde $F \in \mathfrak{F}_0$.

En efecto,

$$A = (\{0\} \times F_0) \cup \bigcup_{i=1}^{m}]u_i, v_i] \times F_i, \; F_i \in \mathfrak{F}_{u_i}, \; \bigcup_{i=0}^{m} F_i \subset H_n$$

y se puede suponer que $0 \leq u_1 \leq u_2 \leq \cdots \leq u_m \leq \alpha$.

Ahora definamos $T \equiv \alpha$ y

$$S(\omega) = \begin{cases} 0, & \text{si } \omega \in F_0 \\ u_i, & \text{si } \omega \in F_i - (F_0 \cup \cdots \cup F_{i-1}) \\ \alpha, & \text{si } \omega \notin \bigcup\limits_{i=0}^{m} F_i. \end{cases}$$

S es un tiempo de paro:

$$\begin{aligned} \{S = u_i\} &= \bigcup_{\{j : u_j = u_i\}} (F_j - (F_0 \cup \cdots \cup F_{j-1})) \in \mathfrak{F}_{u_i} \\ \{S = \alpha\} &= (\bigcup_{i=0}^{m} F_i)^C \in \mathfrak{F}_{u_m} \subset \mathfrak{F}_\alpha. \end{aligned}$$

Es claro, que $]S,T] \subset [0,\alpha] \times H_n$. Veamos ahora que $A \subset]S,T] \cup (\{0\} \times F_0)$: sean $(t,\omega) \in]u_i, v_i] \times F_i$ y $k = \min\{j : \omega \in F_j\}$. $S(\omega) = u_k \leq u_i$ (por la definición de S). Entonces

$$T(\omega) = \alpha \geq t > u_i \geq u_k = S(\omega)$$

o sea, $(t,\omega) \in]S,T]$. Queda así demostrado (5.5).

En consecuencia tenemos

$$\begin{aligned} &\sup\{|\lambda_X|(A) : A \subset [0,\alpha] \times H_n, \; A \in \mathcal{A}_{[0,\alpha]}\} \\ &\leq \; \sup\{|\lambda_X|(]S,T]) : S,T \in \mathcal{T}^f_{[0,\alpha]}, \; S \leq T, \;]S,T] \subset [0,\alpha] \times H_n\} \\ &\leq \; \sup\{\sum_{i=1}^{k} |\lambda_X(R_i \cap]S,T])| + \epsilon : S,T \in \mathcal{T}^f_{[0,\alpha]}, \; S \leq T, \;]S,T] \subset [0,\alpha] \times H_n\} \end{aligned} \tag{5.6}$$

La primera desigualdad se obtiene de (5.5) y la segunda de (5.4).

Además $(R_i \cap]S,T])$ tiene la forma $]S_i, T_i]$ con $S_i, T_i \in \mathcal{T}^f_{[0,\alpha]}$ ya que $R_i =]u_i, v_i] \times F =]U^i_F, V^i_F]$ donde

$$U^i_F = \begin{cases} u_i, & \text{si } \omega \in F, \\ \alpha, & \text{si } \omega \notin F \end{cases}$$

y

$$V^i_F = \begin{cases} v_i, & \text{si } \omega \in F, \\ \alpha, & \text{si } \omega \notin F \end{cases}$$

y entonces $R_i \cap]S,T] =]U^i_F \vee S, V^i_F \wedge T]$ y $S_i = U^i_F \vee S$, $T_i = V^i_F \wedge T$.

Por lo anterior se puede aplicar (ii′) al lado derecho de (5.6) y obtenemos:

$$\lim_{n\to\infty} \sup\{|\lambda_X|(A) : A \subset [0,\alpha] \times H_n,\ A \in \mathcal{A}_{[0,\alpha]}\} \leq \epsilon,$$

de donde se sigue (ii) ya que ϵ es arbitrario.

3. Por último mostraremos (i′) y (ii′).

(i′): $|\lambda_X|(]s,t] \times F) = \int_F (X_t - X_s)\, dP \to 0$ si $t \downarrow s$ porque X es cad y $\{X_t\}_{t\in[0,\alpha]}$ es uniformemente integrable por hipótesis.

(ii′): Sean $H_n \in \mathfrak{F}_\alpha$, $H_n \downarrow \emptyset$ (fijos). Para todos $S,T \in \mathcal{T}^f_{[0,\alpha]}$ tales que $S \leq T$ y $]S,T] \subset [0,\alpha] \times H_n$, tenemos por la Proposición 5.13

$$|\lambda_X(]S,T])| = |E(X_T - X_S)| = |\int_{H_n} (X_T - X_S)\, dP|$$

porque $X_T = X_S$ en H_n^C.

$$\begin{aligned} |\int_{H_n} (X_T - X_S)\, dP| &\leq \int_{H_n} |X_T|\, dP + \int_{H_n} |X_S|\, dP \\ &\leq 2 \sup_{T\in\mathcal{T}^f_{[0,\alpha]}} \int_{H_n} |X_T|\, dP. \end{aligned}$$

Pero $\{X_T\}_{T\in\mathcal{T}^f_{[0,\alpha]}}$ es uniformemente integrable y por hipótesis $H_n \downarrow \emptyset$. Por lo tanto

$$\limsup_{n\to\infty} \sup_{\substack{]S,T]\subset[0,\alpha]\times H_n \\ S,T\in\mathcal{T}^f_{[0,\alpha]}}} |\lambda_X(]S,T])| \leq \lim_{n\to\infty} 2 \sup_{T\in\mathcal{T}^f_{[0,\alpha]}} \int_{H_n} |X_T|\, dP = 0.$$

Así hemos mostrado que (c) implica (a).

(a) $\Rightarrow$ (b): Supongamos que $|\lambda_X|$ tiene extensión σ-aditiva. Queremos probar

$$\sup_{T\in\mathcal{T}_{[0,\alpha]}} \int_{\{|X_T|>n\}} |X_T|dP \to 0 \quad \text{si } n\to\infty.$$

Para cada $T\in\mathcal{T}_{[0,\alpha]}$ tenemos

$$\int_{\{|X_T|>n\}} |X_T|dP \leq I_n(T) + I\!I_n(T),$$

donde

$$I_n(T) = \int_{\{|X_T|>n\}} |X_T - E(X_\alpha|\mathfrak{F}_T)|dP, \quad I\!I_n(T) = \int_{\{|X_T|>n\}} |E(X_\alpha|\mathfrak{F}_T)|dP.$$

La segunda integral es más fácil:

$$\begin{aligned}\sup_{T\in\mathcal{T}_{[0,\alpha]}} I\!I_n(T) &\leq \sup_{T\in\mathcal{T}_{[0,\alpha]}} \int_{\{|X_T|>n\}} E(|X_\alpha||\mathfrak{F}_T)dP = \sup_{T\in\mathcal{T}_{[0,\alpha]}} \int_{\{|X_T|>n\}} |X_\alpha|dP \\ &\leq \int_{\{\sup_{t\leq\alpha}|X_t|>n\}} |X_\alpha|dP \to 0 \quad \text{si } n\to\infty.\end{aligned}$$

La igualdad se sigue claramente del hecho de que $\{|X_T|>n\}\in\mathfrak{F}_T$, y la convergencia a cero se cumple porque P-casi cada trayectoria de X es acotada en $[0,\alpha]$ (por la Observación 5.12 es una consecuencia inmediata de la propiedad análoga de supermartingala cad, o bien se la puede deducir también de la desigualdad maximal 5.14[(2)]).

Para transformar a $I_n(T)$ definamos el tiempo de paro $T_n := T_{\{|X_T|>n\}}\wedge\alpha$. Se tiene $\mathfrak{F}_T\subset\mathfrak{F}_{T_n}$ porque $T\leq T_n$, por lo tanto

$$\begin{aligned}I_n(T) &= E(|E(\mathbf{1}_{\{|X_T|>n\}}(X_T - X_\alpha)|\mathfrak{F}_T)|) = E(|E(X_{T_n} - X_\alpha|\mathfrak{F}_T)|) \\ &= E(|E(E(X_{T_n} - X_\alpha|\mathfrak{F}_{T_n})|\mathfrak{F}_T)|) \leq E(E((|E(X_{T_n} - X_\alpha|\mathfrak{F}_{T_n})|)|\mathfrak{F}_T)) \\ &= E(|E(X_{T_n} - X_\alpha|\mathfrak{F}_{T_n})|). \end{aligned} \tag{5.7}$$

Por otro lado, para cada $S\in\mathcal{T}_{[0,\alpha]}$ se tiene

$$E(|E(X_S - X_\alpha|\mathfrak{F}_S)|) \leq |\lambda_X|(]S,\alpha]) \tag{5.8}$$

(el lado derecho de la desigualdad esta bien definido porque hemos supuesto que $|\lambda_X|$ tiene extensión a $\mathcal{P}_\alpha$). En efecto, si $S\in\mathcal{T}^f_{[0,\alpha]}$ y $s_i,\ldots,s_k$ son todos los valores de S, entonces

(2) La ventaja de este segundo método consiste en que esto se puede generalizar al caso multidimensional.

razonando de una manera análoga como en la primera parte de la demostración de la Proposición 5.8 obtenemos

$$\begin{aligned} E(E(X_S - X_\alpha|\mathfrak{F}_S)|) &= \sum_{i=1}^{k} E(\mathbf{1}_{\{S=s_i\}}|E(X_{s_i} - X_\alpha|\mathfrak{F}_{s_i})|) \\ &\leq \sum_{i=1}^{k} |\lambda_X|(]s_i,\alpha] \times \{S = s_i\}) = |\lambda_X|(]S,\alpha]). \end{aligned}$$

En el caso general consideramos una sucesión $(S_m)_m$, $S_m \in \mathcal{T}^f_{[0,\alpha]}$ tal que $S_m \downarrow S$. Como $\mathfrak{F}_{S_m} \downarrow \mathfrak{F}_S$ y $X_{S_m} \to X_S$, entonces por el lema de Fatou tenemos

$$\begin{aligned} E(|X_S - E(X_\alpha|\mathfrak{F}_S)|) &\leq \liminf_{m\to\infty} E(|X_{S_m} - E(X_\alpha|\mathfrak{F}_{S_m})|) \\ &\leq \liminf_{m\to\infty} |\lambda_X|(]S_m,\alpha]) = |\lambda_X|(]S,\alpha]), \end{aligned}$$

ya que $|\lambda_X|$ es σ-aditiva y (5.8) queda demostrado.

Definamos ahora $U_n := \inf\{t : |X_t| > n\} \wedge \alpha$. Se tiene $U_n \leq T_n$, $U_n \uparrow \alpha$ c.s., por lo tanto, (5.7) y (5.8) implican

$$\sup_{T\in\mathcal{T}_{[0,\alpha]}} I_n(T) \leq \sup_{T\in\mathcal{T}_{[0,\alpha]}} |\lambda_X|(]U_n,\alpha]) \to 0$$

si $n \to \infty$, otra vez por σ-aditividad de $|\lambda_X|$. Lo que termina la demostración del teorema. □

Del Lema 5.21, Observación 5.22 y Teorema 5.23 obtenemos inmediatamente

5.24 Corolario. *Si $(X_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ es una cuasimartingala continua por la derecha de la clase DL entonces λ_X tiene extensión σ-aditiva a $\mathcal{P}_\alpha$ para cada $\alpha > 0$. Si además $|\lambda_X|(\mathbb{R}_+ \times \Omega) < \infty$ entonces λ_X tiene extensión σ-aditiva y finita a $\mathcal{P}$.*

5.25 Definición. La extensión de λ_X para X cuasimartingala cad de la clase DL se llama *la medida de Doléans* asociada a X y la denotamos también λ_X.

5.26 Observación. Si $\lambda_X \geq 0$ (es decir X es una submartingala) entonces la medida de Doléans está definida sobre todo $\mathcal{P}$ y con valores en $\overline{\mathbb{R}}_+$.

En el caso general está definida sobre $\mathcal{P}_\alpha$ para cada $\alpha > 0$.

5.27 Corolario. *Sea X una cuasimartingala cad de la clase D sobre $[0,\alpha]$. Entonces para todos $T, S \in \mathcal{T}_{[0,\alpha]}$, $T \leq S$ se tiene*

$$\lambda_X(]T,S]) = E(X_S - X_T).$$

Demostración. T, S son tiempos de paro con valores en $[0,\alpha]$, por lo tanto $]T,S] \in \mathcal{P}_\alpha$.

Para demostrar la igualdad basta mostrar que

$$\lambda_X(]0,S]) = E(X_S - X_0)$$

para cualquier $S \in \mathcal{T}_{[0,\alpha]}$ porque $]T,S] =]0,S] -]0,T]$.

Sean $T_n \in \mathcal{T}^f_{[0,\alpha]}$ tales que $T_n \downarrow S$. $\lambda_X(]0,T_n]) = E(X_{T_n} - X_0)$ por la Proposición 5.13. Como $]0,T_n] \downarrow]0,S]$ y λ_X es medida sobre $\mathcal{P}_\alpha$, entonces

$$\lambda_X(]0,T_n]) \downarrow \lambda_X(]0,S]) \quad \text{si } n \to \infty.$$

Por otra parte, $E(X_{T_n} - X_0) \to E(X_S - X_0)$ ya que $X_{T_n} \to X_S$ c.s. por ser X cad y $\{X_T\}_{T\in\mathcal{T}_{[0,\alpha]}}$ es uniformemente integrable. Por lo tanto $E(X_S - X_0) = \lambda_X(]0,S])$. □

Capítulo 6

Proyección predecible, proyección dual predecible y teorema de Doléans

En este capítulo regresamos a la teoría general de los procesos. A cada proceso medible acotado le corresponde un proceso predecible llamado la proyección predecible del proceso original. La noción dual es la proyección definida sobre una gran clase de medidas en $\mathbb{R}_+ \times \Omega$. El resultado más importante de este capítulo es el teorema de Doléans que dice que cada medida igual a su proyección se puede representar como la esperanza de la integral de Stieltjes con respecto a un proceso predecible.

6.1 Teorema (de la proyección predecible). *Sea X un proceso medible acotado (no necesariamente adaptado), entonces existe un proceso predecible único (módulo indistinguibilidad) denotado por $X^{\mathcal{P}}$, el cual satisface:*

$$E(X_T \mathbf{1}_{\{T<\infty\}}) = E((X^{\mathcal{P}})_T \mathbf{1}_{\{T<\infty\}})$$

para todo tiempo de paro predecible T.

Llamamos a $X^{\mathcal{P}}$, la proyección predecible de X.

Antes de demostrar este teorema veamos algunas de sus consecuencias inmediatas.

6.2 Observaciones. (a) Si X es predecible, entonces $X^{\mathcal{P}} = X$ y por lo tanto $(X^{\mathcal{P}})^{\mathcal{P}} = X^{\mathcal{P}}$.

(b) $(\alpha X + \beta Y)^{\mathcal{P}} = \alpha X^{\mathcal{P}} + \beta Y^{\mathcal{P}}$, $\alpha,\ \beta \in \mathbb{R}$.

(a) y (b) justifican el término de "proyección predecible".

(c) Si S es un tiempo de paro totalmente inaccesible, entonces:

$$(\mathbf{1}_{[S,\infty[})^{\mathcal{P}} = \mathbf{1}_{]S,\infty[} \quad \text{y} \quad (\mathbf{1}_{[S]})^{\mathcal{P}} = 0.$$

En efecto, para todo tiempo de paro predecible T, se tiene:

$$E(\mathbf{1}_{[S,\infty[}(T)\mathbf{1}_{\{T<\infty\}}) = P(S \leq T < \infty),$$

pero $P(S = T < \infty) = 0$ pues S es totalmente inaccesible, así pues,

$$P(S \leq T < \infty) = P(S < T < \infty) = E(\mathbf{1}_{]S,\infty[}(T)\mathbf{1}_{\{T<\infty\}}).$$

La segunda igualdad se sigue de la primera y de (b) ya que $\mathbf{1}_{[S]} = \mathbf{1}_{[S,\infty[} - \mathbf{1}_{]S,\infty[}$. □

Primero obtendremos la proyección predecible del proceso de una forma especial.

6.3 Lema. *Sea Z un proceso predecible y acotado y ξ una variable aleatoria acotada; denotemos por M la versión cadlag de la martingala $(E(\xi|\mathfrak{F}_t))_{t\in\mathbb{R}_+}$. Entonces $(Z\xi)^{\mathcal{P}} = ZM_-$, donde $M_- = (M_{t-})_{t\in\mathbb{R}_+}$.*

Demostración. ZM_- es claramente predecible porque M_- es caglad adaptado. Por otro lado, $Z_T\mathbf{1}_{\{T<\infty\}}$ es $\mathfrak{F}_{T-}$-medible (con T tiempo de paro, predecible o no, por 4.27), luego entonces, por el Lema 4.30 tenemos

$$\begin{aligned} E(Z_T\xi\mathbf{1}_{\{T<\infty\}}) &= E(E(Z_T\xi\mathbf{1}_{\{T<\infty\}}|\mathfrak{F}_{T-})) \\ &= E(Z_T\mathbf{1}_{\{T<\infty\}}E(\xi|\mathfrak{F}_{T-})) \\ &= E(Z_T\mathbf{1}_{\{T<\infty\}}M_{T-}) \\ &= E((Z\,M_-)_T\mathbf{1}_{\{T<\infty\}}). \end{aligned}$$

□

Demostración del Teorema 6.1. La unicidad es una consecuencia inmediata de la Proposición 4.18. Para probar existencia denotemos

$$\mathcal{K} = \{X : X \text{ es un proceso y } X^{\mathcal{P}} \text{ existe }\}.$$

Claramente $\mathcal{K}$ es una clase lineal en virtud de que $(\alpha X + \beta Y)^{\mathcal{P}} = \alpha X^{\mathcal{P}} + \beta Y^{\mathcal{P}}$.

Sea

$$\mathcal{A} = \{[s,t[\times F : 0 \leq s < t,\ F \in \mathfrak{F}\}.$$

Observemos que $\mathcal{A}$ es un π-sistema tal que $\sigma(\mathcal{A}) = \mathcal{B}(\mathbb{R}_+)\otimes\mathfrak{F}$; por lo tanto para probar que $\mathcal{K}$ incluye a todos los procesos acotados medibles, basta comprobar que las condiciones del lema de las clases monótonas (L.C.M., 4.26) son satisfechas.

(i) $1 \in \mathcal{K}$ pues $1^{\mathcal{P}} = 1$.
(ii) $\mathbf{1}_A \in \mathcal{K}$, para cada $A \in \mathcal{A}$; puesto que $\mathbf{1}_A$ es de la forma $Z\xi$ con $Z = \mathbf{1}_{[s,t[}$ acotado predecible y $\xi = \mathbf{1}_F$, y por el Lema 6.3 existe $(\mathbf{1}_A)^{\mathcal{P}}$.
(iii) Sea (X_n) una sucesión en $\mathcal{K}$ tal que $0 \leq X_n \uparrow X$ y X es acotado; probemos que $X \in \mathcal{K}$.

Primero observemos que si $Y \in \mathcal{K}$, $Y \geq 0$ *entonces* $Y^{\mathcal{P}} \geq 0$. En efecto, para cada T tiempo de paro predecible

$$E((Y^{\mathcal{P}})_T \mathbf{1}_{\{T<\infty\}}) = E(Y_T \mathbf{1}_{\{T<\infty\}}) \geq 0.$$

Entonces el conjunto predecible $\{Y^{\mathcal{P}} < 0\}$ es evanescente por el teorema de sección predecible 4.12. Esta propiedad junto con la linealidad de la proyección implican que $X_{n+1}^{\mathcal{P}} \geq X_n^{\mathcal{P}}$ si $X_{n+1} \geq X_n$ y por lo tanto existe $\lim_{n\to\infty} X_n^{\mathcal{P}}$.

Por otro lado, para todo tiempo de paro predecible T,

$$E((X_n)_T \mathbf{1}_{\{T<\infty\}}) = E((X_n^{\mathcal{P}})_T \mathbf{1}_{\{T<\infty\}}),$$

entonces por el teorema de la convergencia monótona concluimos que

$$E(X_T \mathbf{1}_{\{T<\infty\}}) = E((\lim_{n\to\infty} X_n^{\mathcal{P}})_T \mathbf{1}_{\{T<\infty\}}),$$

por lo tanto $X \in \mathcal{K}$ y $X^{\mathcal{P}} = \lim_{n\to\infty} X_n^{\mathcal{P}}$ pues $\lim_{n\to\infty} X_n^{\mathcal{P}}$ es predecible. □

Nota. Escribiremos $X_T^{\mathcal{P}}$ en lugar de $(X^{\mathcal{P}})_T$, pero no se debe confundir la *variable aleatoria* $X_T^{\mathcal{P}}$ con el *proceso* $(X_T)^{\mathcal{P}}$.

6.4 Corolario. *Sea Z un proceso acotado predecible y X un proceso acotado medible, entonces:*

$$(ZX)^{\mathcal{P}} = ZX^{\mathcal{P}}.$$

Demostración (esbozo). Por linealidad basta suponer que $Z \geq 0$. Sea

$$\mathcal{K} = \{X : X \text{ es un proceso medible acotado y } (ZX)^{\mathcal{P}} = ZX^{\mathcal{P}}\}$$

y sea

$$\mathcal{A} = \{[s,t[\times F : 0 \leq s < t,\ F \in \mathfrak{F}\};$$

procediendo como en la prueba del teorema anterior, se concluye que $\mathcal{K}$ incluye todos los procesos medibles y acotados. □

De la demostración del Teorema 6.1 obtenemos el siguiente corolario.

6.5 Corolario. *El mapeo $X \mapsto X^{\mathcal{P}}$ tiene las siguientes propiedades:*
(i) *Es lineal.*
(ii) $X \geq 0 \Rightarrow X^{\mathcal{P}} \geq 0$.
(iii) $X_n \uparrow X \Rightarrow X_n^{\mathcal{P}} \uparrow X^{\mathcal{P}}$.

A continuación damos una interpretación de la proyección predecible:

6.6 Corolario. *Sea X un proceso medible y acotado. Para cada tiempo de paro predecible T se tiene*

$$X_T^{\mathcal{P}} = E(X_T|\mathfrak{F}_{T-}) \text{ c.s. sobre } \{T < \infty\}.$$

Demostración. Sea T un tiempo de paro predecible y $A \in \mathfrak{F}_{T-}$. Entonces T_A es un tiempo de paro predecible (por 2.24) y por lo tanto $[T_A] \in \mathcal{P}$. Observemos que $\mathbf{1}_{[T_A]}(T) = \mathbf{1}_A$ sobre $\{T < \infty\}$; aplicando el Corolario 6.4 al proceso acotado predecible $Z = \mathbf{1}_{[T_A]}$ y a X obtenemos que:

$$(\mathbf{1}_{[T_A]}X)^{\mathcal{P}} = \mathbf{1}_{[T_A]}X^{\mathcal{P}},$$

por lo tanto:

$$\begin{aligned}\int_A \mathbf{1}_{\{T<\infty\}}X_T\,dP &= E(\mathbf{1}_{\{T<\infty\}}\mathbf{1}_A X_T) = E(\mathbf{1}_{\{T<\infty\}}\mathbf{1}_{[T_A]}(T)X_T)\\ &= E(\mathbf{1}_{\{T<\infty\}}\mathbf{1}_{[T_A]}(T)X_T^{\mathcal{P}}) = \int_A \mathbf{1}_{\{T<\infty\}}X_T^{\mathcal{P}}\,dP.\end{aligned}$$

Como esto ocurre para cada $A \in \mathfrak{F}_{T-}$ y $\mathbf{1}_{\{T<\infty\}}X_T^{\mathcal{P}}$ es $\mathfrak{F}_{T-}$-medible por el Lema 4.27, obtenemos $\mathbf{1}_{\{T<\infty\}}X_T^{\mathcal{P}} = \mathbf{1}_{\{T<\infty\}}E(X_T|\mathfrak{F}_{T-})$ c.s. □

Nótese que tomando en particular tiempos de paro deterministas obtenemos $X_t^{\mathcal{P}} = E(X_t|\mathfrak{F}_{t-})$ c.s.

Ahora introduciremos la noción de dual de la proyección predecible de procesos: la proyección predecible de medidas.

6.7 Definición. Sea $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}(\mathbb{R}_+) \otimes \mathfrak{F}$ una sub-σ-álgebra que contiene a los subconjuntos evanescentes de $\mathbb{R}_+ \times \Omega$. Sea $\mu: \mathcal{A} \to \overline{\mathbb{R}}$ una medida (con o sin signo). Decimos que μ es *admisible* si $\mu(E) = 0$ para todo conjunto evanescente E.

Sea $\mathcal{A}$ una σ-álgebra con $\mathcal{P} \subset \mathcal{A} \subset \mathcal{B}(\mathbb{R}_+) \otimes \mathfrak{F}$ y sea μ una medida admisible finita sobre $\mathcal{A}$ (o sobre $\cup_{\alpha>0}\mathcal{A} \cap ([0,\alpha] \times \Omega)$ y finita para todo $\alpha > 0$[(1)]). Para cada proceso acotado

[(1)]Esta formulación no es completamente rigurosa y debe entenderse así: para cada $\alpha > 0$, μ es una medida (posiblemente con signo) σ-aditiva y finita sobre la σ-álgebra de los subconjuntos de $[0,\alpha] \times \Omega$ que pertenecen a $\mathcal{A}$.

medible fijo, consideramos el mapeo (bien definido):

$$X \mapsto \int_{\mathbb{R}_+\times\Omega} X^{\mathcal{P}}\, d\mu \quad (\text{ó } X \mapsto \int_{\mathbb{R}_+\times\Omega} X^{\mathcal{P}} \mathbf{1}_{[0,\alpha]}\, d\mu \text{ para cada } \alpha > 0).$$

Tomando $X = \mathbf{1}_A$, $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \otimes \mathfrak{F}$ (o $A \in \cup_{\alpha>0}\mathcal{B}([0,\alpha]) \otimes \mathfrak{F}$), podemos definir una función conjuntista $\mu^{\mathcal{P}} : \mathcal{B}(\mathbb{R}_+) \otimes \mathfrak{F} \to \mathbb{R}$ (o $\mu^{\mathcal{P}} : \cup_{\alpha>0}\mathcal{B}([0,\alpha]) \otimes \mathfrak{F} \to \mathbb{R}$) mediante la fórmula:

$$\mu^{\mathcal{P}}(A) = \int \mathbf{1}_A^{\mathcal{P}}\, d\mu$$

(o bien

$$\mu^{\mathcal{P}}(A) = \int \mathbf{1}_A^{\mathcal{P}}\, d\mu \quad \text{para} \quad A \in \bigcup_{\alpha>0} \mathcal{B}([0,\alpha]) \otimes \mathfrak{F}).$$

Por propiedades ya mencionadas del mapeo $X \mapsto X^{\mathcal{P}}$ se sigue que $\mu^{\mathcal{P}}$ es una medida, sobre $\mathcal{B}(\mathbb{R}_+)\otimes\mathfrak{F}$ (o $\cup_{\alpha>0}\mathcal{B}([0,\alpha])\otimes\mathfrak{F}$), además es admisible (pues si E es evanescente, entonces $\mathbf{1}_E$ es indistinguible del proceso 0, lo mismo ocurre con $\mathbf{1}_E^{\mathcal{P}}$, por lo tanto $\mu^{\mathcal{P}}(E) = 0$).

6.8 Definición. Llamamos a $\mu^{\mathcal{P}}$ la *proyección dual predecible* de μ.

6.9 Propiedades. Sea $\mathcal{A}$ una σ-álgebra tal que $\mathcal{P} \subset \mathcal{A} \subset \mathcal{B}(\mathbb{R}_+) \otimes \mathfrak{F}$ y sea μ una medida admisible finita sobre $\mathcal{A}$ (o sobre $\cup_{\alpha>0}\mathcal{A} \cap ([0,\alpha]) \times \Omega)$ y finita sobre $\mathcal{A} \cap ([0,\alpha]) \times \Omega)$ para cada $\alpha > 0$).

(a) Para todo proceso acotado y medible X se tiene:

$$\int_{\mathbb{R}_+\times\Omega} X\, d\mu^{\mathcal{P}} = \int_{\mathbb{R}_+\times\Omega} X^{\mathcal{P}}\, d\mu$$

$$(\text{o } \int_{\mathbb{R}_+\times\Omega} X \mathbf{1}_{[0,\alpha]} d\mu^{\mathcal{P}} = \int_{\mathbb{R}_+\times\Omega} X^{\mathcal{P}} \mathbf{1}_{[0,\alpha]} d\mu \text{ para cada } \alpha > 0).$$

(b) $\mu = \mu^{\mathcal{P}}$ sobre $\mathcal{P}$ (o sobre $\mathcal{P}_\alpha$ para cada $\alpha > 0$).

(c) $(\mu^{\mathcal{P}})^{\mathcal{P}} = \mu^{\mathcal{P}}$ (esta propiedad motiva el término "proyección").

(d) Sea T un tiempo de paro predecible y definamos

$$\mu_T(A) = E(\int_{]0,\infty[} \mathbf{1}_A(t,\omega)\, d\mathbf{1}_{[T,\infty[}), \quad A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}_+) \otimes \mathfrak{F}^{(2)}$$

entonces $\mu_T^{\mathcal{P}} = \mu_T$ (nótese que μ_T está definida sobre todo $\mathcal{B}(\mathbb{R}_+) \otimes \mathfrak{F}$).

(2) $\int$ es una integral en el sentido de Stieltjes para cada ω fijo.

Demostración. (a) Es conveniente observar que por el Corolario 6.4 $(X\mathbf{1}_{[0,\alpha]})^{\mathcal{P}} = X^{\mathcal{P}}\mathbf{1}_{[0,\alpha]}$.

Ahora bien si $X = \mathbf{1}_A$ con $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}_+) \otimes \mathfrak{F}$ (o $A \in \cup_{\alpha>0}\mathcal{B}([0,\alpha]) \otimes \mathfrak{F}$) las identidades se siguen inmediatamente de la definición de $\mu^{\mathcal{P}}$. Por linealidad del operador $X \mapsto X^{\mathcal{P}}$, las identidades permanecen válidas para procesos simples y el hecho general se sigue por aproximación.

(b) Es inmediato, pues si $A \in \mathcal{P}$ (o $A \in \cup_{\alpha>0}\mathcal{P}_\alpha$) entonces $(\mathbf{1}_A)^{\mathcal{P}} = \mathbf{1}_A$.

(c) Para todo proceso acotado y medible X se tiene:

$$\int X\, d(\mu^{\mathcal{P}})^{\mathcal{P}} = \int X^{\mathcal{P}}\, d\mu^{\mathcal{P}} = \int (X^{\mathcal{P}})^{\mathcal{P}}\, d\mu = \int X^{\mathcal{P}}\, d\mu = \int X\, d\mu^{\mathcal{P}}$$

(asi mismo se tiene el resultado análogo en el segundo caso) por lo tanto $(\mu^{\mathcal{P}})^{\mathcal{P}} = \mu^{\mathcal{P}}$.

(d) Observamos que el proceso $\mathbf{1}_{[T,\infty[}(t,\omega)$, tiene su único salto en $T(\omega)$ para cada ω fija tal que $T(\omega) < \infty$, así pues $d\mathbf{1}_{[T,\infty[}$ es una medida atómica (si $T(\omega) < \infty$) con único átomo $\{T(\omega)\}$, de donde obtenemos que

$$\mu_T(A) = P(\omega \in \Omega : (T(\omega),\omega) \in A)$$

pues obviamente

$$\mathbf{1}_A(T(\omega),\omega) = \int_{]0,\infty[} \mathbf{1}_A(t,\omega)\, d\mathbf{1}_{[T,\infty[}$$

para cada $\omega \in \Omega$ fija. Pero para todo proceso acotado medible X tenemos:

$$\begin{aligned}\int X\, d\mu_T &= E(X_T \mathbf{1}_{\{T<\infty\}}) = E(X_T^{\mathcal{P}} \mathbf{1}_{\{T<\infty\}}) \\ &= \int X^{\mathcal{P}}\, d\mu_T = \int X\, d\mu_T^{\mathcal{P}},\end{aligned}$$

esto prueba que $\mu_T^{\mathcal{P}} = \mu_T$. □

6.10 Proposición. *Sea μ una medida admisible finita sobre $\mathcal{B}([0,\alpha]) \otimes \mathfrak{F}$ para cada $\alpha > 0$, entonces existe un único proceso V (módulo indistinguibilidad) tal que*

(a) *V es cadlag.*

(b) *$E|V|_t < \infty$ $\forall t \geq 0$*[3].

[3] $(|V|_t)_t$ es el proceso de variación de V, es decir

$$|V|_t(\omega) = \sup\{|V_0(\omega)| + \sum_{k=1}^{n} |V_{s_k}(\omega) - V_{s_{k-1}}(\omega)| : 0 = s_0 < s_1 < \cdots < s_n = t,\ n = 1,2,\ldots\}.$$

(c) *$\mu(A) = E(\int_{[0,\infty[} \mathbf{1}_A(t)\, dV_t)$ (tomando para cada ω fijo la integral de Stieltjes) para cada $A \in \mathcal{B}([0,\alpha]) \otimes \mathfrak{F}$, $\alpha > 0$.*

(d) *Si además μ es finita sobre $\mathcal{B}(\mathbb{R}_+) \otimes \mathfrak{F}$ entonces $E(|V|_\infty) < \infty$ (la variación $(|V|_t)$ es un proceso creciente por lo cual tiene sentido $|V|_\infty$).*

(e) *Si $\mu \geq 0$ entonces V es creciente (es decir, casi toda trayectoria es creciente[4]).*

Recípocramente, si V es un proceso con las condiciones (a) *y* (b), *entonces μ definida en* (c) *es una medida admisible finita sobre $\mathcal{B}([0,\alpha]) \otimes \mathfrak{F}$ para cada $\alpha > 0$.*

Demostración. Se toma la descomposición de Hahn para $\mu = \mu^+ - \mu^-$. Así podemos restringirnos al caso positivo $\mu \geq 0$. (Se obtiene V^+ para μ^+ y V^- para μ^- y el proceso buscado será $V^+ - V^-$).

Ahora, para cada t fijo, definamos: $\gamma_t(B) = \mu([0,t] \times B)$, $B \in \mathfrak{F}$; γ_t es una medida finita sobre $\mathfrak{F}$ y es absolutamente continua con respecto a P ya que μ es admisible (si $P(B) = 0$ entonces $[0,t] \times B$ es evanescente).

Sea V_t' una densidad de γ_t: $V_t' = \dfrac{d\gamma_t}{dP}$.

V_t' es casi lo que buscamos, ahora sólo hay que tomar versiones "buenas". Tenemos

$$\mu([0,t] \times B) = \gamma_t(B) = \int_B V_t'\, dP = E(\mathbf{1}_B V_t').$$

Como $\mu \geq 0$, si $t_1 \leq t_2$ entonces $\gamma_{t_1} \leq \gamma_{t_2}$ y por lo tanto $V_{t_1}' \leq V_{t_2}'$ c.s.

Si

$$N_{r_1 r_2} = \{\omega \in \Omega : V_{r_1}'(\omega) > V_{r_2}'(\omega)\} \quad \text{y} \quad N = \bigcup_{\substack{r_1 < r_2 \\ r_1, r_2 \in \mathbb{Q}_+}} N_{r_1 r_2},$$

entonces $P(N) = 0$ (ya que para todos $r_1, r_2 \in \mathbb{Q}_+$ con $r_1 < r_2$, $P(N_{r_1 r_2}) = 0$).

Definimos

$$V_t(\omega) = \begin{cases} \inf\{V_r'(\omega) : r > t,\ r \in \mathbb{Q}_+\}, & \text{si } \omega \notin N \\ 0, & \text{si } \omega \in N. \end{cases}$$

Es claro que V_t es cadlag, creciente y $V_t = V_t'$ c.s. Así, V_t es una versión cadlag de la densidad. Por la definicion de V_t,

$$\mu([0,t] \times B) = E(\mathbf{1}_B V_t) = E(\int_{[0,\infty[} \mathbf{1}_{[0,t]\times B}\, dV_s), \text{ para todos } t \in \mathbb{R}_+,\ B \in \mathfrak{F}.$$

[4] Advertencia. En esta monografía "creciente" siempre significa "no decreciente", es decir $t_1 < t_2$ implica $V_{t_1} \leq V_{t_2}$.

Es inmediato que

$$\mu(A) = E(\int_{[0,\infty[} \mathbf{1}_A \, dV_s), \quad A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}_+) \otimes \mathfrak{F}.$$

Unicidad: Si $(V_t'')_{t \in \mathbb{R}_+}$ es otro proceso con las condiciones pedidas, $V_t'' = V_t$ c.s. y como ambos son cadlag, son indistinguibles.

El recíproco es claro. □

Observación. El proceso V no es necesariamente adaptado. La filtración no se menciona en esta proposición.

Ahora pasaremos al teorema más importante en este capítulo.

6.11 Teorema de Doléans. *Sea μ una medida admisible finita sobre $\mathcal{B}([0,\alpha]) \otimes \mathfrak{F}$ para cada $\alpha > 0$ y Y sea V el proceso dado por la proposición anterior. Entonces:*

$$\mu = \mu^{\mathcal{P}} \quad \textit{si y sólo si} \quad V \textit{ es predecible.}$$

En otras palabras, V es predecible si y sólo si para cada X proceso medible acotado,

$$\int X \mathbf{1}_{[0,\alpha]} \, d\mu = \int X^{\mathcal{P}} \mathbf{1}_{[0,\alpha]} \, d\mu, \quad \forall \alpha > 0.$$

O, más explícitamente, si y sólo si para cada X medible acotado,

$$E(\int_{[0,\infty[} X_t \mathbf{1}_{[0,\alpha]}(t) \, dV_t) = E(\int_{[0,\infty[} X_t^{\mathcal{P}} \mathbf{1}_{[0,\alpha]}(t) \, dV_t), \quad \forall \alpha > 0.$$

Observación. En 6.9(d) se definió μ_T para T tiempo de paro predecible y se vió que $\mu_T = \mu_T^{\mathcal{P}}$. El proceso correspondiente V es $\mathbf{1}_{[T,\infty[}$ que es predecible.

Demostración. Supongamos que V es predecible. Queremos probar que $\mu = \mu^{\mathcal{P}}$; lo haremos en 3 pasos.

1. Podemos suponer $V_0 = 0$, ya que se puede reemplazar V por $V - V_0$.

En efecto: El proceso que es igual a V_0 para cada $t > 0$ es predecible porque es adaptado y continuo (V_0 es $\mathfrak{F}_0$-medible) y la medida que corresponde a este proceso está concentrada en $(\{0\} \times F, \ F \in \mathfrak{F})$. Sea μ_0 dicha medida. Veremos que μ_0 tiene la propiedad deseada $\mu_0^{\mathcal{P}} = \mu_0$: si X es un proceso medible y acotado,

$$\begin{aligned} \int X \, d\mu_0 &= E(X_0 V_0) = E(V_0 E(X_0 | \mathfrak{F}_0)) = E(V_0 X_0^{\mathcal{P}}) \\ &= \int X^{\mathcal{P}} \, d\mu_0 = \int X \, d\mu_0^{\mathcal{P}} \end{aligned}$$

ya que $E(X_0|\mathfrak{F}_0) = X_0^{\mathcal{P}}$ por 6.6 (recordemos que $\mathfrak{F}_{0-} = \mathfrak{F}_0$).

Si μ es la medida que corresponde a V, $\mu - \mu_0$ corresponde a $V - V_0$ y en estas condiciones es claro que μ tiene la propiedad deseada si y sólo si $\mu - \mu_0$ la tiene, ya que:

$$(\mu - \mu_0)^{\mathcal{P}} = \mu^{\mathcal{P}} - \mu_0^{\mathcal{P}} = \mu^{\mathcal{P}} - \mu_0,$$

por lo que

$$(\mu - \mu_0)^{\mathcal{P}} = \mu - \mu_0 \quad \text{si y sólo si} \quad \mu^{\mathcal{P}} = \mu.$$

2. Podemos suponer que V es creciente:

Cada trayectoria de V es de variación finita, por lo tanto $V = V^+ - V^-$ (V^+, V^- crecientes)[5]. Tenemos que probar que V^+ y V^- son predecibles. Basta mostrar que si V es predecible entonces $(|V|_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ es también predecible, ya que entonces $V^+ \equiv \frac{1}{2}(|V| + V)$, $V^- \equiv \frac{1}{2}(|V| - V)$ también lo serán.

V es cadlag adaptado y predecible, por lo tanto $\Delta V = V - V_-$ también lo es.

Por otra parte, $\Delta|V|_t = |\Delta V_t|$ y en consecuencia $(\Delta|V|_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ es predecible.

Finalmente $|V|_t = \Delta|V|_t + |V|_{t-}$. Como $(|V|_{t-})_t$ es adaptado y cag, es predecible por lo que $(|V|_t)_t$ también lo es.

3. Ahora demostraremos que si V es un proceso predecible creciente, $V_0 = 0$ entonces $\mu = \mu^{\mathcal{P}}$.

Sea X un proceso medible y acotado, $X \geq 0$. Basta mostrar que

$$E(\int_0^\infty X_t\, dV_t) = E(\int_0^\infty X_t^{\mathcal{P}}\, dV_t).$$

Para cada ω fijo, sea

$$g_s(\omega) = \inf\{t \geq 0 : V_t(\omega) \geq s\}.$$

Como V es creciente, $V_0 = 0$, g_s es también creciente como función de s y $g(0) = 0$. Aplicando el teorema de cambio de variable:

$$\int_0^\infty X_t\, dV_t = \int_0^\infty X_{g_s} \mathbf{1}_{\{g_s<\infty\}}\, ds$$

y por lo tanto

$$E(\int_0^\infty X_t\, dV_t) = E(\int_0^\infty X_{g_s} \mathbf{1}_{\{g_s<\infty\}}\, ds).$$

(ds= medida de Lebesgue en $\mathbb{R}_+$)

[5]Advertencia. Se trata de la descomposición de Hahn (o de Jordan) de la función con variación finita. Es decir $V_t^+ \neq (V_t)^+ = \max(V_t, 0)$.

Por otra parte, para s fijo, g_s como función de ω es un tiempo de paro predecible, ya que es el comienzo de un conjunto predecible:

$$A = \{(t,\omega) : V(t,\omega) \geq s\} \quad \text{y} \quad [D_A] \subset A \quad (\text{ver } 4.15).$$

Así

$$\begin{aligned} E(\int_0^\infty X_t dV_t) &= E(\int_0^\infty X_{g_s} \mathbf{1}_{\{g_s<\infty\}} ds) = \int_0^\infty E(X_{g_s} \mathbf{1}_{\{g_s<\infty\}}) ds \\ &= \int_0^\infty E(X_{g_s}^{\mathcal{P}} \mathbf{1}_{\{g_s<\infty\}})\, ds = E(\int_0^\infty X_{g_s}^{\mathcal{P}} \mathbf{1}_{\{g_s<\infty\}}\, ds) \\ &= E(\int_0^\infty X_t^{\mathcal{P}}\, dV_t), \end{aligned}$$

en donde la tercera igualdad se sigue del teorema de proyección predecible 6.1.

Ahora veamos el recíproco. Supongamos que $\mu = \mu^{\mathcal{P}}$.

Se puede suponer que μ es finita sobre $\mathbb{R}_+ \times \Omega$. En efecto, reemplazando μ por $\mu|_{[0,\alpha]\times\Omega}$ y utilizando la unicidad de V tenemos:

Si V^α es el proceso que corresponde a $\mu|_{[0,\alpha]\times\Omega}$, entonces para $\alpha_1 < \alpha_2$ se tiene $V^{\alpha_1} = V^{\alpha_2}$ sobre $[0,\alpha_1]$ por unicidad de V^{α_1}. Si sabemos que V^α es predecible para cada $\alpha > 0$, $V = \lim_{\alpha\to\infty} V^\alpha$ será también predecible.

Sea entonces μ una medida admisible finita sobre $\mathcal{B}(\mathbb{R}_+) \otimes \mathfrak{F}$, $\mu = \mu^{\mathcal{P}}$. Para mostrar que el proceso correspondiente V es predecible utilizaremos el Teorema 4.29. Recordemos que hay que probar:

(i) Para todo T tiempo de paro totalmente inaccesible $\Delta V_T = 0$ c.s. sobre $\{T < \infty\}$.

(ii) Para todo T tiempo de paro predecible $V_T \mathbf{1}_{\{T<\infty\}}$ es $\mathfrak{F}_{T-}$-medible.

Mostraremos primero (ii) . Para ello utilizaremos el siguiente resultado:

6.12 Lema. *Si $\mathcal{A}$ es una σ-álgebra completa y ξ es variable aleatoria con la propiedad: "para toda variable aleatoria acotada η tal que $E(\eta|\mathcal{A}) = 0$ se tiene $E(\eta\xi) = 0$". Entonces ξ es $\mathcal{A}$-medible.*

Demostración del Lema. Sea ζ una variable aleatoria acotada y $\eta = \zeta - E(\zeta|\mathcal{A})$. Es claro que $E(\eta|\mathcal{A}) = 0$ y por la suposición $E(\xi(\zeta - E(\zeta|\mathcal{A})) = 0$. Por lo tanto

$$\begin{aligned} E(\zeta\xi) &= E(\xi E(\zeta|\mathcal{A})) = E(E(\xi|\mathcal{A}) E(\zeta|\mathcal{A})) \\ &= E(E(E(\xi|\mathcal{A})\,\zeta|\mathcal{A})) = E(\zeta\, E(\xi|\mathcal{A})). \end{aligned}$$

Así, $E(\zeta\xi) = E(\zeta\, E(\xi|\mathcal{A}))$ para cada ζ acotada y entonces, $\xi = E(\xi|\mathcal{A})$ c.s. y por completez ξ es $\mathcal{A}$-medible. □

Regresando a la demostración aplicaremos el lema a $\xi = V_T\mathbf{1}_{\{T<\infty\}}$. Si mostramos que para toda η tal que $E(\eta|\mathfrak{F}_{T-}) = 0$ se tiene que $E(\eta V_T\mathbf{1}_{\{T<\infty\}}) = 0$ podremos afirmar que (ii) se cumple.

$$E(\eta V_T\mathbf{1}_{\{T<\infty\}}) = E(\int_0^\infty \eta\mathbf{1}_{[0,T]}dV) = \int \eta\mathbf{1}_{[0,T]}d\mu = \int (\eta\mathbf{1}_{[0,T]})^{\mathcal{P}}d\mu$$

(aquí se usó la hipótesis $\mu = \mu^{\mathcal{P}}$).

Ahora bien, $(\eta\mathbf{1}_{[0,T]})^{\mathcal{P}} = \mathbf{1}_{[0,T]}M_-$ por el Lema 6.3 (donde $M_t = E(\eta|\mathfrak{F}_t)$ y $(M_-)_t = M_{t-}$) y por lo tanto

$$\int (\eta\mathbf{1}_{[0,T]})^{\mathcal{P}}\,d\mu = \int M_-\mathbf{1}_{[0,T]}\,d\mu = 0.$$

En efecto, para cada $t \geq 0$, $T\wedge t$ es un tiempo de paro predecible y por el Lema 4.30

$$M_{(T\wedge t)-} = E(\eta|\mathfrak{F}_{(T\wedge t)-}) = E(E(\eta|\mathfrak{F}_{T-})|\mathfrak{F}_{(T\wedge t)-}) = 0,$$

porque $E(\eta|\mathfrak{F}_{T-}) = 0$. Pero $M_{(T\wedge t)-} = 0$ para todo $t \geq 0$ claramente implica que $M_{t-} = 0$ si $t \leq T$, es decir $\mathbf{1}_{[0,T]}M_- \equiv 0$.

Pasemos a la demostración de (i). Por (ii) sabemos que V es adaptado (tomando tiempos de paro deterministas). Además, sabemos que si T es un tiempo de paro totalmente inaccesible entonces $\mathbf{1}_{[T]}^{\mathcal{P}} = 0$ (ver Observación 6.2(c)).

Como μ es admisible, tenemos:

$$\begin{aligned} 0 = \int \mathbf{1}_{[T]}^{\mathcal{P}}\,d\mu &= \int \mathbf{1}_{[T]}\,d\mu = E(\int_{[0,\infty[} \mathbf{1}_{[T]}(t)\,dV_t) \\ &= E(\Delta V_T\mathbf{1}_{\{T<\infty\}}). \end{aligned}$$

Así, $E(\Delta V_T\mathbf{1}_{\{T<\infty\}}) = 0$ para todo T tiempo de paro totalmente inaccesible.

Ahora, para todo $F \in \mathfrak{F}_T$, T_F es un tiempo de paro totalmente inaccesible si T lo es. Por lo tanto,

$$0 = E(\Delta V_{T_F}\mathbf{1}_{\{T_F<\infty\}}) = E(\Delta V_T\mathbf{1}_F\mathbf{1}_{\{T<\infty\}}).$$

ΔV_T es $\mathfrak{F}_T$-medible por ser V cadlag adaptado. Por lo tanto $\Delta V_T = 0$ c.s. en $\{T < \infty\}$. □

Capítulo 7

Consecuencias del teorema de Doléans

Aquí veremos algunas aplicaciones del teorema de Doléans, y algunos resultados importantes, como la descomposición de Doob-Meyer, se obtendrán como corolarios del mismo. También se podrá dar una generalización de la descomposición de Doob-Meyer para cuasimartingalas, lo que nos permitirá definir el importante concepto de compensador.

7.1 Notación. $\mathcal{W}^0$ = clase de procesos cadlag, adaptados con variación finita sobre cada intervalo $[0,t]$, $t > 0$ (es decir para todo $t > 0$, casi cada trayectoria tiene variación finita sobre $[0,t]$).

$$\begin{aligned} \mathcal{W}^1 &= \{V \in \mathcal{W}^0 : \forall t \geq 0,\ E(|V|_t) < \infty\} \\ \mathcal{W}^1_\infty &= \{V \in \mathcal{W}^0 : E(|V|_\infty) < \infty\}. \end{aligned}$$

Los elementos de $\mathcal{W}^1$ se llaman *procesos de variación integrable*, y los elementos de $\mathcal{W}^1_\infty$ *procesos de variación total integrable.*

7.2 Observación. La Proposición 5.8 implica que cada proceso en $\mathcal{W}^1$ es cuasimartingala de la clase DL, ya que $E(\sup_{s\leq t}|V_s|) \leq E(|V|_t)$.

7.3 Proposición. *Sea μ una medida admisible finita sobre $\mathcal{P}$ (o finita sobre $\mathcal{P}_\alpha$ para cada $\alpha > 0$). Entonces existe un único proceso $V \in \mathcal{W}^1$ predecible tal que*

$$\mu(A) = E(\int_{[0,\infty[} \mathbf{1}_A \, dV) \quad \textit{para cada } A \in \mathcal{P} \ (\textit{o } A \in \bigcup_{\alpha>0} \mathcal{P}_\alpha)$$

(la integral $\int$ debe entenderse como la integral de Stieltjes para cada ω fija).

Si $\mu \geq 0$, V es, además, creciente.

Demostración. Se considera a $\mu^{\mathcal{P}}$, ya que es una medida admisible finita sobre $\mathcal{B}([0,\alpha])\otimes\mathfrak{F}$, (para cada $\alpha > 0$) y a esta medida le aplicaremos el teorema de Doléans.

Sabemos que $\mu^{\mathcal{P}}(A) = \mu(A)$ para cada $A \in \mathcal{P}$ (o en $\cup_{\alpha>0}\mathcal{P}_\alpha$), y que $(\mu^{\mathcal{P}})^{\mathcal{P}} = \mu^{\mathcal{P}}$ sobre $\mathcal{B}([0,\alpha]) \otimes \mathfrak{F}$ (para cada $\alpha > 0$).

Por el teorema de Doléans, existe V predecible (creciente si $\mu \geq 0$, por Proposición 6.10(e)) tal que

$$\mu^{\mathcal{P}}(\cdot) = E(\int_{[0,\infty[} \mathbf{1}_{(\cdot)}\, dV) \quad \text{y} \quad V \in \mathcal{W}^1,$$

y entonces

$$\mu(\cdot) = E(\int_{[0,\infty[} \mathbf{1}_{(\cdot)}\, dV) \quad \text{para cada } (\cdot) \in \mathcal{P}.$$

Veamos ahora la unicidad: supongamos que V' es otro proceso predecible tal que $V' \in \mathcal{W}^1$ y además

$$\mu(\cdot) = E(\int_{[0,\infty[} \mathbf{1}_{(\cdot)}\, dV') \quad \text{para cada } (\cdot) \in \mathcal{P}.$$

Entonces, para cada X proceso medible y acotado, y toda $\alpha > 0$

$$E(\int_{[0,\infty[} X_t^{\mathcal{P}} \mathbf{1}_{[0,\alpha]}\, dV_t') = \int X^{\mathcal{P}} \mathbf{1}_{[0,\alpha]}\, d\mu = \int X \mathbf{1}_{[0,\alpha]}\, d\mu^{\mathcal{P}}. \tag{7.1}$$

Por otro lado, a V' le corresponde una medida definida en $\mathcal{B}([0,\alpha]) \otimes \mathfrak{F}$, para cada $\alpha > 0$. Sea μ' esta medida. Por el teorema de Doleáns esa medida tiene la propiedad de que $\mu' = (\mu')^{\mathcal{P}}$ (por ser V' predecible). Así:

$$E(\int X^{\mathcal{P}} \mathbf{1}_{[0,\alpha]}\, dV') = \int X^{\mathcal{P}} \mathbf{1}_{[0,\alpha]}\, d\mu' = \int X \mathbf{1}_{[0,\alpha]}\, d\mu', \tag{7.2}$$

y esto vale para todo X proceso medible y acotado y cada $\alpha > 0$.

De (7.1) y (7.2) concluimos que $\mu' = \mu^{\mathcal{P}}$ y como la correspondencia entre la medida y el proceso es única, (módulo indistinguibilidad) tenemos que $V = V'$. □

7.4 Proposición. *Sean μ y V como en la proposición anterior. Entonces V es continuo si y sólo si para todo T tiempo de paro predecible (o basta predecible y acotado sobre su parte finita) se cumple que $\mu([T]) = 0$.*

Demostración.

$$\mu([T]) = E(\int_{[0,\infty[} \mathbf{1}_{[T]}\, dV) = E(\Delta V_T \mathbf{1}_{\{T<\infty\}}).$$

Si V es continuo es obvio que $\mu([T]) = 0$.

Recíprocramente, ΔV es un proceso predecible por ser diferencia de dos predecibles, por lo tanto de la Proposición 4.18 (o más bien de la observación que sigue a esa proposición) se sigue que ΔV es indistinguible de cero. □

Observación. Si $\mu \geq 0$ bastaría con todo tiempo de paro predecible y acotado, porque entonces, para cada T predecible y acotado sobre su parte finita, digamos $T\mathbf{1}_{\{T<\infty\}} \leq n$, se tiene

$$0 = \mu([T \wedge n]) \geq \mu([T]) = E(\Delta V_T \mathbf{1}_{\{T<\infty\}}) \geq 0.$$

7.5 Corolario (Teorema de Descomposición de Doob-Meyer). *Sea X una submartingala cad de la clase DL. Entonces existe un único proceso $V \in \mathcal{W}^1$, $V_0 = 0$, creciente y predecible tal que $X - V$ es una martingala.*

Demostración. La medida de Doléans λ_X de X existe sobre $\mathcal{P}$ (finita sobre cada $\mathcal{P}_\alpha$) por 5.24 y 5.26 y es admisible. Podemos aplicar la Proposicion 7.3 a esta medida. Sea V el proceso predecible asociado a λ_X. Se tiene para $V \in \mathcal{W}^1$ y cada $F \in \mathfrak{F}_0$,

$$0 = \lambda_X(\{0\} \times F) = E(\int_{[0,\infty[} \mathbf{1}_{\{0\}\times F}\, dV) = E(V_0 \cdot \mathbf{1}_F).$$

Como V es adaptado, V_0 es $\mathfrak{F}_0$-medible y entonces $V_0 = 0$ c.s.

Veamos ahora que $X - V$ es una martingala: sean $s < t$, $F \in \mathfrak{F}_s$,

$$\begin{aligned} \lambda_X(]s,t] \times F) &= E((X_t - X_s)\,\mathbf{1}_F) = E(\int_{[0,\infty[} \mathbf{1}_{]s,t]\times F}\, dV) \\ &= E((V_t - V_s)\mathbf{1}_F). \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$E([(X_t - V_t) - (X_s - V_s)]\,\mathbf{1}_F) = 0 \text{ para cada } F \in \mathfrak{F}_s,\ s < t.$$

Lo que muestra que $X - V$ es una martingala.

Unicidad:

Si V' es otro proceso con las propiedades enunciadas entonces se tiene

$$E((X_t - X_s)\mathbf{1}_F) = E((V_t' - V_s')\mathbf{1}_F) \text{ para cada } F \in \mathfrak{F}_s,\ s < t$$

lo cual se puede escribir como

$$\lambda_X(]s,t] \times F) = E(\int_{[0,\infty[} \mathbf{1}_{]s,t]\times F}\, dV').$$

Esto, por el Teorema 3.12 implica

$$\lambda_X(B) = E(\int_{[0,\infty[} \mathbf{1}_B \, dV'), \text{ para cada } B \in \mathcal{P}.$$

En consecuencia $V = V'$, por la Proposición 7.3. □

7.6 Corolario. *Sea X una submartingala cad de la clase DL y V el proceso del teorema de Doob-Meyer asociado. Entonces V es continuo si y sólo si $E(\Delta X_T) = 0$*[1] *para cada T tiempo de paro predecible acotado.*

Obsérvese que V puede ser continuo aunque X no lo sea (ver e.g. Ejemplo 7.14(c)).

Demostración. Por la observación que sigue la Proposición 7.4 basta mostrar que $\lambda_X([T]) = E(\Delta X_T)$.

Sea $(T_n)_n$ una sucesión que predice a T. Entonces $\Delta X_T = \lim_{n\to\infty}(X_T - X_{T_n})$, también sobre $\{T = 0\}$ por la convención, y por lo tanto

$$E(\Delta X_T) = \lim_{n\to\infty} E(X_T - X_{T_n}) = \lim_{n\to\infty} \lambda_X(]T_n, T]) = \lambda_X([T]). \tag{7.3}$$

La primera desigualdad se cumple porque X está en DL y la segunda se sigue del Corolario 5.27. □

7.7 Corolario. *Sea X una cuasimartingala cad de la clase DL. Entonces existe un único proceso predecible $\widetilde{X} \in \mathcal{W}^1$, $\widetilde{X}_0 = 0$ tal que $X - \widetilde{X}$ es martingala.*

Si $E(\Delta X_T \mathbf{1}_{\{T<\infty\}}) = 0$ para todo T tiempo de paro predecible y acotado sobre su parte finita entonces $\widetilde{X}$ es continuo.

Demostración. La demostración es idéntica que para submartingalas, solamente hay que cambiar (7.3) un poquito: si T es predecible y acotado sobre su parte finita, digamos $T\mathbf{1}_{T<\infty} \leq \alpha$ y $(T_n)_n$ predicen a T, entonces

$$\begin{aligned} E(\Delta X_T \mathbf{1}_{\{T<\infty\}}) &= E(\lim_{n\to\infty}(X_{T\wedge\alpha} - X_{T_n\wedge\alpha})) = \lim_{n\to\infty} E(X_{T\wedge\alpha} - X_{T_n\wedge\alpha}) \\ &= \lim_{n\to\infty} \lambda_X(]T_n \wedge \alpha, T \wedge \alpha]) = \lambda_X([T]). \end{aligned}$$

□

[1] Convenimos en que $\Delta X_0 = 0$.

7.8 Definición. Si X es una cuasimartingala cad de la clase DL, al único proceso predecible $\widetilde{X}$ tal que

(i) $\widetilde{X}_0 = 0$,
(ii) $\widetilde{X} \in \mathcal{W}^1$,
(iii) $X - \widetilde{X}$ sea martingala,

lo llamaremos *el compensador de* X, o la *proyección dual predecible de* X (a veces se denota $({}^{\mathcal{P}}X)$).

7.9 Observaciones. (a) ¿Porqué se llama al compensador $\widetilde{X}$ de X *proyección dual predecible de* X? Una motivación general podría ser que la aplicación $X \mapsto \widetilde{X}$ se puede representar como $X \mapsto \lambda_X \mapsto \lambda_X^{\mathcal{P}} \mapsto \widetilde{X}$, donde $\lambda_X \mapsto \lambda_X^{\mathcal{P}}$ es la proyección dual predecible. Además, en el caso especial, si X mismo está en $\mathcal{W}^1$ y $X_0 = 0$ podemos considerar a la medida μ asociada a X por la Proposición 6.10 y que satisface:

$$\mu(\cdot) = E\left(\int_{[0,\infty[} \mathbf{1}_{(\cdot)}\, dX_t\right) \qquad \forall (\cdot) \in \mathcal{B}[0,\alpha] \otimes \mathfrak{F} \quad \forall \alpha > 0.$$

Como $X_0 = 0$, $\mu = \lambda_X$ sobre $\mathcal{P}_\alpha$, para cada $\alpha > 0$ (donde λ_X es la medida de Doléans asociada a X). Ahora al considerar la proyección dual predecible $\mu^{\mathcal{P}}$ de μ es claro por una parte que $\mu^{\mathcal{P}} = (\lambda_X)^{\mathcal{P}}$ y por otra, sabemos que a $(\lambda_X)^{\mathcal{P}}$ le corresponde un proceso predecible que es precisamente el compensador $\widetilde{X}$ de X. Es decir, en este caso, el compensador de X es el proceso asociado a la proyección dual predecible $\mu^{\mathcal{P}}$ de μ.

(b) Si $X \in \mathcal{W}^1$ y no suponemos que $X_0 = 0$ se tiene que $\mu|_{\mathcal{P}_\alpha}$ difiere de λ_X sólo en los conjuntos de la forma $\{0\} \times F$, $F \in \mathfrak{F}_0$, y lo que se cumple en este caso es:

$$\mu(\cdot) = \lambda_X(\cdot) + \mu((\{0\} \times \Omega) \cap (\cdot)), \quad \forall (\cdot) \in \mathcal{P}_\alpha \quad \forall \alpha > 0.$$

Ahora el proceso asociado con $\mu^{\mathcal{P}}$ resulta ser $\widetilde{X} + X_0$

(c) Si X es cuasimartingala cad de la clase DL y Y es acotado predecible, entonces

$$\int_{[0,\alpha]\times\Omega} Y d\lambda_X = E\int_{[0,\alpha]} Y d\widetilde{X} = \int_{[0,\alpha]\times\Omega} Y d\lambda_{\widetilde{X}}$$

para cada $\alpha > 0$.

En efecto, $\lambda_X = \lambda_{\widetilde{X}}$ por las definiciones, y la primera igualdad se sigue de la construcción de $\widetilde{X}$ (ver la demostración de 7.5).

(d) Si $X \in \mathcal{W}^1$, $X_0 = 0$ y Y es acotado predecible, entonces $E\int_{\mathbb{R}_+} Y d\widetilde{X} = E\int_{\mathbb{R}_+} Y dX$.

En efecto, basta aplicar (a) y (c). Observemos además que para X creciente la igualdad se cumple para todo Y predecible no negativo.

(e) Si X es cuasimartingala cad de la clase DL entonces: X es martingala si y sólo si $\widetilde{X} = 0$.

(f) Si $V \in \mathcal{W}^1$, $V_0 = 0$, entonces: V es martingala si y sólo si la medida asociada a V es 0 sobre $\mathcal{P}_\alpha$, para cada $\alpha > 0$, es decir, $\mu(\cdot) = E(\int_{[0,\infty[} \mathbf{1}_{(\cdot)} dV) = 0$ para cada $(\cdot) \in \cup_{\alpha>0} \mathcal{P}_\alpha$.

En efecto, si $V \in \mathcal{W}^1$, $V_0 = 0$ y μ es su medida asociada, es claro que $\mu|\mathcal{P}_\alpha = \lambda_V$ para cada $\alpha > 0$.

De esto, la equivalencia es inmediata.

7.10 Corolario. *Sea X una martingala predecible y supongamos que $X \in \mathcal{W}^0$. Entonces $X_t = X_0$ para cada $t \in \mathbb{R}_+$.*

Demostración. (a) En el caso que además $X \in \mathcal{W}^1$ los procesos

$$(X_t - (X_t - X_0))_{t\in\mathbb{R}_+} \quad \text{y} \quad (X_t - 0)_{t\in\mathbb{R}_+}$$

son martingalas, $(X_t - X_0) \in \mathcal{W}^1$, es 0 en 0 y es predecible. Por la unicidad del compensador obtenemos $X_t - X_0 = 0$ para cada $t \in \mathbb{R}_+$.

(b) Supongamos ahora que X es una martingala predecible y $X \in \mathcal{W}^0$. Sabemos por la Proposición 4.31 que toda martingala predecible es continua, por lo tanto, el proceso $|X|_t$ (= variación de $(X_s)_s$ en $[0,t]$) es continuo y adaptado; en consecuencia $T_n = \inf\{t : |X|_t \geq n\}$ son tiempos de paro para cada $n \in \mathbb{N}$ y además

$$\lim_{n\to\infty} T_n(\omega) = \infty \quad \text{y} \quad T_n \leq T_{n+1}, \quad n = 1, 2, \ldots.$$

Por otra parte, $(X_{T_n \wedge t})_{t\in\mathbb{R}_+}$ es martingala continua y $|X|_{T_n\wedge t} \leq n \vee |X_0|$ porque $|X|_t$ es continuo. Por (a) tenemos entonces que $X_{T_n\wedge t} = X_0$ para cada $t \in \mathbb{R}_+$, $n \in \mathbb{N}$.

Como $X_t = \lim_{n\to\infty} X_{T_n\wedge t}$ porque $T_n \uparrow \infty$, tenemos $X_t = X_0$ para cada $t \in \mathbb{R}_+$. □

7.11 Observación. Como consecuencia de este corolario, se tiene: si X una cuasimartingala cad, de la clase DL y V es un proceso en $\mathcal{W}^0$, predecible, $V_0 = 0$, tal que $X - V$ es una martingala, entonces $V = \widetilde{X}$ y automáticamente $V \in \mathcal{W}^1$.

7.12 Corolario. *Sea M una martingala, $M \in \mathcal{W}^1$ y sea X un proceso acotado predecible. Entonces $(\int_{]0,t]} X_s \, dM_s)_{t\in\mathbb{R}_+}$ es una martingala.*

Vale la pena darse cuenta que es aquí donde por primera vez se ve la utilidad de la noción de predecibilidad.

Primero daremos un resultado que se usará en la demostración del corolario:

7.13 Lema. *Sea Y un proceso cadlag adaptado, $Y_0 = 0$. Entonces: Y es una martingala si y sólo si $E(Y_T) = 0$ para cada T tiempo de paro acotado.*

Demostración del Lema. La necesidad se sigue del teorema de muestreo opcional de Doob (Apéndice D, Teorema D.3).

Supongamos ahora que $E(Y_T) = 0$ para todo T tiempo de paro acotado. Fijemos $s < t$ y $F \in \mathfrak{F}_s$ y definamos el tiempo de paro:

$$T(\omega) = \begin{cases} s, & \omega \in F \\ t, & \omega \in F^c. \end{cases}$$

Por hipótesis, tenemos

$$0 = E(Y_T) = E(Y_s \mathbf{1}_F) + E(Y_t(1 - \mathbf{1}_F)),$$

es decir,

$$E(Y_s \mathbf{1}_F) = E(Y_t \mathbf{1}_F) - E(Y_t).$$

Pero $E(Y_t) = 0$ por la hipótesis; con esto queda claro que $(Y_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ es una martingala. □

Demostración del Corolario 7.12. Claramente podemos suponer que $M_0 = 0$. Por el lema anterior, el corolario es consecuencia de:

$$E(\int_{]0,T]} X_s \, dM_s) = 0 \text{ para cada } T \text{ tiempo de paro acotado.}$$

Lo cual es inmediato por la Observación 7.9(d) y por el hecho de que

$$E(\int_{]0,T]} X_s \, dM_s) = E(\int_{[0,\infty[} X_s \mathbf{1}_{]0,T]} \, dM_s),$$

ya que el proceso $\mathbf{1}_{]0,T]}$ es predecible por ser adaptado y continuo por la izquierda y el proceso X es predecible por hipótesis. □

Veamos por fin algunos ejemplos.

7.14 Ejemplos. (a) W proceso de Wiener, $(\mathfrak{F}_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ la filtración usual generada por W (Definición 1.7), $X_t = W_t^2$. Sabemos que X es una submartingala no negativa, por lo tanto $X \in DL$ (ver 5.19(a)).

En este caso $\widetilde{X}_t = t$, ya que $X_t - t = W_t^2 - t$ es una martingala y el proceso determinista $Y_t \equiv t$ es predecible, $Y_0 = 0$ y $Y \in \mathcal{W}^1$.

Por otra parte, la proyección predecible $X_t^{\mathcal{P}}$ de X_t es el mismo ($X_t^{\mathcal{P}} = X_t$) ya que X_t es adaptado y continuo.

(b) Sea X un proceso con incrementos independientes, integrable, continuo por la derecha y tal que la función determinista $t \mapsto E(X_t)$ sea continua por la derecha y tenga variación finita en cada intervalo.

Sea $(\mathfrak{F}_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ la filtración usual generada por X. El proceso $(X_t - E(X_t))_{t\in\mathbb{R}_+}$ es una martingala continua por la derecha, por lo tanto X es una cuasimartingala de la clase DL.

En este caso $\widetilde{X}_t = E(X_t) - E(X_0)$, que es una función determinista, con variación finita.

En particular, si X es un proceso de Poisson con parámetro λ, entonces $\widetilde{X}_t = \lambda t$.

(c) Sea $X = \mathbf{1}_{[T,\infty[}$, T tiempo de paro.

(i) Si T es predecible entonces X es predecible (Teorema 3.12), además $X \in \mathcal{W}^1$. Entonces su compensador $\widetilde{X}$ es $X - X_0$, ya que $X - \widetilde{X} = X_0$ es una martingala constante.

(ii) Si T es totalmente inaccesible, para cada tiempo de paro S predecible finito tenemos,

$$E(\Delta X_S) = E(\mathbf{1}_{\{T=S\}}) = 0.$$

Con esto podemos concluir (por el Corolario 7.6) que el compensador del proceso $X = \mathbf{1}_{[T,\infty[}$ es continuo.

Veamos dos ejemplos concretos.

1. Sean $(N_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ el proceso de Poisson con parámetro λ, $(\mathfrak{F}_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ la filtración usual generada por N; T el tiempo del primer salto de N. Sabemos que T es totalmente inaccesible (Ejemplo 2.30(b)). En este caso

$$X_t = \mathbf{1}_{[T,\infty[}(t) = N_{t\wedge T}$$

y $(N_{t\wedge T} - \lambda t \wedge T)_{t\in\mathbb{R}_+}$ es una martingala, por lo tanto $\widetilde{X}_t = t \wedge T$ ya que $(t \wedge T)_{t\in\mathbb{R}_+}$ es adaptado continuo y $(t \wedge T)_{t\in\mathbb{R}_+} \in \mathcal{W}^1$.

2. $\Omega = [0,1]$, $\mathfrak{F}_t = \overline{\sigma(\mathcal{B}([0,t]),\ ]t,1])}$ si $t < 1$, con P =medida de Lebesgue y $\mathfrak{F}_t = \overline{\mathcal{B}([0,1])}$ si $t \geq 1$.

Definimos $T(\omega) = \omega$ y mostramos que es totalmente inaccesible (Ejemplo 2.30(a)).

Si $X_t = \mathbf{1}_{[T,\infty[}(t)$, el compensador $\widetilde{X}_t$ de X_t tiene la forma:

$$\widetilde{\mathbf{1}}_{[T,\infty[}(t) = \widetilde{X}_t = \int_0^{t\wedge T} \frac{1}{1-u}\, du = -\log(1 - t \wedge T).$$

En efecto, este proceso es adaptado, continuo por lo tanto predecible, tiene variación finita y es 0 en 0.

Hay que verificar que la diferencia $X - \widetilde{X}$ es una martingala, es decir

$$Y_t = \mathbf{1}_{[T,\infty[}(t) + \log(1 - t \wedge T)$$

es una martingala. Para ello se calcula $E(Y_t|\mathfrak{F}_s)$ utilizando la fórmula:

$$E(\xi|\mathfrak{F}_s) = \xi\mathbf{1}_{[0,s]} + \left(\frac{1}{1-s}\int_s^1 \xi(\omega)\,d\omega\right)\mathbf{1}_{]s,1]}.$$

Lo que se deja como ejercicio al lector.

(d) Sea X un proceso de Markov, continuo por la derecha, con la propiedad de Feller y sea $(\mathfrak{F}_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ la filtración usual generada por X (ver la Observación 1.11). Para cada función f en el dominio del generador infinitesimal A del semigrupo asociado al proceso se tiene que

$$f(X_t) - f(X_0) - \int_0^t Af(X_s)\,ds \tag{7.4}$$

es una martingala (ver e.g. [24, Proposición 5.27]). En consecuencia

$$\widetilde{f(X_t)} = \int_0^t Af(X_s)\,ds.$$

□

Capítulo 8

Estructura de las martingalas cuadrado integrables

En este capítulo utilizaremos la noción de compensador para investigar la estructura de las martingalas cuadrado integrables. Demostraremos que cada martingala se descompone en la suma de una martingala continua y de la suma compensada de los saltos.

Vamos a usar constantemente los teoremas clásicos de martingalas que se pueden encontrar en cualquier libro de texto sobre procesos, ver también el Apéndice D.

8.1 Definición.

$$\begin{aligned} \mathcal{M}^2_\infty &= \{M : M \text{ es una martingala cadlag y } \sup_{t\geq 0} E(M_t^2) < \infty\},^{(1)} \\ \mathcal{M}^2 &= \{M : M \text{ es una martingala cadlag y } E(M_t^2) < \infty \ \forall t \geq 0\}. \end{aligned}$$

Los elementos de $\mathcal{M}^2$ se llaman *martingalas cuadrado integrables* y los elementos de $\mathcal{M}^2_\infty$ *martingalas uniformemente cuadrado integrables.*

8.2 Observaciones. (a) Por las condiciones usuales acerca de la filtración, podríamos quitar la condición de que M sea cadlag.

(b) El nombre de los elementos de $\mathcal{M}^2_\infty$ está justificado por la bien conocida desigualdad de Doob (ver Apéndice D, Teorema D.8)

$$E(\sup_{t\geq 0} M_t^2) \leq 4 \sup_{t\geq 0} E(M_t^2). \tag{8.1}$$

(1) Claramente todas las martingalas se toman con respecto a la misma filtración $(\mathfrak{F}_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ fija, que satisface las condiciones usuales.

(c) Sabemos que $M \in \mathcal{M}^2_\infty$ si y sólo si existe $M_\infty \in L^2(\Omega, \mathfrak{F}_\infty, P)$ tal que $M_t = E(M_\infty | \mathfrak{F}_t)$, $t \in \mathbb{R}_+$, y que entonces $E(M^2_\infty) = \sup_{t \geq 0} E(M^2_t)$.

Con base en esto, $\mathcal{M}^2_\infty$ puede considerarse como un espacio de Hilbert con producto escalar definido así:

$$(M, N) = E(M_\infty N_\infty).$$

Denotemos por $\|\cdot\|_{\mathcal{M}^2_\infty}$ a la norma correspondiente. Es claro que los elementos de $\mathcal{M}^2_\infty$ son clases de equivalencia módulo indistinguibilidad. También es inmediato ver que la aplicación $M \mapsto M_\infty$ nos da un isomorfismo entre $\mathcal{M}^2_\infty$ y $L^2(\Omega, \mathfrak{F}_\infty, P)$.

(d) Análogamente $\mathcal{M}^2$ es un espacio de Fréchet con seminormas $\sqrt{E(M^2_t)}$, $t \geq 0$ y los elementos de $\mathcal{M}^2$ deben ser vistos como las clases de equivalencia módulo indistinguibilidad.

8.3 Notación. $\mathcal{M}^{2c}_\infty$ y $\mathcal{M}^{2c}$ son los subespacios de $\mathcal{M}^2_\infty$ y $\mathcal{M}^2$, respectivamente, formados por las martingalas continuas.

8.4 Proposición. *Los subespacios $\mathcal{M}^{2c}_\infty$ y $\mathcal{M}^{2c}$ son cerrados en $\mathcal{M}^2_\infty$ y $\mathcal{M}^2$, respectivamente.*

Este resultado es consecuencia inmediata del

8.5 Lema. *Sea $(M^n)_n$ una sucesión convergente en $\mathcal{M}^2_\infty$ (o en $\mathcal{M}^2$). Entonces existe una sucesión $(M^{n_k})_k$ tal que para P-casi toda ω, la sucesión $(M^{n_k}_t(\omega))_k$ converge uniformemente en $t \in \mathbb{R}_+$ (o converge uniformemente en t sobre cada intervalo acotado de $\mathbb{R}_+$ en el caso $\mathcal{M}^2$).*

Demostración. Para el caso $\mathcal{M}^2_\infty$, sean $M^n, M \in \mathcal{M}^2_\infty$ y supongamos que M^n converge a M en $\mathcal{M}^2_\infty$. Entonces, por (8.1)

$$\begin{aligned} E(\sup_{t\geq 0}(M^n_t - M_t)^2) &\leq 4 \sup_{t \geq 0} E((M^n_t - M_t)^2) \\ &= 4\|M^n - M\|^2_{\mathcal{M}^2_\infty} \to 0 \text{ si } n \to \infty \text{ (hipótesis)}. \end{aligned}$$

Si llamamos $Z_n = \sup_{t \geq 0}(M^n_t - M_t)^2$, tenemos que $\lim_{n\to\infty} E(Z_n) = 0$, por lo tanto $Z_n \to 0$ en probabilidad. En consecuencia, existe $(n_k)_k$ tal que $Z_{n_k} \to 0$ c.s.; es decir,

$$\sup_t (M^{n_k}_t - M_t)^2 \to 0 \quad \text{c.s. ,}$$

que es equivalente a decir que $(M^{n_k}_t)_k$ converge uniformemente a M_t en $t \in \mathbb{R}_+$, para P-casi cada $\omega \in \Omega$.

Para el caso $\mathcal{M}^2$, basta considerar las martingalas $(M^n_{t\wedge\alpha})_{t\in\mathbb{R}_+}$ que pertenecen a $\mathcal{M}^2_\infty$ y usar la primera parte para obtener convergencia uniforme en $[0,\alpha]$.

Se toma $\alpha = n$, $n = 1, 2, \ldots$ y para cada $n \in \mathbb{N}$ se obtiene una subsucesión que converge uniformemente en $[0,n]$. Para obtener una subsucesión común se utiliza el método diagonal. □

8.6 Ejemplos. (a) Si W es el proceso de Wiener, es claro que $W \in \mathcal{M}^{2c}$.

(b) Si N es el proceso de Poisson con parámetro λ, respecto a $(\mathfrak{F}_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$, $(N_t - \lambda t)_{t\in\mathbb{R}_+} \in \mathcal{M}^2$. □

Otro ejemplo, aparentemente sencillo, está dado por el siguiente teorema, con la demostración sorprendentemente complicada. Este ejemplo es importante pues, como veremos, es uno de los "ladrillos" básicos de los cuales está compuesta cada martingala cuadrado integrable.

8.7 Teorema. *Sea T un tiempo de paro predecible o totalmente inaccesible y sea $\xi \in L^2(\Omega, \mathfrak{F}_T, P)$. Si $A = \xi \mathbf{1}_{[T,\infty[}$, entonces $A - \widetilde{A} \in \mathcal{M}^2_\infty$.*

Demostración. Es claro que $\widetilde{A}$ existe (ver 7.2). Se puede suponer que $\xi \geq 0$ (si no lo es, se toma ξ^+, ξ^-).

(a) En el caso de T predecible la demostración es fácil porque se puede calcular explícitamente el compensador $\widetilde{A}$ de A:

$$X = E(\xi|\mathfrak{F}_{T-})\mathbf{1}_{[T,\infty[} - E(\xi|\mathfrak{F}_{T-})\mathbf{1}_{\{T=0\}}. \tag{8.2}$$

Veremos que el compensador $\widetilde{A}$ es precisamente X, y entonces tendremos que

$$A_\infty - \widetilde{A}_\infty = \xi \mathbf{1}_{\{T<\infty\}} - E(\xi|\mathfrak{F}_{T-})\mathbf{1}_{\{T<\infty\}} + E(\xi|\mathfrak{F}_{T-})I_{\{T=0\}},$$

lo cual claramente pertenece a $L^2(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ y así obtendremos que $A - \widetilde{A} \in \mathcal{M}^2_\infty$.

Para probar que el compensador está dado por (8.2) observemos primero que X es creciente y $X_0 = 0$. También es fácil probar que X es predecible. En efecto, $E(\xi|\mathfrak{F}_{T-})\,\mathbf{1}_{\{T=0\}}$ es $\mathfrak{F}_0$-medible (ejercicio), por lo tanto como proceso es predecible; por otra parte sabemos (ver el Lema 4.28) que $E(\xi|\mathfrak{F}_{T-})\,\mathbf{1}_{[T,\infty[}$ es predecible y es claro que tiene variación integrable.

Entonces basta probar que $A - X$ es una martingala. Esto es consecuencia del

8.8 Lema. *Si η es una variable aleatoria $\mathfrak{F}_T$-medible y $E(\eta|\mathfrak{F}_{T-}) = 0$ entonces $\eta \mathbf{1}_{[T,\infty[}$ es una martingala.*

Demostración del Lema. Recordemos que un proceso adaptado cadlag es una martingala si y sólo si $E(M_S) = E(M_0)$ para todo S tiempo de paro acotado (ver 7.13).

Basta demostrar entonces que $E(\eta \mathbf{1}_{[T,\infty[}(S)) = E(\eta \mathbf{1}_{[T,\infty[}(0))$ para cada S tiempo de paro acotado. Tenemos

$$\begin{aligned} E(\eta \mathbf{1}_{[T,\infty[}(0)) &= E(\eta \mathbf{1}_{\{T=0\}}) = E(E(\eta \mathbf{1}_{\{T=0\}} | \mathfrak{F}_{T-})) \\ &= E(\mathbf{1}_{\{T=0\}} E(\eta | \mathfrak{F}_{T-})) = 0 \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} E(\eta \mathbf{1}_{[T,\infty[}(S)) &= E(\eta \mathbf{1}_{\{T\le S\}}) = E(E(\eta \mathbf{1}_{\{T\le S\}} | \mathfrak{F}_{T-})) \\ &= E(\mathbf{1}_{\{T\le S\}} E(\eta | \mathfrak{F}_{T-})) = 0, \end{aligned}$$

ya que $\{T \le S\} \in \mathfrak{F}_{T-}$ por el Corolario 2.12. □

(b) Ahora pasemos al caso en que T es un tiempo de paro totalmente inaccesible. Es claro que $A_\infty \in L^2$, entonces basta demostrar que $\widetilde{A}_\infty \in L^2$. Sabemos que $\widetilde{A}_\infty \in L^1$ ya que por la Observación 7.9(c) tenemos

$$E(A_\infty - A_0) = \lambda_A(\mathbb{R}_+ \times \Omega) = E(\widetilde{A}_\infty). \tag{8.3}$$

La dificultad consiste en pasar de L^1 a L^2. Se va a demostar que

$$E(\widetilde{A}_\infty^2) \le 4E(\xi^2). \tag{8.4}$$

(i) Primero se supone que ξ es acotada. Sabemos que $\widetilde{A}$ es continuo; en efecto si S es un tiempo de paro predecible acotado, $E(\Delta A_S) = E(\xi \mathbf{1}_{\{T=S\}}) = 0$ (por ser T totalmente inaccesible) y aplicamos 7.6. Además $\widetilde{A}_0 = 0$.
Tenemos entonces:

$$\begin{aligned} \widetilde{A}_\infty^2 &= \int_0^\infty \int_0^\infty d\widetilde{A}_s \, d\widetilde{A}_t = \int_0^\infty \int_0^t d\widetilde{A}_s \, d\widetilde{A}_t \\ &\quad + \int_0^\infty \int_t^\infty d\widetilde{A}_s \, d\widetilde{A}_t = \int_0^\infty \int_0^t d\widetilde{A}_s \, d\widetilde{A}_t \\ &\quad + \int_0^\infty \int_0^t d\widetilde{A}_s \, d\widetilde{A}_t = 2\int_0^\infty \widetilde{A}_t \, d\widetilde{A}_t. \end{aligned}$$

Observemos que $A_0 = 0$ porque T no puede ser 0 por ser totalmente inaccesible. Por la Observación 7.9(d) tenemos:

$$\begin{aligned} E(\widetilde{A}_\infty^2) &= 2E(\int_0^\infty \widetilde{A}_t \, d\widetilde{A}_t) = 2E(\int_0^\infty \widetilde{A}_t \, dA_t) \\ &= 2E(\xi \widetilde{A}_T \mathbf{1}_{\{T<\infty\}}) \le 2E(\xi \widetilde{A}_\infty) < \infty \end{aligned}$$

(la última desigualdad vale porque $\widetilde{A}_\infty \in L^1$ y ξ es acotada). Así, hemos mostrado que $\widetilde{A}_\infty \in L^2(\Omega, \mathfrak{F}, P)$.

Veamos que (8.4) es válido; por la desigualdad de Schwarz tenemos que

$$E(\widetilde{A}^2_\infty) \leq 2E(\xi\,\widetilde{A}_\infty) \leq 2\sqrt{E(\xi^2)}\sqrt{E(\widetilde{A}^2_\infty)} < \infty$$

por lo tanto

$$\sqrt{E(\widetilde{A}^2_\infty)} \leq 2\sqrt{E(\xi^2)}.$$

(ii) Ahora se hará para el caso ξ arbitraria: sean ξ_n, $n = 1, 2, \dots$ variables aleatorias en $L^2(\Omega, \mathfrak{F}_T, P)$ acotadas, tales que $\xi_n \uparrow \xi$ puntualmente (por ejemplo $\xi_n = \xi \wedge n$), y sean $A^n = \xi^n \mathbf{1}_{[T,\infty[}$, $n = 1, 2, \dots$ Sabemos que $\widetilde{A}^n$ existe y

$$E[(\widetilde{A}^n_\infty)^2] \leq 4E[(\xi^n)^2] \quad n = 1, 2, \dots.$$

Basta demostrar ahora que $\widetilde{A}^n_\infty \uparrow \widetilde{A}_\infty$ c.s.
$A^{n+1} - A^n = (\xi^{n+1} - \xi^n)\mathbf{1}_{[T,\infty[}$ y como $\xi^{n+1} - \xi^n$ es positivo $A^{n+1} - A^n$ es creciente; por lo tanto su compensador también es creciente. Por otro lado, por linealidad de la proyección dual predecible tenemos $\widetilde{A^{n+1} - A^n} = \widetilde{A}^{n+1} - \widetilde{A}^n$. En consecuencia $\widetilde{A}^{n+1}_\infty - \widetilde{A}^n_\infty \geq 0$, lo que permite afirmar que existe una variable aleatoria A^* tal que $\widetilde{A}^n_\infty \uparrow A^*$.
El mismo razonamiento aplicado a $A - A^n$ da que $\widetilde{A}^n_\infty \leq \widetilde{A}_\infty$, para cada n y entonces $A^* \leq \widetilde{A}_\infty$.
Por otra parte,

$$E(A^*) = \lim_{n\to\infty} E(\widetilde{A}^n_\infty) = \lim_{n\to\infty} E(A^n_\infty) = E(A_\infty) = E(\widetilde{A}_\infty)$$

(la tercera y la última igualdad se siguen de (8.3) ya que $A^n_0 = A_0 = 0$ c.s.). Como $A^* \leq \widetilde{A}_\infty$ y $E(A^*) = E(\widetilde{A}_\infty)$ se tiene que $A^* = \widetilde{A}_\infty$ c.s. □

8.9 Proposición. *Sea T un tiempo de paro predecible o totalmente inaccesible, $\xi \in L^2(\Omega, \mathfrak{F}_T, P)$ y $A = \xi\mathbf{1}_{[T,\infty[}$, entonces $\|A - \widetilde{A}\|^2_{\mathcal{M}^2_\infty}$ es igual a:*
(i) $E[(\xi - E(\xi|\mathfrak{F}_{T-}) + E(\xi|\mathfrak{F}_{T-})\mathbf{1}_{\{T=0\}})^2\mathbf{1}_{\{T<\infty\}}]$ *si T es predecible, o*
(ii) $E(\xi^2\mathbf{1}_{\{T<\infty\}})$ *si T es totalmente inaccesible.*

Demostración. (i) Sea T predecible. Por el teorema anterior (ver (8.2))

$$\widetilde{A} = E(\xi|\mathfrak{F}_{T-})\mathbf{1}_{[T,\infty[} - E(\xi|\mathfrak{F}_{T-})\mathbf{1}_{\{T=0\}},$$

de donde

$$A_\infty - \widetilde{A}_\infty = \xi \mathbf{1}_{\{T<\infty\}} - E(\xi|\mathfrak{F}_{T-})\mathbf{1}_{\{T<\infty\}} + E(\xi|\mathfrak{F}_{T-})\mathbf{1}_{\{T=0\}}.$$

Factorizando a $\mathbf{1}_{\{T<\infty\}}$ y recordando que $\|A-\widetilde{A}\|^2_{\mathcal{M}^2_\infty} = E(A_\infty - \widetilde{A}_\infty)^2$ obtenemos la fórmula deseada.

(ii) Sea T totalmente inaccesible. Tenemos

$$E(A_\infty - \widetilde{A}_\infty)^2 = E(\xi^2 \mathbf{1}_{\{T<\infty\}}) - 2E(A_\infty \widetilde{A}_\infty) + E(\widetilde{A}_\infty)^2,$$

así pues, basta probar que

$$E(\widetilde{A}_\infty)^2 = 2E(A_\infty \widetilde{A}_\infty)$$

ya que ambas esperanzas son finitas por 8.7.

Supongamos primero que $\xi \geq 0$. Entonces A y $\widetilde{A}$ son crecientes; integrando por partes como en la demostración de 8.7 obtenemos

$$\begin{aligned} E(\widetilde{A}_\infty)^2 &= 2E(\int_0^\infty \widetilde{A}_t \, d\widetilde{A}_t) = 2E(\int_0^\infty \widetilde{A}_t \, dA_t) \\ &= 2E(\widetilde{A}_T \xi \mathbf{1}_{\{T<\infty\}}) = 2E(\widetilde{A}_T A_\infty). \end{aligned}$$

Pero $A_T = \xi \mathbf{1}_{\{T<\infty\}} = A_\infty$, así que reescribimos

$$\begin{aligned} E(\widetilde{A}_\infty)^2 &= 2E((\widetilde{A}_T - A_T)\xi \mathbf{1}_{\{T<\infty\}}) + 2E(\xi^2 \mathbf{1}_{\{T<\infty\}}) \\ &= 2E(E(\widetilde{A}_\infty - A_\infty|\mathfrak{F}_T)\xi \mathbf{1}_{\{T<\infty\}}) + 2E(\xi^2 \mathbf{1}_{\{T<\infty\}}) \\ &= 2E(\widetilde{A}_\infty A_\infty) \end{aligned}$$

(para la segunda igualdad se usó el teorema de muestreo opcional).

Sea ahora $\xi \in L^2(\Omega, \mathfrak{F}_T, P)$ arbitraria. Escribimos $\xi = \xi^+ - \xi^-$ y sea $A = A^+ - A^-$ la de la descomposición de Jordan. Es inmediato verificar que de hecho $A^+ = \xi^+ \mathbf{1}_{[T,\infty[}$ y $A^- = \xi^- \mathbf{1}_{[T,\infty[}$.

Por el método del caso anterior obtenemos que

$$E(\widetilde{A^+_\infty})^2 = 2E(\widetilde{A^+_\infty} A^+_\infty) \quad \text{y} \quad E(\widetilde{A^-_\infty})^2 = 2E(\widetilde{A^-_\infty} A^-_\infty)$$

y usándolo nuevamente obtenemos también

$$E(\widetilde{A^+_\infty}\widetilde{A^-_\infty}) = 2E(\widetilde{A^+_\infty} A^-_\infty) = 2E(\widetilde{A^-_\infty} A^+_\infty).$$

En consecuencia

$$\begin{aligned}
E(\widetilde{A}_\infty)^2 &= E(\widetilde{A^+_\infty} - \widetilde{A^-_\infty})^2 = E(\widetilde{A^+_\infty})^2 - 2E(\widetilde{A^+_\infty}\widetilde{A^-_\infty}) + E(\widetilde{A^-_\infty})^2 \\
&= 2(E(\widetilde{A^+_\infty}A^+_\infty) - E(\widetilde{A^+_\infty}A^-_\infty) - E(\widetilde{A^-_\infty}A^+_\infty) + E(\widetilde{A^-_\infty}A^-_\infty)) \\
&= 2E(\widetilde{A}_\infty A_\infty).
\end{aligned}$$

□

Las fórmulas obtenidas serán de utilidad más adelante. Ahora definiremos un proceso que es de suma importancia ya que, como veremos en el capítulo siguiente, la definición de la integral estocástica estará basada en él.

Sea $M \in \mathcal{M}^2$ fija, entonces M^2 es una submartingala no negativa, por lo tanto $M^2 \in DL$ (ver 5.19(a)) y λ_{M^2} es una medida positiva σ-aditiva sobre $\mathcal{P}$. Si $M, N \in \mathcal{M}^2$, entonces en virtud de la fórmula:

$$MN = \frac{1}{4}((M+N)^2 - (M-N)^2)$$

concluimos que MN es una cuasimartingala cadlag de la clase DL y por lo tanto λ_{MN} es una medida con signo sobre $\mathcal{P}_\alpha$, para cada $\alpha > 0$.

Esta discusión garantiza la existencia del proceso que a continuación definimos.

8.10 Definición. Sean $M, N \in \mathcal{M}^2$ fijas; definimos el *proceso de Doob-Meyer* determinado por M y N mediante la fórmula: $\langle M, N\rangle = \widetilde{MN}$. Si $M = N$, denotaremos $\langle M, M\rangle = \langle M\rangle$.

8.11 Observaciones. (a) $\langle M, N\rangle$ es el único proceso en $\mathcal{W}^1$, predecible, 0 en $t = 0$ y tal que $MN - \langle M, N\rangle$ es una martingala. Notamos que $\langle M\rangle$ es creciente.

(b) i) $\langle M, N\rangle = \langle N, M\rangle$.

ii) $\langle M' + M'', N\rangle = \langle M', N\rangle + \langle M'', N\rangle$ y $\langle \lambda M, N\rangle = \lambda\langle M, N\rangle$ para cada $\lambda \in \mathbb{R}$ (por (a)).

(c) $\langle M, N\rangle = \frac{1}{4}(\langle M+N\rangle - \langle M-N\rangle)$.

(d) Si $M \in \mathcal{M}^{2c}$ entonces $\langle M\rangle$ es continuo. Lo mismo si $M \in \mathcal{M}^2$ y no tiene saltos predecibles (por 7.7).

(e) Si $M \in \mathcal{M}^2_\infty$ entonces $E\langle M, M\rangle_\infty < \infty$ (porque λ_{M^2} es finita en este caso).

(b) sugiere que $\langle\cdot,\cdot\rangle$ es "bilineal" y (c) podría llamarse la fórmula de "polarización".

8.12 Ejemplos. (a) Sea $M = W$ el proceso de Wiener, entonces $\langle W\rangle_t = t$, pues $W_t^2 - t$ es una martingala continua, 0 en 0.

(b) Sea N el proceso de Poisson con parámetro $\lambda > 0$, entonces $M_t = N_t - \lambda t$ es una martingala con $\langle M \rangle_t = \lambda t$ (ejercicio).

(c) Modificando el primer ejemplo obtenemos un proceso no determinista como sigue: sea T un tiempo de paro y sea $M = W^T$ (i.e. $M_t = W_{t \wedge T}$), entonces por el teorema de Doob $M \in \mathcal{M}^2$ y $\langle M \rangle_t = t \wedge T$. □

8.13 Definición (ortogonalidad fuerte). Sean $M, N \in \mathcal{M}^2$; decimos que M y N son *fuertemente ortogonales* si $\lambda_{MN} = 0$. En tal caso escribiremos $M \amalg N$.

8.14 Proposición. *Sean $M, N \in \mathcal{M}^2$. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

(a) $M \amalg N$.

(b) MN *es una martingala.*

(c) $\langle M, N \rangle = 0$.

(d) $E(M_T N_T) = E(M_0 N_0)$ *para todo T tiempo de paro acotado.*

(e) *Sea $\mathcal{T}$ una familia de tiempos de paro acotados, tales que $\{[0,T] : T \in \mathcal{T}\}$ generan a $\mathcal{P}$, entonces*

$$E(M_T N_T) = E(M_0 N_0), \quad \textit{para cada } T \in \mathcal{T}.$$

Demostración. Claramente $(a) \iff (b) \iff$ (c) y $(d) \Rightarrow (e)$. Por el Lema 7.13 se tiene que $(b) \iff (d)$; así pues basta probar $(e) \Rightarrow (a)$. Si (e) se cumple entonces por el Corolario 5.27, $\lambda_{MN}([0,T]) = E(M_T N_T - M_0 N_0) = 0$ para cada $T \in \mathcal{T}$. Por lo tanto $\lambda_{MN} = 0$ sobre $\sigma\{[0,T] : T \in \mathcal{T}\} = \mathcal{P}$. □

8.15 Corolario. *Si $M, N \in \mathcal{M}^2_\infty$ y $N_0 = 0$ (o $M_0 = 0$), entonces la ortogonalidad fuerte implica la ortogonalidad usual de M_T y N_T como elementos de $L^2(\Omega, \mathfrak{F}_T, P)$ para todo tiempo de paro T y en particular M, N son ortogonales en el sentido usual en el espacio de Hilbert $\mathcal{M}^2_\infty$.*

Demostración. Como $MN - \langle M, N \rangle$ y MN son martingalas uniformemente integrables, obtenemos:

$$0 = E(M_0 N_0) = E(M_\infty N_\infty) = E\langle M, N \rangle_\infty$$

y

$$E(M_T N_T) = E(M_0 N_0) = 0.$$

□

A continuación damos unos ejemplos importantes de martingalas fuertemente ortogonales. Empezaremos con un ejemplo inmediato.

8.16 Ejemplo. Sea $N \in \mathcal{M}^2$ constante, es decir $N_t = N_0$, entonces $M \amalg N$, para cada $M \in \mathcal{M}^2$. Se sigue inmediatamente del inciso (d) de la Proposición 8.14.

8.17 Proposición. *Sea $A \in \mathcal{W}^1$ creciente tal que $A - \tilde{A} \in \mathcal{M}^2$. Entonces para cada $M \in \mathcal{M}^{2c}$ se tiene $(A - \tilde{A}) \amalg M$.*

Demostración. Está claro que $\tilde{A}$ existe (Observación 7.2). Sin pérdida de generalidad podemos suponer (y así lo haremos) que $A_0 = 0$, pues por el ejemplo anterior $A_0 \amalg M$ (como $A - \tilde{A} \in \mathcal{M}^2$, entonces $E(A_0)^2 < +\infty$ y así $A_0 \in \mathcal{M}^2$. Tomamos $A - A_0$ en lugar de A). Por razones idénticas podemos suponer también que $M_0 = 0$.

Sea $N = A - \tilde{A}$, probaremos que $E(N_T M_T) = 0$ para cada T tiempo de paro en alguna familia extensa que después se especificará. El siguiente resultado de interés independiente, será necesario.

8.18 Lema. *Sea A un proceso cadlag creciente y adaptado, $A_0 = 0$ y M una martingala acotada, entonces para todo T tiempo de paro finito tal que $E(A_T) < \infty$ se tiene $E(\int_0^T M_t dA_t) = E(M_T A_T)$.*

Demostración del Lema. Sea $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n < \infty$ una partición de $\mathbb{R}_+$, entonces

$$
\begin{aligned}
& E(\sum_{i=1}^{n} M_{t_i \wedge T}(A_{t_i \wedge T} - A_{t_{i-1} \wedge T})) \\
= \quad & E(\sum_{i=1}^{n} M_{t_i \wedge T} A_{t_i \wedge T} - \sum_{i=1}^{n-1} M_{t_{i+1} \wedge T} A_{t_i \wedge T}) \\
= \quad & E(M_{t_n \wedge T} A_{t_n \wedge T}) + E(\sum_{i=1}^{n-1} A_{t_i \wedge T}(M_{t_i \wedge T} - M_{t_{i+1} \wedge T})) \qquad (8.5)
\end{aligned}
$$

Pero A es adaptado y M es martingala, así pues si condicionamos cada sumando en el último término con respecto a $\mathfrak{F}_{t_i \wedge T}$ $i = 1, 2, \ldots, n-1$, obtenemos que cada uno de ellos es cero y lo anterior es simplemente igual a $E(M_{t_n \wedge T} A_{t_n \wedge T})$. Si $t_n \to \infty$ y $\max_i(t_{i+1} - t_i) \to 0$, entonces por el teorema de convergencia dominada se tiene que:

$$
(8.5) \to E(\int_0^T M_t dA_t) \quad \text{y} \quad E(M_{t_n \wedge T} A_{t_n \wedge T}) \to E(M_T A_T),
$$

lo que termina la demostración del lema. □

Volviendo a la demostración de la proposición, aplicamos el lema anterior a A y $\tilde{A}$. Como $M \in \mathcal{M}^{2c}$ no necesariamente es acotada, definimos el tiempo de paro $T_n = \inf\{t : |M_t| \geq n\}$

$n = 1, 2, \ldots$ Es claro que $T_n \uparrow \infty$ y M^{T_n} es una martingala acotada en $\mathcal{M}^{2c}$, porque $M_0 = 0$; entonces para cada T tiempo de paro acotado

$$E(\int_0^{T_n \wedge T} M_t^{T_n} dA_t) = E(M_{T_n \wedge T} A_{T_n \wedge T}),$$

así mismo obtenemos la fórmula correspondiente para $\widetilde{A}$. Restándolas concluimos que:

$$E(\int_0^{T_n \wedge T} M_t^{T_n} dN_t) = E(M_{T_n \wedge T} N_{T_n \wedge T})$$

para todo T tiempo de paro acotado.

Por otra parte M^{T_n} es un proceso predecible acotado y N_t es una martingala en $\mathcal{W}^1$, así, por el Corolario 7.12 $Z_t^n = \int_0^t M_s^{T_n} dN_s$ es una martingala por lo que $E(Z_{T_n \wedge T}^n) = E(Z_0^n) = 0$ y entonces $E(M_{T_n \wedge T} N_{T_n \wedge T}) = 0$.

Para finalizar, observamos que $\{[0, T \wedge T_n]: T$ tiempo de paro acotado, $n \in \mathbb{N}\}$ genera a $\mathcal{P}$. □

8.19 Corolario. *Sea T un tiempo de paro predecible o totalmente inaccesible, $\zeta \in L^2(\Omega, \mathfrak{F}_T, P)$ y $A = \zeta \mathbf{1}_{[T,\infty[}$, entonces $(A - \widetilde{A}) \amalg M$ para cada $M \in \mathcal{M}^{2c}$.*

Demostración. Inmediata, aplicando la proposición anterior a $A^+ = \zeta^+ \mathbf{1}_{[T,\infty[}$ y a $A^- = \zeta^- \mathbf{1}_{[T,\infty[}$. □

Sin embargo podemos mejorar el corolario, pues basta con que $M \in \mathcal{M}^2$ y que no posea salto en T, concretamente:

8.20 Proposición. *Sea T un tiempo de paro predecible o totalmente inaccesible, $\zeta \in L^2(\Omega, \mathfrak{F}_T, P)$ y $A = \zeta \mathbf{1}_{[T,\infty[}$, entonces $(A - \widetilde{A}) \amalg M$ si $M \in \mathcal{M}^2$ y es tal que $\Delta M_T = 0$.*

Demostración. Sin pérdida de generalidad supondremos que $A_0 = 0$ y $\zeta \geq 0$. Sea $N = A - \widetilde{A}$ ($\in \mathcal{M}_\infty^2$ por 8.7); por argumentos ya utilizados basta probar que $E(M_S N_S) = 0$ para todo tiempo de paro acotado S. Por otro lado podemos suponer que $M \in \mathcal{M}_\infty^2$ (pues si $S \leq \alpha$, basta reemplazar M por $M^\alpha \in \mathcal{M}_\infty^2$). Aplicamos el Lema 8.18 cuatro veces a A y a $\widetilde{A}$, así como a las martingalas acotadas $M_t^{+n} := E(M_\infty^+ \wedge n | \mathfrak{F}_t)$ y $M_t^{-n} := E(M_\infty^- \wedge n | \mathfrak{F}_t)$ para obtener

$$E(\textstyle\int_0^S M_t^{\pm n} dA_t) = E(M_S^{\pm n} A_S) \quad \text{(2 aplicaciones)}$$

y

$$E(\textstyle\int_0^S M_t^{\pm n} d\widetilde{A}_t) = E(M_S^{\pm n} \widetilde{A}_S). \quad \text{(2 aplicaciones)}$$

Observamos que $M_t^{+n} \uparrow E(M_\infty^+|\mathfrak{F}_t)$ c.s. y $M_t^{-n} \uparrow E(M_\infty^-|\mathfrak{F}_t)$ c.s. Como A y $\widetilde{A}$ son crecientes se sigue del teorema de la convergencia monótona que

$$E(\int_0^S E(M_\infty^\pm|\mathfrak{F}_t)\,dA_t) = E(E(M_\infty^\pm|\mathfrak{F}_S)A_S),$$

así como las 2 relaciones correspondientes a $\widetilde{A}$. Se tiene que $M_t = E(M_\infty|\mathfrak{F}_t)$, entonces restando obtenemos $E\int_0^S M_t dA_t = E(M_S A_S)$, así como $E(\int_0^S M_t d\widetilde{A}_t) = E(M_S \widetilde{A}_S)$; pero $N = A - \widetilde{A}$ así que restando,

$$E(\int_0^S M_t dN_t) = E(M_S N_S).$$

No podemos usar el argumento final de la última proposición pues M no es necesariamente predecible, sin embargo escribimos $M_t = M_{t^-} + \Delta M_t$ y como $M_{t^-}\mathbf{1}_{[0,S]}$ es predecible, entonces (si $S \leq \alpha$)

$$\begin{aligned} E(\int_0^S M_t\,dN_t) &= E(\int_0^S M_{t^-}\mathbf{1}_{[0,S]}\,dN_t) + E(\int_0^S \Delta M_t\,dN_t) \\ &= E(\int_0^S \Delta M_t\,dN_t) \end{aligned}$$

Aquí hemos aplicado 7.12 al proceso acotado predecible $X_t^n = (\mathbf{1}_{[0,S]}M_{t^-} \wedge n) \vee (-n)$, $n = 1, 2, \ldots$ y luego utilizamos el teorema de la convergencia dominada, pues

$$E(\int_0^\alpha \sup_n |X_t^n| d|N|_t \leq E(\sup_{s\leq\alpha} |M_s|(A_\alpha + \widetilde{A}_\alpha)) < \infty$$

porque las variables aleatorias $\sup_{s\leq\alpha}|M_s|, A_\alpha, \widetilde{A}_\alpha$ son cuadrado integrables.

Como M es cadlag cada trayectoria tiene a lo mas una cantidad numerable de saltos y $A = \zeta\mathbf{1}_{[T,\infty[}$ tiene a lo más un único salto en T. Si T es predecible entonces por la fórmula (8.2) se tiene que $\widetilde{A}$ tiene a lo más un solo salto en T. Si T es totalmente inaccesible, $\widetilde{A}$ es continuo; en cualquier caso N tiene a lo más un único salto en T. En consecuencia,

$$E(\int_0^S \Delta M_t\,dN_t) = E(\Delta M_T \Delta N_T \mathbf{1}_{\{T\leq S\}}) = 0.$$

□

Ahora estamos ya preparados para demostrar el resultado principal de este capítulo.

8.21 Teorema (estructura de las martingalas cuadrado integrables). *Sea $M \in \mathcal{M}^2$ (o en $\mathcal{M}^2_\infty$). Existe una sucesión $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de tiempos de paro, cada uno predecible o totalmente inaccesible con gráficas ajenas y existe una única martingala $M^c \in \mathcal{M}^{2c}$ (o en $\mathcal{M}^{2c}_\infty$) tal que:*

(a) $M^c_0 = 0$

(b) *Si* $A_n = \Delta M_{T_n} \mathbf{1}_{[T_n,\infty[}$ *entonces*

$$M^c,\ A_1 - \widetilde{A}_1,\ \ldots,\ A_n - \widetilde{A}_n,\ \ldots$$

son fuertemente ortogonales.

(c) $M = M_0 + M^c + \sum_n (A_n - \widetilde{A}_n)$, *donde la serie converge en* $\mathcal{M}^2$ *(o en* $\mathcal{M}^2_\infty$*).*

(d)

$$\begin{aligned} E(M_t^2) &= E(M_0^2) + E(M_t^c)^2 + \sum_n E((A_n(t) - \widetilde{A}_n(t))^2) \\ &= E(M_0^2) + E(M_t^c)^2 + E(\sum_{s\leq t} (\Delta M_s)^2). \end{aligned}$$

(e) *Si* $M \in \mathcal{M}^2_\infty$,

$$\begin{aligned} E(M_\infty^2) &= E(M_0^2) + E((M^c_\infty)^2) + \sum_n E(\Delta M_{T_n})^2 \\ &= E(M_0^2) + E((M^c_\infty)^2) + E(\sum_t (\Delta M_t)^2). \end{aligned}$$

Demostración. Al reemplazar M por $M - M_0$ podemos suponer que $M_0 = 0$.

Por el Corolario 4.24 existe $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de tiempos de paro con las gráficas ajenas, con cada T_n predecible o totalmente inaccesible, tal que $\{\Delta M \neq 0\} \subset \cup_n [T_n]$. Claramente también se tiene que $\{\Delta M^\alpha \neq 0\} \subset \cup_n [T_n]$ para cada martingala parada M^α $(\alpha > 0)$. Como la distribución de cada T_n puede tener a lo más un número contable de átomos existe una sucesión $(\alpha_m)_{m\in\mathbb{N}}$, $\alpha_m > 0$, $\alpha_m \uparrow \infty$, tal que $\Delta M_{\alpha_m} \neq 0$ c.s. para todo $m \in \mathbb{N}$. Entonces el proceso parado $A_n^{\alpha_m} = \Delta M_{T_n} \mathbf{1}_{[T_n,\infty[}(\cdot \wedge \alpha_m)$ es indistinguible del proceso $\Delta M_{T_n}^{\alpha_m} \mathbf{1}_{[T_n,\infty[}$, para cada $n, m \in \mathbb{N}$. Por otro lado, por la unicidad del compensador es inmediato probar que $\widetilde{A}_m^{\alpha_m} = (\widetilde{A}_n)^{\alpha_m}$. En consecuencia, si (a)-(e) se cumplen para cada martingala M^{α_m}, $m \in \mathbb{N}$, entonces también se cumplen para M. En virtud de estas observaciones vemos que basta demostrar el teorema para $M \in \mathcal{M}^2_\infty$.

Entonces supongamos que $M \in \mathcal{M}^2_\infty$. Denotemos $N_n = A_n - \widetilde{A}_n$.

Como $\Delta M_{T_n} \in L^2(\Omega, \mathfrak{F}_{T_n}, P)$, podemos aplicar los resultados precedentes a A_n y obtener:
(i) $N_n \in \mathcal{M}^2_\infty$.

(ii) N_n tiene a lo más un único salto en T_n y $\Delta(N_n)_{T_n} = \Delta M_{T_n}$. En efecto, si T_n es totalmente inaccesible, $\widetilde{A}_n$ es continuo (Corolario 7.7) y el único salto de N_n coincide con el salto de M en T_n.

Si T_n es predecible, conocemos explícitamente a $\widetilde{A}_n$ (fórmula (8.2)). Pero $E(\Delta M_{T_n}|\mathfrak{F}_{T_n^-})$ $= E(M_{T_n} - M_{T_n^-}|\mathfrak{F}_{T_n^-}) = 0$ por el Lema 4.30, así se ve que $\widetilde{A}_n = 0$.

(iii) $N_n(0) = 0$ para cada n, ya que $\widetilde{A}_n(0) = 0$ por definición del compensador y $A_n(0) = 0$ porque M es continua en 0.

(iv) $N_n \amalg N_m$ si $n \neq m$, por la Proposición 8.20, por (ii) y porque las gráficas de los T_n son ajenas, además como $N_n(0) = 0$, para todo n, se tiene también ortogonalidad débil $N_n \perp N_m$, si $n \neq m$ (o sea ortogonalidad en el espacio de Hilbert M^2_∞, ver 8.15).

Además, si denotamos $Y_n = M - \sum_{k\leq n} N_k$ entonces para $m \leq n$ Y_n no tiene salto en T_m; por lo tanto, nuevamente por la Proposición 8.20

$$Y_n \amalg N_m, \quad Y_n \perp N_m \quad \text{y} \quad Y_n \amalg \sum_{k\leq n} N_k, \quad Y_n \perp \sum_{k\leq n} N_k.$$

En consecuencia

$$\|M\|^2_{\mathcal{M}^2_\infty} = \|Y_n\|^2_{\mathcal{M}^2_\infty} + \sum_{k\leq n} \|N_k\|^2_{\mathcal{M}^2_\infty},$$

o equivalentemente

$$E(M^2_\infty) = E(Y_n(\infty))^2 + \sum_{k\leq n} E(N_k(\infty))^2.$$

Lo que muestra que $\sum_{k\leq n} E(N_k(\infty))^2$ es una sucesión real que converge cuando $n \to \infty$ y entonces $\sum_{k\leq n} N_k(\infty)$ converge en $L^2(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ o sea $(\sum_{k\leq n} N_k)_n$ converge en $\mathcal{M}^2_\infty$.

Definamos $M^c = M - \sum_{k=1}^\infty N_k$ y veamos que M^c tiene las propiedades deseadas:

(i) $M^c \in \mathcal{M}^2_\infty$ por ser la diferencia de dos elementos en $\mathcal{M}^2_\infty$.

(ii) M^c es continua: M^c es el límite en $\mathcal{M}^2_\infty$ de las martingalas Y_n y los saltos posibles de $Y_n(\cdot,\omega)$ están en $\{t : (t,\omega) \in \cup_{m>n}[T_n]\}$. Fijemos $j \in \mathbb{N}$. Si $n > j$, $Y_n(\cdot,\omega)$ es continua en $\{t : (t,\omega) \notin \cup_{i\geq j}[T_i]\}$. Por el Lema 8.5 existe una subsucesión $(Y_{n_k})_k$ de $(Y_n)_{n>j}$ que converge uniformemente a M^c en $t \in \mathbb{R}_+$, para casi toda $\omega \in \Omega$. De esto se sigue que (módulo indistinguibilidad) $M^c(\cdot,\omega)$ es continua en $\{t : (t,\omega) \notin \cup_{i\geq j}[T_i]\}$. Este razonamiento es válido para toda $j \in \mathbb{N}$. Así obtenemos que $M^c(\cdot,\omega)$ es continua en $\{t : (t,\omega) \notin \cap_j \cup_{i\geq j} [T_i]\} = \mathbb{R}_+$ porque $\cap_{j=1}^\infty \cup_{i\geq j} [T_i] = \emptyset$.

(iii) $Y_n \amalg N_m$ para $n \geq m$ implica $M^c \amalg N_m$, para cada m. Esto, es consecuencia del siguiente

8.22 Lema. *Si $M_n, M, N \in \mathcal{M}^2$, $n = 1, 2, \ldots$, $M_n \amalg N$ para todo n, y M_n converge a M en $\mathcal{M}^2$, entonces $M \amalg N$.*

Demostración. La demostración se hace usando la caracterización de martingalas, (ver 7.13), es decir, basta mostrar que para todo T tiempo de paro acotado $E(M_T N_T) = E(M_0 N_0)$ y se deja como ejercicio al lector. $\square$

(iv)
$$\|M\|^2_{\mathcal{M}^2_\infty} = \|M^c\|^2_{\mathcal{M}^2_\infty} + \sum_n \|N_n\|^2_{\mathcal{M}^2_\infty} = \|M^c\|^2_{\mathcal{M}^2_\infty} + \sum_n E(\Delta M_{T_n})^2;$$
la última igualdad es consecuencia de la Proposición 8.9 (para T_n predecible nuevamente usamos el hecho de que $E(\Delta M_{T_n}|\mathfrak{F}_{T_n-}) = 0$).

Por último mostraremos la unicidad: supongamos que $M = M^{c'} + \sum_n N'_n$ es otra representación. Entonces
$$M^c - M^{c'} = \sum_n N'_n - \sum_n N_n.$$
Por otra parte sabemos que $M^c \amalg \sum_n N'_n$ y $M^{c'} \amalg \sum_n N_n$ (ya que M^c es continua y $N'_n = A'_n - \widetilde{A}'_n$ y aplicamos 8.19 y 8.22; lo mismo para $M^{c'}$ y N_n). Entonces $(M^c - M^{c'}) \perp (\sum_n N'_n - \sum_n N_n)$.

Así, $M^c - M^{c'}$ es una martingala igual a 0 en 0, ortogonal a si misma; por lo tanto $M^c - M^{c'} = 0$. $\square$

8.23 Definición. Si $M \in \mathcal{M}^2$, denotemos por $M^d = M - M^c$.

M^d se llama la parte *puramente discontinua* de M. Así podemos definir los espacios
$$\begin{aligned} \mathcal{M}^{2d} &= \{M \in \mathcal{M}^2 : M^c = 0\}, \\ \mathcal{M}^{2d}_\infty &= \{M \in \mathcal{M}^2_\infty : M^c = 0\}. \end{aligned}$$

El teorema anterior nos dice que las martingalas puramente discontinuas son *sumas compensadas de saltos.*

Observación. Las martingalas constantes son a la vez continuas y puramente discontinuas.

8.24 Corolario. *Sea $M \in \mathcal{M}^2$. Entonces $M \in \mathcal{M}^{2d}$ si y sólo si*
$$E(M_t^2) = E(M_0^2) + E\Big(\sum_{s\le t}(\Delta M_s)^2\Big) \text{ para cada } t \in \mathbb{R}_+.$$

8.25 Corolario. *Sea $M \in \mathcal{M}^2$. Entonces $M \in \mathcal{M}^{2d}$ si y sólo si M es fuertemente ortogonal a cada martingala en $\mathcal{M}^{2c}$.*

Si $M \in \mathcal{M}^2_\infty$, entonces $M \in \mathcal{M}^{2d}_\infty$ si y sólo si $M - M_0$ es débilmente ortogonal a cada martingala en $\mathcal{M}^{2c}_\infty$.

Demostración. Si $M \in \mathcal{M}^{2d}$ entonces M es fuertemente ortogonal a cada martingala en $\mathcal{M}^{2c}$ por la Proposición 8.17 y el Lema 8.22. Recíprocamente, supongamos que $M \in \mathcal{M}^2$ y $M \amalg \mathcal{M}^{2c}$. Tenemos $M = M^c + M^d$, entonces $(M^c)^2 = MM^c - M^dM^c$. Pero $M \amalg M^c$, $M^d \amalg M^c$, por lo tanto $(M^c)^2$ es martingala, $(M_0^c)^2 = 0$; en consecuencia $M^c = 0$.

En virtud del Corolario 8.15, para terminar la demostración basta probar que si $M \in \mathcal{M}^2_\infty$, $M_0 = 0$ y $E(M_\infty N_\infty) = 0$ para cada $N \in \mathcal{M}^{2c}_\infty$, entonces $M \amalg N$ para cada $N \in \mathcal{M}^{2c}$. Fijemos una $N \in \mathcal{M}^{2c}$ y un tiempo de paro T. Basta probar que $E(M_T N_T) = 0$. Pero $N^T \in \mathcal{M}^{2c}_\infty$, entonces tenemos $0 = E(M_\infty N^T_\infty) = E(E(M_\infty N_T | \mathfrak{F}_T)) = E(M_T N_T)$. □

De este corolario obtenemos inmediatamente

8.26 Corolario. *$\mathcal{M}^{2d}_\infty$ y $\mathcal{M}^{2d}$ son espacios lineales, cerrados en $\mathcal{M}^2_\infty$ y $\mathcal{M}^2$, respectivamente.*

8.27 Corolario. *Sea $M \in \mathcal{M}^{2d}_\infty$ (o $M \in \mathcal{M}^{2d}$). Entonces para todo T tiempo de paro $M^T \in \mathcal{M}^{2d}_\infty$ (o $M \in \mathcal{M}^{2d}$).*

Demostración. También este corolario es una consecuencia inmediata del Corolario 8.25. Basta observar que para todo S tiempo de paro acotado y $N \in \mathcal{M}^{2c}$,

$$E(M^T_S N_S) = E(M_{S\wedge T} N_S) = E(M_{S\wedge T} N_{S\wedge T}) = E(M_0 N_0).$$

□

8.28 Corolario. *Sea $M \in \mathcal{M}^2$. Entonces $M \in \mathcal{M}^{2d}$ si y sólo si $(M_t^2 - \sum_{s\le t}(\Delta M_s)^2)_t$ es martingala.*

Demostración. La implicación "$\Leftarrow$" es clara por 8.24. Para probar "$\Rightarrow$" supongamos que $M \in \mathcal{M}^{2d}$ y sea T un tiempo de paro acotado, por ejemplo $T \le \alpha$. Corolario 8.27 implica que $M^T \in \mathcal{M}^{2d}$ y por lo tanto $E((M^T_\alpha)^2) = E(M_0^2) + E(\sum_{s\le\alpha}(\Delta M^T_s)^2)$. Pero esto es lo mismo que $E(M_T^2 - M_0^2 - \sum_{s\le T}(\Delta M_s)^2) = 0$. Ahora basta aplicar el Lema 7.13. □

8.29 Ejemplo. Si N es el proceso de Poisson con parámetro λ, entonces $(N_t - \lambda t)_t \in \mathcal{M}^{2d}$.

En efecto, sea $M_t = N_t - \lambda t$. Se tiene $\Delta M_t = \Delta N_t$, por lo tanto $E(\sum_{s<t}(\Delta M_s)^2) = E(\sum_{s\le t} \Delta N_s) = EN_t = \lambda t$.

Por otra parte, $E(M_t^2) = E(N_t - \lambda t)^2 = \mathrm{Var}(N_t) = \lambda t$, por lo tanto 8.24 implica que $M \in \mathcal{M}^{2d}$. □

Capítulo 9

Integral estocástica con respecto a una martingala cuadrado integrable

En este capítulo vamos a definir la integral de la forma $\int X\,dM$, donde $M \in \mathcal{M}^2$ y X es un proceso predecible adecuado (así se vera la importancia de los procesos predecibles). Observemos sobre todo que en la mayoría de los casos no se puede definir esta integral como la integral de Stieltjes común y corriente, porque en general las trayectorias de M no son funciones de variación finita, i.e. $M \notin \mathcal{W}^0$ (ver e.g. Corolario 7.10). Por lo tanto hay que definir la así llamada "integral estocástica". Sin embargo veremos que si la integral de Stieltjes existe, entonces coincide con la integral estocástica.

Además demostraremos la existencia del "proceso de variación cuadrada" para cada $M \in \mathcal{M}^2$.

9.1 Notación. Sea $M \in \mathcal{M}^2$ fija. Denotemos

$$\begin{aligned} L^2(M) &:= L^2(\mathbb{R}_+ \times \Omega, \mathcal{P}, \lambda_{M^2}) \\ &= \{X : X \text{ es } \mathcal{P}\text{-medible y } E(\int_{]0,\infty[} X_t^2\, d\langle M\rangle_t) < \infty\}, \\ \Lambda^2(M) &:= \{X : X \text{ es } \mathcal{P}\text{-medible y } \forall t \in \mathbb{R}_+,\ X\mathbf{1}_{[0,t]} \in L^2(M)\}. \end{aligned}$$

De la definición se sigue que los elementos de $L^2(M)$ deben entenderse como clases de equivalencia relativas a λ_{M^2}.

Así, $L^2(M)$ es un espacio de Hilbert con norma

$$\|X\|_{L^2(M)} = (\int_{\mathbb{R}_+ \times \Omega} X^2\, d\lambda_{M^2})^{1/2} = (E(\int_{]0,\infty[} X_t^2\, d\langle M\rangle_t))^{1/2}$$

(ver 7.9(c)).

$\Lambda^2(M)$ es espacio de Fréchet con las seminormas

$$(E\int_{]0,t]} X_s^2\, d\langle M\rangle_s)^{1/2} = (\int_{\mathbb{R}_+\times\Omega} X^2 \mathbf{1}_{[0,t]}\, d\lambda_{M^2})^{1/2}.$$

9.2 Teorema. *Sea $M \in \mathcal{M}^2$. Existe una única isometría lineal*

$$\mathcal{J} : L^2(M) \to \mathcal{M}^2_\infty \quad \text{y} \quad \mathcal{J} : \Lambda^2(M) \to \mathcal{M}^2$$

tal que para todos u, v tales que $0 \le u < v$ y para cada ξ variable aleatoria acotada $\mathfrak{F}_u$-medible,

$$\mathcal{J}(\xi \mathbf{1}_{]u,v]}) = (\xi(M_{v\wedge t} - M_{u\wedge t}))_{t\in\mathbb{R}_+}.$$

9.3 Definición. El proceso $\mathcal{J}(X)$ dado por el teorema anterior lo denotamos

$$\mathcal{J}(X)_t = (X \circ M)_t = \int_{]0,t]} X_s\, dM_s \ ^{(1)}$$

y lo llamamos *la integral estocástica (o integral de Itô) de X con respecto a M.*

Demostración del Teorema 9.2. Si $0 \le u_1 < u_2 < \cdots < u_m$ y $\xi_0, \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m$ son variables aleatorias acotadas y ξ_0 es $\mathfrak{F}_0$-medible, ξ_i es $\mathfrak{F}_{u_i}$-medible, $i = 1, 2, \ldots, m$, el proceso

$$X = \xi_0 \mathbf{1}_{\{0\}} + \sum_{i=1}^{m-1} \xi_i \mathbf{1}_{]u_i, u_{i+1}]}$$

es un proceso predecible y acotado. Para este tipo de procesos (que llamaremos procesos simples), podemos definir $\mathcal{J}(X)$ de manera natural, como

$$\mathcal{J}(X)_t = \sum_{i=1}^{m-1} \xi_i (M_{u_{i+1}\wedge t} - M_{u_i\wedge t})$$

Observemos que:

(a) La definición de $\mathcal{J}(X)$ no depende de la representación de X (ejercicio).

(b) X_0 no interviene en $\mathcal{J}(X)$, $\mathcal{J}(X)_0 = 0$.

(c) $\mathcal{J}(\cdot)$ es lineal en la clase de los X simples.

---

(1) La notación $X \circ M$ de la integral estocástica es a menudo cómoda, pero hay peligro de confundirla con la composición de aplicaciones. Para evitar este problema, en lo que sigue nunca vamos a usar el "$\circ$" en este último sentido.

Probaremos que $\mathcal{J}(X)$ es una martingala. Es claramente adaptado e integrable, además $\mathcal{J}(X)_t = \mathcal{J}(X)_{t\wedge u_m}$, por lo tanto basta demostrar que $E(\mathcal{J}(X)_t|\mathfrak{F}_s) = \mathcal{J}(X)_s$ para $0 \leq s < t \leq u_m$.

Si $u_i \leq s < t \leq u_{i+1}$, entonces $\mathcal{J}(X)_t = \mathcal{J}(X)_s + \xi_i(M_t - M_s)$, por lo tanto

$$E(\mathcal{J}(X)_t|\mathfrak{F}_s) = \mathcal{J}(X)_s + \xi_i E(M_t - M_s|\mathfrak{F}_s) = \mathcal{J}(X)_s,$$

porque ξ_i es $\mathfrak{F}_s$-medible ($\mathfrak{F}_{u_i} \subset \mathfrak{F}_s$).

Para s, t arbitrarios razonamos por inducción.

Es claro que $\mathcal{J}(X) \in \mathcal{M}^2_\infty$.

Ahora hay que demostrar que $\mathcal{J}$ así definida es una isometría:

$$\mathcal{J}(X)_\infty = \sum_{i=1}^{m-1} \xi_i(M_{u_{i+1}} - M_{u_i}),$$

$$\begin{aligned}\|\mathcal{J}(X)\|^2_{\mathcal{M}^2_\infty} = E(\mathcal{J}(X)_\infty)^2 &= \sum_{i=1}^{m-1} E(\xi_i^2(M_{u_{i+1}} - M_{u_i})^2) \\ &+2\sum_{i<j} E(\xi_i\xi_j(M_{u_{i+1}} - M_{u_i})(M_{u_{j+1}} - M_{u_j})).\end{aligned}$$

El segundo sumando se anula ya que

$$\begin{aligned}&E(\xi_i\xi_j(M_{u_{i+1}} - M_{u_i})(M_{u_{j+1}} - M_{u_j})) \\ &\quad = E(E(\xi_i\xi_j(M_{u_{i+1}} - M_{u_i})(M_{u_{j+1}} - M_{u_j})|\mathfrak{F}_{u_j})) \\ &\quad = E(\xi_i\xi_j(M_{u_{i+1}} - M_{u_i})E(M_{u_{j+1}} - M_{u_j}|\mathfrak{F}_{u_j})) = 0,\end{aligned}$$

por ser M una martingala.

Calculemos ahora cuánto vale el primer sumando:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{m-1} E(\xi_i^2(M_{u_{i+1}} - M_{u_i})^2) &= \sum_{i=1}^{m-1} E(E(\xi_i^2(M_{u_{i+1}} - M_{u_i})^2|\mathfrak{F}_{u_i})) \\ = &\sum_{i=1}^{m-1} E(\xi_i^2 E(M^2_{u_{i+1}} - M^2_{u_i}|\mathfrak{F}_{u_i})) \\ = &\sum_{i=1}^{m-1} E(\xi_i^2 E(M^2_{u_{i+1}} - \langle M\rangle_{u_{i+1}} - (M^2_{u_i} - \langle M\rangle_{u_i})|\mathfrak{F}_{u_i}))\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+\sum_{i=1}^{m-1} E(\xi_i^2 E(\langle M\rangle_{u_{i+1}} - \langle M\rangle_{u_i} | \mathfrak{F}_{u_i})) \\
= &\sum_{i=1}^{m-1} E(\xi_i^2(\langle M\rangle_{u_{i+1}} - \langle M\rangle_{u_i})) = E(\int_{]0,\infty]} X_t^2 \, d\langle M\rangle_t) \\
= &\int X^2 \, d\lambda_{M^2} = \|X\|^2_{L^2(M)}.
\end{aligned}
$$

Lo esencial de este cálculo ha sido el hecho de que $M^2 - \langle M\rangle$ es una martingala.

Por lo tanto $\mathcal{J}$ es una isometría para los procesos simples, pero estos son densos en $L^2(M)$ (por 3.12), lo que muestra que $\mathcal{J}$ es isometría de $L^2(M)$ en $\mathcal{M}^2_\infty$.

Para mostrar la isometría en el caso $\Lambda^2(M)$ se procede análogamente, tomando $u_m = t$, y trabajando en $[0,t]$ en vez de $[0,\infty]$. □

En muchos casos concretos, la clase de los procesos para los cuales la integral estocástica existe es más amplia que la de los procesos predecibles. Esto se debe a la siguiente observación.

9.4 Observación. Sea $M \in \mathcal{M}^2$; $\lambda^{\mathcal{P}}_{M^2}$ es una medida sobre $\mathcal{B}(\mathbb{R}_+) \otimes \mathfrak{F}$ que coincide con λ_{M^2} sobre $\mathcal{P}$. Si tomamos la completación de $\mathcal{P}$ con respecto a $\lambda^{\mathcal{P}}_{M^2}$ (es decir $\sigma(\mathcal{P} \cup \mathcal{N})$, donde $\mathcal{N} = \{N \subset \mathbb{R}_+ \times \Omega : \exists B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}_+) \otimes \mathfrak{F}$ con $N \subset B$ y $\lambda^{\mathcal{P}}_{M^2}(B) = 0\})$, tenemos que la integral estocástica está bien definida para los procesos medibles con respecto a la $\lambda^{\mathcal{P}}_{M^2}$-completación de $\mathcal{P}$, ya que cada uno de estos procesos es igual $\lambda^{\mathcal{P}}_{M^2}$-c.s. a uno predecible.

9.5 Proposición. *Sea $M \in \mathcal{M}^2$.*

(a) *Si M es continua entonces la $\lambda^{\mathcal{P}}_{M^2}$-completación de $\mathcal{P}$ contiene a la σ-álgebra de los conjuntos opcionales $\mathcal{O}$ (por lo tanto en este caso se pueden integrar procesos opcionales).*

(b) *Si λ_{M^2} es absolutamente continua con respecto a $\ell \otimes P|\mathcal{P}$ ($\ell =$ medida de Lebesgue en $\mathbb{R}_+$) entonces $\lambda^{\mathcal{P}}_{M^2}$ es absolutamente continua con respecto a $\ell \otimes P$ sobre $\mathcal{B}(\mathbb{R}_+) \otimes \mathfrak{F}$ y la $\lambda^{\mathcal{P}}_{M^2}$-completación de $\mathcal{P}$ contiene a la σ-álgebra de los conjuntos progresivamente medibles (por lo tanto en este caso se pueden integrar procesos progresivamente medibles).*

Demostración. (a) Basta demostrar que para cada T tiempo de paro, $[0,T[\in \lambda^{\mathcal{P}}_{M^2}$-completación de $\mathcal{P}$, porque dichos intervalos generan a $\mathcal{O}$. Como $[0,T[= [0,T] - [T]$ y $[0,T] \in \mathcal{P}$ basta ver que $\lambda^{\mathcal{P}}_{M^2}([T]) = 0$ para todo T tiempo de paro. Pero sabemos (por 4.23) que $[T] \subset \cup_n [T_n]$ con cada T_n totalmente inaccesible o predecible y con gráficas ajenas. Por lo tanto $\lambda^{\mathcal{P}}_{M^2}([T]) \leq \sum_n \lambda^{\mathcal{P}}_{M^2}([T_n]) = 0$ ya que: si T_n es predecible, $[T_n] \in \mathcal{P}$ y

$$\begin{aligned}\lambda^{\mathcal{P}}_{M^2}([T_n]) &\leq \sum_k \lambda^{\mathcal{P}}_{M^2}([T_n \wedge k]) = \sum_k \lambda_{M^2}([T_n \wedge k]) \\ &= \sum_k E(\Delta M^2_{T_n \wedge k}) = 0\end{aligned}$$

porque M^2 es continua y $T_n \wedge k$ es predecible y acotado para todo $k \in \mathbb{N}$ (ver 7.3).

Si T_n es totalmente inaccesible, entonces por la definición de proyección dual predecible y del hecho de que $I^{\mathcal{P}}_{[T_n]} = 0$ cuando T_n es totalmente inaccesible (6.2(c)) tenemos

$$\lambda^{\mathcal{P}}_{M^2}([T_n]) = \int \mathbf{1}_{[T_n]}\, d\lambda^{\mathcal{P}}_{M^2} = \int I^{\mathcal{P}}_{[T_n]}\, d\lambda_{M^2} = 0.$$

(b) Sea f la densidad de λ_{M^2}, $f = d\lambda_{M^2}/d(\ell \otimes P)_{\mathcal{P}}$. Por hipótesis f es un proceso predecible no negativo e integrable con respecto a $\ell \otimes P$ sobre $[0,\alpha] \times \Omega$, para cada $\alpha > 0$, además para todo proceso predecible y acotado $X \geq 0$ se tiene:

$$\int X\, d\lambda_{M^2} = \int X f\, d(\ell \otimes P)|_{\mathcal{P}} = E(\int_{]0,\infty[} X f\, dt).$$

Si consideramos el proceso $V_t = \int_{]0,t]} f_s\, ds$ tenemos:

(i) V está bien definido, es un proceso continuo, con variación integrable en $[0,t]$ para cada $t \geq 0$ y es adaptado, por lo tanto es, en particular, un proceso predecible y $V \in \mathcal{W}^1$.

(ii) $E(\int_{]0,\infty[} X_t f_t\, dt) = E(\int_{]0,\infty[} X_t\, dV_t)$.

Por 6.10 existe $\mu \geq 0$, medida admisible sobre $\mathcal{B}(\mathbb{R}_+) \otimes \mathfrak{F}$, finita sobre $\mathcal{B}([0,\alpha]) \otimes \mathfrak{F}$ para cada $\alpha > 0$, tal que $\int X\, d\mu = E(\int_{]0,\infty[} X\, dV)$, para todo X proceso acotado medible.

Como V es predecible, podemos aplicar el Teorema de Doléans 6.11 y obtener que

$$\mu = \mu^{\mathcal{P}}.$$

Así tenemos que μ es una medida admisible sobre $\mathcal{B}(\mathbb{R}_+) \otimes \mathfrak{F}$,

$$\mu|\mathcal{P} = \lambda_{M^2}$$

y si X es un proceso acotado medible, $X \geq 0$, entonces

$$\int X\, d\mu = \int X^{\mathcal{P}}\, d\mu = \int X^{\mathcal{P}}\, d\lambda_{M^2} = \int X\, d\lambda^{\mathcal{P}}_{M^2}.$$

Es decir $\mu = \lambda^{\mathcal{P}}_{M^2}$ y por lo tanto $\lambda^{\mathcal{P}}_{M^2} \ll \ell \otimes P$ y

$$f = d\lambda^{\mathcal{P}}_{M^2}/d(\ell \otimes P).$$

Veamos ahora que la $\lambda_{M^2}^{\mathcal{P}}$-completación de $\mathcal{P}$ contiene a los conjuntos progresivamente medibles. Sea X un proceso progresivamente medible acotado y $h > 0$. Definamos

$$X_t^h(\omega) = 1/h \int_{(t-h)^+}^t X_s(\omega)\, ds.$$

X^h es continuo en t y es adaptado (por ser progresivamente medible), por lo tanto es predecible. Para toda $\omega \in \Omega$, $X_t^h(\omega) \to X_t(\omega)$, cuando $h \downarrow 0$, para ℓ-casi cada $t \in \mathbb{R}_+$.

Por Fubini,

$$X^h(t,\omega) \to X(t,\omega) \quad \ell \otimes P - \text{c.d}$$

y como $\lambda_{M^2}^{\mathcal{P}} \ll \ell \otimes P$, tenemos que

$$X^h(t,\omega) \to X(t,\omega) \quad \lambda_{M^2}^{\mathcal{P}} - \text{c.d.}$$

Por lo que X es medible con respecto a la $\lambda_{M^2}^{\mathcal{P}}$-completación de $\mathcal{P}$. □

9.6 Observaciones. (a) La hipótesis en la Proposición 9.5(a) puede debilitarse; en vez de pedir que M sea continua, basta con pedir que M no tenga saltos predecibles (como por ejemplo en la martingala de Poisson $(N_t - \lambda t)_t$).

(b) Si M es el proceso de Wiener, $\lambda_{W^2} = \ell \otimes P$ sobre $\mathcal{P}$ ya que

$$\int X\, d\lambda_{W^2} = E(\int X\, d\langle W \rangle) = E(\int X\, dt) = \int\int X\, dt\, dP.$$

Así pues tenemos la existencia de $\int X\, dW$, o de la *integral de Itô*, para X progresivamente medible con $E\int_{]0,t]} X_s^2\, ds < \infty$ para todo $t > 0$. Sin embargo, como el lector probablemente sabe, en el caso de proceso de Wiener, la condición de integrabilidad la podemos debilitar aún más: basta que X sea *no anticipante*, es decir medible y adaptado (ver e.g. [20]).[(2)]

(c) Si $M_t = N_t - \beta t$, donde N es el proceso de Poisson con parámetro β, entonces $\lambda_{M^2} = \beta\ell \otimes P$ sobre $\mathcal{P}$ (ejercicio).

Ahora vamos a definir el proceso de *variación cuadrada* de M para $M \in \mathcal{M}^2$. Este proceso es importante porque tiene propiedades similares a las del compensador $\langle M, M \rangle$ de M^2 y de hecho en algunos casos (ver Corolario 9.11) coincide con él. La existencia y la definición misma de este proceso estarán dadas por el Teorema 9.10. Antes vamos a enunciar algunos lemas que se usarán en la demostración del teorema (se deja como ejercicio el mostrar la validez de estos lemas). La demostración del Teorema 9.10 es complicada y se basa en las propiedades del espacio $\mathcal{M}^2$ (ver 8.21).

[(2)] Aquí nos interesan las hipótesis de medibilidad. La posibilidad de debilitar las hipótesis de integrabilidad (i.e. $E\int_{]0,t]} X_s^2\, d\langle M \rangle_s < \infty$) las discutiremos en el Capítulo 12.

9.7 Lema. *Sea $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ un espacio de probabilidad y $(\xi_n)_n$ una sucesión de variables aleatorias:*

(a) *Si $(A_k)_k$ es una sucesión de eventos tal que $A_k \uparrow \Omega$ y si para cada $k \in \mathbb{N}$, $(\mathbf{1}_{A_k}\xi_n)_n$ converge en probabilidad, entonces $(\xi_n)_n$ también converge en probabilidad.*

(b) *Si $\xi_n \to \xi$ en probabilidad, $\xi_n \geq 0$ y $E(\xi_n) = E(\xi)$ para cada $n \in \mathbb{N}$ entonces $\xi_n \to \xi$ en $L^1(\Omega)$.*

9.8 Lema. *Sea $M \in \mathcal{M}^2$ y $\{0 = u_0 < u_1 < \cdots\}$ una partición de $\mathbb{R}_+$. Si $X = \xi_0\mathbf{1}_{\{0\}} + \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i \mathbf{1}_{]u_i,u_{i+1}]}$, con ξ_i variable aleatoria $\mathfrak{F}_{u_i}$-medible, y $|\xi_i| \leq k$, para $i = 0, 1, 2, \ldots$ entonces $X \in \Lambda^2(M)$ y*

$$(X \circ M)_t = \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i (M_{u_{i+1}\wedge t} - M_{u_i \wedge t})$$

(este lema generaliza la fórmula que nos sirvió en 9.2 como la definición de la integral estocástica para procesos simples).

9.9 Definición. Decimos que $(\Pi_n)_n$ es una *sucesión normal de particiones de* $\mathbb{R}_+$ si

$$\Pi_n = \{0 = t_0^n < t_1^n < \cdots\}, \quad \lim_{j\to\infty} t_j^n = \infty \quad \text{para cada } n \in \mathbb{N}$$

y

$$\lim_{n\to\infty} \sup_j (t_{j+1}^n - t_j^n) = 0.$$

9.10 Teorema. *Sea $M \in \mathcal{M}^2$. Existe un único proceso cadlag creciente adaptado que denotaremos por $[M, M]$ tal que si $(\Pi_n)_n$ es una sucesión normal de particiones de $\mathbb{R}_+$ ($\Pi_n = \{0 = t_0^n < t_1^n < \ldots\}$), entonces*

$$[M, M]_t = \lim_{n\to\infty} (L^1) \sum_{j=0}^{\infty} (M_{t_{j+1}^n \wedge t} - M_{t_j^n \wedge t})^2 \tag{9.1}$$

para cada $t \in \mathbb{R}_+$. Ademas se tiene

$$[M, M]_t = \langle M^c, M^c\rangle_t + \sum_{s\leq t} (\Delta M_s)^2 \tag{9.2}$$

para cada $t \in \mathbb{R}_+$.

El proceso $[M, M]$ se llama proceso de variación cuadrada de M.

Demostración. 1. Los lados derechos de (9.1) y (9.2) no cambian si reemplazamos a M por $M - M_0$, por lo tanto podemos suponer que $M_0 = 0$. Además, reemplazando a M por $M^t = M_{t\wedge\cdot}$ podemos suponer que

$$M \in \mathcal{M}^2_\infty.$$

En efecto, basta observar que

$$(M^c)^t = (M^t)^c \quad \text{y} \quad \langle M^c\rangle^t = \langle (M^t)^c\rangle.$$

Estas fórmulas se siguen directamente de las definiciones; sus demostraciones se dejan como ejercicios.

2. Probaremos (9.1) con convergencia en probabilidad en lugar de convergencia en L^1.

Sea $\Pi_n = \{0 = t_0 < t_1 < \ldots\}$ una partición fija de la familia (para abreviar notaciones vamos a escribir t_j en vez de t_j^n). Tenemos

$$M_t^2 = \sum_{j=0}^{\infty}(M^2_{t_{j+1}\wedge t} - M^2_{t_j\wedge t}) = V_n(M,t) + N_n(t),$$

donde

$$\begin{aligned} V_n(M,t) &= \sum_{j=0}^{\infty}(M_{t_{j+1}\wedge t} - M_{t_j\wedge t})^2, \\ N_n(t) &= 2\sum_{j=0}^{\infty} M_{t_j\wedge t}(M_{t_{j+1}\wedge t} - M_{t_j\wedge t}). \end{aligned}$$

Observemos que para todo $t \in \mathbb{R}_+$ ambas sumas tienen sólo un número finito de términos distintos de 0, además $E(V_n(M,t)) < \infty$, $E(N_n(t)) < \infty$ porque $M_t \in L^2$ para todo $t \in \mathbb{R}_+$.

Es fácil ver que N_n es una martingala (como en el Teorema 9.2). Formalmente, N_n tiene la forma de integral estocástica pero no podemos aplicar directamente el Lema 9.8, pues $M_{t_j\wedge t}$ puede no ser acotada. Para $k = 1, 2, \ldots$ definamos

$$X_n^k(t) = 2\sum_j (-k) \vee (M_{t_j} \wedge k)\mathbf{1}_{]t_j,t_{j+1}]}(t).$$

El proceso X_n^k es predecible y acotado, por lo tanto $X_n^k \in L^2(M)$. Sea $N_n^k = X_n^k \circ M$. A X_n^k podemos aplicarle el Lema 9.8, por lo tanto $N_n^k(t,\omega) = N_n(t,\omega)$ para $\omega \in A_k$, donde $A_k = \{\sup_s |M_s| \leq k\}$.

Por otra parte,

$$\lim_{n\to\infty} X_n^k(t,\omega) = 2((-k) \vee (M_{t-}(\omega) \wedge k)) \quad \forall\omega \in \Omega, \quad \forall t > 0$$

(por ser particiones normales), entonces por el teorema de convergencia dominada tenemos que la sucesión $(X_n^k)_n$ converge en $L^2(M)$ al proceso $2((-k) \vee (M_- \wedge k))$ (ver 9.1, $M_- = (M_{t-})_t$). Por el Teorema 9.2 las integrales estocásticas $(N_n^k)_n$ convergen en $\mathcal{M}_\infty^2$ (a $2((-k) \vee (M_- \wedge k)) \circ M$), y por lo tanto la sucesión $(N_n^k(t))_n$ converge en L^2 para toda t, $k = 1, 2, \ldots$ (nótese que si M fuera acotada, la primera parte del teorema ya se seguiría de esto, con convergencia más fuerte: en L^2 en lugar de L^1).

Para toda $k \in \mathbb{N}$ tenemos

$$\mathbf{1}_{A_k} V_n(M,t) = \mathbf{1}_{A_k} M_t^2 - \mathbf{1}_{A_k} N_n(t) = \mathbf{1}_{A_k} M_t^2 - \mathbf{1}_{A_k} N_n^k(t).$$

Entonces de lo anterior se sigue que la sucesión $(\mathbf{1}_{A_k} V_n(M,t))_n$ converge en L^1, y por lo tanto converge en probabilidad para toda $k \in \mathbb{N}$, $t \in \mathbb{R}_+$.

Como $A_k \uparrow \Omega$, por el Lema 9.7(a) la sucesión $(V_n(M,t))_n$ converge en probabilidad $(n \to \infty)$ para toda $t \in \mathbb{R}_+$. Vamos a probar que una subsucesión converge uniformemente en $t \in \mathbb{R}_+$, c.s.

En efecto, por el Lema 8.5 sabemos que para toda $k \in \mathbb{N}$ existe una subsucesión $(n_j)_j$ tal que $(N_{n_j}^k(t,\omega))_j$ converge uniformemente en $t \in \mathbb{R}_+$ para P-casi toda $\omega \in \Omega$. Usando el método diagonal podemos encontrar una subsucesión (n') válida para toda $k \in \mathbb{N}$, es decir existe $\Gamma \subset \Omega$, $P(\Gamma) = 0$ tal que $(N_{n'}^k(t,\omega))_{n'}$ converge uniformemente en $t \in \mathbb{R}_+$ para cada $k \in \mathbb{N}$ y cada $\omega \in \Omega - \Gamma$. Por lo tanto $(\mathbf{1}_{A_k} V_{n'}(M,t))_{n'}$ converge uniformemente en $t \in \mathbb{R}_+$ para cada $k \in \mathbb{N}$ y cada $\omega \in \Omega - \Gamma$, entonces $(V_{n'}(M,t))_{n'}$ converge uniformemente en $t \in \mathbb{R}_+$ para cada $\omega \in \Omega - \Gamma$, ya que $A_k \uparrow \Omega$.

Definimos

$$[M,M]_t(\omega) = \begin{cases} \lim\limits_{n'} V_{n'}(M,t)(\omega) & \text{si } \omega \in \Omega - \Gamma, \\ 0, & \text{si } \omega \in \Gamma. \end{cases}$$

Como $(V_{n'}(M,t))_t$ es adaptado cadlag en t para todo n', tenemos que $[M,M]$ también lo es.

Claramente $V_n(M,t) \to [M,M]_t$ en probabilidad $(n \to \infty)$ para todo $t \in \mathbb{R}_+$.

El razonamiento estándar muestra que $[M,M]$ no depende de las particiones $(\Pi_n)_n$ (módulo indistinguibilidad). Ahora es claro que $[M,M]$ es creciente porque si $s < t$ están fijos podemos reemplazar las particiones Π_n por una sucesión nueva que contiene a s y t. Para esta sucesión de particiones se tiene que $V_n(M,s) \leq V_n(M,t)$ y por lo tanto $[M,M]_s \leq [M,M]_t$.

3. Vamos a demostrar que si $M, M' \in \mathcal{M}_\infty^2$ entonces

$$E(|V_n(M,t) - V_n(M',t)|) \leq \|M - M'\|_{\mathcal{M}_\infty^2}^2 + 2\|M'\|_{\mathcal{M}_\infty^2} \|M - M'\|_{\mathcal{M}_\infty^2} \tag{9.3}$$

para $n \in \mathbb{N}$, $t \in \mathbb{R}_+$.

En efecto, denotemos $M'' = M - M'$. Tenemos

$$\begin{aligned} V_n(M,t) &= V_n(M',t) + V_n(M'',t) \\ &\quad +2\sum_j (M'_{t_{j+1}\wedge t} - M'_{t_j\wedge t})(M''_{t_{j+1}\wedge t} - M''_{t_j\wedge t}). \end{aligned}$$

Y por lo tanto, utilizando dos veces la desigualdad de Schwarz (la primera vez para las sumas, la segunda para esperanzas), obtenemos

$$\begin{aligned} &E(|V_n(M,t) - V_n(M',t)|) \\ &\quad \le E(V_n(M'',t)) + 2E((V_n(M',t))^{1/2}(V_n(M'',t))^{1/2}) \\ &\quad \le E(V_n(M'',t)) + 2(E(V_n(M',t)))^{1/2}(E(V_n(M'',t)))^{1/2}. \end{aligned}$$

Para terminar la demostración de (9.3) basta observar que en general, si $M \in \mathcal{M}^2_\infty$, entonces $(V_n(M,t) - M_t^2 - M_0^2)_t$ es una martingala 0 en 0, y por lo tanto

$$E(V_n(M,t)) = E(M_t^2) - E(M_0^2) \le \|M\|^2_{\mathcal{M}^2_\infty}.$$

4. Sea $M \in \mathcal{M}^{2c}_\infty$. Probaremos

(i) $V_n(M,t) \to [M,M]_t$ en L^1, si $n \to \infty$, $t \in \mathbb{R}_+$.

(ii) $[M,M]_t = \langle M,M\rangle_t$, $t \in \mathbb{R}_+$.

Por el paso 2 sabemos que (i) se cumple si M es acotada.

Definimos

$$T_k = \inf\{t : |M_t| \ge k\}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Por continuidad y porque $M_0 = 0$, $|M_t^{T_k}| \le k$ para cada $t \in \mathbb{R}_+$ y cada $k \in \mathbb{N}$, por lo tanto $(V_n(M^{T_k}, t))_n$ converge en L^1 (de hecho en L^2).

Por otro lado, es fácil ver que $M^{T_k} \to M$ en $\mathcal{M}^2_\infty$ si $k \to \infty$. En efecto, $M^{T_k}_\infty = M_{T_k} \to M_\infty$ c.s. $(k \to \infty)$ pues $T_k \uparrow \infty$. Además

$$M^2_{T_k} = (E(M_\infty|\mathfrak{F}_{T_k}))^2 \le E(M^2_\infty|\mathfrak{F}_{T_k}),$$

por lo tanto $(M^2_{T_k})_k$ son uniformemente integrables porque las variables aleatorias $(E(M^2_\infty|\mathfrak{F}_{T_k}))_k$ lo son. Esto implica que

$$M_{T_k} \to M_\infty \quad \text{en} \quad L^2 \quad (k \to \infty),$$

lo que es lo mismo que $M^{T_k} \to M$ en $\mathcal{M}^2_\infty$ (ver 8.2).

Ahora bien, usando la desigualdad (9.3) obtenemos

$$
\begin{aligned}
&E(|V_n(M,t) - V_m(M,t)|) \\
&\quad \leq \; E(|V_n(M,t) - V_n(M^{T_k},t)|) + E(|V_n(M^{T_k},t) - V_m(M^{T_k},t)|) \\
&\qquad +E(|V_m(M^{T_k},t) - V_m(M,t)|) \\
&\quad \leq \; 2\|M - M^{T_k}\|^2_{\mathcal{M}^2_\infty} + 4\|M\|_{\mathcal{M}^2_\infty} \|M - M^{T_k}\|_{\mathcal{M}^2_\infty} \\
&\qquad +E(|V_n(M^{T_k},t) - V_m(M^{T_k},t)|)
\end{aligned}
$$

para $k, n, m \in \mathbb{N}$. Por lo tanto la sucesión $(V_n(M,t))_n$ satisface la condición de Cauchy en L^1, lo que demuestra (i).

Utilizando esto vemos que la martingala $N_n(t) = M_t^2 - V_n(M,t)$ converge en L^1 (si $n \to \infty$) a $M_t^2 - [M,M]_t$. Por lo tanto $M^2 - [M,M]$ es una martingala.

Por otro lado, como M es continua entonces $(V_n(M,t))_t$ es continuo para $n \in \mathbb{N}$, y por lo tanto $[M,M]$ es continuo como el límite uniforme en t de una subsucesión $(V_{n'}(M,t))_{n'}$ (paso 2). En consecuencia $[M,M]$ es predecible (sabemos que es adaptado). Así hemos demostrado (ii) porque claramente $[M,M] \in \mathcal{W}^1$ (es creciente) y $[M,M]_0 = 0$ (ver 8.11(a)).

5. Sea $M \in \mathcal{M}^2_\infty$ $(M_0 = 0)$. Demostraremos la fórmula (9.2). Ya sabemos que $\langle M^c, M^c\rangle = [M^c, M^c]$, por lo tanto basta demostrar que

$$[M,M]_t = [M^c, M^c]_t + \sum_{s\leq t} (\Delta M_s)^2. \tag{9.4}$$

Primero supongamos que M tiene sólo un número finito de saltos. Sabemos por 8.21 que M admite una descomposición:

$$M = M^c + B \quad \text{donde} \quad B = \sum_{k=1}^{m} (A_k - \widetilde{A_k}).$$

Cada proceso $A_k - \widetilde{A_k}$ pertenece a $\mathcal{W}^1$ y tiene a lo más un solo salto, por lo tanto para cada ω la función $B_\bullet(\omega)$ tiene a los más m saltos y tiene variación finita en $[0,t]$ para todo $t \in \mathbb{R}_+$. En consecuencia

$$V_n(B,t)(\omega) \to \sum_{s\leq t} (\Delta B_s(\omega))^2 = \sum_{s\leq t} (\Delta M_s(\omega))^2$$

cuando $n \to \infty$, para cada $t \in \mathbb{R}_+$.

Se tiene

$$V_n(M,t) = V_n(M^c + B, t) = V_n(M^c, t) + V_n(B,t) + C_n(t)$$

donde

$$C_n(t) = 2\sum_{j=0}^{\infty}(M^c_{t^n_{j+1}\wedge t} - M^c_{t^n_j\wedge t})(B_{t^n_{j+1}\wedge t} - B_{t^n_j\wedge t}).$$

Por el paso 4, $V_n(M^c,t) \to [M^c,M^c]_t$ en L^1 cuando $n\to\infty$, y

$$|C_n(t)| \le 2\sup_j |M^c_{t^n_{j+1}\wedge t} - M^c_{t^n_j\wedge t}|\,|B|_t \to 0 \quad \text{si} \quad n\to\infty,$$

porque $M^c_\cdot(\omega)$ es uniformemente continua sobre $[0,t]$ para cada $\omega\in\Omega$, $t\in\mathbb{R}_+$ y $(\Pi_n)_n$ es una sucesión normal de particiones de $\mathbb{R}_+$. Así hemos demostrado (9.4) en el caso particular.

Ahora sea $M\in\mathcal{M}^2_\infty$ arbitraria ($M_0=0$). Por 8.21 $M = M^c + \sum_{k=1}^{\infty}(A_k - \widetilde{A}_k)$, donde $A_k = \Delta M_{T_k}\mathbf{1}_{[T_k,\infty[}$, $k\in\mathbb{N}$ y los tiempos de paro $(T_k)_k$ son tales que $\{\Delta M\neq 0\}\subset\cup_k[T_n]$, cada uno predecible o totalmente inaccesible.

Definamos

$$M^m = M^c + \sum_{k=1}^{m}(A_k - \widetilde{A}_k)\in\mathcal{M}^2_\infty.$$

Para cada entero positivo m, M^m tiene un número finito de saltos y $(M^m)^c{=}M^c$, entonces

$$\begin{aligned}[M^m,M^m]_t &= [M^c,M^c]_t + \sum_{s\le t}(\Delta M^m_s)^2\\ &= [M^c,M^c]_t + \sum_{k=1}^{m}(\Delta M_{T_k\wedge t})^2.\end{aligned}$$

Sabemos que

$$\lim_{m\to\infty}\sum_{k=1}^{m}(\Delta M_{T_k\wedge t})^2 = \sum_{s\le t}(\Delta M_s)^2 \quad \forall\omega\in\Omega \quad \forall t\in\mathbb{R}_+.$$

Para obtener (9.4) basta demostrar que $[M^m,M^m]_t\to[M,M]_t$ en L^1 cuando $m\to\infty$. Fijemos una subsucesión (n') (método diagonal) tal que para P-casi toda ω y para cada $m\in\mathbb{N}$ se tiene

$$\lim_{n'} V_{n'}(M,t) = [M,M]_t, \quad \lim_{n'} V_{n'}(M^m,t) = [M^m,M^m]_t$$

uniformemente en $t\in\mathbb{R}_+$. Por el lema de Fatou y la desigualdad (9.3) obtenemos

$$\begin{aligned}&E(|[M,M]_t - [M^m,M^m]_t|)\\ &\le \liminf_{n'\to\infty} E(|V_{n'}(M,t) - V_{n'}(M^m,t)|)\\ &\le \|M-M^m\|^2_{\mathcal{M}^2_\infty} + 2\|M\|_{\mathcal{M}^2_\infty}\,\|M-M^m\|_{\mathcal{M}^2_\infty}.\end{aligned}$$

Ahora basta observar que por el Teorema 8.21 se tiene

$$\lim_{m\to\infty} \|M - M^m\|_{\mathcal{M}^2_\infty} = 0.$$

6. Lo único que falta para terminar la demostración del teorema es probar que $V_n(M,t) \to [M,M]_t$ en L^1 cuando $n \to \infty$.

Es fácil demostrar que $M^2 - [M,M]$ es una martingala. En efecto, por la fórmula (9.2) tenemos que

$$\begin{aligned} M_t^2 - [M,M]_t &= (M_t^c + M_t^d)^2 - \langle M^c, M^c\rangle_t - \sum_{s\le t}(\Delta M_s)^2 \\ &= (M_t^c)^2 - \langle M^c, M^c\rangle_t + (M_t^d)^2 - \sum_{s\le t}(\Delta M_s)^2 + 2M_t^c M_t^d. \end{aligned}$$

Ahora $(M^c)^2 - \langle M^c, M^c\rangle$ es una martingala por definición,

$$(M_t^d)^2 - \sum_{s\le t}(\Delta M_s)^2 = (M_t^d)^2 - \sum_{s\le t}(\Delta M_s^d)^2$$

es una martingala por el Corolario 8.28, finalmente $2M^cM^d$ es una martingala porque $M^c \amalg M^d$ (por 8.14 y 8.21). Por lo tanto $E(M_t^2) = E([M,M]_t)$ para cada $t \in \mathbb{R}_+$ (si $M_0 = 0$; en el caso general $E(M_t^2) = E(M_0^2) + E([M,M]_t)$).

Por otra parte, sabemos que $M^2 - V_n(M) = N_n$ es una martingala, $N_n(0) = 0$ y por lo tanto $E(M_t^2) = E(V_n(M,t))$ para cada $t \in \mathbb{R}_+$ y cada $n \in \mathbb{N}$. En consecuencia $E(V_n(M,t)) = E([M,M]_t)$. Esto junto con el paso 2 implican la convergencia de $(V_n(M,t))_n$ a $[M,M]_t$ en L^1 por el Lema 9.7(b). □

9.11 Corolario. (a) *Si $M \in \mathcal{M}^{2c}$ entonces $\langle M,M\rangle = [M,M]$.*

(b) *Si $M \in \mathcal{M}^2$ entonces $M^2 - [M,M]$ y $[M,M] - \langle M,M\rangle$ son martingalas y $\lambda_{M^2} = \lambda_{[M,M]} = \lambda_{\langle M,M\rangle}$.*

El hecho de que $M^2 - [M,M]$ sea una martingala lo probamos en la última parte de la demostración del Teorema 9.10. Todo lo demás es inmediato.

Observación. Vale la pena darse cuenta de las semejanzas y las diferencias entre los procesos $\langle M,M\rangle$ y $[M,M]$. Ambos son cadlag crecientes, 0 en 0, $M^2 - \langle M,M\rangle$ y $M^2 - [M,M]$ son martingalas. $\langle M,M\rangle$ es predecible, en cambio $[M,M]$, para martingalas discontinuas, en general no lo es. Por otra parte, la estructura de $[M,M]$ es mucho más sencilla que la estructura de $\langle M,M\rangle$. El proceso $\langle M,M\rangle$ en general depende fuertemente de la filtración mientras la fórmula (9.1) del Teorema 9.10 depende solamente de la probabilidad P. Esto a veces es una ventaja de $[M,M]$ en comparación con $\langle M,M\rangle$. Además es claro que el límite en (9.1) existe si reemplazamos a P por una medida de probalidad Q absolutamente continua c.r.a P, pero la convergencia no será en general en $L^1(Q)$ sino en Q-probabilidad. Veremos también que el proceso de variación cuadrada existe para una clase de procesos más amplia que $\mathcal{M}^2$.

9.12 Ejemplos. (a) Sea W el proceso de Wiener. Entonces $[W,W]_t = \langle W,W\rangle_t = t$ porque W es continuo.

(b) Sea $M_t = N_t - \lambda t$ donde N es el proceso de Poisson con parámetro λ. Por 8.29 sabemos que $M \in \mathcal{M}^{2d}$. Entonces

$$[M,M]_t = \sum_{s\leq t}(\Delta M_s)^2 = \sum_{s\leq t}\Delta N_s = N_t,$$

mientras que (8.12(b)) $\langle M,M\rangle_t = \lambda t$. □

9.13 Corolario. *Si $M \in \mathcal{M}^2$ y $M \in \mathcal{W}^0$ entonces $M \in \mathcal{M}^{2d}$.*

Demostración. Sea $(\Pi_n)_n$ una familia normal de particiones. Es fácil probar que $V_n(M,t) \to \sum_{s\leq t}(\Delta M_s)^2$ porque M tiene variación total finita en cada $[0,t]$ (ver e.g. el Lema 12.24). Pero también sabemos que

$$V_n(M,t) \to [M,M]_t = \langle M^c, M^c\rangle + \sum_{s\leq t}(\Delta M_s)^2 \quad \text{en} \quad L^1.$$

Por lo tanto $\langle M^c, M^c\rangle = 0$.

$(M^c)^2 - \langle M^c, M^c\rangle$ es una martingala 0 en 0, por lo tanto $(M^c)^2$ es una martingala 0 en 0 y entonces $E(M_t^c)^2 = 0$ para cada $t \in \mathbb{R}_+$. En consecuencia $M^c = 0$. □

9.14 Definición. Sean $M, N \in \mathcal{M}^2$. Entonces definimos el proceso $[M,N] \in \mathcal{W}^1$ de la manera siguiente:

$$[M,N] = \frac{1}{4}([M+N, M+N] - [M-N, M-N])$$

9.15 Propiedades del proceso $[M,N]$. (a) *Si* $(\Pi_n)_n$ *es una familia normal de particiones:* $(\Pi_n = \{0 = t_0^n < t_1^n < \ldots < t_j^n < \ldots\})$

$$\begin{aligned}[M,N]_t &= \lim_{n\to\infty}(L^1)\sum_{j=1}^{\infty}(M_{t_{j+1}^n\wedge t} - M_{t_j^n\wedge t})(N_{t_{j+1}^n\wedge t} - N_{t_j^n\wedge t}) \\ &= \langle M^c, N^c\rangle_t + \sum_{s\le t}\Delta M_s \Delta N_s \\ &= [M^c, N^c]_t + \sum_{s\le t}\Delta M_s\, \Delta N_s.\end{aligned}$$

(b) $[\cdot,\cdot]$ *es bilineal.*
(c) $MN - [M,N]$ *y* $[M,N] - \langle M,N\rangle$ *son martingalas.*
(d) $\lambda_{MN} = \lambda_{[M,N]} = \lambda_{\langle M,N\rangle}$.

La demostración se deja al lector.

9.16 Observación. En la definición de $[M,M]$ o $[M,N]$ las particiones deterministas se pueden reemplazar por particiones aleatorias:

$$\Pi_n = \{T_0^n, T_1^n, \ldots, T_j^n, \ldots\} \text{ con } 0 = T_0 < T_1^n < \ldots < T_j^n < \ldots,$$

donde T_j^n son tiempos de paro tales que

$$\lim_{j\to\infty} T_j^n = +\infty \quad \text{y} \quad \lim_{n\to\infty}\sup_k(T_{k+1}^n - T_k^n) = 0.$$

La demostracíon es la misma, sólo hay que saber que si T es un tiempo de paro, entonces

$$\int_0^{t\wedge T} X\, dM = \int_0^t X\, dM^T$$

(esto es claro para T determinista y para T general se demostrará más adelante).

Capítulo 10

Propiedades de la integral estocástica

En este capítulo discutiremos varias propiedades de la integral estocástica con respecto a una martingala cuadrado integrable. En particular daremos una caracterización intrínseca de la integral estocástica la cual será una consecuencia de las desigualdades de Kunita Watanabe. Calcularemos también el proceso de Doob Meyer y la variación cuadrada de una integral estocástica y demostraremos que cada martingala en $\mathcal{M}^2$ se descompone en la suma de una integral estocástica con respecto a una martingala dada M y de una martingala fuertemente ortogonal a M. Terminaremos el capítulo con una discusión detallada del caso cuando la filtración $(\mathfrak{F}_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ es la filtración usual generada por el proceso de Wiener.

Probaremos que en este caso $\mathcal{P} = \mathcal{O}$, que cada martingala es continua y como un corolario obtendremos el teorema clásico de Itô que cada variable aleatoria cuadrado integrable se representa como una integral estocástica con respecto a W.

Veremos primero que si $M \in \mathcal{W}^0$, la integral estocástica se reduce a la integral de Lebesgue Stieltjes usual.

10.1 Proposición. *Sean $M \in \mathcal{M}^2$ y $M \in \mathcal{W}^0$. Si $X \in \Lambda^2(M)$ y si para cada $t \in \mathbb{R}_+$ y $\omega \in \Omega$ la integral de Stieltjes $St\int_{]0,t]} X\,dM$ existe entonces*

$$(X \circ M)_t = St\int_{]0,t]} X\,dM.$$

Demostración. 1. Primero demostraremos que basta para X acotado. En efecto, si $X \in \Lambda^2(M)$ definamos $X^n = (-n) \vee X \wedge n$. Es claro que $X^n \to X$ en $\Lambda^2(M)$ cuando $n \to \infty$, por lo tanto $X^n \circ M \to X \circ M$ en $\mathcal{M}^2$ y de aquí $(X^n \circ M)_t \to (X \circ M)_t$ en L^2 para todo $t \in \mathbb{R}_+$.

Si sabemos que $(X^n \circ M)_t = St \int_{]0,t]} X^n \, dM$, como $|X_t^n| \leq |X_t|$ para cada t, el teorema de convergencia dominada implica que

$$(X^n \circ M)_t \to St \int_{]0,t]} X \, dM \quad \text{si} \quad n \to \infty$$

para cada $\omega \in \Omega$, $t \in \mathbb{R}_+$. En consecuencia $(X \circ M)_t = St \int_{]0,t]} X \, dM$ c.s. para todo $t \in \mathbb{R}_+$; y como ambos procesos son cadlag, son indistinguibles.

2. Sea $\mathcal{K}$ la clase de procesos X tales que

$$(X \circ M)_t = St \int_{]0,t]} X \, dM, \quad \forall t \in \mathbb{R}_+.$$

Por la definición misma es claro que $\mathcal{K}$ contiene a todos los procesos simples y es una clase lineal.

Además, si $0 \leq X_n \in \mathcal{K}$ y $X_n \uparrow X$, X acotado entonces $X \in \mathcal{K}$ (mismo razonamiento del paso 1). Usando una versión apropiada del lema de las clases monótonas (ver 4.26) se ve que $\mathcal{K}$ contiene a todos los procesos predecibles acotados. □

10.2 Proposición. *Si $M \in \mathcal{M}^2$ y $X \in \Lambda^2(M)$ entonces $\Delta(X \circ M) = X \Delta M$.*

Demostración. 1. Nuevamente veremos que basta mostrarlo para X acotado. Sea $X_n = (-n) \vee X \wedge n$, $X_n \to X$ en $\Lambda^2(M)$ por lo que $X_n \circ M \to X \circ M$ en $\mathcal{M}^2$. Sabemos (por 8.5) que entonces existe una subsucesión $(n_k)_k$ tal que para P-casi toda $\omega \in \Omega$ y cada $s \in \mathbb{R}_+$

$$(X_{n_k} \circ M)_t \to (X \circ M)_t \text{ uniformemente en } t \in [0,s], \text{ si } k \to \infty.$$

Pero entonces para casi toda ω, $\Delta(X_{n_k} \circ M)_t \to \Delta(X \circ M)_t$ (cuando $k \to \infty$, uniformemente en $t \in [0,s]$) y si la proposición es cierta para los procesos acotados, entonces

$$\Delta(X_{n_k} \circ M)_t = (X_{n_k})_t (\Delta M)_t \to X_t \Delta M_t \quad \forall t \in \mathbb{R}_+ \quad \forall \omega \in \Omega$$

y por lo tanto $X \Delta M$ y $\Delta(X \circ M)$ son indistinguibles.

2. Sea $\mathcal{K}$ la clase de los procesos X tales que $\Delta(X \circ M) = X \Delta M$. $\mathcal{K}$ contiene a los procesos simples, y por un razonamiento análogo al del paso 1 se concluye usando L.C.M. que $\mathcal{K}$ contiene a todos los procesos acotados de $\Lambda^2(M)$. □

10.3 Teorema (desigualdades de Kunita-Watanabe). *Sean $M, N \in \mathcal{M}^2$ y X, Y procesos medibles. Entonces:*

$$\int_{]0,\infty[} |X_t|\,|Y_t|\, d|\langle M,N\rangle|_t \,{}^{(1)}$$
$$\leq \sqrt{\int_{]0,\infty[} X_t^2\, d\langle M,M\rangle_t}\sqrt{\int_{]0,\infty[} Y_t^2\, d\langle N,N\rangle_t} \quad \text{c.s.}$$

y

$$\int_{]0,\infty[} |X_t|\,|Y_t|\, d|[M,N]|_t$$
$$\leq \sqrt{\int_{]0,\infty[} X_t^2\, d[M,M]_t}\sqrt{\int_{]0,\infty[} Y_t^2\, d[N,N]_t} \quad \text{c.s.}$$

Demostración (bosquejo). La primera desigualdad:

1. Basta hacerlo para X, Y acotados y tales que valen 0 si $t \geq t_0$ (pasando a límites).
2. Basta mostrar que para X, Y como en 1 se cumple:

$$\left|\int_{]0,\infty[} X_t Y_t d\langle M,N\rangle_t\right|$$
$$\leq \sqrt{\int_{]0,\infty[} X_t^2\, d\langle M,M\rangle_t}\sqrt{\int_{]0,\infty[} Y_t^2\, d\langle N,N\rangle_t} \quad \text{c.s.} \tag{10.1}$$

Si sabemos esto, aplicamos esta desigualdad a los procesos

$$|X_t| \quad \text{y} \quad |Y_t|\frac{d|\langle M,N\rangle|_t}{d\langle M,N\rangle_t},$$

en lugar de X y Y (nótese que el proceso $d|\langle M,N\rangle|_t / d\langle M,N\rangle_t$ es medible y toma sólo valores ± 1).

3. Basta demostrar que existe $\Gamma \subset \Omega$, $P(\Gamma) = 0$, tal que si $\omega \in \Omega - \Gamma$, entonces (10.1) vale para todos $(X_t(\omega))_t, (Y_t(\omega))_t$, donde X, Y son procesos "simples", i.e.

$$\begin{aligned} X_t &= \xi_0 \mathbf{1}_{\{0\}}(t) + \sum_{i=1}^{n} \xi_i \mathbf{1}_{]t_i,t_{i+1}]}(t), \\ Y_t &= \eta_0 \mathbf{1}_{\{0\}}(t) + \sum_{i=1}^{n} \eta_i \mathbf{1}_{]t_i,t_{i+1}]}(t), \end{aligned}$$

(1) Recordemos que $(|\langle M,N\rangle|_t)_t$ (y análogamente $(|[M,N]|_t)_t$) es el proceso de variación de $\langle M,N\rangle$ (o de $[M,N]$) y se trata de la integral de Stieltjes con respecto a este proceso.

donde $0 \leq t_1 < \cdots < t_{n+1}$ (claramente se puede tomar la misma partición para X y Y) y ξ_i, η_i son variables aleatorias acotadas (no necesariamente $\mathfrak{F}_{t_i}$-medibles) para $i = 1, \ldots, n$.

En efecto, supongamos que un tal Γ existe. Fijemos $\omega \in \Omega - \Gamma$ y Y un proceso simple medible. Cada función $f: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ medible y acotada es el límite puntual de las funciones de la forma $(X_t(w))_t$, donde las X son simples medibles. Por lo tanto se tiene

$$
\begin{aligned}
&\left| \int_{]0,\infty[} f(t) Y_t(\omega)\, d\langle M, N\rangle_t(\omega) \right| \\
&\qquad \leq \sqrt{\int_{]0,\infty[} f(t)^2\, d\langle M, M\rangle_t(\omega)} \sqrt{\int_{]0,\infty[} Y_t^2(\omega)\, d\langle N, N\rangle_t(\omega)}
\end{aligned}
$$

para cada f medible acotada con soporte acotado, cada Y-proceso simple medible y toda $\omega \in \Omega - \Gamma$. Pero esto significa que (10.1) se cumple para cada X como en 1, Y simple medible y $\omega \in \Omega - \Gamma$.

Ahora fijemos un X como en 1, $\omega \in \Omega - \Gamma$ y por el mismo razonamiento obtenemos (10.1) para cada X, Y como en 1, $\omega \in \Omega - \Gamma$.

4. Basta demostrar que existe $\Gamma \subset \Omega$, $P(\Gamma) = 0$, tal que si $\omega \in \Omega - \Gamma$ entonces (10.1) vale para todos los procesos deterministas X y Y de la forma $X = Y = \mathbf{1}_{]s,t]}$, $0 \leq t < s$; es decir

$$
\begin{aligned}
&|\langle M, N\rangle_s - \langle M, N\rangle_t| \\
&\qquad \leq \sqrt{\langle M, M\rangle_s - \langle M, M\rangle_t} \sqrt{\langle N, N\rangle_s - \langle N, N\rangle_t}.
\end{aligned} \tag{10.2}
$$

En efecto, supongamos que (10.2) se cumple para $t < s$, $\omega \in \Omega - \Gamma$. Sean X y Y como en el paso 3. Tenemos

$$
\begin{aligned}
\left| \int_{]0,\infty[} XY\, d\langle M, N\rangle \right| &= \left| \sum_i \xi_i \eta_i (\langle M, N\rangle_{t_{i+1}} - \langle M, N\rangle_{t_i} \right| \\
&\leq \sum_i |\xi_i|\, |\eta_i| \sqrt{\langle M, M\rangle_{t_{i+1}} - \langle M, M\rangle_{t_i}} \sqrt{\langle N, N\rangle_{t_{i+1}} - \langle N, N\rangle_{t_i}} \\
&\leq \sqrt{\sum_i \xi_i^2 (\langle M, M\rangle_{t_{i+1}} - \langle M, M\rangle_{t_i})} \sqrt{\sum_i \eta_i^2 (\langle N, N\rangle_{t_{i+1}} - \langle N, N\rangle_{t_i})} \\
&= \sqrt{\int_{]0,\infty[} X^2\, d\langle M, M\rangle} \sqrt{\int_{]0,\infty[} Y^2\, d\langle N, N\rangle}
\end{aligned}
$$

(en la primera desigualdad se uso (10.2) y en la segunda Schwarz).

5. Finalmente se demostrará (10.2).

Sabemos que para cada $\lambda \in \mathbb{R}$ el proceso $\langle M+\lambda N\rangle$ es creciente, es decir para $0 \leq s < t$ se tiene $\langle M+\lambda N\rangle_t \geq \langle M+\lambda N\rangle_s$.

$\langle M+\lambda N\rangle$ podemos transformarlo por bilinealidad de $\langle\cdot,\cdot\rangle$, pero recordemos que este proceso está definido de manera única sólo módulo indistinguibilidad. Entonces lo único que podemos afirmar es que para todo $\lambda \in \mathbb{R}$ existe un $\Gamma_\lambda \subset \Omega$, $P(\Gamma_\lambda) = 0$, tal que para cada $\omega \in \Omega - \Gamma_\lambda$, $t \in \mathbb{R}_+$,

$$\langle M+\lambda N\rangle_t(\omega) = \langle M\rangle_t(\omega) + 2\lambda\langle M,N\rangle_t(\omega) + \lambda^2\langle N\rangle_t(\omega).$$

Sea $\Gamma = \cup_{\lambda\in\mathbb{Q}}\Gamma_\lambda$; claramente $P(\Gamma) = 0$. Para todo $\omega \in \Omega - \Gamma$ y $0 \leq s < t$ se tiene

$$\begin{aligned}&\langle M\rangle_t(\omega) - \langle M\rangle_s(\omega) + 2\lambda(\langle M,N\rangle_t(\omega) - \langle M,N\rangle_s(\omega))\\ &+\lambda^2(\langle N\rangle_t(\omega) - \langle N\rangle_s(\omega)) \geq 0\end{aligned}$$

para toda λ racional. Pero entonces esta desigualdad vale claramente para toda $\lambda \in \mathbb{R}$ y por lo tanto el discriminante del polinomio de 2º grado en λ es ≤ 0. Es decir

$$\begin{aligned}&(\langle M,N\rangle_t(\omega) - \langle M,N\rangle_t(\omega))^2\\ &\quad\leq\ (\langle M\rangle_t(\omega) - \langle M\rangle_s(\omega))(\langle N\rangle_t(\omega) - \langle N\rangle_s(\omega)),\end{aligned}$$

y esto es (10.2).

En esta demostración hemos utilizado sólo propiedades comunes de $\langle\cdot,\cdot\rangle$ y $[\cdot,\cdot]$ por lo tanto la demostración para el proceso $[M,N]$ es idéntica. □

El siguiente teorema de Kunita-Watanabe nos da una caracterización de la integral estocástica $X \circ M$ con X fijo.

10.4 Teorema. *Sean $M \in \mathcal{M}^2$ y $X \in L^2(M)$. Entonces la integral estocástica $X \circ M$ es el único elemento $L \in \mathcal{M}^2_\infty$ tal que:*

$$\forall N \in \mathcal{M}^2_\infty, \quad E(L_\infty N_\infty) = E(\int_0^\infty X_t\, d\langle M,N\rangle_t) \tag{10.3}$$

(esto se puede escribir así:

$$((X\circ M), N)_{\mathcal{M}^2_\infty} = \int X\, d\lambda_{MN}),$$

lo que equivale a:

$$\forall N \in \mathcal{M}^2_\infty, \quad E(L_\infty N_\infty) = E(\int_0^\infty X_t\, d[M,N]_t), \tag{10.4}$$

Demostración. Supongamos que $X = \sum_{i=1}^{n} \xi_i \mathbf{1}_{]t_i,t_{i+1}]}$ (ξ_i es $\mathfrak{F}_{t_i}$-medible y acotado para cada i).

$$\begin{aligned} E((X \circ M)_\infty N_\infty) &= E(\sum_{i=1}^{m} \xi_i (M_{t_{i+1}} - M_{t_i}) N_\infty) \\ &= \sum_{i=1}^{m} E(\xi_i (M_{t_{i+1}} N_{t_{i+1}} - M_{t_i} N_{t_i})) \end{aligned}$$

(ya que $E(\xi_i M_{t_{i+1}} N_\infty) = E(\xi_i M_{t_{i+1}} E(N_\infty | \mathfrak{F}_{t_{i+1}}))$, lo mismo para t_i)

$$\begin{aligned} &= \sum_{i=1}^{m} E(\xi_i E(M_{t_{i+1}} N_{t_{i+1}} | \mathfrak{F}_{t_i}) - M_{t_i} N_{t_i}) \\ &= \sum_{i=1}^{m} E(\xi_i \{ E(M_{t_{i+1}} N_{t_{i+1}} - \langle M, N \rangle_{t_{i+1}} | \mathfrak{F}_{t_i}) \\ &\quad + E(\langle M, N \rangle_{t_{i+1}} | \mathfrak{F}_{t_i}) - (M_{t_i} N_{t_i} - \langle M, N \rangle_{t_i}) - \langle M, N \rangle_{t_i} \}) \end{aligned}$$

(por ser $(MN - \langle M, N \rangle)$ una martingala)

$$\begin{aligned} &= \sum_{i=1}^{m} E(\xi_i \{ E(\langle M, N \rangle_{t_{i+1}} | \mathfrak{F}_{t_i}) - \langle M, N \rangle_{t_i} \}) \\ &= \sum_{i=1}^{m} E(E(\xi_i (\langle M, N \rangle_{t_{i+1}} - \langle M, N \rangle_{t_i}) | \mathfrak{F}_{t_i})) \\ &= \sum_{i=1}^{m} E(\xi_i (\langle M, N \rangle_{t_{i+1}} - \langle M, N \rangle_{t_i})) \\ &= E(\int_0^\infty X_t \, d\langle M, N \rangle_t). \end{aligned}$$

Hemos probado que (10.3) vale para procesos simples. Ahora hay que pasar al límite en ambos lados.

La aplicación ψ de $L^2(M)$ en $\mathbb{R}$ definida por

$$\psi(X) = E((X \circ M)_\infty N_\infty)$$

es una funcional continua en $L^2(M)$, ya que $X \mapsto (X \circ M)_\infty$ es continua como función de $L^2(M)$ en $L^2(\Omega)$ por definición de la integral estocástica, y el producto escalar en $L^2(\Omega)$ es continuo.

Por otra parte $\phi\colon L^2(M) \to \mathbb{R}$, $\phi(X) = E(\int_0^\infty X\, d\langle M, N\rangle)$ es también lineal continuo en $L^2(M)$, ya que

$$\begin{aligned} |E\int_0^\infty X\, d\langle M,N\rangle| &\leq E\int_0^\infty |X|\, d|\langle M,N\rangle|. \\ &\leq E\left(\sqrt{\int_0^\infty X^2\, d\langle M,M\rangle}\sqrt{\int_0^\infty d\langle N,N\rangle}\right) \\ &\leq \sqrt{E\int_0^\infty X^2\, d\langle M,M\rangle}\sqrt{E\langle N,N\rangle_\infty} \\ &= \|X\|_{L^2(M)}\sqrt{E\langle N,N\rangle_\infty} \qquad (10.5) \end{aligned}$$

(la segunda desigualdad es el Teorema 10.3 (Kunita-Watanabe), la tercera es Schwarz).

ψ y ϕ son dos funcionales continuas en $L^2(M)$ que coinciden en un subconjunto denso (los procesos simples) de $L^2(M)$, por lo tanto coinciden en todo el espacio.

Unicidad: consideremos la aplicación $\theta\colon \mathcal{M}^2_\infty \to \mathbb{R}$, $\theta(N) = E\int_0^\infty X d\langle M, N\rangle$.

Por (10.5) θ es una funcional lineal acotada en $\mathcal{M}^2_\infty$, porque

$$E\langle N\rangle_\infty = E(N^2_\infty - N^2_0) \leq EN^2_\infty = \|N\|^2_{\mathcal{M}^2_\infty}.$$

Pero $\mathcal{M}^2_\infty$ es un espacio de Hilbert, entonces por el teorema de representación de Riesz existe un único elemento $L \in \mathcal{M}^2_\infty$ tal que

$$(L,\cdot)_{\mathcal{M}^2_\infty} = \theta(\cdot) = E\int_0^\infty X\, d\langle M,\cdot\rangle \quad (\forall\cdot \in \mathcal{M}^2_\infty).$$

Para el proceso $[M, N]$ el razonamiento es análogo. □

10.5 Corolario. *Si $M^1, M^2 \in \mathcal{M}^2$ entonces $\int X\, d(M^1+M^2) = \int X\, dM^1 + \int X\, dM^2$ siempre y cuando el lado derecho existe.*

Demostración. Es consecuencia del teorema anterior y de la linealidad de $\langle\cdot,\cdot\rangle$. □

10.6 Proposición. *Sean $M, N \in \mathcal{M}^2$ y $X \in \Lambda^2(M)$. Entonces:*

(a) $\langle X \circ M, N\rangle = \int_{]0,\cdot]} X\, d\langle M,N\rangle$.

(b) $[X \circ M, N] = \int_{]0,\cdot]} X\, d[M,N]$.

Para (a) necesitamos el siguiente

10.7 Lema. *Si $M, N \in \mathcal{M}^2$ y T es un tiempo de paro entonces:*
(a) $\langle M, N^T\rangle = \langle M, N\rangle^T$.
(b) $[M, N^T] = [M, N]^T$.

Demostración del lema. (b) Es consecuencia inmediata de la definición de $[M, N]$ (ver 9.15(a)).

(a) $\langle M, N\rangle$ es predecible y $\langle M, N\rangle \in \mathcal{W}^1$ por lo tanto $\langle M, N\rangle^T$ es predecible (ejercicio), 0 en 0 y está en $\mathcal{W}^1$. Si mostramos que $MN^T - \langle M, N\rangle^T$ es una martingala, por unicidad del compensador se tendrá que $\langle M, N\rangle^T = \langle M, N^T\rangle$.

El proceso $MN^T - \langle M, N\rangle^T$ es adaptado, cadlag e integrable; para probar que es una martingala, basta con mostrar (Lema 7.13) que para todo S tiempo de paro acotado $E(M_S N_S^T - \langle M, N\rangle_S^T) = E(M_0 N_0)$. Tenemos

$$\begin{aligned}
&E(M_S N_{S\wedge T} - \langle M, N\rangle_{S\wedge T}) \\
&\quad = E[(MN - \langle M, N\rangle)_{S\wedge T} + M_S N_{T\wedge S} - (MN)_{T\wedge S}] \\
&\quad = E[(MN - \langle M, N\rangle)_{S\wedge T}] + E[E(M_S N_{T\wedge S} - M_{T\wedge S} N_{T\wedge S} | \mathfrak{F}_{T\wedge S})] \\
&\quad = E(M_0 N_0).
\end{aligned}$$

□

Demostración de 10.6(a). Se puede reemplazar X por $X\mathbf{1}_{]0,t]}$ y suponer que $X \in L^2(M)$. Como X y $\langle M, N\rangle$ son procesos predecibles entonces $X \circ \langle M, N\rangle$ es predecible. En efecto, es cadlag adaptado y

$$\begin{aligned}
(X \circ \langle M, N\rangle)_t &= (X \circ \langle M, N\rangle)_{t-} + \Delta(X \circ \langle M, N\rangle)_t \ ^{(2)} \\
&= (X \circ \langle M, N\rangle)_{t-} + X_t(\langle M, N\rangle_t - \langle M, N\rangle_{t-}).
\end{aligned}$$

Además $(X \circ \langle M, N\rangle)_0 = 0$ y $X \circ \langle M, N\rangle \in \mathcal{W}^0$.

Por la unicidad del compensador, basta mostrar que $((X \circ M)N - X \circ \langle M, N\rangle)$ es una martingala (ver la Observación 7.11) y como se trata de un proceso adaptado cadlag e integrable, basta con ver que para cada T tiempo de paro acotado

$$E((X \circ M)_T N_T - \int_{]0,T]} X \, d\langle M, N\rangle) = 0.$$

(2) A veces será conveniente escribir las integrales de Stieltjes $\int X \, d\langle M, N\rangle$ y $\int X \, d[M, N]$ "de manera estocástica", o sea $X \circ \langle M, N\rangle$ y $X \circ [M, N]$. En el Capítulo 12 veremos que esto no es un abuso de notación.

Tenemos

$$\begin{aligned} E((X\circ M)_T N_T) &= E((X\circ M)_\infty N_T) = E(\int_0^\infty X_t\, d\langle M, N^T\rangle_t) \\ &= E(\int_0^\infty X_t\, d\langle M, N\rangle_t^T) \\ &= E(\int_{]0,T]} X_t\, d\langle M, N\rangle_t) \end{aligned}$$

(la segunda igualdad es una aplicación de 10.4 y la tercera es consecuencia del Lema 10.7). □

Para (b) necesitamos:

10.8 Lema. *Si $M \in \mathcal{M}^2$ y $X \in \Lambda^2(M)$ entonces $(X\circ M)^c = X\circ M^c$ y $(X\circ M)^d = X\circ M^d$.*

Demostración del lema. Sabemos que $X\circ M^c \in \mathcal{M}^{2c}$ porque $\Delta(X\circ M^c) = X\Delta M^c = 0$ (Proposición 10.2). Además $X\circ M = X\circ M^c + X\circ M^d$, por 10.5 (el lector probará fácilmente que $\Lambda^2(M) \subset \Lambda^2(M^c)\cap\Lambda^2(M^d)$). Basta mostrar que $X\circ M^d \in \mathcal{M}^{2d}$. Pero, $X\circ M^d \in \mathcal{M}^{2d}$ si y sólo si $(X\circ M^d)\,\amalg\, L$ para cada $L\in\mathcal{M}^{2c}$ (por 8.25).

Sea $L \in \mathcal{M}^{2c}$. Entonces, por el inciso (a) precedente, $\langle X\circ M^d, L\rangle = X\circ\langle M^d, L\rangle$ y por 8.14 es claro que $\langle M^d, L\rangle = 0$. □

Demostración de 10.6(b).

$$\begin{aligned} [X\circ M, N]_t &= \langle (X\circ M)^c, N^c\rangle_t + \sum_{s\le t}\Delta(X\circ M)_s\Delta N_s \\ &= \langle X\circ M^c, N^c\rangle_t + \sum_{s\le t}(X_s\Delta M_s)\Delta N_s \\ &= X\circ\langle M^c, N^c\rangle_t + \sum_{s\le t}(X_s\Delta M_s)\Delta N_s \\ &= \int_{]0,t]} X d\,[M,N] \end{aligned}$$

(la segunda igualdad es por el Lema 10.8, y la tercera es por (a)). □

10.9 Corolario. *Si $M\in\mathcal{M}^2$ y $X\in\Lambda^2(M)$ y Y es un proceso predecible y acotado, entonces*

$$(YX)\circ M = Y\circ(X\circ M) = X\circ(Y\circ M). \tag{10.6}$$

En particular, si T es un tiempo de paro, $X\in\Lambda^2(M)$ entonces

$$\int_{]0,t]} \mathbf{1}_{[0,T]} X\, dM = (X\circ M)_t^T = (X\circ M^T)_t \tag{10.7}$$

para cada $t>0$.

Observaciones. (a) Todos los términos en (10.6) tienen sentido por las hipótesis hechas.

(b) Para $T = t_0$, la fórmula es inmediata de la definición. Es importante notar que $(X \circ M)_t^T = \int_0^{t \wedge T} X\, dM$ (por definición) y que la igualdad (10.7) es precisamente la relación de la que se habló en la Observación 9.16.

Demostración. Reemplazando a M por M^t se puede suponer que $M \in \mathcal{M}_\infty^2$ y $X \in L^2(M)$ (ya que si $X \in \Lambda^2(M)$ entonces por definición $X \in L^2(M^t)$).

La primera igualdad en (10.6): como ambos son procesos en $\mathcal{M}_\infty^2$, basta mostrar que $((YX) \circ M)_\infty = (Y \circ (X \circ M))_\infty$ c.s. Para esto basta probar que para cada N_∞ variable aleatoria acotada $\mathfrak{F}_\infty$-medible se tiene

$$E(((YX) \circ M)_\infty N_\infty) = E((Y \circ (X \circ M))_\infty N_\infty).$$

Observe que el proceso definido por $N_t = E(N_\infty | \mathfrak{F}_t)$ es un proceso en $\mathcal{M}_\infty^2$.

Podemos aplicar el Teorema 10.4 y la Proposición 10.6 y obtener:

$$\begin{aligned} E(((YX) \circ M)_\infty N_\infty)) &= E \int_0^\infty YX\, d\langle M, N\rangle \\ &= E \int_0^\infty Y\, d\langle X \circ M, N\rangle \\ &= E((Y \circ (X \circ M))_\infty N_\infty) \end{aligned}$$

La segunda igualdad de (10.6) se muestra de manera análoga.

Para obtener la fórmula (10.7) de la igualdad (10.6) se toma $Y = \mathbf{1}_{[0,T]}$, T tiempo de paro, y basta demostrar que si $M \in \mathcal{M}_\infty^2$ entonces

$$\int \mathbf{1}_{[0,T]}\, dM = M^T - M_0.$$

Es claro que $\mathbf{1}_{[0,T]} \in L^2(M)$ porque es acotado predecible. Para probar la fórmula utilizaremos el Teorema 10.4. Obviamente $M^T - M_0 \in \mathcal{M}_\infty^2$. Sea $N \in \mathcal{M}_\infty^2$; tenemos

$$\begin{aligned} E((M_\infty^T - M_0) N_\infty) &= E(M_T N_\infty - M_0 N_\infty) \\ = E(M_T N_T - M_0 N_0) &= E(\langle M, N\rangle_T) = E \int_{]0,\infty[} \mathbf{1}_{[0,T]}\, d\langle M, N\rangle, \end{aligned}$$

lo que termina la demostración por el Teorema 10.4. $\square$

10.10 Teorema de Representación. *Sea $M \in \mathcal{M}^2$. Para cada $L \in \mathcal{M}^2$ existe una descomposición única $L = X \circ M + N$ donde $N \in \mathcal{M}^2$, $N \amalg M$ y $X \in \Lambda^2(M)$ (N es único módulo indistinguibilidad, X es único como elemento de $\Lambda^2(M)$).*

10.11 Lema. *Si $N, M \in \mathcal{M}^2$ y $N \amalg M$ entonces $N \amalg X \circ M$, para cada $X \in \Lambda^2(M)$.*

Demostración. $\langle X \circ M, N\rangle = X \circ \langle M, N\rangle = 0$ (por 10.6 y 8.14). □

Demostración del teorema. Podemos suponer que $M \in \mathcal{M}^2_\infty$ y $L \in \mathcal{M}^2_\infty$ (reemplazamos M por M^t y L por L^t. Si lo sabemos para M^t y L^t, entonces

$$L^t = X^{(t)} \circ M^t + N^{(t)}.$$

Por la unicidad, existen $N \in \mathcal{M}^2$ y $X \in L^2(M)$ tales que $N^t = N^{(t)}$, $X^t = X^{(t)}$, ya que todo se "pega bien").

Denotemos por $\mathcal{I}(M) = \{X \circ M : X \in L^2(M)\}$ que es un subespacio lineal cerrado de $\mathcal{M}^2_\infty$ (por ser la imagen de $L^2(M)$ bajo una isometría). Por ser $\mathcal{M}^2_\infty$ un espacio de Hilbert, para cada $L \in \mathcal{M}^2_\infty$ existe una descomposición única $L = X \circ M + N$, donde $X \in L^2(M)$, $N \in \mathcal{M}^2_\infty$ y $N \perp \mathcal{I}(M)$ (ortogonalidad débil o sea en el sentido del espacio de Hilbert $\mathcal{M}^2_\infty$).

Hay que demostrar que $N \amalg M$. Por 8.14 basta probar que para todo T tiempo de paro acotado $E(M_T N_T) = E(M_0 N_0)$.

Por 10.9 sabemos que $M_T = (\mathbf{1}_{[0,T]} \circ M)_\infty + M_0$, entonces

$$\begin{aligned} E(M_T N_T) &= E((\mathbf{1}_{[0,T]} \circ M)_\infty N_T) + E(M_0 N_T) \\ &= E((\mathbf{1}_{[0,T]} \circ M)_\infty E(N_\infty | \mathfrak{F}_T)) + E(M_0 E(N_T | \mathfrak{F}_0)) \\ &= E((\mathbf{1}_{[0,T]} \circ M)_\infty N_\infty) + E(M_0 N_0) = E(M_0 N_0) \end{aligned}$$

porque $N \perp \mathbf{1}_{[0,T]} \circ M$.

Unicidad de la descomposición: sea $L = X' \circ M + N'$ otra descomposición con $N' \amalg M$. Entonces por el Lema 10.11 se tiene $N' \amalg \mathcal{I}(M)$. Todos los elementos de $\mathcal{I}(M)$ son 0 en 0, entonces por 8.15 $N' \perp \mathcal{I}(M)$, y por lo tanto $N' = N$. □

10.12 Aplicaciones al proceso de Wiener. En lo que sigue, hasta el fin de este capítulo se tendrá fijo lo siguiente: $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ un espacio de probabilidad completo, W un proceso de Wiener y $(\mathfrak{F}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ la filtración usual generada por W (Definición 1.7).

10.13 Lema. *Si M es martingala acotada, 0 en 0, y $M \amalg W$ entonces $M = 0$.*

Demostración. Observemos que si M es acotada, entonces existen constantes a, b ($b \neq 0$) tales que $(a + bM_\infty)$ es la densidad de una probabilidad que denotaremos por Q; así tenemos $dQ = (a + bM_\infty)\, dP$.

Basta demostrar que ambos W y $(W_t^2 - t)_t$ son martingalas con respecto a Q, porque entonces por el teorema de Lévy[3] tendremos que W es proceso de Wiener con respecto a Q, y esto implica que $P = Q$ sobre $\mathfrak{F}_\infty$, ya que por la definición del proceso de Wiener se tendrá $P(A) = Q(A)$ para todo $A \in \mathcal{A} = \{\{W_{t_1} \in \Gamma_1 \ldots, W_{t_n} \in \Gamma_n\} : \Gamma_1, \ldots, \Gamma_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R}),\ t_1, \ldots, t_n \in \mathbb{R}_+,\ n \in \mathbb{N}\}$ y $\mathcal{A}$ es un π-sistema que genera a $\mathfrak{F}_\infty$.

Pero si $P = Q$ sobre $\mathfrak{F}_\infty$ entonces $a + bM_\infty = 1$ c.s, por lo cual $M_\infty = 0$ y entonces $M = 0$, porque $M_t = E(M_\infty | \mathfrak{F}_t)$.

Probaremos que W y $(W_t^2 - t)_t$ son martingalas con respecto a Q: sea T un tiempo de paro acotado. Basta probar $\int_\Omega W_T\, dQ = 0$ y $\int_\Omega (W_T^2 - T)\, dQ = 0$.

$$\begin{aligned}\int_\Omega W_T\, dQ &= E[W_T(a + bM_\infty)] = a\,E(W_T) + b\,E(W_T M_\infty)\\ &= b\,E(W_T M_T) = b\,E(W_0 M_0) = 0\end{aligned}$$

ya que $E(W_T) = 0$ porque W es una martingala (c.r.a P) y vale 0 en 0; y $E(M_T W_T) = E(W_0 M_0)$ porque $M \amalg W$.

De la misma manera,

$$\begin{aligned}\int_\Omega (W_T^2 - T)\, dQ &= a\,E(W_T^2 - T) + b\,E((W_T^2 - T)M_\infty)\\ &= b\,E((W_T^2 - T)M_\infty) = b\,E((W_T^2 - T)M_T).\end{aligned}$$

Para probar que $E((W_T^2 - T)M_T) = 0$ primero observemos que $W_t^2 - t = 2\int_{]0,t]} W\, dW$ (lo demostraremos más adelante, ver 12.14). Entonces por el Lema 10.11, $(W_t^2 - t)_t \amalg M$ lo cual implica el resultado. □

10.14 Corolario. *Para todo tiempo de paro predecible T se cumple que $\mathfrak{F}_T = \mathfrak{F}_{T-}$.*

Nota. La relación $\mathfrak{F}_T = \mathfrak{F}_{T-}$ para cada T tiempo de paro predecible se expresa diciendo que $(\mathfrak{F}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ es *cuasicontinua* por la izquierda.

Demostración.

$$\mathfrak{F}_0 = \sigma\{A \in \mathfrak{F} : P(A) = 0\} \quad \text{porque} \quad W_0 = 0,$$

entonces $\{T = 0\} \in \mathfrak{F}_0$ implica $P(T = 0)$ vale 0 ó 1.

Si $T = 0$ c.s., entonces $\mathfrak{F}_T = \mathfrak{F}_{T-}$ por la definición.

Sea ahora $T > 0$ c.s. Supongamos que $\mathfrak{F}_T \supsetneqq \mathfrak{F}_{T-}$ (esto implica en particular que $T \not\equiv \infty$); entonces existe una variable aleatoria acotada ξ que es $\mathfrak{F}_T$-medible y no es $\mathfrak{F}_{T-}$-medible.

[3] Vamos a demostrar este teorema más adelante (Teorema 13.7).

Definamos el proceso $A = \xi \mathbf{1}_{[T,\infty[}$. Se tiene $A_0 = 0$ sobre $\{T > 0\}$, por lo tanto $A_0 = 0$ c.s.

Por 8.7 (fórmula (8.2)) sabemos que $\tilde{A} = E(\xi|\mathfrak{F}_{T-})\mathbf{1}_{[T,\infty[}$ y $M = A - \tilde{A}$ es una martingala acotada. Como $W \in \mathcal{M}^{2c}$ se obtiene por 8.17 que $M \amalg W$. Además es claro que $M_0 = 0$ c.s. Podemos aplicar el Lema 10.13 para obtener que $M \equiv 0$. Entonces

$$0 = M_\infty = (\xi - E(\xi|\mathfrak{F}_{T-}))\mathbf{1}_{\{T<\infty\}}.$$

Esto implica que

$$\xi = \xi\mathbf{1}_{\{T<\infty\}} + \xi\mathbf{1}_{\{T=\infty\}} = E(\xi|\mathfrak{F}_{T-})\mathbf{1}_{\{T<\infty\}} + \xi\mathbf{1}_{\{T=\infty\}}$$

y entonces, por el Lema 2.13, ξ es $\mathfrak{F}_{T-}$-medible, lo que es una contradición. □

10.15 Lema general (de teoría de procesos, no se refiere a W). *Sea $(\mathfrak{F}_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ una filtración cuasicontinua por la izquierda. Entonces cada tiempo de paro accesible T es también predecible.*

Demostración. Por la Definición 2.29 existe $(T^n)_n$ sucesión de tiempos de paro predecibles tal que $[T] \subset \cup_n [T^n]$.

Sea (ver 2.23)

$$S_n = T^1_{\{T^1=T\}} \wedge \ldots \wedge T^n_{\{T^n=T\}}, \quad (n \geq 1),$$

entonces cada S_n es un tiempo de paro predecible (pues por hipótesis $\{T^j = T\} \in \mathfrak{F}_{T_j} = \mathfrak{F}_{T_j^-}$ por lo tanto $T^j_{\{T^j=T\}}$ es predecible para cada $j \in \mathbb{N}$ por 2.24). Claramente $S_n \downarrow T$ y se estabiliza, pues $S_n(\omega) = T(\omega)$ a partir de algún $n(\omega)$ por lo tanto T es predecible por 2.22. □

Regresemos a nuestro modelo (ver 10.12).

10.16 Corolario. *Cada tiempo de paro T con respecto a la filtración $(\mathfrak{F}_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ es predecible; en particular $\mathcal{P} = \mathcal{O}$.*

Demostración. Por el Teorema 2.31 y el Lema 10.15 sabemos que todo tiempo de paro T tiene la forma $T = T_1 \wedge T_2$ donde T_1 es un tiempo de paro predecible y T_2 es totalmente inaccesible. Entonces basta probar que no hay tiempos de paro totalmente inaccesibles $\not\equiv \infty$.

Sea

$$A = \mathbf{1}_{[T_2,\infty[}, \qquad M = A - \tilde{A}.$$

$M_0 = 0$ porque $A_0 = 0$ por ser T_2 totalmente inaccesible y $M \amalg W$ por 8.17 pues W es continuo. Queremos utilizar el Lema 10.13 pero no podemos aplicarlo directamente ya que

M no es necesariamente acotado. Sea $S_n = \inf\{t : \tilde{A}_t \geq n\}$, $n \in \mathbb{N}$. Se tiene $M^{S_n} \amalg W$ por 10.7 (o también por 8.27), además $|M_t^{S_n}| \leq 1 + |\tilde{A}_{S_n \wedge t}| \leq 1 + n$ porque $\tilde{A}$ es continuo (7.14(c)) y $\tilde{A}_0 = 0$.

Por el Lema 10.13 $M^{S_n} = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Pero $S_n \uparrow \infty$ cuando $n \to \infty$, por lo tanto $M = 0$. Por otra parte M tiene un salto igual a uno en T_2 sobre $\{T_2 < \infty\}$, entonces necesariamente $T_2 = \infty$.

Para ver que $\mathcal{P} = \mathcal{O}$ basta usar 3.12(e) y 3.16. Si no queremos aplicar 3.16, ya que no lo demostramos con detalles, podemos utilizar el Teorema 4.29 para obtener que cada proceso cadlag y adaptado X es predecible (lo que nos da $\mathcal{O} \subset \mathcal{P}$). En efecto, para cada T tiempo de paro (predecible) X_T es $\mathfrak{F}_T$-medible sobre $\{T < \infty\}$ y por lo tanto $\mathfrak{F}_{T-}$-medible por 10.14. □

10.17 Corolario. *Cada martingala cadlag con respecto a $(\mathfrak{F}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ es continua.*

Demostración. Por el corolario anterior sabemos que cada proceso cadlag adaptado es predecible. Por otro lado, demostramos (Proposición 4.31) que cada martingala predecible es continua. □

Ahora podemos probar un importante resultado (originalmente de Itô pero con otra demostración; ver e.g. [9]).

10.18 Corolario. *Cada martingala $M \in \mathcal{M}^2$, $M_0 = 0$ tiene la forma*

$$M_t = \int_{]0,t]} X_s \, dW_s, \quad \text{para un} \quad X \in \Lambda^2(W).$$

Demostración. Por el teorema general de representación 10.10 tenemos que cada martingala M en $\mathcal{M}^2$ tiene una descomposición

$$M = \int X \, dW + N \quad \text{con} \quad N \amalg W.$$

Basta demostrar que no hay martingalas $N \neq 0$ que sean 0 en 0 y fuertemente ortogonales a W, o sea: si N es una martingala, $N \amalg W$ y $N_0 = 0$ entonces $N \equiv 0$.

Lo sabemos para N martingala acotada (ver 10.13). Veamos ahora para N no acotada: se define $T_n = \inf\{t : |N_t| \geq n\}$.

Como N es continua (por 10.17), $|N^{T_n}| \leq n$ para todo n y aplicando 10.13 obtenemos $N^{T_n} \equiv 0$ ya que N^{T_n} es una martingala acotada, $N_0^{T_n} = 0$ y $N^{T_n} \amalg W$.

Tenemos así que para todo $n \in \mathbb{N}$, $N^{T_n} \equiv 0$, lo que muestra que $N \equiv 0$ ya que $T_n \uparrow \infty$ si $n \to \infty$. □

10.19 Corolario. *Cada variable aleatoria* $\xi \in L^2(\Omega, \mathfrak{F}_t, P)$ *tal que* $E(\xi) = 0$ *tiene la forma* $\xi = \int_{]0,t]} X_s \, dW_s$.

Observación. El Corolario 10.19 vale también para ξ variable aleatoria $\mathfrak{F}_t$-medible no necesariamente en L^2 pero la extensión a este caso no es inmediata (ver [5]).

Capítulo 11

Martingalas locales y semimartingalas

En este capítulo hacemos preparaciones necesarias para poder, en el capítulo siguiente, extender la noción de la integral estocástica. Basándonos en la noción general de localizar a un proceso por medio de una sucesión de tiempos de paro, definiremos martingalas locales y semimartingalas e investigaremos algunas de sus propiedades.

11.1 Definición. Sea $\mathcal{K}$ una clase de procesos. La *clase localizada* de $\mathcal{K}$ es la clase $\mathcal{K}_{Loc}$ definida por la siguiente propiedad: $X \in \mathcal{K}_{Loc}$ si y sólo si existe $(T_n)_n$ sucesión de tiempos de paro tal que $T_n \uparrow \infty$ y $X^{T_n} \in \mathcal{K}$ para cada n.

11.2 Observaciones. (a) $\mathcal{K}_{Loc}$ depende de la filtración porque depende de los tiempos de paro.

(b) La sucesión $(T_n)_n$ tal que $X^{T_n} \in \mathcal{K}$ para cada n, se llama *sucesión localizante* de X en $\mathcal{K}$ y decimos que $(T_n)_n$ *localiza* a X en $\mathcal{K}$.

(c) $\mathcal{K} \subset \mathcal{K}_{Loc}$ porque si $X \in \mathcal{K}$ podemos tomar $T_n = \infty$ para todo n como sucesión localizante.

11.3 Definición. Decimos que la clase $\mathcal{K}$ es *estable con respecto a paros* (estable c.r.a paros) si y sólo si para cada $X \in \mathcal{K}$ y T tiempo de paro se tiene que $X^T \in \mathcal{K}$.

11.4 Ejemplo. Las clases $\mathcal{M}^2, \mathcal{M}^2_\infty$, las martingalas, las martingalas uniformemente integrables, $\mathcal{W}^0, \mathcal{W}^1, \mathcal{W}^1_\infty$ son estables c.r.a paros y son lineales. □

11.5 Lema. *Sea $\mathcal{K}$ una clase de procesos lineal y estable c.r.a paros. Entonces:*

(a) $\mathcal{K}_{Loc} = \{X : \exists (T_n)_n$ *sucesión de tiempos de paro tal que* $\sup_n T_n = \infty$ *y* $X^{T_n} \in \mathcal{K}$, $n = 1, 2, \ldots\}$.

(b) $\mathcal{K}_{Loc}$ *es también lineal y estable c.r.a paros.*

(c) $\mathcal{K}_{Loc\ Loc} = \mathcal{K}_{Loc}$.

Demostración. Observemos que si S, T son tiempos de paro y X es un proceso tal que $X^S \in \mathcal{K}$, $X^T \in \mathcal{K}$ entonces $X^{S\vee T} \in \mathcal{K}$. En efecto: $X^{S\vee T} = X^S + X^T - (X^S)^T \in \mathcal{K}$ porque $\mathcal{K}$ es lineal y $(X^S)^T \in \mathcal{K}$ por ser $\mathcal{K}$ estable c.r.a paros.

(a) Basta ver que $\mathcal{K}_{Loc}$ contiene a la clase descrita, puesto que es inmediato ver que $\mathcal{K}_{Loc}$ está contenida en ésta.

Sea X un proceso tal que $X^{T_n} \in \mathcal{K}$ para todo n, y $(T_n)_n$ una sucesión de tiempos de paro tal que $\sup_n T_n = +\infty$. Tomando $S_n = T_1 \vee T_2 \vee \ldots \vee T_n$, tenemos una sucesión creciente $(S_n)_n$ de tiempos de paro tal que $S_n \uparrow \infty$ y por la observación anterior $X^{S_n} \in \mathcal{K}$ para todo n, es decir $X \in \mathcal{K}_{Loc}$.

(b) Basta observar que si $X, Y \in \mathcal{K}_{Loc}$, $(T_n)_n$ y $(S_n)_n$ localizan a X y Y en $\mathcal{K}$, respectivamente, entonces $(T_n \wedge S_n)_n$ localiza a X y a Y, y por lo tanto localiza a $X + Y$.

(c) Veamos ahora que en las condiciones del lema

$$\mathcal{K}_{Loc\ Loc} \subset \mathcal{K}_{Loc}$$

(la inclusión "$\supset$" es clara).

Sea $X \in \mathcal{K}_{Loc\ Loc}$ y sea $(T_n)_n$ una sucesión localizante de X en $\mathcal{K}_{Loc}$. Como $X^{T_n} \in \mathcal{K}_{Loc}$ para cada n, existe $(S_{m,n})_m$ sucesión localizante de X^{T_n} en $\mathcal{K}$, es decir $(X^{T_n})^{S_{m,n}} = X^{T_n \wedge S_{m,n}} \in \mathcal{K}$. Ordenando $(T_n \wedge S_{n,m})_{(m,n)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$ en una sola sucesión $(R_n)_{n\in\mathbb{N}}$ se tiene $X^{R_n} \in \mathcal{K}$. Además $\sup_n R_n = +\infty$ ya que dado $\omega \in \Omega$, $\alpha > 0$, existe n tal que $T_n(\omega) > \alpha$ y para ese natural n, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $S_{m,n}(\omega) > \alpha$. Esto significa que existe $(m, n) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}$ tal que $(T_n \wedge S_{m,n}(\omega)) > \alpha$. Ahora basta aplicar (a). $\square$

Será conveniente introducir la siguiente notación.

11.6 Notación.

$$\begin{aligned} \mathcal{M}^1 &:= \text{ la clase de martingalas (cadlag),} \\ \mathcal{M}^1_\infty &:= \text{ la clase de martingalas uniformemente integrables.} \end{aligned}$$

11.7 Proposición. (a) $\mathcal{M}^2_{Loc} = (\mathcal{M}^2_\infty)_{Loc}$ *y sus elementos se llaman* martingalas localmente cuadrado integrables.

$$(\mathcal{M}^2_{Loc} = \{M : \exists (T_n)_n,\ T_n \uparrow \infty \text{ y } M^{T_n} \in \mathcal{M}^2\}).$$

(b) $(\mathcal{M}^1_\infty)_{Loc} = \mathcal{M}^1_{Loc}$ *y sus elementos se llaman* martingalas locales.
(c) $\mathcal{W}^0_{Loc} = \mathcal{W}^0$.
(d) $\mathcal{W}^1_{Loc} = (\mathcal{W}^1_\infty)_{Loc}$ *y sus elementos se llaman* procesos de variación localmente integrable.
(e) *Todas las clases anteriores son lineales.*

Demostración. (a) Es obvio que $\mathcal{M}^2_{Loc} \supset (\mathcal{M}^2_\infty)_{Loc}$. Para ver la contención inversa, sea $X \in \mathcal{M}^2_{Loc}$ y sea $(T_n)_n$ una sucesión localizante de X en $\mathcal{M}^2$, i.e. $X^{T_n} \in \mathcal{M}^2$ para cada n. Claramente $X^{T_n \wedge n} \in \mathcal{M}^2_\infty$, lo que muestra que $(T_n \wedge n)_n$ es una sucesión localizante de X en $\mathcal{M}^2_\infty$.

(b) Idéntico a (a).

(c) Si $X \in \mathcal{W}^0_{Loc}$ y $(T_n)_n$ es una sucesión localizante de X en $\mathcal{W}^0$, entonces para cada $\omega \in \Omega$, $t \geq 0$, la función $X^{T_n(\omega)}_\bullet(\omega)$ tiene variación finita sobre $[0,t]$. Pero $T_n(\omega) \uparrow \infty$, por lo tanto, existe n_0 tal que $T_n(\omega) > t$ para $n \geq n_0$. Es decir, si $n \geq n_0$ entonces $X^{T_n(\omega)}_\bullet(\omega) = X_\bullet(\omega)$ sobre $[0,t]$ y esto muestra que $X(\omega)$ tiene variación finita sobre $[0,t]$. Además X es adaptado ($X_t = \lim_{n\to\infty} X^{T_n}_t$) y es cadlag (mismo argumento), es decir, $X \in \mathcal{W}^0$.

(d) Mismo argumento que en (a).

(e) Se sigue de 11.5(b). □

11.8 Ejemplo de una martingala local que no es martingala. Sea W el proceso de Wiener en $\mathbb{R}^3$ que parte de 0 y $a \in \mathbb{R}^3 - \{0\}$, $(\mathfrak{F}_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ la filtración usual generada por W. Sea $M_t = 1/|W_t - a|$; M no es martingala (es supermartingala[(1)]).

Definamos
$$T_n = \inf\{t : |W_t - a| \leq 1/n\}, \quad n \in \mathbb{N}.$$
$T_n \uparrow \infty$ porque $\{a\}$ es un conjunto polar (es decir $P\{\exists t > 0 : W_t = a\} = 0$).

Por otra parte, $1/|\cdot - a|$ es armónica en $\{x \in \mathbb{R}^3 : |x-a| > 1/n\}$, por lo tanto M^{T_n} es una martingala acotada,[(2)] es decir $M \in \mathcal{M}^1_{Loc}$ (y también $M \in \mathcal{M}^2_{Loc}$). □

11.9 Propiedades elementales de las martingalas locales. (a) *Si $M \in \mathcal{M}^1_{Loc}$ entonces M es cadlag adaptado.*
(b) *Si $M \in \mathcal{M}^1_{Loc}$ y M es de la clase DL entonces M es una martingala.*
(c) *Si $M \in \mathcal{M}^1_{Loc}$ y M está acotada inferiormente entonces M es supermartingala.*
(d) *Si $M \in \mathcal{M}^1_{Loc}$, $M_0 = 0$, $|\Delta M_t| \leq C$, para cada $t \geq 0$ (C una constante finita) entonces $M \in \mathcal{M}^2_{Loc}$.*

---

(1) Este hecho se sigue de este ejemplo y de la Propiedad 11.9(c). Ver Ejemplo 5.19(e)).
(2) Este hecho, bien conocido, se sigue e.g. de la fórmula (7.4).

Demostración. (a) Inmediato (como en 11.7(c)).

(b) Sea $(T_n)_n$ una sucesión localizante de M en $\mathcal{M}^1_\infty$; como $(M_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ es de la clase DL entonces $(M_s^{T_n})_n = (M_{T_n\wedge s})_n$, para s fija, es uniformemente integrable, por lo tanto, $E(M_s^{T_n}|\mathfrak{F}_t) \to E(M_s|\mathfrak{F}_t)$ en L^1 si $t < s$; por otra parte $E(M_s^{T_n}|\mathfrak{F}_t) = M_{T_n\wedge t} \to M_t$.

(c) Sea $t > s$, y sea $(T_n)_n$ una sucesión que localiza a M en $\mathcal{M}^1_\infty$. Como M es acotada inferiormente, podemos aplicar el lema de Fatou dos veces; primero para ver que M es integrable:

$$E(M_t) \leq \liminf_{n\to\infty} E(M_{t\wedge T_n}) = \liminf_{n\to\infty} E(M_{0\wedge T_n}) = E(M_0) < \infty,$$

y después para obtener

$$E(M_t|\mathfrak{F}_s) \leq \liminf_{n\to\infty} E(M_{t\wedge T_n}|\mathfrak{F}_s) = \liminf_{n\to\infty} M_{s\wedge T_n} = M_s.$$

(d) Sea $(T_n)_n$ una sucesión localizante de M en $\mathcal{M}^1_\infty$. Definamos $S_n = \inf\{t : |M_t| \geq n\}$. S_n es un tiempo de paro para cada n, y $S_n \uparrow \infty$.

$(T_n \wedge S_n)_n$ es también una sucesión localizante de M en $\mathcal{M}^1_\infty$; entonces $M^{T_n\wedge S_n}$ es una martingala uniformemente integrable y

$$\begin{aligned} |M_\infty^{T_n\wedge S_n}| &= |M_{T_n\wedge S_n}| \leq |M_{(T_n\wedge S_n)-}| + |\Delta M_{T_n\wedge S_n}| \\ &\leq n + C. \end{aligned}$$

Por lo que $M^{T_n\wedge S_n} \in \mathcal{M}^2_\infty$ para cada n y entonces $M \in (\mathcal{M}^2_\infty)_{Loc}$. □

11.10 Observación. De la demostración se sigue que la condición $|\Delta M| \leq C$ se puede reemplazar por $\sup_t |\Delta M_t| \in L^2$.

11.11 Notación. $\mathcal{Q} :=$ la clase de las cuasimartingalas de la clase DL, cadlag.

Recordemos que si $X \in \mathcal{Q}$, entonces X tiene compensador (por 7.7). Ahora extenderemos este concepto a la localización:

11.12 Proposición (descomposición de Doob-Meyer para cuasimartingalas locales). *Si $X \in \mathcal{Q}_{Loc}$ entonces existe un único proceso $\widetilde{X} \in \mathcal{W}^1_{Loc}$, $\widetilde{X}$ predecible, $\widetilde{X}_0 = 0$ tal que $X - \widetilde{X} \in \mathcal{M}^1_{Loc}$ (al proceso $\widetilde{X}$ también lo vamos a llamar compensador de X).*

Demostración. 1. Unicidad: supongamos que $(T_n)_n$ localiza a $\widetilde{X}$ en $\mathcal{W}^1_\infty$ y que $(S_n)_n$ localiza a $X - \widetilde{X}$ en $\mathcal{M}^1_\infty$. Entonces $(T_n \wedge S_n)_n$ localiza a ambos:

$$X^{T_n\wedge S_n} - \widetilde{X}^{T_n\wedge S_n} \in \mathcal{M}^1_\infty \quad \text{y} \quad \widetilde{X}^{T_n\wedge S_n} \in \mathcal{W}^1_\infty.$$

De esto, se tiene que $X^{T_n \wedge S_n} \in \mathcal{Q}$ (por 7.2). Sea Y^n su compensador. Por la unicidad del compensador es claro que $\widetilde{X}^{T_n \wedge S_n} = Y^n$, lo que muestra que $\widetilde{X}$ está determinado de manera única sobre $[0, T_n \wedge S_n]$. El hecho de que $T_n \wedge S_n \uparrow \infty$, nos permite concluir que $\widetilde{X}$ está determinado de manera única sobre $\mathbb{R}_+ \times \Omega$.

2. Existencia: sea $(T_n)_n$ una sucesión localizante de X en $\mathcal{Q}$. Por 7.7 tenemos una única descomposición $X^{T_n} = M^{(n)} + V^{(n)}$ donde $M^{(n)} \in \mathcal{M}^1$, $V^{(n)} \in \mathcal{W}^1$, $V_0^{(n)} = 0$ y $V^{(n)}$ es predecible, para cada $n \in \mathbb{N}$.

Si $m > n$ entonces

$$X^{T_n} = (X^{T_m})^{T_n} = (M^{(m)})^{T_n} + (V^{(m)})^{T_n}.$$

Por unicidad tenemos $(M^{(m)})^{T_n} = M^{(n)}$, $(V^{(m)})^{T_n} = V^{(n)}$.

Definimos $\widetilde{X} = V^{(n)}$ sobre $[0, T_n]$ (se "pega bien"). $\widetilde{X}$ es predecible como el límite puntual de los procesos predecibles $\widetilde{X}^{T_n}$ ($= V^{(n)}$) y $\widetilde{X} \in \mathcal{W}^1_{Loc}$ pues $\widetilde{X}^{T_n} \in \mathcal{W}^1$. Es claro que además

$$(X - \widetilde{X})^{T_n} = M^{(n)} \in \mathcal{M}^1 \text{ para cada } n,$$

i.e. $X - \widetilde{X} \in \mathcal{M}^1_{Loc}$. □

11.13 Lema. *Sea X un proceso cadlag adaptado y sea $X_t^* = \sup\{|X_s| : s \leq t\}$. Supongamos que existe una sucesión $(T_n)_n$ de tiempos de paro, $T_n \uparrow \infty$, tal que se cumple una de las siguientes condiciones:*

(a) *Para cada n, $E|X_S| < \infty$ para todo S tiempo de paro tal que $S \leq T_n$, o*

(b) *$E|X_0| < \infty$ y para cada n, $E|\Delta X_S| < \infty$ para todo S tiempo de paro tal que $S \leq T_n$.*
Entonces $X^* \in \mathcal{W}^1_{Loc}$.

Demostración. Sea $S_n = T_n \wedge \inf\{t : |X_t| \geq n\}$. Es claro que $S_n \uparrow \infty$. Por otra parte X^* es un proceso creciente positivo. Para demostrar que pertenece a $\mathcal{W}^1_{Loc}$ basta ver que (a) o (b) implican que $E(X^*_{S_n}) < \infty$, pues entonces $(S_n)_n$ sería una sucesión localizante de X^* en $\mathcal{W}^1$. Tenemos

$$\begin{aligned} X^*_{S_n} &= \sup\{|X_s| : s \leq S_n\} = \sup\{|X_s| : s < S_n\} \vee |X_{S_n}| \\ &\leq n \vee |X_{S_n}|, \end{aligned}$$

lo cual es integrable bajo la hipótesis (a).

Si ahora tenemos (b) entonces basta adicionalmente observar que

$$|X_{S_n}| = |X_{S_n -} + \Delta X_{S_n}| \leq |X_0| + n + |\Delta X_{S_n}| \in L^1.$$

□

11.14 Proposición. *Sea $\mathcal{Q}^0$ la clase de cuasimartingalas cadlag. Entonces*

$$\mathcal{Q}^0_{Loc} = \mathcal{Q}_{Loc}.$$

Demostración. Es obvio que $\mathcal{Q}^0_{Loc} \supset \mathcal{Q}$. Sea ahora $X \in \mathcal{Q}^0_{Loc}$, y $(T_n)_n$ una sucesion localizante de X en $\mathcal{Q}^0$. Claramente $(T_n \wedge n)_n$ también localiza a X en $\mathcal{Q}^0$.

Si S es cualquier tiempo de paro tal que $S \leq T_n \wedge n$ entonces $X_S \in L^1$ porque $X_S = X_S^{T_n \wedge n} \in L^1$. En efecto, como $X^{T_n \wedge n} \in \mathcal{Q}^0$ podemos aplicar el teorema de descomposición de Rao, (ver 5.11), $X^{T_n \wedge n} = U' - U''$, donde U', U'' son supermartingalas cad (ver Observación 5.12). Entonces tenemos una serie de implicaciones inmediatas,

$$S \leq T_n \wedge n \Rightarrow S \leq n \Rightarrow U'_S, U''_S \in L^1 \Rightarrow X_S^{T_n \wedge n} \in L^1,$$

la segunda implicación se sigue del teorema de muestreo opcional de Doob.

Por el Lema 11.13(a), el proceso $X^*_t = \sup\{|X_s| : s \leq t\}$ está en $\mathcal{W}^1_{Loc}$ por lo que existe $(S_n)_n$ sucesión localizante de X^* en $\mathcal{W}^1_\infty$, por lo tanto $S_n \uparrow \infty$ y $E(\sup\{|X_s| : s \leq S_n\}) < \infty$. En consecuencia $X^{T_n \wedge S_n}$ es una cuasimartingala de la clase D, y así hemos probado que $(T_n \wedge S_n)_n$ localiza a X en $\mathcal{Q}$. □

11.15 Observación importante. Este último resultado ($\mathcal{Q}^0_{Loc} = \mathcal{Q}_{Loc}$) permite afirmar que cada cuasimartingala cadlag tiene compensador, aún cuando no sea de la clase DL.

11.16 Corolario. (a) *Sea $M \in \mathcal{M}^1_{Loc}$ y denotemos $M^*_t = \sup\{|M_s| : s \leq t\}$. Entonces $M^* \in \mathcal{W}^1_{Loc}$.*

(b) *Si $M \in \mathcal{M}^1_{Loc} \cap \mathcal{W}^0$ entonces $M \in \mathcal{W}^1_{Loc}$.*

Demostración. (a) Sea $(T_n)_n$ una sucesión localizante de M en $\mathcal{M}^1_\infty$. Si S es un tiempo de paro, $S \leq T_n$ entonces $E(|M_S|) = E(|M_S^{T_n}|) < \infty$. El Lema 11.13(a) implica que $M^* \in \mathcal{W}^1_{Loc}$.

(b) Sea $(S_n)_n$ una sucesión localizante de M^* en $\mathcal{W}^1_\infty$ (existe por (a)).

Para cada S tiempo de paro, tal que $S \leq S_n$,

$$\Delta|M|_S = |\Delta M_S| \leq 2M^*_S \quad \text{y} \quad |M|_0 = |M_0| \in L^1,$$

y como $M^*_{S_n} \in L^1$ tenemos que $2M^*_S \in L^1$.

Usando el Lema 11.13(b), podemos concluir que

$$(|M|_t)_{t \in \mathbb{R}_+} = (\sup_{s \leq t} |M|_s)_{t \in \mathbb{R}_+} \in \mathcal{W}^1_{Loc}$$

es decir $M \in \mathcal{M}^1_{Loc}$. □

Veremos ahora que las martingalas localmente cuadrado integrables también se descomponen en la suma de su parte continua y la parte puramente discontinua, y que también podemos definir para ellas los procesos de Doob-Meyer y de variación cuadrada.

11.17 Proposición. *Sea $M \in \mathcal{M}^2_{Loc}$. Existen procesos únicos $\langle M, M\rangle$, $[M,M]$*[3]*, M^c, M^d tales que para toda $(T_n)_n$ sucesión localizante de M en $\mathcal{M}^2_\infty$ se tiene:*

$$\begin{aligned} \langle M^{T_n}, M^{T_n}\rangle &= \langle M, M\rangle^{T_n}, \quad (M^{T_n})^c = (M^c)^{T_n}, \\ [M^{T_n}, M^{T_n}] &= [M,M]^{T_n}, \quad (M^{T_n})^d = (M^d)^{T_n} \end{aligned}$$

(los lados izquierdos tienen el significado anterior).

Demostración. Sea $(T_n)_n$ una sucesión localizante de M en $\mathcal{M}^2_\infty$. Definimos $\langle M, M\rangle$ sobre $[0, T_n]$ como $\langle M^{T_n}, M^{T_n}\rangle$. Debemos verificar que está bien definido (se "pega bien"): si $m > n$ entonces $\langle M^{T_m}, M^{T_m}\rangle^{T_n} = \langle M^{T_m\wedge T_n}, M^{T_m \wedge T_n}\rangle = \langle M^{T_n}, M^{T_n}\rangle$ por 10.7.

Si $(S_n)_n$ es otra sucesión localizante de M en $\mathcal{M}^2_\infty$, entonces

$$\begin{aligned} \langle M^{S_m}, M^{S_m}\rangle^{T_n} &= \langle M^{S_m\wedge T_n}, M^{S_m\wedge T_n}\rangle = \langle M^{T_n}, M^{T_n}\rangle^{S_m} \\ &= (\langle M, M\rangle^{T_n})^{S_m} = \langle M, M\rangle^{T_n \wedge S_m}. \end{aligned}$$

Tomando $n \uparrow \infty$ obtenemos $\langle M^{S_m}, M^{S_m}\rangle = \langle M, M\rangle^{S_m}$, con lo cual se ve que la definición de $\langle M, M\rangle$ no depende de la sucesión localizante escogida.

Para lo demás, las demostraciones son análogas. □

11.18 Propiedades. *Si $M \in \mathcal{M}^2_{Loc}$, entonces*

(a) $\langle M, M\rangle = \widetilde{M^2} = \widetilde{[M,M]}$.

(b) $M^c \in \mathcal{M}^{2c}_{Loc}$, $M^d \in \mathcal{M}^{2d}_{Loc}$ *y* $M = M^c + M^d$ *(la descomposición es única). M^c se llama la parte continua de M y M^d la parte puramente discontinua.*

(c) $[M,M]_t = \langle M^c, M^c\rangle_t + \sum_{s\le t} (\Delta M_s)^2$.

Demostración. (a) Si $(T_n)_n$ localiza a M en $\mathcal{M}^2_\infty$ entonces

$$(M^2 - \langle M, M\rangle)^{T_n} = (M^{T_n})^2 - \langle M^{T_n}, M^{T_n}\rangle \in \mathcal{M}^1_\infty$$

y

$$([M,M] - \langle M, M\rangle)^{T_n} = [M^{T_n}, M^{T_n}] - \langle M^{T_n}, M^{T_n}\rangle \in \mathcal{M}^1_\infty.$$

Es claro que $\langle M, M\rangle$ es predecible, creciente, cadlag y $\langle M, M\rangle_0 = 0$.

(b) y (c) son inmediatos de las definiciones (ver (9.2)). □

---

[3] Para abreviar notaciones, a veces vamos a escribir $\langle M\rangle$, $[M]$ en lugar de $\langle M, M\rangle$, $[M,M]$.

11.19 Definición. Si $M, N \in \mathcal{M}^2_{Loc}$ entonces

$$\langle M, N\rangle := \frac{1}{4}(\langle M+N, M+N\rangle - \langle M-N, M-N\rangle)$$

y

$$[M, N] := \frac{1}{4}([M+N, M+N] - [M-N, M-N]).$$

11.20 Propiedades inmediatas. (a) $\langle M, N\rangle = \widetilde{MN} = \widetilde{[M, N]}$.

(b) *Si T es un tiempo de paro, entonces $\langle M, N\rangle^T = \langle M, N^T\rangle$ y $[M, N]^T = [M, N^T]$.*

(c) *$\langle\cdot,\cdot\rangle$ y $[\cdot,\cdot]$ son simétricos y bilineales.*

11.21 Proposición (desigualdad de Doob). *Sea $M \in \mathcal{M}^2_{Loc}$, T un tiempo de paro. Entonces*

$$E(\sup_{t\leq T} |M_t - M_0|^2) \leq 4E(\langle M, M\rangle_T) = 4E([M, M]_T).$$

Demostración. Sea $(T_n)_n$ una sucesión localizante de M en $\mathcal{M}^2_\infty$, Por la desigualdad de Doob para martingalas (ver (8.1)), tenemos para cada n

$$E(\sup_{t\leq T_n\wedge T} |M_t - M_0|^2) \leq 4E(\langle M, M\rangle_{T_n\wedge T}) = 4E[M, M]_{T_n\wedge T}.$$

Ahora el resultado es consecuencia inmediata del teorema de convergencia monótona. □

El resultado más profundo de este capítulo es el siguiente teorema.

11.22 Teorema. *Si $M \in \mathcal{M}^1_{Loc}$ entonces $M = N + A$ donde $N \in \mathcal{M}^1_{Loc}$, $N_0 = 0$, $|\Delta N_t| \leq 1$ para cada $t \geq 0$ y $A \in \mathcal{W}^1_{Loc} \bigcap \mathcal{M}^1_{Loc}$.*

Observaciones. (a) $N \in \mathcal{M}^2_{Loc}$ por 11.9(d).

(b) Este teorema es muy útil, pues descompone a una martingala local arbitraria en una martingala local con saltos acotados (que es fácil de manejar) y otro proceso en $\mathcal{W}^1_{Loc}$. No hay un teorema análogo para procesos sin localizar.

Demostración. Reemplazando M por $M - M_0$ podemos suponer que $M_0 = 0$ (si $M - M_0 = N + A$, entonces $M_0 + A \in \mathcal{W}^1_{Loc}$).

Definamos $B_t = \sum_{s\leq t} \Delta M_s \mathbf{1}_{\{|\Delta M_s|>1/2\}}$. Para cada $\omega \in \Omega$ la suma es finita por ser M cadlag. Por lo tanto $B \in \mathcal{W}^0$ y

$$|B|_t = \sum_{s\leq t} |\Delta M_s| \mathbf{1}_{\{|\Delta M_s|>1/2\}}.$$

Vamos a demostrar que $B \in \mathcal{W}^1_{Loc}$ o lo que es lo mismo

$$(|B|_t)_{t\in\mathbb{R}_+} \in \mathcal{W}^1_{Loc}. \tag{11.1}$$

Usaremos el Lema 11.13(b). Tenemos $B_0 = 0$ y $\Delta|B|_t = |\Delta M_t|\mathbf{1}_{\{|\Delta M_t|>1/2\}} \leq 2\sup_{s\leq t}|M_s| = 2M^*_t$ ($M^*_t = \sup_{s\leq t}|M_s|$). Sabemos por 11.16 que $M^* \in \mathcal{W}^1_{Loc}$. Sea $(T_n)_n$ una sucesión localizante de M^* en $\mathcal{W}^1_\infty$ ($E(M^*_{T_n}) < \infty$ para todo n). Si S es un tiempo de paro, $S \leq T_n$ entonces

$$\Delta|B|_S \leq 2M^*_S \leq 2M^*_{T_n} \in L^1$$

y así (11.1) queda demostrado por 11.13(b). En consecuencia $B \in \mathcal{Q}_{Loc}$ (ver 7.2) y podemos afirmar que existe $\widetilde{B}$, el compensador de B (ver 11.12).

Sea $A .= B - \widetilde{B} \in \mathcal{M}^1_{Loc} \cap \mathcal{W}^1_{Loc}$. Ahora definimos $N = M - A \in \mathcal{M}^1_{Loc}$. Hay que demostrar que N tiene saltos acotados por 1. Tenemos

$$\begin{aligned}|\Delta N_t| &= |\Delta M_t - \Delta A_t| = |\Delta M_t - \Delta B_t + \Delta\widetilde{B}_t| \\ &\leq |\Delta M_t - \Delta B_t| + |\Delta\widetilde{B}_t|\end{aligned}$$

y

$$|\Delta M_t - \Delta B_t| = |\Delta M_t|\mathbf{1}_{\{|\Delta M_t|\leq 1/2\}} \leq 1/2.$$

Basta demostrar que $|\Delta\widetilde{B}_t| \leq 1/2$. $\widetilde{B}$ es predecible cadlag, por lo tanto por el teorema de sección predecible basta ver que para cada T tiempo de paro predecible y finito, $|\Delta\widetilde{B}_T| \leq 1/2$ c.s. (ver 4.17).

Fijemos una sucesión $(T_n)_n$ de tiempos de paro que localiza a M y A en $\mathcal{M}^1_\infty$ y a B en $\mathcal{W}^1_\infty$. Basta mostrar que $|\Delta\widetilde{B}^{T_n}_T| \leq 1/2$ c.s para todo n.

$\Delta\widetilde{B}^{T_n}$ es predecible, entonces por el Lema 4.27, $\Delta\widetilde{B}^{T_n}_T$ es $\mathfrak{F}_{T-}$-medible, por lo tanto

$$\Delta\widetilde{B}^{T_n}_T = E(\Delta\widetilde{B}^{T_n}_T|\mathfrak{F}_{T-}) = E(\Delta B^{T_n}_T|\mathfrak{F}_{T-}) - E(\Delta A^{T_n}_T|\mathfrak{F}_{T-})$$

y $E(\Delta A^{T_n}_T|\mathfrak{F}_{T-}) = E(A^{T_n}_T - A^{T_n}_{T-}|\mathfrak{F}_{T-}) = 0$ c.s porque $A^{T_n} \in \mathcal{M}^1_\infty$ y T es predecible (ver 4.30). Por otro lado

$$B^{T_n}_t = \sum_{s\leq t\wedge T_n}\Delta M_s\mathbf{1}_{\{|\Delta M_s|>1/2\}} = \sum_{s\leq t}\Delta M^{T_n}_s\mathbf{1}_{\{|\Delta M^{T_n}_s|>1/2\}},$$

por lo tanto

$$\Delta B^{T_n}_T = \Delta M^{T_n}_T\mathbf{1}_{\{|\Delta M^{T_n}_T|>1/2\}} = \Delta M^{T_n}_T - \Delta M^{T_n}_T\mathbf{1}_{\{|\Delta M^{T_n}_T|\leq 1/2\}}.$$

En consecuencia

$$\Delta\widetilde{B}^{T_n}_T = E(\Delta B^{T_n}_T|\mathfrak{F}_{T-}) = E(\Delta M^{T_n}_T|\mathfrak{F}_{T-}) - E(\Delta M^{T_n}_T \mathbf{1}_{\{|\Delta M^{T_n}_T|\leq 1/2\}}|\mathfrak{F}_{T-}) \quad \text{c.s}$$

y $E(\Delta M^{T_n}_T|\mathfrak{F}_{T-}) = E(M^{T_n}_T - M^{T_n}_{T-}|\mathfrak{F}_{T-}) = 0$ c.s porque $M^{T_n} \in \mathcal{M}^1_\infty$ y T es predecible. Por lo tanto $|\Delta\widetilde{B}^{T_n}_T| \leq 1/2$ c.s. □

11.23 Corolario. *Las siguientes condiciones son equivalentes*

(a) $X \in \mathcal{Q}_{Loc}$.

(b) *Existe una única descomposición* $X = M + A$, $M \in \mathcal{M}^1_{Loc}$, $A \in \mathcal{W}^1_{Loc}$, $A_0 = 0$ *y* A *predecible.*

(c) *Existe una descomposición* $X = M + A$, $M \in \mathcal{M}^1_{Loc}$, $A \in \mathcal{W}^1_{Loc}$.

(d) *Existe una descomposición* $X = N + V$, *donde* $N \in \mathcal{M}^2_{Loc}$ *y* $V \in \mathcal{W}^1_{Loc}$.

Demostración. (d) $\Rightarrow$ (a) es obvio.

(a) $\Rightarrow$ (b): por 11.12.

(b) $\Rightarrow$ (c): obvio.

(c) $\Rightarrow$ (d): por 11.22, si $M \in \mathcal{M}^1_{Loc}$ entonces $M = N + A^{(1)}$, donde $N \in \mathcal{M}^2_{Loc}$, $A^{(1)} \in \mathcal{W}^1_{Loc}$. Por lo tanto $X = N + A^{(1)} + A = N + V$, donde $V = A^{(1)} + A \in \mathcal{W}^1_{Loc}$. □

11.24 Definición. (a) El proceso que satisface (d) se llama una *semimartingala especial*[(4)]. La descomposición única de una semimartingala especial dada por (b) se llama *descomposición canónica*.

(b) Un proceso Z se llama *semimartingala* si Z tiene una descomposición $Z = M + A$ donde $M \in \mathcal{M}^1_{Loc}$, $A \in \mathcal{W}^0$.

11.25 Observaciones. (a) Si Z es una semimartingala, entonces Z es cadlag adaptado.

(b) Z es una semimartingala si y sólo si existe una descomposición $Z = M+A$, $M \in \mathcal{M}^2_{Loc}$, $A \in \mathcal{W}^0$ (obvio por el Teorema 11.22).

(c) Toda semimartingala especial es semimartingala.

(d) Las submartingalas y supermartingalas cadlag son semimartingalas especiales.

(e) La clase de las semimartingalas es muy importante. Es la más grande respecto a la cual se puede hacer integración estocástica (ver 14.13), y es estable ante muchas operaciones como se verá en los resultados subsecuentes.

[(4)] A veces se define semimartingala especial como un proceso X, tal que $X - X_0$ satisface (d) y X_0 es una variable aleatoria arbitraria $\mathfrak{F}_0$-medible.

11.26 Ejemplos. (a) Sea W un proceso de Wiener c.r.a una filtración $(\mathfrak{F}_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ y sean X, Y procesos progresivamente medibles tales que

$$\begin{aligned} \int_{]0,t]} X_s^2\, ds &< \infty \quad \text{c.s.} \quad \forall t \geq 0, \\ \int_{]0,t]} |Y_s|\, ds &< \infty \quad \text{c.s.} \quad \forall t \geq 0, \end{aligned}$$

y Z_0 una variable aleatoria $\mathfrak{F}_0$-medible. Entonces

$$Z_t = Z_0 + \int_{]0,t]} X_s\, dW_s + \int_{]0,t]} Y_s\, ds \text{ (5)}$$

es una semimartingala (un tal proceso se llama *proceso de Itô*).

(b) En el Capítulo 13 demostraremos que un proceso Z cadlag con incrementos independientes es semimartingala si y sólo si la función determinista $t \mapsto Ee^{iuZ_t}$ tiene variación finita sobre cada intervalo acotado.

Ahora consideraremos un caso muy especial. A saber, sea $(Z_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ un proceso cadlag con incrementos independientes, homogéneos y $(\mathfrak{F}_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ la filtración usual generada por Z, o más generalmente, cualquier filtración que satisface las condiciones usuales, tal que Z es adaptado y $Z_t - Z_s$ es independiente de $\mathfrak{F}_s$ para cada $s < t$ (ver 1.8).

Definamos el proceso

$$Y_t = Z_t - Z_0 - \sum_{s\leq t} \Delta Z_s \mathbf{1}_{\{|\Delta Z_s|>1\}} = Z_t - V_t,$$

donde

$$V_t = Z_0 + \sum_{s\leq t} \Delta Z_s \mathbf{1}_{\{|\Delta Z_s|>1\}}.$$

Es claro que $V \in \mathcal{W}^0$, $Y = Z - V$ es un proceso con incrementos independientes homogéneos, 0 en 0 y $|\Delta Y_t| \leq 1$. Entonces $Y_t \in L^1$ para cada t (ver por ejemplo [8, Vol. II, Lemma IV.1.2]).

Por homogeneidad $E(Y_t) = ta$ para un $a \in \mathbb{R}$ y $(Y_t - at)_{t\in\mathbb{R}_+}$ es una martingala. Por lo tanto,

$$Z_t = (Y_t - at) + (at + V_t); \quad Y_t - at = M_t, \quad at + V_t = A_t$$

y $M \in \mathcal{M}^1_{Loc}$, $A \in \mathcal{W}^0$. Por lo tanto Z es una semimartingala.

---

(5) Se supone aquí que el lector conoce las propiedades de la clásica integral de Itô c.r.a proceso de Wiener, pero si no es así tampoco hay problema. En el capítulo siguiente demostraremos que $\int X\, dW$ está bien definida y es martingala local.

(c) Consideremos otro ejemplo "trivial" de un proceso con incrementos independientes: un proceso determinista. Demostraremos que una función (determinista) $f: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ cadlag es semimartingala (con respecto a una filtración arbitraria fija) si y sólo si f tiene variación finita sobre cada intervalo $[0,t]$.

La suficiencia de la condición es obvia, pero la necesidad, aunque también es intuitivamente clara, no es inmediata.

Así pues supongamos que f es una semimartingala. Probaremos primero que f es semimartingala especial. En efecto, sea $f = M + A$, $M \in \mathcal{M}^1_{Loc}$, $M_0 = 0$, $A \in \mathcal{W}^0$. Por el Corolario 11.23 basta demostrar que $A \in \mathcal{W}^1_{Loc}$. En virtud del Corolario 11.16 $(\sup_{s\le t} |M_s|)_{t\in\mathbb{R}_+} \in \mathcal{W}^1_{Loc}$ y es obvio que $(\sup_{s\le t} |f(s)|)_{t\in\mathbb{R}_+} \in \mathcal{W}^1$; por lo tanto $(\sup_{s\le t} |A_s|)_{t\in\mathbb{R}_+} \in \mathcal{W}^1_{Loc}$. Sean T_n tiempos de paro, $T_n \uparrow \infty$, tales que $E(\sup_{s\le T_n} |A_s|) < \infty$ para cada $n \in \mathbb{N}$ y sean $S_n = \inf\{t : |A_t| \ge n\}$, $n \in \mathbb{N}$. Tenemos

$$\begin{aligned} |A|_{T_n\wedge S_n} &\le |A|_{T_n\wedge S_n -} + \Delta |A|_{T_n\wedge S_n} \le |f(0)| + n + |\Delta A_{T_n\wedge S_n}| \\ &\le |f(0)| + n + 2\sup_{s\le T_n} |A_s| \in L^1. \end{aligned}$$

En consecuencia $(T_n \wedge S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ localiza A en $\mathcal{W}^1_\infty$ y por lo tanto $A \in \mathcal{W}^1_{Loc}$.

Entonces vemos que existe una sucesión $(R_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de tiempos de paro, $R_n \uparrow \infty$, tales que $M^{R_n} \in \mathcal{M}^1_\infty$, $A^{R_n} \in \mathcal{W}^1_\infty$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Para todos $n \in \mathbb{N}$, $t \in \mathbb{R}_+$ tenemos

$$E(f(R_n \wedge t)) = g_n(t) + h_n(t),$$

donde $g_n(t) = f(t)P(R_n > t)$, $h_n(t) = E(f(R_n)\mathbf{1}_{\{R_n\le t\}})$.

Como $h_n(t) = \int_{[0,t]} f(s)\, P_{R_n}(ds)$, donde P_{R_n} es la distribución de R_n, entonces h_n tiene variación finita sobre cada $[0,t]$. Por otro lado, $E(f(R_n \wedge t)) = EM_t^{R_n} + EA_t^{R_n} = EA_t^{R_n}$ y es claro que la función $t \mapsto EA_t^{R_n}$ tiene variación acotada (por $E|A|_{R_n} < \infty$). En consecuencia g_n tiene variación finita sobre cada $[0,t]$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Fijemos $t > 0$. Como $R_n \uparrow \infty$, existen $n \in \mathbb{N}$ y $\epsilon > 0$ tales que $P(R_n > t) > \epsilon$. La función $s \mapsto P(R_n > s)$ tiene claramente variación finita sobre $[0,t]$ y $P(R_n > s) > \epsilon$ para $s \in [0,t]$. Por lo tanto $f(s) = g_n(s)/P(R_n > s)$ tiene variación finita sobre $[0,t]$, lo que termina la demostración. □

La descomposición de una semimartingala $Z = M + A$, $M \in \mathcal{M}^1_{Loc}$ (o $M \in \mathcal{M}^2_{Loc}$), $A \in \mathcal{W}^0$, en general no es única, sin embargo tenemos:

11.27 Corolario y Definición. *Sea Z una semimartingala, $Z = M + A$, $M \in \mathcal{M}^2_{Loc}$, $A \in \mathcal{W}^0$. El proceso M^c no depende de la forma de la descomposición y lo denotaremos por Z^c.*

Demostración. Supongamos que tenemos dos descomposiciones $Z = M + A = N + B$, donde $M, N \in \mathcal{M}^2_{Loc}$, $A, B \in \mathcal{W}^0$.

$$M = M^c + M^d, \qquad N = N^c + N^d.$$

Tenemos entonces

$$M^c - N^c = (N^d - M^d) + (B - A)$$

y $M^c - N^c$, $N^d - M^d$, $B - A \in \mathcal{M}^2_{Loc}$. Sea $(T_n)_n$ una sucesión de tiempos de paro que localiza a los tres procesos $M^c - M^c$, $N^d - M^d$, $B - A$ en $\mathcal{M}^2_\infty$. Entonces $(N^d - M^d)^{T_n} \in \mathcal{M}^{2d}_\infty$, $(B - A)^{T_n} \in \mathcal{M}^2_\infty \cap \mathcal{W}^0$, por lo tanto por 9.13, $(B - A)^{T_n} \in \mathcal{M}^{2d}_\infty$ y esto implica que $(M^c - N^c)^{T_n} \in \mathcal{M}^{2d}_\infty \cap \mathcal{M}^{2c}_\infty$ es decir $(M^c)^{T_n} = (N^c)^{T_n}$ para cada $n \in \mathbb{N}$.

Si $n \to \infty$, obtendremos $M^c = N^c$ ya que $T_n \uparrow \infty$. □

11.28 Proposición. *Sea Z una semimartingala. Supongamos que $Z_0 \in L^1$. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

(a) *Z es una semimartingala especial.*
(b) *Para toda descomposición, $Z = M + A$, $M \in \mathcal{M}^1_{Loc}$, $A \in \mathcal{W}^0$, se tiene $A \in \mathcal{W}^1_{Loc}$.*
(c) *$Z^* \in \mathcal{W}^1_{Loc}$ donde $Z^*_t = \sup\{|Z_s| : s \le t\}$.*
(d) *$Y^* \in \mathcal{W}^1_{Loc}$ donde $Y^*_t = \sup\{|\Delta Z_s| : s \le t\}$.*

Observación. Si no se tiene la hipótesis $Z_0 \in L^1$, se tendría la proposición para $Z - Z_0$.

Demostración. (b) $\Rightarrow$ (a): inmediato por 11.23.

(a) $\Rightarrow$ (c): Sea $Z = M + A$, $M \in \mathcal{M}^1_{Loc}$, $A \in \mathcal{W}^1_{Loc}$, $A_0 = 0$, A predecible (por 11.23).

$$\begin{aligned} Z^*_t &\le \sup\{|M_s| : s \le t\} + \sup\{|A_s| : s \le t\} \\ &\le \sup\{|M_s| : s \le t\} + |A|_t. \end{aligned}$$

$|A|_\cdot \in \mathcal{W}^1_{Loc}$ y $(\sup\{|M_s| : s \le t\})_t \in \mathcal{W}^1_{Loc}$, por 11.16(a), por lo tanto Z^* es un proceso mayorado por un elemento en $\mathcal{W}^1_{Loc}$, y como Z^* es adaptado cadlag y creciente concluimos que $Z^* \in \mathcal{W}^1_{Loc}$.

(c) $\Rightarrow$ (d): $|\Delta Z_t| \le |Z_t| + |Z_{t-}| \le 2Z^*_t$ por lo tanto $Y^*_t \le 2Z^*_t$ y entonces $Y^* \in \mathcal{W}^1_{Loc}$ (por lo mismo que en el razonamiento anterior).

(d) $\Rightarrow$ (b): Sea $Z = M + A$ una descomposición tal que $M \in \mathcal{M}^1_{Loc}$, $A \in \mathcal{W}^0$. Queremos demostrar que $A \in \mathcal{W}^1_{Loc}$. Tenemos

$$\sup\{|\Delta A_s| : s \le \cdot\} \le 2M^*_t + Y^*_t \in \mathcal{W}^1_{Loc},$$

ya que $M_t^* \in \mathcal{W}^1_{Loc}$ (por 11.16) y $Y^* \in \mathcal{W}^1_{Loc}$ por la hipótesis, por lo tanto $\sup\{|\Delta A_s| : s \leq \cdot\} \in \mathcal{W}^1_{Loc}$, pero

$$\sup\{|\Delta A_s| : s \leq t\} = \sup\{\Delta|A|_s : s \leq t\},$$

por lo tanto $\sup\{\Delta|A|_s : s \leq \cdot\} \in \mathcal{W}^1_{Loc}$.

Sea $(T_n)_n$ una sucesión localizante de este último proceso en $\mathcal{W}^1_\infty$, entonces

$$\sup\{\Delta|A|_s : s \leq T_n\} \in L^1.$$

Apliquemos el Lema 11.13(b) al proceso $|A|_\cdot$. Es claro que $E(|A|_0) = E(|A_0|) < \infty$ por la suposición $(A_0 = Z_0 - M_0)$, y si S es un tiempo de paro, $S \leq T_n$ entonces

$$\Delta|A|_S \leq \sup\{\Delta|A|_s : s \leq T_n\} \in L^1.$$

Tenemos así las hipótesis de 11.13(b), lo que nos permite concluir que $\sup\{|A|_s : s \leq \cdot\} \in \mathcal{W}^1_{Loc}$ y por lo tanto que $A \in \mathcal{W}^1_{Loc}$. □

Como una consecuencia inmediata de 11.28 obtenemos el siguiente corolario, que es bastante útil.

11.29 Corolario. *Sea Z una semimartingala con saltos acotados por una constante. Entonces $Z - Z_0$ es una semimartingala especial.*

11.30 Proposición. *Sea Z un proceso y $(T_n)_n$ una sucesión de tiempos de paro tal que $T_n \uparrow \infty$ y Z^{T_n} es una semimartingala para cada n (respectivamente semimartingala especial). Entonces Z es una semimartingala (respectivamente semimartingala especial).*

Demostración. Supongamos primero que para cada n, Z^{T_n} es una semimartingala especial. Z^{T_n} tiene su descomposición canónica $Z^{T_n} = M^n + A^n$, $M^n \in \mathcal{M}^1_{Loc}$, $A^n \in \mathcal{W}^1_{Loc}$, $A^n_0 = 0$, A^n predecible para todo n. Si $m > n$ entonces $Z^{T_n} = (Z^{T_m})^{T_n} = (M^m)^{T_n} + (A^m)^{T_n}$. Por la unicidad de la descomposición canónica tenemos

$$M^n = (M^m)^{T_n} \quad \text{y} \quad A^n = (A^m)^{T_n}.$$

Esto nos permite definir dos procesos M y A tales que

$$M = M^m \quad \text{y} \quad A = A^n \quad \text{sobre} \quad [0, T_n].$$

Es claro que $Z = M + A$ y que $M \in \mathcal{M}^1_{Loc\,Loc}$, $A \in \mathcal{W}^1_{Loc\,Loc}$. Pero $\mathcal{M}^1_{Loc\,Loc} = \mathcal{M}^1_{Loc}$, $\mathcal{W}^1_{Loc\,Loc} = \mathcal{W}^1_{Loc}$, por 11.5(c), y con esto termina la demostración para semimartingala especial por 11.23(c).

Ahora supongamos que para todo n, Z^{T_n} es una semimartingala. Z es cadlag adaptado (porque $Z_t = \lim_{n\to\infty} Z_t^{T_n}$). Definamos el proceso

$$V = Z_0 + \sum_{s\leq \cdot} \Delta Z_s \mathbf{1}_{\{|\Delta Z_s \geq 1\}}.$$

V es también cadlag, adaptado y con variación finita en $[0,t]$, para cada $t \geq 0$, i.e. $V \in \mathcal{W}^0$, por lo tanto $Z^{T_n} - V^{T_n}$ es una semimartingala 0 en 0 con saltos acotados por 1; aplicando 11.29 tenemos que $(Z-V)^{T_n}$ es una semimartingala especial para cada n. Por la primera parte de la demostración concluimos que $Z-V$ es una semimartingala especial y como $Z = V + (Z-V)$ vemos que Z es una semimartingala. □

11.31 Observación. Nótese que este resultado nos permite afirmar que las semimartingalas y las semimartingalas locales son la misma clase de procesos.

La afirmación para semimartingalas especiales es también cierta.

11.32 Corolario. *Sea Z un proceso y $(T_n)_n$ una sucesión de tiempos de paro tal que $\sup_n T_n = \infty$ y para cada n, Z^{T_n} es una semimartingala. Entonces Z es semimartingala.*

Demostración. Sea $\mathcal{K}$ = la clase de las semimartingalas. $\mathcal{K}$ es estable respecto a paros. El corolario es inmediato del Lema 11.5 y del hecho $\mathcal{K}_{Loc} = \mathcal{K}$. □

Capítulo 12

Integral estocástica con respecto a una semimartingala

Primero definiremos la integral estocástica con respecto a una martingala M localmente cuadrado integrable. La clase de procesos integrables va a depender de M. Luego extenderemos esta noción a las semimartingalas. Pero en este caso nos restringiremos a la clase de procesos integrables con respecto a *cada* semimartingala, i.e. a los procesos predecibles localmente acotados. Además introduciremos la noción del proceso de variación cuadrada para semimartingalas y demostraremos la importante fórmula de integración por partes.

12.1 Definición. Sea $M \in \mathcal{M}^2_{Loc}$.

$$\begin{aligned} Loc\, L^2(M) \;=\; & \{X : X \text{ es proceso predecible y } \exists (S_n)_n \text{ sucesión de tiempos de paro,} \\ & S_n \uparrow \infty \text{ tal que } E(\int_{]0,S_n]} X^2 d\langle M\rangle) < \infty\ \forall n\} \end{aligned}$$

Obsérvese que en esta definición se puede reemplazar el proceso $\langle M\rangle$ por $[M]$ ya que

$$E\int_{]0,S_n]} X^2 d\langle M\rangle = E\int_{]0,S_n]} X^2 d[M]$$

por 11.18(a) y 7.9(d).

12.2 Proposición y Definición. *Sean $M \in \mathcal{M}^2_{Loc}$ y $X \in Loc\, L^2(M)$. Existe un único proceso $X \circ M$ ($= \int X dM$) tal que $X \circ M \in \mathcal{M}^2_{Loc}$ y existe una sucesión localizante $(T_n)_n$ de M en $\mathcal{M}^2_\infty$ tal que:*

(i) $X \in L^2(M^{T_n}) \quad n = 1, 2, \ldots,$

(ii) $(X \circ M)^{T_n} = X \circ (M^{T_n}) \quad n = 1, 2, \ldots,$
(iii) *$X \circ M$ no depende de la sucesión $(T_n)_n$ y se llama integral estocástica (o integral de Itô) de X con respecto a M.*

Demostración. Sea $(R_n)_n$ una sucesión localizante de M en $\mathcal{M}^2_\infty$ y definamos $T_n = R_n \wedge S_n$, donde $(S_n)_n$ corresponde a X (según 12.1). Es claro que $(T_n)_n$ también localiza a M en $\mathcal{M}^2_\infty$ y que

$$\begin{aligned}\infty &> E(\int_{]0,T_n]} X^2 d\langle M\rangle) = E(\int_{]0,\infty[} X^2 d\langle M\rangle^{T_n}) \\ &= E(\int_{]0,\infty[} X^2 d\langle M^{T_n}\rangle).\end{aligned}$$

Esto muestra que $X \in L^2(M^{T_n})$ y por lo tanto $X \circ M^{T_n} \in \mathcal{M}^2_\infty$, para cada n (ver 9.1).

Por 10.9, si $m \geq n$ tenemos que

$$(X \circ M^{T_m})^{T_n} = X \circ (M^{T_m})^{T_n} = X \circ M^{T_n}.$$

Por lo tanto podemos definir

$$X \circ M = X \circ M^{T_n} \quad \text{sobre} \quad [0, T_n].$$

Es claro que $X \circ M \in \mathcal{M}^2_{Loc}$ y $(X \circ M)^{T_n} = X \circ M^{T_n}$.

Para ver que $X \circ M$ no depende de la sucesión $(T_n)_n$ consideremos $(T'_n)_n$ otra sucesión que localiza a M en $\mathcal{M}^2_\infty$, $X \in L^2(M^{T'_n})$ para toda n y sea $Y \in \mathcal{M}^2_{Loc}$ tal que $Y^{T'_n} = X \circ M^{T'_n}$ para cada n. Entonces, por 10.9,

$$\begin{aligned}Y^{T_n \wedge T'_n} &= (X \circ M^{T'_n})^{T_n} = X \circ M^{T_n \wedge T'_n} \\ &= (X \circ M^{T_n})^{T'_n} = (X \circ M)^{T_n \wedge T'_n},\end{aligned}$$

por lo tanto $Y = X \circ M$ sobre $[0, T_n \wedge T'_n]$ y como $T_n \wedge T'_n \uparrow \infty$ concluimos que $Y = X \circ M$. □

12.3 Observación. Si $M \in \mathcal{M}^2_{Loc}$ y $\langle M\rangle$ es continuo entonces para cada X predecible tal que

$$\int_{]0,t]} X_s^2 d\langle M\rangle_s < \infty \quad \text{c.s.} \tag{12.1}$$

para cada $t \geq 0$ se tiene que $X \in Loc\, L^2(M)$. En efecto, basta tomar $S_n = \inf\{t : (\int_{]0,t]} X^2 d\langle M\rangle) \geq n\}$. El recíproco claramente también es cierto (siempre) es decir, si $X \in Loc\, L^2(M)$ entonces (12.1) se cumple.

Obsérvese que de esta manera hemos obtenido la condición conocida para integrabilidad con respecto al proceso de Wiener W: $\int_{]0,t]} X_s^2 ds < \infty$ c.s. para cada t, ya que $\langle W\rangle_t = t$.

Hay que darse cuenta que bajo esta condición la integral $\int X\, dW$ en general no es martingala sino martingala local, aunque $W \in \mathcal{M}^2$.

12.4 Observación. Hemos definido la integral estocástica con respecto a $M \in \mathcal{M}^2_{Loc}$ para todo proceso predecible X, tal que $\int_{]0,\cdot]} X^2 d\langle M\rangle \in \mathcal{W}^1_{Loc}$ o equivalentemente $\int_{]0,\cdot]} X^2 d[M] \in \mathcal{W}^1_{Loc}$. Sucede que es posible extender esta definición de manera razonable a la clase de todos los procesos predecibles, tales que $\sqrt{\int_{]0,\cdot]} X^2 d[M]} \in \mathcal{W}^1_{Loc}$ (y aquí ya no se puede reemplazar $[M]$ por $\langle M\rangle$).

Esta extensión no es inmediata (ver [18] o [10]) y no se hará aquí.

Finalmente observemos que para M continua dicha clase (extendida) de los procesos M-integrables coincide con $Loc\, L^2(M)$.

12.5 Propiedades. *Sean* $N, M \in \mathcal{M}^2_{Loc}$, $X, Y \in Loc\, L^2(M)$. *Entonces:*

(a) *Para cada* T *tiempo de paro,* $(X \circ M)^T = X \circ M^T = (X\mathbf{1}_{[0,T]}) \circ M$.

(b) *Para todos* $a, b \in \mathbb{R}$, $(aX + bY) \in Loc\, L^2(M)$, *y*

$$(aX + bY) \circ M = a(X \circ M) + b(Y \circ M).$$

(c) *Para todos* $a, b \in \mathbb{R}$, *si* $X \in Loc\, L^2(M) \cap Loc\, L^2(N)$ *entonces* $X \in Loc\, L^2(aM + bN)$ *y* $X \circ (aM + bN) = a(X \circ M) + b(X \circ N)$ (por la desigualdad de Kunita-Watanabe).

(d) $\Delta(X \circ M) = X\Delta M$.

(e) *Si* $M \in \mathcal{M}^2_{Loc} \cap \mathcal{W}^0$, *y si existe la integral de Stieltjes* (St) $\int_{]0,t]} X_s dM_s$, *entonces*

$$(X \circ M)_t = (\mathrm{St}) \int_{]0,t]} X_s dM_s.$$

La demostración de estas propiedades se deja como ejercicio al lector (se hace por localización).

12.6 Definición. Decimos que un proceso X es *localmente acotado* si existe $(T_n)_n$ sucesión de tiempos de paro tal que $T_n \uparrow \infty$ y $X^{T_n} - X_0$ es acotado para cada n.

12.7 Ejemplos. (a) (Ejemplo básico) Todo proceso adaptado continuo por la izquierda es localmente acotado. En efecto, si $X = (X_t)_t$ es adaptado cag, entonces $X - X_0$ también lo es y además es 0 en 0, por lo tanto basta tomar

$$T_n = \inf\{t : |X_t - X_0| \geq n\}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

(b) Todo proceso predecible cadlag es localmente acotado. En efecto, sea T_n como en el ejemplo anterior, $n \in \mathbb{N}$. T_n es tiempo de paro predecible (por 4.15); sea $(S_{mn})_m$ una sucesión de tiempos de paro que predice a T_n (ver 2.17). Se tiene $\sup_t |X_t^{S_{mn}} - X_0| \leq n$ pues $S_{mn} < T_n$ sobre $\{T_n > 0\}$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Definimos $R_k = \max_{n,m \leq k} S_{mn}$, $k \in \mathbb{N}$. Es claro que $R_k \uparrow \infty$ y $\sup_t |X_t^{R_k} - X_0| \leq k$ para cada $k \in \mathbb{N}$. □

12.8 Lema. *Sean $M \in \mathcal{M}^2_{Loc}$ y X predecible localmente acotado. Entonces $X \in Loc\, L^2(M)$.*

Demostración. Sean $(T_n)_n$ y $(S_n)_n$ sucesiones de tiempos de paro tales que $T_n \uparrow \infty$, $S_n \uparrow \infty$, $M^{S_n} \in \mathcal{M}^2_\infty$, $X^{T_n} - X_0$ es acotado para todo $n \in \mathbb{N}$; por ejemplo $\sup_t |X_t^{T_n} - X_0| \leq c_n$. Definimos además

$$R_n = \begin{cases} 0, & \text{si } |X_0| > n \\ \infty, & \text{si } |X_0| \leq n. \end{cases}$$

Es claro que R_n es tiempo de paro para todo $n \in \mathbb{N}$ y $R_n \uparrow \infty$.

Tenemos:

$$\mathbf{1}_{]0,R_n]} X_t^2 = \begin{cases} 0, & \text{sobre } \{R_n = 0\} \\ & \text{i.e. si } |X_0| > n \\ (X_t - X_0 + X_0)^2 & \\ \quad \leq 2(X_t - X_0)^2 + 2n^2, & \text{si } |X_0| \leq n. \end{cases}$$

Por lo tanto $\mathbf{1}_{]0,R_n]} X_t^2 \leq 2c_n^2 + 2n^2$ sobre $]0, T_n]$ para cada n. En consecuencia

$$\begin{aligned} E\Big(\int_{]0,S_n \wedge T_n \wedge R_n]} X^2 d\langle M\rangle\Big) &= E\Big(\int_{]0,T_n]} \mathbf{1}_{]0,R_n]} X^2 d\langle M^{S_n}\rangle\Big) \\ &\leq (2c_n^2 + 2n^2) E\langle M^{S_n}\rangle_\infty < \infty. \end{aligned}$$

(se usó 8.11(e)). Esto significa que $X \in Loc\, L^2(M)$ ya que $S_n \wedge T_n \wedge R_n \uparrow \infty$. □

Ahora ya podemos definir la integral estocástica con respecto a una semimartingala. Los procesos predecibles localmente acotados resultan ser la clase para la cual la integral estocástica existe para *cada* semimartingala (para una semimartingala fija la clase de los procesos para los cuales es posible definir la integral estocástica es más amplia). Sabemos que si Z es semimartingala entonces Z tiene una descomposición $Z = M + A$, con $M \in \mathcal{M}^2_{Loc}$, $A \in \mathcal{W}^0$. Si X es un proceso predecible localmente acotado, podemos considerar

$$\int X dM + \int X dA.$$

Vimos ya que la primera integral tiene sentido y la segunda se define para cada trayectoria como integral de Stieltjes.

Para poder definir la integral estocástica de X con respecto a la semimartingala Z, bastará ver que esa suma no depende de la descomposición $M + A$, esto es:

12.9 Proposición y Definición. *Sea Z una semimartingala, $Z = M + A$, $M \in \mathcal{M}^2_{Loc}$, $A \in \mathcal{W}^0$ y sea X un proceso predecible localmente acotado. Entonces la semimartingala*

$$\int XdM + \int XdA$$

no depende de la forma de la descomposición de Z.

La integral estocástica (o integral de Itô) de X con respecto a Z que denotamos $X \circ Z = \int XdZ$ es por definición $\int XdM + \int XdA$, donde $Z = M + A$, $M \in \mathcal{M}^2_{Loc}$, $A \in \mathcal{W}^0$.

Demostración. Supongamos que se tiene otra descomposición $Z = N + V$, $N \in \mathcal{M}^2_{Loc}$, $V \in \mathcal{W}^0$ por lo tanto $M - N = V - A$, $M - N \in \mathcal{M}^2_{Loc}$, $V - A \in \mathcal{W}^0$ por lo tanto $M - N \in \mathcal{M}^2_{Loc} \cap \mathcal{W}^0$. Entonces existe $X \circ (M - N) \in \mathcal{M}^2_{Loc}$ y por 12.5(e)

$$X \circ (M - N) = (\mathrm{St}\ ) \int Xd(M - N) = \int Xd(V - A).$$

Por 12.5(c) tenemos que

$$\int XdM - \int XdN = \int XdV - \int XdA.$$

□

Entonces vemos que la noción de la integral estocástica con respecto a una semimartingala generaliza tanto la noción de integral de Stieltjes como la noción de integral estocástica con respecto a una martingala en $\mathcal{M}^2$.

12.10 Propiedades de la integral estocástica. *Si Z es una semimartingala y X, Y son procesos predecibles localmente acotados entonces*

(a) *$\int \cdot dZ$, $\int Xd\cdot$ son lineales.*
(b) *Para cada T tiempo de paro, $(X \circ Z)^T = (\mathbf{1}_{[0,T]}X) \circ Z = X \circ Z^T = X^T \circ Z^T$.*
En particular, si S, T son tiempos de paro, $S \leq T$, entonces $\mathbf{1}_{]S,T]} \circ Z = Z^T - Z^S$.
(c) *$X \circ (Y \circ Z) = (XY) \circ Z$.*
(d) *$\Delta(X \circ Z) = X\Delta Z$.*
(e) *Si $Z \in \mathcal{M}^2_{Loc}$ entonces $X \circ Z \in \mathcal{M}^2_{Loc}$.*
(f) *Si $Z \in \mathcal{M}^1_{Loc}$ entonces $X \circ Z \in \mathcal{M}^1_{Loc}$.*
(g) *Si $Z \in \mathcal{W}^0$ entonces $X \circ Z \in \mathcal{W}^0$.*

Demostración. Sólo falta ver que (f) vale (las otras son consecuencia inmediata de las propiedades correspondientes para $X \circ M$, con $M \in \mathcal{M}^2_{Loc}$ (ver 12.5)).

Si $Z \in \mathcal{M}^1_{Loc}$ entonces $Z = M + A$, con $M \in \mathcal{M}^2_{Loc}$ y $A \in \mathcal{M}^1_{Loc} \cap \mathcal{W}^1_{Loc}$ (por 11.16(b)).

Por la definición $X \circ Z = X \circ M + X \circ A$ y sabemos que $X \circ M \in \mathcal{M}^2_{Loc}$. Basta entonces mostrar que $X \circ A \in \mathcal{M}^1_{Loc}$. Sea $(T_n)_n$ una sucesión localizante de A en $\mathcal{M}^1_\infty$ y en $\mathcal{W}^1_\infty$ tal que $\mathbf{1}_{]0,T_n]}X$ sea acotado para cada $n \in \mathbb{N}$ (ver la demostración del Lema 12.8). Por las propiedades de la integral de Stieltjes tenemos $(X \circ A)^{T_n} = \mathbf{1}_{]0,T_n]}X \circ A^{T_n}$. Por otro lado, sabemos por 7.12 que si $\mathbf{1}_{]0,T_n]}X$ es predecible y acotado y A^{T_n} es martingala con variación integrable entonces $\mathbf{1}_{]0,T_n]}X \circ A^{T_n}$ es martingala para todo n. Por lo tanto $X \circ A$ es martingala local. □

12.11 Teorema de convergencia dominada (para integrales estocásticas). *Sea Z una semimartingala y X_n procesos predecibles ($n \in \mathbb{N}$), Y proceso localmente acotado tal que Y_0 es $\mathfrak{F}_0$-medible y supongamos que para todos n, t, ω*

$$|X_n(t,\omega)| \le Y_t(\omega).$$

Si $X_n(t,\omega) \to X(t,\omega)$ cuando $n \to \infty$ para todos t, ω, entonces

(i) $(X_n \circ Z)_t \xrightarrow{P} (X \circ Z)_t$ *cuando $n \to \infty$, $t \in \mathbb{R}_+$,*

(ii) *existe una subsucesion $(n_k)_k$ tal que $(X_{n_k} \circ Z)_t \to (X \circ Z)_t$ uniformemente en t sobre compactos c.s.*

Para demostrar este teorema necesitaremos el siguiente lema.

12.12 Lema. *Sean X y Y procesos tales que Y es localmente acotado, Y_0 es $\mathfrak{F}_0$-medible y $|X_t(\omega)| \le Y_t(\omega)$ para todos t, ω. Entonces X es localmente acotado.*

Demostración del lema. El argumento es casi idéntico al de la demostración del Lema 12.8. Fijemos tiempos de paro $(T_n)_n$ tales que $T_n \uparrow \infty$ y $Y^{T_n} - Y_0$ es acotado para cada $n \in \mathbb{N}$, por ejemplo $\sup_t |Y_t^{T_n} - Y_0| \le c_n$. Definimos

$$R_n = \begin{cases} 0, & \text{si } 2Y_0 > n \\ \infty, & \text{si } 2Y_0 \le n. \end{cases}$$

R_n es tiempo de paro y $R_n \uparrow \infty$. Probaremos que el proceso $X^{T_n \wedge R_n} - X_0$ es acotado para cada $n \in \mathbb{N}$ (nótese que la variable aleatoria Y_0 no es necesariamente acotada),

$$|X_t^{T_n \wedge R_n} - X_0| = |X_{t \wedge T_n \wedge R_n} - X_0| = \begin{cases} 0 & \text{si } 2Y_0 > n \\ |X_{t \wedge T_n} - X_0| & \text{si } 2Y_0 \le n. \end{cases}$$

Cuando $2Y_0 \leq n$ tenemos además

$$|X_{t\wedge T_n} - X_0| \leq |Y_{t\wedge T_n}| + |X_0| \leq |Y_{t\wedge T_n} - Y_0| + |Y_0| + |X_0| \leq c_n + n.$$

Por lo tanto $X^{T_n \wedge R_n} - X_0$ es acotado por $c_n + n$, lo que termina la demostración del lema. □

Demostración del Teorema 12.11. El proceso X es predecible como el límite puntual de procesos predecibles. Además por el Lema 12.12 los procesos X_n para todo $n \in \mathbb{N}$, así como X, son localmente acotados. Por lo tanto $X_n \circ Z$ y $X \circ Z$ existen.

Se tiene

$$X_n \circ Z = (X_n - X_n(0)) \circ Z + X_n(0) \circ Z$$

y

$$(X_n(0) \circ Z)_t = X_n(0)(Z_t - Z_0) \to X(0)(Z_t - Z_0)$$

cuando $n \to \infty$ para cada t, ω, y para toda ω la convergencia es uniforme en t sobre compactos, por lo tanto basta demostrar el teorema bajo la suposición adicional que $X_n(0) = 0$ para cada $n \in \mathbb{N}$ (reemplazando X_n por $X_n - X_n(0)$ y Y por $Y + Y(0)$).

Sea $Z = M + A$, $M \in \mathcal{M}^2_{Loc}$, $A \in \mathcal{W}^0$, y sea $(T_n)_n$ una sucesión de tiempos de paro tal que $T_n \uparrow \infty$ y $Y^{T_n} - Y_0$ es acotado para cada n, por ejemplo $|Y^{T_n}(t,\omega) - Y(0,\omega)| \leq c_n$ para todos t, ω, n.

Fijemos $\omega \in \Omega$ y $t > 0$. Existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $T_m(\omega) > t$, por lo tanto para $n \in \mathbb{N}$ y $s \leq t$ tenemos

$$\begin{aligned} |X_n(s,\omega) - X(s,\omega)| &= |X_n^{T_m}(s,\omega) - X^{T_m}(s,\omega)| \\ &\leq 2Y^{T_m}(s,\omega) \leq 2c_m + 2Y(0,\omega). \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \sup_{r\leq t} \quad & |\int_{]0,r]} (X_n(s,\omega) - X(s,\omega) dA_s(\omega)| \\ & \leq \sup_{r \leq t} \int_{]0,r]} |X_n(s,\omega) - X(s,\omega)| d|A|_s(\omega) \\ & = \int_{]0,t]} |X_n(s,\omega) - X(s,\omega)| d|A|_s(\omega) \to 0 \end{aligned}$$

cuando $n \to \infty$, por el teorema de la convergencia dominada ("clásica").

Por lo tanto (i) y (ii) son ciertos para $\int \cdot dA$ sin necesidad de extraer una subsucesión.

Ahora veremos que pasa con $\int \cdot dM$.

Repitiendo el razonamiento del Lema 12.12 vemos que existe una sucesión $(S_m)_m$ de tiempos de paro tal que $S_m \uparrow \infty$ y para todos m, n, t, ω, $|X_n^{S_m}(t,\omega)| \leq c_m + m$ (la sucesión $(S_m)_m$ depende sólo de Y y de $X_n(0) = 0$).

Podemos suponer adicionalmente que $M^{S_m} \in \mathcal{M}^2_\infty$ para todo $m \in \mathbb{N}$. Por ser acotados, $X_n^{S_m} \to X^{S_m}$ en $L^2(M^{S_m})$ cuando $n \to \infty$ (T.C.D.) y esto implica (por 9.2) que $X_n^{S_m} \circ M^{S_m} \to X^{S_m} \circ M^{S_m}$ en $\mathcal{M}^2_\infty$ cuando $n \to \infty$, o explícitamente,

$$\lim_{n\to\infty} E(\sup_t((X_n^{S_m} \circ M^{S_m})_t - (X^{S_m} \circ M^{S_m})_t)^2) = 0.$$

Utilizando 12.10(b) tenemos que

$$\lim_{n\to\infty} E(\sup_{t\leq S_m}((X_n \circ M)_t - (X \circ M)_t)^2) = 0 \tag{12.2}$$

y por lo tanto para todo $m \in \mathbb{N}$, existe una subsucesión $(n_k^{(m)})_k$ tal que

$$\sup_{t\leq S_m} |(X_{n_k^{(m)}} \circ M)_t - (X \circ M)_t| \to 0 \quad \text{c.s.}$$

cuando $k \to \infty$.

Por el método diagonal podemos encontrar una subsucesión $(n_k)_k$ tal que

$$P(\forall m \lim_{k\to\infty} \sup_{t\leq S_m} |(X_{n_k} \circ M)_t - (X \circ M)_t| = 0) = 1.$$

Lo que prueba la convergencia uniforme sobre compactos ya que $S_m \uparrow \infty$.

Por último, para cada $t \in \mathbb{R}_+$ y $\epsilon > 0$

$$\begin{aligned}
&P(|(X_n \circ M)_t - (X \circ M)_t| \geq \epsilon) \\
&\leq \quad P(S_m < t) + P(|(X_n \circ M)_{t\wedge S_m} - (X \circ M)_{t\wedge S_m}| \geq \epsilon) \\
&\leq \quad P(S_m < t) + 1/\epsilon^2 E(\sup_{t\leq S_m}((X_n \circ M)_t - (X \circ M)_t)^2).
\end{aligned}$$

(en la segunda cota se usa la desigualdad de Chebyshev).

Fijemos m tal que $P(S_m < t) < \epsilon/2$. Para ese m existe n_0 tal que para cada $n \geq n_0$ el segundo sumando es $< \epsilon/2$ (por (12.2)). Así hemos probado que $(X_n \circ M)_t \xrightarrow{P} (X \circ M)_t$. □

12.13 Proposición. *Sea Z una semimartingala, X un proceso predecible localmente acotado, S, T, tiempos de paro, $S \leq T$ y ξ una variable aleatoria $\mathfrak{F}_S$-medible. Entonces*

$$(\xi \mathbf{1}_{]S,T]} X) \circ Z = \xi((\mathbf{1}_{]S,T]} X) \circ Z) = \xi((X \circ Z)^T - (X \circ Z)^S) \tag{12.3}$$

Demostración. $\xi \mathbf{1}_{]S,T]}$ es un proceso predecible localmente acotado, porque es adaptado cag. Por lo tanto todos los términos de (12.3) tienen sentido.

La segunda igualdad se sigue de la propiedad 12.10(b).

Para demostrar la primera igualdad, observemos que por la propiedad 12.10(c) basta mostrarla para $X \equiv 1$. En efecto,

$$(\xi \mathbf{1}_{]S,T]} X) \circ Z = (\xi \mathbf{1}_{]S,T]}) \circ (X \circ Z) \qquad \text{por } 12.10(\text{c}).$$

Si la igualdad se cumple para l (con $X \circ Z$ en lugar de Z), es decir

$$(\xi \mathbf{1}_{]S,T]}) \circ (X \circ Z) = \xi (\mathbf{1}_{]S,T]} \circ (X \circ Z)),$$

entonces, nuevamente por 12.10(c), tenemos

$$\xi (\mathbf{1}_{]S,T]} \circ (X \circ Z)) = \xi ((\mathbf{1}_{]S,T]} X) \circ Z)$$

lo que muestra la primera igualdad en (12.3) para X arbitrario predecible, localmente acotado.

Entonces queremos mostrar que $(\xi \mathbf{1}_{]S,T]}) \circ Z = \xi (\mathbf{1}_{]S,T]} \circ Z)$

1. Sean $S = s < t = T \leq \infty$ y sea ξ acotado y $\mathfrak{F}_S$-medible. Entonces $\xi \mathbf{1}_{]s,t]} \circ Z = \xi (Z^t - Z^s)$ porque si $Z = M + A$, $M \in \mathcal{M}^2_{Loc}$, $A \in \mathcal{W}^0$, entonces $\xi \mathbf{1}_{]s,t]} \circ A = \xi (A^t - A^s)$, (la integral de Stieltjes) y $\xi \mathbf{1}_{]s,t]} \circ M = \xi (M^t - M^s)$ por localización en $\mathcal{M}^2_{\infty}$.

2. Supongamos ahora que S, T toman sólo un número finito de valores y que ξ es $\mathfrak{F}_S$-medible y acotada.

Sean $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_m \leq +\infty$ los valores posibles de S y T.

$$\begin{aligned}]S,T] &= \{(t,\omega) \in \mathbb{R}_+ \times \Omega : S(\omega) < t \leq T(\omega)\} \\ &= \bigcup_{j=1}^{m} \{(t,\omega) \in \mathbb{R}_+ \times \Omega : t \in]t_{j-1}, t_j], S(\omega) < t \leq T(\omega)\} \\ &= \bigcup_{j=1}^{m} \{(t,\omega) \in \mathbb{R}_+ \times \Omega : t \in]t_{j-1}, t_j], S(\omega) \leq t_{j-1} \text{ y } \ T(\omega) > t_{j-1}\}. \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\xi \mathbf{1}_{]S,T]} = \sum_{j=1}^{m} \mathbf{1}_{]t_{j-1},t_j]} \xi \mathbf{1}_{\{S \leq t_{j-1}\}} \mathbf{1}_{\{T \leq t_{j-1}\}^C}.$$

Aplicamos 1 a cada sumando para obtener

$$(\xi \mathbf{1}_{]S,T]}) \circ Z = \sum_{j=1}^{m} \xi \mathbf{1}_{\{S \leq t_{j-1} < T\}} (Z^{t_j} - Z^{t_{j-1}}).$$

Fijemos un ω y supongamos que $S(\omega) = t_i \leq t_k = T(\omega)$; entonces esta suma vale

$$\begin{aligned}
\xi(\omega) \sum_{j=i+1}^{k} (Z^{t_j}(\omega) - Z^{t_{j-1}}(\omega)) &= \xi(\omega)(Z^{t_k}(\omega) - Z^{t_i}(\omega)) \\
&= \xi(\omega)(Z^T(\omega) - Z^S(\omega)) \\
&= (\xi(\mathbf{1}_{]S,T]} \circ Z))(\omega).
\end{aligned}$$

3. Si S, T son dos tiempos de paro arbitrarios y ξ es $\mathfrak{F}_S$–medible acotada, entonces existen $(S_n)_n$, $(T_n)_n$ como en 2, tales que $S_n \downarrow S$, $T_n \downarrow T$, $S_n \leq T$.

ξ es $\mathfrak{F}_{S_n}$-medible porque $\mathfrak{F}_S \subset \mathfrak{F}_{S_n}$ y podemos aplicar 2 para obtener

$$(\xi \mathbf{1}_{]S_n,T_n]}) \circ Z = \xi(\mathbf{1}_{]S_n,T_n]} \circ Z).$$

Aplicando el T.C.D. 12.11 obtenemos

$$(\xi \mathbf{1}_{]S,T]}) \circ Z = \xi(\mathbf{1}_{]S,T]} \circ Z).$$

4. Finalmente si S, T son tiempos de paro arbitrarios y ξ es $\mathfrak{F}_S$-medible aplicamos el paso 3 a $(\xi \wedge n) \vee (-n)$, para cada $n \in \mathbb{N}$ y aplicamos el T.C.D. 12.11 a la sucesión así obtenida. □

Ahora vamos a demostrar que podemos construir el proceso *paréntesis cuadrado* o *variación cuadrada* para semimartingalas.

Antes de formular el teorema recordemos que (ver 9.16) podemos definir una *sucesión normal de particiones aleatorias* de $\mathbb{R}_+$ como una sucesión $(\Pi_n)_n$ tal que $\Pi_n = \{T_0^n, T_1^n, \ldots\}$, donde T_j^n es tiempo de paro para todos j, n, $0 = T_0^n < T_1^n < \cdots$, $\lim_{j\to\infty} T_j^n = \infty$ c.s. para cada n, y $\lim_{n\to\infty} \sup_j (T_{j+1}^n - T_j^n) = 0$ c.s.

12.14 Teorema. *Sea Z una semimartingala. Entonces existe un único proceso cadlag creciente adaptado $[Z,Z]$ ($\equiv [Z]$), $[Z]_0 = 0$ tal que para cada $(\Pi_n)_n$ sucesión normal de particiones aleatorias de $\mathbb{R}_+$ se tiene*

$$[Z]_t = \lim_{n\to\infty}(P) \sum_{j=0}^{\infty} (Z_{T_{j+1}^n \wedge t} - Z_{T_j^n \wedge t})^2 = Z_t^2 - Z_0^2 - 2\int_{]0,t]} Z_{s-}\, dZ_s.$$

Además existe una sucesión $(n_k)_k$ tal que la convergencia es uniforme en t sobre compactos para P-casi cada ω.

Observaciones. (a) Aquí tenemos solamente convergencia en probabilidad. Recordemos que para martingalas en $\mathcal{M}^2$ tuvimos convergencia en L^1.

(b) Para semimartingalas generales no se define el proceso $\langle\cdot,\cdot\rangle$.

Demostración del teorema. Fijemos $(\Pi_n)_n = (\{T_0^n, T_1^n, \ldots\})_n$ una sucesión normal de particiones aleatorias de $\mathbb{R}_+$. Claramente podemos suponer que para toda $\omega \in \Omega$ $(\{T_0^n(\omega), T_1^n(\omega), \ldots\})_n$ es una sucesión normal de particiones de $\mathbb{R}_+$ (y no sólo para casi toda ω).

Como en la demostración del Teorema 9.10 escribimos

$$Z_t^2 - Z_0^2 = V_n(t, Z) + N_n(t), \tag{12.4}$$

donde

$$\begin{aligned} V_n(t,Z) &= \sum_{j=0}^{\infty}(Z_{T_{j+1}^n\wedge t} - Z_{T_j^n\wedge t})^2 \\ N_n(t) &= 2\sum_{j=0}^{\infty} Z_{T_j^n\wedge t}(Z_{T_{j+1}^n\wedge t} - Z_{T_j^n\wedge t}). \end{aligned}$$

Definamos

$$X_n = \sum_{j=0}^{\infty} Z_{T_j^n}\mathbf{1}_{]T_j^n, T_{j+1}^n]} = \lim_{m\to\infty}\sum_{j\le m} Z_{T_j^n}\mathbf{1}_{]T_j^n, T_{j+1}^n]}.$$

Para todo $n \in \mathbb{N}$, X_n es un proceso cag y adaptado, por lo tanto es localmente acotado y predecible. Por el T.C.D. 12.11 y por 12.13 tenemos

$$2\int_{]0,t]} X_n\, dZ = 2\sum_{j=0}^{\infty} Z_{T_j^n}(Z_{T_{j+1}^n\wedge t} - Z_{T_j^n\wedge t}) = N_n(t).$$

Por la definición de la sucesión normal, para todos t, ω se tiene que

$$X_n(t,\omega) \to Z_{t-}(\omega) \quad \text{si} \quad n \to \infty$$

y además $|X_n(t,\omega)| \le \sup_{s<t}|Z_s(\omega)|$. El proceso $\sup_{s<\cdot}|Z_s|$ es continuo por la izquierda y adaptado, entonces por 12.11 tenemos que $\int_{]0,t]} X_n\, dZ \to \int_{]0,t]} Z_{s-}\, dZ$ en probabilidad para cada t, y existe una subsucesión para la cual la convergencia es uniforme en t sobre compactos, c.s.

La fórmula (12.4) implica que la sucesión $(V_n(t,Z))_n$ también converge en probabilidad y para una subsucesión la convergencia es uniforme en t sobre compactos, c.s. El límite de esta subsucesión lo denotamos por $[Z, Z]_t$. Es claro que este proceso no depende (módulo indistinguibilidad) de $(\Pi_n)_n$.

Para terminar la demostración basta observar que $[Z, Z]$ es creciente por el mismo razonamiento que en el paso 2 de la demostración del Teorema 9.10. □

12.15 Definición. Si Z, U son dos semimartingalas, definimos

$$[Z,U] = \frac{1}{4}([Z+U] - [Z-U]).$$

12.16 Corolario (fórmula de integración por partes). *Si Z, U son dos semimartingalas entonces $[Z,U] \in \mathcal{W}^0$ y para toda familia normal $(\Pi_n)_n$ de particiones aleatorias de $\mathbb{R}_+$ se tiene:*

$$\begin{aligned} [Z,U]_t &= \lim_{n\to\infty}(P)\sum_k (Z_{T^n_{k+1}\wedge t} - Z_{T^n_k\wedge t})(U_{T^n_{k+1}\wedge t} - U_{T^n_k\wedge t}) \\ &= Z_tU_t - Z_0U_0 - \int_{]0,t]} Z_{s-}\, dU_s - \int_{]0,t]} U_{s-}\, dZ_s, \end{aligned}$$

y para alguna sucesión la convergencia es uniforme sobre compactos c.s.

12.17 Corolario. *Si Z, U son dos semimartingalas y T es un tiempo de paro, entonces*

$$[Z^T, U] = [Z, U^T] = [Z,U]^T.$$

12.18 Corolario. *Si Z es una semimartingala entonces Z^2 es también una semimartingala y para cada X proceso localmente acotado predecible, se tiene*

$$\int X\, dZ^2 = 2\int X_s Z_{s-}\, dZ_s + \int X\, d[Z].$$

12.19 Observación. Por 12.16 vemos además que si Z, U son dos semimartingalas, entonces ZU es una semimartingala y si Z, U son martingalas locales entonces $ZU - [Z,U] - Z_0U_0$ es una martingala local.

Cuando $M \in \mathcal{M}^2$ sabemos que

$$[M,M]_t = \langle M^c\rangle_t + \sum_{s\le t}(\Delta M_s)^2.$$

¿Se puede obtener algo análogo para el caso de semimartingala? La respuesta es sí, pero antes de verlo necesitamos algunos resultados preliminares:

12.20 Proposición. *Si Z es una semimartingala entonces $\sum_{s\leq t}(\Delta Z_s)^2 < \infty$ para cada $t \geq 0$* [(1)] *y $([Z]_t - \sum_{s\leq t}(\Delta Z_s)^2)_t$ es un proceso continuo.*

Demostración. Sea $Z = M + A$, $M \in \mathcal{M}^2_{Loc}$, $A \in \mathcal{W}^0$. Claramente, $\Delta Z_s = \Delta M_s + \Delta A_s$.

$$\sum_{s\leq t}(\Delta A_s)^2 = \sum_{s\leq t}(\Delta A_s)^2 \mathbf{1}_{\{|\Delta A_s|>1\}} + \sum_{s\leq t}(\Delta A_s)^2 \mathbf{1}_{\{|\Delta A_s|\leq 1\}} < \infty,$$

ya que el primer sumando es una suma finita y el segundo:

$$\begin{aligned}
\sum_{s\leq t}(\Delta A_s)^2 \mathbf{1}_{\{|\Delta A_s|\leq 1\}} &\leq \sum_{s\leq t}|\Delta A_s| \mathbf{1}_{\{|\Delta A_s|\leq 1\}} \\
&\leq \sum_{s\leq t}|\Delta A_s| \leq |A|_t < \infty.
\end{aligned}$$

Además se tiene $\sum_{s\leq t}(\Delta M_s)^2 < \infty$ c.s. ya que así es para cada M^{T_n} donde $(T_n)_n$ es una sucesión localizante para M en $\mathcal{M}^2_\infty$. Por lo tanto $\sum_{s\leq t}(\Delta Z_s)^2 < \infty$ c.s.

Pasemos ahora a mostrar que $[Z]_t - \sum_{s\leq t}(\Delta Z_s)^2$ es continuo. Por 12.14

$$\begin{aligned}
\Delta[Z]_t &= \Delta(Z_t^2) - 2\Delta\left(\int Z_{s-}\, dZ_s\right)_t \\
&= Z_t^2 - Z_{t-}^2 - 2Z_{t-}\Delta Z_t \\
&= Z_t^2 - Z_{t-}^2 - 2Z_{t-}(Z_t - Z_{t-}) \\
&= (Z_t - Z_{t-})^2 = (\Delta Z_t)^2.
\end{aligned}$$

(se usó 12.10(d)). □

12.21 Corolario. *Si Z, U son dos semimartingalas entonces $\sum_{s\leq t}\Delta Z_s \Delta U_s$ converge absolutamente para cada $t \geq 0$ y $([Z,U]_t - \sum_{s\leq t}\Delta Z_s \Delta U_s)_t$ es un proceso continuo.*

12.22 Proposición. *Sea Z una semimartingala y $V \in \mathcal{W}^0$, entonces*

$$[Z,V]_t = \sum_{s\leq t}\Delta Z_s \Delta V_s.$$

Para esto necesitamos tres lemas:

---

(1) Recordemos que no distinguimos procesos que son distintos sólo sobre un conjunto evanescente. Por lo tanto toda afirmación como ésta hay que entenderla así: existe un proceso indistinguible de Z para el cual la afirmación es cierta.

12.23 Lema. *Si Z es una semimartingala continua y $V \in \mathcal{W}^0$, entonces*

$$[Z, V] = 0.$$

Demostración del Lema 12.23. Sea $(\Pi_n)_n = (\{T_0^n, T_1^n, \dots\})_n$ una sucesión normal de particiones aleatorias (en particular pueden ser deterministas) de $\mathbb{R}_+$. Tenemos para todo $t \in \mathbb{R}_+$

$$\begin{aligned} &|\sum_k (Z_{T_{k+1}^n \wedge t} - Z_{T_k^n \wedge t})(V_{T_{k+1}^n \wedge t} - V_{T_k^n \wedge t})| \\ \leq\ & \max_k |Z_{T_{k+1}^n \wedge t} - Z_{T_k^n \wedge t}| \sum_k |V_{T_{k+1}^n \wedge t} - V_{T_k^n \wedge t}| \\ \leq\ & \max_k |Z_{T_{k+1}^n \wedge t} - Z_{T_k^n \wedge t}| \, |V|_t \to 0 \end{aligned}$$

cuando $n \to \infty$ para todos t, ω porque la función $Z_{\cdot}(\omega)$ es uniformemente continua sobre $[0, t]$. Entonces por 12.16, $[Z, V]_t = 0$ c.s. para cada t fijo y por lo tanto $[Z, V] = 0$ (por ser cadlag). □

El lema que sigue es puramente determinista, sin embargo para facilitar su aplicación vamos a mantener nuestras notaciones "probabilistas".

12.24 Lema. *Sea $(Z_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ una función cadlag ($t \mapsto Z_t$ como función de $\mathbb{R}_+$ en $\mathbb{R}$) y $(\xi_n)_n$ una sucesión de reales tal que $\xi_n \downarrow 0$. Supongamos que existe una sucesión $(\{0 = T_0^n < T_1^n < \cdots\})_n$ de particiones de $\mathbb{R}_+$ tal que*

$$\textit{para cada } n, \ \lim_{k \to \infty} T_k^n = \infty \ \textit{y} \ \sup_{T_k^n \leq t < T_{k+1}^n} |Z_t - Z_{T_k^n}| \leq \xi_n \ \textit{para } k = 0, 1, \dots$$

Entonces

$$\sum_{k=0}^{\infty} (\Delta Z_{T_{k+1}^n \wedge t})^2 \mathbf{1}_{\{T_k^n < t\}} \to \sum_{s \leq t} (\Delta Z_s)^2 \quad \text{cuando} \quad n \to \infty.$$

Si el lado derecho es finito para alguna t, la convergencia es uniforme sobre $[0, t]$.

Observación. De este lema se sigue inmediatamente (por polarización) que si Z y V satisfacen la condición, entonces

$$\sum_k \Delta Z_{T_{k+1}^n \wedge t} \Delta V_{T_{k+1}^n \wedge t} \mathbf{1}_{\{T_k^n < t\}} \to \sum_{s \leq t} \Delta Z_s \Delta V_s \quad \text{si} \quad n \to \infty.$$

Demostración del Lema 12.24. Si $T_k^n < t < T_{k+1}^n$ entonces $|Z_t - Z_{T_k^n}| \le \xi_n$ y $|Z_{t-} - Z_{T_k^n}| \le \xi_n$ y en consecuencia $|\Delta Z_t| \le 2\xi_n$, i.e. todos los saltos mayores que $2\xi_n$ pueden ocurrir sólo en los tiempos T_k^n, $k = 1, 2, \ldots$

Definamos $D_n(t) = \{s : s \le t,\ |\Delta Z_s| > 2\xi_n\}$. $D_n(t)$ es finito para cada n por ser Z cadlag, además $D_n(t) \subset D_{n+1}(t)$ y

$$\sum_{s \in D_n(t)} (\Delta Z_s)^2 \to \sum_{s \le t} (\Delta Z_s)^2 \quad \text{si} \quad n \to \infty$$

porque $\xi_n \downarrow 0$. Es claro que si $\sum_{s \le t} (\Delta Z_s)^2 < \infty$ entonces la convergencia es uniforme sobre $[0, t]$. [(2)]

Para terminar la demostración del lema basta observar que

$$\sum_{s \le t} (\Delta Z_s)^2 \ge \sum_k (\Delta Z_{T_{k+1}^n \wedge t})^2 \mathbf{1}_{\{T_k^n < t\}} \ge \sum_{s \in D_n(t)} (\Delta Z_s)^2.$$

□

12.25 Lema. *La afirmación de la Proposición 12.22 es cierta si $Z, V \in \mathcal{W}^0$.*

Demostración del Lema 12.25. Definamos, $T_0^n = 0$,

$$T_{k+1}^n = \inf\{t : t > T_k^n,\ |Z_t - Z_{T_k^n}| + |V_t - V_{T_k^n}| > 1/n\} \wedge (T_k^n + 1/n),$$

$k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $n \in \mathbb{N}$. Es claro que $(\{T_0^n, T_1^n, \ldots\})_n$ es una sucesión normal de particiones aleatorias de $\mathbb{R}_+$ (por ser Z, V cadlag).

Observemos que

$$|Z_{T_{k+1}^n \wedge t-} - Z_{T_k^n \wedge t}| \le 1/n \text{ y } |V_{T_{k+1}^n \wedge t-} - V_{T_k^n \wedge t}| \le 1/n \ \forall k, n \in \mathbb{N}.$$

Tenemos

$$\sum_{k=0}^{\infty} (Z_{T_{k+1}^n \wedge t} - Z_{T_k^n \wedge t})(V_{T_{k+1}^n \wedge t} - V_{T_k^n \wedge t}) = A_n + B_n + C_n,$$

donde

$$\begin{aligned}
A_n &= \sum_k (Z_{T_{k+1}^n \wedge t-} - Z_{T_k^n \wedge t})(V_{T_{k+1}^n \wedge t} - V_{T_k^n \wedge t}),\\
B_n &= \sum_k \Delta Z_{T_{k+1}^n \wedge t} \Delta V_{T_{k+1}^n \wedge t} \mathbf{1}_{\{T_k^n < t\}},\\
C_n &= \sum_k \Delta Z_{T_{k+1}^n \wedge t} (V_{T_{k+1}^n \wedge t-} - V_{T_k^n \wedge t}) \mathbf{1}_{\{T_k^n < t\}}.
\end{aligned}$$

---

(2) Si $f : [0, t] \to \mathbb{R}_+$, $f_n : [0, t] \to \mathbb{R}_+$ $(n = 1, 2, \ldots)$ son funciones crecientes, $f_n \uparrow f$ y $0 \le f_n(s_1) - f_n(s_2) \le f(s_1) - f(s_2)$ para toda $s_1, s_2 \in [0, t]$, $n = 1, 2, \ldots$, entonces $f_n(s) \to f(s)$ uniformemente en s sobre $[0, t]$.

Por 12.16 basta demostrar que

$$A_n + B_n + C_n \to \sum_{s\leq t} \Delta Z_s \Delta V_s \quad \text{para cada } \omega \text{ si } n \to \infty.$$

Recordemos que por 12.21 la serie converge absolutamente y por lo tanto el proceso $\sum_{s\leq \cdot} \Delta Z_s \Delta V_s$ es cadlag. Ahora bien

$$|A_n| \leq \frac{1}{n}|V|_t \to 0, \quad |C_n| \leq \frac{1}{n}|Z|_t \to 0,$$

además por la definición de T_k^n tenemos que

$$T_k^n \leq t < T_{k+1}^n \text{ implica } |Z_t - Z_{T_k^n}| + |V_t - V_{T_k^n}| < 1/n,$$

entonces por el Lema 12.24 (o más bien por la observación que le sigue) vemos que $B_n \to \sum_{s\leq t} \Delta Z_s \Delta V_s$. □

Demostración de la Proposición 12.22. Sea $Z = M + A$, $M \in \mathcal{M}^2_{Loc}$, $M_0 = 0$, $A \in \mathcal{W}^0$. Basta demostrar la fórmula para Z^{T_n} para todo n, donde $(T_n)_n$ es una sucesión de tiempos de paro acotados, $T_n \uparrow \infty$, porque por el Corolario 12.17 $[Z^{T_n}, V] = [Z, V]^{T_n}$. Por lo tanto podemos suponer que $M \in \mathcal{M}^2_\infty$. Tenemos

$$\begin{aligned}[Z,V] &= [M^c + M^d + A, V] = [M^c, V] + [M^d, V] + [A, V] \\ &= [M^d, V] + \sum \Delta A \Delta V,\end{aligned}$$

porque $[M^c, V] = 0$ (Lema 12.23) y $[A, V] = \sum \Delta A \Delta V$ (Lema 12.25). Basta demostrar que $[M^d, V] = \sum \Delta M \Delta V$.

Sean S_n, $n = 1, 2, \ldots$ tiempos de paro predecibles o totalmente inaccesibles con gráficas ajenas tales que $\{\Delta M \neq 0\} \subset \cup_n [S_n]$. Definamos los procesos $B_n = \Delta M_{S_n} \mathbf{1}_{[S_n, \infty[}$, $n \in \mathbb{N}$.

Sabemos (por 8.21) que $M^d = \sum_n (B_n - \widetilde{B}_n)$ donde la serie converge en $\mathcal{M}^2_\infty$.

Observemos que para todos $m \in \mathbb{N}$, $t \in \mathbb{R}_+$,

$$[\sum_{n=1}^m (B_n - \widetilde{B}_n), V]_t = \sum_{n=1}^m [B_n - \widetilde{B}_n, V]_t = \sum_{n=1}^m \Delta M_{S_n} \Delta V_{S_n} I_{\{S_n \leq t\}}$$

por 12.25, ya que $B_n - \widetilde{B}_n \in \mathcal{W}^0$ y tiene a lo más un solo salto en S_n, igual a ΔM_{S_n} (ver (ii) en la demostración del Teorema 8.21).

Claramente $\sum_{n=1}^{m} \Delta M_{S_n} \Delta V_{S_n} I_{\{S_n \leq t\}} \to \sum_{s\leq t} \Delta M_s \Delta V_s$ si $m \to \infty$. Por lo tanto basta demostrar que $[N_m, V]_t \to [M^d, V]_t$ si $m \to \infty$, donde $N_m = \sum_{n=1}^{m} (B_n - \widetilde{B}_n)$.

Por la desigualdad de Schwarz (pues $[\cdot,\cdot]$ es una forma bilineal y no negativa, el argumento es el mismo como en la última parte de la demostración de las desigualdades Kunita-Watanabe 10.3) tenemos que

$$|[M^d, V]_t - [N_m, V]_t| = |[M^d - N_m, V]_t| \leq \sqrt{[M^d - N_m]_t}\sqrt{[V]_t}.$$

Finalmente basta observar que $M^d - N_m \in \mathcal{M}^{2,d}_{\infty}$, porque entonces utilizando el Teorema 9.10 obtenemos

$$\begin{aligned} [M^d - N_m]_t &= [\sum_{n>m} (B_n - \widetilde{B}_n)]_t \\ &= \sum_{n>m} (\Delta M_{S_m})^2 \to 0 \text{ cuando } m \to \infty. \end{aligned}$$

Ahora sí podemos dar una respuesta, a la pregunta planteada antes de la Proposición 12.20.

12.26 Teorema. *Sean Z y U dos semimartingalas entonces*

$$[Z, U]_t = \langle Z^c, U^c \rangle_t + \sum_{s\leq t} \Delta Z_s \Delta U_s = [Z^c, U^c]_t + \sum_{s\leq t} \Delta Z_s \Delta U_s,$$

donde la serie converge absolutamente para todo t, y c.s.

Observación. $Z = M + A = M^c + M^d + A$. Vimos que M^c no depende de la descomposición (por 11.27) y denotamos $Z^c = M^c$, análogamente definimos U^c. Tenemos $Z^c, U^c \in \mathcal{M}^{2c}_{Loc}$, por lo que tiene sentido hablar de $\langle Z^c, U^c \rangle$ o $[Z^c, U^c]$ (y son iguales por 11.18).

Demostración. Sea $Z = M + A = M^c + M^d + A$, $U = N + V = N^c + N^d + V$, $A, V \in \mathcal{W}^0$ ($Z^c = M^c$, $U^c = N^c$). Parando, se puede suponer que $M^c, M^d, N^c, N^d \in M^2_{\infty}$. Ahora,

$$\begin{aligned} [Z, U] &= [M^c, N^c] + [M^c, N^d] + [M^d, N^c] + [M^c, V] \\ &+ [A, N^c] + [M^d, N^d] + [M^d, V] + [A, N^d] + [A, V]. \end{aligned}$$

Aquí, el cuarto y quinto sumandos valen 0 (Lema 12.23); el sexto sumando $[M^d, N^d] = \sum \Delta M \Delta N$ porque $M^d, N^d \in \mathcal{M}^{2,d}_{\infty}$, y tienen los mismos saltos que M,N respectivamente. Los tres últimos sumandos, (se aplica la Proposición 12.22):

$$[M^d, V] = \sum \Delta M \Delta V, \ [A, N^d] = \sum \Delta A \Delta N, \ [A, V] = \sum \Delta A \Delta V.$$

Veamos ahora que pasa con el segundo y tercer sumandos: $[M^c, N^d] = \langle M^c, (N^d)^c\rangle + \sum \Delta M^c \Delta N^d = 0$, análogamente $[M^d, N^c] = 0$. Reagrupando obtenemos:

$$\begin{aligned}
[Z,U] &= [Z^c, U^c] + \sum \Delta M \Delta N + \sum \Delta M \Delta V \\
&\quad + \sum \Delta A \Delta N + \sum \Delta A \Delta V \\
&= [Z^c, U^c] + \sum (\Delta M + \Delta A)(\Delta N + \Delta V) \\
&= [Z^c, U^c] + \sum \Delta Z \Delta U.
\end{aligned}$$

□

Ahora mostraremos un resultado que establece la relación entre $l[\cdot,\cdot]$ y la integral estocástica (compare 10.6):

12.27 Proposición. *Sean Z, U dos semimartingalas y X un proceso localmente acotado y predecible. Entonces,*

$$[X \circ Z, U] = X \circ [Z, U].$$

12.28 Lema. *Si Z es semimartingala y X es proceso predecible localmente acotado, entonces $(X \circ Z)^c = X \circ Z^c$.*

La demostración del lema es inmediata (ver 10.8) y se deja como ejercicio.

Demostración de la Proposición 12.27. Parando, se puede suponer que X es acotado y $Z^c, U^c \in \mathcal{M}^2_\infty$:

$$\begin{aligned}
[X \circ Z, U] &= \langle (X \circ Z)^c, U^c\rangle + \sum \Delta(X \circ Z)\Delta U \\
&\qquad \text{(teorema anterior)} \\
&= \langle X \circ Z^c, U^c\rangle + \sum X \Delta Z \Delta U \\
&\qquad \text{(12.10(d) y Lema 12.28)}\ . \\
&= X \circ \langle Z^c, U^c\rangle + X \circ \sum \Delta Z \Delta U = X \circ [Z, U] \\
&\qquad \text{(Proposición 10.6 y teorema anterior)}.
\end{aligned}$$

□

Capítulo 13

Fórmula de Itô

La fórmula de Itô es el resultado más importante en el análisis estocástico. Dice que la composición de una semimartingala con una función arbitraria de la clase $\mathcal{C}^2$ es también semimartingala y da una forma explícita de la descomposición de esta semimartingala. En este capítulo veremos algunas aplicaciones de esta fórmula, como las caracterizaciones del proceso de Wiener y del proceso de Poisson por medio de martingalas (Teorema de Lévy), la fórmula exponencial de Doléans y la caracterización de semimartingalas con incrementos independientes.

Vamos a necesitar una nueva noción de parar (parar estrictamente antes de T).

13.1 Definición. Sea Z un proceso cadlag y T un tiempo de paro. Definimos $Z^{]T}$ que llamaremos *proceso parado estrictamente antes de* T de la siguiente manera:

$$(Z^{]T})_t = \left\{ \begin{array}{ll} 0, & \text{si } T = 0 \\ Z_t, & \text{si } T > t \\ Z_{T-}, & \text{si } 0 < T \leq t \end{array} \right\} = Z_t^T - \Delta Z_T \mathbf{1}_{[T,\infty[}(t) - Z_0 \mathbf{1}_{\{T=0\}}.^{(1)}$$

13.2 Observaciones. (a) Si Z es una semimartingala entonces $Z^{]T}$ es también una semimartingala.

(b) $(\int X\, dZ)^{]T} = \int X\, dZ^{]T}$ para cada Z semimartingala y T tiempo de paro. En efecto,

$$\left(\int X\, dZ\right)^T = \int X\, dZ^T = \int X\, d(Z^{]T} + \Delta Z_T \mathbf{1}_{[T,\infty[} + Z_0 \mathbf{1}_{\{T=0\}})$$

(1) Este nombre no está completamente de acuerdo con nuestra convención $Z_{0-} = Z_0$. Aquí, "antes" de $T(\omega) = 0$ ponemos $Z_t^{]T}(\omega) = 0$.

$$= \int X\, dZ^{]T} + X_T \Delta Z_T \mathbf{1}_{[T,\infty[},$$

y por otra parte (recordemos que $(X \circ Z)_0 = 0$)

$$\begin{aligned}(\int X\, dZ)^T &= (\int X\, dZ)^{]T} + \Delta(\int X\, dZ)_T \mathbf{1}_{[T,\infty[}\\ &= (\int X\, dZ)^{]T} + X_T \Delta Z_T \mathbf{1}_{[T,\infty[}.\end{aligned}$$

(c) $[Z]^{]T} = [Z^{]T}]$ para cada Z semimartingala y T tiempo de paro. En efecto,

$$\begin{aligned}[Z^{]T}] &= [Z^T - \Delta Z_T \mathbf{1}_{[T,\infty[} - Z_0 \mathbf{1}_{\{T=0\}}] = [Z^T - \Delta Z_T \mathbf{1}_{[T,\infty[}]\\ &= [Z^T, Z^T] - 2[Z^T, \Delta Z_T \mathbf{1}_{[T,\infty[}] + [\Delta Z_T \mathbf{1}_{[T,\infty[}]\\ &= [Z^T] - 2(\Delta Z_T)^2 \mathbf{1}_{[T,\infty[} + (\Delta Z_T)^2 \mathbf{1}_{[T,\infty[}\\ &= [Z^T] - (\Delta Z_T)^2 \mathbf{1}_{[T,\infty[} = [Z^T] - \Delta[Z]_T \mathbf{1}_{[T,\infty[} = [Z]^{]T}\end{aligned}$$

(por propiedades de $[\cdot]$).

(d) $(Z^c)^{]T} = (Z^{]T})^c$ para cada Z semimartingala y T tiempo de paro. En efecto,

$$(Z^c)^{]T} = (Z^c)^T = (Z^T)^c = (Z^{]T})^c.$$

13.3 Teorema (fórmula de Itô). *Si Z es una semimartingala y $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ (no se exige que f o sus derivadas sean acotadas) entonces $f(Z)$ es también una semimartingala y*

$$\begin{aligned}f(Z_t) &= f(Z_0) + \int_{]0,t]} f'(Z_{s-})\, dZ_s + \frac{1}{2}\int_{]0,t]} f''(Z_{s-})\, d[Z]_s\\ &\quad + \sum_{s\le t}(\Delta f(Z_s) - f'(Z_{s-})\Delta Z_s - \frac{1}{2} f''(Z_{s-})(\Delta Z_s)^2)\\ &= f(Z_0) + \int_{]0,t]} f'(Z_{s-})\, dZ_s + \frac{1}{2}\int_{]0,t]} f''(Z_{s-})\, d[Z^c]_s\\ &\quad + \sum_{s\le t}(\Delta f(Z_s) - f'(Z_{s-})\Delta Z_s)\end{aligned}$$

donde las series son absolutamentes sumables para todo t (c.s en ω).

Observaciones. (a) La segunda igualdad se sigue inmediatamente del Teorema 12.26.

(b) La fórmula

$$Z_t^2 = Z_0^2 + 2\int_{]0,t]} Z_{s-}\, dZ_s + [Z]_t,$$

que obtuvimos en el Teorema 12.14 es un caso particular de la fórmula de Itô, para $f(x) = x^2$.

Demostración del teorema. 1. Todas las expresiones en la fórmula tienen sentido:
(i) $(f'(Z_{s-}))_{s\in\mathbb{R}_+}$, $(f''(Z_{s-}))_{s\in\mathbb{R}_+}$ son procesos adaptados cag, por lo tanto son predecibles localmente acotados (es decir pertenecen a la clase para la cual la integral estocástica con respecto a una semimartingala existe).
(ii) $\sum_{s\leq t} f''(Z_{s-})(\Delta Z_s)^2$ converge ya que la serie $\sum_{s\leq t}(\Delta Z_s)^2$ es convergente porque Z es una semimartingala (ver 12.20); además si fijamos ω, $f''(Z_{s-}(\omega))$ para $s \in [0,t]$ (como función de s) es acotada por ser cag. Esto muestra que

$$\sum_{s\leq t} f''(Z_{s-})(\Delta Z_s)^2$$

es convergente para cada ω fijo.
(iii) Para ver la convergencia de $\sum_{s\leq t}(\Delta f(Z_s) - f'(Z_{s-})\Delta Z_s)$, utilizaremos la fórmula de Hadamard-Taylor:

$$f(x) = f(y) + f'(y)(x-y) + \int_0^1 (1-\theta) f''(y + \theta(x-y))\, d\theta (x-y)^2.$$

Entonces tenemos, para ω fijo y $s \leq t$,

$$\begin{aligned} |\Delta f(Z_s) - f'(Z_{s-})\Delta Z_s| &\leq \int_0^1 (1-\theta)|f''(Z_{s-} + \theta\Delta Z_s)|\, d\theta (\Delta Z_s)^2 \\ &\leq C(t,\omega)(\Delta Z_s)^2, \end{aligned}$$

ya que $Z_{s-} + \theta\Delta Z_s$ está en un conjunto acotado y f'' es continua y acotada sobre conjuntos acotados; por lo tanto la serie converge por 12.20.

2. Se puede suponer que Z es acotada por una constante (que no depende de t ni de ω). En efecto, definamos para cada $n \in \mathbb{N}$

$$S_n = \inf\{t : |Z_t| \geq n\}, \quad R_n = \begin{cases} 0 \text{ si } |Z_0| > n \\ \infty \text{si } |Z_0| \leq n \end{cases}, \quad T_n = S_n \wedge R_n.$$

T_n es un tiempo de paro y $T_n \uparrow \infty$. Observemos que para $t = 0$ la fórmula claramente se cumple, por lo tanto basta demostrarla sobre $]0, T_n[$, $n = 1, 2, \ldots$

Tenemos $\mathbf{1}_{]0,T_n[}f(Z) = \mathbf{1}_{]0,T_n[}f(Z^{]T_n})$ y también en el lado derecho, sobre $]0,T_n[$, se puede sustituir Z_t por $Z_t^{]T_n}$. En efecto, por la definición, $\mathbf{1}_{]0,T_n[}$(lado derecho) $= \mathbf{1}_{]0,T_n[}$(lado derecho)$^{]T_n}$. Por otro lado, para un proceso cadlag Y se cumple $Y^{]T} = (Y^T)^{]T}$, entonces tenemos

$$\begin{aligned}(\int f'(Z_{s-})\,dZ_s)^{]T_n} &= ((\int f'(Z_{s-})\,dZ_s)^{T_n})^{]T_n} \\ &= (\int \mathbf{1}_{]0,T_n]}f'(Z_{s-})\,dZ_s)^{]T_n} \\ &= (\int \mathbf{1}_{]0,T_n]}f'(Z_{s-}^{]T_n})\,dZ_s)^{]T_n} \\ &= \int f(Z_{s-}^{]T_n})\,dZ_s^{]T_n}.\end{aligned}$$

Para los otros sumandos el argumento es análogo y así vemos que sobre $]0,T_n[$ el lado derecho de la fórmula es igual a

$$\begin{aligned}f(Z_0^{]T_n}) + \int_{]0,t]} f'(Z_{s-}^{]T_n})\,dZ_s^{]T_n} + \frac{1}{2}\int_{]0,t]} f''(Z_{s-}^{]T_n})\,d[(Z^{]T_n})^c]_s \\ + \sum_{s\leq t}(\Delta f(Z_s^{]T_n}) - f'(Z_{s-}^{]T_n})\Delta Z_s^{]T_n}).\end{aligned}$$

Por lo tanto basta demostrar la fórmula para $Z^{]T_n}$ que satisface $|Z_t^{]T_n}| \leq n$.

3. Basta demostrarlo si f es un polinomio. Sea $|Z(t,\omega)| \leq c$ para todos t,ω y sean f_n polinomios tales que $f_n(x) \to f(x)$, $f_n'(x) \to f_n'(x)$, $f_n''(x) \to f''(x)$ uniformemente para $x \in [-c,c]$. Entonces si $j = 0,1,2$,

$$f_n^{(j)}(Z_t(\omega)) \to f^{(j)}(Z_t(\omega))$$

uniformemente en (t,ω) si $n \to \infty$.

Por el T.C.D. para integrales estocásticas 12.11

$$\int_{]0,t]} f_n'(Z_{s-})\,dZ_s \to \int_{]0,t]} f'(Z_{s-})\,dZ_s \quad \text{si} \quad n \to \infty$$

y

$$\int_{]0,t]} f_n''(Z_{s-})\,d[Z^c]_s \to \int_{]0,t]} f''(Z_{s-})\,d[Z^c]_s, \quad \text{si} \quad n \to \infty,$$

en probabilidad. Además para todos s,ω

$$\Delta f_n(Z_s) - f_n'(Z_{s-})\Delta Z_s \to \Delta f(Z_s) - f'(Z_{s-})\Delta Z_s, \text{ si } n \to \infty$$

y otra vez por la fórmula de Taylor

$$
\begin{aligned}
|\Delta f_n(Z_s) - f_n'(Z_{s-})\Delta Z_s| &\leq \int_0^1 (1-\theta)|f_n''(Z_{s-} + \theta\Delta\, dZ_s)|\, d\theta\, (\Delta Z_s)^2 \\
&\leq \sup_n \sup_{x\in[-c,c]} |f_n''(x)|(\Delta Z_s)^2
\end{aligned}
$$

ya que $Z_{s-} \in [-c, c]$ implica $(Z_{s-} + \theta\Delta Z_s) \in [-c, c]$ por convexidad. Por lo tanto se puede pasar al límite bajo las sumas.

Esto muestra que si la fórmula de Itô es cierta para f_n, $n = 1, 2, \ldots$ entonces también es cierta para f. Como la fórmula es lineal en f, basta demostrarla para f un monomio.

4. Su validez para todo monomio quedará claramente demostrada (por inducción) si se prueba la siguiente afirmación: si la fórmula vale para f entonces vale para $xf(x)$ (es obvio que la fórmula vale para $f \equiv$ constante). Mostraremos esto. Supongamos que vale para una f, i,e.

$$
f(Z_t) = f(Z_0) + \int_{]0,t]} f'(Z_{s-})\, dZ_s + A_t + B_t, \tag{13.1}
$$

donde A es un proceso continuo, B es un proceso de "puros saltos" y $A, B \in \mathcal{W}^0$.

Queremos obtener la fórmula para $g(x) = xf(x)$ ($g'(x) = f(x) + xf'(x)$, $g''(x) = 2f'(x) + xf''(x)$).

Aplicamos la fórmula de integración por partes 12.16 para obtener

$$
\begin{aligned}
g(Z_t) &= Z_t f(Z_t) \\
&= g(Z_0) + \int_{]0,t]} Z_{s-}\, df(Z_s) + \int_{]0,t]} f(Z_{s-})\, dZ_s + [Z, f(Z)]_t.
\end{aligned} \tag{13.2}
$$

Calculemos el segundo y el cuarto sumandos usando la forma de $f(Z_t)$ (de (13.1)) y de lo que es A:

$$
\begin{aligned}
\int_{]0,t]} Z_{s-}\, df(Z_s) &= \int_{]0,t]} Z_{s-}\, d\Big(\int_{]0,s]} f'(Z_{r-})\, dZ_r\Big) \\
&\quad + \int_{]0,t]} Z_{s-}\, dA_s + \int_{]0,t]} Z_{s-}\, dB_s \\
&= \int_{]0,t]} Z_{s-} f'(Z_{s-})\, dZ_s \\
&\quad + \frac{1}{2}\int_{]0,t]} Z_{s-}\, f''(Z_{s-})\, d[Z^c]_s + \sum_{s\leq t} (Z_{s-})\Delta B_s,
\end{aligned}
$$

(se usó $X \circ (Z \circ V) = XZ \circ V$).

$$\begin{aligned}
[Z, f(Z)]_t &= [Z, f(Z_0) + \int_{[0,\cdot]} f'(Z_{s-})\, dZ_s + A + B]_t \\
&= [Z, \int_{[0,\cdot]} f'(Z_{s-})\, dZ_s]_t + [Z, A]_t + [Z, B]_t \\
&\qquad \text{(por 12.27, 12.22)} \\
&= \int_{]0,t]} f'(Z_{s-})\, d[Z, Z]_s + 0 + \sum_{s \le t} \Delta Z_s \Delta B_s \\
&\qquad \text{(por 12.26)} \\
&= \int_{]0,t]} f'(Z_{s-})\, d[Z^c]_s + \sum_{s \le t} f'(Z_{s-})(\Delta Z_s)^2 + \sum_{s \le t} \Delta Z_s \Delta B_s.
\end{aligned}$$

Regresando a la igualdad (13.2) obtenemos, agrupando:

$$\begin{aligned}
g(Z_t) &= g(Z_0) + \int_{]0,t]} (Z_{s-} f'(Z_{s-}) + f(Z_{s-}))\, dZ_s \\
&\quad + \frac{1}{2} \int_{]0,t]} (Z_{s-} f''(Z_{s-}) + 2 f'(Z_{s-}))\, d[Z^c]_s \\
&\quad + \sum_{s \le t} Z_{s-} \Delta B_s + \sum_{s \le t} f'(Z_{s-})(\Delta Z_s)^2 + \sum_{s \le t} \Delta Z_s \Delta B_s.
\end{aligned}$$

Basta calcular ahora los tres últimos sumandos, usando lo que es B:

$$\begin{aligned}
&Z_{s-} \Delta B_s + f'(Z_{s-})(\Delta Z_s)^2 + \Delta Z_s \Delta B_s = Z_s \Delta B_s + f'(Z_{s-})(\Delta Z_s)^2 \\
&= Z_s(\Delta f(Z_s) - f'(Z_{s-}) \Delta Z_s) + f'(Z_{s-})(\Delta Z_s)^2 \\
&= Z_s f(Z_s) - Z_s f(Z_{s-}) - Z_s f'(Z_{s-}) \Delta Z_s + f'(Z_{s-})(\Delta Z_s)^2 \\
&= (Z_s f(Z_s) - Z_{s-} f(Z_{s-})) + (Z_{s-} f(Z_{s-}) - Z_s f(Z_{s-})) \\
&\quad - Z_s f'(Z_{s-}) \Delta Z_s + f'(Z_{s-})(\Delta Z_s)^2 \\
&= \Delta g(Z_s) - \Delta Z_s f(Z_{s-}) - \Delta Z_s (Z_s f'(Z_{s-}) - f'(Z_{s-}) \Delta Z_s) \\
&= \Delta g(Z_s) - \Delta Z_s (f(Z_{s-}) + Z_s f'(Z_{s-}) - f'(Z_{s-}) \Delta Z_s) \\
&= \Delta g(Z_s) - \Delta Z_s (f(Z_{s-}) + Z_{s-} f'(Z_{s-})) \\
&= \Delta g(Z_s) - \Delta Z_s g'(Z_{s-}).
\end{aligned}$$

Así la fórmula de Itô se cumple para $g(Z_s)$. □

13.4 Observación. Hemos mostrado la fórmula de Itô para el caso $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f\in\mathcal{C}^2(\mathbb{R})$.

Los casos siguientes: $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$, $f\in\mathcal{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{C})$, y también $f:\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}$, $f\in\mathcal{C}^2(\mathbb{R}^d)$ son inmediatos; para el primer caso basta tomar parte real y parte imaginaria de ambos lados y para el segundo caso el teorema queda así:

13.5 Fórmula de Itô para el caso multidimensional. *Sean $Z^1,Z^2,\ldots,Z^d$ semimartingalas y $f:\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}$ de la clase $\mathcal{C}^2$. Entonces $f(Z^1,Z^2,\ldots,Z^d)$ es una semimartingala y tenemos*

$$\begin{aligned} f(Z_t) &= f(Z_0)+\int_{]0,t]}(f'(Z_{s-}),\,dZ_s)+\frac{1}{2}\int_{]0,t]}(f''(Z_{s-}),d[Z^c]_s) \\ &\quad +\sum_{s\le t}(\Delta f(Z_s)-(f'(Z_{s-}),\Delta Z_s)), \end{aligned}$$

o explícitamente:

$$\begin{aligned} f(Z_t) = f(Z_0) &+ \sum_{j=1}^{d}\int_{]0,t]}\frac{\partial f}{\partial x^j}(Z_{s-})\,dZ_s^j \\ &+ \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{d}\sum_{k=1}^{d}\int_{]0,t]}\frac{\partial^2 f}{\partial x^j\partial x^k}(Z_{s-})\,d[(Z^j)^c,(Z^k)^c]_s \\ &+ \sum_{s\le t}(\Delta f(Z_s)-\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\partial f}{\partial x^j}(Z_{s-})\Delta Z_s^j). \end{aligned}$$

La demostración es análoga al caso de $\mathbb{R}$.

Las notaciones usadas son:

$$\begin{aligned} Z_t &= (Z_t^1,Z_t^2,\ldots,Z_t^d), \\ f' &= (\frac{\partial f}{\partial x^1},\ldots,\frac{\partial f}{\partial x^d}), \\ f'' &= (\frac{\partial^2 f}{\partial x^j\partial x^k})_{j,k=1,\ldots,d} - \text{matriz} \quad d\times d, \\ [Z^c] &= ([(Z^j)^c,\,(Z^k)^c])_{j,k=1,\ldots,d} - \text{matriz} \quad d\times d. \end{aligned}$$

Pero es importante ver que cuando se escribe $(f'',\,d[Z^c])$ no debe entenderse el producto de matrices sino *el producto escalar*

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} = ae+bf+dh+cg.$$

13.6 Observaciones. (a) Aplicando la fórmula de Itô a $f(x,y) = xy$ y a semimartingalas Z, U obtenemos *la fórmula de integración por partes* 12.16. Sin embargo no podemos afirmar que hemos encontrado una nueva demostración de esta fórmula, pues en la prueba de la fórmula de Itô usamos integración por partes.

(b) Aplicando la fórmula de Itô a una función $f(t,x)$, $t \in \mathbb{R}_+$, $x \in \mathbb{R}$, de la clase $\mathcal{C}^2$, y a una semimartingala Z obtenemos (considerando la semimartingala determinista $Z_t^1 \equiv t$)

$$\begin{aligned} f(t,Z_t) &= f(0,Z_0) + \int_{]0,t]} \frac{\partial f}{\partial t}(s,Z_{s-})ds + \int_{]0,t]} \frac{\partial f}{\partial x}(s,Z_{s-})dZ_s \\ &+ \frac{1}{2}\int_{]0,t]} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(s,Z_{s-})\, d[Z^c]_s + \sum_{s\leq t}(\Delta f(s,Z_s) - \frac{\partial f}{\partial x}(s,Z_{s-})\Delta Z_s). \end{aligned}$$

Observemos que en esta fórmula no aparece $\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}$. De hecho es fácil demostrar (por aproximación) que la fórmula se cumple si $f(\cdot,x) \in \mathcal{C}^1$, $f(t,\cdot) \in \mathcal{C}^2$.

(c) La fórmula de Itô es muy importante pues es la base del cálculo estocástico. Esta fórmula corresponde (y generaliza) al *teorema fundamental del cálculo* en el cálculo diferencial clásico. Si comparamos esas dos fórmulas vemos que, formalmente, el nuevo término en la fórmula estocástica es el que contiene a $[Z^c]$.

A continuación daremos varias aplicaciones de la fórmula de Itô. Empecemos con caracterizaciones del proceso de Wiener.

13.7 Teorema de Lévy. *Sea X una martingala local continua tal que $(X^2 - t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ es una martingala local y $X_0 = 0$. Entonces X es un proceso de Wiener (con respecto a la filtración respecto a la cual X es martingala local, y por lo tanto es un proceso de Wiener con respecto a la filtración generada por él mismo).*

Demostración. Como $(X^2 - t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ es una martingala local, $\langle X\rangle_t = [X]_t = t$. Por la desigualdad de Doob (ver 11.21) sabemos que

$$E(\sup_{s\leq t} X_s^2) \leq 4E(\langle X\rangle_t) = 4t.$$

Por lo que $X_t \in L^2(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ y además $X \in DL$. Esto muestra que $X \in \mathcal{M}^{2c}$ (ver 11.9(b)).

Para terminar la demostración basta probar que

$$E(e^{ih(X_t-X_s)}|\mathfrak{F}_s) = e^{-\frac{1}{2}(t-s)h^2} \quad \forall h \in \mathbb{R}_+ \quad \forall t \geq s \geq 0. \tag{13.3}$$

En efecto, supongamos que (13.3) se cumple y $0 \leq s \leq t$. Claramente (13.3) implica $E(e^{ih(X_t-X_s)}) = e^{-\frac{1}{2}(t-s)h^2}$ por lo tanto $X_t - X_s$ tiene la distribución $\mathcal{N}(0, t-s)$. Hay que probar aún que $X_t - X_s$ es independiente de $\mathfrak{F}_s$. Sea η una variable aleatoria arbitraria, $\mathfrak{F}_s$-medible. Tenemos para todos $h, h' \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
&E(e^{ih(X_t-X_s)+ih'\eta}) \\
&= E(E(e^{ih(X_t-X_s)+ih'\eta}|\mathfrak{F}_s)) = E(e^{ih'\eta}E(e^{ih(X_t-X_s)}|\mathfrak{F}_s)) \\
&\overset{(13.3)}{=} E(e^{ih'\eta}e^{-\frac{1}{2}(t-s)h^2}) = e^{-\frac{1}{2}(t-s)h^2}E(e^{ih'\eta}) \\
&= E(e^{ih(X_t-X_s)})E(e^{ih'\eta}),
\end{aligned}$$

por lo tanto $X_t - X_s$ es independiente de $\mathfrak{F}_s$, y X es un proceso de Wiener.

Mostraremos ahora que (13.3) es válido. Consideremos la fórmula de Itô para $f(x) = e^{ihx}$. Tenemos $f'(x) = ihe^{ihx}$, $f''(x) = -h^2e^{ihx}$ y $X = X^c$, por lo tanto

$$\begin{aligned}
e^{ihX_t} &= 1 + ih\int_{]0,t]} e^{ihX_r}\,dX_r - \frac{1}{2}h^2\int_{]0,t]} e^{ihX_r}\,dr \\
&= e^{ihX_s} + ih\Big(\int_{]0,t]} e^{ihX_r}\,dX_r - \int_{]0,s]} e^{ihX_r}\,dX_r\Big) - \frac{1}{2}h^2\int_{]s,t]} e^{ihX_r}\,dr. \qquad (13.4)
\end{aligned}$$

Fijemos $F \in \mathfrak{F}_s$ y sea $g(r) = \int_F e^{ihX_{r+s}}\,dP$. Ya sabemos que $X \in \mathcal{M}^2$ y por lo tanto $\int_{]0,\cdot]} e^{ihX_r}\,dX_r$ es una martingala 0 en 0; entonces, tomando $\int_F \cdot\, dP$ en ambos lados de (13.4) obtenemos

$$\begin{aligned}
g(t-s) &= g(0) + 0 - \frac{1}{2}h^2\int_{]s,t]} g(r-s)\,dr \\
&= g(0) - \frac{1}{2}h^2\int_{]0,t-s]} g(r)\,dr.
\end{aligned}$$

Hemos obtenido una ecuación integral para la función g. Esta ecuación tiene una única solución de la forma

$$g(t-s) = g(0)e^{-\frac{1}{2}h^2(t-s)},$$

por lo tanto

$$\int_F e^{ihX_t}\,dP = e^{-\frac{1}{2}h^2(t-s)}\int_F e^{ihX_s}\,dP,$$

y esto vale para cada $F \in \mathfrak{F}_s$, entonces

$$E(e^{ihX_t}|\mathfrak{F}_s) = e^{ihX_s}e^{-\frac{1}{2}h^2(t-s)},$$

lo cual es equivalente a (13.3). □

En el caso multidimensional tenemos algo muy semejante.

13.8 Teorema. *Sean $X^1,\ldots,X^d$ martingalas locales continuas, $X_0^j = 0$ $(j = 1,2,\ldots,d)$ tales que $\langle X^j\,,\,,X^k\rangle_t = \delta_{jk}t$. Entonces el proceso d-dimensional $(X^1,\ldots,X^d) \doteq X$ es un proceso de Wiener c.r.a la filtración dada.*

Demostración. Idéntica (si $h \in \mathbb{R}^d$, $t \geq s$, se demuestra que

$$E(e^{i\langle h\,,X_t - X_s\rangle}|\mathfrak{F}_s) = e^{-\frac{1}{2}(t-s)|h|^2}).$$

□

13.9 Teorema (el problema de la martingala para el proceso de Wiener). *Un proceso $X = (X_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$, $X_0 = 0$, continuo adaptado c.r.a una filtración $(\mathfrak{F}_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ es un proceso de Wiener c.r.a esa filtración si y sólo si para cada función $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f\in C^2$, f' acotada, el proceso M^f definido por*

$$M_t^f = f(X_t) - f(0) - \frac{1}{2}\int_{]0,t]} f''(X_s)\,ds \tag{13.5}$$

es una martingala.[2]

Demostración. $\Rightarrow$: Por la fórmula de Itô tenemos que $M_t^f = \int_{]0,t]} f'(X_s)\,dX_s$, ya que en este caso $[X]_t = t$ y el proceso es continuo por hipótesis. Como f' es acotada sabemos que

$$\int_{]0,t]} f'(X_s)\,dX_s$$

es una martingala.

$\Leftarrow$: Consideremos la función $f(x) = e^{ihx}$. Su parte real y su parte imaginaria satisfacen las hipótesis. Entonces si $s < t$ y $F \in \mathfrak{F}_s$, el hecho de que M_t^f sea martingala nos permite calcular:

$$\begin{aligned}
\int_F (e^{ihX_t} - e^{ihX_s})\,dP &= \frac{1}{2}\int_{]s,t]}\int_F f''(X_r)\,dP\,dr \\
&= -\frac{h^2}{2}\int_{]s,t]}\int_F e^{ihX_r}\,dP\,dr.
\end{aligned}$$

Si definimos $g(r) = \int_F e^{ihX_{s+r}}\,dP$, la ecuación anterior se escribe así:

$$g(t-s) - g(0) = -\frac{h^2}{2}\int_{]s,t]} g(r-s)\,dr = -\frac{h^2}{2}\int_{]0,t-s]} g(r)\,dr,$$

[2]Compare con la fórmula (7.4).

i.e., $g(t-s) = g(0) - (h^2/2)\int_{]0,t-s]} g(r)\,dr$.

Razonando como al final de la demostración del Teorema 13.7, se concluye que X es un proceso de Wiener c.r.a la filtración dada. □

Otra versión de este teorema, sin suponer que f' es acotada:

13.10 Teorema. *Un proceso $X = (X_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$, $X_0 = 0$, continuo y adaptado c.r.a una filtración es un proceso de Wiener si y sólo si para cada función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f\in\mathcal{C}^2$, el proceso M_t^f definido por (13.5) es una martingala local.*

Demostración. $\Rightarrow$: Igual que el caso anterior ($\int_{]0,t]} f'(X_s)\,dX_s$ es una martingala local (ver 12.2 y 12.8)).

$\Leftarrow$: Es una consecuencia inmediata del teorema de Lévy 13.7 porque para $f(x) = x^2$ se tiene $M_t^f = X_t^2 - t$. □

13.11 Teorema (caracterización del proceso de Poisson). *Sea $(\mathfrak{F}_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ una filtración fija. Sean $0 < T_1 < T_2 < \cdots$ tiempos de paro y definamos un proceso*

$$N_t = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{1}_{[T_n,\infty[}(t), \quad t \geq 0.$$

Sea $\lambda > 0$. $(N_t)_t$ es un proceso de Poisson con parámetro λ c.r.a la filtración dada si y sólo si $(N_t - \lambda t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ es una martingala local (c.r.a la filtración dada).

Demostración. $\Rightarrow$: Ya lo sabemos.

$\Leftarrow$: 1. Se tiene $T_n \uparrow \infty$ (porque $|N_t - \lambda t| < \infty$ c.s para cada $t \geq 0$). Denotemos $M_t = N_t - \lambda t$. Los saltos de esta martingala local son acotados, de hecho $|\Delta M_t| \leq 1$ y $M_0 = 0$. Por la Proposición 11.9(d) tenemos que $M \in \mathcal{M}^2_{Loc}$.

Lo que queremos mostrar ahora es que $M \in \mathcal{M}^2$: $N_t = M_t + \lambda t$ implica $[N]_t = [M]_t$ ya que M, $(\lambda t)_t$ pertenecen a $\mathcal{W}^0$ y $(\lambda t)_t$ es un proceso continuo (ver 12.22).

Por otro lado, nuevamente por 12.22 tenemos que

$$[N]_t = \sum_{s\leq t} (\Delta N_s)^2 = N_t.$$

Ahora bien, por 11.21

$$E(\sup_{s\leq t} M_s^2) \leq 4E([M]_t) = 4E(N_t) = 4\lambda t < \infty$$

(la última igualdad se obtiene localizando a M y pasando al límite cuando $n \to \infty$). Por lo tanto M es una martingala y

$$E(\sup_{s \le t} M_s^2) < \infty,$$

por lo cual $M \in \mathcal{M}^2$.

2. (a) Para cada T tiempo de paro, $E(N_T) = \lambda E(T)$. En efecto, $0 = E(M_{T \wedge t})$ para todo t, por lo cual $E(N_{T \wedge t}) = \lambda E(T \wedge t)$ para todo t. Haciendo t tender a $+\infty$ se obtiene $E(N_T) = \lambda E(T)$.

(b) Si S, T son tiempos de paro, $S < T$, y $E(T) < \infty$ entonces $E(M_T | \mathfrak{F}_S) = M_S$ (gracias a la hipótesis $E(T) < \infty$, se tiene el resultado aún sin suponer que M sea uniformemente integrable). En efecto, para todo t, M^t es una martingala uniformemente integrable (M^t es M parada en t, tiempo determinista), por lo tanto $E(M_T^t | \mathfrak{F}_S) = M_S^t$, por lo que $E(N_{t \wedge T} | \mathfrak{F}_S) = \lambda E(t \wedge T | \mathfrak{F}_S) + M_{t \wedge S}$.

Usando el teorema de convergencia monótona y haciendo $t \uparrow \infty$ se obtiene el resultado.

3. Veremos ahora que basta demostrar que T_1 es independiente de $\mathfrak{F}_0$ y distribuido exponencialmente con parámetro λ. En efecto, supongamos esto. Para n fijo definamos $\mathfrak{F}_t^1 = \mathfrak{F}_{T_n + t}$; $(\mathfrak{F}_t^1)_{t \in \mathbb{R}_+}$ es una nueva filtración con las condiciones usuales, y $T_k^1 = T_{n+k} - T_n$ es un tiempo de paro c.r.a la nueva filtración $(\mathfrak{F}_t^1)_{t \in \mathbb{R}_+}$, para todo $k \in \mathbb{N}$.

Ahora podemos considerar

$$N_t^1 = N_{t+T_n} - N_{T_n} = N_{t+T_n} - n \quad \text{y} \quad M_t^1 = N_t^1 - \lambda t.$$

Es fácil ver que $N_t^1 = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{1}_{[T_k^1, \infty[}(t)$.

Por otra parte, M^1 es una martingala c.r.a $(\mathfrak{F}_t^1)_{t \in \mathbb{R}_+}$. En efecto, sea $s < t$,

$$\begin{aligned} E(M_t^1 | \mathfrak{F}_s^1) &= E(N_{t+T_n} - N_{T_n} - \lambda t | \mathfrak{F}_{s+T_n}) \\ &= E(N_{t+T_n} - \lambda(t + T_n) - (N_{T_n} - \lambda T_n) | \mathfrak{F}_{s+T_n}). \end{aligned} \tag{13.6}$$

Tenemos $n = E(N_{T_n})$ y por 2(a), $E(N_{T_n}) = \lambda E(T_n)$ por lo tanto $E(t + T_n) < \infty$.

Podemos entonces aplicar 2(b) a los tiempos de paro $s + T_n$ y $t + T_n$ y obtener

$$E(N_{t+T_n} - \lambda(t + T_n) | \mathfrak{F}_{s+T_n}) = N_{s+T_n} - \lambda(s + T_n).$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} (13.6) &= N_{s+T_n} - \lambda(s + T_n) - (N_{T_n} - \lambda T_n) \\ &= N_{s+T_n} - N_{T_n} - \lambda s = N_s^1 - \lambda s = M_s^1, \end{aligned}$$

es decir, $E(M_t^1|\mathfrak{F}_s^1) = M_s^1$ y por lo tanto M^1 es una martingala. En consecuencia, por la suposición $T_1^1 = T_{n+1} - T_n$ es independiente de $\mathfrak{F}_0^1 = \mathfrak{F}_{T_n}$ y tiene distribución exponencial con parámetro λ. Esto implica que $T_1, T_2 - T_1, T_3 - T_2, \ldots$ son i.i.d. exponenciales con parámetro λ y por lo tanto N es un proceso de Poisson con parámetro λ.

4. Por último demostremos que T_1 es independiente de $\mathfrak{F}_0$ y distribuido exponencialmente con parámetro λ. Fijemos $h \in \mathbb{R}$ arbitrario y escribamos la fórmula de Itô para e^{ihM_t} (i.e. $f(x) = e^{ihx}$) y sustituyamos $t = T_1$:

$$\begin{aligned} e^{ihM_{T_1}} &= 1 + ih \int_{]0,T_1]} e^{ihM_{s-}}\, dM_s + \frac{1}{2}\int_{]0,T_1]} f''(M_{s-})\, d[M^c]_s \\ &\quad + \sum_{s \le T_1} (f(M_s) - f(M_{s-}) - f'(M_{s-})\Delta M_s). \end{aligned}$$

Como $M \in \mathcal{W}^0$, el segundo sumando es una integral de Stieltjes, y sabemos que $M \in \mathcal{W}^0$ implica $M^c = 0$ (ver 9.13), por lo que el tercer sumando se anula.

Veamos el cuarto sumando:

$$\sum_{s \le T_1} (f(M_s) - f(M_{s-}) - f'(M_{s-})\Delta M_s) = f(M_{T_1}) - f(M_{T_1-}) - f'(M_{T_1-})$$

puesto que T_1 es el primer salto del proceso y $\Delta M_{T_1} = 1$. Por lo tanto:

$$e^{ihM_{T_1}} = 1 + ih \int_{]0,T_1]} e^{ihM_{s-}}\, dM_s + (e^{ihM_{T_1}} - e^{ihM_{T_1-}} - ihe^{ihM_{T_1-}})$$

y por lo tanto

$$0 = 1 + ih \int_{]0,T_1]} e^{ihM_{s-}}\, dM_s + e^{ihM_{T_1-}}(-1 - ih).$$

Pero $e^{ihM_{T_1-}} = e^{-ih\lambda T_1}$ por lo que obtenemos

$$e^{-ih\lambda T_1}(1 + ih) = 1 + ih \int_{]0,T_1]} e^{ihM_{s-}}\, dM_s. \tag{13.7}$$

Por otro lado

$$\begin{aligned} E\Big(\int_{]0,\infty[} |\mathbf{1}_{]0,T_1]} e^{ihM_{s-}}|^2\, d\langle M\rangle_s\Big) &= E\Big(\int_{]0,\infty[} |\mathbf{1}_{]0,T_1]} e^{ihM_{s-}}|^2 \lambda\, ds\Big) \\ &\le \lambda E T_1 < \infty \end{aligned}$$

ya que en virtud de 2(a), $\lambda E(T_1) = E(N_{T_1}) = 1$. Como $M \in \mathcal{M}^2$ (por 1), en consecuencia obtenemos que el proceso $X = \int_{]0,T_1]} e^{ihM_{s-}}\, dM_s$ pertenece a $\mathcal{M}^2_\infty$ (ver 9.2) y vale 0 en 0. Entonces $E(X_\infty) = 0$ y $E(X_\infty|\mathfrak{F}_0) = X_0 = 0$. Pero

$$X_\infty = \int_{]0,T_1]} e^{ihM_{s-}}\, dM_s,$$

por lo que

$$E(\int_{]0,T_1]} e^{ihM_{s-}}\, dM_s|\mathfrak{F}_0) = 0. \tag{13.8}$$

Tomemos ahora esperanza condicional bajo $\mathfrak{F}_0$ en (13.7):

$$E(e^{-ih\lambda T_1}(1+ih)|\mathfrak{F}_0) = 1 + ihE(\int_{]0,T_1]} e^{ihM_{s-}}\, dM_s|\mathfrak{F}_0) = 1$$

por (13.8), es decir $E(e^{ih\lambda T_1}|\mathfrak{F}_0) = 1/(1+ih)$, y esto vale para todo $h \in \mathbb{R}$, lo que implica (por un argumento análogo al usado en la demostración del teorema de Lévy 13.7) que T_1 es independiente de $\mathfrak{F}_0$ y T_1 tiene distribución exponencial con parámetro λ. □

Otra aplicación importante de la fórmula de Itô es la *fórmula exponencial*.

13.12 Teorema. *Sea Z una semimartingala, $Z_0 = 0$, y X_0 una variable aleatoria $\mathfrak{F}_0$-medible. La ecuación*

$$X_t = X_0 + \int_{]0,t]} X_{s-}\, dZ_s$$

tiene solución única (módulo indistinguibilidad) dada por la fórmula:

$$X_t = X_0 \exp(Z_t - \frac{1}{2}[Z^c]_t) \prod_{s\leq t}(1+\Delta Z_s)\exp(-\Delta Z_s) \tag{13.9}$$

(donde el producto converge absolutamente para toda $t \geq 0$, c.s.).

Demostración. 1. Primero veremos que X_t dado por (13.9) está bien definido para cada $t \geq 0$. Sea

$$V_t = \prod_{s\leq t}(1+\Delta Z_s)\exp(-\Delta Z_s).$$

Demostraremos que el producto converge absolutamente, que $V \in \mathcal{W}^0$ y es puramente discontinuo(3) (i.e., $V_t = V_0 + \sum_{s\leq t}\Delta V_s$) y que $V_{t-} = \prod_{s<t}(1+\Delta Z_s)\exp(-\Delta Z_s)$.

Fijemos $\omega \in \Omega$. Tenemos $V_t(\omega) = V_t'(\omega)\, V_t''(\omega)$, donde

$$\begin{aligned} V_t' &= \prod_{s\leq t}(1+\Delta Z_s \mathbf{1}_{\{|\Delta Z_s|>\frac{1}{2}\}})\exp(-\Delta Z_s \mathbf{1}_{\{|\Delta Z_s|>\frac{1}{2}\}}), \\ V_t'' &= \prod_{s\leq t}(1+\Delta Z_s \mathbf{1}_{\{|\Delta Z_s|\leq\frac{1}{2}\}})\exp(-\Delta Z_s \mathbf{1}_{\{|\Delta Z_s|\leq\frac{1}{2}\}}). \end{aligned}$$

(3)Advertencia: un proceso puramente discontinuo *como martingala*, i.e. que pertenece a $\mathcal{M}^{2d}$, en general *no* tiene trayectorias puramente discontinuas. Las dos nociones de ser puramente discontinuo son distintas.

Por ser cadlag, $Z_{\bullet}(\omega)$ tiene sólo un número finito de saltos mayores que $1/2$ en $[0,t]$, para cada $t \geq 0$, por lo tanto $V'_{\bullet}(\omega)$ toma sólo un número finito de valores en $[0,t]$, para cada $t \geq 0$. En consecuencia V' es puramente discontinuo, $V' \in \mathcal{W}^0$ y $V'_{t-} = \prod_{s<t}(\cdots)$.

Basta probar que V'' tiene las mismas propiedades. Para lograrlo observemos que cada factor en el producto es mayor que 0, por lo tanto la convergencia absoluta del producto a un límite mayor que 0 es equivalente a la convergencia absoluta de la serie de logaritmos de los factores.

Podemos escribir

$$\log V''_t = \sum_{s\leq t}(\log(1+\Delta Z_s \mathbf{1}_{\{|\Delta Z_s|\leq 1/2\}}) - \Delta Z_s \mathbf{1}_{\{|\Delta Z_s|\leq 1/2\}}).$$

Como $|\log(1+u)-u| \leq cu^2$ para $|u| \leq \frac{1}{2}$ y $c =$ una constante, tenemos

$$|\log V''_t| \leq \sum_{s\leq t} |\log(1+\cdots) - \cdots| \leq c\sum_{s\leq t}(\Delta Z_s)^2 < \infty$$

(por 12.20). En consecuencia $\log V'' \in \mathcal{W}^0$, es puramente discontinuo y $\log V''_{t-} = \sum_{s<t}(\cdots)$.

Ahora apliquemos la fórmula de Itô a $f(x) = e^x$ y a la semimartingala $\log V''$. Tenemos

$$\begin{aligned} V''_t &= V''_0 + \int_{]0,t]} V''_{s-}\, d(\log V''_s) + \sum_{s\leq t}(\Delta V''_s - V''_{s-}(\Delta \log V''_s)) \\ &= V''_0 + \sum_{s\leq t} \Delta V''_s, \end{aligned}$$

porque la integral vale $\sum_{s\leq t} V''_{s-}(\Delta \log V''_s)$ por ser $\log V''$ puramente discontinuo. Así hemos demostrado que V'' es puramente discontinuo, por lo tanto es claro que $V'' \in \mathcal{W}^0$ y la fórmula para V''_{t-} también se sigue fácilmente.

2. Demostraremos que X dado por (13.9) satisface la ecuación. Sea $Y = Z - \frac{1}{2}[Z^c]$. Obviamente Y es una semimartingala y se tiene

$$X_t = X_0 V_t e^{Y_t}.$$

Podemos aplicar la fórmula de Itô multidimensional 13.5 a la función $f(y,v) = ve^y$ y a las semimartingalas V, Y.

Observemos que $Y^c = Z^c$, $V^c = 0$ porque $[Z^c]$ y $V \in \mathcal{W}^0$ (ver 11.27). Además $Y_0 = 0$ y $V_0 = 1$. Entonces tenemos:

$$\begin{aligned} X_t &= X_0 + X_0 \int_{]0,t]} V_{s-} e^{Y_{s-}}\, dY_s + X_0 \int_{]0,t]} e^{Y_{s-}}\, dV_s \\ &\quad + \frac{1}{2} X_0 \int_{]0,t]} V_{s-} e^{Y_{s-}}\, d[Z^c]_s + \sum_{s\leq t}(\Delta X_s - X_0 V_{s-} e^{Y_{s-}} \Delta Y_s - X_0 e^{Y_{s-}} \Delta V_s). \end{aligned}$$

X_0 es $\mathfrak{F}_0$-medible, por lo tanto, por 12.13, podemos pasarlo bajo el signo de la integral en el segundo sumando. Entonces el segundo sumando es igual a

$$\int_{]0,t]} X_{s-}\, dY_s = \int_{]0,t]} X_{s-}\, dZ_s - \frac{1}{2}\int_{]0,t]} X_{s-}\, d[Z^c]_s.$$

Sabemos que V es puramente discontinuo, por lo tanto

$$\begin{aligned}
\text{tercer sumando} &= \sum_{s\leq t} X_0 e^{Y_{s-}} \Delta V_s;\\
\text{cuarto sumando} &= \frac{1}{2}\int_{]0,t]} X_{s-}\, d[Z^c]_s;\\
\text{quinto sumando} &= \sum_{s\leq t}(\Delta X_s - X_{s-}\Delta Y_s) - \sum_{s\leq t} X_0 e^{Y_{s-}}\Delta V_s.
\end{aligned}$$

En consecuencia obtenemos

$$X_t = X_0 + \int_{]0,t]} X_{s-}\, dZ_s + \sum_{s\leq t}(\Delta X_s - X_{s-}\Delta Y_s).$$

Entonces para ver que X satisface la ecuación basta demostrar que $\Delta X_s = X_{s-}\Delta Y_s$.

Tenemos

$$\begin{aligned}
\Delta X_s &= X_0 V_s e^{Y_s} - X_0 V_{s-} e^{Y_{s-}}\\
&= X_0 V_{s-}(1+\Delta Z_s)e^{-\Delta Z_s} e^{Y_{s-}} e^{\Delta Y_s} - X_0 V_{s-} e^{Y_{s-}}\\
&= X_0 V_{s-} e^{Y_{s-}}((1+\Delta Z_s)e^{-\Delta Z_s} e^{\Delta Y_s} - 1) = X_{s-}\Delta Y_s
\end{aligned}$$

porque $\Delta Y = \Delta Z$.

3. La unicidad se sigue de un teorema más general, el cual probaremos más adelante (ver 15.1). □

He aquí una aplicación de la fórmula exponencial.

13.13 Proposición. *Sean Z y A dos procesos adaptados continuos, $Z_0 = 0$, A creciente y $A_0 = 0$. Para cada $\lambda \in \mathbb{R}$, definimos el proceso*

$$\Phi_t^\lambda = \exp(\lambda Z_t - \frac{\lambda^2}{2} A_t)$$

(continuo y adaptado). Son equivalentes:

(a) $Z \in \mathcal{M}^2_{Loc}$ *y* $[Z] = A$.
(b) $\Phi^\lambda \in \mathcal{M}^1_{Loc}$, *para cada* $\lambda \in \mathbb{R}$.

Demostración. (a) $\Rightarrow$ (b): Aplicando el teorema anterior a λZ (continuo) es inmediato que Φ^λ satisface la ecuación $\Phi^\lambda_t = 1 + \lambda \int_{]0,t]} \Phi^\lambda_s \, dZ_s$.

Φ^λ es continuo y adaptado, por lo tanto es predecible localmente acotado y sabemos que Z es una martingala local, entonces $(\int_{]0,t]} \Phi^\lambda_s \, dZ_s)_{t \in \mathbb{R}_+}$ es una martingala local, lo que muestra que $\Phi^\lambda \in \mathcal{M}^1_{Loc}$, y por lo tanto $\Phi^\lambda \in \mathcal{M}^2_{Loc}$ porque es continua y $\Phi^\lambda_0 = 1$.

(b) $\Rightarrow$ (a): Definimos los siguientes tiempos de paro:

$$T_n = \inf\{t : (|Z_t| + A_t) \geq n\}$$

(T_n es efectivamente tiempo de paro porque Z y A son progresivamente medibles). Por continuidad,

$$|Z_{t \wedge T_n}| \leq n \quad \text{y} \quad |A_{t \wedge T_n}| \leq n,$$

por lo tanto $(\Phi^\lambda)^{T_n}$ es una martingala local acotada (para λ fijo), lo que muestra que es de hecho una martingala (ver 11.9(b)). Así obtenemos para todos $s < t$ y $F \in \mathfrak{F}_s$,

$$\int_F \exp(\lambda Z^{T_n}_t - \frac{\lambda^2}{2} A^{T_n}_t) \, dP = \int_F \exp(\lambda Z^{T_n}_s - \frac{\lambda^2}{2} A^{T_n}_s) \, dP. \tag{13.10}$$

Por otra parte, $g(\lambda) = (\Phi^\lambda_t)^{T_n}$ (ω, t fijos) es una función de clase C^∞ en λ,

$$|\frac{dg}{d\lambda}| = |\frac{d}{d\lambda}(\Phi^\lambda_t)^{T_n}| = |(Z^{T_n}_t - \lambda A^{T_n}_t)\Phi^\lambda_{t \wedge T_n}| \leq (n + \lambda_0 n) e^{\lambda_0 n + \frac{\lambda_0^2}{2} n}$$

para $|\lambda| \leq \lambda_0$.

Podemos entonces derivar (con respecto a λ) en (13.10) bajo la integral y obtener:

$$\int_F (Z^{T_n}_t - \lambda A^{T_n}_t)\Phi^\lambda_{t \wedge T_n} \, dP = \int_F (Z^{T_n}_s - \lambda A^{T_n}_s)\Phi^\lambda_{s \wedge T_n} \, dP. \tag{13.11}$$

Para $\lambda = 0$, (13.11) toma la forma:

$$\int_F Z^{T_n}_t \, dP = \int_F Z^{T_n}_s \, dP, \quad \forall s < t \quad \text{y} \quad \forall F \in \mathfrak{F}_s,$$

lo que muestra que Z^{T_n} es una martingala y entonces $Z \in \mathcal{M}^1_{Loc}$ (y por lo tanto $Z \in \mathcal{M}^2_{Loc}$ porque Z es continua) ya que $T_n \uparrow \infty$.

Por último, para mostrar que $[Z] = A$, se toma la segunda derivada de Φ^λ con respecto a λ (t, ω fijos):

$$|\frac{d^2}{dt^2}\Phi^\lambda_{t\wedge T_n}| = |(Z_t^{T_n} - \lambda A_t^{T_n})^2\Phi^\lambda_{t\wedge T_n} - A_t^{T_n}\Phi^\lambda_{t\wedge T_n}| \leq c(n, \lambda_0)$$

si $|\lambda| \leq \lambda_0$, donde $c(n, \lambda_0)$ es una constante.

Podemos entonces derivar nuevamente (13.11) bajo la integral y tomar $\lambda = 0$ para obtener:

$$\int_F ((Z_t^{T_n})^2 - A_t^{T_n})\,dP = \int_F ((Z_s^{T_n})^2 - A_s^{T_n})\,dP, \tag{13.12}$$

la cual es válida para toda $s < t$ y toda $F \in \mathfrak{F}_s$. Por lo tanto $(Z^{T_n})^2 - A^{T_n} = (Z^2 - A)^{T_n}$ es una martingala. Como A es continuo y creciente y $T_n \uparrow \infty$ se sigue que $A = \langle Z \rangle = [Z]$. □

13.14 Observación. De la demostración se sigue que se puede reemplazar la condición (b) de 13.13 por

(b') $\Phi^\lambda \in \mathcal{M}^1_{Loc}$ para todo λ en una vecindad de 0.

13.15 Corolario. *Sea Z un proceso continuo y adaptado, $Z_0 = 0$. Entonces Z es un proceso de Wiener si y sólo si para cada $\lambda \in \mathbb{R}$ el proceso $(e^{\lambda Z_t - \frac{\lambda^2}{2}t})_{t\in\mathbb{R}_+}$ es una martingala local.*

13.16 Corolario. *Si $Z \in \mathcal{M}^{1c}_{Loc}$, $[Z] = A$ y $E(\int_{]0,t]} e^{2\lambda Z_s}\,dA_s) < \infty$, entonces $\Phi^\lambda \in \mathcal{M}^2$.*

Demostración. Sabemos que $\Phi^\lambda_t = 1 + \lambda \int_{]0,t]} \Phi^\lambda_s\,dZ_s$ (fórmula exponencial), por lo tanto

$$E(\sup_{s\leq t}(\Phi^\lambda_s)^2) \leq 2 + 2\lambda^2 E(\sup_{s\leq t}(\int_{]0,t]} \Phi^\lambda\,dZ)^2).$$

Pero si $M = \int \Phi^\lambda_s\,dZ_s$ entonces (por 11.21)

$$E(\sup_{s\leq t} M_s^2) \leq 4E(\langle M \rangle_t) = 4E\int_{]0,t]} (\Phi^\lambda_s)^2\,dA_s,$$

por lo tanto

$$\begin{aligned} E(\sup_{s\leq t}(\Phi^\lambda_s)^2) &\leq 2 + 8\lambda^2 E(\int_{]0,t]} \exp(2\lambda Z_u - \lambda^2 A_u)\,dA_u) \\ &\leq 2 + 8\lambda^2 E(\int_{]0,t]} \exp(2\lambda Z_u)\,dA_u) < \infty. \end{aligned}$$

□

13.17 Corolario. *Si $\Phi^\lambda \in \mathcal{M}^1_{Loc}$ para cada $\lambda \in \mathbb{R}$ y $E(A_t) < \infty$ para cada $t \geq 0$, entonces $Z \in \mathcal{M}^2$.*

Demostración. Sabemos que $Z \in \mathcal{M}^2_{Loc}$ y $A = [Z]$, por lo tanto

$$E(\sup_{s \leq t} Z_s^2) \leq 4E([Z]_t) = 4E(A_t) < \infty.$$

□

Para terminar este capítulo demostraremos un teorema de Jacod que da una descripción completa de las semimartingalas con incrementos independientes (ver 11.26(b),(c)).

13.18 Teorema. *Sea Z un proceso cadlag con incrementos independientes*[4] *con su filtración usual generada (o más generalmente, un proceso cadlag adaptado, tal que $Z_t - Z_s$ es independiente de $\mathfrak{F}_s$ para todos $t > s \geq 0$). Entonces Z es una semimartingala si y sólo si para todo $u \in \mathbb{R}$ la función $\varphi_u(t) := Ee^{iuZ_t}$ tiene variación finita en cada intervalo acotado.*

13.19 Lema. *Fijemos $u \in \mathbb{R}$ y sea $t_n := \inf\{t : \varphi_u(t) = 0\}$ $(\leq \infty)$.*
(a) *φ_u es cadlag y $\varphi_u(t) = 0$ si $t \geq t_u$, $\varphi_u(t-) \neq 0$ si $t \leq t_u$.*
(b) *El proceso $Y^{(u)}$ definido por*

$$Y_t^{(u)} = \begin{cases} \dfrac{e^{iuZ_t}}{\varphi_u(t)} & si\ t < t_u \\ Y_{t_u-}^{(u)} & si\ t_u \leq t < \infty \end{cases}$$

es una martingala.

Demostración del lema. (a) Es claro que φ_u es cadlag. Para $s \leq t$ denotemos $\psi_u(s,t) = Ee^{iu(Z_t - Z_s)}$. Por la independencia de los incrementos tenemos

$$\varphi_u(t) = \psi_u(s,t)\varphi_u(s). \tag{13.13}$$

Si $t_n < \infty$ entonces, al poner en (13.13) $s = t_u$, vemos que $\varphi_u(t) = 0$ para $t \geq t_u$ (ya que $\varphi_u(t_u) = 0$). Además (13.13) implica $0 \neq \varphi_u(t) = \psi_u(s-,t)\varphi(s-)$ para $s \leq t < t_u$, por lo tanto $\varphi_u(s-) \neq 0$ si $s < t_u$. Aún falta probar que $\varphi_u(t_u-) \neq 0$ si $t_u < \infty$. Supongamos que $\varphi_u(t_u-) = 0$. Nuevamente por (13.13) tenemos $0 = \varphi_u(t_u-) = \psi_u(s,t-)\varphi_u(s)$ para todos

[4] Recordemos (ver 1.8) que esto significa que $Z_0, Z_{t_1} - Z_0, \ldots, Z_{t_n} - Z_{t_{n-1}}$ son v.a. independientes si $0 < t_1 < \cdots < t_n$.

$s < t_u$ y por lo tanto $\psi_u(s, t-) = 0$ (ya que $\varphi_u(s) \neq 0$). Pero claramente $\psi_u(t-, t-) = 1$ lo que es una contradicción.

(b) La parte (a) del lema implica que $Y^{(u)}$ está bien definido, es integrable, cadlag y adaptado.

Si $s < t < t_u$ entonces

$$\begin{aligned} E(Y_t^{(u)} | \mathfrak{F}_s) &= \frac{1}{\varphi_u(t)} E(e^{iuZ_t} | \mathfrak{F}_s) = \frac{e^{iuZ_s}}{\varphi_u(t)} E(e^{iu(Z_t - Z_s)} | \mathfrak{F}_s) \\ &= \frac{e^{iuZ_s}}{\varphi_u(t)} \psi(s, t) = Y_s^{(u)} \end{aligned}$$

por (13.13). Para terminar la demostración del lema basta observar que si $t \uparrow t_u < \infty$, estas igualdades implican que también $E(Y_{t_u-}^{(u)} | \mathfrak{F}_s) = Y_s^{(u)}$. □

Demostración del Teorema 13.18. Primero supongamos que Z es una semimartingala; vamos a demostrar que φ_u tiene variación finita. Sean t_u y $Y^{(u)}$ como en el lema. Tenemos

$$\varphi_u(t) = \frac{e^{iuZ_t}}{Y_t^{(u)}} \quad \text{si } t < t_u. \tag{13.14}$$

y si $t_u < \infty$ entonces

$$\varphi_u(t_u-) = \frac{e^{iuZ_{t_u-}}}{Y_{t_u}^{(u)}}. \tag{13.15}$$

Como, por el lema, $\varphi_u(t) = 0$ si $t \geq t_u$, entonces basta demostrar que la función

$$\widehat{\varphi}_u(t) := \begin{cases} \varphi_u(t) & \text{si } t < t_u \\ \varphi_u(t_u-) & \text{si } t_u \leq t < \infty \end{cases}$$

tiene variación finita. Probaremos que $\widehat{\varphi}_u$ es semimartingala (determinista) lo cual implicará el resultado, en virtud de 11.26(c).

Por (13.14) y (13.15) tenemos que

$$\widehat{\varphi}_u(t) = \frac{e^{iuX_t}}{Y_t^{(u)}},$$

donde $X_t := Z_t^{]t_u} = Z_t \mathbf{1}_{[0,t_u[} + Z_{t_u-} \mathbf{1}_{[t_u,\infty[}$ (ver 13.1; claramente podemos suponer $t_u > 0$, ya que el caso $t_u = 0$ es trivial: $\varphi_u(t) \equiv 0$). Z es una semimartingala por hipótesis, entonces X

también lo es, y sabemos por el lema que $Y^{(u)}$ es martingala, por lo tanto es semimartingala. Además se tiene $|Y_t^{(u)}| \geq 1$. De la fórmula de Itô aplicada a la función $f: \mathbb{R} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ de la clase $\mathcal{C}^2$ arbitraria, tal que $f(x,y) = e^{iux}/y$ si $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{C}$, $|y| \geq 1$,[5] se sigue que $\widehat{\varphi}_u$ es una semimartingala.

Pasemos ahora a la demostración del recíproco, es decir supongamos que φ_u tiene variación finita para cada $u \in \mathbb{R}$; queremos probar que Z es una semimartingala.

1. Demostraremos primero que si existe $u > 0$ tal que $t_u = \infty$ y φ_u tiene variación finita, entonces Z es una semimartingala.

Definamos $T_0 = 0$, $T_n = \inf\{t > T_{n-1}, |Z_t - Z_{T_{n-1}}| \geq \pi/(4u)\}$ para $n \in \mathbb{N}$. T_n es un tiempo de paro, $T_n > T_{n-1}$ sobre $\{T_{n-1} < \infty\}$ para $n \in \mathbb{N}$ y $T_n \uparrow \infty$. En virtud de 11.30 basta demostrar que Z^{T_n} es una semimartingala para todo n, y para esto basta probar que $Z^{T_n} - Z^{T_{n-1}}$ es semimartingala. Como $t_u = \infty$ tenemos que (ver Lema 13.19) que $e^{iuZ} = Y^{(u)}\varphi_u$, por lo tanto e^{iuZ} es una semimartingala como el producto de dos semimartingalas (φ_u tiene variación finita entonces es una semimartingala).

En consecuencia $e^{iuZ^{T_n}}$ y $e^{iuZ^{T_{n-1}}}$ son semimartingalas y por lo tanto, por la fórmula de Itô, el proceso $e^{iu(Z^{T_n}-Z^{T_{n-1}})} = e^{iuZ^{T_n}}e^{-iuZ^{T_{n-1}}}$ también lo es. Entonces el proceso $(e^{iu(Z^{T_n}-Z^{T_{n-1}})})^{]T_n}$ es semimartingala lo que implica que $U := \operatorname{sen}(u(Z^{T_n} - Z^{T_{n-1}})^{]T_n})$ también lo es. Pero, por la definición de T_n, se tiene que $|u(Z^{T_n} - Z^{T_{n-1}})^{]T_n}| \leq \pi/4$, por lo tanto $(Z^{T_n} - Z^{T_{n-1}})^{]T_n} = (1/u)\operatorname{arcsen} U$, de donde, otra vez por la fórmula de Itô concluimos que $(Z^{T_n} - Z^{T_{n-1}})^{]T_n}$ es una semimartingala. Finalmente basta observar (ver 13.1) que

$$Z^{T_n} - Z^{T_{n-1}} = (Z^{T_n} - Z^{T_{n-1}})^{]T_n} + \Delta Z_{T_n} \mathbf{1}_{[T_n,\infty[}$$

y por lo tanto es una semimartingala.

2. Claramente basta probar que para todo $t \in \mathbb{R}_+$, el proceso parado Z^t es semimartingala. Entonces fijemos t y observemos que Z^t también tiene incrementos independientes. Como $\lim_{u\to 0} \varphi_u(t) = 1$, existe $u > 0$ tal que $\varphi_u(t) \neq 0$ y por lo tanto $t < t_u$ (ver el Lema 13.19). En consecuencia, para éste u tenemos que $Ee^{iuZ_s^t} \neq 0$ para cada $s \in \mathbb{R}_+$. Así vemos que Z^t satisface las hipótesis del paso 1 y por lo tanto es una semimartingala. □

Observación. La demostración del teorema se simplificaría (aunque quedaría la misma idea) si hubiéramos supuesto adicionalmente que Z es continuo en probabilidad. Tendríamos en este caso que φ_u es continua (obvio) y $t_u = \infty$. En efecto, si $t_u < \infty$ entonces por el Lema 13.19 tendríamos $0 \neq \varphi_u(t_u-) = \varphi_u(t_u) = 0$ por continuidad de φ_u.

[5] Advertencia. No se trata aquí de la derivabilidad de funciones de variable compleja. La función f la tratamos como una función de $\mathbb{R}^3$ en $\mathbb{R}^2$ y en este sentido hablamos de la clase $\mathcal{C}^2$.

Capítulo 14

Cambio absolutamente continuo de medidas de probabilidad

En este capítulo demostraremos que la propiedad de ser semimartingala se mantiene cuando reemplazamos a P por otra medida de probabilidad, absolutamente continua c.r.a P. Obtendremos varias consecuencias importantes y profundas, como el teorema de Girsanov, la caracterización de semimartingalas por medio de las integrales estocásticas y otras.

Supongamos que además de nuestro espacio de probabilidad básico $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$, con la filtración $(\mathfrak{F}_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$, se tiene otra medida de probabilidad Q sobre $\mathfrak{F}_\infty$, absolutamente continua con respecto a P (i.e. $Q \ll P$).

14.1 Lema. *Sea $\mathfrak{F}'_\infty$ la completación de $\mathfrak{F}_\infty$ con respecto a Q. Extendemos Q a $\mathfrak{F}'_\infty$ de la manera usual. Sea*

$$\mathfrak{F}'_t = \{A' \in \mathfrak{F}'_\infty : \exists A \in \mathfrak{F}_t,\ Q(A \vartriangle A') = 0\}.$$

Entonces la filtración $(\mathfrak{F}'_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ y $(\Omega, \mathfrak{F}'_\infty, Q)$ satisfacen las condiciones usuales.

Este lema es una consecuencia inmediata de la Proposición 1.6.

14.2 Convención. Hablando de semimartingalas, martingalas respecto a Q, vamos a suponer que se toman con respecto a $(\mathfrak{F}'_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ y en $(\Omega, \mathfrak{F}'_\infty, Q)$. Diremos simplemente Q-semimartingala, o semimartingala (Q), etc., cuando se hable de esto, o ser cadlag con respecto a Q, se dira Q-cadlag, etc.[1]

---

[1]Ver p. 32

14.3 Teorema. *Sea Z una P-semimartingala y Q una medida de probabilidad definida en $(\Omega, \mathfrak{F})$. Si $Q \ll P$ entonces Z es una semimartingala con respecto a Q.*

Observación. Sea $Z = M + A$, $M \in \mathcal{M}^1_{Loc}$, $A \in \mathcal{W}^0$. Entonces es "natural" que las propiedades de A se hereden a Q porque A es de variación finita en intervalos finitos salvo en un conjunto de P-medida 0. Lo sorprendente es que también se heredan para $M + A$ pues las propiedades de ser martingala dependen muy fuertemente de la medida P.

14.4 Lema. *Si X es una supermartingala no negativa (cadlag) y $S = \inf\{t : X_t = 0 \text{ o } X_{t-} = 0\}$ entonces $X_t = 0$ c.s. sobre $[S, \infty[$.*

Demostración del lema. Definamos

$$\overline{X}_t = \begin{cases} X_t, & \text{si} \quad t < \infty \\ 0, & \text{si} \quad t = \infty. \end{cases}$$

$\overline{X}$ es una supermartingala sobre $[0, \infty]$.

Sea $S_n = \inf\{t : X_t < 1/n\}$. Es claro que $S_n \leq S$. Apliquemos a $\overline{X}$, S_n, $S + t$ el teorema de paro "de muestreo opcional", tenemos $E(\overline{X}_{S+t}) \leq E(\overline{X}_{S_n}) \leq 1/n$ para cada $n \in \mathbb{N}$, $t \in \mathbb{R}_+$ y por lo tanto $E(\overline{X}_{S+t}) = 0$ para cada $t \in \mathbb{R}_+$. Entonces $\overline{X}_{S+t} = 0$ c.s (por ser $\overline{X}$ no negativa) para cada $t \in \mathbb{R}_+$ y en consecuencia $X_t = 0$ P-c.s. sobre $[S, \infty[$ (por ser cadlag). □

Demostración del Teorema 14.3. Sea $M_\infty = dQ/dP$ (densidad sobre $\mathfrak{F}_\infty$) y $M_t = E(M_\infty | \mathfrak{F}_t)$. $M = (M_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ es P-martingala (tomamos una versión cadlag).

1. Vamos a demostrar que $1/M$ es Q-indistinguible de un proceso cadlag.

Aplicamos el lema a $M_t = E(M_\infty | \mathfrak{F}_t)$ que es una martingala no negativa. $S = \inf\{t : M_t = 0 \text{ o } M_{t-} = 0\}$. Por el lema $M = 0$ P-c.s. sobre $[S, \infty[$, por lo cual, $M = 0$ Q-c.s. sobre $[S, \infty[$ i.e. $Q(\forall t \in [S, \infty[,\ M_t = 0) = 1$.

Queremos mostrar que $S = +\infty$ Q-c.s. Supongamos que $Q(S < \infty) > 0$; entonces existe $s \in \mathbb{R}_+$ tal que $Q(S \leq s) > 0$.

Sea $A = \{S \leq s\}$,

$$0 < Q(A) = Q(A \cap \{\forall t \geq S\ M_t = 0\}) \leq Q(M_s = 0).$$

Por otra parte,

$$Q(M_s = 0) = \int_{\{M_s = 0\}} M_\infty \, dP = \int_{\{M_s = 0\}} M_s \, dP = 0,$$

ya que $\{M_s = 0\} \in \mathfrak{F}_s$, lo cual es una contradicción.

Así, hemos mostrado que $Q(S < \infty) = 0$ y eso muestra que $1/M$ es Q-cadlag.

2. Si Z es P-supermartingala no negativa cadlag entonces Z/M es Q-supermartingala.

En efecto, Z/M está bien definida (por 1) y Z es P-cadlag, por lo tanto Z es Q-cadlag y $1/M$ también lo es, por lo tanto Z/M es Q-cadlag.

Sean $s < t$, $F' \in \mathfrak{F}_s'$ (ver 14.1) y $F \in \mathfrak{F}_s$ tales que $Q(F \triangle F') = 0$:

$$\begin{aligned}\int_{F'} \frac{Z_t}{M_t}\, dQ &= \int_F \frac{Z_t}{M_t}\, dQ = \int_{F\cap\{M_t>0\}} \frac{Z_t}{M_t}\, dQ \\ &= \int_{F\cap\{M_t>0\}} \frac{Z_t}{M_t} M_\infty\, dP = \int_F \mathbf{1}_{\{M_t>0\}} \frac{Z_t}{M_t} M_t\, dP.\end{aligned}$$

Como $\{M_t > 0\} \subset \{M_s > 0\}$ c.s. por 14.4, y $Z_t \geq 0$, entonces

$$\int_{F\cap\{M_t>0\}} Z_t\, dP = \int \mathbf{1}_{F\cap\{M_s>0\}} Z_t\, dP \leq \int \mathbf{1}_{F\cap\{M_s>0\}} Z_s\, dP,$$

(porque Z es supermartingala) y finalmente

$$\int \mathbf{1}_{F\cap\{M_s>0\}} \frac{Z_s}{M_s} M_\infty\, dP = \int_F \frac{Z_s}{M_s}\, dQ = \int_{F'} \frac{Z_s}{M_s}\, dQ.$$

Esto muestra que Z/M es una Q-supermartingala.

3. Si Z es una martingala local con respecto a P entonces Z/M es una semimartingala con respecto a Q.

Sea $(T_n)_n$ una sucesión localizante de Z en $\mathcal{M}^1_\infty$. Cada Z^{T_n} es una P-martingala uniformemente integrable, por lo cual para cada n existen N_n^1 y N_n^2 martingalas no negativas tales que $Z^{T_n} = N_n^1 - N_n^2$ ($N_n^1(t) = E(Z^+_{T_n}|\mathfrak{F}_t)$ y $N_n^2(t) = E(Z^-_{T_n}|\mathfrak{F}_t)$). Basta demostrar que el proceso $(Z/M)^{T_n}$ es una semimartingala (Q) para todo n (por 11.30). Tenemos

$$(\frac{Z}{M})^{T_n} = \frac{Z^{T_n}}{M^{T_n}} = \frac{(Z^{T_n})^{T_n}}{M^{T_n}} = (\frac{Z^{T_n}}{M})^{T_n} = (\frac{N_n^1}{M})^{T_n} - (\frac{N_n^2}{M})^{T_n}.$$

Por 2, N_n^1/M y N_n^2/M son Q-supermartingalas, por lo tanto $(N_n^1/M)^{T_n}$ y $(N_n^2/M)^{T_n}$ también son Q-supermartingalas. Por lo tanto son Q-semimartingalas y su diferencia también lo es.

4. Si Z es P-semimartingala entonces Z es Q-semimartingala.

Por 13.6, MZ es P-semimartingala, por lo tanto $MZ = N + A$, N es una martingala local (P) y $A \in \mathcal{W}^0(P)$ ($\subset \mathcal{W}^0(Q)$). Z=(módulo Q-indistinguible) $N/M + (1/M)A$ (por 1). Por 3, N/M es Q-semimartingala y $1/M$ es Q-semimartingala, A es Q-semimartingala por lo que $(1/M)A$ es Q-semimartingala y por lo tanto Z también lo es. □

Hemos mostrado que si $Q \ll P$ y Z es P-semimartingala entonces Z es también Q-semimartingala. Es natural preguntarse cuál será su descomposición $Z = N + A$, con $N \in \mathcal{M}^1_{Loc}(Q)$ y $A \in \mathcal{W}^0(Q)$. El siguiente teorema nos da una respuesta parcial.

14.5 Teorema de Girsanov. *Sean P y Q dos medidas de probabilidad equivalentes*[2] *en $(\Omega, \mathfrak{F}_\infty)$, $M_\infty := dQ/dP$ (sobre $\mathfrak{F}_\infty$), $M_t := E(M_\infty|\mathfrak{F}_t)$ para $t \geq 0$. Si X es una martingala local (P) entonces*

$$(X_t - X_0 - \int_{]0,t]} \frac{1}{M_s} d[M,X]_s)_{t\in\mathbb{R}_+}$$

es una martingala local (Q).

Demostración. Podemos suponer que $X_0 = 0$ (restando X_0).

1. Sea $A_t = \int_{]0,t]}(1/M)\, d[M,X]$. Veremos que A está bien definido y que $A \in \mathcal{W}^0(P)$ ($= \mathcal{W}^0(Q)$).

$[M,X]$ es el mismo para P y para Q (por ser límite en probabilidad de unas sumas (ver 12.16) y por la hipótesis P equivalente a Q, límite en probabilidad con respecto a P implica límite en probabilidad con respecto a Q).

Además $1/M$ es cadlag módulo indistinguible en Q (paso 1 de la demostración de 14.3) y $P \ll Q$ implica que $1/M$ es cadlag módulo indistinguible en P.

2. Basta mostrar que $M(X - A)$ es una martingala local (P). En efecto, si esto es cierto, sea $(T_n)_n$ una sucesión localizante de $M(X-A)$ en $\mathcal{M}^1_\infty$, $(M(X-A))^{T_n}$ es entonces una P-martingala uniformemente integrable y vale 0 en 0, por lo tanto para todo S tiempo de paro,

$$0 = \int M_S^{T_n}(X_S^{T_n} - A_S^{T_n})\, dP = \int M_\infty(X_S^{T_n} - A_S^{T_n})\, dP = \int (X-A)_S^{T_n}\, dQ,$$

lo que muestra que $(X-A)^{T_n}$ es Q-martingala para cada n, es decir $X - A$ es Q-martingala local.

3. Demostración de que $M(X - A)$ es una martingala local (P):

$$\begin{aligned} M(X-A) &= (MX - [M,X]) + \left([M,X] - \int M dA\right) \\ &\quad + \left(\int M dA - MA\right). \end{aligned}$$

(i) $(MX - [M,X]) \in \mathcal{M}^1_{Loc}(P)$. En efecto, M es P-martingala, X es P-martingala local y

$$MX = \int M_{s-}\, dX_s + \int X_{s-}\, dM_s + [M,X],$$

[2] i.e. $P \ll Q$ y $Q \ll P$, lo que denotamos $P \sim Q$.

de donde
$$MX - [M,X] = \int M_{s-}\, dX_s + \int X_{s-}\, dM_s.$$
Ambos sumandos del lado derecho son martingalas locales (P) por ser la integral estocástica con respecto a una P-martingala local (12.10(f)).
(ii) $([M,X] - \int M\, dA) \in \mathcal{M}^1_{Loc}(P)$ (inmediato de la definición, este proceso es P-indistinguible de 0).
(iii)
$$\begin{aligned}
\int M\, dA - MA &= \int M\, dA - \int M_-\, dA - \int A_-\, dM - [M,A] \\
&= \int M\, dA - (\int M_-\, dA + \int \Delta M\, dA) - \int A_-\, dM \\
&= -\int A_-\, dM \in \mathcal{M}^1_{Loc}(P),
\end{aligned}$$

porque por 12.22, $[M,A] = \sum \Delta M \Delta A = \int \Delta M\, dA$, ya que ΔM, para P-casi toda ω, toma sólo un número a lo más contable de valores. □

14.6 Corolario (para el proceso de Wiener). *Si $P \sim Q$ y $M_\infty := dQ/dP$ (en $\mathfrak{F}_\infty$), $M_t := E(M_\infty|\mathfrak{F}_t)$ y si W es un proceso de Wiener con respecto a P entonces*
$$W - \int \frac{1}{M}\, d[M,W],$$
es un proceso de Wiener con respecto a Q.

Demostración. Es una consecuencia del teorema anterior y del teorema de Lévy. Como W es un proceso continuo, $[M,W]$ es continuo (por 12.26) y entonces A es continuo (donde $A = \int(1/M)\, d[M,W]$). Por lo tanto $W - A$ es continuo y por el teorema anterior $W - A \in \mathcal{M}^1_{Loc}(Q)$, por lo tanto $W - A \in \mathcal{M}^{2c}_{Loc}(Q)$.

En consecuencia, si $\langle W - A\rangle_Q$ = compensador de $W - A$ con respecto a Q, entonces por 11.18(c)
$$\langle W - A\rangle_Q(t) = [W - A]_Q(t) = [W](t) = t$$
(ya sabemos que $[\cdot]_P = [\cdot]_Q$ por ser $P \sim Q$).

Por el teorema de Lévy 13.7, $W - A$ es un proceso de Wiener con respecto a Q. □

Se puede plantear el problema inverso: sea W un proceso de Wiener (P) y Y un proceso adaptado medible tal que $\int_{]0,t]} Y_s\, ds$ existe.

¿Cuándo existe una medida de probabilidad Q tal que $P \sim Q$ y que $W - \int Y_s\, ds$ sea un proceso de Wiener con respecto a Q?

Por ejemplo, no existe $Q \ll P$ tal que $(W_t - t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ sea Wiener c.r.a Q ya que $W_t - t \to -\infty$ P-c.s. si $t \to \infty$ (basta aplicar la ley del logaritmo iterado) y si existiera una tal Q se tendría que $(W_t - t) \to -\infty$ Q-c.s. pero entonces $W_t - t$ no puede ser un proceso de Wiener (Q).

Este ejemplo muestra que aún en el caso de tener Y constante, $(\int_{]0,t]} Y_s\, ds = t)$ no existe la medida Q con las propiedades requeridas.

La situación se mejora mucho si nos restringimos a un intervalo acotado $[0, T]$ (T es un real, *no* un tiempo de paro). Primero se verá el análogo del Corolario 14.6 para el caso de tener un intervalo acotado $[0, T]$ en vez de $\mathbb{R}_+$.

14.7 Corolario. *Si $P \sim Q$ sobre $\mathfrak{F}_T$, $M_T = dQ/dP$ sobre $\mathfrak{F}_T$ y $M_t = E(M_T|\mathfrak{F}_t)$, W es un proceso de Wiener (P) sobre $[0, T]$ entonces $W - \int (1/M)\, d[M, W]$ es un proceso de Wiener (Q) sobre $[0, T]$.*

(Demostración análoga al corolario anterior).

La formulación clásica del teorema de Girsanov nos da una respuesta a la pregunta planteada.

14.8 Teorema de Girsanov (forma clásica). *Sean T un real positivo, W un proceso de Wiener sobre $[0, T]$, Y un proceso progresivamente medible (respecto a la filtración dada) tal que*

$$\int_{]0,T]} Y_s^2\, ds < \infty \quad P\text{-c.s.},$$

y sea

$$M_T = \exp\Big(\int_{]0,T]} Y\, dW - \frac{1}{2}\int_{]0,T]} Y_s^2\, ds\Big).$$

Si $E(M_T) = 1$ entonces $W - \int Y_s\, ds$ es un proceso de Wiener sobre $[0, T]$ con respecto a la medida $dQ = M_T\, dP$.

Demostracion. 1. Sea $M_t = E(M_T|\mathfrak{F}_t)$, $0 \le t \le T$ y

$$\overline{M}_t = \exp\Big(\int_{]0,t]} Y_s\, dW_s - \frac{1}{2}\int_{]0,t]} Y_s^2\, ds\Big).$$

Probaremos que $M_t = \overline{M}_t$ para $0 \le t \le T$. Claramente $M_T = \overline{M}_T$. Aplicando 13.13 a $\int Y\, dW$ y $\int Y_s^2\, ds$ $(=[\int Y\, dW])$, vemos que $\overline{M}$ es una martingala local. Pero $\overline{M}_t > 0$ para todo $0 \leq t \leq T$, entonces por el lema de Fatou, $\overline{M}$ es una supermartingala (ver 11.9(c)), i.e., $\overline{M}_s \geq E(\overline{M}_t|\mathfrak{F}_s) \geq 0$ para cada $0 \leq s \leq t \leq T$. En particular $1 = E(\overline{M}_0) \geq E(\overline{M}_t) \geq E(E(\overline{M}_T|\mathfrak{F}_t)) = E(M_T) = 1$. En consecuencia $\overline{M}_t = E(M_T|\mathfrak{F}_t) = M_t$ c.s. y por lo tanto $M = \overline{M}$ por ser M cadlag y $\overline{M}$ continua.

2. Para demostrar el teorema basta probar que

$$\int_{]0,t]} \frac{1}{M_s}\, d[M,W]_s = \int_{]0,t]} Y_s\, ds, \quad 0 \leq t \leq T. \tag{14.1}$$

En efecto, si esto se cumple, entonces el teorema es consecuencia inmediata del Corolario 14.7. Para probar (14.1) basta mostrar que

$$[M,W]_t = \int_{]0,t]} M_s Y_s\, ds, \quad 0 \leq t \leq T. \tag{14.2}$$

Sobre todo observemos que la integral en el lado derecho existe por la hipótesis sobre Y y porque cada trayectoria de M es acotada sobre $[0,T]$ (es continua). De hecho vemos que $\int_{]0,t]} M_s^2 Y_s^2\, ds < \infty$ y por lo tanto $\int MY\, dW$ existe sobre $[0,T]$ (ver 12.3). Ahora bien,

$$\int_{]0,t]} M_s Y_s\, ds = \int_{]0,t]} M_s Y_s\, d[W,W]_s = [\int MY\, dW, W]_t = [\int M\, dN, W]_t$$

donde $N = \int Y\, dW$ (hemos utilizado 12.27 y 12.10(c)).

Por la fórmula exponencial 13.12 y por el paso 1 sabemos que $M = 1 + \int M_-\, dN = 1 + \int M\, dN$ y por lo tanto

$$[\int M\, dN, W] = [M-1, W] = [M, W]$$

lo que demuestra (14.2). □

Este teorema proporciona un método para encontrar soluciones débiles de una ecuación diferencial estocástica c.r.a un proceso de Wiener.

Es claro por el resultado anterior que es importante saber cuándo $E(M_T) = 1$. El resultado más fuerte conocido en esta dirección es el siguiente.

14.9 Teorema de Novikov. *Si* $E(\exp(\frac{1}{2}\int_{]0,T]} Y_s^2\, ds)) < \infty$, *entonces* $E(M_T) = 1$.

La demostración no se dará aquí. Consultar [7, Th.13.27] o [14, Th.6.1].

Veamos otras consecuencias interesantes del Teorema 14.3. Sabemos que en general no es posible definir la integral estocástica "por trayectorias" o sea para cada ω fija. Sin embargo sucede que esa integral posee algunas propiedades que uno consideraría como naturales o típicas, para una integral definida por trayectorias. He aquí dos de estas propiedades.

14.10 Proposición (invariancia de la integral estocástica bajo el cambio absolutamente continuo de la probabilidad). *Sean Q, P probabilidadades en $(\Omega, \mathfrak{F})$, $Q \ll P$, Z una semimartingala (P) y X un proceso predecible localmente acotado. Entonces*

$$(P) \int X\, dZ = (Q) \int X\, dZ \quad \textit{módulo } Q\textit{-indistinguibilidad.} \tag{14.3}$$

Demostración. Observemos primero que ambas integrales tienen sentido porque Z es también semimartingala (Q) (por 14.2) y X también será predecible localmente acotado (Q). Basta demostrar la igualdad para X proceso predecible acotado (tomando $X - X_0$, parando y aplicando TCD 12.11). La igualdad es cierta para $X = \xi \mathbf{1}_{]s,t]}$, donde $0 \leq s < t$ y ξ es una variable aleatoria $\mathfrak{F}_s$-medible y acotada. Usaremos el lema de las clases monótonas 4.26.

Sea $\mathcal{H} = \{X : X$ es un proceso predecible acotado tal que (14.3) se cumple$\}$ y $\mathcal{A} = \{\{0\} \times F : F \in \mathfrak{F}_0\} \cup \{]s,t] \times F : s < t,\ F \in \mathfrak{F}_s\}$. $\mathcal{A}$ es un π-sistema que genera a $\mathcal{P}$ y $\mathbf{1}_A \in \mathcal{H}$, para cada $A \in \mathcal{A}$.

Es claro que $\mathcal{H}$ es lineal y que $1 \in \mathcal{H}$. Sea $(X_n)_n$ una sucesión en $\mathcal{H}$, $X_n \geq 0$, $X_n \uparrow X$ (P-c.s.) (X acotado). Veremos que $X \in \mathcal{H}$; para ello se usará el teorema de convergencia dominada para la integral estocástica (Teorema 12.11).

Tenemos $(P) \int X_n\, dZ \to (P) \int X\, dZ$, en P-probabilidad, y esto implica $(P) \int X_n\, dZ \to (P) \int X\, dZ$,en Q-probabilidad (porque $Q \ll P$). Como $X_n \uparrow X$ (Q) c.s. aplicamos de nuevo 12.11:

$$(Q) \int X_n\, dZ \to (Q) \int X\, dZ, \quad \text{en } Q\text{-probabilidad.}$$

Por hipótesis

$$(P) \int X_n\, dZ = (Q) \int X_n\, dZ \quad \text{para cada } n,$$

lo que muestra que $X \in \mathcal{H}$.

Ahora basta aplicar el lema de las clases monótonas 4.26 para ver que (14.3) se cumple para cada X predecible y acotado. □

14.11 Proposición (el carácter local de la integral estocástica). *Sean $Z, \overline{Z}$ semimartingalas, $X, \overline{X}$ procesos predecibles localmente acotados y $A \in \mathfrak{F}_\infty$. Supongamos que para cada $\omega \in A$, (fija)*

$$Z_t(\omega) = \overline{Z}_t(\omega) \quad \text{y} \quad X_t(\omega) = \overline{X}(\omega) \quad \textit{para cada } t \geq 0. \tag{14.4}$$

Entonces

$$\int X\, dZ = \int \overline{X}\, d\overline{Z} \quad \textit{c.s. sobre } A.$$

Demostración. Si $P(A) = 0$ no hay nada que demostrar. Si $P(A) > 0$ definamos

$$Q(\cdot) = \frac{P(\cdot \cap A)}{P(A)}.$$

Claramente $Q \ll P$. Por 14.3, $Z, \overline{Z}$ son semimartingalas (Q). La hipótesis (14.4) nos dice que Z y $\overline{Z}$ son Q-indistinguibles y que X y $\overline{X}$ son también Q-indistinguibles (Q está concentrada en A), por lo tanto $(Q)\ \int X\, dZ = (Q)\ \int \overline{X}\, d\overline{Z}$ Q-c.s.

Por 14.10

$$(Q)\ \int X\, dZ = (P)\ \int X\, dZ \quad Q\text{-c.s.} \quad (\text{i.e. , } P\text{-c.s. sobre } A)$$

y

$$(Q)\ \int \overline{X}\, d\overline{Z} = (P)\ \int \overline{X}\, d\overline{Z} \quad Q\text{-c.s.} \quad (\text{i.e. , } P\text{-c.s. sobre } A).$$

De lo que se obtiene, $(P)\ \int X\, dZ = (P)\ \int \overline{X}\, d\overline{Z}$, P-c.s. sobre A. □

14.12 Observaciones. (a) Se puede formular un resultado aún más fuerte: si ξ, η son variables aleatorias, $0 \leq \xi \leq \eta$, si $X, \overline{X}$ son procesos predecibles localmente acotados y $Z, \overline{Z}$ son semimartingalas, y si $X_t = \overline{X}_t$ y $Z_t - Z_\xi = \overline{Z}_t - \overline{Z}_\xi$ para $t \in [\xi(\omega), \eta(\omega)[$, $\omega \in A$, entonces

$$(X \circ Z)_t - (X \circ Z)_\xi = (\overline{X} \circ \overline{Z})_t - (\overline{X} \circ \overline{Z})_\xi$$

para $t \in [\xi(\omega), \eta(\omega)[$ y $\omega \in A$.

(b) De la misma manera se puede demostrar que si sobre un evento A las trayectorias de Z tienen variación finita entonces las trayectorias de la integral estocástica $\int X\, dZ$ también tienen variación finita c.s. sobre A.

Veremos ahora un resultado muy interesante que dice que las semimartingalas constituyen la clase más amplia de los procesos con respecto a los cuales podemos definir la integral estocástica de la manera natural. En otras palabras, si Z es un proceso con respecto al cual se puede definir una integral estocástica que satisface algunas condiciones mínimas, entonces Z tiene que ser una semimartingala.

Pensemos cuáles son esas "condiciones mínimas". Fijemos $T \in \mathbb{R}_+$ (advertencia: T es un número real y no un tiempo de paro). Sea ε_T la clase de los procesos simples sobre $[0,T]$ (ver 9.2), i.e. los procesos X de la forma

$$X = \sum_{k=0}^{n-1} \xi_k \mathbf{1}_{]t_k,t_{k+1}]}, \tag{14.5}$$

donde $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = T$, ξ_k es una variable aleatoria acotada $\mathfrak{F}_{t_k}$-medible, $k = 0,1,\ldots,n-1$ (podemos restringirnos a los X tales que $X_0 = 0$).

Sea Z un proceso. Para todo $X \in \varepsilon_T$ dado por (14.5) definimos

$$\mathcal{J}_T(X) = \sum_{k=0}^{n-1} \xi_k (Z_{t_{k+1}} - Z_{t_k}). \tag{14.6}$$

Es claro que para cada definición natural de la integral $\int \cdot\, dZ$, se debe cumplir $\int_{]0,T]} X\, dZ = \mathcal{J}_T(X)$ para $X \in \varepsilon_T$. Sucede que además de esto, basta imponer una hipótesis muy débil sobre la continuidad del mapeo $\mathcal{J}_T$.

ε_T es claramente un espacio lineal. Consideremos en ε_T la topología "de la convergencia uniforme en t, ω, módulo indistinguibilidad", i.e. dada por la norma

$$\|X\|_\infty = \operatorname*{ess\,sup}_{\omega} \sup_{t} |X(t,\omega)|, \quad X \in \varepsilon_T.$$

Antes de formular el teorema recordemos algunas notaciones:

$$\begin{aligned} L^0 &= L^0(\Omega, \mathfrak{F}, P) \\ &= \text{el espacio de las variables aleatorias reales con la topología} \\ & \text{dada por la convergencia en probabilidad.} \\ L^\infty &= L^\infty(\Omega, \mathfrak{F}, P) = \text{el espacio dual de } L^1 \\ &= \text{el espacio de las variables aleatorias reales esencialmente acotadas.} \end{aligned}$$

14.13 Teorema de Bichteler, Dellacherie y Mokobodzki. *Sea Z un proceso cadlag adaptado tal que para cada $T > 0$ el mapeo*

$$\mathcal{J}_T : (\varepsilon_T, \|\cdot\|_\infty) \to L^0$$

es continuo, donde $\mathcal{J}_T$ está dado por (14.6). Entonces Z es una semimartingala.

Observación. La hipótesis sobre la continuidad de $\mathcal{J}_T$ es mucho más débil que la propiedad de las semimartingalas dada por el teorema de la convergencia dominada 12.11.

Para demostrar el teorema necesitaremos el siguiente resultado del análisis funcional.

14.14 Lema. *Sea Γ un subconjunto convexo de $L^1(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ tal que $0 \in \Gamma$ y Γ es acotado en L^0.*[(3)] *Entonces existe $\eta_0 \in L^\infty$, tal que $\eta_0 > 0$ c.s. y $\sup_{\xi \in \Gamma} E(\xi \eta_0) < \infty$.*

Demostración del lema. Sea $G = \{\eta \in L^\infty : \eta \geq 0 \text{ c.s. }, \sup_{\xi \in \Gamma} E(\xi\eta) < \infty\}$. $G \neq \emptyset$ pues $0 \in G$. Sea $\alpha = \sup_{\eta \in G} P(\eta > 0)$. Probaremos que existe $\eta_0 \in G$ tal que $\alpha = P(\eta_0 > 0)$. En efecto, sean $\eta_n \in G$ $(n = 1, 2, \ldots)$ tales que $\lim_{n \to \infty} P(\eta_n > 0) = \alpha$. Fijemos números $c_n > 0$ $(n = 1, 2, \ldots)$ tales que a la vez

$$\sum_n c_n \operatorname{ess\,sup} |\eta_n| < \infty \quad \text{y} \quad \sum_n c_n (0 \vee \sup_{\xi \in \Gamma} E(\xi \eta_n)) < \infty.$$

Es claro que si definimos $\eta_0 = \sum_{n=1}^\infty c_n \eta_n$, entonces $\eta_0 \in G$ y $\{\eta_0 > 0\} = \cup_{n=1}^\infty \{\eta_n > 0\}$ por lo tanto $P(\eta_0 > 0) \geq \alpha$, en consecuencia $P(\eta_0 > 0) = \alpha$.

Para demostrar que η_0 es la que buscamos basta probar que $P(\eta_0 > 0) = 1$. Supongamos lo contrario, i.e. supongamos que $P(\eta_0 = 0) > 0$.

Denotemos $A = \{\eta_0 = 0\}$. Sea $\Delta =$ la cerradura en L^1 del conjunto $\{\xi - \zeta : \xi \in \Gamma,\ \zeta \in L^1,\ \zeta \geq 0 \text{ c.s. }\}$.

Probaremos que existe $c > 0$ tal que $c\mathbf{1}_A$ está a una distancia positiva (en L^1) de Δ. En efecto, Γ es acotado en L^0, entonces existe $c > 0$ tal que $\sup_{\xi \in \Gamma} P(\xi > c/2) < \frac{1}{2} P(A)$. De esto se sigue que para cada $\xi \in \Gamma$,

$$\begin{aligned} P((A \cap \{\xi \leq c/2\})^C) &= P(A^C \cup \{\xi > c/2\}) \\ &\leq 1 - P(A) + P(\xi > c/2) < 1 - \frac{1}{2} P(A), \end{aligned}$$

y por lo tanto $P(A \cap \{\xi \leq c/2\}) > \frac{1}{2} P(A)$. Entonces para cada $\xi \in \Gamma$, $\zeta \in L^1$, $\zeta \geq 0$, se tiene que

$$\begin{aligned} E(|c\mathbf{1}_A - (\xi - \zeta)|) &\geq E(|c\mathbf{1}_A - \xi + \zeta| \mathbf{1}_{A \cap \{\xi \leq c/2\}}) \\ &\geq P(A \cap \{\xi \leq c/2\}) c/2 > \frac{c}{4} P(A) > 0. \end{aligned}$$

(3) i.e. $\sup_{\xi \in \Gamma} P(|\xi| > N) \to 0$ cuando $N \to \infty$.

Δ es convexo, porque es la cerradura de un convexo. Por un teorema clásico del análisis funcional (ver e.g. [22, Th.3.4]) existe un hyperplano en L^1 que separa a $c\mathbf{1}_A$ de Δ, es decir existe $\overline{\eta} \in L^\infty(=(L^1)')$ tal que

$$cE\,\mathbf{1}_A\overline{\eta} > \beta > \sup\{E((\xi - \zeta)\overline{\eta}) : \xi \in \Gamma,\ \zeta \in L^1,\ \zeta \geq 0\}$$

para una $\beta \in \mathbb{R}$.

En particular, tomando $\xi = 0$, $\zeta = n\mathbf{1}_{\{\overline{\eta}<0\}}$ ($n \in \mathbb{N}$) obtenemos $\beta > -nE(\overline{\eta}\mathbf{1}_{\{\overline{\eta}<0\}})$ para todo $n \in \mathbb{N}$, lo cual implica $\overline{\eta} \geq 0$ c.s. (pues en el caso contrario el lado derecho tiende a $+\infty$ si $n \to +\infty$). Además, tomando $\zeta = 0$ obtenemos $\beta > E(\xi\overline{\eta})$ para cada $\xi \in \Gamma$. En consecuencia $\overline{\eta} \in G$ y por lo tanto $\eta_0 + \overline{\eta} \in G$.

Por otra parte, tomando $\xi = \zeta = 0$ obtenemos $cE(\mathbf{1}_A\overline{\eta}) > 0$ y por lo tanto $P(A \bigcap \{\overline{\eta} > 0\}) > 0$. Esto implica que $P(\eta_0 + \overline{\eta} > 0) > P(\eta_0 > 0) = \alpha$, lo que es una contradicción. □

Demostración del Teorema 14.13. Claramente (ver 11.30) basta demostrar que para cada $T \in \mathbb{R}_+$, Z^T es una semimartingala. Entonces fijemos $T > 0$. Por el Teorema 14.3, para demostrar que Z^T es una semimartingala basta encontrar una medida de probabilidad Q_0 tal que $Q_0 \sim P$ y Z^T es Q_0-semimartingala.

1. Existe una medida de probabilidad Q_1, $Q_1 \sim P$, tal que $Z_t^T \in L^1(Q_1)$, para cada $t \geq 0$.

En efecto, cada trayectoria de Z está acotada en $[0,T]$ (por ser Z cadlag), por lo tanto basta definir

$$\eta_1(\omega) = \begin{cases} 1/Z_T^*(\omega), & \text{si } Z_T^*(\omega) > 1 \\ 1, & \text{si } Z_T^*(\omega) \leq 1 \end{cases}$$

(donde $Z_T^*(\omega) = \sup_{t\leq T} |Z_t|$) y tomar $dQ_1 = (\eta_1/E(\eta_1))dP$.

2. Existe una medida de probabilidad Q_0, $Q_0 \sim Q_1$ (y por lo tanto $Q_0 \sim P$) tal que Z^T es Q_0-cuasimartingala.

En efecto, sea $\Gamma = \{\mathcal{J}_T(X) : X \in \varepsilon_T, \|X\|_\infty \leq 1\}$. Observemos que $P \sim Q_1$ implica $L^0(P) = L^0(Q_1)$, por lo tanto por hipótesis $\mathcal{J}_T : \varepsilon_T \to L^0(Q_1)$ es continuo y entonces Γ es acotado en $L^0(Q_1)$ (como la imagen continua de un conjunto acotado). Además $\Gamma \subset L^1(Q_1)$ (porque $Z_t \in L^1(Q_1)$ para todo t) y Γ es obviamente convexo y $0 \in \Gamma$.

Por el Lema 14.14 existe una variable aleatoria acotada η_0 tal que $\eta_0 > 0$ y $\sup_{\xi\in\Gamma} E_{Q_1}(\xi\eta_0) < \infty$ ($E_{Q_1}(\cdot) = \int \cdot\, dQ_1$). Reemplazando η_0 por $\eta_0/E_{Q_1}(\eta_0)$ podemos suponer que $E_{Q_1}(\eta_0) = 1$.

Definimos $dQ_0 = \eta_0\, dQ_1$. Obviamente $Q_0 \sim Q_1$ y $Z_t^T \in L^1(Q_0)$, para cada t. Además tenemos

$$\infty > \sup_{\xi\in\Gamma} E_{Q_0}(\xi) = \sup\{E_{Q_0}(\mathcal{J}_T(X)) : X \in \varepsilon_T,\ \|X\|_\infty \leq 1\}.$$

Consideremos X de la forma

$$X = \sum_{k=0}^{n-1} \operatorname{sgn}\, E_{Q_0}(Z_{t_{k+1}} - Z_{t_k} | \mathfrak{F}_{t_k}) \mathbf{1}_{]t_k, t_{k+1}]},$$

donde $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = T,\ n \in \mathbb{N}$.

Claramente $X \in \varepsilon_T,\ \|X\|_\infty \leq 1$ y

$$E_{Q_0}(\mathcal{J}_T(X)) = E_{Q_0} \sum_{k=0}^{n-1} |E_{Q_0}(Z_{t_{k+1}} - Z_{t_k} | \mathfrak{F}_{t_k})|.$$

En consecuencia obtenemos

$$\sup\{E_{Q_0} \sum_{k=0}^{n-1} |E_{Q_0}(Z^T_{t_{k+1}} - Z^T_{t_k} | \mathfrak{F}_{t_k})| : \\ 0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = T,\ n \in \mathbb{N}\} < \infty,$$

lo que significa por la Proposición 5.8 que Z^T es Q_0-cuasimartingala. Para terminar la demostración del teorema basta recordar que cada cuasimartingala cadlag es semimartingala (ver e.g. 11.14 y 11.23). □

Como un corolario inmediato del Teorema 14.13 obtenemos otra propiedad importante de las semimartingalas: a pesar de que la definición de semimartingala depende de la filtración dada, si disminuimos la filtración entonces la semimartingala sigue siendo semimartingala. Más rigurosamente, se cumple el siguiente teorema.

14.15 Teorema de Stricker. *Sea Z una semimartingala y sea $(\mathcal{G}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ una filtración que satisface las condiciones usuales y $\mathcal{G}_t \subset \mathfrak{F}_t$ para cada $t \geq 0$. Supongamos que Z es adaptado con respecto a $(\mathcal{G}_t)_t$. Entonces Z es una semimartingala con respecto a $(\mathcal{G}_t)_t$.*

Demostración. Inmediata por 14.13, pues $\varepsilon_T((\mathcal{G}_t)_t) \subset \varepsilon_T((\mathfrak{F}_t)_t)$. □

14.16 Observación. Vale la pena observar que el Teorema 14.13 permite adoptar otro enfoque en la teoría de integración estocástica. Se puede *definir* una semimartingala como un tal proceso para el cual las hipótesis de este teorema se cumplen. Se obtienen muchos resultados de una manera relativamente sencilla, sin necesidad de usar hechos tan profundos de la teoría general de procesos como el teorema de sección (se trabaja con el proceso de variación cuadrada en lugar del proceso de Doob-Meyer). Por ejemplo, con este enfoque se llega rápidamente a la fórmula de Itô. Lo difícil es probar que cada martingala tiene una descomposición $M + A$ con M martingala local y $A \in \mathcal{W}^0$ y que cada martingala local es semimartingala, o sea obtener el Teorema 11.22 (que $M \in \mathcal{M}^2_{Loc}$ es semimartingala se obtiene sin dificultad). El lector interesado en este enfoque puede consultar el libro de P. Protter [21].

Capítulo 15

Ecuaciones diferenciales estocásticas

En este capítulo nos restringiremos a sólo un teorema básico para la teoría de ecuaciones estocásticas: el teorema de existencia y unicidad de soluciones (más precisamente, soluciones fuertes) de una ecuación con coeficientes Lipschitzianos.

15.1 Teorema de Doléans Dade, Protter. *Sean $Z^1, Z^2, \ldots, Z^n$ semimartingalas, $Z_0^i = 0$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ y H un proceso cadlag adaptado y sean $f^1, f^2, \ldots, f^n$ funciones,*

$$f^i : \Omega \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

tales que para todo $i = 1, 2, \ldots, n$:

(i) *$f^i(\omega, s, \cdot)$ satisface la condición de Lipschitz con una constante K (K no depende de ω, ni de s).*

(ii) *$f^i(\cdot, s, x)$ es $\mathfrak{F}_s$-medible, para todo $x \in \mathbb{R}$ y $s \geq 0$.*

(iii) *$f^i(w, \cdot, x)$ es caglad, para cada $\omega \in \Omega$ y $x \in \mathbb{R}$.*

Entonces la ecuación estocástica

$$X_t = H_t + \sum_{i=1}^{n} \int_{]0,t]} f^i(s, X_{s-})\, dZ_s^i,$$

tiene solución única (módulo indistinguibilidad).

Observaciones. (a) Este teorema contiene al teorema clásico de Itô para la ecuación

$$X_t = X_0 + \int_{]0,t]} f^1(s, X_s)\, dW_s + \int_{]0,t]} f^2(s, X_s)\, ds,$$

donde f^1, f^2 son funciones lipschitzianas que *no* dependen de ω. El Teorema 15.1 permite que las f^i, $i = 1, 2, \ldots, n$, dependan de ω y además está dado para semimartingalas arbitrarias $Z^1, Z^2, \ldots, Z^n$.

(b) Este teorema nos da unicidad para la fórmula exponencial 13.12.

(c) Se podría formular para sistemas de ecuaciones.

(d) Se puede generalizar aún más: $f^i(s)$ puede depender no sólo de X_{s-} sino de toda la trayectoria "anterior a s", es decir, de la función

$$r \mapsto X_r, \text{ para } r \in [0, s[\quad \text{y} \quad f^i : \Omega \times \mathbb{R}_+ \times \mathcal{C}(\mathbb{R}_+) \to \mathbb{R}.$$

La condición de Lipschitz tendría que reformularse (ver e.g. [14], [15]). Esta situación más general aparece en la Teoría del Control.

Demostración del teorema. Vamos a demostrar el teorema para el caso $n = 1$. En el caso general la demostración es la misma, sólo las notaciones son más complicadas. Entonces consideramos:

$$X_t = H_t + \int_{]0,t]} f(s, X_{s-})\, dZ_s. \tag{15.1}$$

1. Hay que ver que si X es un proceso adaptado cadlag entonces

$$\int_{]0,t]} f(s, X_{s-})\, dZ_s$$

tiene sentido. Basta probar que $(f(s, X_{s-}))_{s \in \mathbb{R}_+}$ es caglad adaptado porque entonces será predecible localmente acotado (ver 12.7).

(a) Es adaptado: para s fijo, $f(s, X_{s-})$ es la composición de las funciones

$$\varphi(\omega) = (\omega, X_{s-}(\omega)) \quad \text{y} \quad \theta(\omega, x) = f(\omega, s, x).$$

θ es $\mathfrak{F}_s$-medible para cada x fijo por (ii), y es continua en x para ω fijo por (i), por lo tanto θ es $\mathfrak{F}_s \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R})$-medible.

φ es medible de $(\Omega, \mathfrak{F}_s)$ en $(\Omega \times \mathbb{R}, \mathfrak{F}_s \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ por ser X adaptado, por lo tanto $\theta(\varphi)$ es $\mathfrak{F}_s$-medible, es decir $(f(s, X_{s-}))_{s \in \mathbb{R}_+}$ es adaptado.

(b) Es cag: sea $s < t$ y consideremos

$$\begin{aligned} &|f(\omega, t, X_{t-}(\omega)) - f(\omega, s, X_{s-}(\omega))| \\ &\leq \; |f(t, X_{t-}) - f(s, X_{t-})| + |f(s, X_{t-}) - f(s, X_{s-})|, \end{aligned}$$

$|f(t, X_{t-}) - f(s, X_{t-})| \to 0$ si $s \uparrow t$ porque $f(\omega, \cdot, X_{t-})$ es cag y $|f(s, X_{t-}) - f(s, X_{s-})| \leq K|X_{t-} - X_{s-}|$ por (i).

Además $(X_{t-})_{t\in\mathbb{R}_+}$ es caglad porque $(X_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ es cadlag, lo que muestra que $|X_{t-}-X_{s-}| \to 0$ si $s\uparrow t$.
(c) Es lad: vamos a demostrar que $\lim_{s\downarrow t} f(\omega,s,X_{s-}(\omega)) = f(\omega,t+,X_t(\omega))$. Sea $s>t$, entonces

$$|f(t+,X_t)-f(s,X_{s-})| \leq |f(t+,X_t)-f(s,X_t)| + |f(s,X_t)-f(s,X_{s-})|.$$

El primer sumando tiende a 0 si $s\downarrow t$ porque $f(\omega,\cdot,x)$ es lad. Veamos el segundo sumando:

$$|f(s,X_t)-f(s,X_{s-})| \leq K|X_t - X_{s-}| \to 0 \quad \text{si} \quad s\downarrow t.$$

2. Basta demostrar el teorema para $H\equiv 0$. En efecto, X es solución de (15.1) si y sólo si $X-H$ es solución de

$$\overline{X} = \int_{]0,t]} \overline{f}(s,\overline{X}_{s-})\, dZ_s,$$

donde $\overline{f}(\omega,s,x) = f(\omega,s,x+H_{s-}(\omega))$.

Se deja como ejercicio al lector el verificar que $\overline{f}$ satisface (i), (ii) y (iii).

Sea f con las hipótesis (i), (ii) y (iii) del teorema. Ahora debemos buscar solución para

$$X_t = \int_{]0,t]} f(s,X_{s-})\, dZ_s. \tag{15.2}$$

3. Si existe $\theta>0$ tal que (15.2) tiene solución única para cada Z semimartingala tal que $|\Delta Z|\leq\theta$ y para toda f que satisface (i), (ii) y (iii) con la constante lipschitziana K, entonces (15.2) tiene solución única para cada semimartingala Z. En efecto, supongamos que existe $\theta>0$ tal que (15.2) tiene solución única para cada semimartingala Z con $|\Delta Z|\leq\theta$ y toda f que satisface (ii), (iii) e (i) con la constante K.

Sea ahora Z una semimartingala arbitraria. Definamos

$$T_0=0,\quad T_{n+1}=\inf\{t: t>T_n,\ |\Delta Z_t|>\theta\},\quad n=0,1,2,\ldots,$$

y consideremos (ver 13.1, recordemos que como $Z_0=0$ entonces no hace falta considerar aparte el caso $T_1(\omega)=0$)

$$(Z^{]T_1})_t = \begin{cases} Z_t, & \text{si } t<T_1 \\ Z_{T_1-}, & \text{si } t\geq T_1, \end{cases}$$

$Z^{]T_1}$ es semimartingala con saltos acotados por θ. Para ella existe (por la suposición) una única solución X^1 tal que

$$X_t^1 = \int_{]0,t]} f(s,X_{s-}^1)\, dZ_s^{]T_1}.$$

Definamos $X_t = X^1_t$ para $t < T_1$. Esto nos define automáticamente el valor de X_t en T_1 si queremos construir una solución de (15.2), porque si queremos que se cumpla $X_t = \int_{]0,t]} f(s, X_{s-})\, dZ_s$, entonces tiene que cumplirse $\Delta X_t = f(t, X_{t-})\Delta Z$ (12.10(d)). Por lo tanto *definimos* $\Delta X_{T_1} = f(T_1, X_{T_1-})\Delta Z_{T_1}$ sobre $\{T_1 < \infty\}$, pero X_{T_1-} lo conocemos porque conocemos los valores de X_t para $t < T_1$. Por lo tanto $X_{T_1} = \Delta X_{T_1} + X_{T_1-}$ queda bien determinado sobre $\{T_1 < \infty\}$. Así tenemos ya a X definido sobre $[0, T_1]$.

Supongamos que tenemos a X definido sobre $[0, T_n]$.

Consideremos la filtración $(\mathfrak{F}_{T_n+t})_{t\in\mathbb{R}_+} = (\widehat{\mathfrak{F}}_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$, que también satisface las condiciones usuales, y la semimartingala

$$\overline{Z}_t = (Z_{T_n+t} - Z_{T_n})\mathbf{1}_{\{T_n<\infty\}}$$

(verificar que efectivamente es una semimartingala c.r.a $(\widehat{\mathfrak{F}}_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$).

$\overline{T}_1 = (T_{n+1} - T_n)\mathbf{1}_{\{T_n<\infty\}}$ es un tiempo de paro c.r.a $(\widehat{\mathfrak{F}}_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ (verificarlo), y es el primer tiempo del salto mayor que θ para $\overline{Z}_t$.

Definamos

$$\overline{f}(\omega, s, x) = f(\omega, s + T_n, X_{T_n} + x)\mathbf{1}_{\{T_n<\infty\}}(\omega),$$

$\overline{f}$ satisface (i), (ii) y (iii) para la nueva filtración (ejercicio), con la misma constante K.

Podemos ahora repetir el razonamiento que se hizo para T_1. Por la suposición existe una solución única de la ecuación

$$\overline{X}^n_t = \int_{]0,t]} \overline{f}(s, \overline{X}^n_{s-})\, d\overline{Z}^{]\overline{T}_1}.$$

Definimos $X_{T_n+t} = X_{T_n} + \overline{X}^n_t$ para $t < T_{n+1} - T_n = \overline{T}_1$ si $T_n < \infty$, es decir, $X_t = X_{T_n} + \overline{X}^n_{t-T_n}$ para $T_n \le t < T_{n+1}$ y por el razonamiento anterior podemos cerrar el intervalo para obtener el proceso definido en $[0, T_{n+1}]$:

$$\Delta X_{T_{n+1}} = f(T_{n+1}, X_{T^-_{n+1}})\Delta Z_{T_{n+1}} \quad \text{si} \quad T_{n+1} < \infty.$$

Hemos obtenido un proceso $(X_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ que por construcción es cadlag y adaptado c.r.a $(\mathfrak{F}_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ (ejercicio[1]).

Ahora hay que probar que $(X_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ así definido satisface (15.2). Razonaremos nuevamente por inducción.

[1] Sugerencia: primero demostrar por inducción que X_{T_n} es $\mathfrak{F}_{T_n}$-medible y luego utilizar la representación: $X_t = \sum_{n=0}^{\infty} (X_{T_n} + \overline{X}^n_{(t-T_n)\vee 0})\mathbf{1}_{\{T_n\le t<T_{n+1}\}}$ $(\overline{X}^0 = X^1)$.

Como $(Z^{]T_1})^{T_1} = Z^{]T_1}$ y $X^1_{s-} = X_{s-}$ sobre $[0, T_1]$ tenemos por 12.10(b) y 13.2(b):

$$\begin{aligned} X^1_t &= \int_{]0,t]} f(s, X^1_{s-})\, dZ^{]T_1}_s = \int_{]0,t]} f(s, X^1_{s-})\, d(Z^{]T_1})^{T_1}_s \\ &= \int_{]0,t]} \mathbf{1}_{[0,T_1]} f(s, X^1_{s-})\, dZ^{]T_1}_s = \int_{]0,t]} \mathbf{1}_{[0,T_1]} f(s, X_{s-})\, dZ^{]T_1}_s \\ &= \int_{]0,t]} f(s, X_{s-})\, dZ^{]T_1}_s = (\int f(s, X_{s-})\, dZ_s)^{]T_1}_t. \end{aligned}$$

Como $X^1_t = X_t$ si $t < T_1$ tenemos

$$X_t = (\int_{]0,t]} f(s, X_{s-})\, dZ_s)^{]T_1}_t \quad \text{si} \quad t < T_1,$$

y por la definición de X_{T_1} también vale en $t = T_1$ si $T_1 < \infty$. Por lo tanto (15.2) se cumple en $[0, T_1]$.

Inductivamente, supongamos que así es sobre $[0, T_n]$.

$$\begin{aligned} \overline{X}^n_t &= \int_{]0,t]} \overline{f}(s, \overline{X}^n_{s-})\, d\overline{Z}^{]\overline{T}_1}_s = \int_{]0,t]} \overline{f}(s, X_{(T_n+s)-} - X_{T_n})\, d\overline{Z}^{]\overline{T}_1}_s \\ &= (\int_{]0,t]} \mathbf{1}_{\{T_n<\infty\}} f(s + T_n, X_{(s+T_n)-})\, d(Z_{T_n+s} - Z_{T_n}) \mathbf{1}_{\{T_n<\infty\}})^{]\overline{T}_1}. \end{aligned} \tag{15.3}$$

Ahora necesitaremos el siguiente resultado ("cambio de variable c.r.a tiempo").

15.2 Lema. *Si Y es un proceso predecible localmente acotado, Z es una semimartingala y T es un tiempo de paro entonces*

$$\int_{]0,t]} \mathbf{1}_{\{T<\infty\}} Y_{s+T}\, d(Z_{T+s} - Z_T) \mathbf{1}_{\{T<\infty\}} = (\int_{]0,T+t]} Y_s\, dZ_s - \int_{]0,T]} Y_s\, dZ_s) \mathbf{1}_{\{T<\infty\}},$$

donde la integral del lado izquierdo es c.r.a la filtración $(\widehat{\mathfrak{F}}_t)_{t\in\mathbb{R}_+} = (\mathfrak{F}_{T+t})_{t\in\mathbb{R}_+}$.

Demostración del lema. La demostración es típica (y un poco aburrida), por eso daremos sólo un bosquejo de ella. Sea primero $Y = \xi \mathbf{1}_{]t_1,t_2]}$ donde ξ es una v.a. acotada $\mathfrak{F}_{t_1}$-medible. Entonces

$$\mathbf{1}_{\{T<\infty\}} Y_{s+T} = \xi \mathbf{1}_{](t_1-T)\vee 0,(t_2-T)\vee 0]}(s).$$

$(t_1 - T) \vee 0$ y $(t_2 - T) \vee 0$ son tiempos de paro c.r.a $(\widehat{\mathfrak{F}}_t)_t$. Además ξ es $\mathfrak{F}_{T+(t_1-T)\vee 0}$-medible porque $\mathfrak{F}_{t_1} \subset \mathfrak{F}_{t_1 \vee T} = \mathfrak{F}_{T+(t_1-T)\vee 0} = \widehat{\mathfrak{F}}_{(t_1-T)\vee 0}$. Por lo tanto basta aplicar 12.13 para ver que la igualdad del lema se cumple en este caso. Ahora hay que aplicar el L.C.M. 4.26 y el T.C.D. 12.11 de manera similar a lo hecho en 14.10 (entre otras cosas se demuestra que $\mathbf{1}_{\{T<\infty\}}Y_{\cdot+T}$ es predecible localmente acotado c.r.a $(\widehat{\mathfrak{F}}_t)_t$. □

Por el lema tenemos que

$$(15.3) = (\int_{]0,t+T_n]} f(s, X_{s-})\, dZ_s - \int_{]0,T_n]} f(s, X_{s-})\, dZ_s)^{]\overline{T}_1}\mathbf{1}_{\{T_n<\infty\}}.$$

La hipótesis de inducción nos permite obtener

$$X_{T_n} = \int_{]0,T_n]} f(s, X_{s-})\, dZ_s$$

si $T_n < \infty$. Por otra parte, por la definición de X tenemos $\overline{X}^n_t = X_{T_n+t} - X_{T_n}$ para $t < T_{n+1} - T_n$ si $T_n < \infty$. En consecuencia obtenemos $X_{T_n+t} - X_{T_n} = \int_{]0,t+T_n]} f(s, X_{s-})\, dZ_s - X_{T_n}$ para $t < T_{n+1} - T_n$ si $T_n < \infty$, y por lo tanto $X_{T_n+t} = \int_{]0,t+T_n]} f(s, X_{s-})\, dZ_s$ para $t < T_{n+1} - T_n$. Por la definición, también se tiene la igualdad para $t = T_{n+1} - T_n$.

Así hemos mostrado que $(X_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ satisface (15.2).

La unicidad proviene de que $X^1, \overline{X}^n$ son únicos.

4. Si existe $\theta > 0$ (que puede depender de K) tal que (15.2) tiene solución única para cada $Z = M + A$, $M \in \mathcal{M}^1_{Loc}$, $A \in \mathcal{W}^0$ tal que $[M, M]_\infty \le \theta$, $|A|_\infty \le \theta$, entonces (15.2) tiene solución única para toda semimartingala Z.

Vamos a reducir el paso 4 al paso 3. Supongamos que existe una $\theta < 1$ que cumple 4. Sea Z una semimartingala tal que $|\Delta Z| \le \theta/4$.

Vamos a demostrar que (15.2) tiene solución única para esta Z. Necesitamos el siguiente lema.

15.3 Lema. *Sea Z una semimartingala con saltos acotados por a ($a \ge 0$). Si $Z - Z_0 = N + B$ es la descomposición canónica (ver 11.29 y 11.24), i.e. $N \in \mathcal{M}^1_{Loc}$, $B \in \mathcal{W}^1_{Loc}$ y B es predecible, entonces $|\Delta N| \le 2a$, $|\Delta B| \le 2a$.*

Demostración del lema. Parando se puede suponer que N es una martingala uniformemente integrable, y $B \in \mathcal{W}^1_\infty$. Por 4.24 basta demostrar que $|\Delta N_T| \le 2a$ y $|\Delta B_T| \le 2a$ c.s. para cada T tiempo de paro totalmente inaccesible o predecible. Sea T totalmente inaccesible. Entonces $\Delta B_T = 0$ c.s. por 4.25 porque B es predecible y por lo tanto $\Delta N_T = \Delta Z_T$ c.s. en consecuencia $|\Delta N_T| \le a$ c.s. Sea T predecible. En este caso

$$\begin{aligned} E(\Delta Z_T|\mathfrak{F}_{T-}) &= E(\Delta N_T|\mathfrak{F}_{T-}) + E(\Delta B_T|\mathfrak{F}_{T-}) \\ &= E(\Delta B_T|\mathfrak{F}_{T-}) = \Delta B_T \quad \text{c.s.} \end{aligned}$$

la segunda igualdad es consecuencia de que T es predecible y de 4.30, en la tercera se usa 4.27.

Entonces $|\Delta B_T| \leq a$ c.s. y por lo tanto $|\Delta N_T| \leq 2a$ c.s. □

Sea $Z = N + B$, $N \in \mathcal{M}^1_{Loc}$, $B \in \mathcal{W}^1_{Loc}$ y B es predecible ($Z_0 = 0$ por hipótesis). Por el lema, $|\Delta N| \leq \theta/2$ y $|\Delta B| \leq \theta/2$. Definimos $T_0 = 0$,

$$T_{n+1} = \inf\{t : t > T_n,\ [N]_t - [N]_{T_n} \geq \theta/2 \text{ o } |B|_t - |B|_{T_n} \geq \theta/2\}$$

para $n = 0, 1, 2, \dots$

Claramente se tiene, $[N]_t \leq \theta/2$ y $|B|_t \leq \theta/2$ si $t < T_1$. Por lo tanto

$$[N]_{T_1} = [N]_{T_1-} + \Delta[N]_{T_1} \leq \theta/2 + (\Delta N_{T_1})^2 \leq \theta/2 + \theta^2/4 \leq \theta$$

y

$$|B|_{T_1} = |B|_{T_1-} + |\Delta B|_{T_1} \leq \theta/2 + |\Delta B_{T_1}| \leq \theta/2 + \theta/2 = \theta.$$

Ahora bien, $Z^{T_1} = N^{T_1} + B^{T_1}$ y $[N^{T_1}]_\infty = [N]_{T_1} \leq \theta$, $|B^{T_1}|_\infty = |B|_{T_1} \leq \theta$ lo que muestra que Z^{T_1} es un proceso que satisface las hipótesis del paso 4. Por lo tanto existe un único X' tal que

$$X'_t = \int_{]0,t]} f(s, X'_{s-})\, dZ^{T_1}_s.$$

Definimos $X_t = X'_t$ sobre $[0, T_1]$.

Se procede inductivamente como en el paso 3, trasladando todo, y se obtiene el proceso X requerido.

5. Si (15.2) tiene solución única (con Z fijo) para cada f que satisface (i), (ii) y (iii) tal que $f(\cdot,\cdot,0)$ (como función de (ω, t)) es acotada, entonces la tiene para toda f que satisface (i), (ii) y (iii).

Sean

$$R_n = \begin{cases} 0, & \text{si } |f(0,0)| > n \\ \infty, & \text{si } |f(0,0)| \leq n \end{cases}$$

y $T_n = \inf\{t : |f(t,0)| \geq n\} \wedge R_n$ ($n \in \mathbb{N}$). Entonces $|f(t,0)| \leq n$ para $0 < t \leq T_n$ ya que f es cag. La función $f(t,x)\mathbf{1}_{]0,T_n]}(t)$ satisface claramente (i), (ii) y (iii), entonces por la hipótesis existe una solución única X^n,

$$X^n_t = \int_{]0,t]} \mathbf{1}_{]0,T_n]}(s) f(s, X^n_{s-})\, dZ_s = \left(\int f(s, X^n_{s-})\, dZ_s\right)^{T_n}_t.$$

Definamos $X_t = X^n_t$ sobre $[0, T_n]$. Por unicidad $(X_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ está bien definido.

Tomando en cuenta los pasos 2, 3, 4 y 5, vemos que para terminar la demostración del teorema basta probar que:

6. Existe $\theta < 1$ (que sólo depende de K) tal que si f satisface (i), (ii) y (iii) y $|f(\omega, t, 0)| \leq C$ y $Z = M + A$, $M \in \mathcal{M}^1_{Loc}$, $A \in \mathcal{W}^0$, $[M, M]_\infty \leq \theta$, $|A|_\infty \leq \theta$, $Z_0 = 0$, entonces (15.2) tiene solución única.

Definamos

$$\mathcal{H} = \{(X_t)_{t \in \mathbb{R}_+} : X \text{ proceso adaptado cadlag, } \sup_t |X_t| \in L^2\}.$$

Si definimos $\|X\|^2 = E(\sup_t X_t^2)$ entonces $\mathcal{H}$ es un espacio de Banach.

Consideremos el operador

$$(WX)_t = \int_{]0,t]} f(s, X_{s-})\, dZ_s.$$

Ahora vamos a demostrar que existe $\theta \in]0, 1]$ tal que si f y Z satisfacen las hipótesis de 6 entonces:

(a) $W : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$;

(b) existe $a \in]0, 1[$ tal que $\|WX - WY\| \leq a\|X - Y\|$ para todo $X, Y \in \mathcal{H}$.

Es claro que para tener (a) y (b) basta probar (a') y (b) donde la propiedad (a') es:

(a') $W0 \in \mathcal{H}$.

Demostraremos que (a') se cumple para todo $\theta > 0$. En efecto, tenemos

$$W0_t = \int_{]0,t]} f(s, 0)\, dMs + \int_{]0,t]} f(s, 0)\, dA_s = L_t + B_t,$$

($L_t = \int_{]0,t]} f(s, 0)\, dM_s$, $B_t = \int_{]0,t]} f(s, 0)\, dA_s$). Basta demostrar que $\sup_t |B_t| \in L^2$ y que $\sup_t |L_t| \in L^2$:

$$\sup_t |B_t| \leq \sup_t \int_{]0,t]} |f(s, 0)|\, d|A|_s \leq C|A|_\infty \leq C\theta.$$

Por otra parte $L \in \mathcal{M}^1_{Loc}$ y $|\Delta L_t|^2 = |f(t, 0)^2|\, |\Delta M_t|^2 \leq C^2\theta$ por 12.10(d) y 12.26 ya que $[M, M]_\infty = \langle M^c, M^c \rangle + \sum (\Delta M_s)^2 \leq \theta$ implica que cada salto de M es menor que $\sqrt{\theta}$. Tenemos así que L es una martingala local 0 en 0 con saltos acotados, entonces $L \in \mathcal{M}^2_{Loc}$ por 11.9(d) y podemos aplicar la desigualdad de Doob 11.21:

$$E(\sup_t L_t^2) \leq 4E([L, L]_\infty) \leq 4C^2 E([M, M]_\infty) \leq 4C^2\theta;$$

la penúltima desigualdad es consecuencia de: $[L, L] = [f \circ M, f \circ M] = f^2 \circ [M, M]$ (se usó 12.27). Por lo tanto $\sup_t |L_t| \in L^2$ y tenemos así que $W0 \in \mathcal{H}$.

Ahora mostraremos (b). Sea primero θ arbitraria positiva y sean $X, Y \in \mathcal{H}$.

$$\begin{aligned} WX_t - WY_t &= \int_{]0,t]} (f(s, X_{s-}) - f(s, Y_{s-}))\, dM_s \\ &\quad + \int_{]0,t]} (f(s, X_{s-}) - f(s, Y_{s-}))\, dA_s. \end{aligned}$$

Llamemos L_t al primer sumando y B_t al segundo.

$$\begin{aligned} \sup_t |B_t| &\leq \sup_t \int_{]0,t]} |f(s, X_{s-}) - f(s, Y_{s-})|\, d|A|_s \\ &\leq K \sup_t |X_t - Y_t|\, |A|_\infty \leq K\theta \sup_t |X_t - Y_t|, \end{aligned}$$

por lo tanto $\|B\| \leq K\theta \|X - Y\|$.

Por otra parte, L es una martingala local, $L_0 = 0$ y

$$|\Delta L_t|^2 = |f(t, X_{t-}) - f(t, Y_{t-})|^2 \Delta M_t^2 \leq K \sup_t |X_t - Y_t|^2 \theta,$$

por lo tanto $E(\sup_t (\Delta L_t)^2) < \infty$. Entonces, $L \in \mathcal{M}^2_{Loc}$ por 11.10 y por lo tanto

$$\begin{aligned} |L|^2 = E(\sup_t L_t^2) &\leq 4E([L, L]_\infty) \\ &= 4E \int_{]0,t]} (f(s, X_{s-}) - f(s, Y_{s-}))^2\, d[M, M]_s \\ &\leq 4K^2 E(\sup_t |X_t - Y_t|^2 [M, M]_\infty) \leq 4K^2\theta \|X - Y\|^2, \end{aligned}$$

por lo tanto $\|WX - WY\| \leq (K\theta + 2K\sqrt{\theta})\|X - Y\|$ y basta tomar $\theta < 1$ tal que $K\theta + 2K\sqrt{\theta} = a < 1$.

Con esto hemos demostrado que para una θ con las propiedades pedidas, W es contracción en $\mathcal{H}$ espacio de Banach, lo que muestra que W tiene un único punto fijo en $\mathcal{H}$, o sea, (15.2) tiene solución única en $\mathcal{H}$ (única en el sentido de la norma de $\mathcal{H}$ y esto implica única módulo indistinguibilidad).

Sólo falta mostrar que no hay solución de (15.2) fuera de $\mathcal{H}$. Sea X una solución de (15.2) para f, Z fijos con las hipótesis del paso 6. Sea $T_n = \inf\{t : |X_t| \geq n\}$. Basta demostrar que X^{T_n} es acotado porque entonces X^{T_n} es la única solución de ecuación (15.2) para Z^{T_n}, porque $X^{T_n} \in \mathcal{H}$. (y haciendo $n \to \infty$ se obtiene la solución única para Z).

Para mostrar que X^{T_n} es acotado, basta de hecho ver que ΔX_{T_n} es acotado (porque antes de T_n, X^{T_n} es acotado por n ya que $X_0 = 0$)

$$|\Delta X_{T_n}| = |f(T_n, X_{T_n-})|\, |\Delta Z_{T_n}| \leq (Kn + C)2\sqrt{\theta} < \infty,$$

ya que

$$\begin{aligned}|f(T_n, X_{T_n-})| &\leq |f(T_n, X_{T_n-}) - f(T_n, 0)| + |f(T_n, 0)| \\ &\leq K|X_{T_n-}| + C \leq Kn + C,\end{aligned}$$

y

$$|\Delta Z_{T_n}| \leq |\Delta M_{T_n}| + |\Delta A_{T_n}| \leq \sqrt{\theta} + \Delta|A_{T_n}| \leq \sqrt{\theta} + \theta < 2\sqrt{\theta}.$$

$\square$

Capítulo 16

Información sobre la integral de Stratonovich

La integral de Stratonovich es otra integral estocástica, a veces más cómoda que la de Itô aunque su campo de aplicación es más restringido.

16.1 Definición. Sean X, Z dos semimartingalas continuas. La *integral de Stratonovich* de X con respecto a Z se define como:

$$\oint_{]0,t]} X_s \, dZ_s = \int_{]0,t]} X_s \, dZ_s + \frac{1}{2}[X^c, Z^c]_t. \text{ [1]}$$

16.2 Observación. Sean X, Z dos semimartingalas continuas. Entonces

$$\oint_{]0,t]} X \, dZ = \int_{]0,t]} X \, dZ + \frac{1}{2}[X, Z]_t.$$

En efecto, por 12.26 se tiene

$$[X, Z] = [X^c, Z^c] + \sum \Delta X \Delta Z = [X^c, Z^c].$$

Veremos ahora que la definición de $\oint$ es "natural".

16.3 Proposición. *Sean X, Z dos semimartingalas continuas y $\{t_j^n\}_{j,n}$ una sucesión normal de particiones de $\mathbb{R}_+$ (ver 9.9). Sean X^n, Z^n procesos construidos a partir de X y Z por*

[1] Muy a menudo la integral de Stratonovich se denota por $\int X \circ dZ$.

interpolación lineal de dichos procesos en los puntos de la enésima partición $\{t_0^n, t_1^n, \ldots\}$ *(*$n = 1, 2, \ldots$*). Entonces*

$$\oint X\,dZ = \lim_{n\to\infty}(P)\int_{]0,t]} X^n\,dZ^n,$$

donde las $\int X^n\,dZ^n$ *son integrales de Stieltjes.*

(Advertencia. Las integrales $\int X^n\,dZ^n$ no se pueden interpretar como integrales estocásticas pues X^n, Z^n ni siquiera son adaptados).

Demostración. Recordemos que la integral de Itô $\int X\,dZ$ es el límite en probabilidad de unas "sumas de Riemann", a saber, por el T.C.D. 12.11

$$\int_{]0,t]} X\,dZ = \lim_n (P)\sum_j X_{t_j^n\wedge t}(Z_{t_{j+1}^n\wedge t} - Z_{t_j^n\wedge t})$$

(ver la demostración del Teorema 12.14). Entonces, por 16.3 y 12.14 tenemos

$$\begin{aligned}
\oint_{]0,t]} X\,dZ &= \lim_n (P)\Big(\sum_j X_{t_j^n\wedge t}(Z_{t_{j+1}^n\wedge t} - Z_{t_j^n\wedge t}) \\
&\quad + \frac{1}{2}\sum_j (X_{t_{j+1}^n\wedge t} - X_{t_j^n\wedge t})(Z_{t_{j+1}^n\wedge t} - Z_{t_j^n\wedge t})\Big) \\
&= \lim_n (P)\sum_j \frac{1}{2}(X_{t_j^n\wedge t} + X_{t_{j+1}^n\wedge t})(Z_{t_{j+1}^n\wedge t} - Z_{t_j^n\wedge t}) \\
&= \lim_n (P)\int_{]0,t]} X^n\,dZ^n.
\end{aligned}$$

□

Otra propiedad "buena" de la integral de Stratonovich está dada en el siguiente teorema.

16.4 Teorema (teorema fundamental del cálculo). *Si* $f \in \mathcal{C}^3(\mathbb{R})$ *y* Z *es una semimartingala continua entonces*

$$\oint_{]0,t]} f'(Z_s)\,dZ_s = f(Z_t) - f(Z_0).$$

Demostración. $f' \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$, por lo tanto $f'(Z_s)$ es una semimartingala (por 13.3) continua y por lo tanto $\oint f'(Z)\,dZ$ existe. Por la Definición 16.1 tenemos

$$\oint f'(Z)\,dZ = \int f'(Z)\,dZ + \frac{1}{2}[(f'(Z))^c, Z^c]. \tag{16.1}$$

Por otra parte, aplicando la fórmula de Itô 13.3 a $f'(Z)$ obtenemos

$$f'(Z) = f'(Z_0) + \int f''(Z)\,dZ + \frac{1}{2}\int f'''(Z)\,d[Z^c].$$

El tercer sumando está en $\mathcal{W}^0$, por lo tanto, de la Definición 11.27,

$$(f'(Z))^c = \left(\int f''(Z)\,dZ\right)^c = \int f''(Z)\,dZ^c$$

(en la última igualdad se usó 12.28).

En consecuencia,

$$[(f'(Z))^c, Z^c] = [\int f''(Z)\,dZ^c, Z^c] = \int f''(Z)\,d[Z^c],$$

por 12.27. Sustituyendo esto en (16.1) obtenemos

$$\begin{aligned} \oint_{]0,t]} f'(Z)\,dZ &= \int_{]0,t]} f'(Z)\,dZ + \frac{1}{2}\int_{]0,t]} f''(Z)\,d[Z^c] \\ &= f(Z_t) - f(Z_0) \end{aligned}$$

(la última igualdad es nuevamente la fórmula de Itô). □

16.5 Observación. En este teorema hicimos la suposición $f \in \mathcal{C}^3(\mathbb{R})$ para saber que $f'(Z)$ es una semimartingala. Sucede que basta suponer que $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$, pero en este caso hay que generalizar la definición de la integral de Stratonovich demostrando que se puede definir el proceso $[f'(Z), Z]$, lo cual no es trivial (ver [18]).

Apéndice A

Lema de las clases monótonas

No cabe duda que el lector conoce algunos teoremas (lemas) de las clases monótonas ya que estos teoremas se utilizan muy a menudo en la teoría de medida y la teoría de procesos estocásticos. Sin embargo existen varias formulaciones de ellos, no siempre equivalentes, por lo tanto parece conveniente formular y demostrar aquí exactamente éstos teoremas de las clases monótonas que se usan en esta monografía.

A.1 Definición. Sea Ω un conjunto no vacío.

(a) Decimos que una clase no vacía $\mathcal{A}$ de subconjuntos de Ω es un *π-sistema* si $\mathcal{A}$ es cerrada bajo las intersecciones finitas.

(b) Decimos que una clase $\mathcal{L}$ de subconjuntos de Ω es un *λ-sistema* si

(i) $\Omega \in \mathcal{L}$;

(ii) si $A, B \in \mathcal{L}$, $A \subset B$ entonces $B - A \in \mathcal{L}$;

(iii) si $A_n \in \mathcal{L}$, $A_n \subset A_{n+1}$, $n = 1, 2, \ldots$, entonces $\cup_n A_n \in \mathcal{L}$.

A.2 Teorema (lema de π, λ-sistemas). *Si un λ-sistema $\mathcal{L}$ contiene a un π-sistema $\mathcal{A}$ entonces $\mathcal{L} \supset \sigma(\mathcal{A})$.*

A.3 Lema. *Si $\mathcal{L}$ es un λ-sistema entonces para todos $A, B \in \mathcal{L}$ tales que $A \cap B = \emptyset$ se tiene que $A \cup B \in \mathcal{L}$.*

Demostración del Lema A.3. Si $A \in \mathcal{L}$ entonces $A^C \in \mathcal{L}$ por (i) y (ii). Como A, B son ajenos se tiene $A \subset B^C$, por lo tanto (ii) implica $B^C - A \in \mathcal{L}$. Finalmente basta observar que $A \cup B = (B^C - A)^C$. □

A.4 Lema. *Si $\mathcal{L}$ es a la vez un λ-sistema y un π-sistema entonces es una σ-álgebra.*

Demostración del Lema A.4. En virtud de (iii) basta probar que para todos $A, B \in \mathcal{L}$ se tiene $A \cup B \in \mathcal{L}$. Pero $A \cup B = A \cup (B - A \cap B)$ entonces basta utilizar el lema anterior, ya que $A \cap B \in \mathcal{L}$ (por ser $\mathcal{L}$ un π-sistema) y $A \cap B \subset B$ y por lo tanto $B - A \cap B \in \mathcal{L}$. □

Demostración del Teorema A.2. Sea $\mathcal{K}$ el λ-sistema generado por $\mathcal{A}$, o más rigurosamente, la intersección de todos los λ-sistemas que contienen a $\mathcal{A}$ (es obvio que la intersección de una familia arbitraria de λ-sistemas es λ-sistema). Claramente $\mathcal{L} \supset \mathcal{K} \supset \mathcal{A}$, entonces basta demostrar que $\mathcal{K}$ es σ-álgebra. Como $\mathcal{K}$ es un λ-sistema, en virtud del Lema A.4 basta probar que $\mathcal{K}$ es π-sistema. Fijemos un $A \in \mathcal{A}$ arbitrario y definamos

$$\mathcal{B}_1 := \{B \subset \Omega : A \cap B \in \mathcal{K}\}.$$

Por ser $\mathcal{A}$ un π-sistema tenemos $\mathcal{B}_1 \supset \mathcal{A}$ y es inmediato ver que $\mathcal{B}_1$ es un λ-sistema. En consecuencia obtenemos $\mathcal{B}_1 \supset \mathcal{K}$. Así hemos probado que para cada $A \in \mathcal{A}$ y cada $B \in \mathcal{K}$ se tiene $A \cap B \in \mathcal{K}$.

Fijemos ahora un $B \in \mathcal{K}$ arbitrario y definamos

$$\mathcal{B}_2 := \{A \subset \Omega : A \cap B \in \mathcal{K}\}.$$

Por lo anterior $\mathcal{B}_2 \supset \mathcal{A}$ y además $\mathcal{B}_2$ es un λ-sistema; por lo tanto $\mathcal{B}_2 \supset \mathcal{K}$. Así vemos que para todos $A, B \in \mathcal{K}$ se tiene $A \cap B \in \mathcal{K}$, es decir $\mathcal{K}$ es un π-sistema. □

Formulemos otra vez el Teorema 4.26.

A.5 Teorema (lema de las clases monótonas). *Sea Ω un conjunto no vacío y $\mathcal{A}$ un π-sistema de subconjuntos de Ω.*

(a) *Sea $\mathcal{H}$ una clase lineal de funciones reales definidas en Ω tal que:*
  (i) $1 \in \mathcal{H}$.
  (ii) $\mathbf{1}_A \in \mathcal{H}$, *para cada* $A \in \mathcal{A}$.
  (iii) *Si* $(\zeta_n)_n$ *es una sucesión no decreciente de elementos de* $\mathcal{H}$ *con* $\zeta_n \geq 0$ *para cada* n *y* $\zeta_n \uparrow \zeta$, *entonces* $\zeta \in \mathcal{H}$.

  Entonces $\mathcal{H}$ contiene a todas las funciones $\sigma(\mathcal{A})$-medibles.

(b) *Sea $\mathcal{H}$ una clase lineal de funciones reales acotadas definidas en Ω tal que se cumplen* (i),(ii) *y*
  (iii′) $\zeta_n \in \mathcal{H}$, $\zeta_n \geq 0$ $(n \in \mathbb{N})$, $\zeta_n \uparrow \zeta$ *y* ζ *es acotada entonces* $\zeta \in \mathcal{H}$.

  Entonces $\mathcal{H}$ contiene a todas las funciones $\sigma(\mathcal{A})$ medibles y acotadas.

Demostración. Sea $\mathcal{L} := \{A \subset \Omega : \mathbf{1}_A \in \mathcal{H}\}$. Por hipótesis $\mathcal{L} \supset \mathcal{A}$ y $\mathcal{L}$ es λ-sistema (en el caso (a) así como en el caso (b)). Entonces, en virtud del Teorema A.2, $\mathcal{L} \supset \sigma(\mathcal{A})$.

Por lo tanto, como $\mathcal{H}$ es lineal, contiene a todas las funciones simples (o "escalonadas") $\sigma(\mathcal{A})$-medibles. Si ζ es una función $\sigma(\mathcal{A})$-medible (acotada en el caso (b)), $\zeta \geq 0$, entonces existen funciones medibles simples ζ_n, $\zeta_n \geq 0$, $\zeta_n \uparrow \zeta$. En consecuencia $\zeta \in \mathcal{H}$. Para ζ no necesariamente no negativa consideramos la descomposición $\zeta = \zeta^+ - \zeta^-$ y utilizamos la linealidad de $\mathcal{H}$. $\square$

Apéndice B

Demostración del teorema de Choquet

Vamos a demostrar el teorema de capacidad de Choquet 4.2. Daremos una demostración bastante bonita y relativamente sencilla, encontrada por C. Dellacherie [1].

Para comodidad del lector repetimos aquí las definiciones y el enunciado del teorema.

B.1 Definición. (a) Sea E un conjunto y $\mathcal{E}$ una clase de subconjuntos de E. Decimos que $\mathcal{E}$ es un *pavimento* si:

(i) $\emptyset \in \mathcal{E}$,

(ii) Si $A, B \in \mathcal{E}$ entonces $A \cup B \in \mathcal{E}$,

(iii) Si $A_n \in \mathcal{E}$, $n = 1, 2, \ldots$ entonces $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{E}$.

(b) El *mosaico* $\mathcal{M}$ generado por $\mathcal{E}$ es la mínima clase cerrada bajo uniones numerables e intersecciones numerables que contienen a $\mathcal{E}$.

(c) Una *capacidad* ($\mathcal{E}$-capacidad, $\mathcal{E}$-capacidad de Choquet) en $(E, \mathcal{E})$ es una función $I: 2^E \to \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ tal que:

(i) Si $A \subset B$ entonces $I(A) \leq I(B)$.

(ii) Si $A_n \subset A_{n+1}$, $n = 1, 2, \ldots$ entonces $I(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sup_n I(A_n)$.

(iii) Si $A_n \in \mathcal{E}$ y $A_n \supset A_{n+1}$, $n = 1, 2, \ldots$, entonces:

$$I(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n) = \inf_n I(A_n).$$

B.2 Teorema de Capacidad de Choquet. *Sea $\mathcal{E}$ un pavimento sobre E y sea I una capacidad sobre $(E, \mathcal{E})$. Entonces para cada $A \in \mathcal{M}$,*

$$I(A) = \sup\{I(K) : K \subset A,\ K \in \mathcal{E}\} \tag{B.1}$$

donde $\mathcal{M}$ es el mosaico generado por $\mathcal{E}$.

Denotemos por $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ al mosaico generado por una clase $\mathcal{A}$ de subconjuntos de E.

B.3 Lema. *$\mathcal{M}(\mathcal{E})$ es la mínima clase cerrada bajo uniones numerables crecientes e intersecciones numerables decrecientes que contienen a $\mathcal{E}$.*

Demostración. Sea $\mathcal{K}$ el conjunto de todas las clases de subconjuntos de E, cerradas bajo uniones numerables crecientes e intersecciones numerables decrecientes, que contienen a $\mathcal{E}$. Sea $\mathcal{M}'(\mathcal{E})$ la intersección de todos los elementos de $\mathcal{K}$, o sea el elemento mínimo de $\mathcal{K}$. Claramente $\mathcal{M}(\mathcal{E}) \supset \mathcal{M}'(\mathcal{E})$. Para demostrar que $\mathcal{M}(\mathcal{E}) \subset \mathcal{M}'(\mathcal{E})$ basta probar que $\mathcal{M}'(\mathcal{E})$ es cerrada bajo uniones e intersecciones finitas. El argumento es idéntico al de la demostración del Teorema A.2. Fijemos $A \in \mathcal{E}$ arbitrario y sea

$$\mathcal{B} = \{B : A \cup B \in \mathcal{M}'(\mathcal{E}),\ A \cap B \in \mathcal{M}'(\mathcal{E})\}.$$

Está claro que $\mathcal{B} \supset \mathcal{E}$ y es fácil probar que $\mathcal{B} \in \mathcal{K}$. Por lo tanto $\mathcal{B} \supset \mathcal{M}'(\mathcal{E})$. Ahora fijemos $B \in \mathcal{M}'(\mathcal{E})$ arbitrario y definamos

$$\mathcal{A} = \{A : A \cup B \in \mathcal{M}'(\mathcal{E}),\ A \cap B \in \mathcal{M}'(\mathcal{E})\}.$$

Por lo anterior tenemos $\mathcal{A} \supset \mathcal{E}$ y además $\mathcal{A} \in \mathcal{K}$; por lo tanto $\mathcal{A} \supset \mathcal{M}'(\mathcal{E})$, lo que termina la demostración del lema. □

B.4 Lema. *Para cada $A \in \mathcal{M}(\mathcal{E})$ existe una topología en E con base numerable, tal que cada conjunto cerrado pertenece a $\mathcal{E} \cup \{E\}$ y A pertenece al mosaico generado por todos los conjuntos cerrados.*

Demostración. Sea $\mathcal{A} = \{A :$ existe una clase numerable $\{F_n\}_n$, tal que $F_n \in \mathcal{E}$ para $n = 1, 2, \dots$ y $A \in \mathcal{M}(\{F_n\}_n)\}$.

Basta demostrar que $\mathcal{A} \supset \mathcal{M}(\mathcal{E})$, porque para cada $A \in \mathcal{A}$, si consideramos la topología cuya clase de los conjuntos cerrados está compuesta de $\{E\}$ y de todos las intersecciones a lo más numerables de los elementos de $\{F_n\}_n$ (las cuales por hipótesis pertenecen a $\mathcal{E}$), entonces $A \in \mathcal{M}(\{F_n\}_n) = \mathcal{M}(\text{cerrados})$.

Como $\mathcal{A} \supset \mathcal{E}$, para probar que $\mathcal{A} \supset \mathcal{M}(\mathcal{E})$ basta observar que $\mathcal{A}$ es un mosaico (ejercicio). □

B.5 Lema. *Basta demostrar el teorema de Choquet bajo la suposición adicional de que E es un espacio topológico y $\mathcal{E}$ es la clase de todos los conjuntos cerrados.*

Demostración. Supongamos que tenemos $(E, \mathcal{E})$, I y $A \in \mathcal{M}(\mathcal{E})$ como en el teorema de Choquet.

Si $A = E$ entonces la fórmula (B.1) se cumple porque para la familia $\{F_n\}_n$ encontrada en la demostración del Lema B.4 tenemos $E \supset \mathcal{M}(\{F_n\}_n)$ y por lo tanto $E = \cup_n F_n$, entonces (B.1) se sigue de la definición de la capacidad.

Ahora fijemos $A \neq E$, consideremos la topología asociada a A, dada por el Lema B.4 y denotemos $\mathcal{E}' =$ la clase de todos los conjuntos cerrados en esta topología. $\mathcal{E}'$ es un pavimento y es obvio que I es también una $\mathcal{E}'$-capacidad. Si el teorema de Choquet se cumple para $\mathcal{E}', I$ entonces tenemos

$$I(A) = \sup\{I(K) : K \subset A,\ K \in \mathcal{E}'\}$$

ya que $A \in \mathcal{M}(\mathcal{E}')$. Esto termina la demostración del lema pues $\mathcal{E}' \subset \mathcal{E} \cup \{E\}$ y $A \neq E$. □

Así pues supongamos que tenemos un espacio topológico E (no necesariamente de Hausdorff), $\mathcal{E}$ es el pavimento de todos sus subconjuntos cerrados e I es una $\mathcal{E}$-capacidad. Para demostrar el teorema basta obviamente probar que para cada $A \in \mathcal{M}(\mathcal{E})$ y para cada $t \in \mathbb{R}_+$ tal que $I(A) > t$, existe un conjunto cerrado $B \subset A$, tal que $I(B) \geq t$.

Sea $A \in \mathcal{M}(\mathcal{E})$ y $I(A) > t$. Basta claramente encontrar una sucesión $(A_n)_n$ decreciente de subconjuntos de A tal que $I(A_n) > t$ para cada n, y $\overline{\cap_n A_n} \subset A$ (como siempre, $\overline{B}$ significa la cerradura del conjunto B). En efecto, si una tal sucesión existe tenemos $I(\overline{A_n}) \geq I(A_n) > t$, $n \in \mathbb{N}$, de donde

$$I(\overline{\bigcap_n A_n}) = I(\bigcap_n \overline{A_n}) = \lim_{n\to\infty} I(\overline{A_n}) \geq t \quad (\text{porque } \overline{A_n} \in \mathcal{E}).$$

La idea ingeniosa de la demostración consiste en probar algo más fuerte pero a la vez más fácil de demostrar. A saber, consideremos el siguiente *juego de Sierpinski.* Fijemos $A \subset E$ y $t \in \mathbb{R}_+$ tal que $I(A) > t$. Hay dos jugadores, J_1 y J_2 que juegan de la manera siguiente: J_1 escoge un conjunto $B_1 \subset A$, tal que $I(B_1) > t$, luego J_2 escoge un conjunto $A_1 \subset B_1$, tal que $I(A_1) > t$, luego J_1 escoge $B_2 \subset A_1$, tal que $I(B_2) > t$, etc. Como resultado del juego obtenemos dos sucesiones de conjuntos $(A_n)_n, (B_n)_n$ tales que

$$A \supset B_1 \supset A_1 \supset B_2 \supset A_2 \supset \cdots \supset B_n \supset A_n \supset B_{n+1} \supset \cdots$$

y $I(B_n) > t$, $I(A_n) > t$ para $n \in \mathbb{N}$. Decimos que J_2 gana el juego si $\overline{\cap_n A_n} \subset A$ (claramente $\overline{\cap_n A_n} = \overline{\cap_n B_n}$). Este juego lo vamos a llamar juego-(A, t).

En virtud de la observación anterior bastaría probar que para cada $A \in \mathcal{M}(\mathcal{E})$ y $I(A) > t$ existe una realización del juego-(A, t) tal que J_2 gana (o sea J_2 puede ganar si J_1 "juega mal").

Sucede ser más fácil probar una aseveración más fuerte.

B.6 Lema. *Para cada $A \in \mathcal{M}(\mathcal{E})$ y $t \in \mathbb{R}_+$ tal que $I(A) > t$, el jugador J_2 tiene una estrategia ganadora en el juego-(A,t).*

Es decir, no sólo es posible que J_2 gane, sino tiene que ganar si juega correctamente aunque J_1 jugara "muy bien".

Demostración. Sea $\mathcal{G}$ la clase de todos los conjuntos A tales que J_2 tiene una estrategia ganadora en el juego-(A,t), si $I(A) > t$.

Una estrategia de J_2 la podemos describir como una sucesión de funciones $f_n: (2^E)^n \to 2^E$, tales que $f_n(B_1,\dots,B_n) \subset B_n$, $I(f_n(B_1,\dots,B_n)) > t$. $f_n(B_1,\dots,B_n)$ es el conjunto que escoge J_2 en la enésima etapa del juego si J_1 ha escogido (en las primeras n etapas) los conjuntos $B_1,\dots,B_n$ consecutivamente. Es decir, una vez elegida la estrategia, la realización general del juego tiene la forma $A \supset B_1 \supset f_1(B_1) \supset B_2 \supset f_2(B_1,B_2) \supset \cdots$.

Es obvio que $\mathcal{E} \subset \mathcal{G}$, pues si $A \in \mathcal{E}$ entonces J_2 siempre gana. Para demostrar que $\mathcal{M}(\mathcal{E}) \subset \mathcal{G}$, por el Lema B.3 basta probar que la clase $\mathcal{G}$ es cerrada bajo las uniones numerables crecientes e intersecciones numerables.

Supongamos primero que $A^m \in \mathcal{G}$, $A^m \subset A^{m+1}$, $m = 1,2,\dots$ y sea $A = \cup_{m=1}^{\infty} A^m$. Fijemos un t tal que $I(A) > t$. Como $I(A^m) \uparrow I(A)$ tenemos $I(A^m) > t$ para m grande; podemos suponer que esta desigualdad se cumple para cada m.

Sea $(f_n^m)_{n\in\mathbb{N}}$ la estrategia ganadora para J_2 en el juego-(A^m,t). Queremos construir una estrategia ganadora del juego-(A,t). Supongamos que en la primera etapa el jugador J_1 ha escogido $B_1 \subset A$, $I(B_1) > t$. Claramente $B_1 \cap A^m \uparrow B_1$, por lo tanto existe $m(B_1) \in \mathbb{N}$ tal que $I(B_1 \cap A^{m(B_1)}) > t$.

Definimos $f_n(B_1,\dots,B_n) = f_n^{m(B_1)}(B_1 \cap A^{m(B_1)}, B_2,\dots,B_n)$. Es claro que $(f_n)_n$ es una estrategia ganadora en el juego-(A,t), porque $\overline{\cap_n f_n(B_1,\dots,B_n)} \subset A^{m(B_1)} \subset A$.

Ahora probaremos que $\mathcal{G}$ es cerrada bajo las intersecciones numerables. Para entender la idea empecemos con solamente dos conjuntos.

Así, sean $A^1, A^2 \in \mathcal{G}$ y fijemos un t tal que $I(A^1 \cap A^2) > t$. Claramente tenemos también $I(A^m) > t$, $m = 1,2$.

Sean $(f_n^1)_n$ y $(f_n^2)_n$ las estrategias ganadoras para los juegos -(A^1,t) y -(A^2,t), respectivamente. Definimos una estrategia para el juego-$(A^1 \cap A^2, t)$ de la manera siguiente:

$$f_n(B_1,\dots,B_n) = \begin{cases} f_k^1(B_1,\dots,B_{2k-1}) & \text{si } n = 2k-1 \\ f_k^2(B_2,\dots,B_{2k}) & \text{si } n = 2k \end{cases} \qquad k = 1,2,\dots$$

Es decir la realización general del juego tiene la forma:

$$A^1 \cap A^2 \supset B_1 \supset f_1^1(B_1) \supset B_2 \supset f_1^2(B_2) \supset B_3 \supset f_2^1(B_1,B_3) \supset B_4 \supset f_2^2(B_2,B_4) \supset \cdots.$$

Tenemos

$$\bigcap_n f_n(B_1,\dots,B_n) = \bigcap_k f_k^1(B_1,\dots,B_{2k-1}) = \bigcap_k f_k^2(B_2,\dots,B_{2k}),$$

pero

$$\overline{\bigcap_k f_k^1(B_1,\dots,B_{2k-1})} \subset A^1, \quad \overline{\bigcap_k f_k^2(B_2,\dots,B_{2k})} \subset A^2,$$

por lo tanto $\overline{\cap_n f_n(B_1,\dots,B_n)} \subset A^1 \cap A^2$, lo que significa que $(f_n)_n$ es una estrategia ganadora para el juego-$(A^1 \cap A^2, t)$.

En el caso general el razonamiento es análogo.

Sean $A^m \in \mathcal{G}$, $m = 1,2,\dots$; denotemos $A = \cap_{m=1}^{\infty} A^m$ y fijemos t tal que $I(A) > t$. Fijemos una partición del conjunto $\mathbb{N}$: $\mathbb{N} = \cup_{m=1}^{\infty} \mathbb{N}^m$, tal que cada conjunto $\mathbb{N}^m$ es infinito y $\mathbb{N}^m \cap \mathbb{N}^k = \emptyset$ si $m \neq k$ (en el caso anterior $\mathbb{N}^1 = \{1,3,5,\dots\}$ y $\mathbb{N}^2 = \{2,4,6,\dots\}$). Sean $\mathbb{N}^m = \{k_1^m, k_2^m, \dots\}$ y $N(n,m) = \# N^m \cap \{1,\dots,n\}$, $m = 1,2,\dots$

Definimos la siguiente estrategia para el juego-(A,t):

$$f_n(B_1,\dots,B_n) = f^m_{N(m,n)}(B_{k_1^m}, B_{k_2^m}, \dots, B_n)$$

si $n \in \mathbb{N}^m$ (o sea $n = k^m_{N(n,m)}$). Nótese que por la definición tiene que ser $B_1 \subset A$.

Análogamente como antes obtenemos que $(f_n)_n$ es una estrategia ganadora para el juego-(A,t).

Así hemos demostrado el Lema B.6 y por lo tanto el teorema de Choquet. □

Obsérvese que fue la última parte de la demostración (es decir con las intersecciones) donde la idea de considerar el juego de Sierpinski ha sido realmente útil.

Apéndice C

Cómo debilitar las condiciones usuales

Casi todos los teoremas de esta monografía se demostraron bajo la Hipótesis 2.15, es decir que la filtración satisface las condiciones usuales. En el Capítulo 1 vimos que esta hipótesis no es muy restrictiva. En este apéndice haremos unas observaciones que permiten obtener muchos de los resultados bajo suposiciones aún más débiles.

Supongamos que en un espacio de propabilidad $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ tenemos una filtración arbitraria $(\mathfrak{F}_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$.

La definición de las σ-álgebras de conjuntos opcionales $\mathcal{O}$ y conjuntos predecibles $\mathcal{P}$ asociadas con $(\mathfrak{F}_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ es idéntica como antes, es decir, dada por 3.11.

C.1 Definición. Se dice que un tiempo de paro T es predecible si $[T, \infty[\, \in \mathcal{P}$.

C.2 Observaciones. (a) Otra vez tenemos que (compare 4.14) un tiempo de paro T es predecible si y sólo si $[T] \in \mathcal{P}$.

(b) Si para un tiempo de paro T existe una sucesión $(T_n)_n$ de tiempos de paro que predice a T (i.e. $T_n \uparrow T$, $T_n < T$ sobre $\{T > 0\}$), entonces T es predecible. En efecto, basta observar que

$$[0, T[\, = \{0\} \times \{T > 0\} \cup \bigcup_n \,]0, T_n].$$

C.3 Proposición. (a) $\mathcal{P} = \sigma(\{[T, \infty[\, : T\textit{-predecible}\})$.
(b) $\mathcal{O} = \sigma(\{[T, \infty[\, : T\textit{-tiempo de paro}\})$.

Demostración. (a) Se obtiene, utilizando la observación anterior, por el mismo argumento como en la demostración del Teorema 3.12 ("$\mathcal{P}_a \subset \mathcal{P}_e$" en la notación de aquel teorema).

(b) Es lo mismo que el Teorema 3.16 y la demostración es también idéntica. □

C.4 Lema. *Si T es un tiempo de paro con respecto a la filtración $(\overline{\mathfrak{F}_t})_{t\in\mathbb{R}_+}$,*[(1)] *entonces existe un tiempo de paro S con respecto a $(\mathfrak{F}_{t+})_{t\in\mathbb{R}_+}$ tal que $T = S$ c.s. Además para cada $A \in \overline{\mathfrak{F}_T}$ existe $A' \in \mathfrak{F}_{S+}$ tal que $A = A'$ c.s.*

Demostración. 1. Supongamos primero que $T = t_B$ para algún $B \in \overline{\mathfrak{F}_t}$ y $t \geq 0$, es decir $T(\omega) = t$ si $\omega \in B$ y $T(\omega) = \infty$ si $\omega \notin B$ (ver 2.23). Entonces existe $B' \in \mathfrak{F}_t$ tal que $B = B'$ c.s. Es claro que $S = t_{B'}$ tiene las propiedades deseadas.

2. Si $T = T_1 \wedge \cdots \wedge T_k$, donde $T_1, \ldots, T_k$ tienen la forma como en el paso 1 y $S_1, \ldots, S_k$ son los tiempos de paro, con respecto a $(\mathfrak{F}_{t+})_{t\in\mathbb{R}_+}$, correspondientes, entonces basta claramente tomar $S = S_1 \wedge \cdots \wedge S_k$. Obsérvese que para T como en los pasos 1 y 2 hemos encontrado S, que es tiempo de paro con respecto a $(\mathfrak{F}_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$.

3. Sea T arbitrario; definimos para $n \in \mathbb{N}$.

$$T_n = \begin{cases} 0 & \text{si } T = 0, \\ k/2^n & \text{si } (k-1)/2^n < T \leq k/2^n \text{ para } k = 1, 2, \ldots, n2^n, \\ \infty & \text{si } T > n. \end{cases}$$

Es claro que T_n tiene la forma como en el paso 2. Sea S_n un tiempo de paro con respecto a $(\mathfrak{F}_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ tal que $S_n = T_n$ c.s. Como $T_n \downarrow T$ entonces $T = \inf_n S_n$ c.s., y $\inf_n S_n$ es un tiempo de paro con respecto a $(\mathfrak{F}_{t+})_{t\in\mathbb{R}_+}$ en virtud de la Proposición 2.8(b).

4. Falta demostrar la última aseveración. Así pues sea T un tiempo de paro c.r.a $(\overline{\mathfrak{F}_t})_{t\in\mathbb{R}_+}$, S un tiempo de paro c.r.a $(\mathfrak{F}_{t+})_{t\in\mathbb{R}_+}$, $T = S$ c.s., y sea $A \in \overline{\mathfrak{F}}_T$. Como $\overline{\mathfrak{F}}_T \subset \overline{\mathfrak{F}}_\infty$, entonces existe $B \in \mathfrak{F}_\infty$ tal que $A = B$ c.s. Por otro lado sabemos que T_A es un tiempo de paro c.r.a $(\overline{\mathfrak{F}_t})_{t\in\mathbb{R}_+}$, entonces por la primera parte del lema existe un tiempo de paro U c.r.a $(\mathfrak{F}_{t+})_{t\in\mathbb{R}_+}$ tal que $U = T_A$ c.s. Definamos $A' = (B \cap \{S = \infty\}) \cup \{S = U < \infty\}$. Tenemos $A' = (A \cap \{T = \infty\}) \cup \{T = T_A < \infty\}$ c.s., pero el lado derecho es claramente igual a A, es decir $A' = A$ c.s. Finalmente, $B \cap \{S = \infty\} \in \mathfrak{F}_{S+}$ (ver Lema 2.13) y también $\{S = U < \infty\} = \{S = U\} \cap \{S < \infty\} \in \mathfrak{F}_{S+}$ (ver Corolario 2.12). □

El resultado principal de este apéndice es el siguiente teorema.

C.5 Teorema. *Supongamos que la filtración $(\mathfrak{F}_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ es continua por la derecha.*

[(1)]Ver la Definición 1.4(b).

(a) *T es un tiempo de paro (resp. tiempo de paro predecible) con respecto a $(\overline{\mathfrak{F}}_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ si y sólo si existe un tiempo de paro (resp. un tiempo de paro predecible) S con respecto a $(\mathfrak{F}_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$, tal que $T = S$ c.s.*
(b) *Si T, S son como en el inciso (a), entonces para cada $A \in \overline{\mathfrak{F}}_T$ existe $A' \in \mathfrak{F}_S$ tal que $A = A'$ c.s. Lo mismo se cumple para $\overline{\mathfrak{F}}_{T-}$ y $\mathfrak{F}_{S-}$, respectivamente.*
(c) *Cada proceso opcional (resp. predecible) con respecto a $(\overline{\mathfrak{F}}_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ es indistinguible de un proceso opcional (resp. predecible) c.r.a $(\mathfrak{F}_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$.*

Demostración. (a) Es claro que hay que probar solamente la implicación "$\Rightarrow$".

Si T es un tiempo de paro c.r.a $(\overline{\mathfrak{F}}_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$, entonces la existencia de S se sigue del Lema C.4.

Supongamos ahora que T es un tiempo de paro predecible c.r.a $(\overline{\mathfrak{F}}_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$. Como esta filtración satisface las condiciones usuales, entonces por el Teorema 4.14, T es también predecible en el sentido de la Definición 2.17. Sean T_n, $n = 1, 2, \ldots$, tiempos de paro c.r.a $(\overline{\mathfrak{F}}_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ que predicen a T, es decir $T_n \uparrow T$ y $T_n < T$ sobre $\{T > 0\}$. Ya sabemos que entonces existen S_n, tiempos de paro c.r.a $(\mathfrak{F}_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$, tales que $T_n = S_n$ c.s., $n = 1, 2, \ldots$ Tenemos $T_n = T_1 \vee \cdots \vee T_n = S_1 \vee \cdots \vee S_n$ c.s., por lo tanto, al reemplazar S_n por $S_1 \vee \cdots \vee S_n$ podemos suponer que $(S_n)_n$ es creciente. Sea $S' = \lim_{n\to\infty} S_n$. Se tiene claramente $T = S'$ c.s. y S' es tiempo de paro c.r.a $(\mathfrak{F}_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$, pero S' puede no ser predecible. Hay que "corregirlo" de una manera adecuada sobre un conjunto de probabilidad cero. Definamos

$$A_n = \{S_n = 0\} \cup \{S_n < S'\}.$$

Tenemos $A_n \in \mathfrak{F}_{S_n}$ (ver 2.12(b)), por lo tanto $S_{n_{A_n}}$ es un tiempo de paro c.r.a $(\mathfrak{F}_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$. Por otro lado,

$$P(A_n) = P(\{T_n = 0\} \cup \{T_n < T\}) \geq P(\{T = 0\} \cup \{T_n < T\}) = 1,$$

entonces $P(A_n) = 1$ y en consecuencia

$$S_{n_{A_n}} = S_n \quad \text{c.s.}$$

Como los S_n's crecen, entonces los A_n's decrecen, por lo tanto los $S_{n_{A_n}}$'s crecen y en consecuencia los $S_{n_{A_n}} \wedge n$'s crecen también. Definamos

$$S = \lim_{n\to\infty} S_{n_{A_n}} \wedge n.$$

Tenemos

$$S = \lim_{n\to\infty} S_{n_{A_n}} \overset{\text{c.s}}{=} \lim_{n\to\infty} S_n = S' \overset{\text{c.s.}}{=} T.$$

Probaremos que la sucesión $(S_{n_{A_n}} \wedge n)_{n\in\mathbb{N}}$ predice a S, lo que por la Observación C.2(b) terminará la demostración del inciso (a).

Lo único que falta probar es que $S_{n_{A_n}} \wedge n < S$ sobre $\{S > 0\}$. Supongamos lo contrario, es decir, supongamos que existen $n \in \mathbb{N}$ y $\omega \in \Omega$, tales que

$$S(\omega) > 0 \quad \text{y} \quad S_{n_{A_n}}(\omega) \wedge n = S(\omega).$$

Entonces existe un m ($m = n$ o $m = n+1$) tal que

$$S_{m_{A_m}}(\omega) = S(\omega) \leq m.$$

Esto implica que $S_m(\omega) = S(\omega)$ y $\omega \in A_m$, por lo tanto, por la definición de A_m hay dos posibilidades:

1. $S(\omega) = S_m(\omega) = 0$, o bien
2. $S(\omega) = S_m(\omega) < S'(\omega)$.

La primera posibilidad contradice a la suposición de que $S(\omega) > 0$; y también la segunda dá una contradicción, ya que $S_{n_{A_n}} \geq S_n$ implica $S \geq S'$.

(c) Sea $\mathcal{A} := \{[0, T[: T$ es tiempo de paro c.r.a $(\overline{\mathfrak{F}}_t)_{t\in\mathbb{R}_+}\}$. $\mathcal{A}$ es un π-sistema y genera la σ-álgebra opcional c.r.a $(\overline{\mathfrak{F}}_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$.

Para T tiempo de paro c.r.a $(\overline{\mathfrak{F}}_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$, sea S un tiempo de paro c.r.a $(\mathfrak{F}_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$, tal que $T = S$ c.s. Claramente el proceso $\mathbf{1}_{[0,S[}$ es opcional c.r.a $(\mathfrak{F}_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ y es indistinguible del proceso $\mathbf{1}_{[0,T[}$.

Sea $\mathcal{H}$ la clase de los procesos X tales que existe un Y, opcional c.r.a $(\mathfrak{F}_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ y X, Y son indistinguibles. $\mathcal{H}$ es lineal y $1 \in \mathcal{K}$. También es fácil ver que si $X^{(n)} \in \mathcal{H}$, $X^{(n)} \geq 0$, $n = 1, 2, \ldots$ y $X^{(n)} \uparrow X$, entonces $X \in \mathcal{H}$ (ejercicio). Como $\mathbf{1}_A \in \mathcal{H}$ para cada $A \in \mathcal{A}$, entonces basta aplicar el lema de las clases monótonas 4.26 (ver también Teorema A.5) para terminar la demostración de (c) para el caso opcional.

Para el caso predecible el razonamiento es idéntico.

(b) La primera aseveración de este inciso se sigue del Lema C.4.

Para probar la segunda necesitamos el siguiente lema general.

C.6 Lema. *Sea $(\mathcal{G}_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ una filtración arbitraria, T un tiempo de paro c.r.a $(\mathcal{G}_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ y ξ una variable aleatoria $\mathcal{G}_{T-}$-medible. Entonces existe un proceso predecible X tal que $\xi \mathbf{1}_{\{T<\infty\}} = X_T \mathbf{1}_{\{T<\infty\}}$.*

Demostración del lema. Sea $\mathcal{A} := \mathcal{G}_0 \cup \{A_0 \cap A \cap \{t < T\} : A_0 \in \mathcal{G}_0,\ t \in \mathbb{R}_+, A \in \mathcal{G}_t\}$; $\mathcal{A}$ es un π-sistema que genera a $\mathcal{G}_{T-}$ (Definición 2.9). Para cada $A_0 \in \mathcal{G}_0$, $A \in \mathcal{G}_t$ el proceso

$$X_s(\omega) := \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+ \times A_0}(s, \omega) \mathbf{1}_{]t,\infty[\times A}(s, \omega)$$

es adaptado cag, por lo tanto es predecible y claramente se tiene que $X_T \mathbf{1}_{\{T<\infty\}} = \mathbf{1}_{A_0 \cap A \cap \{t<T\}} \mathbf{1}_{\{T<\infty\}}$. También $\mathbf{1}_{A_0} \mathbf{1}_{\{T<\infty\}}$ tiene la forma $X_T \mathbf{1}_{\{T<\infty\}}$, en este caso para $X_s(\omega) := \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+ \times A_0}(s, \omega)$.

Si denotamos $\mathcal{H} := \{\xi : \xi$ variable aleatoria para la cual existe X predecible tal que $\xi \mathbf{1}_{\{T<\infty\}} = X_T \mathbf{1}_{\{T<\infty\}}\}$, entonces $\mathbf{1}_A \in \mathcal{H}$ para cada $A \in \mathcal{A}$, y otra vez podemos usar el LCM 4.26 para obtener el resultado. □

Ahora bien, sea T un tiempo de paro c.r.a $(\overline{\mathfrak{F}}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ y S un tiempo de paro c.r.a $(\mathfrak{F}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ tal que $T = S$ c.s. Fijemos un $A \in \overline{\mathfrak{F}}_{T-}$.

Como $A \in \overline{\mathfrak{F}}_\infty$ entonces existe $A_1 \in \mathfrak{F}_\infty$ tal que $A = A_1$ c.s. Por lo tanto $A \cap \{T = \infty\} = A_1 \cap \{S = \infty\}$ c.s. y $A_1 \cap \{S = \infty\} \in \mathfrak{F}_{S-}$ por el Lema 2.13.

Apliquemos el Lema C.6 a T y a la variable aleatoria $\mathbf{1}_A$. Existe un proceso predecible X, c.r.a $(\overline{\mathfrak{F}}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ tal que $\mathbf{1}_A \mathbf{1}_{\{T<\infty\}} = X_T \mathbf{1}_{\{T<\infty\}}$.

Por otro lado, en virtud del inciso (c) del teorema, existe un proceso Y, predecible c.r.a $(\mathfrak{F}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ e indistinguible de X.

Definamos $A_2 = \{\omega : Y_{S(\omega)}(\omega) \mathbf{1}_{\{S<\infty\}}(\omega) = 1\}$; tenemos $A \cap \{T < \infty\} = A_2$ c.s. ya que $X_T \mathbf{1}_{\{T<\infty\}} = Y_S \mathbf{1}_{\{S<\infty\}}$ c.s.

Por el Lema 4.27 la variable aleatoria $Y_S \mathbf{1}_{\{S<\infty\}}$ es $\mathfrak{F}_{S-}$-medible (en la demostración de este lema usamos sólo el hecho, verdadero para una filtración arbitraria, de que la σ-álgebra predecible está generada por los conjuntos $\{0\} \times A_0$, con $A_0 \in \mathfrak{F}_0$ y los intervalos estocásticos $]U, V]$), y por lo tanto $A_2 \in \mathfrak{F}_{S-}$.

Ahora es claro que el conjunto $A' := (A_1 \cap \{S = \infty\}) \cup A_2$ es lo que buscábamos. □

C.7 Corolario. *Si la filtración $(\mathfrak{F}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ es continua por la derecha y T es un tiempo de paro predecible entonces existen tiempos de paro T_n, $n = 1, 2, \ldots$, tales que $T_n \uparrow T$ c.s. y $T_n < T$ c.s. sobre $\{T > 0\}$ para todo n.*

C.8 Observación. El Teorema C.5 es útil en la situación cuando tenemos un espacio medible $(\Omega, \mathfrak{F})$ y una filtración $(\mathfrak{F}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ fija pero consideramos varias medidas de probabilidad y queremos encontrar a una probabilidad con algunas propiedades deseadas. Así es por ejemplo si $\Omega = C([0, 1]) =$ el espacio de las funciones continuas, $(\mathfrak{F}_t)_{t \in [0,1]} =$ la filtración canónica (continua por la derecha) y buscamos soluciones del problema de martingala (ver e.g. [10]).

Apéndice D

Teoremas básicos sobre martingalas

Para comodidad del lector, en este apéndice presentamos, sin demostraciones, las propiedades fundamentales de las martingalas, que en principio se suponen conocidas y que se usan constantemente en esta monografía. Todas las demostraciones se pueden encontrar en [17], [3] y una gran mayoría de ellas está en cualquier libro de procesos (por ejemplo [13], [24]). El orden de la presentación de los teoremas en el apéndice no siempre corresponde a aquel que se habría adoptado si se hubieran dado las demostraciones.

D.1 Definición. Sea $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ un espacio de probabilidad, $I \subset \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, $(\mathfrak{F}_t)_{t\in I}$ una filtración y $X = (X_t)_{t\in I}$ un proceso adaptado e integrable. El proceso X se llama

(a) martingala (con respecto a la filtración $(\mathfrak{F}_t)_{t\in I}$) si para todos $s, t \in I$, $s \leq t$ y cada $A \in \mathfrak{F}_s$ se tiene

$$E(X_t|\mathfrak{F}_s) = X_s \quad \text{c.s.}$$

(b) supermartingala, si bajo las mismas hipótesis se tiene

$$E(X_t|\mathfrak{F}_s) \leq X_s \quad \text{c.s.}$$

(c) submartingala, si el proceso $-X = (-X_t)_{t\in I}$ es supermartingala.

Casos típicos: $I = \mathbb{N}$, $I = \mathbb{R}_+$, $I = \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$, $I = \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$, I =intervalo en $\mathbb{Z}$ o $\mathbb{R}$, $I = \{\dots, -2, -1, 0\}$.

D.2 Proposición. *Sea $I = \mathbb{N}$ o $\mathbb{R}_+$. Si X es una martingala y $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función convexa tal que $f(X_t) \in L^1(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ para todos $t \in I$, entonces $(f(X_t))_{t\in I}$ es una submartingala.*

D.3 Teorema de muestreo opcional de Doob. *Sea X una supermartingala (o martingala) c.r.a $(\mathfrak{F}_t)_{t\in I}$ y sean S, T dos tiempos de paro, $S \leq T$.*

(a) *Si* S, T *toman sólo un número finito de valores de los cuales todos pertenecen a* I,[1] *entonces*

$$E(X_T|\mathfrak{F}_S) \le X_S \quad c.s. \tag{D.1}$$

(se tiene igualdad en el caso de martingala).

(b) *Si* $I = \mathbb{R}_+$ *y* X *es continua por la derecha entonces (D.1) se cumple (con igualadad en el caso de martingala) para* S, T *acotados.*

(c) *Si* $I = \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$, *o bien* $I = \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ *y* X *es continua por la derecha, entonces (D.1) se cumple (con igualdad en el caso de martingala) para todos los tiempos de paro* S, T.

D.4 Corolario. *Si* $I = \mathbb{N}$ *o* $\mathbb{R}_+$, ξ *es una variable aleatoria integrable y definimos* $X_t = E(\xi|\mathfrak{F}_t)$, $X_\infty = E(\xi|\sigma(\cup_{t\in I}\mathfrak{F}_t))$, *entonces para cada tiempo de paro* T *se tiene*

$$X_T = E(\xi|\mathfrak{F}_T).$$

D.5 Teorema. *Sea* $I = \mathbb{N}$ *o* $\mathbb{R}_+$ *y sea* X *una supermartingala (o martingala), continua por la derecha si* $I = \mathbb{R}_+$. *Entonces para cada tiempo de paro* T *el proceso parado* $X^T = (X_{t\wedge T})_{t\in\mathbb{R}_+}$ *es supermartingala (o martingala, respectivamente) con respecto a ambas filtraciones:* $(\mathfrak{F}_t)_{t\in I}$ *así como* $(\mathfrak{F}_{t\wedge T})_{t\in I}$.

D.6 Teorema (desigualdad maximal para supermartingalas). *Sea* $I = \mathbb{N}$ *o* $\mathbb{R}_+$, *o un intervalo en uno de estos conjuntos. Sea* X *una supermartingala, continua por la derecha en el caso del tiempo continuo. Para cada* $\alpha > 0$ *se tiene*

$$P(\sup_{t\in I}|X_t| \ge \alpha) \le K\frac{1}{\alpha}\sup_{t\in I}E|X_t|,$$

donde $K = 1$ *si* $X \ge 0$, $X \le 0$ *o* X *es martingala. En el caso general* $K = 3$.

D.7 Corolario. *Sea* I *como arriba y sea* X *una submartingala, continua por la derecha en el caso del tiempo continuo. Entonces para cada* $\alpha > 0$ *y cada* $t \in I$ *se tiene*

$$P(\sup_{s\le t} X_s > \alpha) \le \frac{1}{\alpha}\int_{\{\sup\limits_{s\le t}>\alpha\}} X_t\, dP.$$

[1] Es decir, si $+\infty \notin I$ entonces T no puede tomar el valor $+\infty$.

D.8 Teorema (desigualdad de Doob en L^p). *Sea I como en el Teorema D.6 y $p > 1$. Sea X una martingala, continua por la derecha en el caso del tiempo continuo, tal que $X_t \in L^p(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ para cada $t \in I$. Entonces*

$$E(\sup_{t\in I} |X_t|^p) \leq \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \sup_{t\in I} E|X_t|^p.$$

D.9 Teorema de convergencia casi segura de supermartingalas. *Sea $I = \mathbb{N}$ o $\mathbb{R}_+$ y sea X una supermartingala, continua por la derecha si $I = \mathbb{R}_+$, tal que $\sup_{t\in I} E(X_t^-) < \infty$. Entonces $(X_t)_{t\in I}$ converge c.s., cuando $t \to \infty$, a una variable aleatoria integrable.*

D.10 Teorema de convergencia de martingalas en L^p. *Sea $I = \mathbb{N}$ o $\mathbb{R}_+$. Fijemos $p \geq 1$ y sea X una martingala, continua por la derecha si $I = \mathbb{R}_+$. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

(a) *las variables aleatorias $\{|X_t|^p : t \in I\}$ son uniformemente integrables;*

(b) *$(X_t)_{t\in I}$ converge en $L^p(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ cuando $t \to \infty$;*

(c) *existe una variable aleatoria $\xi \in L^p(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ tal que $X_t = E(\xi|\mathfrak{F}_t)$ para cada $t \in I$.*

Si $p > 1$, entonces las condiciones (a), (b) y (c) son equivalentes a:

(d) $\sup_{t\in I} E|X_t|^p < \infty$.

Si (a), (b) o (c) (o (d) si $p > 1$) se cumple, entonces $(X_t)_{t\in I}$ converge casi seguramente, cuando $t \to \infty$, a $X_\infty := E(\xi|\mathfrak{F}_\infty)$ y X_∞ es la única (módulo igualdad c.s.) variable aleatoria $\mathfrak{F}_\infty$-medible, tal que $X_t = E(X_\infty|\mathfrak{F}_t)$ para todo $t \in I$.

D.11 Teorema de convergencia de supermartingalas con el tiempo reverso. *Sea $I = \{\dots, -2, -1, 0\}$. Si $(X_t)_{t\in I}$ es una supermartingala tal que $\lim_{t\to-\infty} EX_t < \infty$, entonces $(X_t)_{t\in I}$ converge, cuando $t \to -\infty$, casi seguramente y en $L^1(\Omega, \mathfrak{F}, P)$. Si X es una martingala entonces $\lim_{t\to-\infty} X_t = E(X_0|\bigcap_{t\in I} \mathfrak{F}_t)$.*

En lo que sigue vamos a considerar solamente $I = \mathbb{R}_+$.

D.12 Teorema de regularización para supermartingalas. *Supongamos que $(\mathfrak{F}_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ es una filtración tal que $\mathfrak{F}_t = \overline{\mathfrak{F}_t}$ para cada $t \in \mathbb{R}$. Sea Γ un subconjunto numerable denso en $\mathbb{R}_+$. Si X es una supermartingala entonces, excepto un conjunto de ω's de probabilidad cero, para cada $t \in \mathbb{R}$ existen*

$$X_{t+}(\omega) := \lim_{\substack{s\downarrow t \\ s\in\Gamma}} X_s(\omega), \qquad X_{t-}(\omega) := \lim_{\substack{s\uparrow t \\ s\in\Gamma}} X_s(\omega).$$

El proceso $(X_{t+})_{t\in\mathbb{R}_+}$ es una supermartingala cad (martingala si X lo es).

D.13 Teorema. *Supongamos que la filtración* $(\mathfrak{F}_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ *satisface las condiciones usuales y sea* X *una supermartingala. Entonces* X *tiene una modificación continua por la derecha si y sólo si la función* $t \mapsto EX_t$ *es continua por la derecha.*

D.14 Proposición. *Si* X *es una supermartingala cad entonces es indistinguible de un proceso cadlag.*

Bibliografía

[1] Dellacherie, C. (1981). Measurabilite des debuts et theoreme de section: le lot a la portee de toutes les bourses, Seminaire de Probabilites XV, ed. J. Azema, M. Yor. *Lecture Notes in Mathematics* **850** 351-370, Springer-Verlag, Berlin.

[2] Dellacherie, C. y Meyer, P. A. (1978) *Probabilities and Potential, I-IV.* North Holland, Amsterdam.

[3] Dellacherie, C. y Meyer, P. A. (1982). *Probabilities and Potential, B. Theory of martingales*, North Holland, Amsterdam.

[4] Doléans-Dade, C. y Meyer, P. A. (1977). Equations differentielles stochastiques, Séminaire de Probabilités XI, *Lectures Notes in Mathematics* **581**, Springer-Verlag, Berlin.

[5] Dudley, R. M. (1977). Wiener functionals as Itô integrals, *Annals of Probability* **5(1)** 140-141.

[6] DaPrato, G. y Zabczyk, J. (1992). *Stochastic Equations in Infinite Dimensions*, Cambridge University Press.

[7] Elliot, R. J. (1982). *Stochastic Calculus and Applications*, Springer-Verlag, Berlin.

[8] Gihman, I. I. y Skorohod, A. V. (1974, 1975, 1979). *The Theory of Stochastic Processes, Vol. I, II, III*, Springer-Verlag.

[9] Houdré, C., Pérez-Abreu, V. y Ustunel, A. (1994). Multiple Wiener-Itô integrals: an introductory survey, en: Chaos Expansions, Multiple Wiener-Itô Integrals and their Applications, ed. C. Houdré, V. Pérez Abreu, CRC Press.

[10] Jacod, J. (1979). Calcul stochastique et problèmes de martingales, *Lectures Notes in Mathematics* **714**, Springer-Verlag, Berlin.

[11] Jacod, J. y Memin, J. (1981). Weak and strong solution of stochastic differential equations: existence and stability, in: Stochastic Integrals. *Lectures Notes in Mathematics* **851**, Springer-Verlag, Berlin.

[12] Jacod, J. y Shiryaev, A. N. (1987). *Limit Theorems for Stochastic Processes*, Springer-Verlag, Berlin.

[13] Karatzas, I. y Shreve, S. (1988). *Brownian Motion and Stochastic Calculus*, Springer-Verlag.

[14] Liptser, R. y Shiryaev, A. N. (1977, 1978). *Statistics of Random Processes, Vol. I: General Theory, Vol II: Applications*, Springer-Verlag.

[15] Métivier, M. (1982). *Semimartingales.* De Gruyter, Berlin.

[16] Métivier, M. y Pellaumail, J. (1980). *Stochastic Integration*, Academic Press, New York.

[17] Meyer, P. A. (1966). *Probability and Potentials*, Blaisdell Publishing Company, Waltham, Mass.

[18] Meyer, P. A. (1976). Un cours sur les integrales stochastiques, Séminaire de Probabilités X, *Lecture Notes in Mathematics* **511**, Springer-Verlag, Berlin.

[19] Port, S. C. y Stone, Ch. (1978). *Brownian Motion and Classical Potential Theory*, Academic Press.

[20] Priouret, P. (1974). Processus de diffusion et équations différentielles stochastiques, *Lecture Notes in Mathematics* **390** 38-113. Springer-Verlag.

[21] Protter, P. (1990). *Semimartingales and Stochastic Differential Equations. A New Approach*, Applications of Mathematics, Springer-Verlag.

[22] Rudin, W. (1973). *Functional Analysis*, McGraw-Hill.

[23] Stricker, C. (1984). Caractérisation des semimartingales. Séminaire de Probabilités XVIII. *Lecture Notes in Mathematics* **1059**, Springer-Verlag, Berlin.

[24] Tudor, C. (1995) *Cálculo Estocástico y Procesos de Markov*, Editorial Siglo XXI.

Lista de notaciones

Conjuntos

$\mathbb{N}$	$\{1,2,3,\ldots\}$
$\mathbb{R}_+$	$[0,\infty[$
$\overline{\mathbb{R}}_+$	$\mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$
$\mathbb{Q}_+$	$\mathbb{R}_+ \cap \mathbb{Q}$ = todos los numeros racionales no negativos
A^C	complemento del conjunto $A \subset \Omega$
$[T]$	gráfica de la variable aleatoria $T: \Omega \to \mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$
$]S,T[, [S,T[,$ $[S,T],]S,T[$	intervalos estocásticos

Clases de conjuntos

$\mathcal{B}(E)$	σ-álgebra de los conjuntos borelianos en el espacio métrico E
$\sigma(\mathcal{A})$	σ-álgebra generada por $\mathcal{A}$ (donde $\mathcal{A}$ es una clase de subconjuntos de un conjunto Ω), es decir $\sigma(\mathcal{A}) = \sigma(\{\mathbf{1}_A : A \in \mathcal{A}\})$
$\overline{\mathfrak{F}'}$	$\sigma(\mathfrak{F}' \cup \mathcal{N})$, donde $\mathfrak{F}'$ es una sub-σ-álgebra de $\mathfrak{F}$ en un espacio de probabilidad completo $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ y $\mathcal{N}$ es la clase de todos los eventos de probabilidad cero.
$\mathcal{O}$	σ-álgebra de los conjuntos opcionales
$\mathcal{P}$	σ-álgebra de los conjuntos predecibles

Funciones, variables aleatorias y procesos

D_A	comienzo de un conjunto $A \subset \mathbb{R}_+ \times \Omega$

ΔX_t	salto del proceso cadlag X en el instante t, es decir $= X_t - X_{t-}$
$\mathbf{1}_A$	función indicadora del conjunto A
M^c	parte continua de la martingala $M \in \mathcal{M}^2$ o $\mathcal{M}^2_{Loc}$
M^d	parte puramente discontinua de $M \in \mathcal{M}^2$ o $\mathcal{M}^2_{Loc}$
T^B	tiempo de la primera llegada de un proceso al conjunto B
T_A	T sobre el evento A y $= \infty$ sobre A^C
$X^{\mathcal{P}}$	proyección predecible del proceso X
X^T	proceso X parado en T, es decir $X^T_t(\omega) = X_{t\wedge T(\omega)}(\omega)$
$\widetilde{X}$	compensador del proceso X
$X \circ M$	integral estocástica $\int X\, dM$
$(\lvert V\rvert_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$	proceso de variación del proceso $(V_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$
$\langle M, N\rangle$	proceso de Doob-Meyer asociado a $M, N \in \mathcal{M}^2$
$\langle M\rangle$	$\langle M, M\rangle$
$[Z, Z] = [Z]$	proceso de variación cuadrada de la semimartingala Z
$[Z, Y]$	$\frac{1}{4}([Z+Y, Z+Y] - [Z-Y, Z-Y])$

Clases de funciones o procesos

$\mathcal{C}^k(\mathbb{R}^d)$	clase de las funciones $f\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ con k-ésimas derivadas continuas
$L^2(M)$	$L^2(\mathbb{R}_+ \times \Omega, \mathcal{P}, \lambda_{M^2})$, $M \in \mathcal{M}^2$
$\Lambda^2(M)$	$\{X : \forall t \in \mathbb{R}_+\ X\mathbf{1}_{[0,t]} \in L^2(M)\}$, $M \in \mathcal{M}^2$
$\mathcal{M}^1$	martingalas cadlag
$\mathcal{M}^2$	martingalas cuadrado integrables
$\mathcal{M}^{2c}$	martingalas continuas que pertenecen a $\mathcal{M}^2$
$\mathcal{M}^{2d}$	$\{M \in \mathcal{M}^2 : M^c = 0\}$
$\mathcal{M}^1_{Loc}$	martingalas locales
$\mathcal{M}^2_{Loc}$	martingalas localmente cuadrado integrables
$\mathcal{M}^1_\infty$	martingalas cadlag uniformemente integrables
$\mathcal{M}^2_\infty$	martingalas uniformemente cuadrado integrables
$\mathcal{M}^{2c}_\infty$	martingalas continuas que pertenecen a $\mathcal{M}^2_\infty$

$\mathcal{M}^{2d}_\infty$	$\{M \in \mathcal{M}^2_\infty : M^c = 0\}$
$\mathcal{Q}$	cuasimartingalas cadlag de la clase DL
$\mathcal{Q}_{Loc}$	semimartingalas especiales
$\mathcal{W}^0$	clase de procesos cadlag adaptados con variación finita sobre cada intervalo $[0,t]$, $t > 0$
$\mathcal{W}^1$	procesos de variación integrable
$\mathcal{W}^1_\infty$	procesos de variación total integrable
$\sigma(\mathfrak{X})$	σ-álgebra de conjuntos de Ω más pequeña con respecto a la cual todos los elementos de $\mathfrak{X}$ son medibles (donde $\mathfrak{X}$ es una clase de funciones definidas sobre Ω con valores en un espacio medible), es decir la σ-álgebra generada por $\mathfrak{X}$

Otros

a^+	$a \vee 0 = \max(a, 0)$
a^-	$(-a) \vee 0$
c.s.	casi seguramente, o sea con probabilidad uno
λ_X	medida de Föllmer del proceso X y también la medida de Doléans
$\|\lambda_X\|$	variación de λ_X
$\mu^{\mathcal{P}}$	proyección dual predecible de la medida μ
$\amalg$	fuertemente ortogonal

Indice

R

S

T

V

Sociedad Matemática Mexicana

La Sociedad Matemática Mexicana fue fundada en el año de 1943. Entre sus tareas fundamentales destacan: Estimular y mantener el interés por la investigación matemática en México; publicar revistas científicas; contribuir al mejoramiento de los programas de estudio y la enseñanza de las matemáticas en el país; estimular la elaboración y publicación de libros de texto en matemáticas; organizar conferencias, reuniones, congresos y concursos de matemáticas; cooperar en la resolución de los problemas matemáticos que se presentan en el sector productivo del país, así como los que surgen en las investigaciones de otras ciencias; promover el convencimiento entre la sociedad mexicana de que las matemáticas son parte integral de la cultura básica y de las habilidades de uso cotidiano de la población.

Instituciones patrocinadoras de la Sociedad Matemática Mexicana:

Asociación Nacional de Universidades e Institutos de Enseñanza Superior, Centro de Investigación en Matemáticas, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del I.P.N., Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología, Coordinación de la Investigación Científica de la U.N.A.M., Escuela Superior de Física y Matemáticas del I.P.N., Facultad de Ciencias de la U.N.A.M., Instituto Nacional de Estadística, Geografía e Informática, Instituto de Investigaciones en Matemáticas Aplicadas y Sistemas de la U.N.A.M., Instituto de Matemáticas de la U.N.A.M., Instituto Tecnológico Autónomo de México, Secretaría de Educación Pública, Universidad Autónoma de Baja California, Universidad Autónoma de Coahuila, Universidad Autónoma Metropolitana-Azcapotzalco, Universidad Autónoma Metropolitana-Iztapalapa, Universidad Autónoma de Yucatán, Universidad de Guadalajara, Universidad de la Américas-Puebla, Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo.

PUBLICACIONES DEL INSTITUTO DE MATEMATICAS, UNAM:

ANALES DEL INSTITUTO DE MATEMATICAS

DEL VOLUMEN 10 (1970) AL VOLUMEN 33 (1993).

MONOGRAFIAS DEL INSTITUTO DE MATEMATICAS

[No. 1] Localization in non Commutative Rings. Bruno J. Mueller (1975), 73 p.

[No. 2] Teoría de los Números Algebraicos. Alejandro Díaz-Barriga, Ana Irene Ramírez-Galarza, Francisco Tomás (1975), 231 p.

[No. 3] Integrales de Medida Positiva. Gonzalo Zubieta (1976), 157 p.

[No. 4] Rings with Polynomial Identities. Bruno J. Mueller (1977), 46 p.

[No. 5] Grupos Profinitos, Grupos Libres y Productos Libres. Luis Ribes (1977), 147 p.

[No. 6] Introducción a la Teoría de las Clases Características en la Geometría Algebraica. Audum Holme (1978), 56 p.

[No. 7] Embeddings, Projective Invariants and Classifications. Audum Holme (1979), 122 p.

[No. 8] The Relative Spectral Sequence of Leray-Serre for Fibrations Pairs. Carlos Prieto (1979), 102 p.

[No. 9] Caminatas Aleatorias y Movimiento Browniano. Diego Bricio Hernández (1981), 181 p.

[No. 10] On Polarized Varieties. Teruhisa Matsusaka (1981), 38 p.

[No. 11] Métodos Diagramáticos en Teoría de Representaciones. C. Cibils, F. Larrión, L. Salmerón (1982), 111 p.

[No. 12] Espacios Simplécticos sobre β-anillos y Anillos de Hermite, Trasvecciones Simplécticas. Emiliano Fernández Bermejo (1982), 68 p.

[No. 13] Abelian Integrals. George Kempf (1983), 225 p.

[No. 14] On Selfinjective Algebras of Finite Representation Type. Josef Waschbüsch (1983), 58 p.

[No. 15] On Ideal Theory in Banach and Topological Algebras. W. Zelazko (1984), 151 p.

[No. 16] Teoría General de Procesos e Integración Estocástica. Tomasz Bojdecki (1985), 105 p.

[No. 17] La Figura Espectral de Operadores. Carlos Hernández Garciadiego, Elena de Oteyza (1986), 126 p.

[No. 18] Teoría de Punto de Fijo. Albrecht Dold. Traducción: C. Prieto. Vol. I (1986), 176 p. Vol. II (1986), 215 p. Vol. III (1986), 188 p.

[No. 19] Projective Embeddings of Algebraic Varieties. Joel Roberts (1988), 84 p.

[No. 20] Teoría General de Procesos e Integración Estocástica. Segunda edición, corregida y aumentada. Tomasz Bojdecki (1989), 324 p.

[No. 21] Análisis Funcional I. Carlos Bosch Giral y Emiliano Fernández Bermejo (1989), 95 p.

[No. 22] Introducción a la Topología de las Variedades de Dimensión Infinita. Luis Montejano (1989), 95 p.

[No. 23] Introducción a la Teoría de Representaciones de Algebras. Roberto Martínez-Villa (1990), 97 p.

MEMORIAS DEL 50 ANIVERSARIO DEL INSTITUTO DE MATEMATICAS. 1942–1992. 414 p.

PUBLICACIONES DE LA SOCIEDAD MATEMATICA MEXICANA Y DEL INSTITUTO DE MATEMATICAS:

APORTACIONES MATEMATICAS

Serie: NOTAS DE INVESTIGACION

[No. 1] Coloquio de Sistemas Dinámicos. Memorias. Guanajuato, México, 1983. Editadas por J. A. Seade y G. Sienra (1985), 167 p.

[No. 2] Categorical Topology - The complete work of Graciela Salicrup. Edited by H. Herrlich and C. Prieto (1988), 409 p.

[No. 3] Sistemas Dinámicos Holomorfos en Superficies. X. Gómez-Mont y L. Ortíz-Bobadilla (1989), 207 p.

[No. 4] Simposio de Probabilidad y Procesos Estocásticos. Memorias. Guanajuato, México (1988). Editadas por M. E. Caballero y L. G. Gorostiza (1989), 136 p.

[No. 5] Topics in Algebraic Geometry. Proceedings. Guanajuato, México (1989). Editadas por L. Brambila-Paz y X. Gómez-Mont. (1992), 120 p.

[No. 6] Seminario Internacional de Algebra y sus Aplicaciones. Memorias. México (1991). Editadas por L.M. Tovar, C. Rentería y H. Villarreal (1992), 266 p.

[No. 7] II Simposio de Probabilidad y Procesos Estocásticos. I Encuentro México-Chile de Análisis Estocástico. Memorias. Guanajuato, México (1992). Editadas por M. E. Caballero y L. G. Gorostiza (1992), 191 p.

[No. 8] Taller de Geometría Diferencial sobre Espacios de Geometrías. Memorias. Guanajuato, México (1992). Editadas por L. del Riego y C. T. J. Dodson (1992), 113 p.

[No. 9] Poblaciones Aleatorias Ramificadas y sus Equilibrios. Anton Wakolbinger (1994), 88 p.

[No. 10] Una Introducción a la Geometría Computacional a través de los Teoremas de la Galería de Arte. Vladimir Estivill-Castro (1994), 51 p.

[No. 11] III Simposio de Probabilidad y Procesos Estocásticos. Memorias. Hermosillo, México (1994). Editadas por M. E. Caballero y L. G. Gorostiza. (1994). 183 p.

Serie: COMUNICACIONES

[No. 1] Programa de Investigación del XVIII Congreso Nacional de la Sociedad Matemática Mexicana. Memorias. Mérida, México (1984). Editadas por M. Clapp y J. A. Seade (1986), 397 p.

[No. 2] Teoremas Límite de Alta Densidad para Campos Aleatorios Ramificados. B. Fernández (1986), 145 p.

[No. 3] Programa del XIX Congreso Nacional de la Sociedad Matemática Mexicana, Vol. I. Memorias. Guadalajara, México (1986). Editadas por J.A. de la Peña, C. Prieto, G. Valencia y L. Verde (1987), 311 p.

[No. 4] Programa del XIX Congreso Nacional de la Sociedad Matemática Mexicana, Vol. II. Memorias. Guadalajara, México (1986). Editadas por J.A. de la Peña, C. Prieto, G. Valencia y L. Verde (1987), 320 p.

[No. 5] Programa del XX Congreso Nacional de la Sociedad Matemática Mexicana. Memorias. Xalapa, México (1987). Editadas por M. A. Aguilar, L. Salmerón y C. Vargas (1988), 375 p.

[No. 6] XXI Congreso Nacional de la Sociedad Matemática Mexicana. Memorias. Hermosillo, Sonora (1988). Editadas por F. Aranda, J. Bracho, A. Sánchez Valenzuela, A. Vargas (1989), 335 p.

[No. 7] Breve introducción a códigos detectores-correctores de error. C. Rentería, H. Tapia y W. Y. Vélez (1990), 36 p.

[No. 8] XXII Congreso Nacional de la Sociedad Matemática Mexicana. Memorias. Puebla, Puebla (1989). Editadas por P. Barrera, A. Illanes, F. O'Reilly y S. Recillas (1989), 263 p.

[No. 9] XXIII Congreso Nacional de la Sociedad Matemática Mexicana. Memorias. Guanajuato, México (1990). Editadas por A. García-Máynez, L. Gorostiza, J. Ize, M. Mendoza. (1991), 224 p.

[No. 10] La Estructura de los Dendroides Suaves. Sergio Macías Alvarez (1993), 50 p.

[No. 11] XXIV Congreso Nacional de la Sociedad Matemática Mexicana. Memorias. Oaxtepec, Morelos (1991). Editadas por O. Hernández, L. Montejano, B. Rumbos, A. Wawrzyñzyk. (1992), 230 p.

[No. 12] XXV Congreso Nacional de la Sociedad Matemática Mexicana Vol. I. Memorias. Xalapa, Veracruz (1992). Editadas por F. Larrión, A. Olvera, V. Pérez-Abreu, E. Vallejo. (1993), 178 p.

[No. 13] XXV Congreso Nacional de la Sociedad Matemática Mexicana Vol. II. Memorias. Xalapa, Veracruz (1992). Editadas por F. Larrión, A. Olvera, V. Pérez-Abreu, E. Vallejo. (1993), 323 p.

[No. 14] XXVI Congreso Nacional de la Sociedad Matemática Mexicana. Memorias. Morelia, Michoacán (1993). Editadas por M. E. Caballero, J. Delgado, G. Raggi, J. Rosenblueth. (1994), 487 p.

[No. 15] XI Escuela Latinoamericana de Matemáticas. Memorias. UNAM, México, D. F.; CIMAT, Gto. (1993). Editadas por X. Gómez-Mont, J. A. de la Peña, J. Seade, (1994). 564 p.

Serie: TEXTOS

[No. 1] Introducción a la Topología – Graciela Salicrup. Editada por J. Rosenblueth y C. Prieto. Nivel medio (1993), 312 p.

[No. 2] Procesos Estocásticos. Constantin Tudor. Nivel avanzado (1994). 560 p.

[No. 3] Lectures on continuous-time Markov control processes. Onésimo Hernández-Lerma. Nivel avanzado (1994). 67 p.

[No. 4] Un curso de lógica matemática. Carlos R. Videla. Nivel Avanzado (1995). 250 p.

[No. 5] Rudimentos de mansedumbre y salvajismo en teoría de representaciones. Francisco Larrión, Alberto G. Raggi, Leonardo Salmerón. Nivel Avanzado (1995). 239 p.

OBRAS COMPLETAS DE
DIEGO BRICIO HERNANDEZ CASTAÑOS

[Vol. 1] Formas Cuadráticas y Operadores lineales. (1994). 152 p.

Información y pedidos:

Sra. Gabriela Sanginés, Depto. de Publicaciones
Instituto de Matemáticas, UNAM, Circuito Exterior
Ciudad Universitaria, 04510 México, D.F. MEXICO
TEL: (5) 622-45-20 al 30,
FAX: (5) 550 13 42 y (5) 616 03 48
e-mail: EDICION@GAUSS.MATEM.UNAM.MX

cada – każda
medida – miara
ver – zobaczyć
si y sólo si – iff

Teoría general de procesos e integración estocástica, se terminó de imprimir en el mes de septiembre de 1995 en los talleres de Graffitti, localizado en C. Béistegui 1562, Col. Narvarte, México 03020, D.F. El tiraje en papel bond de 36 kilogramos consta de 150 ejemplares en pasta rústica con acabado en lámina de plástico.

Apoyo técnico:
Depto de Publicaciones
Instituto de Matemáticas, UNAM

Gabriela Sanginés, Leonardo Espinosa, Rocío Tafoya

ciągłość projekcji 96

acotado — ograniczony
un tempo de paso — czas zatrzymania, stopping time

APORTACIONES MATEMATICAS es una publicación de la Sociedad Matemática Mexicana. Su serie **TEXTOS** comprende libros de texto de matemáticas y sus aplicaciones para la licenciatura y el posgrado en matemáticas y en otras disciplinas. Se divide en tres niveles:

- *Nivel elemental:*
  Dirigido a estudiantes de los primeros dos años de la licenciatura.
- *Nivel medio:*
  Dirigido a estudiantes de los dos últimos años de la licenciatura.
- *Nivel avanzado:*
  Dirigido a estudiantes de posgrado.

TEORIA GENERAL DE PROCESOS E INTEGRACION ESTOCASTICA de Tomasz Bojdecki es un texto de *nivel avanzado* que amplía y mejora una edición anterior. Este texto cubre una gran parte del cálculo estocástico. En los primeros capítulos se desarrolla la llamada "teoría general de procesos", que constituye la base de los fundamentos del análisis estocástico. Los capítulos restantes se dedican a la teoría de integración estocástica, primero con respecto a martingalas de cuadrado integrable y finalmente con respecto a semimartingalas (no necesariamente continuas); estas últimas son los integradores estocásticos más generales. El resultado principal es la fórmula de Itô, que es el análogo estocástico del teorema fundamental del cálculo en el cálculo diferencial clásico. Se dan varias aplicaciones de esta fórmula al análisis de semimartingalas, incluyendo entre otros temas un resultado general sobre existencia y unicidad de soluciones de ecuaciones diferenciales estocásticas.
La lectura de este texto supone conocimientos de los elementos de la teoría de procesos estocásticos, especialmente de los hechos básicos sobre martingalas.
Existen pocos textos que traten este temario básico de manera general y detallada, y éste es el primero que lo hace en lengua castellana.

Diseño de portada: Rubén Valencia.