

Z. Mróz, B. Zagroda

ANALIZA NOŚNOŚCI ŚCISKANEGO PASMA
Z MATERIAŁU SPRĘŻYSTO-PLASTYCZNEGO
Z OSŁABIENIEM

8/1980

WARSZAWA 1980

<http://rcin.org.pl>

Praca wpłynęła do Redakcji dnia 30 stycznia 1980 r.

Zarejestrowana pod nr 8/1980



57165



Na prawach rękopisu

Instytut Podstawowych Problemów Techniki PAN
Nakład 150 egz. Ark.wyd. 2,5. Ark.druk. 3,75.
Oddano do druku w marcu 1980 r.
Nr zamówienia 205/0/80

Warszawska Drukarnia Naukowa, Warszawa,
ul. Śniadeckich 8

Zenon Mróz

Bohdan Zadroga^{x/}

Zakład Mechaniki

Ośrodków Ciągłych

ANALIZA NOŚNOŚCI ŚCISKANEGO PASMA
Z MATERIAŁU SPRĘŻYSTO-PLASTYCZNEGO Z OSŁABIENIEM

1. WSTĘP

W pracy zajmiemy się analizą nośności ściskanego pasma dla potrzeb geomechaniki. Obiektem badań geomechaniki są materiały mineralne tworzące zewnętrzne warstwy skorupy ziemskiej - a więc skały i grunty /jako postać rozdrobniona skał/. Mimo jakościowych i ilościowych różnic we własnościach mechanicznych skał w stosunku do innych materiałów objętych zainteresowaniami mechaniki /np. metali/, geomechanika korzysta z tych samych pojęć i aparatu matematycznego jakie są charakterystyczne dla wszystkich działów mechaniki ciał odkształcalnych.

W dalszych rozważaniach przyjmiemy podejście kontynualne - deterministyczne, a więc założymy ciągłość rozłożenia masy i postulować będziemy, że wszystkie cechy mechaniczne materiału ściskanego pasma są jednoznacznie określone w jego dowolnym punkcie i w dowolnej chwili czasowej. Założymy ponadto, że materiał pasma jest jednorodny i izotropowy, zdając sobie jednocześnie sprawę, że założenie to jest przybliżeniem rzeczywistej budowy i rzeczywistych własności skał.

^{x/} Pracę wykonano w ramach stażu naukowego Dr inż. Bohdana Zadrogi odbytego w Zakładzie Mechaniki Ośrodków Ciągłych IPPT PAN.

Ponieważ zagadnienie ściskania pasma materiału w warunkach płaskiego stanu odkształcenia stanowi problem dość często pojawiający się w konkretnych i praktycznych zagadnieniach inżynierskich, szczególnie w zakresie geomechaniki, było ono od dawna przedmiotem analiz. Rozwiązania zagadnienia ściskania pasma z materiału idealnie spoistego pomiędzy sztywnymi i szorstkimi płytami w warunkach płaskiego stanu odkształcenia, umożliwiające oszacowanie obciążenia granicznego podali między innymi: L.Prandtl, W.W. Sokółowski, R. Hill, J.F. Collins, F.A.Marshall, J. Mandel, S. Salençon.

Omówienie tych rozwiązań znaleźć można w pracy [2] .

Ciągły postęp nauki i coraz większa ilość czynników użytkowych zmuszają do doboru w analizie konkretnych zagadnień takich modeli mechanicznych materiału, które w miarę poprawnie i bardziej adekwatnie opisują rzeczywiste właściwości analizowanych materiałów rzeczywistych /w przypadku geomechaniki: skał i gruntów/.

Ograniczenie stosowalności modelu ciała liniowo-sprężystego do zakresu bardzo małych deformacji z jednej strony, oraz niezadowolające rezultaty ilościowe uzyskiwane przy traktowaniu skał jako ośrodków sztywno-idealnie plastycznego z drugiej, skłaniają do odejścia od obu wymienionych koncepcji ciał i do budowania poprawniejszych rozwiązań w oparciu o modele ciał sprężysto-plastycznych ze wzmocnieniem lub osłabieniem. Budowanie ^{takich} rozwiązań możliwe jest dzięki intensywnemu w ostatnich latach rozwojowi technik doświadczalnych w mechanice, pozwalającemu na uzyskiwanie dla skał pełnych krzywych naprężenie-odkształcenie w miarę obiektywnych również dla części niestatecznej w warunkach działających naprężeń ściskających.

Jednym z aktualnych obecnie problemów inżynierskich w mechanice górotworu jest matematyczna analiza deformacji materiałów skalnych ulegających tąpniom. W ramach tego problemu jednym z zagadnień jest analiza zachowania się niskich filarów, mechanizmu ich zniszczenia i ich nośności.

W świetle przedstawionych rozważań i potrzeb o charakterze użytkowym podjęto próbę analizy zjawisk zachodzących w ściskającym paśmie i określenia jego nośności traktując pasmo materiału skalnego jako pasmo materiału sprężysto-plastycznego z osłabie-

niem co jest w miarę wiernym odzwierciedleniem rzeczywistych własności i rzeczywistego zachowania się skał pod obciążeniem ściskającym.

Jako zasadniczy cel pracy postawiono sobie:

- określenie i analizę stref tworzących się w ściskanym paśmie w różnych fazach procesu ściskania oraz określenie progresji tych stref,
- określenie nośności poszczególnych stref i pasma jako całości przy przyjęciu, że zbudowane jest ono z materiału sprężysto-plastycznego z osłabieniem,
- porównanie nośności ściskanego pasma z materiału sprężysto-plastycznego z osłabieniem, z nośnością ściskanych pasm z materiału sprężysto-kruchego i materiału sztywno-idealnie plastycznego,
- analizę nośności ściskanego pasma z różnych uprzednio wymienionych materiałów w zależności od zmian parametrów pasma oraz stałych materiałowych skały,
- porównanie rezultatów ilościowych teoretycznych i doświadczalnych.

Dodatkowym celem pracy było wykazanie, że możliwe jest przy pewnych założeniach upraszczających rozwiązywanie konkretnych zagadnień geomechaniki wysuwanych przez praktykę inżynierską, przy przyjęciu modeli materiałów znacznie bliższych rzeczywistości od powszechnie dotychczas stosowanych modeli materiałów liniowo-sprężystych lub sztywno-idealnie plastycznych, oraz że podejście takie jest celowe, daje rozwiązania w postaci zamkniętej, rozwiązania zgodne z doświadczeniami i bliskie rzeczywistości.

2. ZAŁOŻENIA WYJŚCIOWE

W dalszych rozważaniach przyjmujemy następujące założenia wyjściowe:

1. Pasma skalne o szerokości początkowej $2l$ i wysokości początkowej h mające w trzecim kierunku wymiar dużo większy od $2l$ i h , zbudowane jest z materiału sprężysto-plastycznego z osłabieniem którego szczegółowe własności podaje założenie 4 .

Materiał pasma określają następujące stałe materiałowe: $E, \nu, \varphi, C_0, C_1$.

Pasma to umieszczone jest między szorstkimi płytami z materiału nieodkształcalnego. Dolna płyta podpierająca jest nieruchoma, a płyta górna może się przemieszczać.

Zakładamy kinematyczny program obciążenia pasma przyjmując jako parametr określający ewolucję procesu przemieszczenie $w(t)$ górnej płyty ściskającej w kierunku prostopadłym do ściskanego pasma. Z uwagi na przyjęte wymiary pasma, problem będziemy traktować w ramach założeń płaskiego stanu odkształcenia. Naprężenia ściskające i skrócenie pasma przyjmujemy - jak to się praktycznie zakłada w geomechanice - jako dodatnie. Rozwiązanie ograniczymy do teorii małych odkształceń.

2. W procesie ściskania występują następujące fazy /rys.1,213/:

- początkowa, z układem trzech stref deformacji: strefy środkowej E_d w otoczeniu osi symetrii pasma OZ z jednoosiowym /edometrycznym/ sprężystym stanem odkształcenia; dwóch skrajnych stref sprężystych E w płaskim stanie odkształcenia,

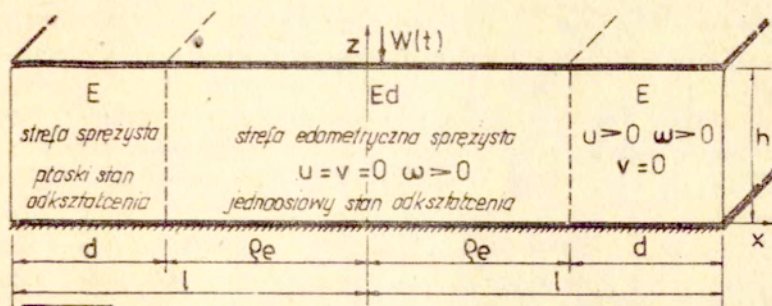
- zaawansowana, z układem pięciu stref deformacji: strefy środkowej E_d i dwóch przylegających do niej stref sprężystych E /jak poprzednio/, dwóch skrajnych stref sprężysto-plastycznych EP w płaskim stanie odkształcenia,

- zaawansowana, z układem trzech stref deformacji: strefy środkowej E_{dp} w otoczeniu osi symetrii pasma OZ z jednoosiowym /edometrycznym/ plastycznym stanem odkształcenia, dwóch skrajnych stref sprężysto-plastycznych EP w płaskim stanie odkształcenia.

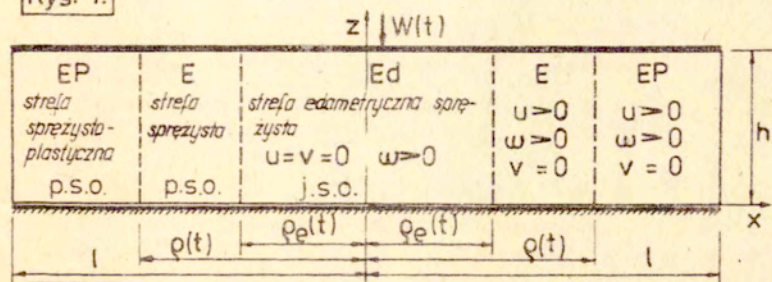
Osiągnięcie warunku rezydualnego $f_r(\sigma) = 0$ na brzegu pasma $x = \pm l$ implikuje na mocy równań /4.21/ spełnienie tego warunku w całym obszarze. A zatem następuje jednoczesne osiągnięcie stanu rezydualnego $f_r(\sigma) = 0$, który w naszym przypadku odpowiada stanowi naprężeń $\sigma_x = \sigma_z = 0$, to znaczy zerowej nośności pasma.

3. Uproszczona kinematyka cząstek ściskanego pasma jest następująca:

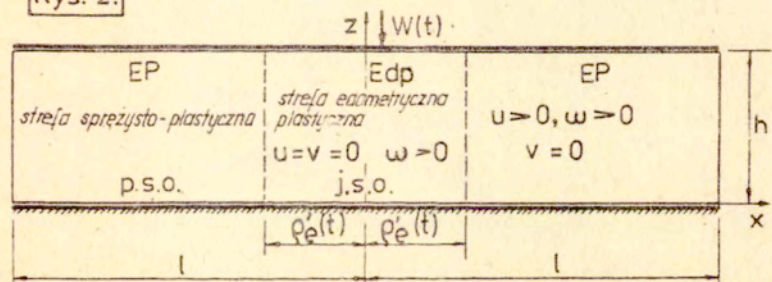
- przy wymuszonym sztywnym przemieszczaniu się ruchomej płyty górnej ku nieruchomej płycie dolnej ruch cząstek pasma w strefach E i EP jest superpozycją płaskich warstwowych przemieszczeń w kierunkach prostopadłym i równoległym do powierzchni płyt, zaś



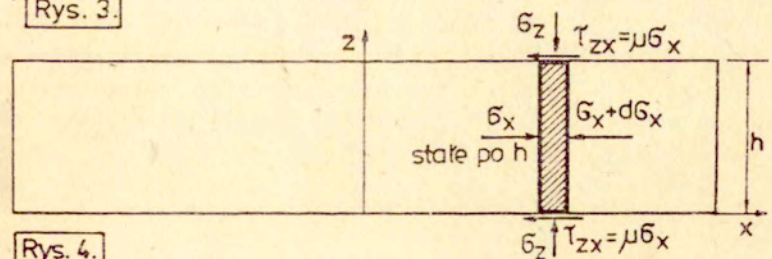
Rys. 1.



Rys. 2.



Rys. 3.



Rys. 4.

w strefach E_d i E_{dp} , jednoosiowym płaskim warstwowym przemieszczaniem się cząstek w kierunku prostopadłym do powierzchni płyty,

- wzdłuż wysokości pasma h zakładamy dla uproszczenia liniowy rozkład przemieszczeń pionowych u_z we wszystkich strefach oraz ciągły stały rozkład przemieszczeń poziomych u_x w strefie E i EP ,

- przy takich założeniach i układzie osi współrzędnych jak na rys. 1, 2 i 3 możemy założoną kinematykę cząstek pasma w bieżącej konfiguracji wyrazić następująco:

$$\begin{aligned} /2.1/ \quad u_x = u_x(x, t), \quad u_y = 0, \quad u_z = -W(z, t) = -\frac{W(t)}{h(t)}z \\ \text{dla } x, y, z \in E \quad \text{i } x, y, z \in EP \end{aligned}$$

oraz

$$\begin{aligned} /2.2/ \quad u_x = 0, \quad u_y = 0, \quad u_z = -W(z, t) = -\frac{W(t)}{h(t)}z \\ \text{dla } x, y, z \in E_d \quad \text{i } x, y, z \in E_{dp} \end{aligned}$$

gdzie:

- $W(t)$ - sztywne przesunięcie górnej płyty w chwili t
- $h(t)$ - bieżąca wysokość pasma
- h - początkowa wysokość pasma, $h = \text{const}$

$$\begin{aligned} /2.3/ \quad h(t) = h - W(t) \\ h(0) = h, \quad W(0) = 0 \end{aligned}$$

Ponieważ całość rozważań ograniczymy do teorii małych odkształceń w dalszej części w celu ułatwienia i przyspieszenia obliczeń nośności pasma przyjmiemy, że w ciągu całego procesu wymiary bieżące ściskanego pasma nie ulegają zmianie i są równe wymiarom początkowym tzn.

$$\begin{aligned} /2.4/ \quad h(t) = h \\ l(t) = l \end{aligned}$$

Błąd w określeniu nośności pasma wynikający z takiego przyjęcia nie przekracza kilku procent.

Rozwiązanie dokładne uwzględniające zmianę początkowych wymiarów ściskanego pasma w trakcie narastania przesunięć górnej płyty zawiera praca [4] .

4. Mechaniczne zachowanie się materiału ściskanego pasma opisywają zależności:

- w strefie E i E_d stosujemy związki liniowej sprężystości Hooke'a

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1+\nu}{E} \sigma_{ij} - \frac{\nu}{E} \sigma_{kk} \delta_{ij} \quad i, j, k = 1, 2, 3$$

/2.5/

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) \quad i, j = 1, 2, 3$$

- w strefie EP i E_{dp} stosujemy model ośrodka sprężysto-plastycznego z osłabieniem opisany związkiem konstytutywnym przyjmującym aksjomat dotyczący addytywności całkowitej prędkości odkształcenia

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \dot{\varepsilon}_{ij}^e + \dot{\varepsilon}_{ij}^p$$

/2.6/

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^e = \frac{1+\nu}{E} \dot{\sigma}_{ij} - \frac{\nu}{E} \dot{\sigma}_{kk} \delta_{ij}$$

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^p = \lambda \frac{\partial g}{\partial \sigma_{ij}}$$

We wzorze tym $g(\sigma)$ jest potencjałem plastycznym, który przyjmujemy w postaci analogicznej do warunku plastyczności Coulomba otrzymując w naprężeniach głównych

$$g(\sigma) = \frac{1}{2} (\sigma_1 - \sigma_3) - \frac{1}{2} (\sigma_1 + \sigma_3) \sin \varphi' - a = 0$$

/2.7/

$$\sigma_3 \leq \sigma_2 \leq \sigma_1, \quad \varphi' = \text{const}$$

zaś parametr φ' jest ograniczony warunkiem

$$0 \ll \varphi' \ll \varphi$$

/2.8/

w którym φ jest parametrem w warunku plastyczności Coulomba /2.10/.

Współczynnik funkcyjny $\hat{\Lambda}$ we wzorze /2.6/3 jest pewnym nieujemnym mnożnikiem skalarnym zależnym o historii i stanu naprężenia określonym następująco:

$$\begin{aligned} \hat{\Lambda} > 0 & \text{ dla procesu aktywnego obciążania pasma} \\ \hat{\Lambda} = 0 & \text{ dla procesu odciążania pasma} \end{aligned}$$

- warunek plastyczności /równanie zgodności/ przyjmujemy w postaci warunku Coulomba ze zmienną malejącą spójnością uwzględniającą osłabienie materiału pasma otrzymując w naprężeniach głównych.

$$\begin{aligned} /2.10/ \quad f(\sigma, \lambda) & \equiv \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_3) - \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_3) \sin \varphi - C(\lambda) \cos \varphi = 0 \\ \sigma_3 & \leq \sigma_2 \leq \sigma_1, \quad \varphi = \text{const} \end{aligned}$$

gdzie $C(\lambda)$ określamy jako malejące liniowo z parametrem deformacji λ

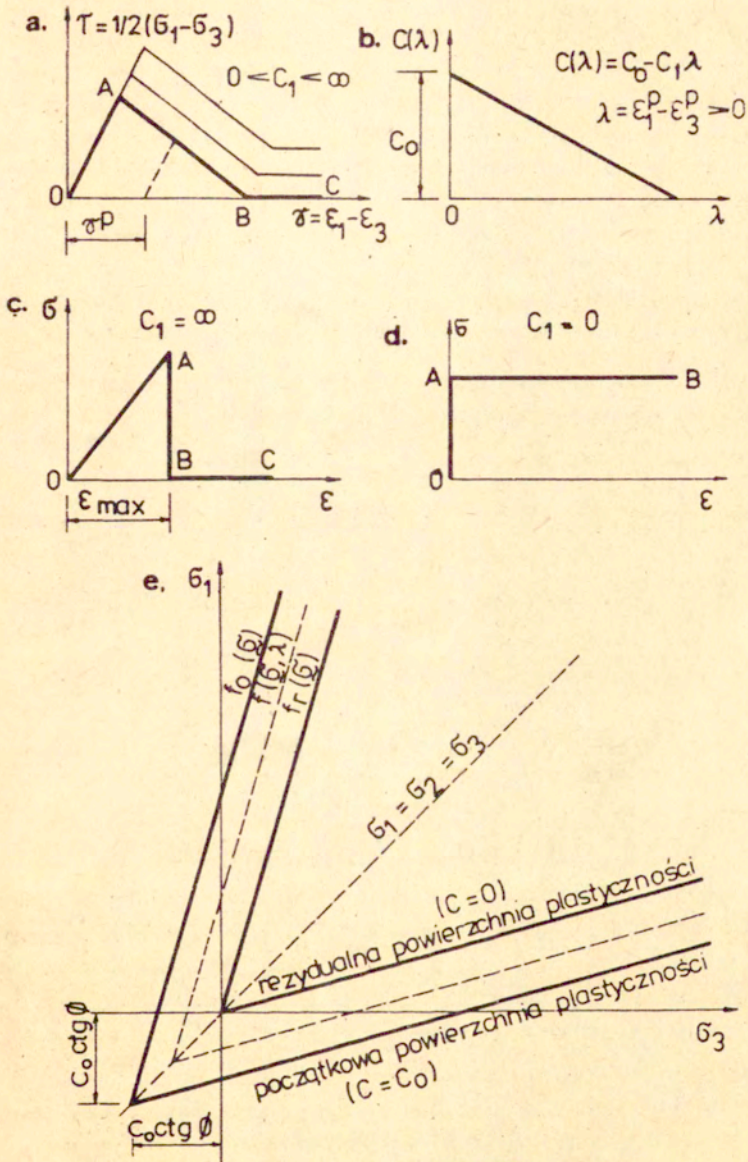
$$\begin{aligned} /2.11/ \quad C(\lambda) & = C_0 - C_1 \lambda & \lambda & = \epsilon_1^p - \epsilon_3^p > 0 \\ C_0 & = \text{const} > 0 & C_1 & = \text{const} > 0 \end{aligned}$$

a $\epsilon_1^p, \epsilon_2^p, \epsilon_3^p$ są głównymi odkształceniami plastycznej części odkształceń całkowitych, spełniającymi warunek

$$/2.12/ \quad \epsilon_1^p > \epsilon_2^p > \epsilon_3^p$$

Stałą C_1 nazwiemy współczynnikiem osłabienia.

Powierzchnie plastyczności $f(\sigma, \lambda) = 0$ opisane wzorem /2.10/ reprezentują w przestrzeni naprężeń głównych rodzinę powierzchni w postaci sześciokątnych ostrosłupów o osiach pokrywających się z linią hydrostatyczną $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$ i wierzchołkach położonych w punktach $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = -C(\lambda) \cot \varphi$. Wraz ze zmianą parametru λ określonego wzorem /2.11/2 powierzchnie plastyczności przemieszczają się od powierzchni skrajnej odpo-



Rys. 5.

wiadającej wartości $\lambda = 0$ do powierzchni odpowiadającej rezydualnemu warunkowi plastyczności przy $\lambda = G/C$, co poglądowo przedstawia rys. 5e.

Powierzchnie potencjalne $g(\sigma, a) = 0$ określone wzorem /2.7/ tworzą również rodzinę powierzchni w postaci sześciokątnych ostrosłupów o osiach pokrywających się z linią hydrostatyczną $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$ i wierzchołkach położonych w punktach $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = -a/\sin\varphi$.

Założone mechaniczne zachowanie się materiału ściskanego pasma dla płaskiego stanu odkształcenia ilustrują rysunki 5a, b, e.

5. Równania równowagi zapisane w naprężeniach lub prędkościach naprężeń przyjmują uproszczoną postać:

$$/2.13/ \quad \frac{\partial}{\partial x_j} \sigma_{ij} = 0 \quad , \quad \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial t} \right) = 0 \quad i, j = 1, 2, 3$$

oraz

$$/2.14/ \quad \frac{\partial}{\partial x_j} \dot{\sigma}_{ij} = \frac{\partial \dot{u}_k}{\partial x_j} \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_k} = 0 \quad i, j, k = 1, 2, 3$$

gdzie

$$/2.15/ \quad \dot{\sigma}_{ij} = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial t} + \dot{u}_k \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_k} \quad , \quad \dot{u}_i = \frac{\partial u_i}{\partial t} + \dot{u}_k \frac{\partial u_i}{\partial x_k}$$

Dla założonej uproszczonej kinematyki cząstek ściskanego pasma i przyjętych równań konstytutywnych materiału pasma przyjęte równania równowagi ulegają znacznemu uproszczeniu i redukują się do jednego równania /3.6/ które wyprowadzimy w dalszej części pracy.

6. Warunki brzegowe dla naprężeń we wszystkich fazach procesu ściskania są jednakowe i dla oznaczeń zgodnych z rys. 1-4 mają postać

$$/2.16/ \quad \begin{aligned} \sigma(x,t) &= 0 && \text{dla } x = \pm l \\ \tau_{zx} &= \mu \sigma_z && \text{przy } u_x > 0 \\ \tau_{zx} &< \mu \sigma_z && \text{przy } u_x < 0 \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} \sigma(x,t) &= 0 \\ \tau_{zx} &= \mu \sigma_z \\ \tau_{zx} &< \mu \sigma_z \end{aligned}} \right\} \text{dla } z=0 \text{ i } z=h \text{ oraz } \mu = \text{const}$$

gdzie μ jest współczynnikiem tarcia materiału pasma o sztywne płyty ściskające.

7. Warunki brzegowe dla przemieszczeń zgodnie z założoną kinematyką mają postać

$$/2.17/ \quad \begin{aligned} u_z &= -w(z,t) = 0 && \text{dla } z = 0 \\ u_z &= -w(z,t) = -w(t) && \text{dla } z = h \end{aligned}$$

Z uwagi na symetrię obciążeń brzegowych pasma /2.16/₁ względem płaszczyzny $X=0$ wynika dodatkowy warunek

$$/2.18/ \quad u(x,t)|_{x=0} = 0$$

który z uwagi na to, że w dalszych rozważaniach uwzględniając symetrię będziemy rozpatrywać i analizować połowę pasma można traktować również jako warunek brzegowy.

8. Warunki ciągłości przemieszczeń i naprężeń na granicach poszczególnych stref deformacji zobrazowanych na rys. 1-3 przyjmują postać:

$$/2.19/ \quad \begin{aligned} u^{ed} &= u^e && \text{dla } x = g_e(t) \\ u^{ep} &= u^e && \text{dla } x = g(t) \\ u^{ep} &= u^{edp} && \text{dla } x = g_e^r(t) \end{aligned}$$

$$/2.20/ \quad \begin{aligned} \sigma_x^{ed} &= \sigma_x^e, & \tau_{zx}^{ed} &= \tau_{zx}^e && \text{dla } x = g_e(t) \\ \sigma_x^{ep} &= \sigma_x^e, & \tau_{zx}^{ep} &= \tau_{zx}^e && \text{dla } x = g(t) \\ \sigma_x^{ep} &= \sigma_x^{edp}, & \tau_{zx}^{ep} &= \tau_{zx}^{edp} && \text{dla } x = g_e^r(t) \end{aligned}$$

Wszystkie przedstawione w postaci ogólnej założenia wyjściowe będziemy konsekwentnie wykorzystywać w dalszych rozważaniach szczegółowych.

W dalszej części w celu większej przejrzystości we wzorach będziemy zamiast symboli $W(t)$, $\xi_e(t)$, $\xi(t)$, $\xi'_e(t)$ pisali W , ξ_e , ξ , ξ'_e pamiętając, że są one zmienne w czasie.

3. ROZWIĄZANIE DLA POCZĄTKOWEJ FAZY PROCESU ŚCISKANIA PASMA

W początkowej fazie procesu ściskania w paśmie wystąpi układ stref zgodny z rys. 1. Z uwagi na pełną symetrię naprężeń i przemieszczeń w ściskanym paśmie względem płaszczyzny symetrii pasma $x=0$, dalsze rozważania będziemy prowadzili dla półpasma.

3.1. Rozwiązanie dla strefy edometrycznej sprężystej E_d

Wykorzystując wzory /2.2/, odkształcenia w strefie E_d możemy określić następująco

$$\begin{aligned} \varepsilon_x^{ed} &\equiv 0, \quad \varepsilon_y^{ed} \equiv 0, \quad \varepsilon_z^{ed} = -\frac{\partial u_z}{\partial z} = \frac{W}{h} \\ /3.1/ \quad \delta_{xy}^{ed} &= 0, \quad \delta_{yz}^{ed} = 0, \quad \delta_{zx}^{ed} = 0 \end{aligned}$$

Wprowadzając zależności /3.1/ do związków konstytutywnych /2.5/ możemy określić rozkład naprężeń w strefie E_d za pomocą wzorów

$$\begin{aligned} /3.2/ \quad \sigma_x^{ed} = \sigma_y^{ed} &= \frac{E' W}{h} \frac{\nu'}{1-\nu'^2}, \quad \sigma_z^{ed} = \frac{E' W}{h} \frac{1}{1-\nu'^2} \\ \tau_{xy}^{ed} = \tau_{yz}^{ed} = \tau_{zx}^{ed} &= 0 \quad \text{dla } 0 \leq x \leq \xi_e \end{aligned}$$

gdzie E' i ν' są oznaczeniami pomocniczymi równymi odpowiednio

$$/3.3/ \quad E' = \frac{E}{1-\nu^2}, \quad \nu' = \frac{\nu}{1-\nu}, \quad 0 < \nu < 0,5, \quad 0 < \nu' < 1$$

a E i ν modułem odkształcenia i liczbą Poissona dla skał.

Mamy zatem jednorodny stan naprężenia, nie zmieniający się wzdłuż osi x .

Warunki równowagi /2.13/ i /2.14/ spełnione są tożsamościowo. Nieznany obecnie zasięg strefy E_4 określony promieniem ϱ_e wyznaczmy z warunku /2.20/₁ po uprzednim rozwiązaniu i określeniu rozkładu naprężeń w strefie sprężystej E .

3.2. Rozwiązanie dla strefy sprężystej E .

Wykorzystując wzory /2.1/ odkształcenia w strefie E możemy określić następująco:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x^e &= -\frac{\partial u_x}{\partial x} = -\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}, \quad \varepsilon_y^e = 0, \quad \varepsilon_z^e = -\frac{\partial u_z}{\partial z} = \frac{W}{h} \\ /3.4/ \quad \gamma_{xy}^e &= \gamma_{yz}^e - \gamma_{zx}^e = 0 \end{aligned}$$

Wprowadzając zależności /3.4/ do związków konstytutywnych /2.5/ i wykorzystując warunek brzegowy /2.16/₂ słuszny dla małych μ otrzymamy

$$\begin{aligned} \varepsilon_x^e &= \frac{1}{E'} (\sigma_x - \nu' \sigma_z) = -\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} \\ /3.5/ \quad \varepsilon_y^e &= 0 \longrightarrow \sigma_y^e = \nu' (\sigma_x^e + \sigma_z^e) \\ \varepsilon_z^e &= \frac{1}{E'} (\sigma_z - \nu' \sigma_x) = \frac{W}{h} \\ \tau_{xy}^e &= 0, \quad \tau_{yz}^e = 0, \quad \tau_{zx}^e = \mu \sigma_z \end{aligned}$$

gdzie E' i ν' określone jest podobnie jak poprzednio wzorem /3.3/.

Uwzględniając wcześniejsze założenia i rozpatrując pasek o infinitezymalnej szerokości dx i wysokości h /rys.4/ oraz traktując naprężenia styczne τ_{zx}^e jako siły kontaktowe na powierzchni styku ściskanego pasma z płytami możemy wykorzystując /2.13/ napisać równanie równowagi o postaci

$$/3.6/ \quad h \frac{\partial \sigma_x(x,t)}{\partial x} + 2\mu \sigma_z(x,t) = 0$$

lub

$$/3.6a/ \quad \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{2\mu}{h} \sigma_z = 0$$

Wyznaczając σ_x^e z /3.5/₂ i wstawiając do równania równowagi /3.6a/ otrzymujemy równanie równowagi

$$/3.7/ \quad \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{2\mu\nu^r}{h} \sigma_x + \frac{2\mu E^r}{h^2} W = 0$$

Całka ogólna tego równania ma postać

$$/3.8/ \quad \sigma_x^e = C_1^e(t) e^{-\frac{2\mu\nu^r}{h}x} - \frac{E^r W}{h\nu^r}$$

gdzie $C_1^e(t)$ jest stałą całkowania.

Zadając aby zgodnie z założonym uprzednio warunkiem /2.16/₁ i warunkiem ciągłości /2.20/₁ było

$$/3.9/ \quad \sigma_x^e \Big|_{x=l} = 0, \quad [\sigma_x] \Big|_{x=g_e} = 0$$

gdzie $[\]$ oznacza nieciągłość funkcji na granicy obu stref, określimy stałą całkowania $C_1^e(t)$ a następnie naprężenia i promień g_e otrzymując:

$$/3.10/ \quad \begin{aligned} \sigma_x^e &= \frac{E^r W}{h\nu^r} \left[e^{\frac{2\mu\nu^r}{h}(l-x)} - 1 \right] \\ \sigma_y^e &= \nu(\sigma_x^e + \sigma_z^e) = \frac{E^r W}{h} \left[e^{\frac{2\mu\nu^r}{h}(l-x)} - \frac{1}{1+\nu^r} \right] \\ \sigma_z^e &= \frac{E^r W}{h} e^{\frac{2\mu\nu^r}{h}(l-x)} \end{aligned}$$

dla $g_e \ll l$

oraz

$$/3.11/ \quad g_e = l - \frac{h}{2\mu\nu^r} \ln \frac{1}{1-\nu^{r2}} \quad \text{skąd} \quad l - g_e = d = \frac{h}{2\mu\nu^r} \ln \frac{1}{1-\nu^{r2}}$$

Wynika stąd, że szerokość strefy sprężystej E nie zmienia się z szerokością pasma i jest stała dla danej wysokości h.

Ponieważ położenie granicy obszaru E_d winno spełniać warunek

$$/3.12/ \quad 0 < g_e < l$$

więc podstawiając doń /3.11/ możemy określić początkowe wymiary ściskanego pasma przy których wystąpi układ stref E_4 i E założony na rys. 1, otrzymując

$$/3.13/ \quad \frac{l}{h} > \frac{1}{2\mu\nu^2} \ln \frac{1}{1-\nu^2}$$

Przy niespełnieniu powyższej nierówności strefa edometryczna zanika i strefa sprężysta obejmuje cały obszar warstwy ściskanej.

Pole przemieszczeń $u(x,t)$ możemy określić z /3.5/₁ po podstawieniu rozwiązania /3.10/ otrzymując

$$/3.14/ \quad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{E^*} (\nu^2 \sigma_2^e - \sigma_x^e) = -\frac{W}{h\nu^2} \left[(1-\nu^2) e^{\frac{2\mu\nu^2}{h}(l-x)} - 1 \right]$$

Po scałkowaniu otrzymamy

$$/3.15/ \quad u^e(x,t) = \frac{W}{h\nu^2} \left[\frac{(1-\nu^2)h}{2\mu\nu^2} e^{\frac{2\mu\nu^2}{h}(l-x)} + x - C_2^e(t) \right] \quad \text{dla } g_e \ll x < l$$

gdzie stałą całkowania $C_2^e(t)$ określimy z warunku ciągłości /2.19/₁ przemieszczeń $u(x,t)$ na wspólnej granicy strefy edometrycznej i sprężystej który przy wykorzystaniu /2.2/ przyjmuje

$$/3.16/ \quad u^e(x,t) \Big|_{x=g_e} = 0$$

Tak wyznaczona stała całkowania $C_2^e(t)$ pozwala określić $u^e(x,t)$ następująco

$$/3.17/ \quad u^e(x,t) = \frac{W}{h\nu^2} \left\{ \frac{(1-\nu^2)h}{2\mu\nu^2} \left[e^{\frac{2\mu\nu^2}{h}(l-x)} - e^{\frac{2\mu\nu^2}{h}(l-g_e)} \right] + x - g_e \right\}$$

$$\text{dla } g_e \ll x \ll l$$

Uwzględniając, że promień ϱ_e określony jest zależnością /3.11/ możemy ostatecznie określić przemieszczenie w strefie sprężystej E

$$/3.18/ \quad u^e(x,t) = \frac{W}{2\mu v^*} \left\{ \left[(1-v^{*2}) e^{\frac{2\mu v^*}{h}(l-x)} - \frac{2\mu v^*}{h}(l-x) \right] - (1 - \ln \frac{1}{1-v^{*2}}) \right\} \quad \text{dla } \varrho_e \leq l$$

i przemieszczenie u_z^e pionowego brzegu pasma $x = l$

$$/3.19/ \quad u_z^e = u^e(x,t) \Big|_{x=l} = \frac{W}{2\mu v^{*2}} \left[\ln \frac{1}{1-v^{*2}} - v^{*2} \right]$$

Ponieważ v^* spełnia warunek /3.3/ więc $u_z^e > 0$ przy wzrastającym W .

3.3. Rozwiązanie dla końcowego stanu początkowej fazy procesu ściskania pasma

Przedstawione rozwiązanie w strefie edometrycznej i sprężystej są ważne do momentu pojawienia się pierwszego uplastycznienia materiału ściskanego pasma odpowiadającego przemieszczenia $W = W_1 > 0$. W celu określenia przemieszczenia W_1 oraz przekroju pasma w którym nastąpi pierwsze uplastycznienie rozpatrzmy początkową powierzchnię plastyczności, którą na podstawie /2.10/ i /2.11/ przy przyjęciu $\lambda = 0$ i uwzględnieniu, że $\sigma_1 = \sigma_z$ i $\sigma_3 = \sigma_x$ możemy przedstawić jako

$$/3.20/ \quad f_0(\varrho) = \frac{1}{2}(\sigma_z - \sigma_x) - \frac{1}{2}(\sigma_z + \sigma_x) \sin \varphi - c_0 \cos \varphi = 0$$

Wyrażając funkcję $f_0(\varrho)$ przez wartości naprężeń w obszarze E_d i E określonych zależnościami /3.2/ i /3.10/ otrzymamy

$$/3.21/ \quad f_0^{\text{ed}}(\varrho) = -\frac{E^* W}{2(1-v^{*2})h} \left[(1+v^*) \sin \varphi - (1-v^*) \right] - c_0 \cos \varphi$$

oraz

$$/3.22/ \quad f_0^e(\varrho) = -\frac{E^* W}{2v^* h} \left\{ \left[(1+\sin \varphi) - (1-\sin \varphi) v^* \right] e^{\frac{2\mu v^*}{h}(l-x)} - (1+\sin \varphi) \right\} - c_0 \cos \varphi$$

Jak widać funkcja $f_0^{ed}(\xi)$ nie zależy od x i jej wartość przy ustalonym W jest jednakowa w całej strefie edometrycznej. Natomiast funkcja $f_0^e(\xi)$ dla ustalonego W osiąga maksymalną wartość dla $x = 1$. Wynika stąd, że pierwsze uplastycznienie ściskanego pasma nastąpi na powierzchni brzegowej $x = 1$.

Wobec tego postulując aby funkcja $f_0^e(\xi)$ zerowała się dla $x = 1$ otrzymamy

$$/3.23/ \quad f_0^e(\xi)|_{x=1} = \frac{E^* W}{2h} (1 - \sin \varphi) - C_0 \cos \varphi = 0$$

skąd przemieszczenie odpowiadające pierwszemu uplastycznieniu na brzegu $x = 1$ wynosi

$$/3.24/ \quad W = W_1 = \frac{2h C_0 \cos \varphi}{E^* (1 - \sin \varphi)}$$

Wstawiając wartości W_1 do wzorów /3.2/, /3.10/, /3.17/, /3.18/ i /3.19/, otrzymamy wielkości naprężeń i przemieszczeń w strefie E_d i E dla końcowego stanu początkowej fazy procesu ściskania pasma odpowiadającego pojawieniu się pierwszego uplastycznienia na brzegu $x = 1$. Wzory te przyjmują postać:

- strefa edometryczna E_d ($0 \leq x \leq \xi_e$, $0 \leq z \leq h$)

$$\sigma_x^{ed}|_{W_1} = \sigma_y^{ed}|_{W_1} = \frac{2C_0 \nu^r \cos \varphi}{(1 - \nu^{r2})(1 - \sin \varphi)}$$

$$/3.25/ \quad \sigma_z^{ed}|_{W_1} = \frac{2C_0 \cos \varphi}{(1 - \nu^{r2})(1 - \sin \varphi)}$$

$$u_z^{ed}|_{W_1} = - \frac{2C_0 \cos \varphi}{E^* (1 - \sin \varphi)} z, \quad u_x^{ed} = u_y^{ed} = 0$$

- strefa sprężysta E ($\xi_e \leq x \leq 1$, $0 \leq z \leq h$)

$$\sigma_x^e|_{W_1} = \frac{2C_0 \cos \varphi}{\nu^r (1 - \sin \varphi)} \left[e^{\frac{2\mu \nu^r}{h}(l-x)} - 1 \right]$$

$$/3.26/ \quad \sigma_y^e|_{W_1} = \frac{2C_0 \cos \varphi}{1 - \sin \varphi} \left[e^{\frac{2\mu \nu^r}{h}(l-x)} - \frac{1}{1 + \nu^r} \right]$$

$$/3.26/ \quad G_z^e|_{W_1} = \frac{2G_0 \cos \varphi}{1 - \sin \varphi} e^{\frac{2\mu v^2}{h}(l-x)}$$

$$u_x^e|_{W_1} = \frac{h G_0 \cos \varphi}{\mu v^2 E'(1 - \sin \varphi)} \left\{ [(1 - v^2)] e^{\frac{2\mu v^2}{h}(l-x)} - \frac{2\mu v^2}{h}(l-x) \right\} - (1 - \ln \frac{1}{1 - v^2})$$

$$u_z^e|_{W_1} = - \frac{2G_0 \cos \varphi}{E'(1 - \sin \varphi)} z$$

- strefa sprężysta E (brzeg $x = 1$, $0 \leq z \leq h$)

$$G_x^e|_{W_1} = 0$$

$$G_y^e|_{W_1} = \frac{2v^2 G_0 \cos \varphi}{(1 + v^2)(1 - \sin \varphi)}$$

$$/3.27/ \quad G_z^e|_{W_1} = \frac{2G_0 \cos \varphi}{1 - \sin \varphi}$$

$$u_x^e|_{W_1} = \frac{h G_0 \cos \varphi (\ln \frac{1}{1 - v^2} - v^2)}{\mu v^2 E'(1 - \sin \varphi)}$$

$$u_z^e|_{W_1} = - \frac{2G_0 \cos \varphi}{E'(1 - \sin \varphi)} z$$

Reasumując przedstawione rozwiązania dla początkowej fazy procesu ściskania pasma możemy stwierdzić, że przyjęty dla tej fazy układ stref przedstawiony na rys. 1 jest dopuszczalny jeżeli wymiary początkowe pasma spełniają warunek /3.13/, a parametr W określający ewolucję procesu spełnia warunek /3.24/ tzn.

$$/3.28/ \quad \frac{l}{h} > \frac{1}{2\mu v^2} \ln \frac{1}{1 - v^2}$$

$$0 \leq W \leq W_1 = \frac{2h G_0 \cos \varphi}{E'(1 - \sin \varphi)}$$

Dla wartości $W \geq W_1$ pojawia się następna faza procesu z układem stref przedstawionym na rys. 2 lub 3. Wartość $W = W_1$ określa jednocześnie końcowy stan początkowej i początkowy stan zaawansowanej fazy procesu ściskania pasma.

3.4. Graficzna interpretacja rozwiązań dla początkowej fazy procesu ściskania pasma.

Przedstawione rozwiązania można zinterpretować graficznie na płaszczyźnie naprężeń σ_x, σ_z /rys. 6/. W tym celu wykorzystując zależności /3.2/, /3.10/ i /3.20/ wyrazimy naprężenia w poszczególnych strefach oraz początkowy warunek plastyczności następująco:

$$/3.29/ \quad \sigma_z^{ed} = \frac{1}{\nu'} \sigma_x^{ed}$$

$$/3.30/ \quad \sigma_z^e = \nu' \sigma_x^e + \frac{E'W}{h}$$

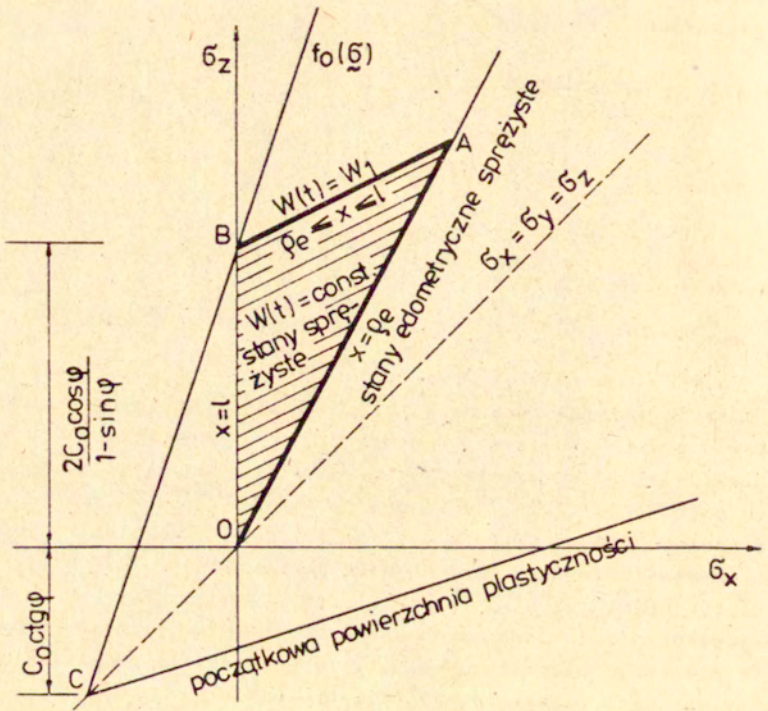
$$/3.31/ \quad \sigma_z^{ep} = \frac{1+\sin\varphi}{1-\sin\varphi} \sigma_x^{ep} + \frac{2c\cos\varphi}{1-\sin\varphi}$$

Na rys. 6 początkową powierzchnię plastyczności przedstawia prosta CB opisana równaniem /3.31/, stany edometryczne przedstawia prosta OA o stałym nachyleniu $\frac{1}{\nu'}$ opisana równaniem /3.29/ a stany sprężyste rodzina prostych równoległych o stałym nachyleniu ν' i zmiennym parametrze $\frac{E'W}{h}$ opisana równaniem /3.30/. Stany naprężenia w początkowej fazie procesu ściskania pasma reprezentują więc punkty obszaru OAB w którym odcinek OB reprezentuje stany naprężenia na powierzchni brzegowej pasma $x = 1$, odcinek AB sprężysty stan naprężenia w momencie powstania pierwszego uplastycznienia brzegu pasma $x = 1$ przy wartości parametru ewolucji procesu $W = W_1$, a odcinek OA stany edometryczne.

Punkt A reprezentuje jednocześnie stan edometryczny i stan sprężysty na granicy $x = \varrho_c$ stref E_d i E przy $W = W_1$. Punkt B natomiast reprezentuje jednocześnie stan sprężysty i stan sprężysto-plastyczny na brzegu pasma $x = 1$ przy $W = W_1$.

3.5. Siła przenoszona przez pasmo z materiału sprężysto-kruche- go.

Jak wynika z modelu materiału sprężysto-kruche- /rys. 5c/



Rys. 6.

po osiągnięciu początkowego warunku plastyczności $f_0(\xi) = 0$ na brzegu pasma, następuje skokowy spadek naprężeń σ_z do zera. i od zewnątrz pasma zaczyna się propagować strefa zniszczenia $\sigma_z = \sigma_x = 0$. Ponieważ początkowi procesu zniszczenia odpowiada maksymalna wartość obciążenia, progresję zniszczenia można opisać zakładając kolejne wartości wymiaru $l_z < l$ odpowiadające zmniejszeniu szerokości pasma.

W celu określenia maksymalnej siły przenoszonej przez pasmo z materiału sprężysto-kruchoego należy scałkować podane uprzednio rozkłady naprężeń σ_z w granicach stref E_d i E . Uwzględniając fakt, że rozważania prowadziliśmy dla półpasma oraz wykorzystując $1/3.2/2$ i $1/3.10/3$ otrzymamy dla $W = W_1$

- dla strefy E_d ($0 \leq x \leq \xi_e$)

$$/3.32/ \quad Q_1^{ed} = 2 \int_0^{\xi_e} \sigma_z^{ed} dx = 2 \frac{E' W_1}{h} \frac{1}{1-\nu^2} \xi_e$$

- dla strefy E ($\xi_e \leq x \leq l$)

$$/3.33/ \quad Q_1^e = 2 \int_{\xi_e}^l \sigma_z^e dx = \frac{E' W_1}{\mu \nu^2} \left[e^{\frac{2\mu \nu^2}{h}(l-\xi_e)} - 1 \right]$$

Całkowitą siłę przenoszoną przez pasmo określimy więc jako

$$/3.34/ \quad Q_1 = Q_1^{ed} + Q_1^e$$

gdzie Q_1^{ed} i Q_1^e należy obliczyć zgodnie z /3.32/ i /3.33/.

4. ROZWIĄZANIE DLA ZAAWANSOWANEJ FAZY PROCESU ŚCISKANIA PASMA

Zgodnie z wcześniejszymi ustaleniami zaawansowana faza procesu ściskania pasma rozwija się przy przemieszczeniu górnej płyty ściskającej

$$/4.1/ \quad W > W_1 = \frac{2 h c_0 \cos \varphi}{E' (1 - \sin \varphi)}$$

przy jednocześnie spełnionym warunku /3.13/ dla początkowych wymiarów pasma.

4.1. Układy stref możliwe w zaawansowanej fazie procesu ściskania pasma.

W zależności od relacji między stałymi materiałowymi pasma wynikającymi ze wzorów /3.29+3.31/ otrzymujemy układy stref przedstawione na rys. 2 lub na rys. 3. Przy spełnieniu zależności

$$/4.2/ \quad \frac{1}{\nu} < \frac{1+\sin\varphi}{1-\sin\varphi} \quad \text{lub} \quad \sin\varphi > \frac{1-\nu^r}{1+\nu^r} \equiv 1-2\nu$$

w ciągu całego procesu ściskania pasma przy spełnieniu warunku /4.1/ zachowa się układ stref przedstawiony na rys. 2, aż do momentu powstania na brzegu $x = 1$ pasma rezydualnego warunku plastyczności odpowiadającego przemieszczeniu $W = W_2$, które określimy w dalszej części pracy.

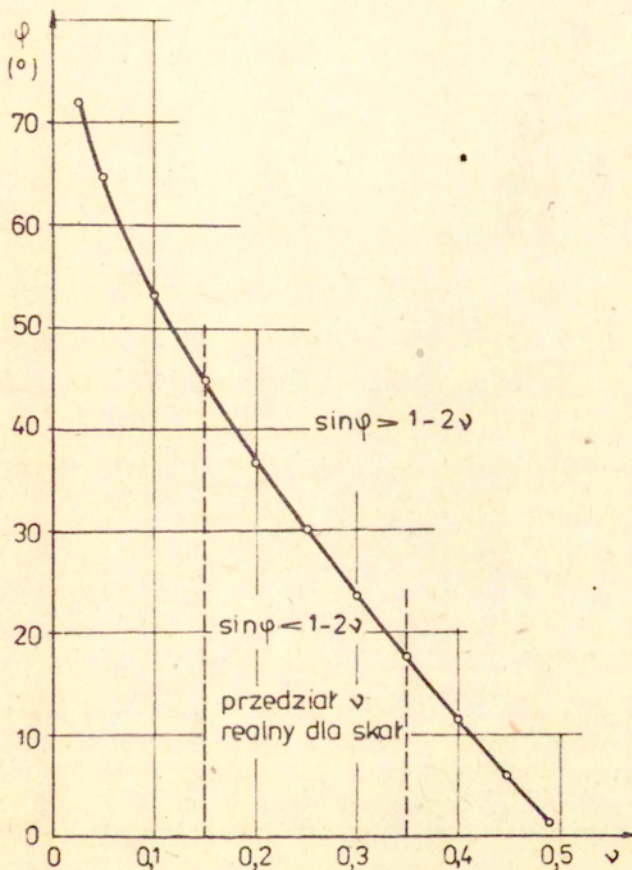
Przy spełnieniu zależności

$$/4.3/ \quad \frac{1}{\nu^r} > \frac{1+\sin\varphi}{1-\sin\varphi} \quad \text{lub} \quad \sin\varphi < \frac{1-\nu^r}{1+\nu^r} \equiv 1-2\nu$$

układ stref przedstawiony na rys. 2 zachowa się tylko w początkowym etapie zaawansowanej fazy procesu określonym zależnością

$$/4.4/ \quad W_1 \ll W \ll W_3 < W_2$$

gdzie W_3 odpowiada momentowi zniknięcia strefy sprężystej E, połączenia się strefy sprężysto-plastycznej EP ze sprężystą strefą edometryczną E_d która jednocześnie przechodzi w stan plastyczny tworząc strefę E_{dp} i dając układ stref zgodny z rys. 3. Wartość przemieszczenia W_3 określimy w dalszej części pracy. Układ ten zachowuje się do chwili uzyskania przemieszczenia górnej płyty ściskającej $W < W_2$. Na rys. 7 przedstawiono zależności między φ oraz ν z której łatwo określić jaki układ stref wystąpi w fazie zaawansowanej przy danym φ i ν .



Rys. 7.

4.2. Rozwiązanie dla strefy sprężysto-plastycznej EP.

Uwzględniając, że naprężenia $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ są naprężeniami głównymi tensora naprężenia dla rozpatrywanego pasma, potencjał plastyczny i warunek plastyczności określone wzorami /2.7/ i /2.10/ przyjmują postać

$$/4.5/ \quad g(\sigma) \equiv \frac{1}{2}(\sigma_z - \sigma_x) - \frac{1}{2}(\sigma_z + \sigma_x) \sin \varphi' - a = 0$$

$$/4.6/ \quad f(\sigma, \lambda) \equiv \frac{1}{2}(\sigma_z - \sigma_x) - \frac{1}{2}(\sigma_z + \sigma_x) \sin \varphi - c(\lambda) \cos \varphi = 0$$

gdzie

$$/4.7/ \quad 0 \leq \varphi' \leq \varphi, \quad c(\lambda) = c_0 - c_1 \lambda, \quad \lambda = \varepsilon_z^p - \varepsilon_x^p$$

Przyjęte w założeniach /2.6/3 prawo płynięcia przybiera postać

$$\dot{\varepsilon}_x^p = \dot{\Lambda} \frac{\partial g}{\partial \sigma_x} = -\frac{1}{2} \dot{\Lambda} (1 + \sin \varphi')$$

$$/4.8/ \quad \dot{\varepsilon}_y^p = 0$$

$$\dot{\varepsilon}_z^p = \dot{\Lambda} \frac{\partial g}{\partial \sigma_z} = \frac{1}{2} \dot{\Lambda} (1 - \sin \varphi')$$

gdzie parametr $\dot{\Lambda}$ wyznaczmy w dalszej części pracy.

Na podstawie /2.6/1 i /4.8/ związki pomiędzy prędkościami naprężenia i odkształcenia przyjmują postać

$$/4.9/ \quad \dot{\varepsilon}_x = \frac{1}{E} [\dot{\sigma}_x - \nu(\dot{\sigma}_y + \dot{\sigma}_z)] - \frac{1}{2} \dot{\Lambda} (1 + \sin \varphi')$$

$$\dot{\varepsilon}_y = \frac{1}{E} [\dot{\sigma}_y - \nu(\dot{\sigma}_x + \dot{\sigma}_z)] = 0 \longrightarrow \dot{\sigma}_y = \nu(\dot{\sigma}_x + \dot{\sigma}_z)$$

$$\dot{\varepsilon}_z = \frac{1}{E} [\dot{\sigma}_z - \nu(\dot{\sigma}_x + \dot{\sigma}_y)] + \frac{1}{2} \dot{\Lambda} (1 - \sin \varphi')$$

lub po wykorzystaniu zależności /3.3/ i /4.9/2

$$\begin{aligned} /4.10/ \quad \dot{\epsilon}_1 &= \frac{1}{E} (\dot{\sigma}_x - \nu' \dot{\sigma}_z) - \frac{1}{2} \dot{\Lambda} (1 + \sin \varphi') \\ \dot{\epsilon}_2 &= \frac{1}{E} (\dot{\sigma}_z - \nu' \dot{\sigma}_x) + \frac{1}{2} \dot{\Lambda} (1 - \sin \varphi') \end{aligned}$$

gdzie pierwsze składniki określają część sprężystą $\dot{\epsilon}_1^e, \dot{\epsilon}_2^e$
 a drugie część plastyczną $\dot{\epsilon}_1^p, \dot{\epsilon}_2^p$ prędkości odkształcenia.
 Podstawiając $\dot{\epsilon}_1^p, \dot{\epsilon}_2^p$ do /4.7/₃ otrzymamy

$$/4.11/ \quad \dot{\lambda} = \dot{\Lambda}$$

Parametr $\dot{\Lambda}$ wyznaczmy z warunku zgodności Pragera, żądając spełnienia równania /4.6/ w każdym momencie procesu ściskania, czyli różniczkując warunek plastyczności względem czasu. Otrzymamy zatem

$$/4.12/ \quad \dot{f} = \frac{\partial f}{\partial \sigma_x} \dot{\sigma}_x + \frac{\partial f}{\partial \sigma_z} \dot{\sigma}_z + \frac{\partial f}{\partial \lambda} \dot{\lambda} = \frac{1}{2} (\dot{\sigma}_z - \dot{\sigma}_x) - \frac{1}{2} (\dot{\sigma}_z + \dot{\sigma}_x) \sin \varphi + C_1 \dot{\lambda} \cos \varphi = 0$$

skąd na podstawie /4.11/

$$/4.13/ \quad \dot{\lambda} = \dot{\Lambda} = \frac{-\dot{\sigma}_z (1 - \sin \varphi) + \dot{\sigma}_x (1 + \sin \varphi)}{2 C_1 \cos \varphi}$$

Całkując /4.13/ względem czasu oraz spełniając warunek początkowy $\Lambda = 0$ dla $t = t_0$ otrzymujemy

$$/4.14/ \quad \lambda = \Lambda = \frac{-(\sigma_z - \sigma_{z0})(1 - \sin \varphi) + (\sigma_x - \sigma_{x0})(1 + \sin \varphi)}{2 C_1 \cos \varphi}$$

gdzie σ_{z0}, σ_{x0} odpowiadają stanowi naprężenia na początkowej powierzchni plastyczności na której $\lambda = \Lambda = 0$. Ponieważ dla początkowej powierzchni plastyczności mamy w równaniu /4.6/ $C(\lambda) = C_0$ więc wzór /4.14/ można przekształcić do postaci

$$/4.15/ \quad \lambda = \Lambda = \frac{-\sigma_z (1 - \sin \varphi) + \sigma_x (1 + \sin \varphi) + 2 C_0 \cos \varphi}{2 C_1 \cos \varphi}$$

Całkując równania /4.10/ i podstawiając /4.15/ otrzymujemy

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= A \sigma_x - B \sigma_z - C = -\frac{\partial u}{\partial x} \\ /4.16/ \quad \varepsilon_z &= -D \sigma_x + F \sigma_z + G = \frac{w}{h} \end{aligned}$$

gdzie

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{E'} - \frac{(1+\sin\varphi)(1+\sin\varphi')}{4C_1 \cos\varphi} & D &= \frac{\nu}{E'} - \frac{(1+\sin\varphi)(1-\sin\varphi')}{4C_1 \cos\varphi} \\ /4.17/ \quad B &= \frac{\nu}{E'} - \frac{(1-\sin\varphi)(1+\sin\varphi')}{4C_1 \cos\varphi} & F &= \frac{1}{E'} - \frac{(1-\sin\varphi)(1-\sin\varphi')}{4C_1 \cos\varphi} \\ C &= \frac{C_0(1+\sin\varphi')}{2C_1} & G &= \frac{C_0(1-\sin\varphi')}{2C_1} \end{aligned}$$

Wyznaczając σ_z z /4.16/ i wstawiając do /3.6a/ otrzymujemy następującą postać równania równowagi

$$/4.18/ \quad \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{2\mu}{h} \frac{D}{F} \sigma_x + \frac{2\mu}{h} \frac{1}{F} \left[\frac{W}{h} - G \right] = 0$$

Całka ogólna tego równania ma postać

$$/4.19/ \quad \sigma_x^{ep} = C_1^{ep}(t) e^{-\frac{2\mu}{h} \frac{D}{F} x} - \frac{1}{D} \left[\frac{W}{h} - G \right]$$

gdzie $C_1^{ep}(t)$ jest stałą całkowania.

Żądając aby zgodnie z założonym uprzednio warunkiem brzegowym /2.16/₁ było

$$/4.20/ \quad \sigma_x^{ep} \Big|_{x=l} = 0$$

Określimy stałą całkowania $C_1^{ep}(t)$ a następnie poszukiwany rozkład naprężeń w strefie EP równy

$$\begin{aligned} /4.21/ \quad \sigma_x^{ep} &= \frac{1}{D} \left(\frac{W}{h} - G \right) \left[e^{\frac{2\mu}{h} \frac{D}{F} (l-x)} - 1 \right] \\ \sigma_y^{ep} &= \nu (\sigma_x^{ep} + \sigma_z^{ep}) = \frac{\nu}{1+\nu} \left(\frac{W}{h} - G \right) \left[\left(\frac{1}{D} + \frac{1}{F} \right) e^{\frac{2\mu}{h} \frac{D}{F} (l-x)} - \frac{1}{D} \right] \\ \sigma_z^{ep} &= \frac{1}{F} \left(\frac{W}{h} - G \right) e^{\frac{2\mu}{h} \frac{D}{F} (l-x)} \\ \text{dla } \varphi \leq x \leq l, \quad W_1 < W < W_2 \end{aligned}$$

Pole przemieszczeń $u(x,t)$ możemy określić z /4.16/₁ po podstawienu /4.21/ otrzymując

$$/4.22/ \quad \frac{\partial u}{\partial x} = -A\sigma_x^{ep} + B\sigma_z^{ep} + C = \left(\frac{W}{h} - G\right) \left[\left(\frac{B}{F} - \frac{A}{D}\right) e^{\frac{2u}{h} \frac{D}{F}(l-x)} + \frac{A}{D} \right] + C$$

Po scałkowaniu otrzymamy

$$/4.23/ \quad u^{ep}(x,t) = \left(\frac{W}{h} - G\right) \left[-\frac{h}{2u} \frac{F}{D} \left(\frac{B}{F} - \frac{A}{D}\right) e^{\frac{2u}{h} \frac{D}{F}(l-x)} + \frac{A}{D} x \right] + Cx + C_2^{ep}(t)$$

gdzie stałą całkowania $C_2^{ep}(t)$ określimy z warunku ciągłości /2.19/₂ przemieszczeń $u(x,t)$ na wspólnej granicy strefy EP i E, który przyjmuje postać

$$/4.24/ \quad \left[u(x,t) \right]_{x=s} = 0$$

przy czym $u^e(x,t)$ określa /3.17/. Znając $C_2^{ep}(t)$ i wstawiając do /4.23/ przemieszczenie określi wzór

$$/4.25/ \quad u^{ep}(x,t) = \frac{W}{\nu^2} \left\{ \frac{1-\nu^2}{2u\nu^2} \left[e^{\frac{2u\nu^2}{h}(l-s)} - e^{\frac{2u\nu^2}{h}(l-s_e)} \right] + \frac{s-s_e}{h} \right\} +$$

$$+ \frac{h}{2u} \frac{F}{D} \left(\frac{W}{h} - G\right) \left(\frac{B}{F} - \frac{A}{D}\right) \left[e^{\frac{2u}{h} \frac{D}{F}(l-s)} - e^{\frac{2u}{h} \frac{D}{F}(l-x)} \right] +$$

$$+ (x-s) \left[\frac{A}{D} \left(\frac{W}{h} - G\right) + C \right] \quad \text{dla } s \ll x \ll l$$

Przemieszczenie w_2 limitujące koniec procesu w zaawansowanej fazie ściskania pasma, odpowiada całkowitej utracie spójności materiału pasma i wiąże się z powstaniem rezydualnego warunku plastyczności na brzegu $x = l$ co można wykorzystując /4.6/ zapisać następująco

$$/4.26/ \quad f_r(s) = \frac{1}{2}(\sigma_z^{ep} - \sigma_x^{ep}) - \frac{1}{2}(\sigma_z^{ep} + \sigma_x^{ep}) \sin \varphi = 0$$

Ponieważ zgodnie z przyjętym warunkiem brzegowym /2.16/₁ mamy

$$/4.27/ \quad \sigma_x^{EP} \Big|_{x=l} = 0$$

więc zależność /4.27/ po uwzględnieniu /4.21/₃ oraz /4.17/₆ daje

$$/4.28/ \quad W = W_2 = \frac{h G_0 (1 - \sin \varphi^*)}{2 C_1}$$

gdzie wartość parametru C_1 który nazwiemy współczynnikiem osłabienia materiału pasma, jest na razie nieznana. Określimy ją z warunku /4.1/ otrzymując

$$/4.29/ \quad 0 < C_1 < \frac{E'(1 - \sin \varphi^*)(1 - \sin \varphi^*)}{4 \cos \varphi}$$

Dopuszczając wartości $C_1 = 0$ otrzymamy model materiału idealnie-plastycznego /rys. 5d/ a przy

$$/4.29a/ \quad C_1 \gg \frac{E'(1 - \sin \varphi^*)(1 - \sin \varphi^*)}{4 \cos \varphi}$$

otrzymujemy model materiału sprężysto-kruchego /rys. 5c/.

Nieznany obecnie zasięg strefy EP określimy w p-cie 4.3 po uprzednim rozwiązaniu i określeniu rozkładu naprężeń w strefie sprężystej E.

4.3. Rozwiązanie dla strefy sprężystej E

Naprężenia w tej strefie określimy wychodząc z warunku ciągłości /2.20/₂

$$/4.30/ \quad [\sigma_x] \Big|_{x=g} = 0$$

i wykorzystując uprzednio wyprowadzone zależności /3.8/ i /4.21/₁ skąd wyznaczmy ponownie stałą całkowania $C_1^*(t)$ i otrzymamy ostatecznie

$$\sigma_x^e = e^{\frac{2\mu\nu'}{h}(s-x)} \left\{ \frac{1}{D} \left(\frac{W}{h} - G \right) \left[e^{\frac{2\mu}{h} \frac{D}{F}(L-s)} - 1 \right] + \frac{E'W}{h\nu'} \right\} - \frac{E'W}{h\nu'}$$

$$/4.31/ \quad \sigma_y^e = \nu(\sigma_x^e + \sigma_z^e)$$

$$\sigma_z^e = \nu' e^{\frac{2\mu\nu'}{h}(s-x)} \left\{ \frac{1}{D} \left(\frac{W}{h} - G \right) \left[e^{\frac{2\mu}{h} \frac{D}{F}(L-s)} - 1 \right] + \frac{E'W}{h\nu'} \right\}$$

dla $s_e \leq x \leq s$, $W_1 < W < W_2$

W celu określenia promienia s będącego granicą strefy EP i E zażądamy spełnienia początkowego warunku plastyczności dla $x = s$ przez naprężenia w strefie EP, lub ciągłości naprężeń σ_z dla $x = s$, co możemy zapisać następująco

$$/4.32/ \quad f_0^{pop}(\sigma) \Big|_{x=s} = 0 \quad \text{lub} \quad [\sigma_z] \Big|_{x=s} = 0$$

Wykorzystując /3.20/ i /4.21/ lub /4.21/₃ i /4.31/₃ otrzymamy

$$/4.33/ \quad s = l - \frac{h}{2\mu} \frac{F}{D} \ln \frac{h[2D\alpha \cos\varphi + G(1+\sin\varphi)] - W(1+\sin\varphi)}{(W-Gh)[D-F-(D+F)\sin\varphi]} F$$

lub

$$/4.34/ \quad s = l - \frac{h}{2\mu} \frac{F}{D} \ln \frac{WF(DE' - \nu') + \nu'hFG}{W(D - \nu'F) - hG(D - \nu'F)}$$

Dwa ostatnie wzory są sobie równoważne.

Strefa sprężysta E jak już wspomniano w p-cie 4.1 może zachować się w ciągu całego procesu ściskania pasma tzn. dla

$$/4.35/ \quad W_1 < W < W_2$$

Jeżeli spełniony jest warunek /4.2/, lub może wystąpić tylko dla

$$/4.36/ \quad W_1 < W < W_3 < W_2$$

stopniowo zanikając przy $W \rightarrow W_3$, jeżeli spełniony jest warunek /4.3/.

4.4. Rozwiązanie dla strefy edometrycznej sprężystej E_1

Strefa ta występuje przy spełnieniu warunku /4.2/. Równania podstawowe dla tej strefy mają postać identyczną jak w początkowej fazie procesu ściskania pasma i opisane są zależnościami /3.1/ i /3.2/. Inny będzie jedynie zasięg tej strefy określony promieniem ξ_e . Promień ten określimy z warunku ciągłości /2.19/₁, który przyjmie postać

$$/4.37/ \quad [\sigma_x]_{|x=\xi_e} = 0$$

Wykorzystując zależności /3.2/₁ oraz /4.31/₁ otrzymamy

$$/4.38/ \quad \xi_e = \varrho - \frac{h}{2\mu v'} \ln \frac{WDE'}{v'(1-v'^2)(W-Gh) \left[e^{\frac{2\mu}{h} \xi_e (1-\varrho)} - 1 \right] + (1-v'^2)WDE'}$$

gdzie ϱ określenie jest przez /4.33/ lub /4.34/.

Znając przy spełnionym warunku /4.2/ dla kolejnych przemieszczeń górnej płyty ściskającej $W_1 < W < W_2$ wielkości promieni ξ_e i ϱ możemy określić ilościową ewolucję procesu ściskania pasma to znaczy progresję poszczególnych stref wydzielonych w paśmie zgodnie z rys. 2. Progresję poszczególnych stref i rozkład naprężeń σ_z w tych strefach przedstawiono przykładowo na rys. 10.

4.5. Rozwiązanie dla strefy edometrycznej plastycznej E_{dp}

Strefa ta występuje przy spełnieniu warunku /4.3/. Wartość parametru ewolucji procesu $W = W_3$ określającego początek powstania edometrycznej strefy plastycznej E_{dp} można określić wyrażając początkową powierzchnię plastyczności przez wartości naprężeń w strefie E_d określonych wzorem /3.2/ otrzymując:

$$/4.39/ \quad \frac{\partial}{\partial \xi} (\sigma) = \frac{E'W}{(1-v'^2)h} [1-v' - (1+v') \sin \varphi] - 2G \cos \varphi = 0$$

skąd

$$/4.40/ \quad W = W_3 = \frac{2h(1-\nu^2)G \cos \varphi}{E'[(1-\nu^2) - (1+\nu^2)\sin^2 \varphi]}$$

Przy przemieszczeniu $W = W_3$ znika strefa sprężysta E skąd wynika równość promieni $\varphi_e = \varphi$ określonych wzorami /4.33 lub 4.34 i 4.38/.

Zakładając warunek

$$/4.41/ \quad W_3 < W_2$$

można określić współczynnik osłabienia C_1 , której w tym przypadku musi spełniać zależność

$$/4.42/ \quad 0 < C_1 < \frac{E'[(1-\nu^2) - (1+\nu^2)\sin^2 \varphi](1-\sin^2 \varphi)}{4(1-\nu^2)\cos \varphi}$$

W zakresie parametru ewolucji procesu $W_3 \leq W < W_2$ rozwiązanie dla edometrycznej strefy plastycznej E_{dp} określimy wychodząc z zależności /4.16/ które przyjmą postać

$$/4.43/ \quad \varepsilon_x = A\sigma_x - B\sigma_z - C = 0$$

$$\varepsilon_z = -D\sigma_x + F\sigma_z + G = \frac{W}{h}$$

skąd po rozwiązaniu układu równań /4.43/ otrzymamy następujące wzory określające rozkład naprężeń w strefie E_{dp}

$$/4.44/ \quad \sigma_x^{red} = \frac{CF + B(\frac{W}{h} - G)}{AF - BD} = \sigma_y^{red}$$

$$\sigma_z^{red} = \frac{CD + A(\frac{W}{h} - G)}{AF - BD}$$

$$\text{dla } 0 \leq x \leq \varphi_e', \quad W_3 \leq W < W_2$$

W celu określenia promienia φ_e' będącego granicą strefy E_{dp} i EP zażądamy spełnienia ciągłości naprężeń σ_z dla $x = \varphi_e'$ co możemy zapisać jako

$$/4.45/ \quad [\sigma_z]_{x=g_e'} = 0$$

Wykorzystując warunek ciągłości /4.45/ oraz /4.21/₃ i /4.44/₂ otrzymamy

$$/4.46/ \quad \sigma_e' = \ell - \frac{h}{2\mu} \frac{F}{D} \ln \left[\frac{CD + R(\frac{h}{h} - G)}{AF - BD} \cdot \frac{F}{\frac{h}{h} - G} \right]$$

Pole przemieszczeń $u(x,t)$ w strefie EP dla przypadku określonego wzorem /4.3/ określimy z wcześniej wyprowadzonego wzoru /4.23/ w którym stałą całkowania $C_2^{ep}(t)$ wyznaczymy tym razem z warunku ciągłości /2.19/₃ przemieszczeń $u(x,t)$ na wspólnej granicy strefy EP i E_{ap} , który przyjmie postać

$$/4.47/ \quad [u(x,t)]_{x=g_e'} = 0$$

przy czym $u^{ep}(x,t) = 0$. Znając $C_2^{ep}(t)$ i wstawiając do /4.23/ przemieszczenie w strefie EP określi wzór

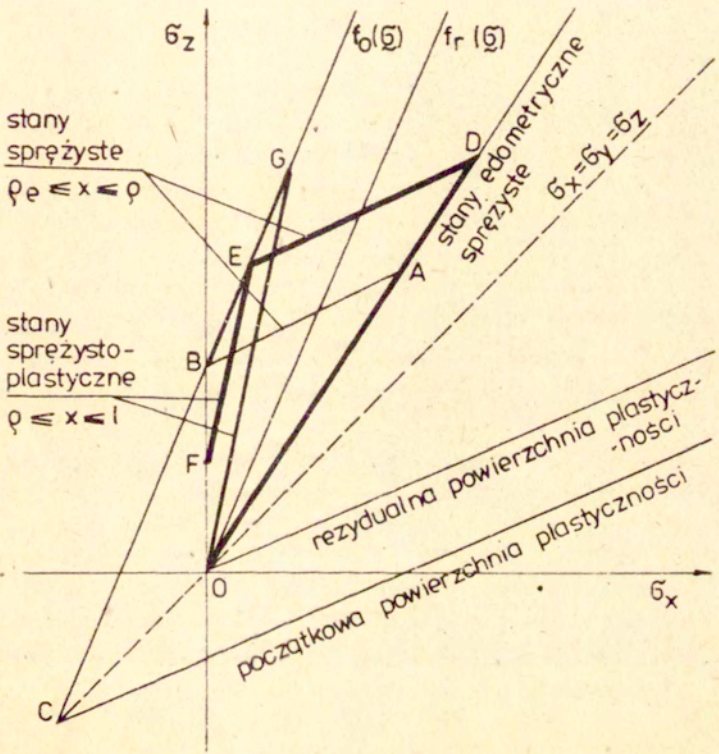
$$/4.48/ \quad u^{ep}(x,t) = \frac{h}{2\mu} \frac{F}{D} (\frac{h}{h} - G) \left(\frac{B}{F} - \frac{B}{D} \right) \left[e^{\frac{2\mu}{h} \frac{D}{F} (t-g_e')} - e^{\frac{2\mu}{h} \frac{D}{F} (t-x)} \right] + (x-g_e') \left[\frac{B}{D} (\frac{h}{h} - G) + C \right]$$

$$\text{dla } g_e' \leq x \leq \ell, W_3 \leq W < W_2$$

4.6. Graficzna interpretacja rozwiązań dla zaawansowanej fazy procesu sciskania pasma.

Przedstawione rozwiązania można podobnie jak w początkowej fazie procesu zinterpretować graficznie na płaszczyźnie naprężeń σ_x, σ_z . W tym celu wyrazimy naprężenia σ_z w strefie edometrycznej sprężystej wzorem /3.29/ w strefie sprężystej wzorem /3.30/ a początkowy warunek plastyczności wzorem /3.31/. Naprężenia w strefie sprężysto plastycznej EP i edometrycznej plastycznej E_{ap} na podstawie /4.16/₂ określa wzór

$$/4.49/ \quad \sigma_z^{ep} = \frac{D}{F} \sigma_x + \frac{1}{F} (h - G)$$



Rys. 8.

a rezydualny warunek plastyczności przy zerowej spójności materiału pasma na podstawie /2.10/ i /2.11/ zależność

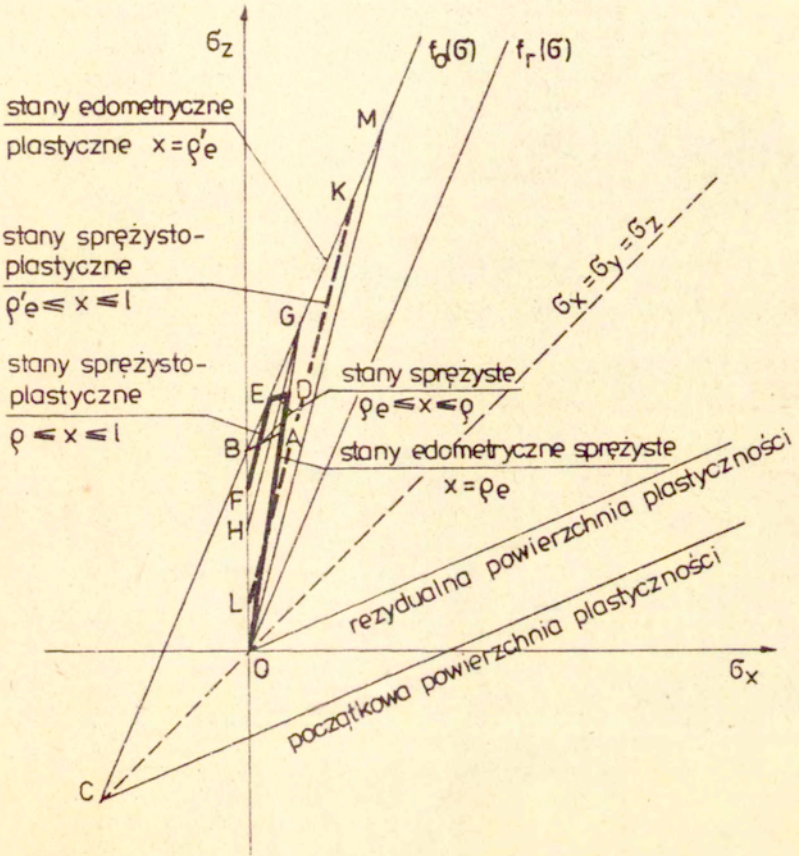
$$/4.50/ \quad \sigma_z = \frac{1 + \sin \varphi}{1 - \sin \varphi} \sigma_x$$

Rys. 8 przedstawia interpretację graficzną rozwiązania spełniającego warunek /4.2/ i odpowiadającego układowi stref pokazanemu na rys. 2.

Stany naprężenia w początkowej fazie procesu sciskania podobnie jak na rys. 6 reprezentują punkty obszaru OAB. Dla $W_1 < W < W_2$ stany edometryczne sprężyste reprezentuje przykładowo punkt D, stany sprężyste odcinek DE i stany sprężysto-plastyczne odcinek EF przy czym punkt D określa naprężenia dla $x = \xi_e$, punkt E dla $x = \xi$, a punkt F dla $x = 1$. Odcinek OG jest ograniczeniem przedstawionego rozwiązania odpowiadającym równości $W = W_2$.

Rys. 9 przedstawia interpretację graficzną rozwiązania spełniającego warunek /4.3/ i odpowiadającego układowi stref pokazanemu na rys. 3.

Stany naprężenia odpowiadające początkowej fazie procesu sciskania pasma reprezentują punkty obszaru OAB. Dla $W_1 < W < W_3$ stany edometryczne sprężyste reprezentuje przykładowo punkt D, stany sprężyste odcinek DE a stany sprężysto-plastyczne odcinek EF przy czym punkt D określa naprężenia dla $x = \xi_e$, punkt E dla $x = \xi$, a punkt F dla $x = 1$. Przy $W = W_3$ zanika strefa sprężysta, stan edometryczny sprężysty staje się jednocześnie stanem edometrycznym plastycznym /punkt G/ a stany sprężysto-plastyczne reprezentuje odcinek GH, przy czym punkt G określa naprężenia dla $x = \xi_e = \xi = \xi'_e$, a punkt H dla $x = 1$. Przy dalszym wzroście parametru $W_3 < W < W_2$ występuje tylko strefa edometryczna plastyczna w której stany naprężenia w miarę wzrostu W określają kolejne punkty odcinka GM począwszy od G, oraz strefa sprężysto-plastyczna w której stany naprężenia określa przykładowo odcinek KL oraz kolejne równoległe do niego. Odcinek OM jest ograniczeniem przedstawionego rozwiązania odpowiadającym równości $W = W_2$.



Rys. 9.

4.7. Siła przenoszona przez pasmo w stanie sprężysto-plastycznym.

Siłę tę podobnie jak dla fazy początkowej określimy znając siły przenoszone przez poszczególne strefy pasma. W tym celu scałkujemy podane uprzednio rozkłady naprężeń σ_z w granicach stref E_a, E_{ap}, E i EP . Uwzględniając fakt, że rozwiązania prowadziliśmy dla półpasma oraz wykorzystując $/3.2/_{2}, /4.21/_{3}$ $/4.31/_{3}$ i $/4.44/_{2}$ otrzymujemy

- dla strefy E_a , $0 \leq x \leq s_e$

$$/4.51/ \quad Q^{ea} = 2 \int_0^{s_e} \sigma_z^{ea} dx = 2 \frac{E'W}{h} \frac{1}{1-\nu'^2} s_e$$

- dla strefy E_{ap} , $0 \leq x \leq s_e'$

$$/4.52/ \quad Q^{eap} = 2 \int_0^{s_e'} \sigma_z^{eap} dx = 2 \frac{CD + R(\frac{H}{h} - G)}{RF - BD} s_e'$$

- dla strefy E , $s_e \leq x \leq s$

$$/4.53/ \quad Q^e = 2 \int_{s_e}^s \sigma_z^e dx = \frac{h}{\mu} \left\{ \frac{1}{D} \left(\frac{H}{h} - G \right) \left[e^{\frac{2\mu}{h} \frac{D}{F} (l-s)} - 1 \right] + \frac{E'W}{h\nu'} \right\} \left[e^{\frac{2\mu\nu'}{h} (s-s_e)} - 1 \right]$$

- dla strefy EP , $s \leq x \leq l$

$$/4.54/ \quad Q^{ep} = 2 \int_s^l \sigma_z^{ep} dx = \frac{h}{\mu} \frac{1}{D} \left(\frac{H}{h} - G \right) \left[e^{\frac{2\mu}{h} \frac{D}{F} (l-s)} - 1 \right]$$

Całkowitą siłę przenoszoną przez pasmo w stanie sprężysto-plastycznym określają więc zależności

$$/4.55/ \quad Q = Q^{ea} + Q^e + Q^{ep}$$

dla $\frac{1}{\nu'} < \frac{1+\sin\varphi}{1-\sin\varphi}$ i $W_1 \leq W < W_2$ lub $\frac{1}{\nu'} > \frac{1+\sin\varphi}{1-\sin\varphi}$ i $W_1 \leq W \leq W_3$

oraz

$$/4.56/ \quad Q = Q^{rad} + Q^{ep}$$

$$\text{dla} \quad \frac{1}{\nu'} > \frac{1 + \sin \varphi}{1 - \sin \varphi} \quad i \quad W_3 \leq W < W_2$$

5. ROZWIĄZANIE DLA PASMA Z MATERIAŁU SZTYWNO-IDEALNIE PLASTYCZNEGO

W celach porównawczych rozpatrzmy dodatkowo i podamy rozwiązanie dla ściskanego pasma z materiału sztywno-idealnie plastycznego /rys. 5d/.

Siła przenoszona przez pasmo z takiego materiału jest wartością do której dąży przedstawione uprzednio rozwiązanie dla materiału sprężysto-plastycznego z osłabieniem przy współczynniku osłabienia $C_1 = 0$

5.1. Określenie rozkładu naprężeń.

W tym przypadku w całym paśmie występuje jedna strefa materiału sztywno idealnie-plastycznego spełniającego warunek plastyczności

$$/5.1/ \quad f(\sigma) = \frac{1}{2}(\sigma_z - \sigma_x) - \frac{1}{2}(\sigma_z + \sigma_x)\sin\varphi - c_0\cos\varphi = 0$$

oraz równanie równowagi /3.6a/.

Wyznaczając z /5.1/ naprężenie σ_z i wstawiając do /3.6a/ otrzymamy ostatecznie następujące równanie równowagi

$$/5.2/ \quad \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{2\mu}{h} \frac{1 + \sin\varphi}{1 - \sin\varphi} \sigma_x + \frac{4\mu c_0 \cos\varphi}{h(1 - \sin\varphi)} = 0$$

Całka ogólna tego równania ma postać

$$/5.3/ \quad \sigma_x = C_1 e^{-\frac{2\mu}{h} \frac{1 + \sin\varphi}{1 - \sin\varphi} x} - \frac{2c_0 \cos\varphi}{1 + \sin\varphi}$$

gdzie C_1^p jest stałą całkowania. Stałą tę wyznaczamy z warunku brzegowego

$$/5.4/ \quad \sigma_x^p(x)|_{x=l} = 0$$

i otrzymamy następującą postać wzorów określających naprężenia

$$\sigma_x^p = \frac{2C_0 \cos \varphi}{1 + \sin \varphi} \left[e^{\frac{2\mu}{h} \frac{1 + \sin \varphi}{1 - \sin \varphi} (l-x)} - 1 \right]$$

/5.5/

$$\sigma_y^p = \nu(\sigma_x^p + \sigma_z^p) = \frac{\nu^p}{1 + \nu^p} \frac{2C_0 \cos \varphi}{1 + \sin \varphi} \left[e^{\frac{2\mu}{h} \frac{1 + \sin \varphi}{1 - \sin \varphi} (l-x)} - 1 \right]$$

$$\sigma_z^p = \frac{2C_0 \cos \varphi}{1 - \sin \varphi} e^{\frac{2\mu}{h} \frac{1 + \sin \varphi}{1 - \sin \varphi} (l-x)} \left(\frac{2}{1 - \sin \varphi} \right)$$

5.2. Określenie siły przenoszonej przez pasmo.

Siłę tę określimy całkując naprężenia σ_z^p na szerokości pasma l co wykorzystując 5.5/3 otrzymamy

$$/5.6/ \quad Q^p = 2 \int_0^l \sigma_z^p dx = \frac{2h C_0 \cos \varphi}{2\mu(1 + \sin \varphi)} \left[e^{\frac{2\mu}{h} \frac{1 + \sin \varphi}{1 - \sin \varphi} l} - 1 \right]$$

6. WYNIKI OBLICZEŃ I DOŚWIADCZEŃ

W celu pełniejszego zobrazowania oraz ilościowego sprawdzenia rezultatów uzyskiwanych z obliczeń według przedstawionego uproszczonego rozwiązania wykonano obliczenia i wykresy:

- rozkładu naprężeń σ_z w poszczególnych strefach oraz progresji tych stref,
- sił przenoszonych przez ściskane pasmo z materiału sprężysto-plastycznego z osłabieniem w zależności od odkształcenia dla różnych wartości parametru C_1 nazwanego współczynnikiem osłabienia. Wyniki obliczeń porównano z siłą przenoszoną przez ściskane pasmo z materiału sprężysto-krucho-idealnie plastycznego:

- modułów pokrytycznych w zależności od wymiarów pasma
- sił przenoszonych przez pasmo z różnych materiałów od wymiarów pasma
- sił przenoszonych przez pasmo z materiału sprężysto plastycznego z osłabieniem w zależności od przyjętego stowarzyszonego lub niestowarzyszonego prawa płynięcia.

Tam gdzie to było możliwe określono tendencje występujące w badaniach obcych i porównano je z odpowiednimi tendencjami wynikającymi z obliczeń według przedstawionego rozwiązania (np. tendencje zależności modułów plastycznych od wymiarów próbki D/h i pasma l/h , lub tendencje zależności przenoszonych sił od wymiarów próbki D/h i pasma l/h).

Obliczenia przeprowadzono dla następujących stałych materiałowych $E = 1308 \text{ MPa}$, $E' = 1471 \text{ MPa}$, $\nu = 0,333$, $\nu' = 0,5$

$$\varphi = 35^\circ, \quad C_0 = 0,5 \text{ MPa}, \quad \mu_y = 0,3$$

przy pozostałych parametrach w granicach

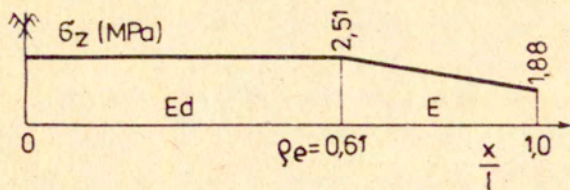
$$1 \leq \frac{l}{h} \leq 10, \quad 2 \leq \frac{C_0}{\sigma_0} \leq 100, \quad 0 \leq \varphi' \leq \varphi, \quad l = 100 \text{ cm}$$

Przyjęte wartości stałych materiałowych odpowiadają orientacyjnie słabym i średnio-wytrzymałym skałom /np. piaskowiec/, a wymiary pasma $\frac{l}{h}$ praktycznie spotykanym wymiarom niskich filarów.

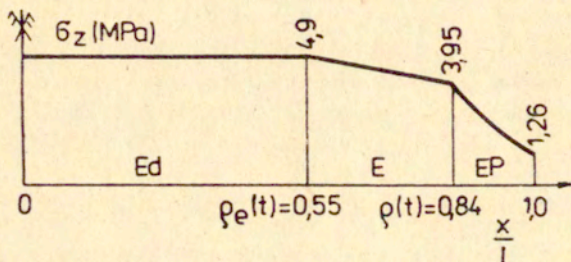
6.1. Siła przenoszona przez pasmo jako funkcja odkształcenia dla różnych modeli materiału pasma.

Rozkład naprężeń σ_z w poszczególnych strefach ściskanego pasma oraz progresję tych stref przy $l/h = 2,5$ dla kolejnych wzrastających odkształceń ϵ_z przedstawiono na rys. 10. Ponadto dla poszczególnych odkształceń ϵ_z podano wartość obliczonej siły przenoszonej przez ściskane pasmo.

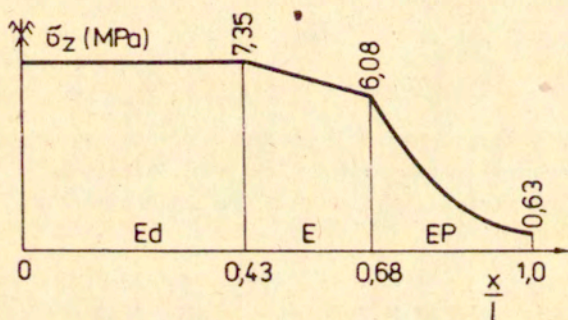
Zależności sił przenoszonych przez ściskane pasmo od odkształceń ϵ_z przedstawiają rys. 11÷13 sporządzone w skali logarytmicznej. Na osi rzędnych podano iloraz Q/Q_{u_1} określający stosunek całkowitej siły przenoszonej przez pasmo z danego materiału, do całkowitej siły przenoszonej przez pasmo z materiału sprężysto-kruchego przy przemieszczeniu $W = W_1$, a na osi odciętych odkształcenie $\epsilon_z = \frac{W}{h}$. Wykresy "a" na rys. 11÷13 odpo-



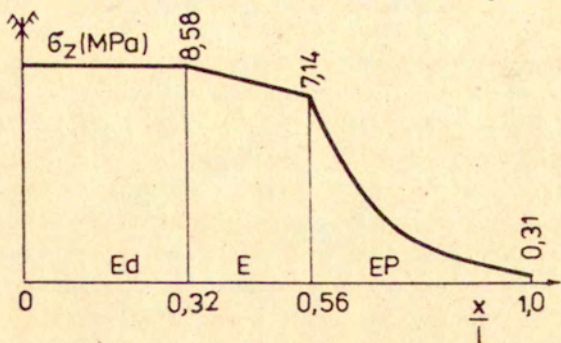
$\frac{l}{h} = 2,5$ $\frac{C_1}{C_0} = 50$
 $W = W_1 = 5,12 \cdot 10^{-2} \text{ cm}$
 $\epsilon_z = 1,28 \cdot 10^{-3}$
 $Q_{W1} = 23,85 \text{ kN}$



$W = 1 \cdot 10^{-1} \text{ cm}$
 $\epsilon_z = 2,5 \cdot 10^{-3}$
 $Q = 43,65 \text{ kN}$

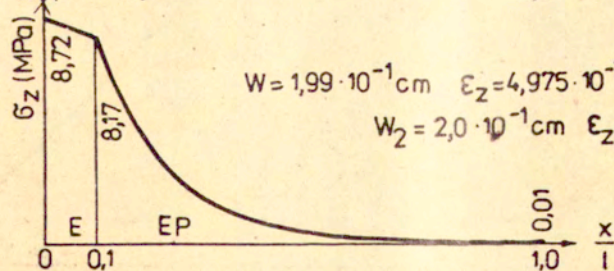
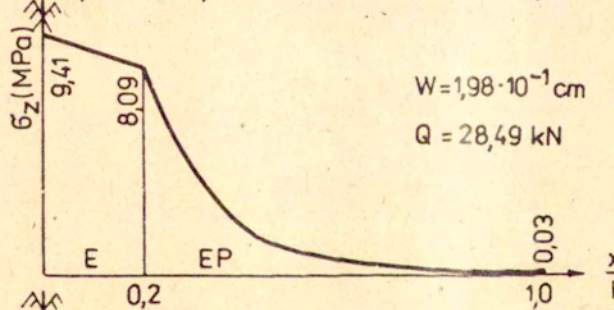
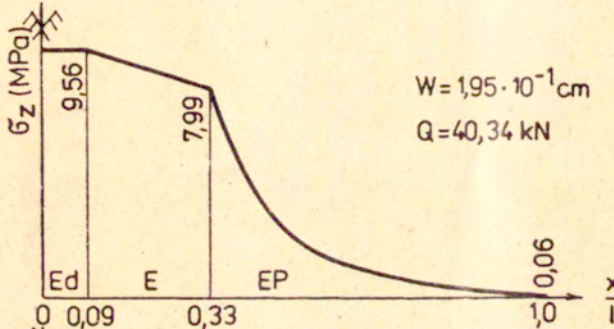
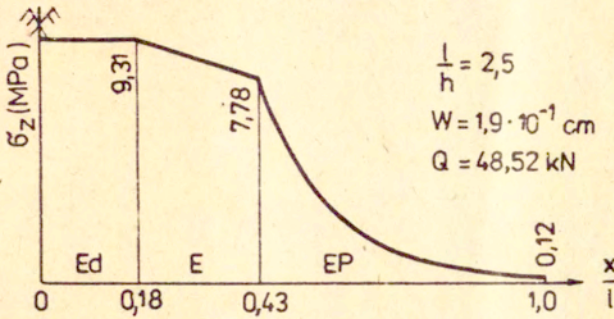


$W = 1,5 \cdot 10^{-1} \text{ cm}$
 $\epsilon_z = 3,75 \cdot 10^{-3}$
 $Q = 56,31 \text{ kN}$

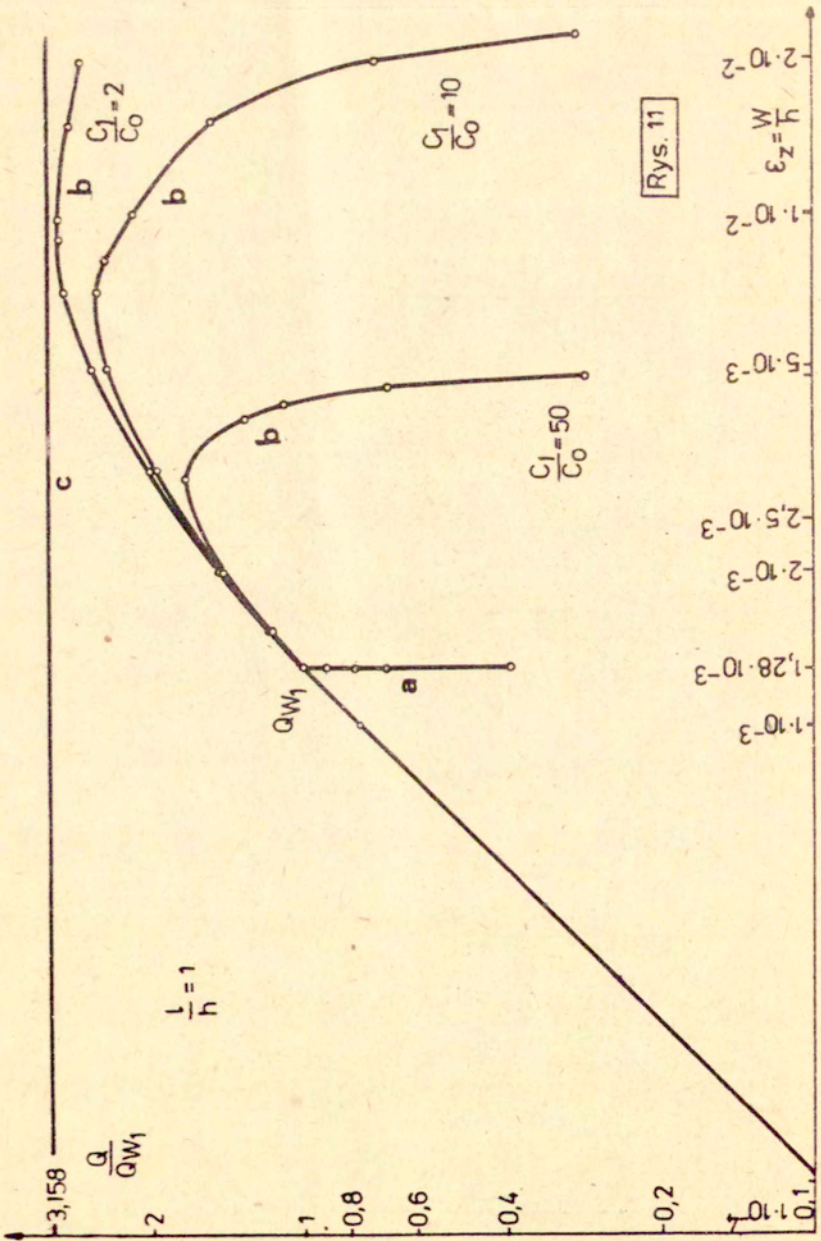


$W = 1,75 \cdot 10^{-1} \text{ cm}$
 $\epsilon_z = 4,375 \cdot 10^{-3}$
 $Q = 56,28 \text{ kN}$

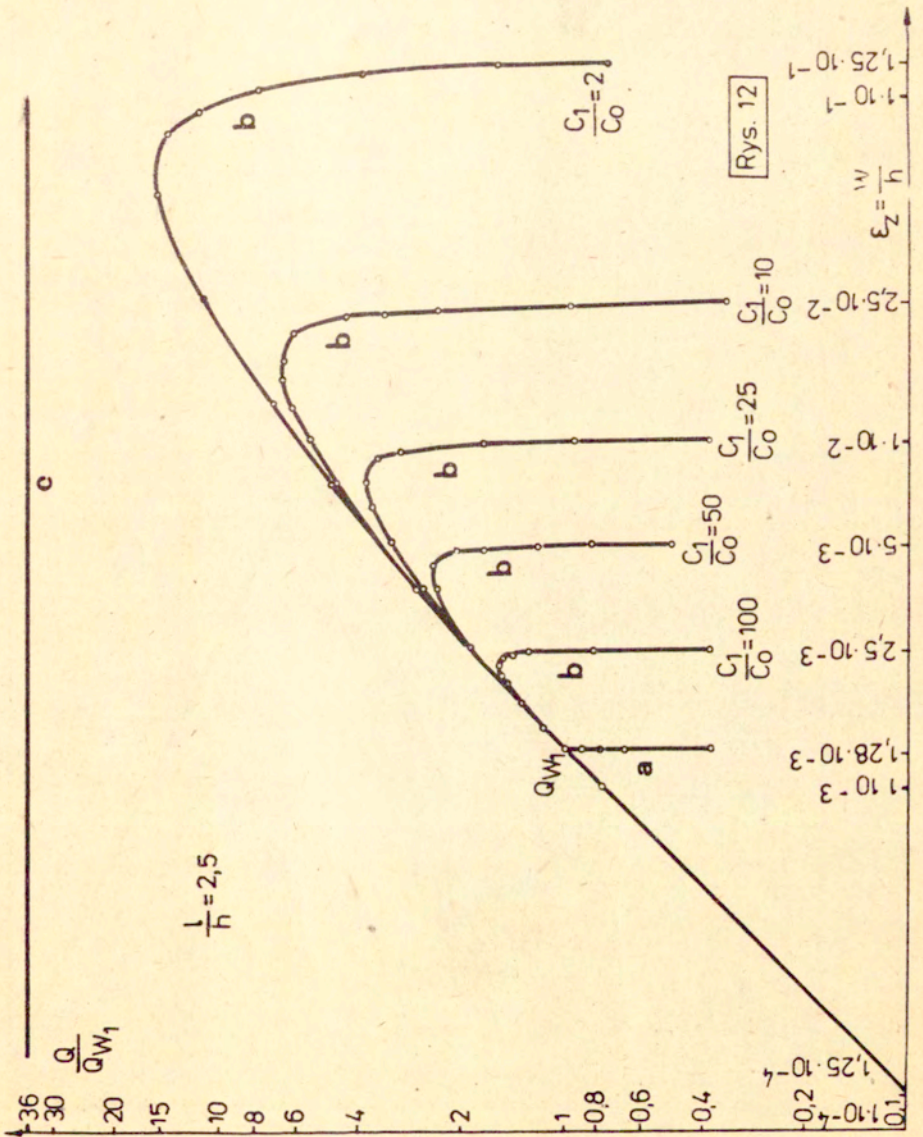
Rys. 10.

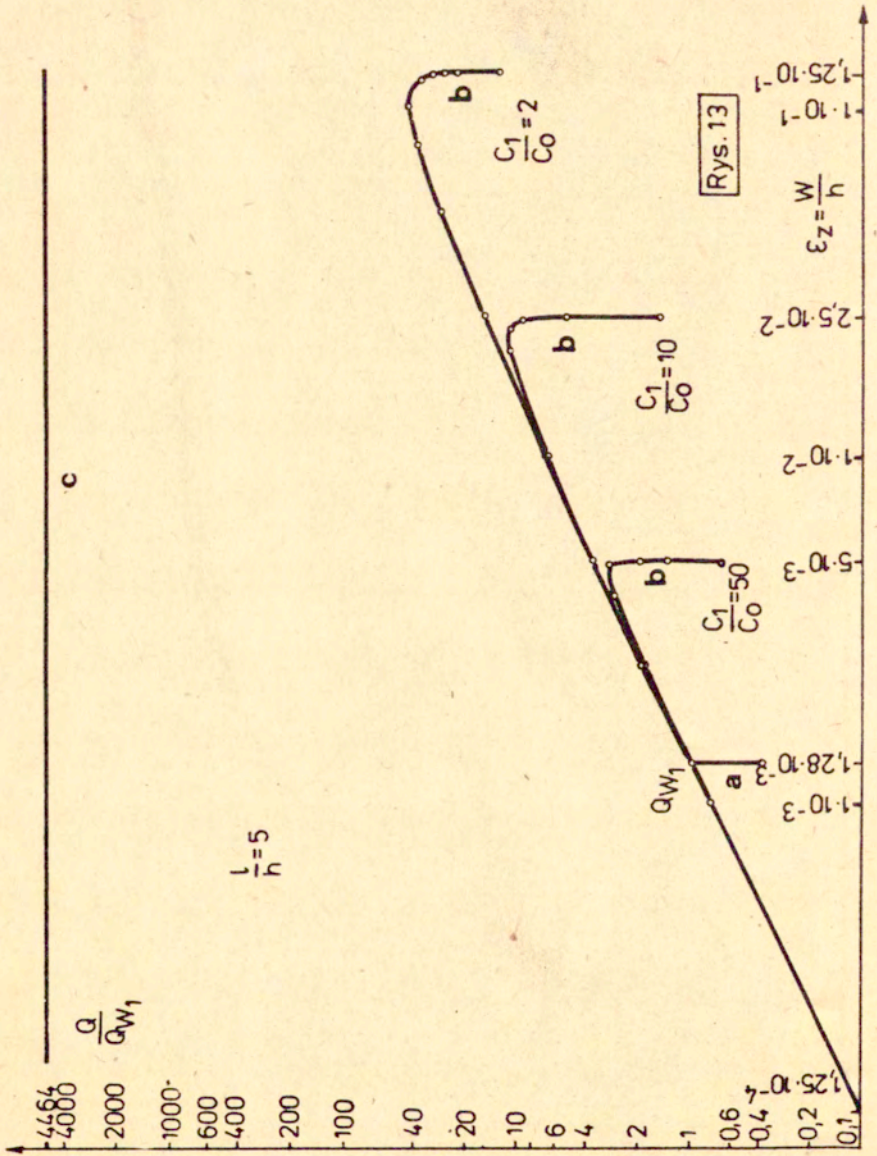


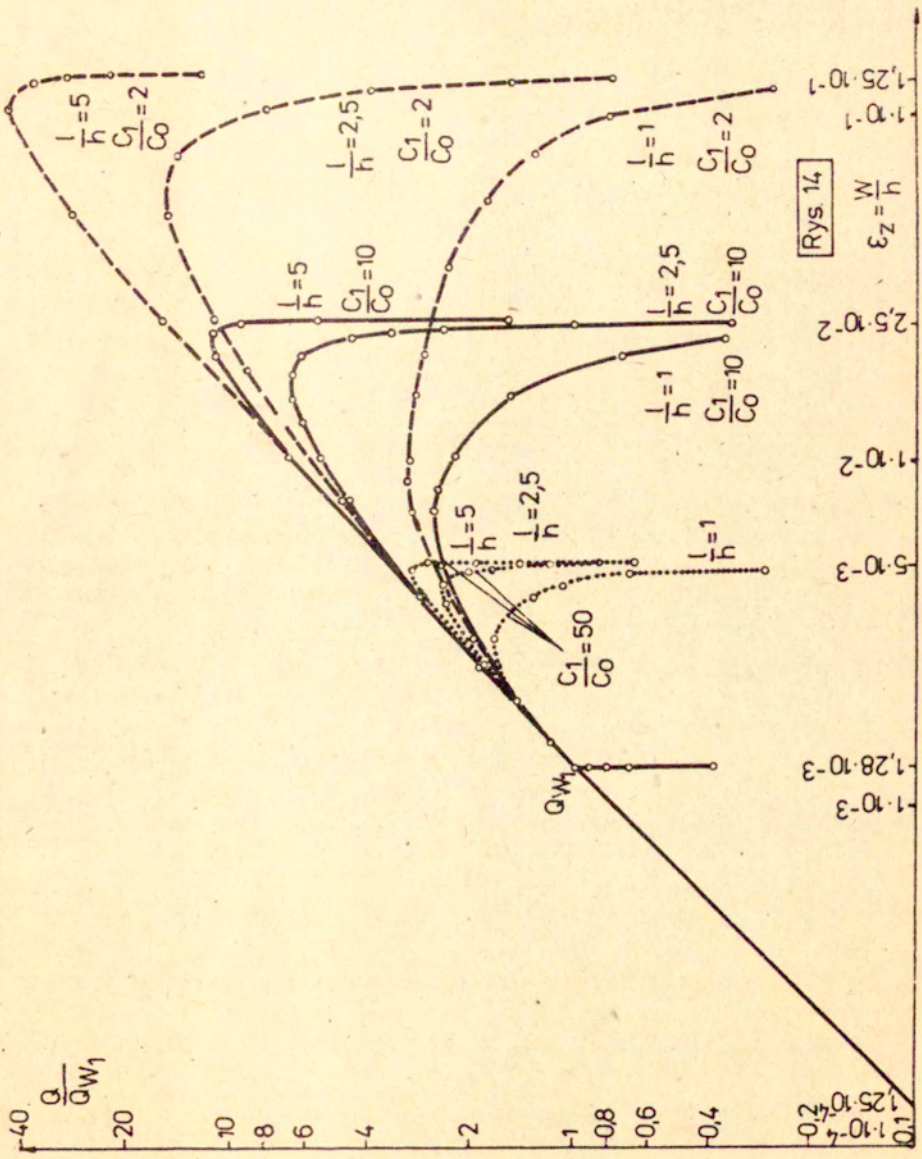
Rys. 10 c.d.



Rys. 11







Rys 14
 $\epsilon_z = \frac{W}{h}$

wiadają materiałowi sprężysto-krucemu, wykresy "b" sprężysto-plastycznemu z różnym osłabieniem określonym poprzez C_1 , a wykresy "c" materiałowi sztywno-idealnie plastycznemu.

Z analizy wykresów wynika znaczny wzrost rozbieżności między siłą przenoszoną przez ściskane pasmo z materiału sztywno-idealnie plastycznego i sprężysto-kruczego w miarę wzrostu l/h . Wynika z niej ponadto, że dla coraz bardziej "cienkich" pasm /tzn. l/h rosnące/ wartość współczynnika osłabienia C_1 jest decydująca jeśli chodzi o maksymalną wartość przenoszonej przez pasmo siły, która może wzrastać przeszło 100 krotnie /rys. 13/ poczynając od materiału sprężysto-kruczego / $C_1 \rightarrow \infty$ /, a kończąc na materiale sztywno-idealnie plastycznym / $C_1 = 0$ /.

6.2. Moduł pokrytyczny jako funkcja wymiarów pasma

Wykresy z rysunków 11+13 zestawiono na rys. 14 w trzech grupach w zależności od współczynnika osłabienia C_1 /na wykresach C_1/C_0 /, dla różnych wymiarów pasma l/h w każdej grupie. Z zestawienia tego wynika, że moduły pokrytyczne określone jako sieczne dla opadających części wykresów rosną wraz ze wzrostem współczynnika osłabienia C_1 .

W przypadku materiału sprężysto-kruczego / $C_1 = \infty$ / proces ściskania przebiega w sposób niekontrolowany przy malejącej sile Q .

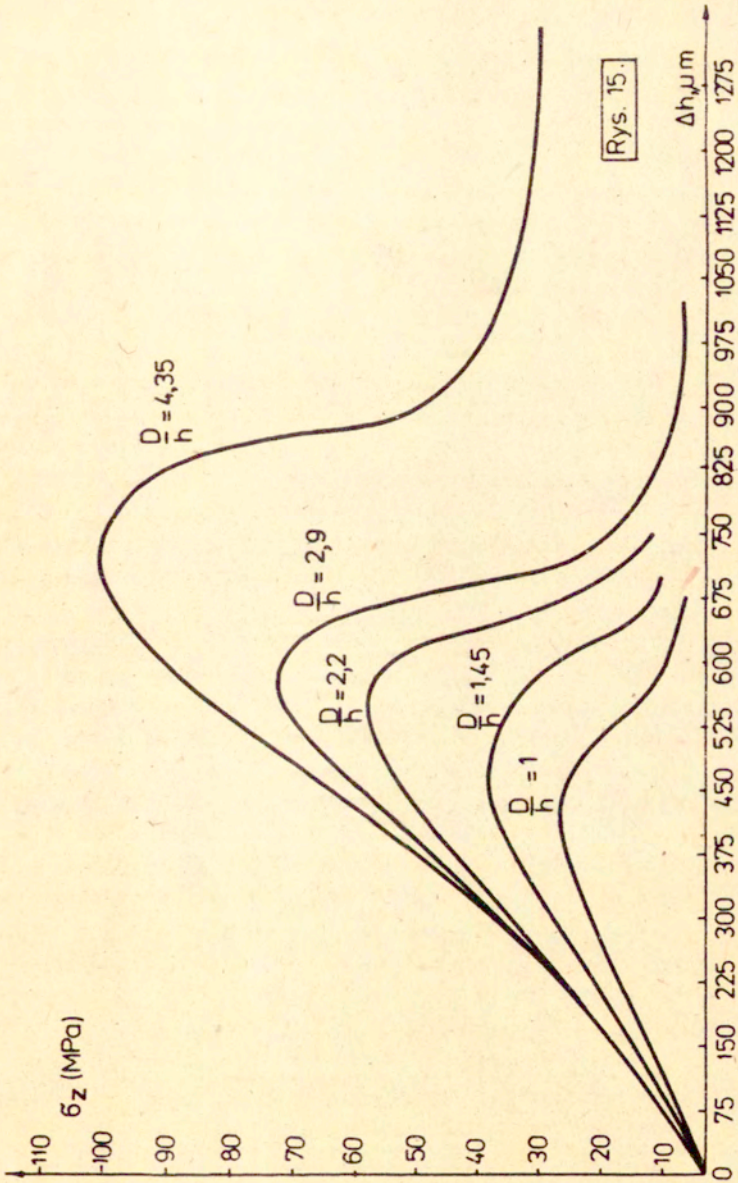
Z wykresów tych wynika również, że moduły pokrytyczne określane jak wyżej, rosną dla danego materiału sprężysto-plastycznego z osłabieniem /dla stałego C_1 / wraz ze wzrostem l/h , tzn. dla coraz bardziej "cienkich" pasm stają się coraz większe.

Moduły pokrytyczne E dla pasma $\frac{l}{h} = 2,5$ i $\frac{l}{h} = 5$ porównano z modułem pokrytycznym $\bar{E}_{\frac{l}{h}=1}$ określonym dla pasma $\frac{l}{h} = 1$ i przedstawiono na rys. 17 dla różnych współczynników osłabienia C_1 .

Wyniki doświadczeń przeprowadzonych przez J. Lisa [3] dla jednoosiowego sciskania próbek różnych skał przedstawia przykładowo dla próbki piaskowca nr 3 rys. 15. Próbki walcowe miały stałą średnicę $D = 43,5$ mm i zmienne wysokości $h = 43,5; 30; 15$ i 10 mm.

Doświadczenia przeprowadzono przy stałej prędkości odkształcenia $\dot{\epsilon}_t = 2,5 \mu\text{m/s}$.

Dla tych badań określono moduły pokrytyczne jako styczne do opadającej części wykresów. Moduły pokrytyczne E dla wymiarów próbek



$\frac{D}{h} = 1,45; 2,2; 2,9$ i $4,35$ porównano z modułem pokrytycznym określonym dla próbki walcowej $\frac{D}{h} = 1$ i przedstawiono na rys.16 dla trzech wybranych przykładów próbek piaskowca.

Porównanie wykresów na rys. 16i 17 mimo tego, że badania przeprowadzono na próbkach okrągłych przy jednoosiowym ściskaniu, a obliczenia wykonano dla płaskiego stanu odkształcenia co automatycznie powoduje pewne rozbieżności ilościowe - wykazuje zadowalającą zgodność tendencji we wzroście modułów pokrytycznych w miarę jak badany krążek czy analizowane pasmo staje się coraz bardziej "cienkie".

6.3. Siła przenoszona przez pasmo jako funkcja wymiarów pasma.

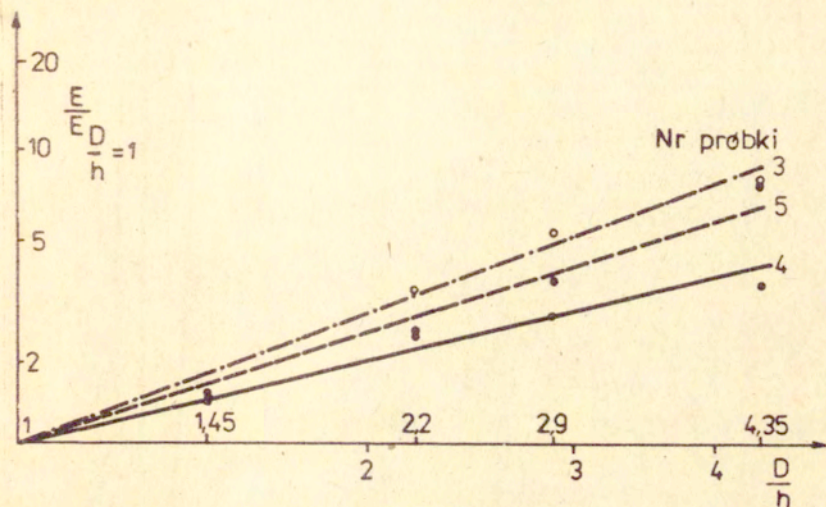
Na rys. 18 przedstawiono obliczeniowe zależności siły przenoszonej przez ściskane pasmo od wymiarów tego pasma l/h dla materiału sprężysto-kruchego, sprężysto-plastycznego z osłabieniem i sztywno-idealnie plastycznego.

Widać z niego wyraźnie jak znacznie wzrasta wartość tej siły ze wzrostem l/h i jak odmienne są tendencje tego wzrostu dla różnych materiałów a szczególnie dla materiału sztywno-idealnie plastycznego.

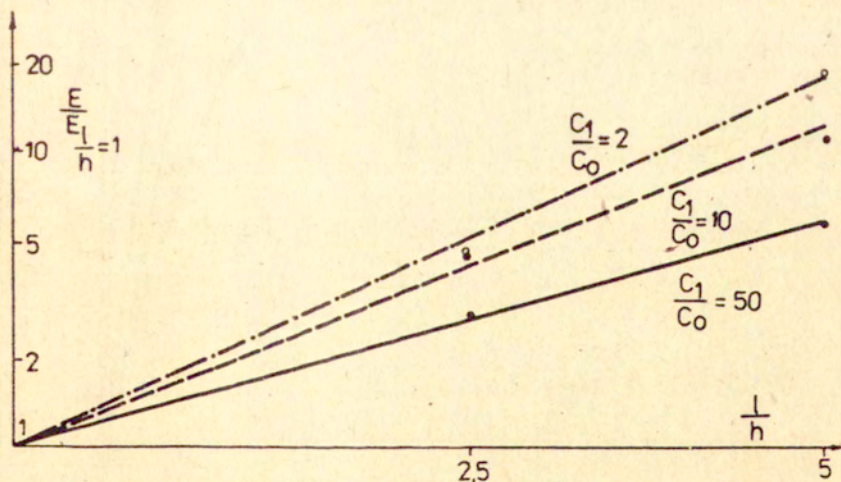
W celu porównania tendencji we wzroście sił przenoszonych przez ściskanie pasmo z materiału sprężysto-plastycznego z osłabieniem, spowodowanych wzrostem l/h wynikających z obliczeń według przedstawionego rozwiązania z podobnymi tendencjami wynikającymi z badań sporządzono rys. 19.

Wykorzystano przy tym poza uprzednio wymienionymi badaniami J. Lisa [3] dodatkowo badania jednoosiowego ściskania próbek węgla przeprowadzone przez S.L. Croucha [1]. Badania te przy stałej prędkości odkształcenia przeprowadzono na próbkach walcowych o średnicy $D \approx 50$ i 100 mm /2 i 4 cale/ dla $\frac{D}{h} = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ i 8 . Uśredniając wyniki S.L. Grouch opisał zależność Q od $\frac{l}{h}$ funkcjami wykładniczymi, które dla skrajnych przypadków mają postać

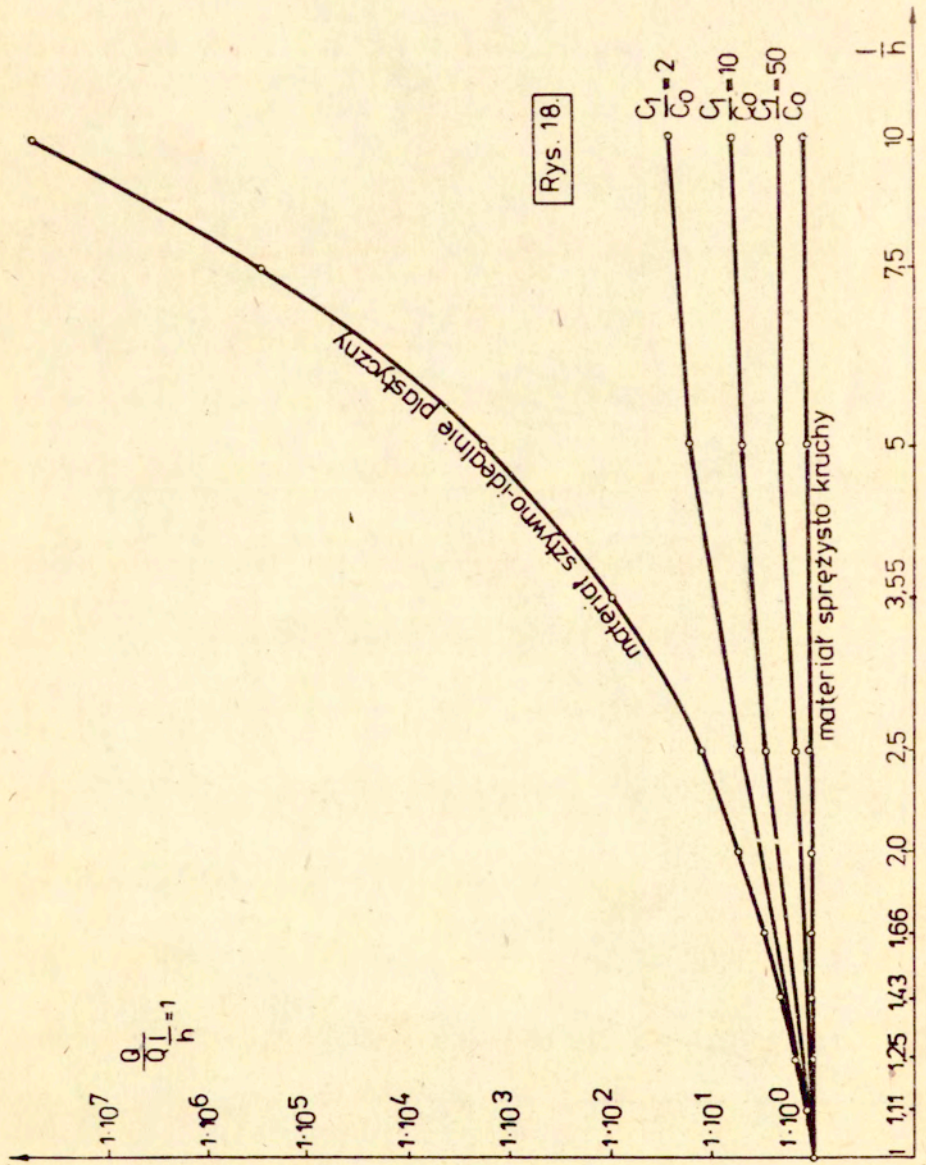
$$/6.1/ \quad Q = Q_0 \left(\frac{l}{h} \right)^{0,68} \quad \text{lub} \quad Q = Q_0 \left(\frac{l}{h} \right)^{0,34}$$



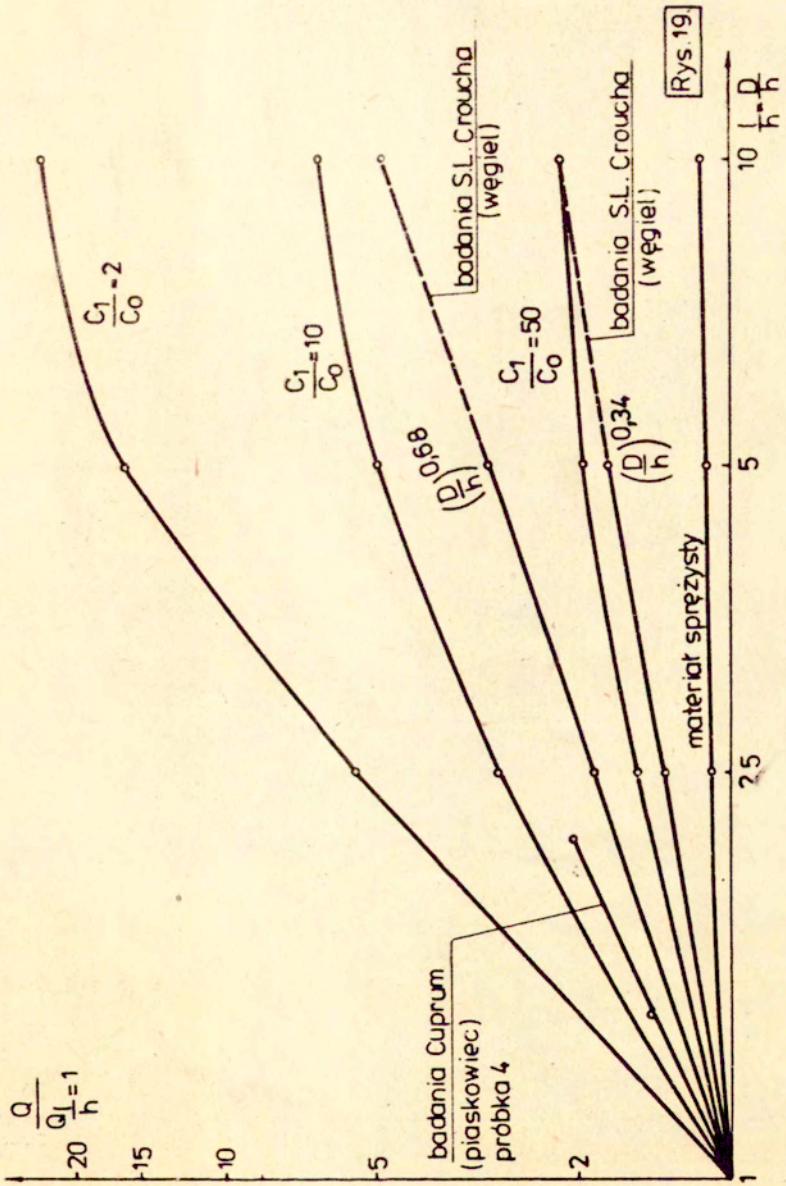
Rys. 16.

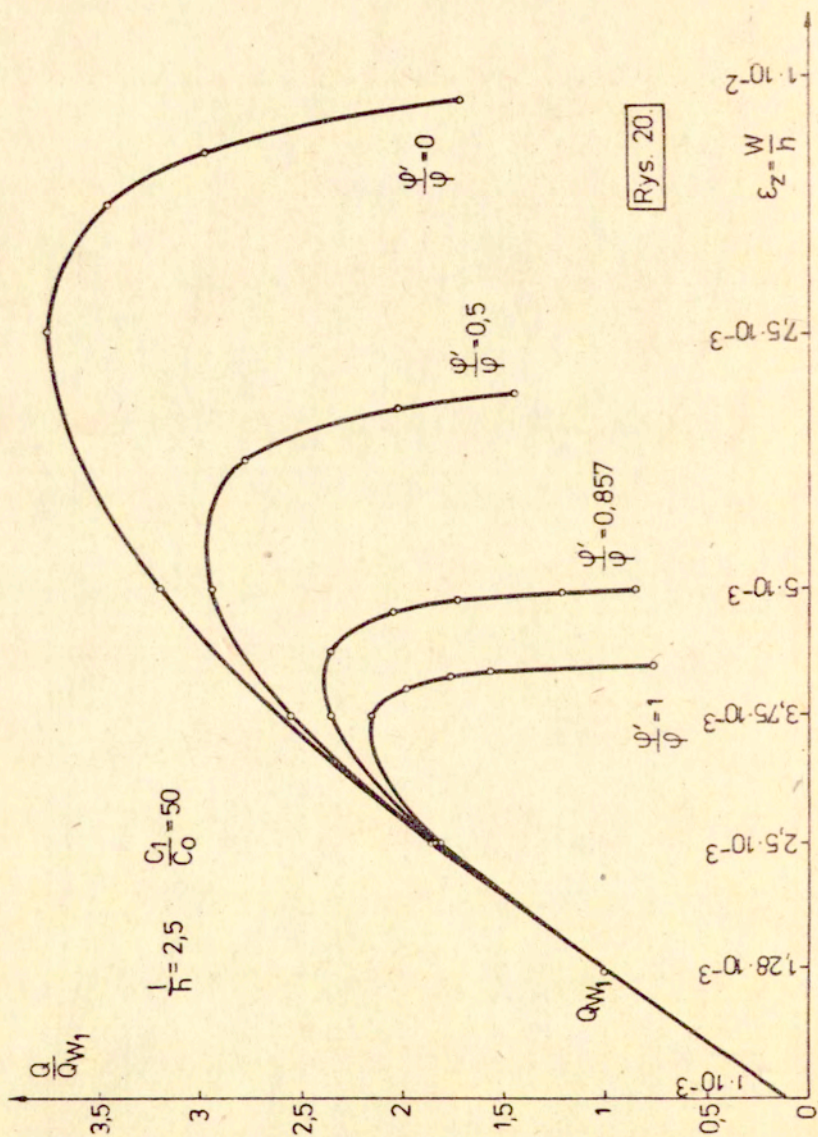


Rys. 17.



Rys. 18.





Z rys. 19 widac, że wynikająca z badań tendencja wzrostu Q w miarę ściskania coraz "cieńszych" walców zarówno dla piaskowca jak i dla węgla jest mimo zastrzeżeń jak w p-cie 6.2 - zadowalająco zgodna z tendencją wzrostu Q w miarę wzrostu l/h wynikającą z obliczeń według przedstawionego rozwiązania. Przy porównywaniu dla obu przypadków badań uwzględniono fakt, że wymiarowi pasma $\frac{l}{h} = 1$ odpowiada wymiar próbki $\frac{D}{h} = 2$.

Z rys. 19 wynika ponadto, że im stosunek l/h jest większy, tym bardziej widoczny jest efekt współczynnika osłabienia C_1 materiału pasma na zmianę przenoszanej siły Q .

6.4. Siła przenoszona przez pasmo jako funkcja przyjętego prawa płynięcia.

Wykresy zależności sił przenoszonych przez ściskane pasmo z materiału sprężysto-plastycznego z osłabieniem jako funkcji odkształcenia dla różnych relacji φ'/φ przedstawiono na rys.20. Wartość $\varphi'/\varphi = 1$ odpowiada przyjęciu stowarzyszonego prawa płynięcia a zależność $0 \leq \varphi'/\varphi < 1$ prawom niestowarzyszonym, przy czym $\varphi'/\varphi = 0$ odpowiada materiałowi nieściśliwemu.

Z wykresów wynika, że przyjęcie dla materiału sprężysto-plastycznego z osłabieniem prawa stowarzyszonego daje wartości przenoszonej przez pasmo siły niższe niż w przypadku przyjęcia prawa niestowarzyszonego, które daje maksimum przenoszonej siły przy $\varphi'/\varphi = 0$. Należy zwrócić uwagę, że zależność ta jest odmienna od "twierdzenia o wzajemnej relacji dwóch modeli idealnie plastycznych spełniających ten sam warunek stanu granicznego, przy czym dla jednego zachodzi stowarzyszone, a dla drugiego niestowarzyszone prawo płynięcia" [2], mówiącego, że "nośność graniczna w przypadku stosowania stowarzyszonego prawa płynięcia nie może być mniejsza od nośności granicznej dla drugiego modelu" [2] .

7. WNIOSKI

Na podstawie przedstawionego uproszczonego rozwiązania dotyczącego analizy nośności ściskanego pasma z materiału sprężysto-plastycznego z osłabieniem, wykonanych obliczeń oraz porównań z wynikami doświadczeń obcych, można sformułować następujące wnioski ogólne:

- Przyjęty w przedstawionym rozwiązaniu model materiału sprężysto-plastycznego z osłabieniem umożliwia dokonanie analizy zachowania się niskich filarów skalnych, opisanie mechanizmu progresji poszczególnych stref i określenie siły przenoszonej przez filar.

- Nośność graniczna ściskanego pasma rozumiana jako maksymalna siła przenoszona przez pasmo jest w decydujący sposób zależna od wartości parametru C_1 określającego osłabienie materiału. Nośność ta może wzrosnąć przeszło stukrotnie poczynając od materiału sprężysto-kruchego $/C_1 = \infty /$ a kończąc na materiale sztywno-idealnie plastycznym $/C_1 = 0/$.

- Z uwagi na przyjęte założenia upraszczające oraz wynikający z nich mechanizm zachowania się analizowanego pasma należy stwierdzić, że przedstawione rozwiązanie jest najbliższe rzeczywistości przy wymiarach filarów odpowiadających zależności $1 \leq \frac{l}{h} \leq 10$, która najczęściej w praktycznych zagadnieniach inżynierskich jest spełniona.

- Uzyskane w rozwiązaniu tendencje ilościowe oraz ich zadawalająca zgodność z tendencjami wynikającymi z badań wyraźnie świadczą o celowości i konieczności a jednocześnie i możliwości prowadzenia dalszych analiz zachowania się materiałów skalnych pod obciążeniem ściskającym w oparciu o model materiału sprężysto-plastycznego z osłabieniem, który bardziej adekwatnie i znacznie wierniej pozwala opisać rzeczywistość w porównaniu z dotychczas stosowanymi w geomechanice modelami materiałów liniowo sprężystych i sztywno-idealnie plastycznych.

- Uzyskane rezultaty zachęcają do dalszych udoskonalień, przedstawionego rozwiązania uproszczonego oraz do stosowania modelu ciała sprężysto-plastycznego z osłabieniem w analizach pokrewnych problemów z zakresu geomechaniki.

LITERATURA

- [1] CROUCH L.S., FAIRHURST C. - The mechanics of coal mine bumps and the interaction between coal pillars mine roof and floor. University of Minnesota, Minneapolis, Minnesota 55455 USBM Contract Report /HO101778/ February 22, 1973.
- [2] IZBICKI R., MRÓZ Z. - Metody nośności granicznej w mechanice gruntów i skał, PWN, Warszawa-Poznań, 1976.
- [3] LIS J. - Wyniki badań próbek skał. CUPRUM Wrocław 1979
/materiały niepublikowane/.
- [4] SZYMAŃSKI Cz. - Ściskanie pasma z materiału sprężysto-plastycznego z osłabieniem z uwzględnieniem zmian geometrii pasma. /Prace IPPT, w druku/

SPIS TREŚCI

	str.
1. Wstęp	3
2. Założenia wyjściowe	5
3. Rozwiązanie dla początkowej fazy procesu ściskania pasma	14
3.1. Rozwiązanie dla strefy edometrycznej sprężystej E_d	14
3.2. Rozwiązanie dla strefy sprężystej E	15
3.3. Rozwiązanie dla końcowego stanu początkowej fazy procesu ściskania pasma	18
3.4. Graficzna interpretacja rozwiązań dla początkowej fazy procesu ściskania pasma	21
3.5. Siła przenoszona przez pasmo w stanie sprężystym	21
4. Rozwiązanie dla zaawansowanej fazy procesu ściskania pasma	23
4.1. Układy stref możliwe w zaawansowanej fazie procesu ściskania pasma	24
4.2. Rozwiązanie dla strefy sprężysto plastycznej EP	26
4.3. Rozwiązanie dla strefy sprężystej E	30
4.4. Rozwiązanie dla strefy edometrycznej sprężystej E_d	32
4.5. Rozwiązanie dla strefy edometrycznej plastycznej E_{dp}	32
4.6. Graficzna interpretacja rozwiązań dla zaawansowanej fazy procesu ściskania pasma	34
4.7. Siła przenoszona przez pasmo w stanie sprężysto-plastycznym	38
5. Rozwiązanie dla pasma z materiału sztywno-idealnie plastycznego	39
5.1. Określenie rozkładu naprężeń	39
5.2. Określenie siły przenoszonej przez pasmo	40

6. Wyniki obliczeń i doświadczeń	40
6.1. Siła przenoszona przez pasmo jako funkcja odkształcenia dla różnych modeli materiału pasma	41
6.2. Moduł pokryteczny jako funkcja wymiarów pasma	48
6.3. Siła przenoszona przez pasmo jako funkcja wymiarów pasma	50
6.4. Siła przenoszona przez pasmo jako funkcja przyjętego prawa płynięcia	55
7. Wnioski	55
Literatura	57