Mr. Hertz.

Pierwsze Początki Geometryi Wyższej.

Wiadomości wstępne
do
Teoryi linij poprzecznych.

1° Dwojaki jest cel Geometryi: 1° podać własności rozmaite figur geometrycznych; 2° podać sposoby dochodzenia rozciągłości tychże figur.

2°. Dwie figury mogą posiadać tę samą rozciągłość, a co do kształtu swego, mogą się względnie ~~całkiem~~ lub zupełnie różnić. Takie figury zowiemy <u>równoważne</u>. Dwie figury mogą posiadać ten sam kształt, a zadosyć czyniąc pewnym warunkom niżej podać się mającym, być mogą różne co do swej rozciągłości.- Takowe figury zowiemy <u>podobne</u>.-

Dwie figury w końcu mogą posiadać tenże sam kształt i tę samą rozciągłość. Takowe figury zowiemy <u>równe</u>, dobitniej jeszcze <u>przystające</u> (superposables).

3° Przystawanie figur może być dwojakie: albo dwie figury przystają <u>wprost</u> (directement superposables); albo dwie figury przystają w sposób <u>odwrócony</u> (inversement superposables).- W ostatnim przypadku mówimy, że figury te są symetryczne.-

Ażebyśmy o tém dwojakiém przystawaniu dokładne powzięli wyobrażenie, uważajmy, że każda figura ma swą stronę <u>prawą</u> i swą stronę <u>lewą</u>, czyli dobitniéj ma swą stronę wierzchnią i szrą stronę spodnią. Dwie figury przystają wprost, jeżeli stronami różnego nazwiska, do siebie przyłożone, przykrywają się zupełnie, tj. części figury przystającej wpadają zupełnie w odpowiednie im części figury téj, do któréj pierwszą przykładamy.-

Dwie figury przystają w sposób odwrócony, czyli są symetryczne, jeżeli stronami jednego nazwiska do siebie przyłożone, przykrywają się zupełnie.

Sposób ten ostatni przystawania ma tylko miejsce w figurach płaskich i o takich też tu jest tylko mowa; dwie bowiem bryły symetryczne są równoważne, ale nie przystające.-

4.º Przystawanie figur uskutecznia się: albo przez obrócenie figury stałe około jednego punktu spólnego obydwom figurom (rotation ou pivotement); albo przez przeniesienie figury na figurę (translation ou transposition); albo przez złamanie figury (rabatement ou renversement) wzdłuż pewnéj prostéj; ta prosta zowie się osią przełamania, lub osią symetryczności.-

5. Tych trzech sposobów przykładania do siebie dwóch figur mieliśmy liczne przykłady w początkach Geometryi: i tak, w Twierdzeniu tem: „że do cięciw równych w kole tem samem należą łuki równe", używaliśmy obracania figury, gdyż tam wycinek do jednego łuku należący, obracaliśmy około środka koła dotąd, dopóki tenże nie przykrył zupełnie wycinka drugiego. W Twierdzeniach pierwszem i drugiem o przystawaniu trójkątów, używaliśmy przenoszenia figury na figurę. W końcu, w Twierdzeniu, „że każdy wielo-

kąt foremny może być kołem opisany, Tanaliśmy figurę figurę wzdłuż wysokości wielokąta (apothema).–

6. Figury podobne. Każdy ma wyobrażenie wrodzone o podobieństwie dwóch figur; każdy bowiem rozumie przez dwie figury podobne, takie dwie figury z których jedna jest mniejszą, a druga większą, a w jednej z nich nie masz żadnego punktu, któryby nie miał sobie odpowiedniego punktu w drugiéj, tak dalece, że gdy punkta jednej figury połączymy prostemi, a w drugiéj tymże odpowiednie punkta w tenże sam sposób z sobą prostemi zwiążemy, stosunki linijowe albo metryczne każdych dwóch takich odpowiednich, będą sobie równe. Stosunek ten stały, a raczéj wykładnik spólny tym wszystkim stosunkom, zowie się stosunkiem podobieństwa tych dwóch figur.–

7º Wszystkie te warunki, których liczba na pozór jest nieskończona, przywodzą się do takiéj tylko liczby warunków, ile tychże potrzeba do zupełnego wyznaczenia figury, a tak jako do wyznaczenia trójkąta potrzeba trzech warunków, takoż za definicyą trójkątów podobnych można podać: że dwa trójkąty są podobne, skoro trzy boki AB, AC, BC. jednego są proporcyonalne trzem odpowiednim bokom A'B', A'C', B'C' drugiego, tj dwa trójkąty są podobne, gdy:

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'}$$

Podobnie, gdy do wyznaczenia równoległoboku trzeba trzech warunków, dwa równoległoboki są podobne, gdy dwa boki jednego i jedna z dwóch jego przekątni, są proporcyonalne do dwóch odpowiednich boków i odpowiedniéj przekątni drugiego tj. że gdy w dwóch równoległobokach:

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{AD}{A'D'} = \frac{AC}{A'C'}$$

dwa takie równoległoboki są podobne.

Dla téjże samej przyczyny, dwa prostokąty są podobne, gdy podstawa i wysokość jednego, są proporcyonalne podstawie i wysokości drugiego. Dwa kwadraty ukośne są podobne, gdy bok i jedna przekątnia jednego, są proporcyonalne do boku i przekątnéj odpowiedniéj drugiego. –

W końcu stąd wypada, że gdy do wyznaczenia jakiéj figury, jeden tylko warunek jest potrzebny, takowe wszystkie figury jednoimienne są sobie podobne, i ztąd to pochodzi, że:

Wszystkie kwadraty są sobie podobne; że wszystkie wielokąty foremne o jednakowéj liczbie boków, są sobie podobne; że wszystkie koła są sobie podobne; bo tak do wyznaczenia kwadratu, dostateczną jest rzeczą, mieć wiadomy bok tego kwadratu; podobnie do wyznaczenia wielokąta foremnego o danéj liczbie boków, trzeba mieć wiadomy bok tylko jego; a w końcu koło jest wyznaczoném, gdy promień jego jest danym.

8º Co się tyczy dwóch wielokątów dowolnych, to gdy wielokąt jest dany, skoro nam jest wiadomy porządek i ciąg trójkątów go składających, za definicyją dwóch wielokątów podobnych, podać można: że <u>dwa wielokąty są podobne, gdy te składają się z jednakowej liczby trójkątów podobnych i podobnie ułożonych</u>. Zkąd też wypada, że teoryja podobieństwa figur płaskich zależy zupełnie od podobieństwa tylko trójkątów. Według tego co dotąd o figurach podobnych powiedziano, wynika że gdy stosunek podobieństwa dwóch figur jest jako warunek nam naprzód podany, tj. gdy żądamy dwóch figur podobnych takich, aby linije w jednéj, były dwa, trzy, cztery, itd. razy większe od linij odpowiednich w drugiéj, wtedy liczba warunków do podobieństwa dwóch figur potrzebna, jest równa liczbie linij głównych, które do wyznaczenia figury są konieczne.–

9. Przez <u>punkta odpowiednie</u> rozumieć ściśle będziemy

1° wierzchołki odpowiednie, tj. punkta przecięcia boków proporcyonalnych;–

2° punkta na bokach odpowiednich w ten sposób położone, że te dzielą też na części <u>wprost</u> proporcyonalne, jak tu na figurze punkta M i M', gdy

$$BM : B'M' = AM : A'M'.–$$

3° punkta O i O' gdziekolwiek bądź na płaszczyznie dwóch wielokątów położone, jeżeli te połączone z końcami którego kolwiek boku, wydają trójkąty EDO i $E'D'O'$ podobne tj. że:

$$\frac{DO}{D'O'} = \frac{EO}{E'O'} = \frac{ED}{E'D'}.–$$

Przez <u>linije odpowiednie</u>, rozumieć będziemy wszelkie linije proste punkta odpowiednie łączące: i tak, linijami odpowiedniemi są dwa boki, jeden do jednego a drugi do drugiego wielokąta należące, gdy te łączą wierzchołki odpowiednie; podobnie, poprowadzone przekątnie są odpowiednemi, a w ogólności linije MO i $M'O'$ są odpowiednemi, gdy punkta M i M', O i O' są odpowiednemi.

10º Przystawanie figur jest tylko szczególnym przypadkiém podobieństwa figur. Wtedy bowiem gdy stosunek podobieństwa jest równy jedności, figury podobne są sobie równe. Jakoż dowieść to należy tylko dla trójkątów, i w rzeczy samej gdy (l. 7) w stosunkach

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'}$$

położymy $AB = A'B'$ mamy też $AC = A'C'$ i $BC = B'C'$ a tem samém dwa te trójkąty przystają.

W ogólności zatém, gdy za podobieństwem trójkątów, idzie podobieństwo wielokątów lub figur dowolnych ale płaskich, widzimy że:

dwa trójkąty, dwa wielokąty, dwie figury płaskie podobne, przystają do siebie jeżeli tylko w nich jedna para linij odpowiednich jest równa. –

11º Z nauki o proporcyjach wyprowadzić można tę zasadę:

Dwie figury podobne do téj samej figury trzeciej są pomiędzy sobą podobne. Jakoż w trzech trójkątach ABC, $A'B'C'$, $A''B''C''$, jeżeli:

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{A'C'}{AC} = \frac{B'C'}{BC} \quad \ldots\ldots \quad \frac{AB}{A''B''} = \frac{AC}{A''C''} = \frac{BC}{B''C''}$$

jest też i przez rozmnożenie odpowiednich stosunków i zniesienie tych samych wyrazów:

$$\frac{A'B'}{A''B''} = \frac{A'C'}{A''C'} = \frac{B'C'}{B''C''}$$

a ztąd, gdy to ma miejsce w trójkątach, ma też miejsce i według l. 8 dla trzech dowolnych figur podobnych.

12º. – W końcu, jak przystawanie figur jest dwojakie l. 3. tak i podobieństwo jest dwojakie: Podobieństwo wprost i podobieństwo w sposób odwrócony. –

Podobieństwo wprost zachodzi wtedy, gdy w dwóch figurach podobnych z kolei boki odpowiednie są w tę samą stronę ułożone. Podobieństwo zaś w sposób odwrócony jest, gdy w dwóch figurach podobnych z kolei boki odpowiednie są w strony przeciwne ułożone. (przypatrzyć się na figurze).

O środkach podobieństwa figur.

13º. Twierdzenie. Jeżeli dwa wielokąty wprost podobne położemy w ten sposób na jednej i tejże samej płaszczyźnie, że boki jednego będą równoległe do boków odpowiednich w drugim, wtedy linije proste łączące dwa wierzchołki odpowiednie, lub dwa dowolne punkta odpowiednie, zbiegają się w jeden i tenże sam punkt.

Jakoż, gdy dwa wielokąty ABCDE i abcde są podobne, trójkąt ABE jest podobny do trójkąta abe, a stąd:

$$\frac{AB}{ab} = \frac{AE}{ae} = \frac{BE}{be} \quad \ldots\ldots\ldots (1)$$

Jeżeli teraz punkt przecięcia się prostych aA i bB nazwiemy S. a punkt przecięcia się dwóch prostych aA i Ee nazwiemy S' będzie na mocy podobnych trójkątów:

$$\frac{AS}{aS} = \frac{BS}{bS} = \frac{AB}{ab}$$

a stąd na mocy proporcyi (1)

$$\frac{AS}{aS} = \frac{AE}{ae}$$

czyli jak wiadomo z nauki o proporcyjach:

$$\frac{AS - aS}{aS} = \frac{A\varepsilon - ae}{ae}$$

$$\text{tj.}\quad \frac{Aa}{aS} = \frac{A\varepsilon - ae}{ae} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

Dla téj saméj przyczyny, gdy dwa trójkąty $AS'\varepsilon$ i $aS'e$ są podobne, mamy:

$$\frac{AS'}{aS'} = \frac{A\varepsilon}{ae}$$

czyli jak wiadomo:

$$\frac{AS' - aS'}{aS'} = \frac{A\varepsilon - ae}{ae}$$

czyli

$$\frac{Aa}{aS'} = \frac{A\varepsilon - ae}{ae} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

W proporcyjach (2) i (3) gdy trzy wyrazy jednéj są trzém odpowiednym wyrazom drugiéj równe, są téż i czwarte wyrazy równe sobie, tj:

$$aS = aS'$$

jest przeto punkt S na linii aA w takiéj odległości od a w jakiéj téż odległości jest punkt S' od tegoż punktu $\underline{a}$; dobitniéj punkt S jest tenże sam co S'.– Tak samo można pokazać że i Dd; Cc, ... Mm, Oo zbiegają się w tymże samym punkcie S.–

14° Twierdzenie. Jeżeli dwa wielokąty w odwrócony sposób podobne, położeny na płaszczyźnie tak, że boki jednego będą równoległe do boków odpowiednich drugiego, wtedy linije proste łączące dwa wierzchołki odpowiednie lub dwa punkta dowolne odpowiednie, przetną się w jednym punkcie.–

Dowodzenie to samo, co w l. 13, fig. załączona.

15° Punkta te S i S', tak na fig (a) jako i na figurze (b) zowią się środkami podobieństwa wielokątów;– nadto z powodu tego, że na fig. (a) punkt ten S przypada na przedłużeniu linii Aa... zowie się środkiem podobieństwa zewnętrznym;– na fig zaś (b) gdy też punkt S przypada pomiędzy punktami A i a, środek ten zowie się <u>środkiem podobieństwa wewnętrznym</u>.

<u>Uwaga</u>. Wyrazy te dodatkowe <u>zewnętrzny</u>, <u>wewnętrzny</u> co do ich znaczenia trzeba dobrze zrozumieć, bo być może, że środek podobieństwa wewnętrzny przypadnie zewnątrz obydwóch wielokątów, jak tego na fig (b) mamy przykład, a znowu środek podobieństwa zewnętrzny przypadnie wewnątrz obydwóch wielokątów, jak to ma miejsce na fig. c załączonej.

16° Ponieważ na mocy trójkątów podobnych ASB aSb, BSC, bSc, ... ASM, aSm, tak na fig (a) jako i na fig (b) mamy:

$$\frac{AS}{aS} = \frac{BS}{bS} = \frac{CS}{cS} = \ldots\ldots = \frac{MS}{mS}.$$

przeto <u>punkt S należy uważać za dwa punkta odpowiednie tych dwóch wielokątów, które w jeden i tenże sam punkt S się zlały</u>; tj: Środek podobieństwa czy to zewnętrzny czy to wewnętrzny jest wspólnym odpowiednim punktem dwóch tych wielokątów.

Ztąd zaraz i to wypada, <u>że każda linija prosta przechodząca przez środek podobieństwa, jest wspólną odpowiednią liniją tych dwóch wielokątów i ta czyni z dwoma odpowiedniemi prostemi jednakowe kąty.</u>

Odległości te AS, aS zowią się (podług P. Chasles) <u>promieniami podobieństwa</u>.

17° Mogą, w szczególnym przypadku dwa wielokąty podobne być takie, że dla nich znajdują się obydwa środki podobieństwa, tak wewnętrzny jako i zewnętrzny; w ogólności zaś mogą dwa wielokąty podobne obydwa środki podobieństwa, gdy są o parzystéj liczbie boków i nadto są foremne (fig. załączona).

18° Środek podobieństwa zewnętrzny, gdy odległości pomiędzy dwoma bokami AB i ab (fig. 2) zostanie ta sama, oddala się coraz bardziéj, im stosunek podobieństwa $\frac{AB}{ab}$ dąży bardziéj do jedności, tak dalece, że gdy $\frac{AB}{ab}=1$. czyli gdy dwa wielokąty w sposób pod l. 13 wyrażony, położone przystają do siebie wprost, wtedy środek podobieństwa S oddali się do nieskończoności; wtedy bowiem linije Aa, Bb, Cc, ... Mm będą równoległe względem siebie.

19° Środek podobieństwa wewnętrzny, gdy odległość pomiędzy dwoma bokami AB i ab pozostaje taż sama, zbliża się w założeniu tém, że $ab < AB$, coraz bardziéj od punktu a do środka linii Aa tak dalece, że gdy: $ab = AB$, czyli gdy dwa wielokąty są w sposób odwrócony równe, środek ten S przypada w połowie prostéj Aa.—

O środkach podobieństwa kół.

20° Twierdzenie. Jeżeli w dwóch kołach (niejednakowych promieni i niespółśrodkowych) poprowadzimy cztery promienie z jednéj strony linii łączącéj środki w ten sposób, że dwom promieniom w jednem kole poprowadzonym, dwa pozostałe w drugiém kole poprowadzone będą odpowiednie równoległe, wtedy linije łączące końce promieni równoległych, zbiegną się w jednym punkcie, położonym na linii łączącéj środki.

Dowodzenie. Niechaj środki dwóch kół będą O i o, w których to kołach poprowadzone po jednéj stronie linii łączącej środki promienia OA i oa tudzież OB i ob są względem siebie równoległe, wtedy linije Aa i Bb zbiegną się w tenże sam punkt S, położony na przedłużeniu linii Oo. Jakoż jeżeli punkt przecięcia linii Aa i Oo nazwiemy S, będzie na mocy trójkątów AOS i aoS, podobnych:

$$AO : ao :: OS : oS.$$

czyli $$AO - ao : ao :: OS - oS : oS$$

to jest $$AO - ao : ao :: Oo : OS \quad \ldots\ldots\ldots (1)$$

Podobnie zowiąc punkt przecięcia się linii Bb z Oo przez S', będzie na mocy podobnych trójkątów OBS' i obS'

$$BO : bo :: OS' : oS'$$

czyli $$BO - bo : bo :: OS' - oS' : oS'$$

to jest $$BO - bo : bo :: Oo : oS' \quad \ldots\ldots\ldots (2)$$

Zważając $OA = BO$, $ao = bo$, widzimy, że trzy wyrazy proporcyi (1) są odpowiednie równe trzem wyrazom proporcyi (2), a ztąd:

$$oS = oS'$$

tj. punkta S i S' są jednym i tymże samym punktem. C. b. d. p.

Ponieważ promienie OB i ob, były dowolnie obrane, przeto można wziąć dwa inne OC i oc równoległe pomiędzy sobą i okazać w sposób powyżej wskazany, że prosta Cc przejdzie także przez punkt S; posiada zatem ten punkt S tę własność, że w nim zbiegają się wszystkie proste poprowadzone przez końce promieni w dwóch tych kołach równoległe i po jednej stronie linii łączącej środki poprowadzonych.—

21. Twierdzenie. Jeżeli w dwóch kołach niejednakowych promieni i niewspółśrodkowych, poprowadzimy cztery promienie w ten sposób, że dwom promieniom w jednem kole poprowadzonym, dwa pozostałe w drugiém kole poprowadzone, będą odpowiednie równoległe i będą z drugiej strony linii łączącej środki położone wtedy linije łączące końce promieni równoległych, przetną się w jednym punkcie na linii łączącej środki położonym.

Dowodzenie takie same co pod l. 20) (wziąć figurę) Ponieważ promienie OB i ob, były dowolnie obrane, przeto można wziąść dwa inne OC i oć równoległe pomiędzy sobą i pokazać, że prosta Cć przechodzi także przez punkt S; posiada zatem ten punkt S tę własność, że weń zbiegają się wszystkie proste łączące końce promieni równoległe i po różnych stronach linii łączącej środki poprowadzonych.

22. Punkt S zowie się środkiem podobieństwa dwóch kół, O i o zewnętrznym, bo przypada na przedłużeniu linii Oo.

Punkt s zowie się środkiem podobieństwa dwóch kół O i o wewnętrznym, bo przypada pomiędzy środkami O i o.

Mają zatem dwa koła, dwa środki podobieństwa jeden zewnętrzny, drugi wewnętrzny

23. Odległości OS i oS tudzież Os i os, zowią się promieniami podobieństwa dwóch kół O i o, a gdy te na mocy trójkątów SOA i Soa, tudzież sOA i śoa podobnych, są w stosunku promieni tych dwóch

kół przeto:

<u>Promienie podobieństwa dwóch kół są proporcyjonalne do promieni tychże kół</u> —

24. Obracając teraz prostą SbB około punktu S, ta przecinać będzie ciągle dwa koła O i o w punktach B i b tudzież D i d w ten sposób, że promienie OB i ob tudzież OD i od, będą ciągle do siebie równoległe, i nadto punkta te B i D tudzież b i d będą coraz bliżej siebie, tak dalece, że gdy kąty BOD i bod ciągle jednakowo malejąc, staną się razem równe zero, wtedy punkta B i D, tudzież b i d zleją się w punkta T i t, zetknięcia prostej StT do obu kół razem stycznej. —

Podobnież, obracając prostą Bsb' otrzymamy styczną T'st' spólną także do obu kół.

Można zatem jak to figura pokazuje, poprowadzić dwie styczne zewnętrzne i dwie wewnętrzne, których punkta przecięcia się z sobą S i s, leżą na linii łączącej środki dwóch kół i są właśnie punktami podobieństwa tych dwóch kół, t.j.

<u>Środek podobieństwa zewnętrzny dwóch kół zewnątrz położonych, a nie przecinających się z sobą</u>, jest to punkt przecięcia się zewnętrznych linij stycznych wspólnych do obu kół; a <u>środek podobieństwa wewnętrzny</u> dwóch kół takich, jest punktem przecięcia się dwóch stycznych wewnętrznych. —

25. Jeżeli <u>dwa koła</u> są zewnątrz styczne, wtedy <u>środek podobieństwa zewnętrzny</u>, jest punktem przecięcia się stycznych zewnętrznych, a <u>środek podobień-</u>

stwa wewnętrzny, jest punkt styczności tych dwóch kół; dwie bowiem styczne wewnętrzne, zlewają się w tym przypadku w jedną styczną spólną do obydwóch kół. –

26. Jeżeli dwa koła z sobą się przecinają, wtedy środek podobieństwa zewnętrzny, dwóch tych kół jest jeszcze punktem przecięcia się stycznych zewnętrznych; a gdy w tym przypadku niema stycznych wewnętrznych, przeto należy środek podobieństwa tych dwóch kół wewnętrzny, wyznaczyć w sposób ogólny (porównaj l. 21 – 22)

27 Jeżeli dwa koła są wewnątrz styczne, wtedy środek podobieństwa zewnętrzny, jest to punkt, zetknięcia się tych dwóch kół; botu dwie styczne zewnętrzne zlewają się na jedną styczną; a środek podobieństwa wewnętrzny, należy według l 21 i 22 wyznaczyć.

28. Jeżeli dwa koła niespółśrodkowe są w ten sposób położone, że jedno leży wewnątrz drugiego, wtedy tak środek podobieństwa zewnętrzny jako i wewnętrzny należy wyznaczyć według l. 20, 21 i 22.

29. Jeżeli dwa koła są współśrodkowe, wtedy dwa ich środki podobieństwa, zlewają się w jeden punkt tj w środek wspólny tych dwóch kół.

30. Jeżeli dwa koła są jednakowych promieni, wtedy łatwo poznajemy, że środek podobieństwa zewnętrzny takich dwóch kół jest w odległości nieskończenie wielkiej; środek zaś podobieństwa wewnętrzny, leży na samym środku tj w połowie linii łączącej środki. –

31. Jeżeli jedno z dwóch kół będzie coraz większego

promienia, wtedy jego krzywizna będzie coraz mniejsza, tak dalece, że gdy koło to wystawimy sobie nakreślone promieniem nieskończenie wielkim, natenczas koło to zamieni się na prostą, wtedy za <u>środek zewnętrzny</u> lub <u>wewnętrzny podobieństwa koła i prostéj</u>, można uważać <u>którykolwiek koniec średnicy koła danego, prostopadłéj do prostéj danéj</u>.-

32. W końcu jeżeli jedno z dwóch kół, będzie coraz mniejszego promienia, tak dalece, że w końcu ten promień stanie się równym zero, wtedy koło to zamieni się na punkt; <u>punkt ten</u> uważać można za środek podobieństwa <u>zewnętrzny</u> i <u>wewnętrzny</u> koła i punktu danego.-

<u>O podziale harmonicznym.</u>

33. Ponieważ summa (zob. fig. fig[11] poprz.) dwóch odległości Os i so. daje linię Oo, i podobnie różnica dwóch odległości OS i So, daje tę samą linię Oo ztąd mówi się że punkt s dzieli linię Oo na dwa ucinki Os i so <u>zbiorowe</u> (*) (additifs), a punkt S dzieli ją na dwa ucinki <u>różnicowe</u> (soustractifs) (**) To założywszy widzimy że gdy:

$$OS : oS :: OA : oa$$

$$Os : os :: OA : oa'$$

będzie też na mocy tego, że $oa = oa'$

$$OS : oS = Os : os.$$

to jest, że <u>dwa ucinki zbiorowe Os i os. linii łączącej środki Oo są proporcyjonalne do dwóch odcinków</u>

(*) <u>zbierne</u> Frączkiewicz (**) <u>odciążne</u> Frączkiewicz różniących OS i oS tej samej prostej Oo.

34. O prostej Oo w ten sposób na sobie dwa punkta s i S mieszczącej, że

$$OS : oS :: Os : os$$

mówi się, że prosta Oo w punktach s i S jest harmonicznie podzieloną. Punkta s i S uważane względem prostej Oo, zowią się sprzężone pomiędzy sobą.

35. Proporcyja pod l. 33 podana, może być w tym porządku co do wyrazów napisaną.

$$So : so :: OS : sO$$

a ztąd linija jest także w punktach o i O harmonicznie podzieloną; są bowiem dwoma zbiorowemi ucinkami linije So i so, odciążnemi zaś linije SO i sO. Sprzężone względem siebie punkta, są o i O odnosząc je do prostej Ss.

36. Wogólności zatem cztery w ten sposób położone punkta O, s, o, S stanowią podział harmoniczny; z tych dwa każde punkta, trzecim w pośrodku oddzielone, są sprzężone pomiędzy sobą i odnoszą się do prostej, dwoma pozostałemi ograniczonej.

37. Z proporcyi tak pod l. 33 jako też pod l. 35. podanej wypada:

$$SO \times so = So \times sO.$$

tj. ile razy cztery punkta są harmonicznie względem siebie położone, tyle razy prostokąt zbudowany na całej linii i jej części środkowej, jest równoważny prostokątowi zbudowanemu na dwóch

jéj częściach skrajnych.
Ta prawda służyć może za nową definicyję podziału harmonicznego.–

38. Gdy proporcyję:

$$sO : so = SO : So$$

pod l. 33 podaną, możemy pisać i w ten sposób:

$$SO - Ss : Ss - So :: SO : So.$$

przeto można podać definicyję podziału harmonicznego i w ten sposób:
Proporcyję harmoniczną stanowią trzy długości na prostéj od jéj końca w ten sposób z kolei odcięte, że nadmiar piérwszéj nad drugą tak się ma do nadmiaru drugiéj nad trzecią, jak się ma piérwsza do trzeciéj.– Pod takim to względem uważając podział harmoniczny, długość druga zowie się środkiem harmonicznym, tak to np. trzy długości 15, 12, 10 tworzą proporcyję harmoniczną, bo 15-12 : 12-10 = 15 : 10, długość 12 jest środkiem harmonicznym.

39. Cztery punkta harmonicznie położone posiadają rozmaite własności, z których główne tutaj podamy.–

Twierdzenie. Prostokąt zbudowany na dwóch odległościach, punkta sprzężone z sobą łączących, jest równoważny podwojonemu prostokątowi z części środkowéj przez całą liniję; albo podwojonemu prostokątowi z dwóch części skrajnych, tj okaże.

$$Ss \times Oo = 2sO \times SO = 2sO \times oS$$

jakoż według l. 33 mamy:

$$\frac{SO - Ss}{Ss - So} = \frac{SO}{So}$$

a stąd: $\frac{Ss - So}{SO - So} = \frac{So}{SO + So}$.

a gdy: $Ss - So = so$, a $SO - so = Oo$.

jest: $\frac{so}{Oo} = \frac{So}{SO + So}$. . . . . (1)

Z tej samej proporcyi:

$$\frac{SO - Ss}{Ss - So} = \frac{SO}{So}$$

wypada:

$$\frac{2SO - Ss}{Ss} = \frac{SO}{So}$$

a ztąd: $\frac{Ss}{2SO} = \frac{So}{SO + So}$ . . . . (2)

Z proporcyi (1) i (2) wypada:

$$\frac{so}{Oo} = \frac{Ss}{2SO}$$

a ztąd $Ss \times Oo = 2SO \times so$

a gdy według liczby 37.

$$SO \times so = So \times sO$$

przeto: $Ss \times Oo = 2SO \times so = 2So \times sO$

40. Twierdzenie. Kwadrat z połowy środka harmonicznego, jest równoważny prostokątowi z odległości punktu w połówce środka harmonicznego leżącego od dwóch punktów z sobą względem tego środka sprzężonych.

W tym celu podzielmy środek harmoniczny Ss w punkcie m na dwie równe części i uważajmy, że według l. 33 mamy.

$$SO : So :: sO : so$$

to jest: $Om + mS : mS + mO :: Om - mS : mS - mO$

a ztąd $2Om : 2mS = 2mS : 2mO$

czyli: $Om : mS = mS : mO$

to jest $\overline{mS}^2 = Om \times mO$.

41. W końcu wspomnę, że gdy z proporcyi pod l. 33.

podanéj wypada że skoro: $Os = os.$ jest też i:

$$OS = oS.$$

a według liczby 30., punkt S jest w takim przypadku, w odległości nieskończenie wielkiéj; przeto dwie linije OS i oS nieskończenie długie, za równe pomiędzy sobą uważać należy, chociaż te różnią się pomiędzy sobą liniją stałą Oo; czyli innemi wyrazy: różnicę stałą pomiędzy dwiema linijami nieskończenie wielkiemi, za zero uważać można.

O osi radykalnéj.

42. Opisanie. Miéjscem geometrycznem nazywamy w geometryi płaskiéj liniję mieszczącą na sobie ciąg punktów, które są odpowiedziami na jedno i toż samo zadanie, téj natury będące, że liczba tychże odpowiedzi jest nieskończona np. 1° jeżeli kto żąda znaleźć punkt na płaszczyznie, którżby od końców prostéj danéj na téjże płaszczyznie, był równo oddalony, to wtedy liczba punktów temu warunkowi zadosić czyniących jest nieskończoną, lecz punkta te jak wiadomo z początkowéj geometryi, znajdują się na linii prostéj prostopadłéj do linii danéj i przez jéj środek przechodzącéj; jest więc prostopadła ta miéjscem geometrycznem odpowiedzi na podane zadanie. -

To zadanie inaczéj wystawione, podaje nam tę prawdę: miéjscem geometrycznem środków wszystkich kół które przez dwa dane punkta poprowadzić można, jest linija prosta ze środka prostéj dwa

dane punkta łączącej, prostopadle wyprowadzona.
2° Jeżeli kto żąda znaleźć punkt któryby od dwóch prostych danych, był równooddalony, wtedy łatwo wpadnie na to, że takowych punktów jest nieskończenie wiele, ale że punkta te są umieszczone na prostej dzielącej kąt prostych danych, na dwie części równe; jest więc prosta wspomniana miejscem geometrycznem wszystkich odpowiedzi na podane zadanie. – To zadanie inaczej wysłowione, podaje nam tę prawdę: miejscem geometrycznem środków wszystkich kół stycznych do dwóch prostych danych, jest linija prosta dzieląca kąt pomiędzy danemi prostemi na dwie równe części. Gdy zaś dwie proste czynią dwie pary kątów wierzchołkiem przeciwległych, przeto dwa są w tém zadaniu miejscem geometryczne. –
3° jeżeli kto żąda nakreślić punkt któryby od punktu danego był w odległości danej, wtedy łatwo pojmuje, że takowych punktów jest nieskończenie wiele, i że te wszystkie punkta leżą na okręgu koła, którego środkiem jest punkt dany, a promieniem długość równa odległości danej; jest więc okrąg koła wspomniany miejscem geometrycznem wszystkich odpowiedzi na podane zadanie. Z tego też zadania wychodząc, można powiedzieć że okrąg koła jest miejscem geometrycznem wszystkich punktów równoodległych od jego środka. –
43. Twierdzenie. Miejscem geometrycznem

wszystkich punktów, z których poprowadzone styczne do dwóch kół danych na płaszczyznie, są sobie równe, jest linija prosta, prostopadła do linii łączącej środki tych dwóch kół, w ten sposób poprowadzona, że ona dzieli liniję łączącą środki na dwa takie ucinki, iż różnica pomiędzy kwadratami tych dwóch ucinków jest równoważna różnicy kwadratów z promieni tych dwóch kół.

Jakoż niechaj dwoma danemi kołami, będą koła O i O' punkt R taki że z niego styczne RT i RT' do tychże kół poprowadzone są sobie równe wtedy prowadząc promienie OT i O'T', liniję OO', linije OR i O'R' tudzież prostopadłą RS.

w trójkącie OSR .... $\overline{OR}^2 = \overline{OS}^2 + \overline{SR}^2$

w trójkącie O'SR .... $\overline{O'R}^2 = \overline{O'S}^2 + \overline{SR}^2$

a ztąd przez odejmowanie:

$$\overline{OR}^2 - \overline{O'R}^2 = \overline{OS}^2 - \overline{O'S}^2 \; \ldots\ldots (1)$$

dalej w trójkącie ORT.... $\overline{OR}^2 = \overline{OT}^2 + \overline{RT}^2$

podobnie w trójkącie O'RT'... $\overline{O'R}^2 = \overline{O'T'}^2 + \overline{RT'}^2$

a ztąd przez odejmowanie i nadto, że $RT = RT'$ z założenia ..... $\overline{OR}^2 - \overline{O'R}^2 = \overline{OT}^2 - \overline{O'T'}^2$.

czyli na mocy równości (1) i zważając na to że: $OT = OA$ a $O'T' = O'A'$

$$\overline{OS}^2 - \overline{O'S}^2 = \overline{OA}^2 - \overline{O'A'}^2 \; \ldots . (2)$$

Ponieważ dla tychże samych kół O i O' ilość $\overline{OA}^2 - \overline{O'A'}^2$ jest stałą, to jest ciągle tąż samą, przeto też i punkt S na linii OO' ciągle tenże sam być musi; bo dajmy na to, że punkt S zbliżył się do-środka O, to natenczas OS zmniejszyłoby się a O'S powiększyło, a ztąd dla tych dwóch przyczyn: $\overline{OS}^2 - \overline{O'S}^2$ zmniejszyłoby się także, co być nie może, bo $\overline{OA}^2 - \overline{O'A'}^2$ jest ciagle taże samą wielkością.

Punkt S jest przeto stałym, a że punkt R był obrany dowolnie, byle tylko styczna RT = RT', przeto każdego takiego punktu R poprowadzona prostopadła, przechodzić musi przez punkt S. tj: Miejscem geometrycznem .... kół, jak to równość (a) pokazuje.

44. Opisanie. Linija prosta, która jest miejscem geometrycznem wszystkich punktów, od których prowadzone styczne (po parze), do dwóch kół są sobie równe, zowie się osią radykalną tych dwóch kół. — Linija pierwiastną

Linija ta czyni zadosyć dwom warunkom: 1° Oś radykalna dwóch kół, jest prostopadłą do linii łączącej środki tych dwóch kół; 2° spodek osi radykalnéj, dzieli liniję łączącą środki dwóch kół, na dwa takie ucinki, że różnica kwadratów z tych dwóch ucinków, jest równoważna różnicy kwadratów z promieni tych dwóch kół. —

45. Oś radykalna ma nie tylko miejsce dla kół zewnątrz siebie położonych, ale i dla każdego z pięciu położeń, wktórych dwa koła na płaszczyznie dane znajdować się mogą; przekonajmy się o téj prawdzie i zarazem pokażmy, jak też oś radykalna względem kół do których należy jest położoną. —

W tym celu cechując w ogólności OS przez D, SO' przez d, OA przez R, $O'A'$ przez r, będzie według równości (a) /: podług l. 43 :/

$$D^2 - d^2 = R^2 - r^2 \ldots\ldots\ldots (a)$$

czyli dodając po d^2 a odejmując po R^2

$$D^2 - R^2 = d^2 - r^2 \ldots\ldots\ldots (b)$$

Na mocy wiadomego twierdzenia: różnica kwadratów z dwóch linii, jest równoważną prostokątowi zbudowanemu na summie dwóch boków tychże kwadratów i na różnicy tychże boków; można równości (a) i (b) i w ten sposób napisać

$$(D+d)(D-d) = (R+r)(R-r) = R^2 - r^2 \ldots\ldots\ldots (c)$$

$$(D+R)(D-R) = (d+r)(d-r) \ldots\ldots\ldots (d)$$

Przechodząc teraz z porządku te pięć położeń dwóch kół, przystąpimy do pierwszego.

46. 1° Gdy dwa koła są zewnątrz położone, fig. 12. wtedy

$$D+d > R+r$$

co pokazuje, że koniecznie jedna z tych wielkości D lub d, jest większa od swej odpowiedniej R lub r, dajmy na to, że $D > R$, a stąd też $D^2 > R^2$, a zatem według równości (b) (liczba 45) $d^2 > r^2$, czyli $d > r$ tj. że gdy razem i $D = OS$ i $d = O'S$ musi być większe od odpowiednich promieni $R = OA$ i $r = O'A'$, przeto w tem położeniu kół oś radykalna przypada pomiędzy środkami O i O' zewnątrz obydwóch kół do których należy. – Dalej równość (a) mówi, że gdy $R > r$, będzie też i $D > d$, tj. spodek osi radykalnej jest więcej oddalony od środka koła większego aniżeli od środka koła mniejszego. Z warunków tych $D > d$

i $R > r$, wypada, że im $D+R > d+r$ jest tem bardziej na mocy równości (2) dla wzajemnego skompensowania:

$$D-R < d-r.$$

tj. że w tém położeniu kół: <u>oś radykalna dwóch kół jest bliższą koła większego, aniżeli koła mniejszego.</u>

47. <u>2° Gdy dwa koła są zewnątrz styczne</u>, fig 13. wtedy:

$$D+d = R+r \ldots\ldots\ldots (1)$$

a zatem na mocy równości (c) i:

$$D-d = R-r \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

Dodając teraz (1) do (2) otrzymamy $2D = 2R$ a stąd też też i $D=R$; gdy zaś $D=R$ jest też na mocy równości (1) i $d=r$, tj. <u>oś radykalna dwóch kół zewnątrz stycznych jest spólną ich styczną wewnętrzną</u>

To samo można z figury wyprowadzić, uważając że, na mocy <u>IV</u> przypadku o przystawaniu trójkątów, trójkąty OTR i OSR przystają do siebie, a stąd $RT=RS$. Dla podobnéj przyczyny $RT'=RS$, a stąd też $RT=RT'$, jest więc styczna spólna dwóch kół zewnątrz stycznych miejscem geometrycznem punktów od których poprowadzone styczne RT i RT', po parze są sobie równe, czyli <u>jest taż styczna osią radykalną tych dwóch kół</u>

48. 3° <u>Gdy dwa koła dane przecinają się z sobą</u> wtedy dla jednego z punktów przecięcia się tych dwóch kół np. dla S mamy (zob. fig 14)

$$\overline{OS}^2 = \overline{OY}^2 + \overline{SY}^2$$

$$\overline{O'S}^2 = \overline{O'Y}^2 + \overline{SY}^2$$

a stąd $\overline{OS}^2 - \overline{O'S}^2 = \overline{OY}^2 - \overline{O'Y}^2 = \overline{OA}^2 - \overline{O'A'}^2$, bo $OS = OA$, a $O'S = O'A'$.

Równość ta okazuje (l. 43), że punkt S leży na osi radykalnej tych dwóch kół, a że ta nadto powinna być prostopadłą do linii łączącej środki kół, przeto osią radykalną dwóch kół przecinających się jest przedłużona ich cięciwa spólna; - a jak wiadomo z Geometryi początkowej, cięciwa spólna dwóch kół przecinających się jest prostopadłą do linii łączącej środki tych dwóch kół. -

49. 4° Gdy dane koła są wewnątrz styczne; (zob. fig 15) warunek drugi, któremu oś radykalna (44) zadosyć uczynić powinna, jest związkiem metrycznym, a stąd związek ten zostanie się jeszcze tenże sam dla symetrycznego położenia jednego z dwóch kół względem osi radykalnej; według tego odnosząc przypadek rozbierany do przypadku 2°, widzimy, że oś radykalna dwóch kół wewnątrz stycznych, jest to ich styczna spólna zewnętrzna.

50. 5° Gdy obra koła są wewnątrz siebie położone; wtedy podobnie jak pod l. 49. zważając, że oś radykalna nie odmieni swego położenia, gdy za jedno z kół danych podstawimy koło z tenże symetrycznie względem osi radykalnej położone, wypada na mocy tego, co w przypadku 1^m^ (l. 46) powiedziano, iż oś radykalna dwóch kół wewnątrz siebie położonych przypada zewnątrz koła większego, z tej strony w której koło mniejsze jest więcej zbliżone do koła większego (zob. fig 16)

51. Gdy w równości (c) (l. 45)

$$(D+d)(D-d) = R^2 - r^2$$

.D+d coraz bardziej maleje, tj. gdy środek koła mniejszego zbliża się coraz bardziej do środka koła większego, musi tedy D–d coraz bardziej rosnąć dla skompensowania téj równości, a tem samem tak D jako i d rosnąć będzie; to okazuje, że wtedy oś radykalna oddalać się będzie od środka koła, czy to większego czy też mniejszego, tak dalece że gdy dwa koła staną się współśrodkowe, wtedy oś radykalna oddali się do nieskończoności, to jest: Dwa koła współśrodkowe nie mają osi radykalnej, czyli innemi słowy: do dwóch kół spółśrodkowych z jednego punktu nie mogą wychodzić styczne równe.–

52.– W przypadkach tych, gdy dwa koła mają obydwie pary stycznych wspólnych, lub jedną tylko parę, oś radykalna dzieli odległość pomiędzy punktami dotknięcia na dwie równe części.

53. Stycznych równych z jednego punktu osi radykalnej wychodzących jest cztery, gdy koła są zewnątrz lub wewnątrz siebie położone; gdy się z sobą przecinają, jest ich trzy, lub gdy koła te są zewnątrz albo wewnątrz styczne.

54. Jeżeli teraz dwa koła O i O′ nakreślimy jednakowych promieni, i poprowadzimy styczne spólne zewnętrzne, to te jak nam wiadomo, są od siebie równoległe i zarazem równoległe do linii łączącéj środki; a że oś radykalna na mocy l. 52 dzieli odległość pomiędzy punktami dotknięcia na dwie równe części, przeto; w przypadku tym środek osi radykalnéj przypada

w połowie linii łączącej środki (zob. fig. 17)
Powiększając teraz promień jednego z tych dwóch kół, tak, że okrąg tego koła ciągle przez punkt A przechodził, wtedy na mocy l. 46 spodek osi radykalnéj, zostając ciągle pomiędzy punktami A' i A, zbliżać się będzie coraz bardziéj do koła większego, czyli do punktu A, i to tem bardziéj im koło to będzie dłuższego promienia, tak dalece, że gdy koło to stanie się promienia nieskończenie wielkiego, tj. gdy się to koło zamieni na linię prostą, spodek osi radykalnéj zleje się z punktem A, ztąd osią radykalną linii prostéj i koła jest taż sama linija prosta (zob. fig. 18)
55. Jeżeli teraz jedno z dwóch kół O i O' zamieni się na punkt np. koło O, wtedy na mocy l. 52 osią radykalną koła i punktu, jest linija prosta łącząca środki dwóch stycznych z tegoż punktu do koła danego wyprowadzonych (zob. fig. 19.)
56. O kole radykalnem. Jeżeli z punktu A zewnątrz koła O wziętego, poprowadzimy sieczną ABOC, i z tegoż punktu długością stycznéj AD, która jak wiadomo, jest średnio-geometrycznie proporcyjonalną między AB i AC, nakreślimy koło, wtedy to koło zowie się radykalném zewnętrzném względem koła O. (zob. fig. 20).

Podobnie jeżeli przez punkt A' wewnątrz koła O poprowadzimy średnicę COA'B, i długością A'D' równą połówce cięciwy najkrótszéj, która jak wiadomo, jest średnio-geometrycznie proporcyjonalną między $A'B$ i $A'C$ nakreślimy koło, wtedy to koło zowie się radykalnem wewnętrznem względem koła O (zob. fig. 21.)

57. Uważając koło radykalne zewnętrzne, widzimy że promień AD koła radykalnego, jest linija styczną do koła O, i nawzajem promień OD koła O jest stycznym do koła radykalnego. — Te dwa promienie wzajemne styczne przecinają się pod kątem prostym (zob. fig. 22)

58. Kąt pod którym okręgi dwóch kół się z sobą przecinają, jest to kąt zawarty, pomiędzy dwiema stycznemi, z których jedna jest styczną w punkcie przecięcia się tych dwóch kół do koła jednego, a druga jest styczną do koła drugiego.

59. Dwa koła przecinają się ortogonalnie, gdy kąt przecięcia się ich jest prosty; koło zatem radykalne zewnętrzne przecina ortogonalnie to koło, do którego należy. —

60. Zwracając się teraz do tego, co wyżej było, widzimy, że ile razy weźmiemy na osi radykalnej punkt R taki, z którego wychodzą styczne równe do dwóch kół, tyle razy z punktu tego długością stycznej RT kreśląc koło, okrąg koła tego przetnie dwa koła te, do których ta oś radykalna należy, ortogonalnie, a zatem jest koło R spólnem kołem radykalném zewnętrznem dla tychże dwóch kół. — (zob. fig. 22.)

61. Podobnie, gdy w trzeciem położeniu kół, tj. gdy dwa koła się z sobą przecinają, weźmiemy

punkt R nie na przedłużeniu cięciwy wspólnéj a-
le na niéj saméj, i wyprowadzimy prostopadłe RT,
RT' do RO i RO'; wtedy prostopadłe te RT i RT' są
sobie równe; jest bowiem na mocy tego, że punkt R
leży na osi radykalnéj:

$$\overline{OS}^2 - \overline{O'S}^2 = \overline{OA}^2 - \overline{O'A'}^2 = \overline{OR}^2 - \overline{O'R}^2$$

a stąd też odejmując po obydwóch stronach po
$\overline{OR}^2$ a dodając po $\overline{O'A'}^2$:

$$\overline{OA}^2 - \overline{OR}^2 = \overline{O'A'}^2 - \overline{O'R}^2$$

to jest $\overline{OT}^2 - \overline{OR}^2 = \overline{O'T'}^2 - \overline{O'R}^2$

$$\overline{RT}^2 = \overline{RT'}^2$$

czyli $RT = RT'$

kreśląc przeto z punktu R koło promieniem RT,
to koło przejdzie i przez punkt T', a tem samém
będzie spólném radykalném wewnętrznem kołem
dwóch kół O i O'.

62. Podług tego zatem, jest oś radykalna dwóch
kół, miejscém geometryczném środków kół rady-
kalnych spólnych czy to zewnętrznych czy wewnę-
trznych dla tychże dwóch kół, do których ta oś
należy.

63. O środku radykalnym. Jeżeli nakreślimy
trzy koła dowolne O, O', O" fig. 23 i te uważać bę-
dziemy po dwa na raz tj. O i O', O i O", O' i O", to wtedy
każda para tych kół, będzie miała swą oś rady-
kalną tak, że osi radykalnych będzie tu trzy; po-
każemy, że te trzy osie przecinają się w jednym
punkcie.

Na okazanie tego uważajmy, że punkt w którym się oś radykalna kół O i O' przecina się z osią radykalną dwóch kół O i O" jest według l. 62 środkiém koła radykalnego /. czy to wewnętrznego czy też zewnętrznego / spólnego tak dla kół O i O' jakoteż i dla kół O i O", a tém samém punkt ten przecięcia według téjże liczby, leży także na osi radykalnéj dwóch kół O' i O", trzy przeto osie radykalne trzech kół O O' i O", przecinają się w jednym punkcie. —

64. Stąd wypada jako szczególny przypadek i to: że jeżeli trzy koła przecinają się z sobą, po dwa je na raz biorąc, wtedy trzy cięciwy ich spólne przecinają się w jednym punkcie. (zob. fig. 24); tudzież, jeżeli trzy koła są styczne, po dwa je na raz biorąc, wtedy trzy styczne, do nich spólne przecinają się w jednym punkcie (zob. fig. 25)

65. Punkt spólny trzem osiom radykalnym trzech kół, zowie się środkiém radykalnym tych trzech kół; jest to środek koła radykalnego spólnego dla tych trzech kół; z niego to jeżeli koła nie przecinają się, ale są zupełnie od siebie oddzielone wychodzi sześć stycznych do tychże kół równych pomiędzy sobą. —

66. Zakończmy tę rzecz rozwiązaniem zadania:

Wynaleźć oś radykalną dwóch kół.

Jeżeli dwa koła dane są styczne zewnątrz lub wewnątrz, lub jeżeli dwa koła dane przecinają się z sobą, wtedy w pierwszym przypadku styczna spólna, a w drugim cięciwa spólna, są według ll. 47, 48, 49. szukaną osią radykalną. —

Pozostaje zatem uważać jeszcze tylko przypadek dwóch kół nieprzecinających się z sobą zewnątrz lub wewnątrz siebie położonych; tak w jednym jak i w drugim przypadku dla wynalezienia osi radykalnéj dwóch kół O i O' przetnijmy je trzeciem kołem O'', któregoby środek nie leżał na linii łączącéj środki O i O', a wtedy punkt przecięcia się cięciw spólnych dla kół O i O'' tudzież O' i O'', jest według liczby 63 punktem leżącym na osi radykalnéj dwóch kół O i O'; z punktu tego prowadząc zatém prostopadłą do prostéj OO', prostopadła ta będzie osią radykalną dwóch kół O i O' (zobacz fig. 26).

Na tem zadaniu opiera się też sposób wynalezienia środka radykalnego trzech kół, przy pomocy koła czwartego przecinającego trzy koła dane. -

O kole wzajemném. -

67. Wiadomo z Geometryi początkowéj, że ile razy z punktu zewnątrz koła położonego wychodzą dwie sieczne, tyle razy długości tych siecznych są odwrotnie proporcyjonalne częściom swym za kołem położonym, tudzież ile razy przez punkt wewnątrz koła obrany poprowadzimy dwie cięciwy, tyle razy części tychże cięciw, są odwrotnie względem siebie proporcyjonalne. Twierdzenie odwrotne względem tych dwóch Twierdzeń ma także miejsce, tj. ile razy na dwóch prostych przecinających się

w punkcie A, obrane są cztery punkta B, C, D, E w ten sposób, że AB : AD = AE : AC, tyle razy cztery takie punkta leżą na okręgu jednego koła; albowiem przesunięte koło przez trzy punkta B, D, E, (fig. 28 i 29.) niechaj nie przejdzie przez punkt czwarty C, ale niechaj np. przetnie prostą AB w punkcie C′ to natenczas:

$$AB : AD :: AE : AC'$$

a gdy według założenia

$$AB : AD :: AE : AC$$

przeto z tych dwóch proporcyi wypada:

$$AC' = AC$$

czyli, że koło to przez punkta B, D, E przesunięte koniecznie przejść musi i przez punkt C.

68. Twierdzenie. Jeżeli przez środek podobieństwa dwóch kół, czy to zewnętrzny czy też wewnętrzny, poprowadzimy dwie sieczne, wtedy z ośmiu punktów, w których dwie te sieczne, koła dwa przecinają, cztery tak zawsze dobierane punkta, iż z nich żadna para nie są odpowiedniemi punktami, ani też spólna jednej siecznej i jednemu kołu, leżą na okręgu jednego koła.

Niech A i C (fig 30 i 31) będą punktami przecięcia się siecznej SA z kołem O, punkta B i D, punkta przecięcia się siecznej SB z temże kołem O; A′ i C′ są punkta przecięcia się siecznej SA z kołem O′ a. B′ i D′ punkta przecięcia się siecznej SB z temże kołem O′, to wtedy:

1° cztery punkta A, B, C′, D′ leżą na okręgu jednego koła

2° cztery punkta A', B', C, D leżą na okręgu jednego koła
3° cztery punkta A, D, B', C' leżą na okręgu jednego koła
4° cztery punkta A', D', B, C leżą na okręgu jednego koła
Co do 1° uważam że:

$$SA : SA' :: OA : O'A' \; ; \; SB : SB' :: OB : O'B'$$

a że $OA = OB$ a $O'A' = O'B'$ przeto

$$SA : SA' = SB : SB' \text{ tj:}$$

$$SA : SB :: SA' : SB', \text{ a że według (l. 67)}$$

$$SA' : SB' :: SD' : SC'$$

przeto $SA : SB :: SD' : SC'$ tj według (l. 67)
cztery punkta A, B, C', D' leżą na okręgu jednego koła.
Co do 2° to samo jest dowodzenie, zamieniając tylko A i B na A' i B' a C' i D' na C i D.
Co do 3° $SA : SA' :: OA : O'A'$; $SD : SD' :: OD : O'D'$
a że: $OA = OD$ a $O'A' = O'D'$ przeto: $SA : SA' :: SD : SD'$ to jest

$$SA : SD = SA' : SD' \ldots,$$

a że, $SA' : SD' :: SB' : SC'$ będzie też

$$SA : SD :: SB' : SC'$$

tj: cztery punkta A, D, B', C' leżą na okręgu jednego koła.
Co do 4°, toż samo jest dowodzenie, zamieniając A i D na A' i D' a B' i C' na B i C.

69. Dla krótszego wysłowienia i przytaczania prawdy w Twierdzeniu poprzedzającem udowodnionej, <u>każde z tych czterech kół $ABC'D'$, $A'B'CD$, $ADB'C'$, $A'D'BC$ zowie się kołem wzajemnem dwóch kół O i O' przez wzgląd na środek podobieństwa S.</u> –

70. Każde koło przez dwa punkta A i C', (fig. 30 i 31.)

w których sieczna ze środka podobieństwa S wychodząca, przecina dwa koła O i O', byleby punkta te nie były odpowiedniemi, będzie kołem wzajemniem tych kół O i O', tj. przetnie dwa te koła w punktach D i B' tak że prosta DB' przejdzie przez środek podobieństwa S, ale te punkta D i B' nie będą odpowiedniemi.-

71. Załóżmy teraz, że sieczna SB (fig. 32 i 33) coraz bardziej się zbliża do siecznej SA tak, że kąt ASB maleje, wtedy uważając koło wzajemne ADB'C' widzimy, że to ciągle przez punkta A i C' przechodzić będzie; ale te punkta połączywszy z punktem D wydadzą trójkąt ADC', w którym kąt przy D będzie ciągle więcej rozwarty; koło to ADB'C' zatem będzie coraz dłuższego promienia, tak dalece, że gdy sieczna ta SB zleje się razem z sieczną SA, wtedy koło to zamieni się na linię prostą, tj. tę samą sieczną SA. Podobnie wnosić należy z uwagi trójkąta BCD', że koło wzajemne BCA'D' w przypadku tym, gdy te sieczne SA i SB w jedną się zleją, zamieni się na linię prostą tj. sieczną SA. Co do kół DCA'B' i ABC'D', to te w przypadku tym, który rozbieramy, przecinać będą dwa koła dane O i O' w coraz bliższych punktach C, D, B', A'; tudzież A, B, D', C', tak dalece, że gdy sieczna SB zleje się razem z sieczną SA, wtedy te dwa koła staną się stycznemi do kół O i O', jedno styczne w punktach A' i C, a drugie w punktach A i C'.- Uważajmy tu nadto, że koła wzajemne odnoszące się do środka podobieństwa zewnę-

trznego, staną się dotykającemi w sposób jednakowy koła O i O', odnoszące się zaś do środka podobieństwa wewnętrznego, dotykają się tychże kół w sposób różny.

72. Na odwrót, każde koło styczne do dwóch kół jest jednem z kół wzajemnych tych dwóch kół przez wzgląd na środek podobieństwa zewnętrzny lub wewnętrzny, według tego jak dotknięcie tegoż koła, jest tegoż samego gatunku, lub nie, to jest że to koło styczne leży zewnątrz, obydwóch kół danych, lub je obydwa w sobie obejmuje; albo leży zewnątrz jednego z nich a drugie w sobie obejmuje. Ztąd też wypada, że dwa punkta dotknięcia i środek podobieństwa leżą na linii prostej. —

73. Każdy środek podobieństwa dwóch kół, jest środkiem radykalnym wszystkich kół wzajemnych odnoszących się do tegoż środka. (fig 30 aż do 33). Uważając trójkąty SAO i SA'O', tudzież trójkąty SCO i SC'O', mamy:

$$SA : SA' :: SO : SO'$$

$$SC : SC' :: SO : SO' \quad \text{a stąd}$$

$$SA : SA' :: SC : SC'$$

dalej, na mocy tego, że cztery punkta A, B, D', C', leżą na okręgu jednego koła, mamy:

$$SA : SB :: SD' : SC'$$

dla tejże samej przyczyny: mamy:

$$SC : SD :: SB' : SA' \quad \text{a stąd:}$$

$$SA \times SC' = SA' \times SC = SB \times SD' = SB' \times SD.;$$

to jest, długości stycznych ze środka S zewnętrznego, do kół wzajemnych poprowadzone są sobie równe; tudzież długości połówek cięciw najkrótszych przez środek S wewnętrzny poprowadzonych w tychże kołach wzajemnych są sobie równe; jest bowiem długość każdej takiej stycznej, (lub połówki najkrótszej cięciwy) liniją średnio-geometrycznie proporcyjonalną pomiędzy dwoma czynnikami każdego z tych iloczynów. Jeżeli zatem, ze środka S promieniem równym tejże stycznej (lub połówce najkrótszej cięciwy,) zatoczymy koło, to będzie radykalnem względem wszystkich kół wzajemnych, a tem samem środek podobieństwa S, leży na osi radykalnej każdych dwóch z tychże kół wziętych, a stąd jest, środkiem radykalnym trzech którychkolwiek bądź.–

Teoryja linij poprzecznych
(Transversales)

Dział 1y Linije poprzeczne uważane w trójkącie i w ogóle w figurach prostokreślnych.–

1o Rozumiemy w ogólności przez Teoryję linij poprzecznych, zbiór rozmaitych własności metrycznych, które nam układ linij dowolnych nastręcza, gdy te się z sobą według danego prawa przecinają.– Do tej teoryi należą już i w Geometryi elementarnej podane niektóre twierdzenia, np. linija równoległa do jednego boku trójkąta, dzieli dwa pozostałe boki na części proporcyjonalne, i na odwrót linija, która dzieli dwa boki trójkąta na części

proporcyjonalne jest równoległą do boku trzeciego
W kole przecinają się dwie cięciwy na części odwrotnie proporcyjonalne; dwie sieczne z punktu za kołem poprowadzone są odwrotnie proporcyjonalne do swych części za kołem będących; styczna jest średnio-geometrycznie proporcyjonalną pomiędzy sieczną i jéj częścią za kołem: tudzież odwrotnie tym twierdzenia.

W ciągu téj nauki, która obszerną bardzo gałęź Geometryi wyższéj zajmuje, podamy te tylko rzeczy, które najwięcéj mają zastosowania.

2. Twierdzenie 1e. Jeżeli trzy boki trójkąta (przedłużone jeżeli tego potrzeba) przetniemy poprzeczną prostą, wtedy na każdym z boku powstaną dwa ucinki takie, że iloczyn z trzech od siebie odłączonych, jest równy iloczynowi z trzech pozostałych, tj. w trójkącie ABC (fig. 34 i 35) poprowadziwszy poprzeczną $C'A'B'$ mamy:

$$AB' \times CA' \times BC' = A'B \times C'A \times B'C.$$

Na dowodzenie tego obierzmy punkt dowolny O i przez tenże poprowadźmy proste Oa' Ob' i Oc' równoległe z porządku do BC, CA, AB, wtedy na mocy tego, że:

$\Delta\ AB'C' \sim \Delta\ Ob'c'$ mamy $\frac{AB'}{C'A} = \frac{Ob'}{Oc'}$

$\Delta\ A'B'C \sim \Delta\ a'b'O$ mamy $\frac{CA'}{CB'} = \frac{Oa'}{Ob'}$

$\Delta\ A'BC' \sim \Delta\ Oa'c'$ mamy $\frac{BC''}{BA'} = \frac{Oc'}{Oa'}$

Złożywszy te proporcyje mamy:

$$\frac{AB' \times CA' \times BC'}{C'A \times CB' \times BA'} = \frac{Ob' \times Oa' \times Oc'}{Oc' \times Ob' \times Oa'} = 1. \text{ a stąd.}$$

$AB' \times CA' \times BC' = A'B \times C'A \times B'C$ c. b. d. o.

Związek ten można jeszcze w ten sposób bardzo dogodnie pisać i pamiętać:

$$\frac{AB'}{B'C} \times \frac{CA'}{A'B} \times \frac{BC'}{C'A} = 1.$$

3. Uwaga 1.a Prosta poprzeczna może przecinać dwa boki trójkąta, a trzeci na przedłużeniu, albo wszystkie trzy na przedłużeniach; stąd parzysta jest zawsze liczba punktów przecięć na samych bokach, nieparzysta zaś na przedłużeniach tychże boków. –

4. Uwaga 2.a Jeżeli poprzeczna $C'A'$ obracając się około punktu C', ciągle dalej przecinać będzie przedłużony bok BC w punkcie A', wtedy różnica pomiędzy temi dwoma coraz bardziej powiększającemi się linjami $A'B$ i $A'C$ ciągle będzie ta sama CB tak dalece, że gdy ta poprzeczna $C'A'$ stanie się równoległą do BC, wtedy punkt A' oddali się do nieskończoności i pozostaje tylko:

$$\frac{AB'}{B'C} = \frac{AC'}{C'B}.$$

czyli: $\frac{AB'}{B'C} \times \frac{C'B}{AC'} = 1$. stąd porównawszy to ze związkiem:

$$\frac{AB'}{B'C} \times \frac{CA'}{A'B} \times \frac{BC'}{C'A} = 1.$$

wypada, że w przypadku takim trzeba uważać: $CA' = A'B$. co znaczy że dwie linije nieskończenie długie, pomiędzy któremi różnica zachodzi stała, są pomiędzy sobą równe (tę uwagę zrobiliśmy już wyżej)

5. Uwaga 3.a Twierdzenie podane można rozciągnąć od trójkąta do wielokąta, (fig 36 i 37) dzieląc

tenże przez przekątne na trójkąty i tak np. w czworokącie $ABCD$ mamy:

$$\frac{AC'}{C'B} \times \frac{BD'}{D'C} \times \frac{CA'}{A'D} \times \frac{DB'}{B'A} = 1. \quad \ldots\ldots \quad (a)$$

gdyż poprowadziwszy przekątną $Aa C$ mamy

w trójkącie ABC .... $\frac{AC'}{C'B} \times \frac{BD'}{D'C} \times \frac{Ca}{aA} = 1.$

w trójkącie ADC .... $\frac{Aa}{aC} \times \frac{CA'}{A'D} \times \frac{DB'}{B'A} = 1.$

a stąd, złożywszy te dwa wypadki, otrzymamy równość (a)

Podobnież w pięciokącie $ABCDE$ mamy:

$$\frac{EB'}{B'A} \times \frac{AC'}{C'B} \times \frac{BD'}{D'C} \times \frac{CE'}{E'D} \times \frac{DA'}{A'E} = 1. \quad \ldots\ldots \quad (b)$$

gdyż poprowadziwszy przekątne EBm, ECn mamy: w trójkącie AEB .... $\frac{EB'}{B'A} \times \frac{AC'}{C'B} \times \frac{Bm}{mE} = 1.$,

w trójkącie BEC .... $\frac{Em}{mB} \times \frac{BD'}{D'C} \times \frac{Cn}{nE} = 1.$,

w trójkącie CED .... $\frac{En}{nC} \times \frac{CE'}{E'D} \times \frac{DA'}{A'E} = 1.$;

a stąd, złożywszy te trzy wypadki, otrzymamy równość (b), i tak dalej rozciągając do sześciokąta, otrzymamy w ogólności Twierdzenie następujące:

<u>Wielokąt przeciąwszy poprzeczną prostą, ta wyznaczy na bokach tego wielokąta /:przedłużonych jeżeli tego potrzeba:/ po dwa ucinki takie, że iloczyn z ucinków od siebie odłączonych, jest równy iloczynowi z ucinków pozostałych.</u>

Zapatrując się na związki (a) i (b), twórząc na figury, do których te należą, łatwo spostrzeżemy prawo tworzenia tych związków.

6. <u>Twierdzenie II</u> (odwrotne). <u>Jeżeli trzy punkta na kierunkach trzech boków trójkąta, są w ten spo-</u>

ób obrane, że iloczyn trzech ucinków od siebie oddaczonych, jest równy iloczynowi z trzech pozostałych, wtedy jeżeli punkta te nadto znajdują się na przedłużeniach boków w liczbie nieparzystéj, trzy te punkta leżą na jednéj linii prostéj.

Jakoż gdyby prosta $C'A'$ nie przechodziła i przez punkt B', wtedy dostatecznie przedłużona, przecięłaby bok AC w punkcie np. B''; a natenczas według przeszłego Twierdzenia, byłoby:

$$\frac{AC'}{C'B} \times \frac{BA'}{A'C} \times \frac{CB''}{B''A} = -1\ ;$$

a gdy z założenia jest:

$$\frac{AC'}{C'B} \times \frac{BA'}{A'C} \times \frac{CB'}{B'A} = 1\ ;$$

przeto:

$$\frac{CB''}{B''A} = \frac{CB'}{B'A} \quad \text{czyli} \quad \frac{CB''}{B''A + CB''} = \frac{CB'}{B'A + CB'} \quad \text{tj:} \quad \frac{CB''}{AC} = \frac{CB'}{AC} \quad \text{skąd:}$$

$CB'' = CB'$, co znaczy, że punkt B'' jest punktém B'; przechodzi przeto prosta $C'A'$ i przez punkt B' a tém samém trzy punkta C', A', B' leżą na jednéj linii prostéj (zob. fig. 38)

7. Twierdzenie III. Jeżeli przez jeden i tenże sam punkt wzięty na płaszczyźnie trójkąta poprowadziemy do każdego boku (: przedłużonego jeżeli tego potrzeba :) linję prostą, któraby przechodziła przez wierzchołek kąta temu bokowi przeciwnego; powstanie stąd sześć ucinków po dwa na każdym boku, takich, że iloczyn trzech pomiędzy nich nie mających żadnego końca spólnego, jest zawsze równy iloczynowi z trzech pozostałych. –

Jakoż uważając w trójkącie ACA' (fig. 39) poprzeczną BOB' natenczas mamy:

$$\frac{AB'}{B'C} \times \frac{CB}{BA'} \times \frac{A'O}{OA} = 1. ;$$

podobnie w trójkącie ABA' z powodu poprzecznej CC' mamy:

$$\frac{AC'}{B'C} \times \frac{BC}{CA'} \times \frac{A'O}{OA} = 1. ;$$

a stąd, dzieląc równość pierwszą przez drugą mamy:

$$\frac{AB'}{B'C} \times \frac{CA'}{A'B} \times \frac{BC'}{C'A} = 1$$

co właśnie było do okazania, to jest:

$$AB' \times CA' \times BC' = B'C \times CA' \times AC'$$

8. Uwaga 1ª Liczba spodków linij poprzecznych jest zawsze nieparzystą na samych bokach, parzystą zaś na przedłużeniach boków.

9. Uwaga 2ª Jeżeli jeden z boków poprzeczna przez O przechodząca dzieli na dwie równe części np. jeżeli $CA' = A'B$, (fig 40) wtedy pozostaje $AB' \times BC' = B'C \times C'A$ czyli: $AB' : B'C = AC' : C'B$., to jest prosta $C'B'$ jest wtedy równoległa do CB; i nawzajem jeżeli prosta $C'B'$ jest równoległa do CB, wtedy jest koniecznie $CA' = A'B$. – Ztąd wypływa następująca uwaga. –

10. Uwaga 3ª Jeżeli w trójkącie ABC (fig. 41) od wierzchołka A odetniemy na bokach AB i AC części proporcyonalne: AP, AQ, AR, AS, ... Ap, Aq, Ar, As, ... i z strona przeciwległemi wierzchołkami C i B punkta te S, R, Q, P, ... s, r, q, p, ... połączymy prostemi, wtedy punkta przecięć tych prostych t.j. punkta: m, n, u, v, leżą na jednej linii prostej AK, która też jest

chołek A ze środkiem boku BC (: odwrotne twierdzenie ma także miejsce :)

11. Jako szczególny przypadek prawdy w uwadze III-ej podanej jest następujące twierdzenie:
Jeżeli w trapezie poprowadzimy dwie przekątnie i nadto przedłużymy boki nierówno odległe aż do przecięcia się z sobą, wtedy prosta łącząca punkt ostatni z punktem przecięcia się dwóch przekątni dzieli dwa boki równoległe tego trapezu na części równe, to jest, w trapezie ABCD jest BP = PC tudzież AQ = QD (zob fig: 42)

12. Twierdzenie IV (: odwrotne :) W każdym trójkącie jeżeli na trzech jego bokach są położone trzy punkta w ten sposób, że albo każdy ze wspomnionych punktów znajduje się między końcami boku, albo też dwa z nich są na przedłużeniach dwóch boków, i nadto iloczyn z trzech ucinków na bokach położonych i od siebie odłączonych, jest równy iloczynowi z trzech pozostałych ucinków, wtedy trzy proste łączące każdy z tych punktów z wierzchołkiem przeciwległym trójkąta przecinają się w jednym punkcie. –

Jakoż w trójkącie ABC, (fig 39 i 40) jeżeli punkta: A', B', C' są w ten sposób położone, że:

$$\frac{AB'}{B'C} \times \frac{CA'}{A'B} \times \frac{BC'}{C'A} = 1.;$$

i nadto albo wszystkie trzy leżą pomiędzy końcami boków, albo dwa na przedłużeniach; wtedy proste AA', BB', CC' przecinają się w jednym punkcie O.

Albowiem jeżeli punktem przecięcia się prostych BB' i CC' jest O, a prosta AA' nieprzechodzi przez punkt O, wtedy prosta AO przetnie bok BC w punkcie A'' różnym od A', i wtedy na mocy przeszłego twierdzenia mamy:

$$\frac{AB'}{B'C} \times \frac{CA''}{A''B} \times \frac{BC'}{C'A} = 1. ;$$

a stąd zważając na założenie

$$\frac{CA''}{A''B} = \frac{CA'}{A'B} ;$$

co być nie może, gdyż jeżeli $CA'' > CA'$, wtedy jest na fig: $A''B < A'B$, prosta zatem AO przechodzi przez-punkt A', a tem samem trzy proste AA', BB' i CC', przecinają się w jednym punkcie O.

13° Uwaga co do Tw. III i IV. W szczególnym przypadku mogą proste AA', BB', CC', być od siebie równoległe, (fig 43) a wtedy punkt O przecięcia się tychże linij, jest w odległości nieskończenie wielkiej, tudzież na odwrót, punkta A', B', C' mogą w ten sposób być obrane, że proste AA', BB', CC' są od siebie równoległe. Równość ta:

$$\frac{AB'}{B'C} \times \frac{CA'}{A'B} \times \frac{BC'}{C'A} = 1.$$

ma jeszcze miejsce, o czem nawet wprost przekonać się można, gdyż na mocy tego, że BB' jest równoległą do AA', tudzież CC' do AA' mamy

$$\frac{AB'}{B'C} = \frac{BA'}{BC} \quad \text{czyli} \quad \frac{AB'}{B'C} \times \frac{BC}{A'B} = 1. ,$$

$$\frac{CA'}{CB} = \frac{C'A}{C'B} \quad \text{czyli} \quad \frac{CA'}{CB} \times \frac{BC'}{C'A} = 1. ;$$

a stąd przez złożenie

$$\frac{AB'}{B'C} \times \frac{CA'}{A'B} \times \frac{BC'}{C'A} = 1. \text{ jak być powinno.}$$

14° Twierdzenia poprzedzające, a szczególniej ostatnie, są źródłem bardzo wielu prawd geometrycznych, z których my tylko kilka najpotrzebniejszych podamy:

1º. Proste, które łączą środki boków trójkąta z wierzchołkami kątów przeciwległych, przecinają się w jednym punkcie. –

Jest bowiem oczywiście, fig 44, gdy

$$AB' = B'C\ ,\ CA' = A'B\ ,\ BC' = C'A$$

$$AB' \times CA' \times BC' = B'C \times A'B \times C'A \quad \text{(zob Tw IV)}.$$

15º; 2º. Trzy wysokości trójkąta przecinają się w jednym punkcie. –

Uważając bowiem, że trójkąt ABB' podobny do ACC' (fig. 45 i 46) trójkąt BCC' podobny do BAA', trójkąt CAA' podobny do CBB' mamy

$$\frac{AB'}{AC'} = \frac{AB}{AC}\ ,$$
$$\frac{BC'}{A'B} = \frac{BC}{AB}\ ,$$
$$\frac{A'C}{CB'} = \frac{AC}{BC}\ ;$$

skąd

$$\frac{AB'}{AC'} \times \frac{BC'}{A'B} \times \frac{A'C}{CB'} = \frac{AB}{AC} \times \frac{BC}{AB} \times \frac{AC}{BC}\ ,\ \text{czyli}$$

$$\frac{AB'}{AC'} \times \frac{BC'}{A'B} \times \frac{A'C}{CB'} = 1.$$

a stąd na mocy Tw. IV trzy prostopadłe AA', BB' i CC' przecinają się w jednym punkcie O. –

Uwaga. Punkt ten O przypada wewnątrz trójkąta, gdy trójkąt jest ostrokątny, zewnątrz gdy trójkąt jest rozwartokątny, schodzi się z wierzchołkiem kąta prostego w trójkącie prostokątnym. –

16º Prawda pod l. 15. podana służy do przekonania się zarazem, że trzy prostopadłe ze środków boków trójkąta wyprowadzone, przecinają się w jednym punkcie, gdyż prostopadłe te są wysokościami trójkąta $A'B'C'$, które boki łączą spodki tych trzech prostopadłych (zobacz fig 47 i 48).

17^o, 3^o Trzy linije dzielące kąty trójkąta na dwie równe części, przecinają się w jednym punkcie.

Jest bowiem według twierdzenia wiadomego:

$$\frac{BA}{AC} = \frac{BA'}{A'C} \;;\; \frac{BC}{AB} = \frac{CB'}{B'A} \;;\; \frac{AC}{BC} = \frac{AC'}{C'B} \;;$$

a stąd przez złożenie:

$$\frac{BA'}{A'C} \times \frac{CB'}{B'A} \times \frac{AC'}{C'B} = 1.$$

co dowodzi na mocy Twierdzenia IV, że trzy proste AA', BB', CC' dzielące na połówki kąty trójkąta, przecinają się w jednym punkcie. (zob. fig. 49).

18^o, 4^o Trzy linije łączące wierzchołki trójkąta i punkta w których kierunki boków przeciwnych dotykają się jednego i tego samego koła, przecinają się w jednym punkcie. To ma miejsce dla koła wpisanego, jakoteż dla koła przypisanego, jest bowiem (fig. 50)

$$Ad = Af, \quad Bf = Be, \quad Ce = Cd, \text{ a stąd}$$

$$dA \cdot fB \cdot eC = Af \cdot Be \cdot Cd \,;$$

co dowodzi wysłowioną własność dla koła wpisanego. Podobnie gdy $AD = AF$, $BF = BE$, $CE = CD$, mamy

$$DA \times BF \times CE = AF \times BE \times CD.$$

a stąd własność ta ma jeszcze miejsce i w kole przypisanem.–

19^o O osiach podobieństwa trzech wielokątów i o tychże osiach dla trzech kół.

5^o Trzy wielokąty wprost podobne, uważając po parze, mają trzy środki podobieństwa zewnętrzne: te trzy środki leżą na jednéj linii prostéj, i ta linija zowie się osią podobieństwa trzech wielokątów zewnętrzną. Tudzież z trzech wielokątów podobnych, jeżeli jedna tylko para jest wprost podobnych, a tem samém trzeci z pierwszym i drugim dają wielokąty w odwrócony sposób podobne, wtedy dwa środki podobieństwa wewnętrzne z trzecim zewnętrznym, leżą na jednéj linii prostéj; ta linija zowie się osią podobieństwa wewnętrzną. (zob fig 51).

To samo ma jeszcze miéjsce dla trzech kół, te mają cztery osie podobieństwa; jedną zewnętrzną a trzy wewnętrzne; to się znaczy, że jeżeli do trzech kół danych, dobierzemy trzy środki podobieństwa zewnętrzne i trzy wewnętrzne, wtedy trzy zewnętrzne leżą na jednéj linii prostéj, tudzież każde dwa wewnętrzne z trzecim zewnętrznym leżą na jednéj linii prostéj. – O tém ażebyśmy się przekonali uważajmy trzy wielokąty: ABCD, A'B'C'D', A"B"C"D", z których każda z trzech par jest wprost do siebie podobną i naznaczmy środek podobieństwa S", dwóch wielokątów (A) i (A'), S' dwóch wielokątów (A) i (A"), S, dwóch (A') i (A") natenczas mówię że te trzy punkta S, S' i S" leżą na jednéj linii prostéj, uważając bowiem te trzy punkta położone na kierunkach trzech boków trójkąta AA'A" mamy:

$$\frac{AS''}{S''A'} = \frac{AD}{A'D'} \; ; \; \frac{A'S}{SA''} = \frac{A'D'}{A''D''} \; ; \; \frac{A''S'}{S'A} = \frac{A''D''}{AD} .- ;$$

a stąd przez złożenie:

$$\frac{AS''}{S''A'} \times \frac{A'S}{SA''} \times \frac{A''S'}{S'A} = 1.$$

co dowodzi na mocy Tw. II że te trzy punkta S'', S i S leżą na jednéj linii prostéj. –

Podobnie gdy dwa wielokąty (A) i (A') są wprost podobne, a (A) i (A'') tudzież (A') i (A'') w sposób odwrócony, wtedy trzy punkta S'', s', s leżą na jednéj linii prostéj – Dowodzenie to samo co wyżéj, pisząc na S' i S głoski małe s' i s. – (fig 51 i 52).

Co do trzech kół, których środki są O, O', O'', a promienie R, R', R'', mamy z trójkąta $OO'O''$ na którego kierunkach boków leżą punkta S'', S', S, –

$$\frac{OS''}{O'S''} = \frac{R}{R'} \; ; \; \frac{O'S}{SO''} = \frac{R'}{R''} \; ; \; \frac{O''S'}{S'O} = \frac{R''}{R}$$

a stąd przez złożenie.

$$\frac{OS''}{O'S''} \times \frac{O'S}{SO''} \times \frac{O''S'}{S'O} = 1.$$

co dowodzi że trzy punkta S'' S i S' leżą na jednéj prostéj. –

Podobne jest dowodzenie dla z kolei punktów:

S, s', s''

s, S', s''

s, s', S'' .... (zobacz fig 53.)

<u>Uwaga ogólna.</u> We wszystkich przytoczeniach Twierdzenia IV trzeba było na ten warunek zważać, aby albo wszystkie trzy punkta znajdowały się między końcami boków, albo jeden z nich, a dwa na przedłużeniach; podobnie w przytoczeniu Twierdzenia II. trzeba zważać na ten warunek iżby albo

Arkusz 7.

dwa punkta leżały na bokach trójkąta, a trzeci na przedłużeniu, albo wszystkie trzy na przedłużeniach.

21. Twierdzenie V. W każdym czworoboku zupełnym (quadrilatère complet) dwa punkta przecięcia dwóch jego przekątni z przekątnią trzecią, są harmonicznie sprzężone z końcami tej trzeciej przekątni; tj: w czworokącie zupełnym ABCFDE (fig 54) okażemy, że dwie przekątne AC i DB przedłużone aż do przecięcia się z przedłużoną przekątną trzecią FE w punktach K i I dzielą ją harmonicznie, czyli okażemy, że:

$$EK : KF :: EI : IF.$$

Na okazanie tego uważam trzy następujące trójkąty:

1° trójkąt DEF i poprzeczną ACK z którego wypada:

$$EK \times FA \times DC = KF \times AD \times CE$$

2° trójkąt AEF i poprzeczną IBD z którego wypada:

$$AD \times FI \times EB = DF \times IE \times BA$$

3° trójkąt AED i poprzeczną BCF z którego wypada:

$$EC \times DF \times AB = CD \times FA \times BE.$$

Przemnożywszy te trzy równości stronami otrzymamy ze strony pierwszej iloczyn złożony z dziewięciu czynników, równy iloczynowi z dziewięciu także czynników stron drugich, a wykreśliwszy siedem czynników spólnych obydwom stronom otrzymamy:

$$EK \times FI = KF \times IE. \quad \text{czyli}$$

$$EK : KF :: EI : IF \quad \text{co było do okazania.}$$

Podobnie uważając trzy z kolei trójkąty ABC, ACF i ABF i do nich należące poprzeczne EKF, BCD i ECD otrzymamy:

$$AG : GC = AK : KC$$

Podobnie znowu uważając trzy z kolei trójkąty BDF, ABD i ABF, i do nich należące poprzeczne ACK, IEF i ECD, otrzymamy:

$$BG : GD = BI : ID.$$

O wiązkach harmonicznych.

22. Jeżeli trójkąt EAF (fig. 55) pozostaje ten sam, a poprzeczna IBCD obracać będziemy około punktu I, okaże się wtedy, lubo punkta B, D i C zmieniać będą swoje położenie, punkt jednak K będzie ciągle ten sam; to jest, że położenie punktu C, w założeniu tém że punkta B i D nie schodzą z kierunków linij AE i AF, nie zejdzie z linii AK; jakoż z proporcyi harmonicznej

$$IE : IF = EK : KF$$ wypada:

$$IE + IF : IE = EK + KF : EK,$$ czyli:

$$IE + IF : IE = EF : EK$$

w téj proporcyi, ponieważ trzy pierwsze wyrazy ciągle są też same, będzie też i czwarty EK ciągle ten sam, co znaczy, że wszystkie czworokąty zupełne mające spólny wierzchołek A i spólną przekątnię EF, będą miały swą przekątnię AC ciągle w kierunku linii AK, a stąd na każdéj poprzecznéj przez punkt I przechodzącéj, wyznaczone zostana przez przecięcie się jéj z linijami AE, AK, AF, punkta harmonicznie z sobą sprzężone; co większa że jeżeli do jakiegokolwiek kierunku IBGD poprowadzimy równoległą liniję, to i na niéj, połączywszy punkta A i I prostą, wyznaczone zostaną cztery punkta I', B', G', D' harmoniczny podział tworzące; a stąd cztery proste IA, EA, KA, i FA posiadają tę własność, iż przecięte prostą dowolnie, wyznaczają na niéj podział harmoniczny.- Cztéry takowe proste tworzą wiązkę harmoniczną, a każde dwie z nich trzecią oddzielone, są sprzężone względem kąta pomiędzy dwiema pozostałemi zawartego.- Cztery te linije nadto zowią się promieniami wiązki harmonicznéj.-

23. Nie tylko czworokąt nastręcza nam wiązki harmoniczne, natrafić takowe można w Geometryi początkowéj, mianowicie w tem Twierdzeniu: W Trójkącie prosta dzieląca kąt na dwie równe części, przecina bok przeciwległy na dwa ucinki zbieżne proporcyjonalne bokom im przeciwległym, prosta zaś dzieląca kąt zewnętrzny na dwie równe części wyznacza na boku przeciwległym dwa ucinki odciążne proporcyjonalne tymże bokom.- tj. w trójkącie ABC (figura 56) linije AI i IK dzieląc kąty BAC i BAD na dwie równe części, dają dwie następujące proporcyje:

$$BI : IC :: BA : CA,$$

$$BK : CK :: BA : CA;$$

a stąd $$BI : IC :: BK : CK.$$

tj. punkta K i I są harmonicznie sprzężone, z punktami B i C, cztery przeto proste AK, AB, AI i AC tworzą wiązkę harmoniczną.-

Gdy prosta KA jest prostopadłą do AI natenczas widzimy, że skoro jedna z linij do wiązki harmonicznej należąca, dzieli kąt pomiędzy dwiema sprzężonemi na dwie równe części, wtedy ta linija do swej sprzężonej jest prostopadłą, i nawzajem, skoro dwie sprzężone czynią z sobą kąt prosty, wtedy jedna z nich dzieli kąt zawarty pomiędzy dwiema pozostałemi na dwie równe części.-

24. Skoro BI na figurze 57 uczynimy równe IC, czyli podzielimy bok trójkąta na dwie równe części, wtedy i BK powinno być na mocy tej proporcyi:

$$BI : IC :: BK : CK$$

równe K, co inaczej być nie może tylko punkt K musi być w odległości nieskończenie wielkiej, Dwie bowiem linije BK i CK pomiędzy któremi zachodzi ciągle różnica stała BC, nie mogą być równe sobie jak tylko wtedy gdy są nieskończenie długie, jest zatem w takim przypadku linija AK równoległa do CB a stąd prosta łącząca środek podstawy z wierzchołkiem trójkąta i przez tenże wierzchołek równoległa linija do podstawy poprowadzona są dwiema sprzężonemi względem kąta zawartego pomiędzy dwoma bokami tego Trójkąta, tak dalece że te cztery proste tworzą wiązkę harmoniczną.

25. Ta prawda podaje sposób dobrania czwartej linii, któraby z trzema przez jeden punkt przechodzącemi, czyniła wiązkę harmoniczną; i tak, jeżeli idzie o dobranie czwartej linii do trzech AB, AI, AC, (figura 58) obierzmy na tej, do której szukamy sprzężoną, punkt dowolny I i przez ten poprowadźmy prostą BIC, tak aby punkt I był na środku tej linii, wtedy prosta AH równoległa do BIC będzie żądaną. – Jest zatem wiązka harmoniczna daną, skoro dane nam są trzy proste do niej należące.

W końcu wspomnijmy, że przedłużywszy proste wiązkę harmoniczną składające, i nazwawszy z kolei linije dane przez 1, 2, 3, 4 (figura 59) i ich przedłużenia p_1, p_2, p_3, p_4, łatwo poznamy, że w tym układzie czterech linij znajduje się <u>ośm</u> wiązek harmonicznych, jakoto:

$(1, 2, 3, 4)$, $(2, 3, 4, p_1)$, $(3, 4, p_1, p_2)$, $(4, p_1, p_2, p_3)$.

(p_1, p_2, p_3, p_4), $(p_2, p_3, p_4, 1)$, $(p_3, p_4, 1, 2)$, $(p_4, 1, 2, 3)$. –

co łatwo następnie okazać można; dobrawszy przy pomocy linii cd, równoległej do Ab i części de = ad tudzież prostej bce prostą 4 wiązkę harmoniczną z danemi 1, 2, 3. tworzącą, poprowadźmy przez punkt e prostą eg równoległą do Ab, wtedy mówię, że eg = ef; uważajmy że Ab = eg, jako boki przeciwległe w równoległoboku, nadto trójkąt Acb. jest podobny do trójkąta cef, to jest, jest w nim Ab = ef; stąd gdy: Ab = eg, i Ab = ef, jest też eg = ef, co było do okazania. –

To samo można okazać o następnych wiązkach, jak się to okazuje z wykreślenia na wiązce (3, 4, p_1, p_2).

26. O punktach biegunowych i o prostych biegunowych.-

Jeżeli przez punkt P dowolnie obrany na płaszczyźnie kąta XOY, poprowadzimy wiązkę linij prostych PA, PB, PC, PD, przecinających ramiona tego kąta w punktach: A i a, B i b, C i c, D i d i punkta te połączymy na krzyż A z b, a B z a; C z b, a B z c; D z c a C z d, wtedy punkta przecięcia się prostych Ab z Ba, Cb z Bc, Dc z Cd to jest punkta p, q, r, ... leżą na jednej linii prostej przechodzącej przez punkt O wierzchołek tego kąta XOY. O czem łatwo się przekonać można, uważając linje Aa, Bb, Cc, Dd za przekątne coraz innych czworokątów zupełnych, których wierzchołki p, q, r, skoro te przekątne zbiegają się w jeden punkt P, nie mogą zejść z linii Ow.-

Połączywszy znowu punkt O z punktem P liniją prostą, cztery te proste, PO i Ow, OX i OY tworzą wiązkę harmoniczną, a stąd też, sama linija Ow ciągle pozostanie, gdziekolwiek inny punkt P obierzemy, byle tylko na kierunku linii prostej O.P.-

Własność odwrócona ma także miejsce, to jest jeżeli pomiędzy ramionami kąta XOY, obierzemy punkt dowolny p i przez tenże poprowadzimy dowolną liczbę linij prostych Apa, Bpb, Cpc, Dpd, ... tudzież poprowadzimy proste Ab, Ba, Bc, Cb, natenczas punkta przecięcia się każdych takich dwóch linij, przypadać będą na jednej linii prostej przechodzącej przez wierzchołek O, to jest punkta P, Q, R, ... będą zamierzczone na linii OP. – Linija ta OP będzie ciągle także samą dla każdego innego punktu p' obranego na kierunku linii Ow.

Punkt P (na figurze 60) zowie się biegunem linii prostej Op, która zowie się znowu prostą biegunową względem tego punktu P należącą do kąta XOY. Podobnie na figurze 61. punkt p jest biegunem względem linii biegunowej OP odnoszącej się do tegoż samego kąta XOY.

Cztery linije OP i Ow tudzież OX i OY tworzą wiązkę harmoniczną; a stąd po danii wyobrażenia biegunów (pole) i linij biegunowych (polaire) mamy następujące Twierdzenie:

W każdej wiązce harmonicznej punkt dowolnie na kierunku jednego jéj promienia obrany, ma za linije biegunową promień drugi z nim sprzężony; czyli każdy punkt jednego promienia jest biegunem promienia z nim sprzężonego.

27. Twierdzenie VI. Jeżeli dwa trójkąty są w ten sposób położone, że przez ich wierzchołki poprowadzone trzy linije proste przecinają się w jednym punkcie, wtedy trzy punkta przecięcia-

boków odpowiednich, leżą na jednéj linii prostéj; – i tak, jeżeli dwa trójkąty ABC i DEF (fig. 62) są tak względem siebie położone, że trzy proste AD, BE, CF przecinają się w jednym punkcie O, wtedy okażę, że trzy punkta G, I, K, prze-cięcia się z kolei boków BC z EF, AC z DF, AB z DE, leżą na jednéj linii prostéj. – Na okazanie tego uważam z kolei trójkąty OAB, OBC, OCA i do nich należące poprzeczne KDE, GEF, IDF; z tychże wypływa:

$$OE . BK . AD = EB . KA . DO$$

$$EB . GC . FO = OE . BG . CF$$

$$FC . IA . DO = OF . CI . AD$$

a stąd przez rozmnożenie i wyrzucenie czynników wspólnych:

$$BK . GC . IA = KA . BG . CI$$

a według Tw. II odnosząc je do trójkąta ABC, dowodzi, że trzy punkta: G, I, K leżą na linii prostéj. –

Twierdzenie odwrócone ma także miejsce; to jest: Jeżeli dwa trójkąty podobne są tak położone, że trzy punkta przecięcia boków odpowiednich są na jednéj linii prostéj, wtedy trzy proste, które wierzchołki odpowiednie z sobą łączą, zbiegają się w jeden punkt. –

Twierdzenie znowu: Jeżeli trójkąt ABC jest wpisany w trójkąt DEF tak, iż trzy linije AD, BE, CF, przecinają się w jednym punkcie O, wtedy trzy punkta GIK przecięcia się boków przeciwległych, leżą na jednéj linii prostéj; jest tylko szczególnym przypadkiem wyżéj podanego Twierdzenia VI (zob. fig. 63). –

Dział II^{gi} O poprzecznych uważanych w kole, o sześciokącie Paskala i twierdzeniu Brianszona.

28. – Jeżeli po jednéj stronie środka koła na kierunku jednego i tegoż samego promienia OA obierzemy dwa punkta P i Q tak, że prostokąt zbudowany na ich odległościach od środka koła; jest równoważny kwa-

dratowi z promienia, wtedy dwa takie punkta zowią się sprzężone z sobą przez wzgląd na promień OA; (zob. fig. 64)

Z samego opisania punktów sprzężonych P i Q przez wzgląd na promień OA wynika, że jeden z tych punktów leży wewnątrz koła (O) a drugi zewnątrz tegoż koła. - Nadto jeżeli punkt wewnętrzny P zbliża się do środka O, łatwo pojmujemy, że punkt zewnętrzny Q od tego środka O oddalać się musi, tak dalece, że gdy punkt P zleje się z punktem O, punkt Q odsunie się do odległości nieskończenie wielkiej; jeżeli punkt P zbliża się do punktu A, wtedy punkt Q zbliża się do punkta A; a gdy punkt P zleje się z punktem A, koniecznie i punkt Q zleje się z punktem A, a stąd: wszelki punkt okręgu koła jest sam dla siebie swoim punktem sprzężonym, a punkt sprzężony z środkiem koła jest w odległości nieskończenie wielkiej, - czyli innemi wyrazy, środek koła nie ma z sobą punktu sprzężonego. -

Jeżeli przez jeden z dwóch punktów sprzężonych P lub Q, poprowadzimy prostopadłą PM. lub QN do promienia OA, na którym się te dwa punkta P i Q znajdują, wtedy prostopadła ta zowie się linją biegunową (polarną) względem pozostałego punktu sprzężonego; i tak, prostopadła MM' jest polarną względem punktu Q a prostopadła NN' jest polarną względem punktu P. -

Punkta te P i Q nawzajem są biegunami (pôles) prostych NN' i MM' przez wzgląd na koło, którego środek jest O a promień OA.

29. Twierdzenie VII Jeżeli przez punkt zewnątrz koła obrany poprowadzimy dwie styczne, wtedy cięciwa, punkta dotknięcia łącząca jest polarną tegoż punktu i nawzajem punkt przecięcia się dwóch stycznych do koła poprowadzonych jest biegunem cięciwy dotknięcia.

Jakoż w trójkącie QMO prostokątnym przy M mamy:

$$OA : OM :: OM : OP \text{, a stąd, gdy } OA = OM;$$

$$OQ : OA :: OA : OP, \text{ czyli } \overline{OA}^2 = OQ \cdot OP,$$

co dowodzi według samego opisania, że punkta P i Q są sprzężone przez wzgląd na promień OA; a stąd że linija MM' jest polarną względem punktu Q; punkt ten zaś Q jest nawzajem biegunem cięciwy MM' punkta dotknięcia łączącej; (zob. fig. 64.)

Ztąd wypada, że: wszelka sieczna w kole, ma za swój biegun punkt przecięcia dwóch stycznych do tegoż koła przez te punkta poprowadzonych, w których sieczna ta koło to przecina.

30. Twierdzenie VIII^e Dwa punkta sprzężone P i Q tworzą z końcami średnicy tegoż koła do którego należą, podział harmoniczny. -

Jakoż gdy: $OP : OA :: OA : OQ$, przeto:

$$OA - OP : OA + OP = OQ - OA : OQ + OA, \text{ czyli } AP : PB :: AQ : QB$$

co dowodzi założonego twierdzenia. -

Uwaga. Wielu podają za opisanie punktów sprzężonych własność w tem twierdzeniu podaną. -

31. Twierdzenie IX^e Odległość każdego punktu M okręgu koła od dwóch punktów P i Q sprzężonych jest w stosunku stałym, to jest w stosunku AP : AQ, czyli okażę że: $MP : MQ :: PA : QA$. -

W rzeczy samej, gdy cztery punkta Q, A, P, B, tworzą podział harmoniczny (l. 30) cztery linije MQ, MA, MP, MB. tworzą wiązkę harmoniczną, a gdy nadto promień tej wiązki AM z promieniem MB tworzą kąt prosty, kąt bowiem w półkolu jest prostym, a zatem promień AM dzieli kąt QMP na dwie równe części - i podobnie promień MB dzieli kąt PMB na dwie równe części; a stąd:

$MQ : MP :: QA : PA$ .. - co było do okazania (zob. fig. 65.)

Uwaga Stosunek QA : PA zastąpić można przez stosunek QB do PB (po równ. l. 23.). -

32. Twierdzenie X^e Wszelka cięciwa MN przechodząca przez biegun

P. podzieloną jest harmonicznie przez tenże biegun P i linije polarną jego QL, — (zob. fig. 66 i 67.)

Jakoż z proporcyi (l. 31.) MP : MQ :: NP : NQ, która wypada z tych dwóch proporcyj MP : MQ = AP : AQ ; NP : NQ = AP : AQ wynika, że prosta QP dzieli kąt MQN zawarty pomiędzy linijami QM i QN (lub też kąt przyległy kątowi MQN) na dwie równe części; a stąd (l. 23) QP jest prostopadłym promieniem do swego sprzężonego przez wzgląd na kąt MQN; a tém samém tenże promień sprzężony jest to linija QL polarna względem punktu P; a gdy cztery linije PQ, QM, QL, QN tworzą wiązkę harmoniczną, więc też znajdują się na linii MN cztery punkta P, M, L, N, harmonicznie położone; — co było do okazania. —

33. Twierdzenie XI. Miejscem geometrycznem biegunów linii prostych przez jeden punkt przechodzących jest linija polarna tegoż punktu, i nawzajem, polarna każdego punktu linii prostéj przechodzi przez biegun téj linii prostéj. —

Jakoż niechaj dwoma punktami sprzężonemi będą punkta P i Q na kierunku promienia OA, (fig. 68, 69 i 70.) wtedy $OP.OQ = \overline{OA}^2$. — Przez punkt niechaj przechodzi prosta dowolna PP′, oddalona o linije OP′ od środka O koła i do tegoż punktu P′ dobranym sprzężonym punktem niechaj będzie Q′, wtedy podobnie mamy $OP' \times OQ' = \overline{OA}^2$, a stąd $OP.OQ = OP'.OQ'$ czyli $OP : OP' = OQ' : OQ$; co znaczy gdy kąt Q′OQ jest wspólny, że trójkąt OPP′ jest podobny do OQ′Q; a gdy kąt P′ jest prostym jest też kąt Q także prostym; to jest prosta Q′Q jest polarną względem punktu P, a nawzajem punkt P jest biegunem prostéj QQ′. — Ztąd wypada że:
Ilekolwiek linij prostych przechodzi przez jeden punkt P, tych wszystkich bieguny leżą na linii prostéj QL polarnéj punktu P, i nawzajem, wszystkich punktów na jednéj linii prostéj umieszczonych polarne przechadzą ciągle przez jeden i tenże sam punkt, który jest bie-

gunem téjże prostéj. - Tę prawdę można w wielu znaleźć następnie wystowioną: Jeżeli przez jeden i tenże sam punkt P poprowadzimy tyle prostych, ile nam się podoba, i przez każde dwa punkta, w których każda z tychże prostych przecina koło, poprowadzimy one styczne do tegoż koła, aż do przecięcia się z sobą, wtedy punkta te przecięcia par tych stycznych, znajdują się na linii prostéj. - (zob. fig. 71 i 72). -

34. Twierdzenie XII W każdym czworokącie ABCD w koło wpisanym, punkt I przecięcia się dwóch jego przekątnych AC i BD i punkta przecięcia się P i Q, boków jego przeciwległych AB i CD tudzież AD i BC wyznaczają trójkąt IPQ taki, że każdy jego wierzchołek jest biegunem boku przeciwległego. -

Jakoż proste PQ, PA, PI, PC, tworzą wiązkę harmoniczną (l. 21 i 22.), a stąd proste AD i BC są harmonicznie podzielone, pierwsza w punktach A i E a druga w punktach C i F. - Stąd wynika, że punkta E i F należą do polarnéj punktu Q, jest nią przeto prosta PI na któréj leżą te punkta E i F. - Dla podobnéj przyczyny prosta QI jest polarną punktu P. - Co się zaś tyczy prostéj PQ, jéj biegun znajdować się powinien i na polarnéj punktu P i na polarnéj punktu Q, a tém samém jest wspólném przecięciu się I polarnych QI i PI (por. tw. XI. zob. fig 73.)

35. Twierdzenie XIII W każdym sześciokącie w koło wpisanym, (nazwawszy z kolei jego boki przez bok pierwszy, drugi, trzeci, czwarty, piąty, szósty) trzy punkta przecięcia, w których się przecinają bok pierwszy z czwartym, drugi z piątym trzeci z szóstym, leżą na jednéj linii prostéj. - to jest w sześciokącie ABCDEF (fig 73) punkta G, I, K przecięcia się z kolei boków AB z DE, BC z EF, CD z FA leżą na jednéj linii prostéj. -

Na okazanie tego przedłużmy aż do przecięcia się z sobą AB z CD w punkcie L, CD z EF w punkcie M i EF z BA w punkcie N, i uważajmy z pomocy własności siecznych mamy:

$$LA . LB = LC . LD,$$

$$MC . MD = ME . MF,$$

$$NE . NF = NA . NB. -$$

uważając teraz w trójkącie LMN z kolei linije poprzeczne AG, EI, CK, mamy:

$$LA . NF . MG = AN . FM . GL,$$

$$NE . MD . LI = EM . DL . IN,$$

$$MC . LB . NK = CL . BN . KM;$$

Mnożąc stronami te trzy równości, i zważając na trzy powyższe równości po wyrzuceniu iloczynów dwóch czynników równych, mamy:

$$MG . LI . NK = GL . IN . KM.$$

co dowodzi (Tw. II), że trzy punkta G, I, K leżą na jednej linii prostej. -

36. - Uwaga. Twierdzenie to nosi nazwisko Sześciokąta Paskala inaczej Hexogrammum mysticum, może i dla tego, że najpiękniejszy daje nam przykład rozciągłości prawd geometrycznych; nie służy ono bowiem tylko dla sześciokąta wypukłego, ale i dla każdego w jakikolwiek bądź sposób wklęstego, którego by wierzchołkiem były też same sześć punktów okręgu koła danego. -

Takich sześciokątów może być 60, a mianowicie jeden wypukły, dziewięć takich do każdego z których należą cztery coraz inne boki wypukłego i dwie przekątne; dwadzieścia takich do każdego z których należą trzy boki wypukłego i trzy przekątne; piętnaście takich do każdego z których należą dwa boki wypukłego i cztery przekątne; dwanaście takich z których każdy składa się z jednego tylko boku należącego do wypukłego i z pięciu przekątnych; a w końcu trzy takich, które są z samych tylko przekątni złożone. - (Te sześciokąty są tutaj na tablicy przyłączonej wykreślone, zob. fig. 78.). -

Każdy z tych sześciokątów posiada własność w Twierdzeniu XIII podaną, a zatem otrzymać możemy: 60 układów różnych trzech punktowych takich, że każdego układu trzy punkta, leżą na jednej linii prostej. To jednak nie powinno nas przywieść do tego błędnego mniemania, aby było 180 punktów przecięć różnych, gdyż przez sześć punktów na okręgu koła obranych nie można poprowadzić, jak tylko 15 linij prostych, to jest sześć boków sześciokąta wypukłego i dziewięć jego przekątni (zob. fig. 78.) przez dwa końce każdej z tych 15 linij, przechodzą z nich jeszcze ośm linij, a stąd ta linija nie przecina jak tylko jeszcze sześć linij, a zatem punktów przecięcia na pozór byłoby $6.15=90$; lecz że każdy z punktów przecięć należy do dwóch razem linij, stąd punktów przecięć właściwie jest tylko $\frac{90}{2}$ to jest 45. Te więc 45 punktów posiadają tę własność, że w nich znajduje się 60 układów po trzy punkta na linijach prostych leżące. –

37. Uwaga II. Można teraz przypuścić że jeden, dwa, lub trzy boki tego sześciokąta wypukłego przedłużone na obydwie strony (posuwając się równolegle względem pierwszego swego położenia) zamieniają się na linije styczne do koła, a stąd wypadają następujące wnioski, w których widzimy podobne własności (z niejaką tylko odmianą) dla pięciokąta, czworokąta i trójkąta.

W każdym pięciokącie w koło wpisanym, dwa punkta przecięcia się dwóch par jego boków od siebie trzecim oddalonych i punkt przecięcia się boku piątego ze styczną do koła, przez wierzchołek temuż piątemu bokowi przeciwległy poprowadzoną, leżą na jednej linii prostej.
W każdym czworokącie w koło wpisanym, dwa punkta przecięcia się boków przeciwległych i każdy z dwóch punktów, w których się styczne przez wierzchołki przeciwległe poprowadzone przecinają, leżą na jednej linii prostej. – Tu przeto mamy 4 punkta na jednej linii prostej położone.

(zob. fig 74).

W każdym trójkącie w koło wpisanym, trzy punkta przecięcia się boków ze stycznemi, przez przeciwległe tymże bokom wierzchołki poprowadzonemi, leżą na jednej linii prostéj (zob. fig 75.).

38. Uwaga 3a. Co do czworokąta w koło wpisanego można tu jeszcze i następującą własność odczytać.—

W każdym czworokącie w koło wpisanym punkt przecięcia się dwóch boków przeciwległych i dwa punkta przecięcia się stycznych przez końce jednego z tych boków poprowadzonych z dwiema pozostałemi stycznemi, leżą na jednéj linii prostéj. – (fig 76)

Tego twierdzenia łatwo każdy dojdzie uważając na to, że trojaki czworokąt tylko w koło może być wpisany. –

39. Twierdzenie XIV W każdym ~~czworo~~ sześcio kącie na kole opisanym, trzy przekątne łączące wierzchołki przeciwległe, przecinają się w jednym punkcie. to jest w sześciokącie PQRSTU (fig 77) opisanym na kole, trzy przekątne PS, QT, RU przecinają się w jednym punkcie O. Na pokazanie tego połączmy punkta dotknięcia linijami prostemi, te wyrażą sześciokąt ABCDEF w koło wpisany, w którym na mocy Tw. XIII trzy punkta G, I, K przecięcia się boków jego przeciwległych, leżą na jednéj linii prostéj. –

Boki sześciokąta wpisanego, mają na mocy Tw. VII zaodpowiedne sobie bieguny, wierzchołki sześciokąta na kole opisanego, tak że, punkt U jest biegunem linii AB, P linii BC, Q linii CD, R linii DE, S linii EF, a T linii FA.

Stąd zaraz wypada na mocy Tw. XI, że gdy punktu Q polarną jest linija CD, a punktu T polarną jest linija FA, biegunem linii QT jest punkt G przecięcia się polarnych CD i FA; dla téj samej przyczyny jest punkt I biegunem przekątni RU, punkt K biegunem przekątni PS, a że te trzy punkta G, I, K, leżą na jednéj linii prostéj, trzy proste (ich polarne) zatem AT, RU, PS przecinają się w jednym punkcie O, a to na mocy wniosku Tw. XI.

40. Twierdzenie to jest Brianszona (Brianchon); można je rozciągnąć do pięciokąta, czworokąta i trójkąta zwracając na to uwagę, że gdy jeden z boków sześciokąta wpisanego zamienia się na styczną do okręgu koła, — wierzchołek kąta opisanego czyli wspartego na tymże boku przypada na punkt dotknięcia, a dwa ramiona tego kąta opisanego zlewają się z kierunkiem téjże stycznéj; stąd:

W każdym pięciokącie opisanym na kole, dwie przekątne łączące dwie pary wierzchołków od siebie oddzielonych i linija prosta przechodząca przez wierzchołek pozostały i punkt dotknięcia się boku przeciwległego, przecinają się w jednym punkcie. (zob. fig. 79.)

W każdym czworokącie na kole opisanym, dwie jego przekątne i którakolwiek prosta punkta dotknięcia przeciwległe łącząca, przecinają się w jednym punkcie. Tutaj są zatem cztery linije przechodzące przez jeden punkt (zob. fig. 80.)

W każdym trójkącie na kole opisanym, trzy proste łączące punkta dotknięcia z wierzchołkami przeciwległemi, przecinają się w jednym punkcie (zob. fig. 81.) To było już i wyżéj jako wniosek przy Tw. IV. —

41. W końcu odczytać tu można dla czworokąta opisanego na kole i następującą własność: —

W każdym czworokącie opisanym na kole, przekątna jedna i dwie proste łączące punkta dotknięcia dwóch boków do jednego z końców téj przypierających z dwoma pozostałemi wierzchołkami tego czworokąta, przecinają się w jednym punkcie. (zob. fig. 82.)

Zastosowanie teoryi linij poprzecznych do rozwiązania rozmaitych zadań na gruncie i w rysunku.-

42. Zadanie 1º.) Przez punkt dany na gruncie poprowadzić, czyli tykami wytknąć, liniję prostopadłą do linii prostéj, która tylko w swoich końcach jest dostępna.-

Rozwiązanie. Punkt dany jest A, (zob. fig 81.), a prostą daną jest BC, do której końców B i C można tylko dostąpić, lecz po niéj, to jest w kierunku BC nie można się z węgielnicą posuwać, a to z powodu bagien, wód itd.- (a może i prowadzony z A promień oczny prostopadły do BC znajduje jakąś przeszkodę np. budynek, drzewo wielkie itd.) w takim przypadku wytknij proste BA i CA, z C prowadź prostopadłą CC' do AB z B prostopadłą znowu BB' do AC, naznacz punkt O na przecięciu się dwóch prostych CC' i BB' a ten połączony z A wyda prostopadłą szukaną.- Rozwiązanie to opiera się na własności trójkąta, znanéj z teoryi linii poprzecznych, że trzy wysokości trójkąta przecinają się w jednym punkcie.- Ztąd gdy O jest przecięciem się dwóch wysokości CC' i BB' przeto ten punkt należy i do trzeciéj wysokości tego trójkąta, a tem samem wytknięta linija AO ma kierunek prostopadły do BC.-

43. Zadanie 2º.) Przez punkt dany poprowadzić prostą równoległą do linii danéj nie używając na papierze jak tylko samego linijału, a na gruncie samych tylko tyk.-

Na danéj prostéj XY (fig 84.) weźmy z kolei trzy punkta A, B, D w ten sposób, że AB = BD (części te równe skoro ich miary nie potrzebujemy, mogą być na papierze za pomocą linijału lub paska papieru w jedną i drugą stronę od punktu B odcięte, a na gruncie przy pomocy jednéj i téjże saméj żerdzi naznaczone, przenosząc tę samę żerdź i w jedną i w drugą stronę od punktu B po 10 np. razy); poprowadźmy teraz prostą ACE, z punktu E dowolnie na niej obranego poprowadźmy EB i ED, poprowadźmy nadto DC i naznaczmy punkt przecięcia prostej DC i BE poprowadźmy w końcu AF i naznaczmy punkt przecięcia G prostej AF z CD; a wtenczas przez C i G poprowadzona prosta będzie szukaną. – Rozwiązanie to opiera się na własności Trapeza, wspomnionej pod l. 11. o linijach poprzecznych, przy końcu Tw. 3º. –

44. Zadanie 3º Podzielić daną liniję prostą na dwie równe części. – (przy tychże samych warunkach co w zadaniu 2º.)

Prostą daną co do długości, niechaj będzie prosta AD, dla podzielenia jéj na dwie równe części poprowadźmy (fig 84) przez punkt C dowolny, sposobem w Zad. 2. podanym prostą CG równoległą do AD; przez końce A i D poprowadźmy proste dowolne AE i DE przecinające się w punkcie E, i równoległą GC w punktach C i G; poprowadźmy nadto AG, DC i naznaczmy punkt przecięcia się tych linij w F; poprowadźmy w końcu EF, a ta przedłużona przetnie nam AD w punkcie B na dwie równe części. Przyczyna ta sama co w zadaniu drugiem.

45. Zadanie 4º Daną prostą podzielić na ilekolwiek bądź części równych (np. na pięć.) – (fig. 85.).

Prostą daną niechaj będzie prosta AB, poprowadźmy przez A prostą dowolną i na niej odetnijmy Ap = pq = qr = rs = st poprowadźmy przez to Bt, Bs, Br, Bq, Bp, i podzielmy Bt sposobem w Zadaniu 3º wskazanym, na dwie równe części w punkcie K; poprowadźmy AK, naznaczmy punkta przecięcia się t, u, w, v, prostej AK z prostemi Bp, Bq, Br, Bs. a natenczas poprowadziwszy bt, bu, bw, bv, proste te przedłużone aż do przecięcia z AB w punktach P, Q, R, S wyznaczą na niej części AP, PQ, QR, RS, SB równe pomiędzy sobą. – Rozwiązanie to opiera się na własności pod l. 10 podanej (Tw 3º Uwaga IIIª). Co-do ścisłości wykonania dodam tę uwagę, iż wypadki będą najpewniejsze, gdy posiłkowa prosta Ab wypadnie prawie równa lub mało co różna od AB prostéj danéj. –

46. Zadanie 5. Do końców prostéj danéj i do punktu, czyto między jéj końcami danego, czyteż na jéj przedłużeniu, wyznaczyć punkt czwarty, któryby z punktem danym był harmonicznie sprzężony. –

Zadanie to rozwiązuje nam własność czworokąta zupełnego (Tw V) odnoszące się co do jego przekątni, a tak chcąc:

1º) do końców prostéj EF i punktu K (fig 86) pomiędzy E i F położonego, dobrać podział harmoniczny. – Obierzmy punkt A dowolny za prostą EF; poprowadźmy AE, AK, AF; przez punkt C dowolnie na AK obrany poprowadźmy FC i EC aż do przecięcia się z AE i AF w punktach B i D; przedłużmy nakoniec DB aż do przecięcia się z EF w punkcie I, a punkt ten będzie żądany. –

2º) do końców prostéj EF i punktu I (fig 86) na przedłużeniu téj prostéj położonego, dobrać podział harmoniczny. –

Obierzmy punkt A dowolny za prostą EF; poprowadźmy AE i AF i dowolną prostą przez I np. IBD; poprowadźmy nadto FB i ED i naznaczmy punkt C przecięcia; połączmy nakoniec AC i przedłużmy aż do przecięcia się z EF w punkcie K, natenczas punkt ten będzie szukany. –

47. Zadanie 6º. Przez punkt dany A poprowadzić prostą, któraby przeszła przez punkt P przecięcia się dwóch prostych BP i CP w założeniu tém, że proste te BP i CP przecinają się za granicą rysunku. Na rozwiązanie tego zadania poprowadźmy (fig 87) proste BAC i DAE przecinające proste BP i CP w punktach B i C, D i E; poprowadźmy nadto proste EB i CD aż do przecięcia się z sobą w F; przez F poprowadźmy prostą FGI; daléj proste DI, CG przecinające się z sobą

w K; a wtedy prosta AK będzie żądaną. — Rozwiązanie to opiera się na własności punktów biegunowych i linij biegunowych, podanej w uwadze ostatniej do Tw. V. —

48. Żądanie 7.e Zmierzyć odległość, której jeden koniec jest niedostępny (zakłada się tutaj, że grunt jest wszędzie prawie płaski.)

Rozwiązanie 1.e) Niech koniec X będzie niedostępny, przy odległości szukanej EX, — Dla znalezienia tej odległości obierzmy na przedłużeniu prostej EX punkt dowolny D, dalej dwa punkta A i C z D w jednej prostej leżące. — Niech punkt B będzie przecięciem się prostych AX i CE, wtedy na mocy Tw. I uważając trójkąt CDE i do niego należącą poprzeczną ABX, mamy:

$$EX \times DA \times CB = XD \times AC \times BE.$$

czyli gdy $XD = DE + EX$.

jest $$EX \times DA \times CB = DE \times AC \times BE \pm EX \times AC \times BE.$$

a stąd $$EX = \frac{DE \times AC \times BE}{DA \times CB - AC \times BE}.$$

Odmierzywszy zatem na gruncie pięć odległości DE, AC, BE, DA, CB, otrzymamy przez rachunek odległość EX. (fig 89.)

Przykład. — Dajmy że $DE = 100^{pręt.}$ $AC = 75^{pr.}$ $BE = 60^{pr.}$, $DA = 118,75^{pr.}$ a $CB = 80^{pr.}$; będzie:

$$EX = \frac{100.75.60}{118,75.80 - 75.60} = \frac{450000}{9500 - 4500} = \frac{4500}{50} = 90^{pręt.}$$

49. Rozwiązanie 2.e) Rozwiązanie to, które podam opiera się na własności przekątni czworokąta zupełnego. (Tw. V). Niechaj I będzie punktem niedostępnym (fig. 90) odległości szukanej EI, wtedy obierzmy naprzód dwa punkta dowolne B i A w jednej linii prostej z E położone; naznaczmy trzeci punkt dowolny D na linii prostej IB; punkt F przecięcia się prostych IE i AD; punkt C przecięcia się prostych BF i ED; w końcu punkt K przecięcia się prostych AC i IF; a zmierzywszy proste EK i KF otrzymamy EI, następnie:

$EI : IF = EK : KF$, skąd

$EI : IF - EI = EK : KF - EK$, czyli na mocy tegoż:

$IF - EI = EF$ mamy

$$EI = \frac{EF \cdot EK}{KF - EK}$$

Przykład Dajmy, że $KF = 120^{pr.}$, $EK = 70^{pr.}$ wtedy: $EF = 120 + 70 = 190^{pr.}$ a tem samem:

$$EI = \frac{190 \times 70}{120 - 70} = \frac{13300}{50} = 266^{prt.}$$

50. Rozwiązanie to drugie ma tę dogodność, że i wtedy użytem być może, gdy koniec niedostępny I (fig 91.) jest nadto niewidzialny z drugiego końca E prostej EI, której długość szukamy; w takim przypadku nie mierząc żadnej linii utkwić należy trzy punkta E, K, F z I harmoniczny podział tworzące, a to następnie; obierają się dowolnie dwa punkta E i F na kierunku jednej prostej z I; daléj punkt A dowolny i wytykają się proste FA i EA; przez punkt I prowadzi się dowolna prosta IBD i téj naznaczają się punkta przecięcia B i D z kierunkami EA i FA; wytykają się daléj proste BF i ED i naznacza się tych dwóch kierunków punkt przecięcia C; w końcu wytknięta prosta AC aż do przecięcia się z IEF w punkcie K, wydaje punkt K sprzężony harmonicznie z I względem końców prostéj EF. — Naznacza się teraz punkt C′ przecięcia się kierunków E′F i AK; punkt F′ przecięcia się kierunków EC′ i AF; w końcu punkt K′ przecięcia się kierunków E′F′ i AC′. — Mierząc E′K′ i F′K′ otrzymamy tak jak wyżéj pod l. 8.

$$E'F = \frac{E'F' \times E'K'}{K'F' - E'K'}$$

51. Zadanie to (l. 7) rozwiązuje nam jeszcze i dwa następujące zadania:

Zadanie 8° Przez punkt dany D poprowadzić równoległą do AB, do któréj końców A i B przystąpić nie można. —

wtedy naznacza się punkt C (fig. 92) dowolny na kierunku AD; wytyka się prosta CB i dochodzi się długości boków CA i CB sposobem w l. 7, 8 lub 9 podanym; mierząc w końcu DC otrzymamy CE z proporcyi następnej:

$$CA : CB = CD : CE \text{ czyli } CE = \frac{CB.\,CD}{CA.}$$

przeniósłszy na grunt obrachowane CE otrzymamy punkt E, który z D prostą złączony, wyda linię szukaną.

52. Zadanie 9^e^ Zmierzyć odległość AB w obydwóch końcach niedostępną. –

Obiera się punkt C (fig 93) dowolny, wyznaczają się CA i CB którymkolwiek sposobem w zadaniu 7. podanym; przez punkt D dowolnie na kierunku AC obrany, prowadzi się równoległą DE do AB sposobem w zadaniu 8^me^ podanym, a w końcu odmierzywszy DE i mając wiadome z działania odległości AC i CD, otrzymamy AB z proporcyi następnej:

$$AB : CA = DE : CD \text{ stąd}$$

$$AB = \frac{CA \times DE}{CD.}\text{.} -$$

Zadanie 10^e^. – Przedłużyć daną prostą za natrafioną przeszkodę.

Rozwiązanie 1^e^) Idzie o przedłużenie prostej AB (fig 94) w stronę natrafionej przeszkody M; w tym celu biorą się dwa punkta A i B tej prostej dowolnie i punkt trzeci C za tąż prostą; daléj punkt D na kierunku CA i punkt E na kierunku CB. – Odmierzywszy po wyznaczeniu tych punktów odległości CA, AD, DE, EB i BC rachuje się na mocy l. 7.

$$Ex = \frac{DE \times AC \times BE}{DA \times CB - AC \times BE}$$

i otrzymane z rachunku przenosi się na grunt, a wtedy punkt x będzie na kierunku prostéj AB. – Drugi raz powtórzywszy podobne działanie, otrzymamy punkt nowy x' na kierunku prostéj

AB a stąd i prostą XX' na przedłużeniu prostéj AB. – Dla sprawdzenia można i trzeci punkt podobnie X'' wyznaczyć, który jeżeli działanie na gruncie dobrze wykonano, powinien przypaść na kierunku XX' (na fig. nie kreślono działań dla wynajdywania punktów X' i X'', a to dla tego, iżby figura nie zdawała się być zawiłą. –)

<u>Rozwiązanie 2°</u> Opiera się na własności biegunów (zobacz uwagę ostatnią do Tw V.).

B i E (fig 95) są dwoma punktami prostéj, którą przedłużyć trzeba za natrafioną przeszkodą M. – Weź punkt P dowolny i nadto dwa punkta C i D na kierunkach PE i PB; wytknij ED i BC i naznacz punkt A przecięcia się tych dwóch prostych; poprowadź PD i naznacz jéj punkt przecięcia się K z PA; poprowadź CK i naznacz punkt G przecięcia się kierunku CK z PBD; poprowadź PG i naznacz punkt F przecięcia się tegoż kierunku PG z kierunkiem CD. – Punkt F jest szukanym; można podobnie F' i F'' wyznaczyć. –

<u>Rozwiązanie 3°.</u> – opiera się na wspomnianym szczególnym przypadku Tw. VI. –

Niechaj prostéj, którą przedłużyć mamy, dwoma punktami będą punkta A i F (fig. 96), w celu przedłużenia téjże za natrafioną przeszkodę M., obierz dwa punkta B i C dowolne, jednakże nie na kierunku prostéj FA położone, i wytknij trójkąt ABC; poprowadź FB, FC i przedłuż je nieco poza wierzchołki aż do przecięcia się z AC w punkcie I; poprowadź przez punkt C i dowolny punkt D na kierunku FI położony prostą CD, i tę przedłuż aż do przecięcia się z AB w punkcie K; poprowadź DK i naznacz ... prostéj z prostą FC punkt przecięcia O; poprowadź BO a punkt E przecięcia się kierunku BO z CD będzie na przedłużeniu linii prostéj FA; podobnie poprowadź FH.

i wyznacz punkt przecięcia linij BE z liniją KI, to jest naznacz punkt punkt G, a wtedy i ten punkt będzie z FA w linii prostéj.- Linija zatem EG jest przedłużeniem linii prostéj FA.-

Zadania o kreśleniu kół stycznych

53. Zamiast wyrażenia tego „okrąg koła ma przechodzić przez pewien punkt" użyjemy (jak to zrobił Förstemann) wyrażenia „okrąg koła ma się dotykać tego punktu".- Według tego, ogólnych zadań o styczności kół można podać dziesięć następujących.-
Idzie o nakreślenie koła, któreby się dotykało:
1º. trzech punktów danych,
2º. trzech prostych danych,
3º. dwóch punktów i jednéj prostéj,
4º. jednego punktu i dwóch prostych,
5º. dwóch prostych i danego koła,
6º. jednego punktu, jednéj prostéj i jednego koła,
7º. jednéj prostéj i dwóch kół,
8º. dwóch punktów i jednego koła
9º. jednego punktu i dwóch kół,
10º. trzech kół.-
Te dziesięć zadań rozwiązywał już Apollonius z Pergy w Pamfilyi, około 200 lat przed N. I. Chr. pod nazwiskiem zadań περὶ ἐπαφῶν.- Dzieło to jego zaginęło, a my tyle tylko wiemy, ile treści tegoż umieścił Pappus, w swych zbiorach matematycznych.- W nowszych czasach wielu według téj treści chciało dzieło to Apolloniusza przywrócić, pomiędzy innemi i Vieta w swojem dziele Apollonius Gallus, Fermat, Newton, Euler, Fuss...-

także nad tém pracowali.–

Zebrał szczątki dzieła Apolloniusza, Camerer i wydał je pod tytułem Apollonii de tactionibus quae supersunt, ed: I.G. Camerer-Gothae 1795.– W tym wieku, a szczególniéj w ostatnich dwóch dziesiątkach lat, Matematycy francuzcy najdogodniéj zadania te rozwiązali, a szczególniéj ostatnie, które dawniéj przechodziło granice Geometryi Elementarnéj; wspomnieć należy tutaj prace w tym względzie P.P. Monge, Carnot, Dupuis, Lancret, Dupin, Hachette Cauchy, Gaultier, Poisson, Français, Gergonne, I Binet, Poncelet,... tudzież niemców P.P. Neumanna, i Steinera,– W końcu ktoby zechciał mieć obszerniéjszą wiadomość, znajdzie ją w rozmaitych miejscach pism: Annales des Mathematiques p. Gergonne,– w Correspondance i w Journal de l'ecole Polytechnique, tudzież w Crella Journal der reinen und angewandten Mathematik.– Praca Neumana jest umieszczoną w Izydzie Okena na r. 1826 w IV i V poszycie; Poncelet'a w dziele jego pod tytułem Traité des propr. project. des figures 1822. Znaleźć także można tę rzecz w dziełach Geometryi elementarnéj świeżo wydanych a mianowicie w geometryi Bergerego, Vincent (Ed II) Crella, Forstemanna, Terquema.–

54. Zadanie 1° Nakreślić okrąg koła, któryby się dotykał trzech punktów danych, tojest: któryby przechodził przez 3 punkta dane. Rozwiązanie tego zadania jest wiadome z początków Geometryi, polega ono na téj własności, że miejscem geometrycznem punktów, z którychby każdy z osobna był równoaddalony od dwóch punktów danych, jest linija prosta, prostopadła do linii łączącéj dwa punkta dane i przez środek téj ostatniéj linii przechodząca. Zadanie to ma jedną tylko odpowiedź (fig. 97).–

55. Zadanie 2° Nakreślić koło, któreby się dotykało trzech prostych

danych. –

Rozwiązanie. Niechaj proste dane będą MN, PQ i RS. (fig. 98), przecinające się w punktach A, B i C. – Kół szukanych może być cztery, jedno wpisane w trójkąt ABC a trzy przypisane do tegoż trójkąta, jedno w kącie A, drugie w kącie B a trzecie w kącie C. – Dla wynalezienia koła wpisanego w trójkąt, trzeba jak wiadomo z początków Geometryi, podzielić kąty A i B na dwie równe części, wtedy punkt przecięcia się dwóch linij kąty te na połówki dzielących, jest środkiem koła szukanego; promieniem zaś tego koła, jest prostopadła z środka wynalezionego do którychkolwiek bądź z boków poprowadzona; łatwo o tem przekonać się można z przystawania trójkątów Afs i Aes, tudzież Bfs i Bds. – Dla wynalezienia jednego z kół przypisanych w kącie np. A, trzeba podzielić kąt A na dwie równe części, tudzież jeden z kątów zewnętrznych B lub C. np. B na dwie równe części. – Punkt przecięcia się tych dwóch linij jest środkiem koła szukanego, którego promień jest długość prostopadłej z tego punktu na bok BC lub przedłużony bok AB poprowadzonej; o tem podobnie przekonamy się z przystawania trójkątów AFS i AES. tudzież BFS i BDS. –

Uwaga. Ma zatem zadanie podane cztery w ogóle odpowiedzi, których liczba redukuje się do dwóch, jeżeli z prostych danych dwie np. MN i PQ są od siebie równoległe; nie będzie zaś żadnej odpowiedzi, czyli innemi wyrazy zadanie jest niepodobnem do rozwiązania, jeżeli wszystkie trzy proste dane, są od siebie równoległe.

56. Zadanie 3e Nakreślić koło, któreby się dotykało dwóch punktów i jednej prostej. – to jest, Nakreślić koło, któreby przechodząc przez dwa punkta dane, było stycznem do prostej danej. –

Jeżeli dwa punkta dane są w ten sposób względem tej prostej danej położone, że jeden z nich po jednej a drugi po drugiej stronie tej prostej się znajduje, wtedy zadanie to jest niepodobném do rozwiązania; równie jest ono niepodobnem, gdyby dwa punkta dane znajdowały się zarazem na prostej danej. –

Jeżeli jeden z punktów danych np A (fig 100) znajduje się na prostej danej MN, wtedy punkt A jest zarazem punktem dotknięcia okręgu koła szukanego z prostą daną MN, środek zatem koła szukanego znajduje się na prostopadłej AL do MN, na której jeżeli znajduje się punkt drugi dany B, wtedy podzieliwszy odległość AB na połówkę w punkcie S, znajdziemy środek S i promień SA koła szukanego; jeżeli zaś prostopadła AL (fig 101.) minija punkt B, wtedy punkt B połączyć trzeba prostą z punktem A, prostą tę podzielić na dwie równe części w punkcie N', a prostopadła przez N' do AB poprowadzona wyznacza przez przecięcie się z liniją AL, środek S i promień SA koła szukanego; w tych przypadkach zawsze jest jedna tylko odpowiedź na zadanie.

Podobnie jedną tylko odpowiedź otrzymamy, gdy dwa punkta A i B (fig 102) dane połączone prostą, wydają liniję AB. równoległą do MN; wtedy przez środek N linii AB poprowadzona prostopadła wyznacza na prostej MN punkt dotknięcia C, a koło według zadania I przez punkta A. B, C poprowadzone, jest kołem szukaném. –

W końcu jeżeli punkta A i B (fig 103) po jednej stronie linii danej MN położone, wydają prostą AB przecinającą liniję MN w punkcie D, wtedy wyznaczymy przez poszukanie średnio-geometrycznie proporcyjonalnéj wielkości pomiędzy BD i AD odległości punktu dotknięcia koła szukanego od punktu D; tę odległością niechaj będzie DC, wtedy odcinamy na prostéj MN od punktu D raz w jedną stronę DC=DC drugi raz w drugą stronę DC'=DC otrzymamy dwa koła, jedno ABC, a drugie ABC' na odpowiedź; ma zatem zadanie podane w tym przypadku dwie odpowiedzi.—

O dobroci tego ostatniego rozwiązania, łatwo się przekonywamy na téj zasadzie, że jeżeli z punktu za kołem wychodzi sieczna i styczna, wtedy odległość punktu dotknięcia stycznej od tegoż punktu za kołem danego, jest liniją średnio-geometrycznie proporcyjonalną pomiędzy całą sieczną i jéj częścią za kołem.—

[Drugie rozwiązanie przez kreślenie czworokąta podobnego czworokątowi, którego czterema wierzchołkami, są: środek koła szukanego, jeden z punktów danych i punkt, w którym prostopadła do AB i przez jéj środek przechodząca, przecina prostą MN daną, zobacz w dziele Förstemanna Lehrbuch der Geometrie r. 1827 T.I. §. 340.]

57. Zadanie 4te Nakreślić koło, któreby się dotykało punktu danego i dwóch prostych danych.—tj. nakreślić koło, któreby przechodząc przez punkt dany było zarazem styczne do dwóch prostych danych.—

Dwie dane proste mogą się z sobą przecinać, albo mogą być od siebie równoodległe.—

1º Dwie dane proste MN i PQ (fig 104) przecinają się z sobą w punkcie O.; wtedy, jeżeli punkt dany A znajduje się na wspólnem przecięciu się O. dwóch danych prostych MN i PQ nie masz żadnéj odpowiedzi, bo koło szukane wtenczas, jest właściwie tylko punktem tymże O, czyli A; jeżeli punkt dany A znajduje się na prostéj ROS kąt dany NOQ na połówkę dzielącéj, wtedy poprowadziwszy przez A prostopadłą do ROS, otrzymamy na mocy zadania 2º dwa koła na odpowiedź, jedno wpisane w trójkąt OBC.—

równoramienny, a drugie przypisane do tegoż trójkąta w kącie O; pierwszego na fig. środkiem jest punkt s, drugiego jest S; rozwiązanie to polega na tem, że <u>miejscem geometrycznem środków kół stycznych do MN i PQ jest linija ROS dzieląca kąt NOQ na dwie równe części</u>; jeżeli jest punkt dany A (fig 105) w kącie NOS lub SOQ, wtedy z punktu A trzeba na ROS poprowadzić prostopadłą Am i tę przedłużyć tak, aby mB było równe mA, a wtedy według zadania 3° koła nakreślone tak, aby przechodziły przez punkta A i B; tudzież były styczne do prostéj PQ są żądane; przekonanie się o tem jest łatwe w końcu jeżeli punkt dany A (fig 106) jest na jednéj z prostych danych np. na PQ, wtedy z punktu A trzeba poprowadzić prostopadłą aż do przecięcia z prostą ROS i będzie koło szukane miało swój środek w punkcie S, a promień SA; gdy jednak możemy tutaj ramię OQ uważać znowu jako należące do kąta MOQ, przeto dzieląc kąt ten prostą S'OR' na dwie równe części i przedłużywszy prostopadłą SA aż do przecięcia się z S'OR' w punkcie S', otrzymamy drugie koło na odpowiedź, którego środek jest S' a promień S'A. - Wyjąwszy zatem ten przypadek, gdy punkt dany znajduje się na wspólnem przecięciu dwóch prostych danych, zawsze zadanie to nastręcza dwie odpowiedzi. -

II° Dwie dane proste MN i PQ są od siebie równoległe. -

Wtedy zważając że prosta ROS (na poprzedzających figurach) zamienia się na prostą RS równoodległą od MN i PQ i od tychże prostych równooddaloną, widziemy że i tutaj każdy z przypadków powyżéj wyrażonych przywodzi się albo do zadania 2° albo do Zadania 3°, mając wzgląd w rozwiązywaniu Zad 2° lub 3° na ten warunek, że proste MN i PQ są od siebie równoodległe; będą tu także ciągle dwie odpowiedzi, wyjąwszy ostatni przypadek, w którym jedna tylko będzie odpowiedź. – Objaśniają to figury 107, 108, 109. –

58. Zadanie 5e Nakreślić koło styczne do dwóch prostych danych i koła danego. –

Na rozwiązanie tego zadania, przez środek O koła danego (fig 110) poprowadźmy średnice FOF' i GOG' odpowiednio prostopadłe do linij AB i CD; przez punkta F i F' poprowadźmy proste MFM' i M''F'M''' równoległe do AB, tudzież przez punkta G i G' linije MGM'' i M'G'M''' równoległe do CD, linije te przez przecięcie się, tworzą kwadrat ukośny MM'M''M''' opisany na danem kole. – Połączmy punkt m przecięcia się dwóch prostych AB i CD z wierzchołkami tego kwadratu ukośnego, linijami prostemi mM, mM', mM'' i mM''', a proste te dostatecznie przedłużone przetną koło dane z kolei w punktach a i b, a' i b'; a'' i b'', a''' i b''', które będą punktami dotknięcia kół szukanych; skąd wypada, że w ogóle odpowiedzi mamy osim. –

Dla wynalezienia środków tychże kół uważajmy, że gdy te znajdować się powinny na dwóch linijach dzielących kąty DmB i DmA na dwie równe części (jak to na figurze jest wyrażone tylko co do kąta DmB gdzie linija mns dzieli tenże kąt na dwie połówki.), i na promieniach koła O przez wynalezione punkta dotknięcia przechodzących (jak to na fig. na promieniach Oa, Ob, Oa'', Ob''.) przeto są na wspólnych przecięciach się tychże promieni z temiż dwoma prostemi (jak to na fig. w punktach O, O', O'', O'''.) Mając zaś środki i punkta dotknięcia się z kołem danem, mamy tem samem już i koła żądane. –

Dla przekonania się, że koło np. O jest żądanem, uważajmy, że ono z wykreślenia, jest styczne zewnątrz z danem kołem o, a tem samem punkt dotknięcia a jest środkiem podobieństwa wewnętrznym dwóch kół O i o, przez niego przeto przechodzić musi każda prosta, łącząca dwa punkta podobnie położone względem tych kół O i o, a że punkt M jest z wykreślenia punktem przecięcia się dwóch stycznych FM i GM do koła O, a zatem wynika stąd że proste mD i mB równoległe do GM i MF są także styczne do koła o, jeżeli okażemy, że punkt m względem koła o jest podobnie położony, jak punkt M względem koła O. – Na okazanie tego, uważajmy, że z przystawania trójkątów FOM i GOM wypada, że linija OM dzieli kąt FMG na dwie równe części, a że ten kąt jest równy kątowi DmB i ma ramiona równoległe do ramion tegoż kąta, przeto linija Mo jest równoległą do prostej ms, która także kąt DmB dzieli także na dwie równe części; skąd wypada, że trójkąt mao jest podobny do trójkąta OaM, a stąd:

$$Oa : Oa = Ma : ma. –$$

co dowodzi że punkt m względem koła o jest odpowiedni punktowi M względem koła O, a tem samem linije mD i mB są styczne do tegoż koła o. Podobnież można prowadzić rozumowanie co do koła o' z tą tylko różnicą że tutaj punkt b jest środkiem podobieństwa zewnętrznym dwóch kół O i o'. – Toż samo rozumieć należy co do kół o'' i o''' tudzież kół dotykających się w a' i b' jako też w a'' i b''. –

Uwaga. W rozmaitych przypadkach, liczba odpowiedzi może być mniejszą od ośmiu; rozbieranie tychże przypadków zostawiam pilności czytelnika, wspomnę tylko, że gdy jedna z danych prostych jest styczną do koła danego, dwa wtedy koła na odpowiedź wynikające zlewają się w jedno koło. – Przypadki szczególne, które czytelnik rozbierać powinien, są następujące: punkt m może być zewnątrz koła danego o położony; jedna z prostych danych może być styczną do koła danego a druga nie; lub obydwie mogą być styczne do koła danego; itd. linije dane mogą być także od siebie równoległe, a wtedy i wykreślenie będzie łatwiejsze, a czasem i zadanie niepodobne do rozwiązania

59. <u>Zadanie 6°</u> Nakreślić koło styczne z punktem, z prostą i z kołem danem; to jest nakreślić koło, któreby przechodząc przez punkt dany, było styczne i do prostéj danéj i do koła danego. –

Na rozwiązanie tego zadania poprowadźmy w kole danem średnicę FOG prostopadłą do danéj prostéj MN i przez trzy punkta G, H i dany punkt A, przesuńmy okrąg koła; połączmy punkt F z punktem A, a prosta ta przetnie koło GHA w punkcie D tak, że koła styczne O i O' do prostéj MN i przechodzące przez punkta A i B są żądane (zad 3). – Zadanie to ma w ogóle <u>cztery</u> odpowiedzi, jedne dwa koła są styczne zewnątrz, jak to na fig. 111. drugie zaś dwa styczne wewnątrz, jak to na fig 112. – Dla przekonania się o tém, uważajmy, że gdy z punktu F wychodzą dwie sieczne FGH i FDA w kole HGA mamy:

$$FH \times FG = FA \times FB. \text{ i podobnie w kole } ABC \text{ mamy:}$$

$$FC \times FS = FA \times FB, \text{ skąd}$$

$$FH \times FG = FC \times FS \quad \text{czyli} \quad FH : FC = FS : FG.$$

co dowodzi, że dla wspólnego kąta przy F (bo: $\angle HFC$ ten sam co GFS.) trójkąty FHC i FGs są podobne, a stąd gdy kąt FHC z wykreślenia jest prosty, jest i kąt FsG także kątem prostym; skoro zaś kąt ten wpiera się ramionami swemi na końcach FG średnicy w kole O, wierzchołek przeto jego leży na okręgu tegoż koła O. Połączmy teraz punkt E z punktem s, to wtedy ponieważ kąty FsG i ESC jako proste są sobie równe i mają ramiona Fs i SC w kierunku jednéj linii prostéj, trzy punkta G, s, E są także na jednéj linii prostéj, a stąd dwa trójkąty FsG i EsC są podobne a z podobieństwa wypada. –

$$FG : EC = Gs : sE$$

czyli podzieliwszy dwa pierwsze wyrazy przez 2

$$OG : EO = Gs : sE.$$

kąt nadto $FGs = CEs$, przeto dwa trójkąty OGs i sEO są także podobne, a stąd kąt $OsG = EsO$ czyli skoro punkta G, s, E są na jednéj linii prostéj, i punkta O, s, o są także na jednéj linii prostéj, co dowodzi, że koło O jest

stycznem do koła O; skoro bowiem punkt wspólny dwom kołom znajduje się na linii łączącej środki, koła dwa takie stykają się z sobą. –
Podobnież dowodzi się co do kół O' O'' i O'''. –
Przypadki szczególne są tutaj następujące: kiedy prosta dana przecina koło dane a punkt jest dany zewnątrz tegoż koła, wtedy na odpowiedź otrzymujemy dwa tylko koła styczne zewnątrz do danego koła; kiedy prosta dana przecina dane koło, a punkt dany znajduje się wewnątrz tegoż koła, wtedy na odpowiedź otrzymujemy także tylko dwa koła, ale tylko wewnątrz; w końcu zadanie jest niepodobne, gdyby prosta dana była zewnątrz danego koła, a punkt dany znajdował się wewnątrz tegoż koła itd. –

60. Zadanie 7: Nakreślić koło styczne do dwóch kół danych i prostej danej –

Równolegle do prostej danej MN (fig 113) poprowadźmy w odległości równej promieniowi koła mniejszego linię prostą M'N', ze środka O koła większego nakreślmy koło promieniem równym różnicy promieni dwóch kół danych (lub summy) poprowadźmy według zadania poprzedzającego, koło styczne do prostej M'N', koła przybranego Om'' i przechodzące przez środek O' koła mniejszego, a koło współśrodkowe z tymże kołem O zakreślone promieniem Ox różnicy (lub summy) pomiędzy promieniem koła przybranego a koła z danych mniejszego jest żądanem kołem. – Przekonanie się o tem jest bardzo łatwe. – Zagadnienie to ma w ogóle ośm odpowiedzi, bo dla równoległej M'N' możemy otrzymać cztery odpowiedzi, jak się to okazało w zadaniu poprzedzającem, a prowadząc drugą linię M''N'' z drugiej strony prostej danej MN położoną równolegle do tejże i w odległości równej promieniowi koła z danych mniejszego, otrzymamy podobnie drugie cztery odpowiedzi.

91. Zadanie 8e Nakreślić koło, któreby było styczne do koła danego i do dwóch punktów danych; to jest nakreślić koło, któreby przechodząc przez dwa punkta dane, dotykało się koła danego.—
Ażeby zadanie to było podobnem do rozwiązania, potrzeba, ażeby obydwa punkta dane były zewnątrz koła danego, albo obydwa wewnątrz przyczyna tego jest jasna.—
Jeżeli teraz dane koło jest O. (fig 114) a punkta A i B leżą albo zewnątrz koła danego, jak to ma miejsce na (fig 114) albo wewnątrz tego koła jak to widzimy na fig 115, wtedy tak w jednym jako i drugim przypadku dla poprowadzenia kół szukanych, przesuwa się koło D przez dwa dane punkta A i B takiego promienia, ażeby toż przecinało koło dane O; co widocznie zawsze uskutecznić można, albowiem przez dwa punkta A i B nieskończona liczba kół poprowadzoną być może; na figurach punktami przecięcia tego przybranego koła D z kołem danem O są punkta H i I. Proste poprowadzone przez dane punkta A i B, tudzież punkta H i I przedłużyć należy aż do przecięcia się z sobą w punkcie L i z tego punktu poprowadzić należy proste z C i z C' styczne do koła danego O; wtedy dwa koła, z których jedno przechodzi przez punkta A i B a dotyka się koła O w punkcie C', a drugie przechodzi przez też same dwa punkta A i B a dotyka się koła O w punkcie C są żądane.—
Dla wyznaczenia środków tych dwóch kół, uważajmy, że te znajdować się powinny na linii Dm prostopadłej do AB przez jej środek m przechodzącej, tudzież na promieniach OC i OC' przedłużonych, jeżeli tego potrzeba; tym sposobem otrzymujemy środki Oi i O' kół żądanych.
Rozwiązanie to nie potrzebuje dowodzenia, gdyż koła Oi O' czynią z samego wykreślenia zadosyć warunkom podanego zadania.—

Uwagi. Kiedy dane dwa punkta są zewnątrz koła danego, wtedy na odpowiedź wypaść mogą albo obydwa koła żądane zewnątrz stycz: do koła danego, albo obydwa uczynią z kołem daném dotknięcie wewnętrzne, a tém samém będą go obejmowały; albo w końcu jedno zo kół wynalezionych dotknie się koła danego zewnątrz, a drugie go w sobie obejmie; kiedy zaś dwa punkta dane są wewnątrz koła danego, wtedy na odpowiedź wypadają zawsze obydwa koła wewnątrz styczne. — W szczególnym przypadku, gdy dwa punkta dane, łącząca prosta jest styczną do koła danego, prosta ta zastępuje wtedy jedną odpowiedź, a stąd żądane koło będzie tylko jedno; gdy zaś prosta łącząca dwa punkta dane nie tylko jest styczną do koła danego, ale nadto jeden z danych punktów jest punktem dotknięcia, wtedy prosta ta zastępuje obiedwie odpowiedzi; w końcu nie ma żadnej odpowiedzi, gdy jeden z danych punktów jest wewnątrz a drugi zewnątrz koła danego położony. —

62. Zadanie 9. Wykreślić koło, któreby było styczne do dwóch kół danych i punktu danego; tj. któreby się dotykało dwóch kół danych i przechodziło przez punkt dany. —

Zastanowiwszy się nad tém zadaniem łatwo spostrzedz możemy, że kół żądanych będzie cztery; jedno będzie do obydwóch kół danych zewnątrz styczne, drugie obejmować będzie obydwa koła dane, trzecie będzie zewnątrz styczne do jednego z kół danych, dotknie zaś wewnętrznie koła drugiego, czwarte będzie zewnątrz styczne z drugiem z kół danych, a dotknie się wewnętrznie koła pierwszego. —

W ogólności na rozwiązanie tego zadania, gdy dane koła są O i O', (fig 116) tudzież punkt dany C, poprowadźmy liniję OO' środki kół danych łączącą, i naznaczmy G i G' tudzież K i K' punkta, w których ta linija koła dane O i O' przecina. — Wyznaczmy teraz środek S podobieństwa dwóch kół danych, zewnętrzny, jeżeli idzie o nakreślenie dwóch kół żądanych stycznych z danemi kołami w jednakowy sposób, wewnętrzny, jeżeli idzie o wykreślenie tych kół żądanych, które z danemi kołami dotykają się w sposób różny. – Środek ten S połączony z punktem danym C prostą SC i do odległości SC, SG, SK (lub SC, SG' i SK') poszukajmy czwartej linii proporcyjonalnej; tą niechaj będzie SD, którą to długość od S ku punktowi C odetnijmy. Teraz według zadania ósmego nakreślmy dwa koła, któreby przechodziły przez punkta C i D i dotykały się jednego z kół danych np. koła O, a te koła O i O' będą żądane. – Koło O jest pierwszą, O' drugą z odpowiedzi na początku zadania wspomnianych; trzecią i czwartą otrzymamy, używając przy wykreśleniu środka podobieństwa, dwóch kół danych O i O'. –

Na okazanie tego, że koło np. O jest żądanem, połączmy punkt dotknięcia t z środkiem podobieństwa S: naznaczmy przez t' ten punkt, w którym prosta St przecina koło wynalezione O wtedy na mocy wiadomej własności siecznych SC i St z punktu S wychodzących mamy: –

$$SC \times SD = St \times St'$$

z wykreślenia czwartej proporcyjonalnej SD mamy:

$$SC \times SD = SG \times SK \text{ a stąd:}$$

$$SG \times SK = St \times St' \ldots\ldots\ldots (1)$$

Jeżeli teraz przez trzy punkta K G i t przesuniemy koło, to jako koło wzajemne dwóch kół O i O' przetnie koło O' na linii St w pewnym punkcie, który nazwijmy t'' (tego punktu niema na fig.) dla którego jak wiadomo będzie:

$$SG \times SK = St \times St'' \ldots\ldots\ldots (2)$$

Z porównania równości (1) i (2) wypada $St' = St''$, to jest punkt t', w którym prosta St przecięła koło O leży razem i na kole O', a że punkt t, jest z wykreślenia punktem dotknięcia się kół O i o, przeto też punkt t', jest punktem dotknięcia kół C i c; co wypada wprost z téj własności, że linija, która łączy dwa punkta dotknięcia koła stycznego w jednakowy sposób z dwoma danemi kołami, przechodzi przez środek podobieństwa zewnętrzny tych dwóch kół (przyp. co w nr. o kołach wzajemnych powiedziano).

Dowodzenie do każdego z czterech kół szukanych jest co do istoty to samo; w ogóle zadanie to ma cztery wyżéj wymienione odpowiedzi, może jednak być i mniéj odpowiedzi, a nawet i żadnéj według rozmaitego położenia danego punktu i kół danych.—

63 Zadanie 10 Do trzech kół danych nakreślić czwarte koło styczne. Koła dane niechaj będą C, C', C'' (fig 117), dla wykreślenia koła szukanego, poszukajmy: 1° środek podobieństwa S'' dwóch kół danych C i C' (zewnętrzny, jeżeli koło szukane ma się dotknąć dwóch tych kół C i C' w jednakowy sposób, wewnętrzny zaś gdy to dotknięcie ma być różnego nazwiska) i nadto poszukajmy środek podobieństwa S' dwóch danych kół C i C'' (zewnętrzny lub wewnętrzny) 2° Nakreślmy oś podobieństwa $S''S'$ trzech kół C, C', C'' 3° Przez punkt A obrany dowolnie na kole C poprowadźmy dwie sieczne $S''A$ i $S'A$ i naznaczmy punkta A' i A'' przecięcia się tych siecznych z kołami C' i C'' te które nie leżą na promieniach równoległych do CA (na fig. sieczna $S''A$ jest w szczególnym przypadku styczna $S''A'A$ i stąd też promienie CA i $C'A'$ są od siebie równoległe) 4° Przez trzy punkta A, A', A'' poprowadźmy koło K i niechaj to przetnie nadto koła dane w punktach B, B', B''. 5° Poprowadźmy cięciwy AB i $A'B'$, $A''B''$ i te przedłużmy aż do przecięcia się z osią podobieństwa $S'S''$ w punktach D, D', D''. 6° Z punktów D, D', D'' poprowadźmy z kolei styczne Dt i DT; $D't'$ i $D'T'$; $D''t''$; $D''T''$ do danych kół C, C', C'' a w końcu 7° poprowadziwszy promienie przez punkta dotknięcia, tj: linije Ct, $C't'$, $C''t''$ tudzież CT, $C'T'$, $C''T''$, te dostatecznie przedłużone przetną się (

pierwsze w punkcie O, a drugie w punkcie O' (tego niema na fig.). Punkta te O i O' są środkami kół szukanych, które gdy nadto wiadome są ich punkta dotknięcia t, t', t'' tudzież T, T', T'' z danemi kołami, są tém samém już wyznaczone. – Trzy koła mają cztery osi podobieństwa, a gdy każda z tychże wydaje dwie odpowiedzi, stąd zadanie to ośm odpowiedzi posiada a mianowicie:

Koło jedno dotykać się będzie zewnętrznie wszystkich 3 kół danych C, C', C''
Koło drugie " —— " — " wewnętrznie —— " —— " —— " ——
Koło trzecie — " —— " — " zewnętrznie kół C i C' a wewnętrznie koła C''
Koło czwarte — " —— " — " wewnętrznie kół C i C' a zewnętrznie koła C''
Koło piąte — " —— " — " zewnętrznie kół C i C'' a wewnętrznie koła C'
Koło szóste — " —— " — " wewnętrznie kół C i C'' a zewnętrznie koła C'
Koło siódme — " —— " — " zewnętrznie kół C' i C'' a wewnętrznie koła C
Koło ósme —— " — " — " wewnętrznie kół C' i C'' a zewnętrznie koła C

Pierwsze dwie odpowiedzi daje oś podobieństwa S S' S''; drugie dwie s s' S'', trzecie dwie oś s S' s'', czwarte dwie oś S s' s''. –

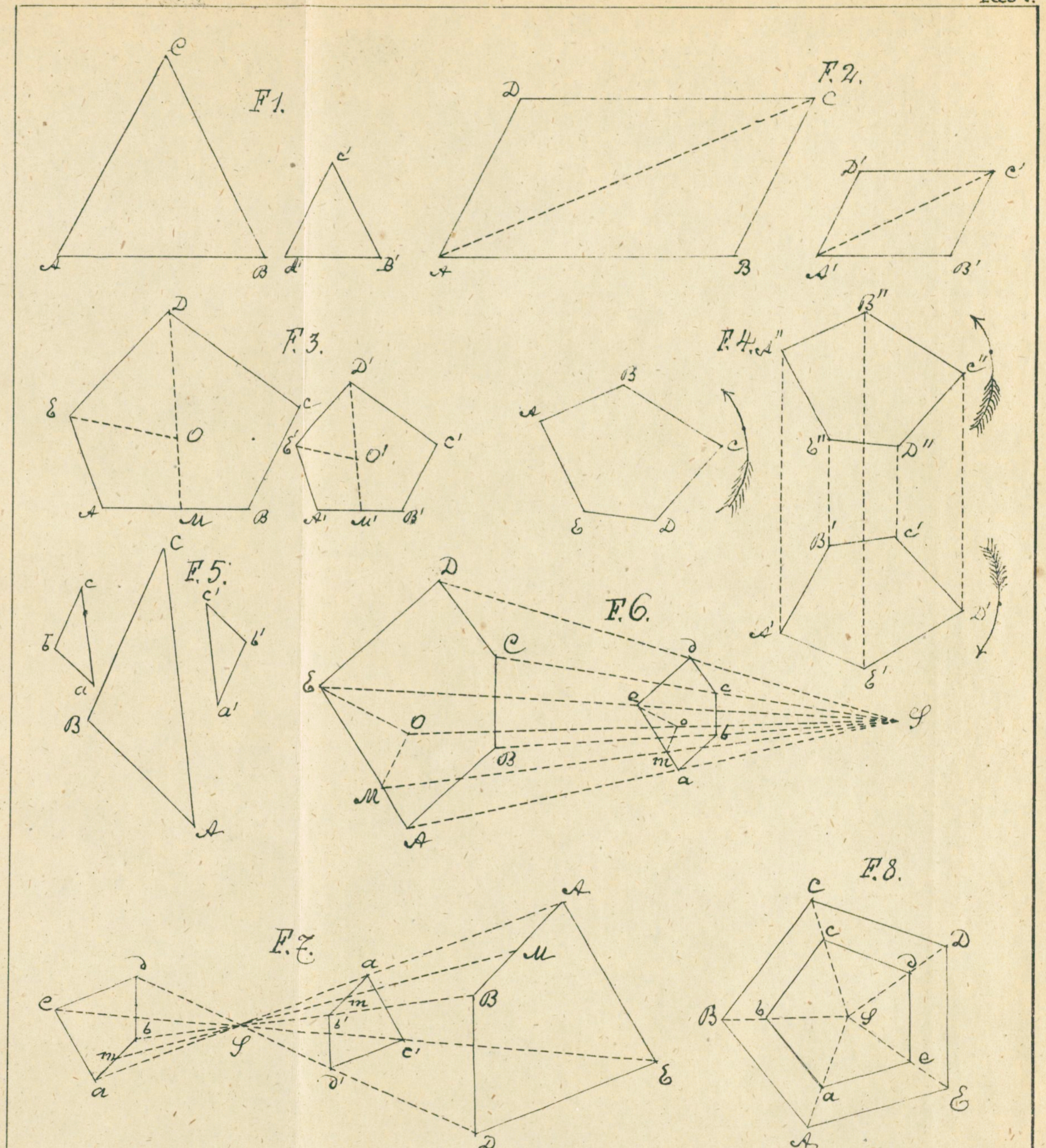
W każdym z tych ośmiu przypadków, dowodzenie jest co do istoty to samo, pokazanyje na kole O. Z rzeczy samej z wykreślenia jest koło K wzajemném kołem dla dwóch kół C i C' przez wzgląd na środek podobieństwa S''; toż samo koło K jest także wzajemném kołem kół C i C'' przez wzgląd na środek podobieństwa S' a że nadto i wszystkie koła w jednaki sposób styczne do kół C i C' są wzajemnemi tych kół przez wzgląd na środek podobieństwa S'' tudzież wszystkie koła w tenże sam sposób styczne do kół C i C'' są także wzajemnemi tychże kół, – przez wzgląd na środek podobieństwa S' przeto koło szukane O jest razem wzajemném tak dla kół C i C' jako też i dla kół C i C''. – Na mocy tego co my przy samym końcu o kołach wzajemnych powiedzieli wypada, że środek podobieństwa S'' należy do osi radykalnéj dwóch kół K i O, tudzież dla téj samej przyczyny, środek podobieństwa S' jest także jednym z punktów osi radykalnéj dwóch kół K i O a stąd oś podobieństwa S''S' 3^{ch} danych kół, jest osią radykalną przybranego koła K i szukanego O. Ponieważ cięciwa wspólna AB dwóch kół C i K jest osią radykalną, przeto punkt D, w którym taż przecina oś radykalną S'S'' jest środkiem radykalnym 3^{ch} kół, K, O, C a tém samém osią radykalną dwóch kół C i O które według żądania powinny być styczne, jest linija Dt styczna do koła C a razem i do koła O; stąd też punkt t jest punktem dotknięcia koła szukanego. – Podobnie okazać można o punktach dotknięcia t' i t''.

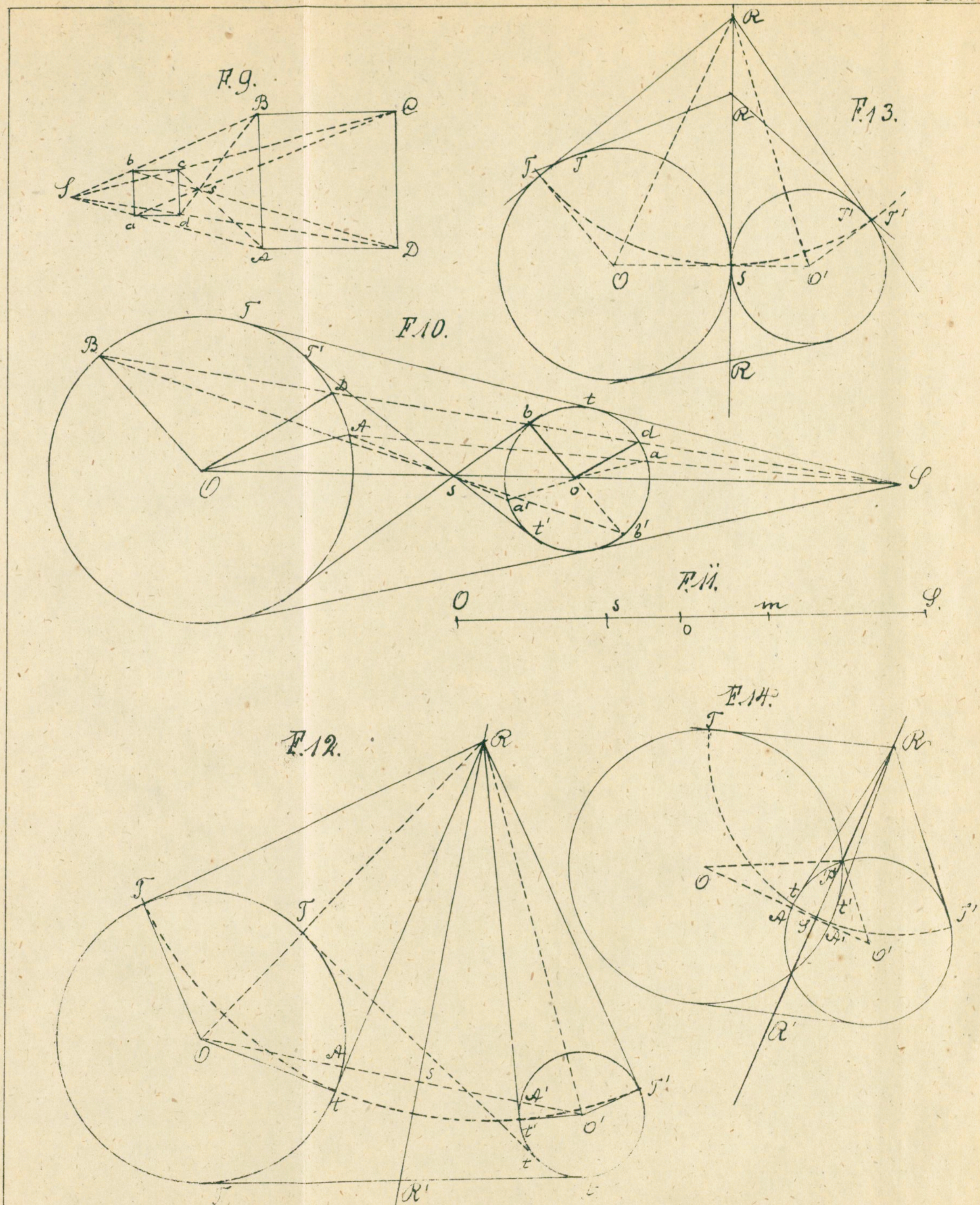
Uwagi. 1° Powtarzając dowodzenie co do koła O', przekonać się możemy że taż sama oś S'S'' podobieństwa 3^{ch} danych kół, jest osią radykalną dwóch kół K i O' a stąd gdy ona jest osią radykalną i dwóch kół K i O przeto te trzy punkta K, O i O' znajdować się powinny na linii prostopadłéj do S'S'' co właśnie nastręcza nam sprawdzenie dobrze wykonanego rysunku.

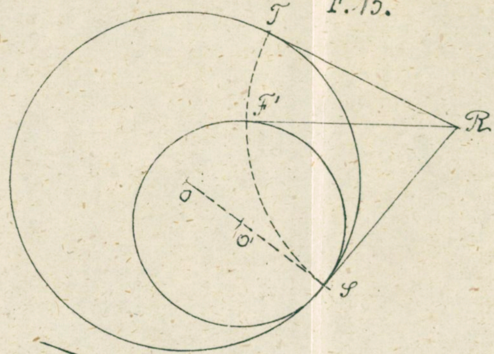
2° Sposób rozwiązania tu taj podany, winni jesteśmy Ponceletowi; daje on się użyć i w tym przypadku, kiedy dwa z trzech kół danych są jednakowych promieni, a trzecie promienia różnego; w tym zaś szczególnym przypadku, gdy wszystkie 3 koła są jednakowego promienia i szukamy kół stycznych w jednakowy sposób do kół danych, oś podobieństwa S'S'S'' odsuwa się do nieskończoności, a tém samém sposób Ponceleta nie może być użyty na ten przypadek. – Zaradzić można temu bardzo łatwo, gdyż dwa koła szukane w takim przypadku są współśrodkowe z kołem przez trzy środki O, O' i O'' kół danych poprowadzoném, a promienie ich, są równe różnicy albo summie promienia koła przybranego i promienia kół danych. –

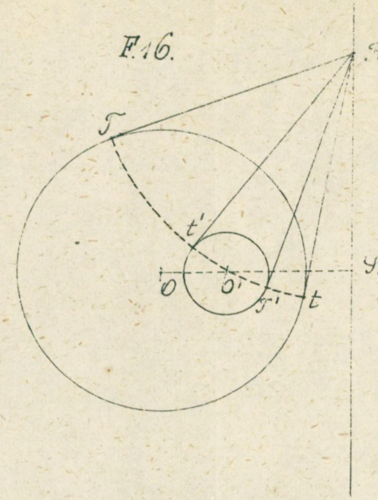
3. Rozwiązanie Ponceleta jest tak ogólnem, że się da użyć do rozwiązania wszystkich poprzedzających zadań od 3° do 9° włącznie, jeżeli prostą uważać będziemy za koło nieskończenie wielkiego promienia, a punkt za koło promienia zero, i stosownie do tego, tak jak myśmy w teoryi podali dobierać będziemy środki podobieństwa. Taki sposób uważania rzeczy znajduje się w dziele P. Bergery: Geometrie appliquée à l'indus.

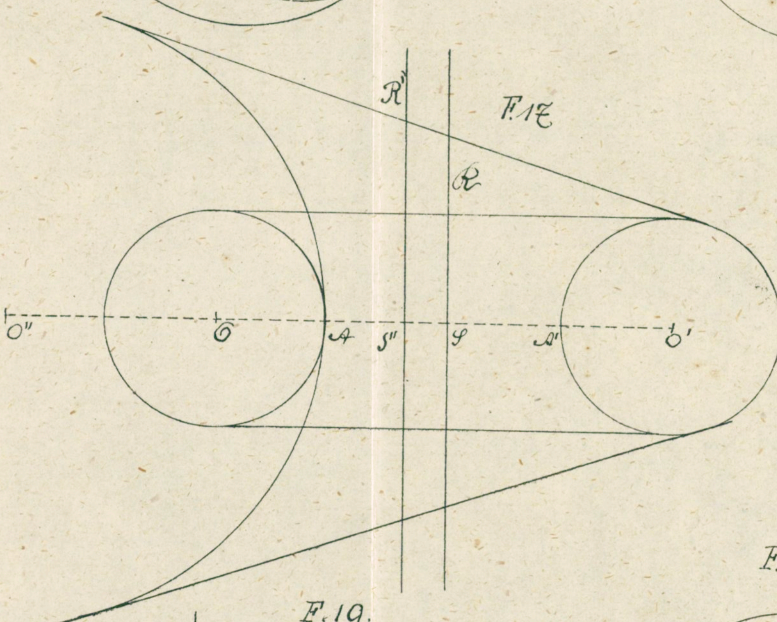
Koniec

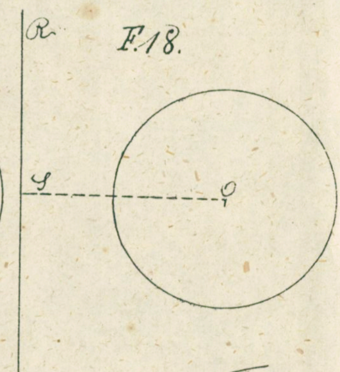

F1.
F.2.
F.3.
F.4.
F.5.
F.6.
F.7.
F.8.

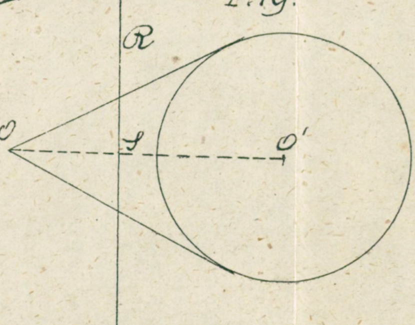

F. 9.
F. 10.
F. 11.
F. 12.
F. 13.
F. 14.

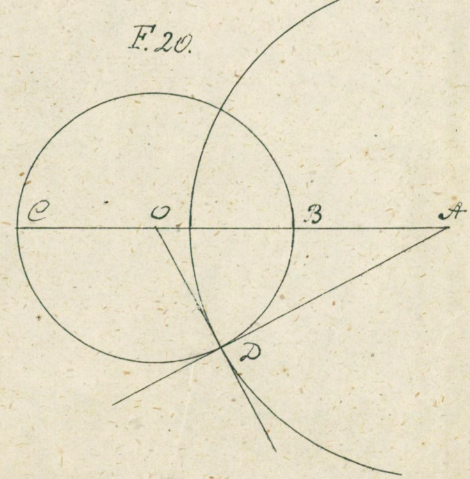

F. 15.
T
F'
R
O
O'
S


F. 16.
R
T
t'
O
O'
F'
t
S.

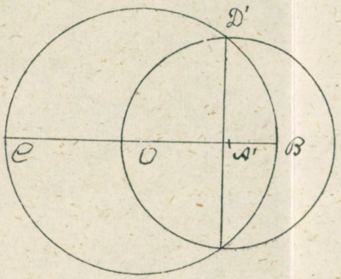

F. 17.
R''
R
O''
O
A
S''
S
A'
O'


F. 18.
R
S
O

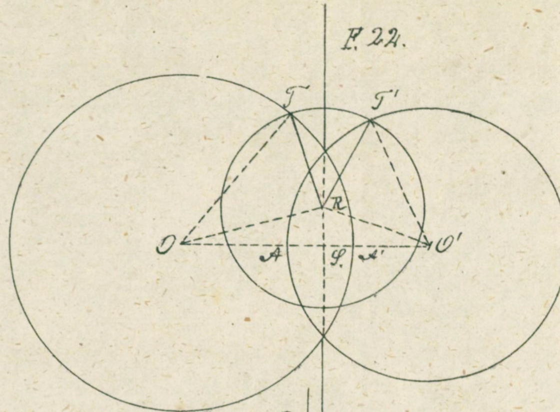

F. 19.
R
O
S
O'


F. 20.
C
O
B
A
D

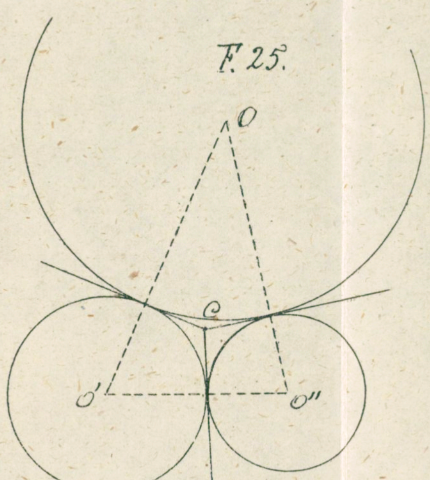
F. 21.



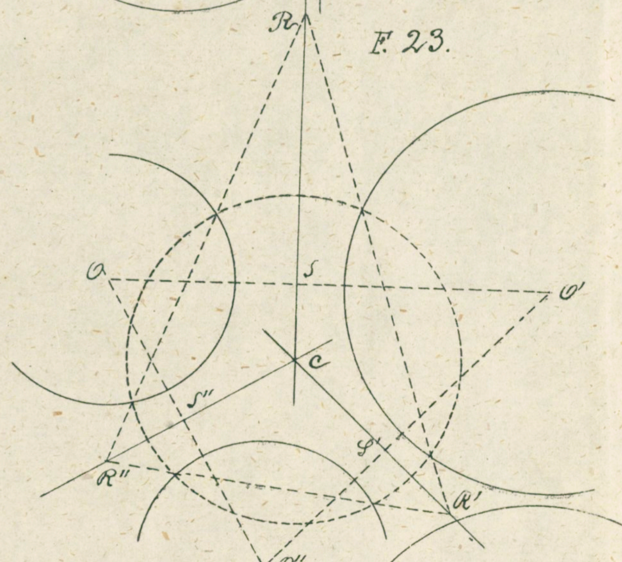
F. 22.



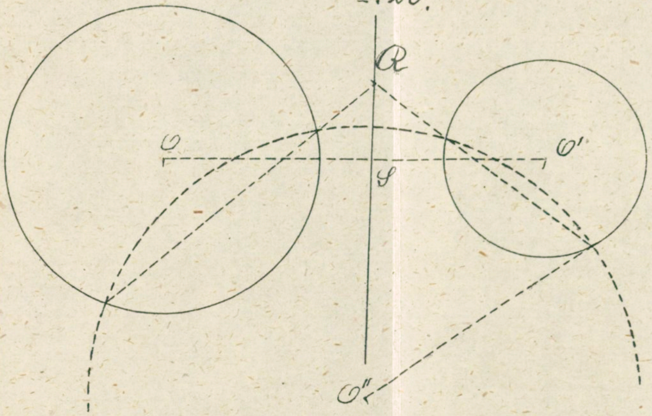
F. 25.



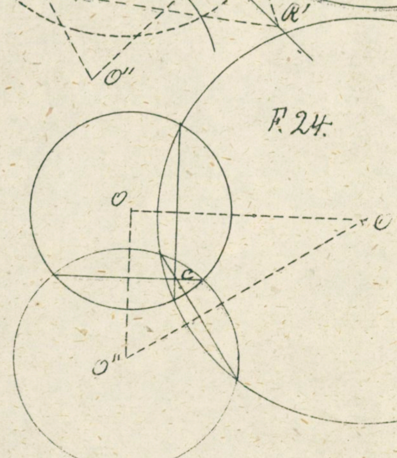
F. 23.

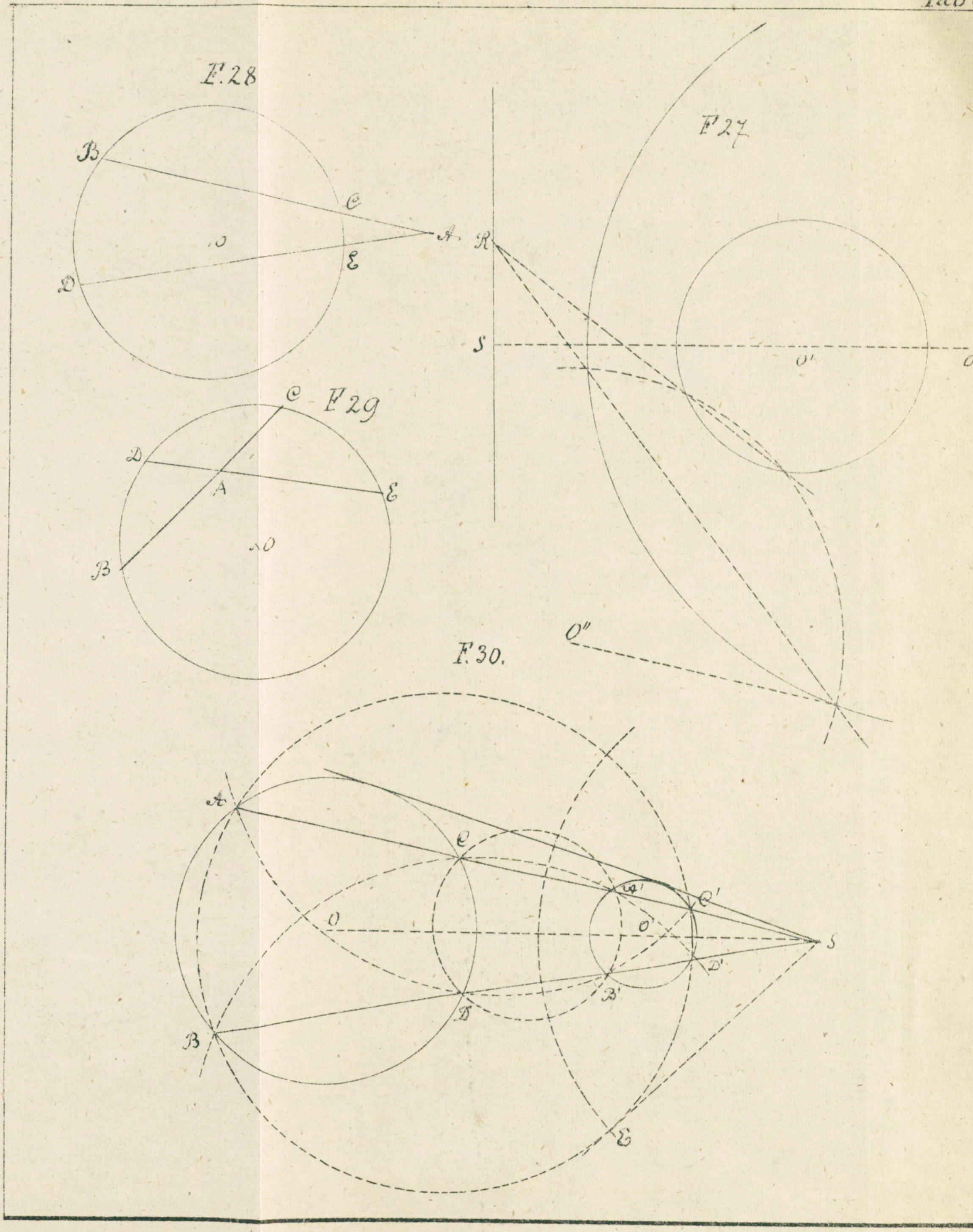


F. 26.

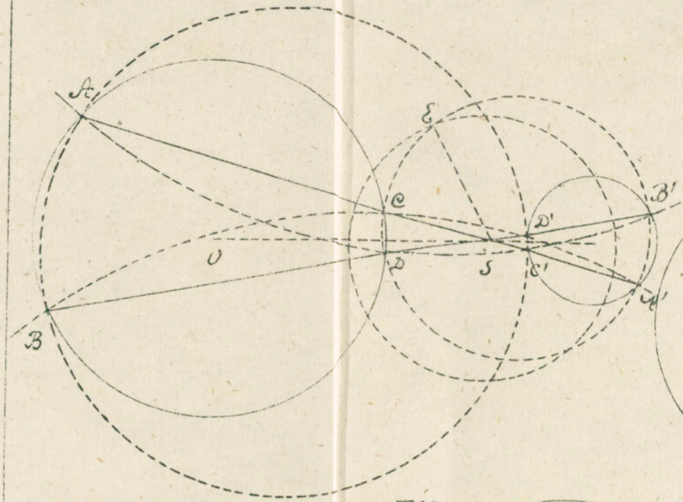


F. 24.

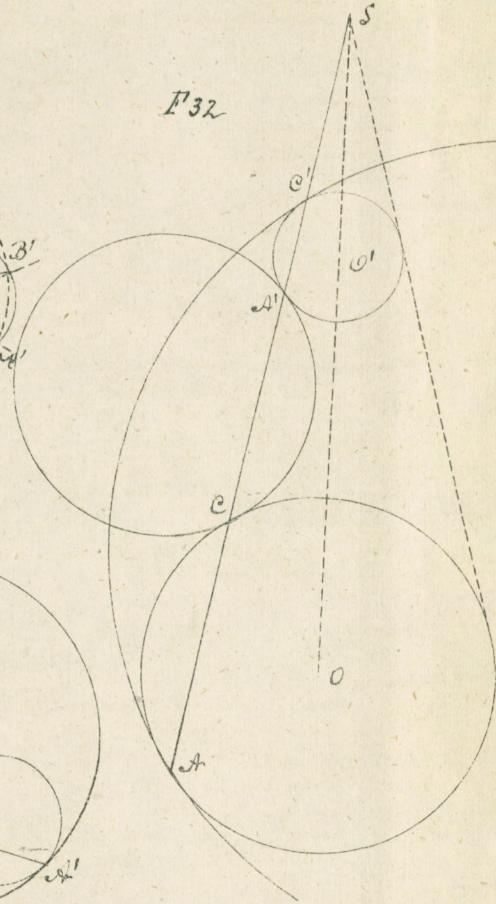



F.28
B
C
A
O
E
D
F.29
C
D
A
E
O
B
F.27
R
S
O'
O
O''
F.30.
A
C
A'
C'
O
O'
S
D'
B'
D
B
E

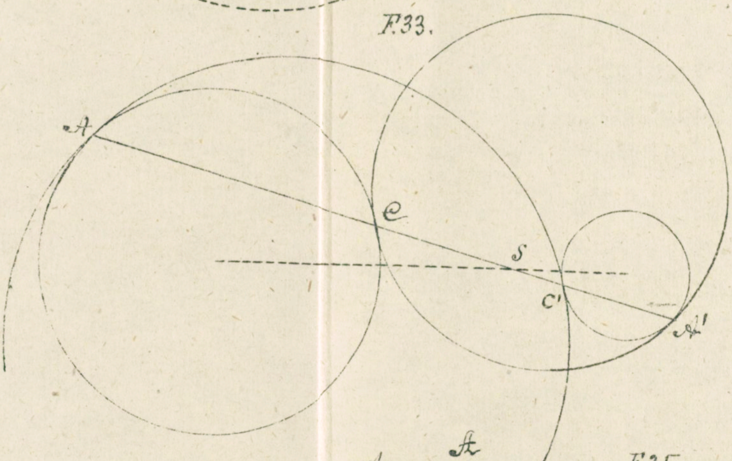
F 31.



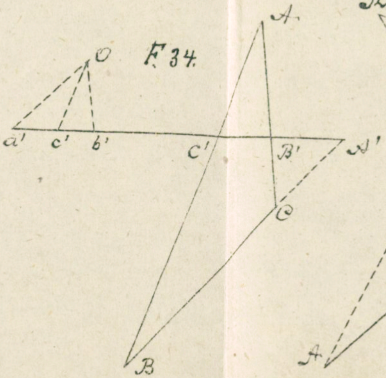
F 32



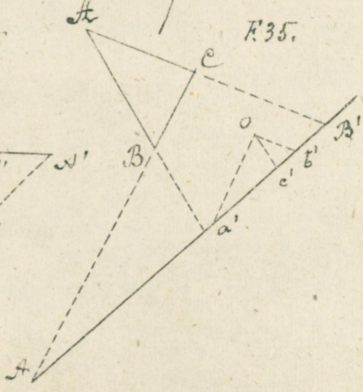
F 33.



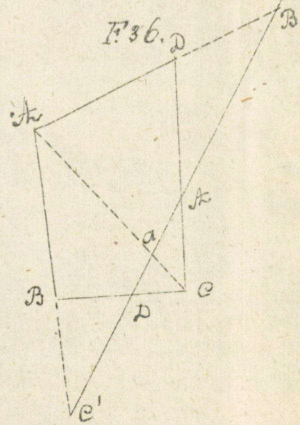
F 34.

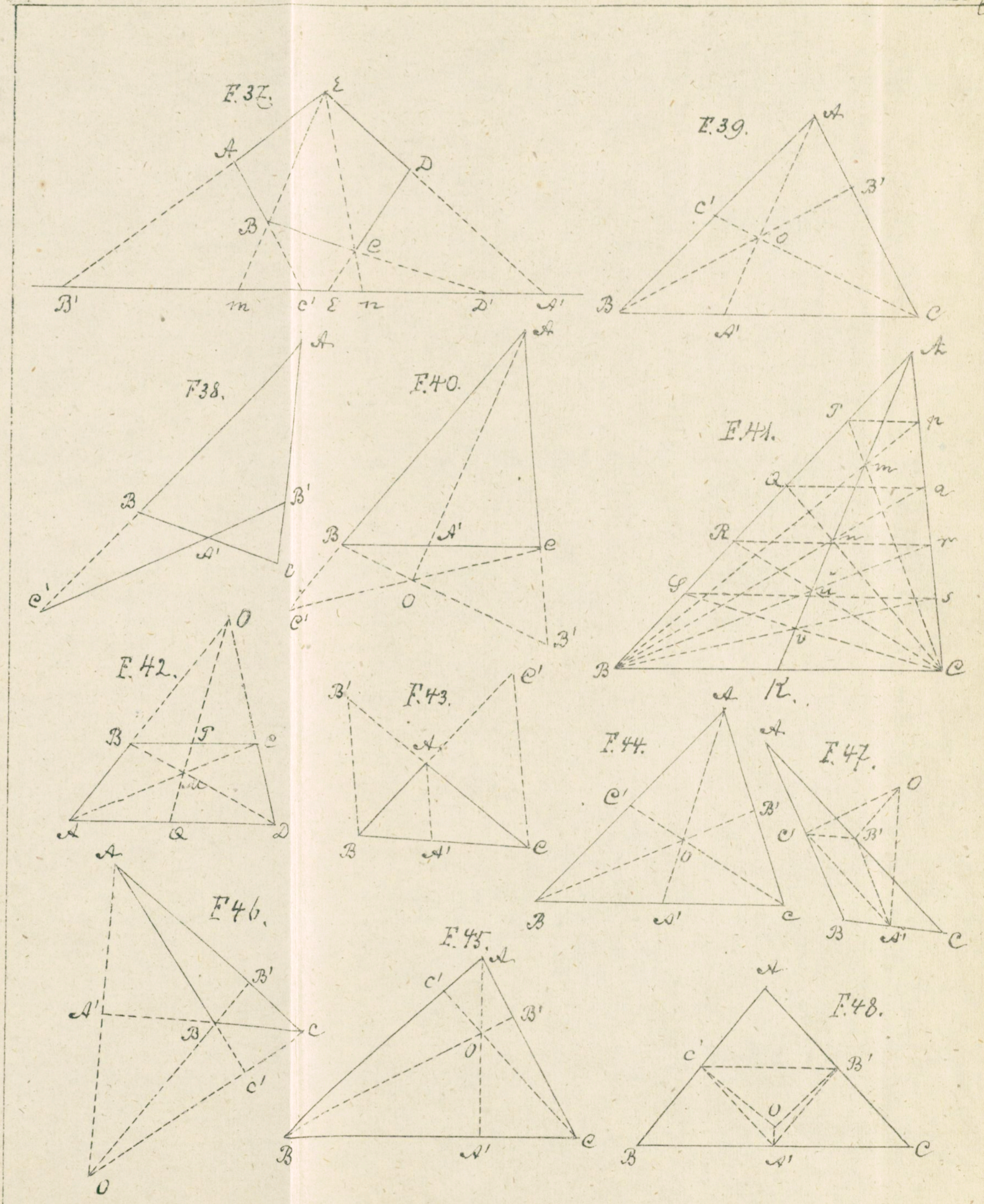


F 35.

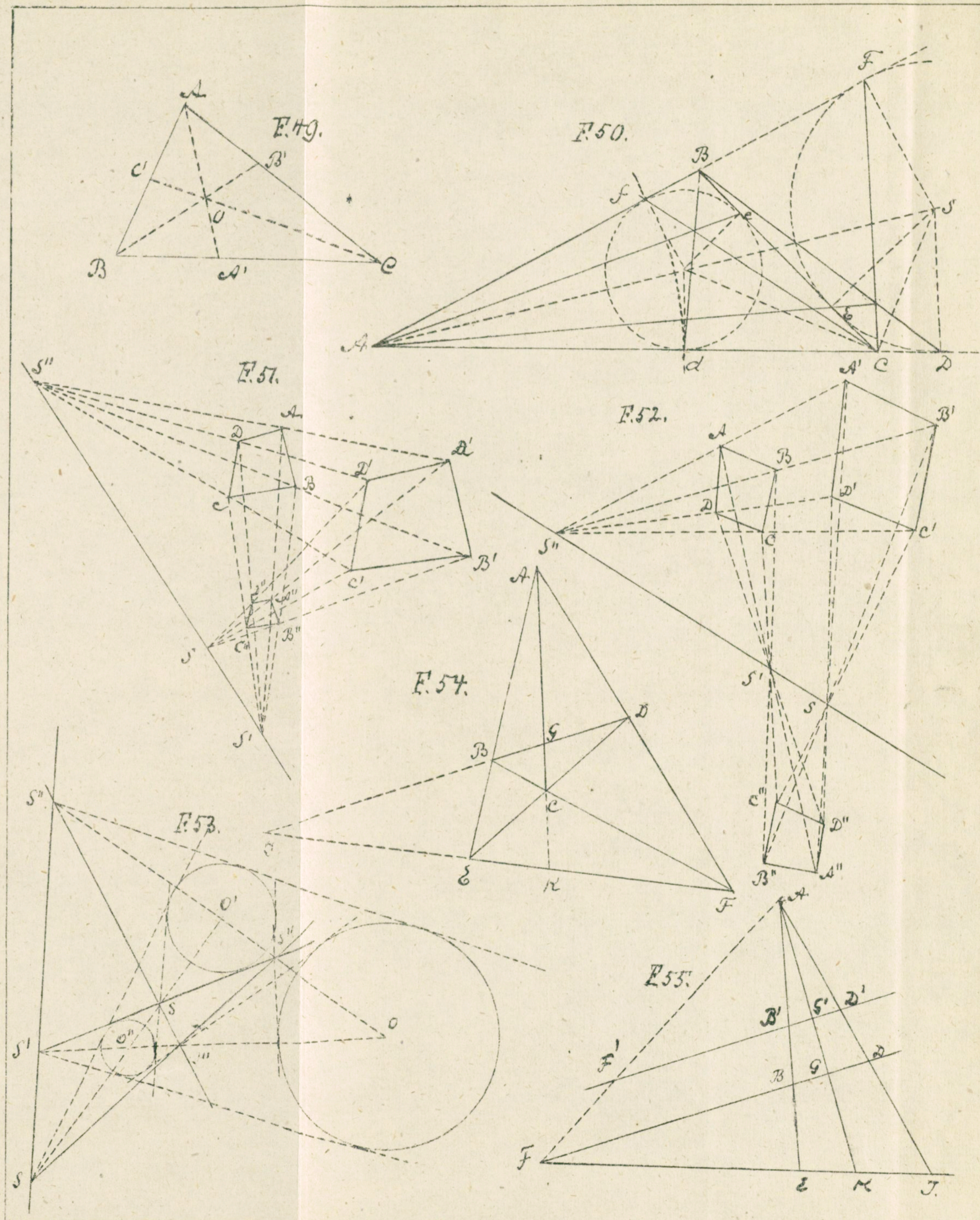


F 36.

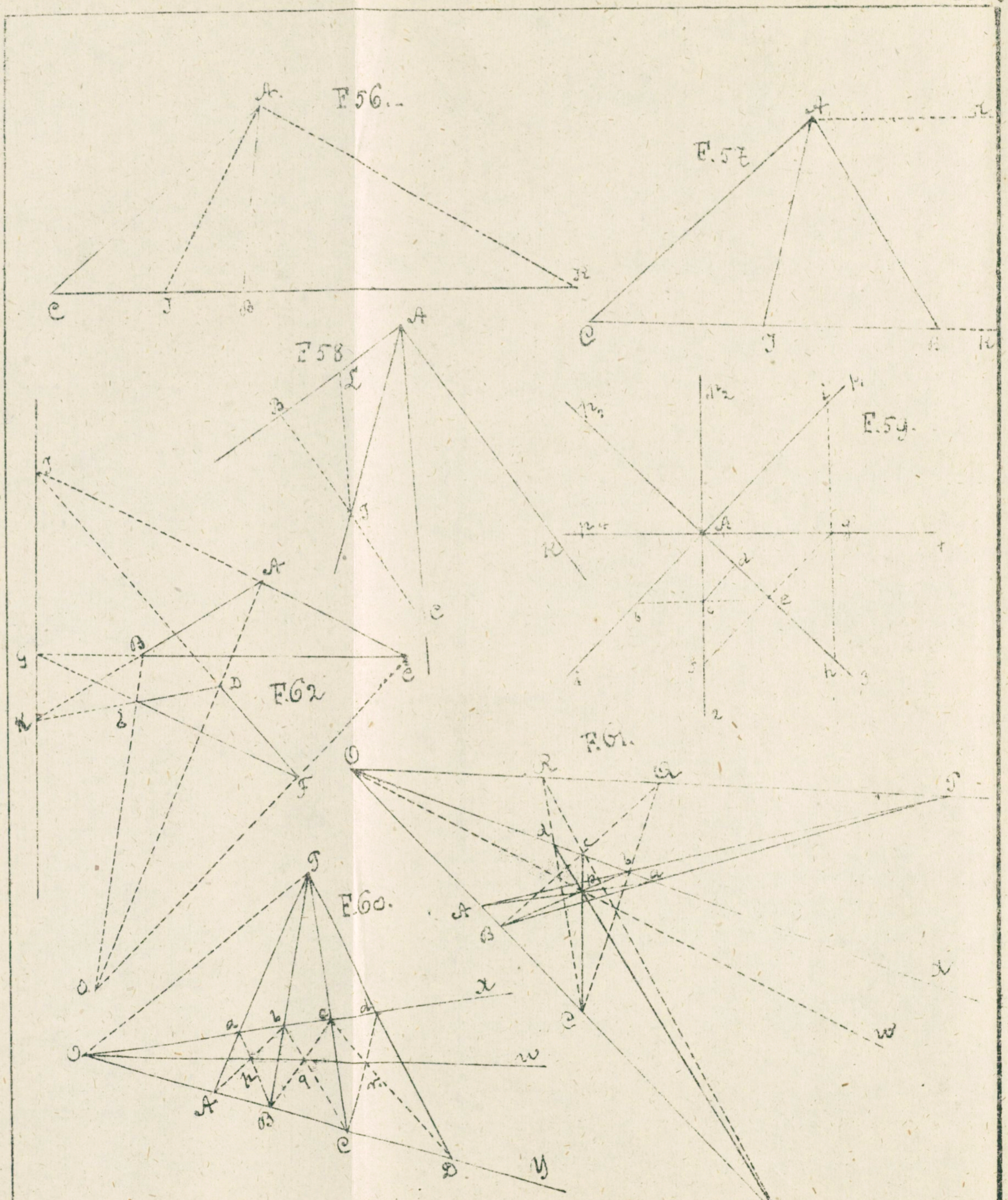


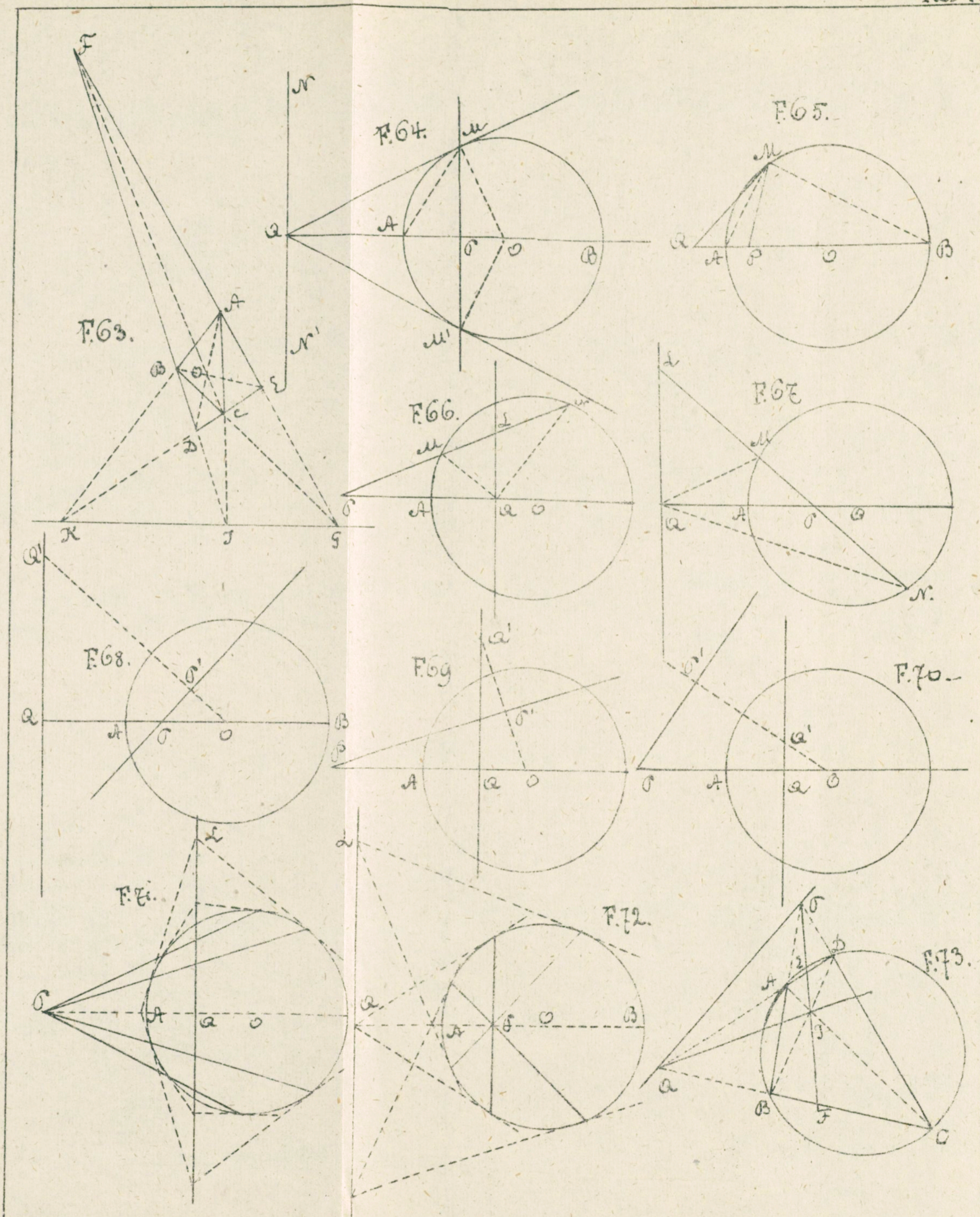


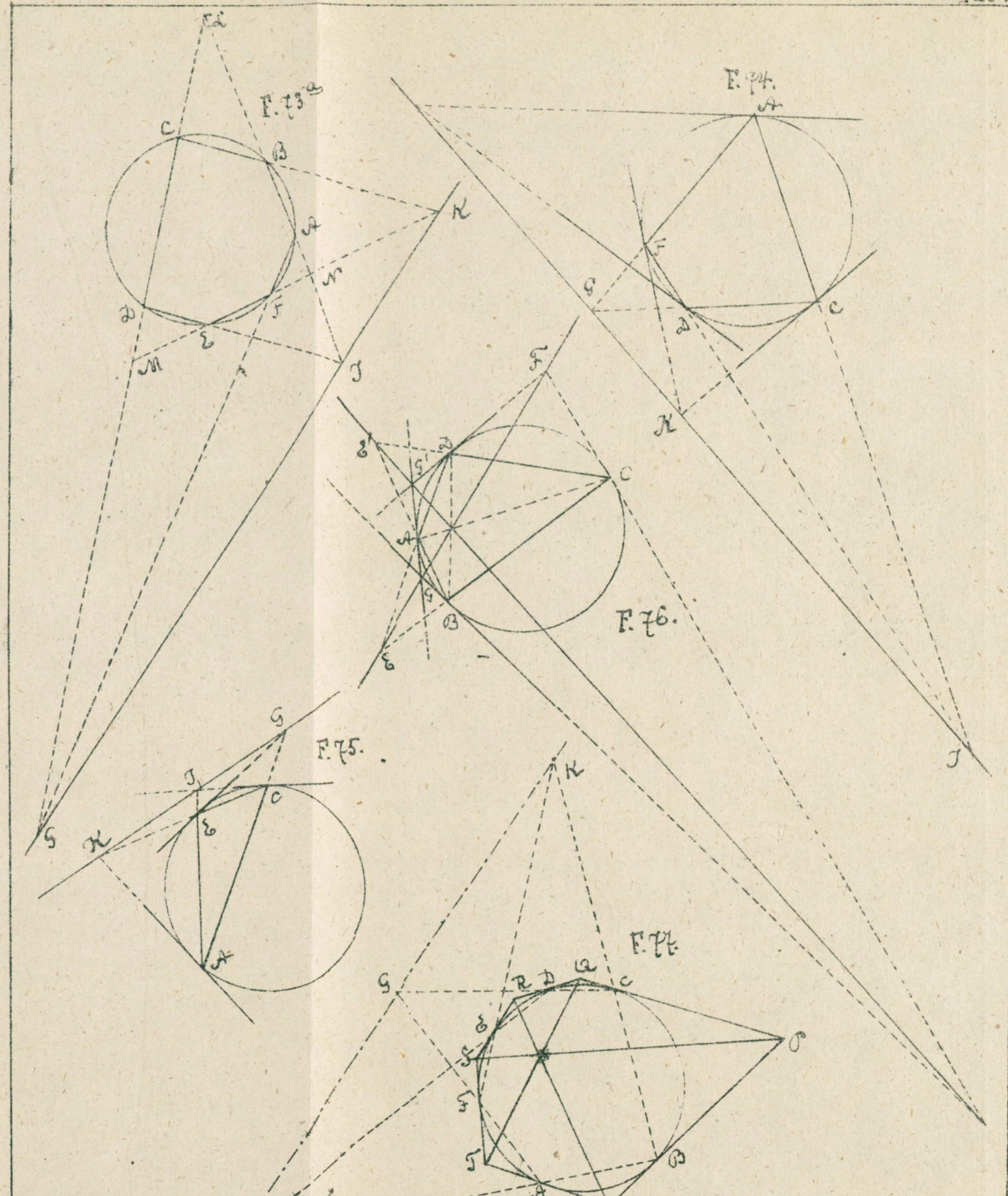
F.37.
F.39.
F.38.
F.40.
F.41.
F.42.
F.43.
F.44.
F.47.
F.46.
F.45.
F.48.

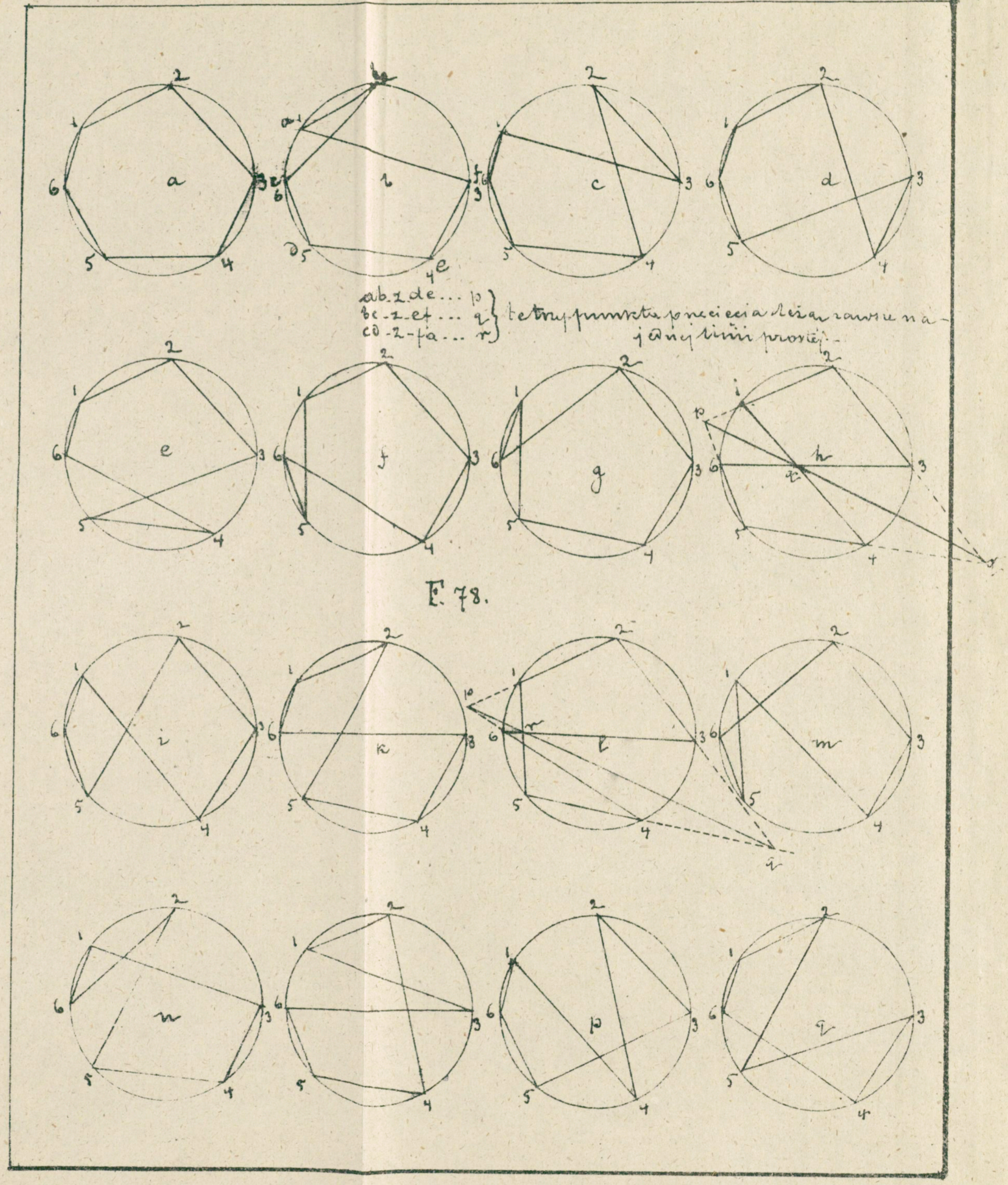

F. 49.
F. 50.
F. 51.
F. 52.
F. 53.
F. 54.
F. 55.

Tab 9.

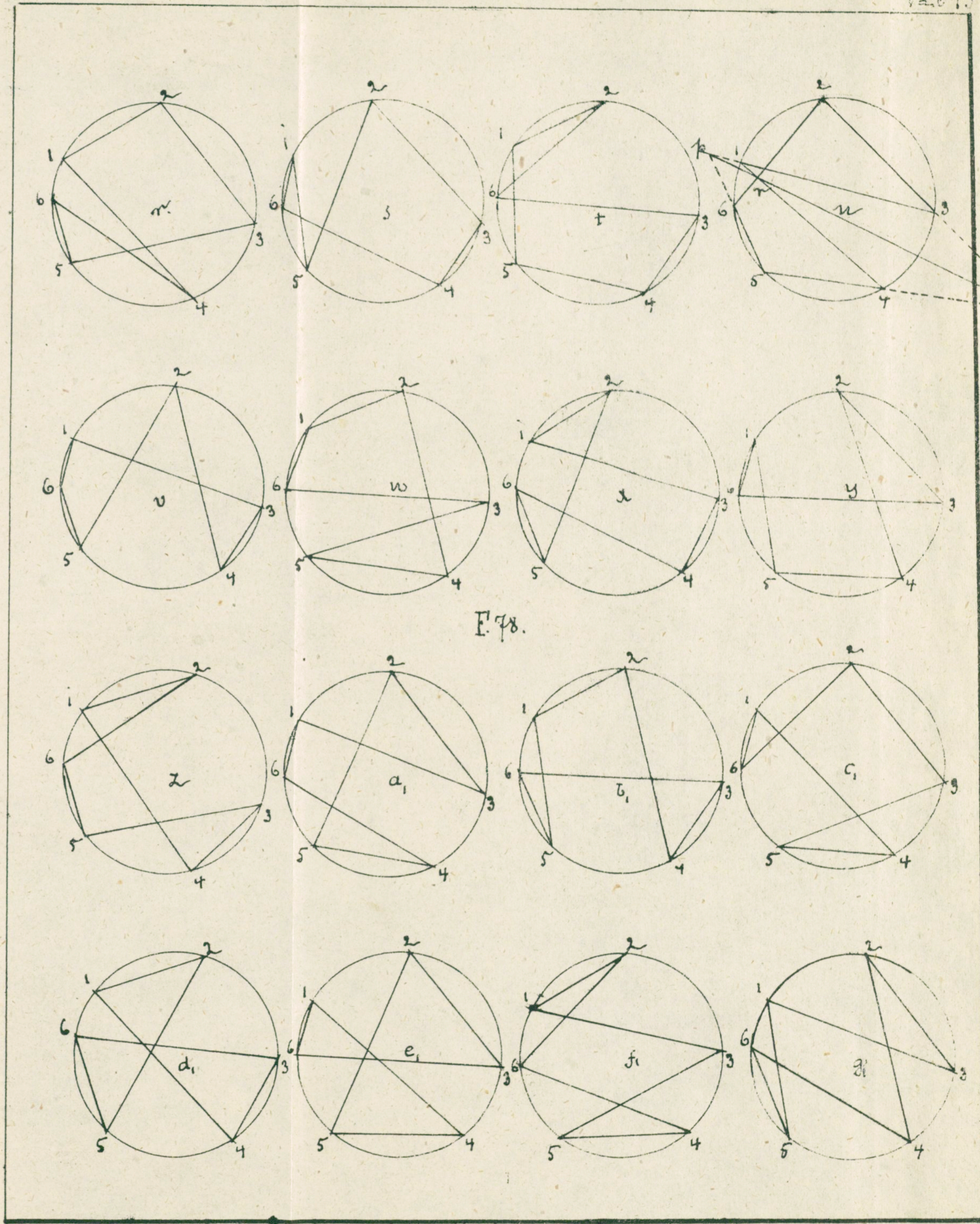



F.63.
F.64.
F.65.
F.66.
F.67.
F.68.
F.69
F.70.
F.71.
F.72.
F.73.

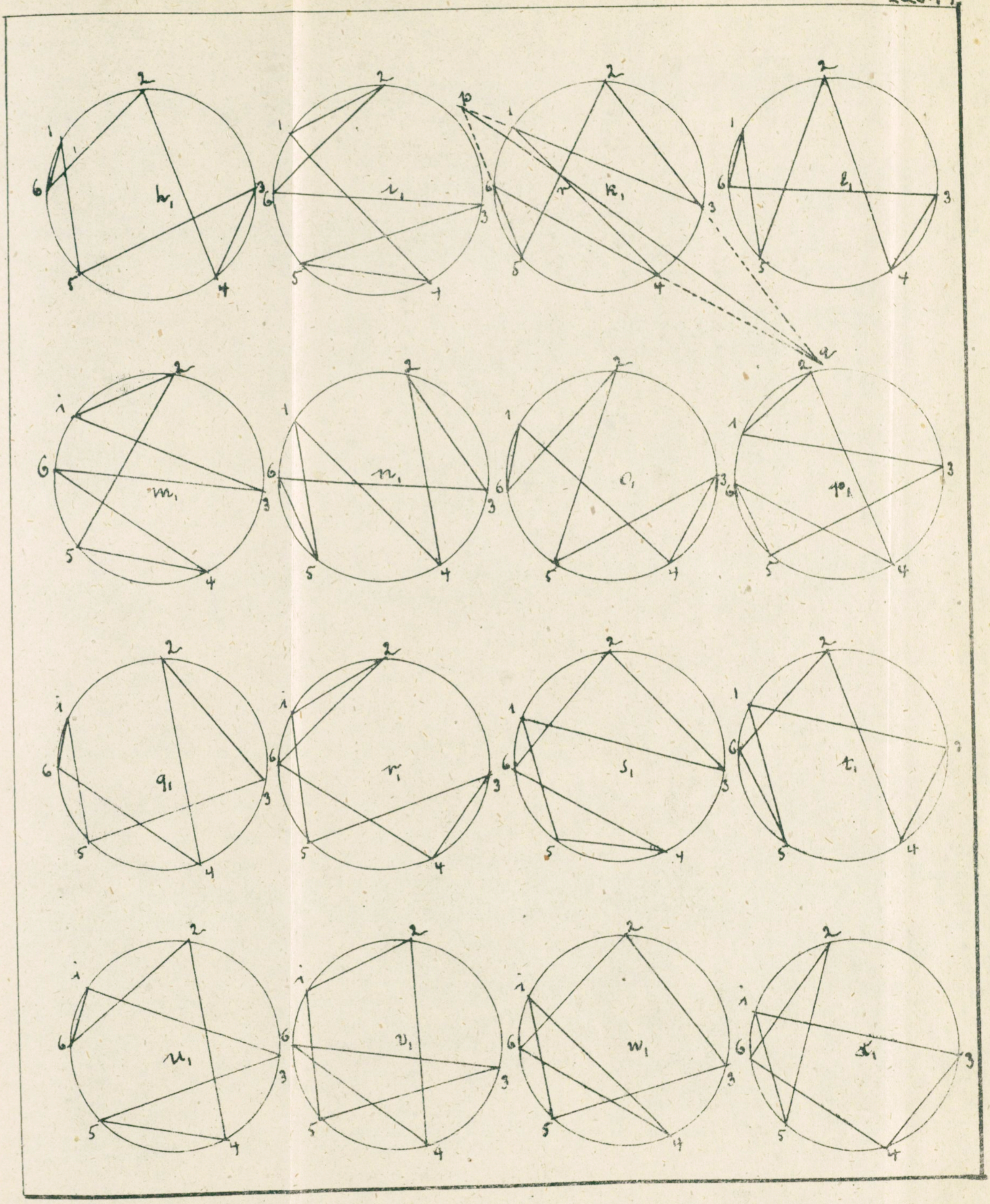

F. 73a
F. 74.
F. 75.
F. 76.
F. 77.

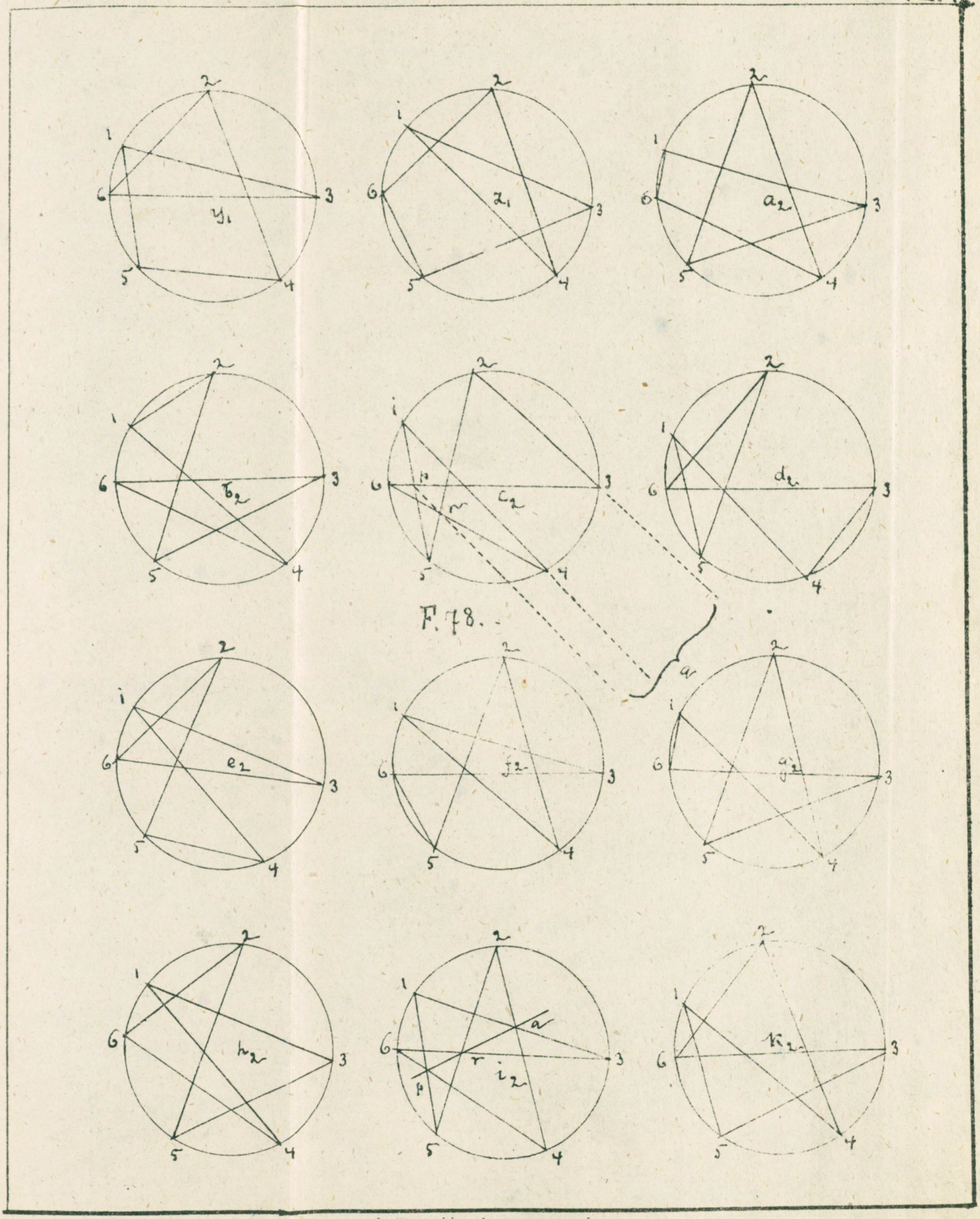

a
b
c
d
e
f
g
h
i
k
l
m
n
p
q
ab.z.de ... p
bc.z.ef ... q
cd.z.fa ... r
te trzy punkta przecięcia leżą zawsze na jednej linii prostej.

F. 78.



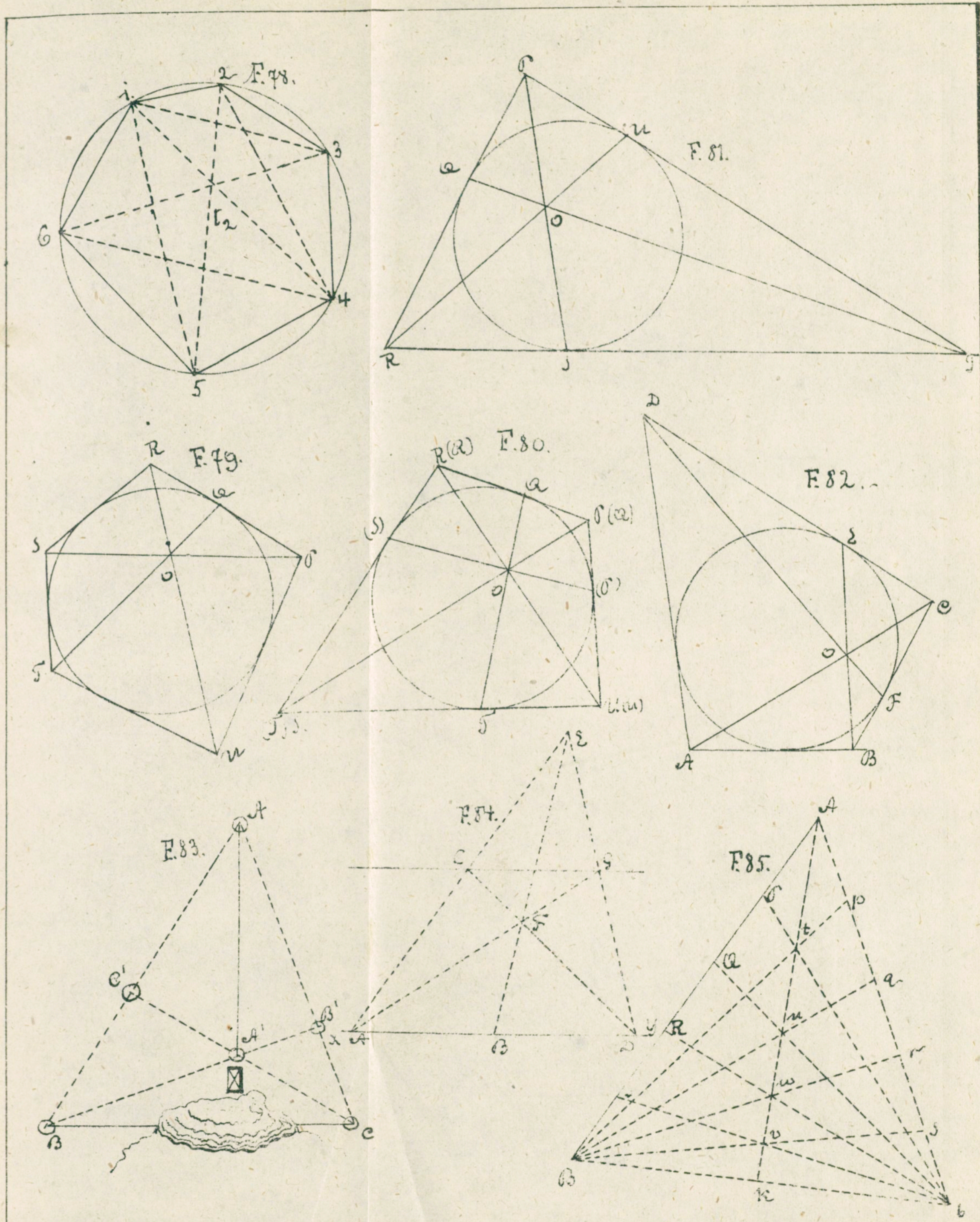
F. 78.

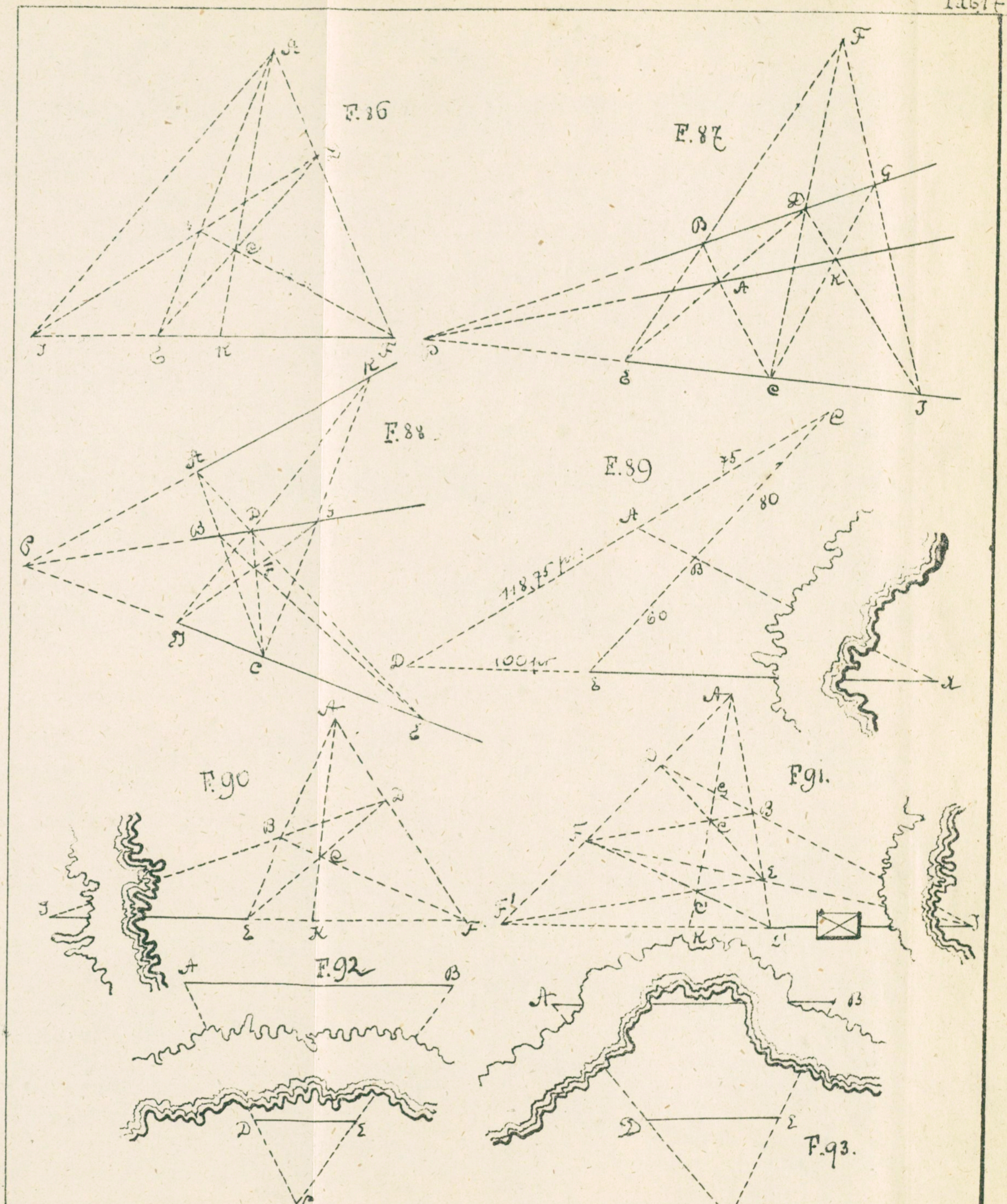


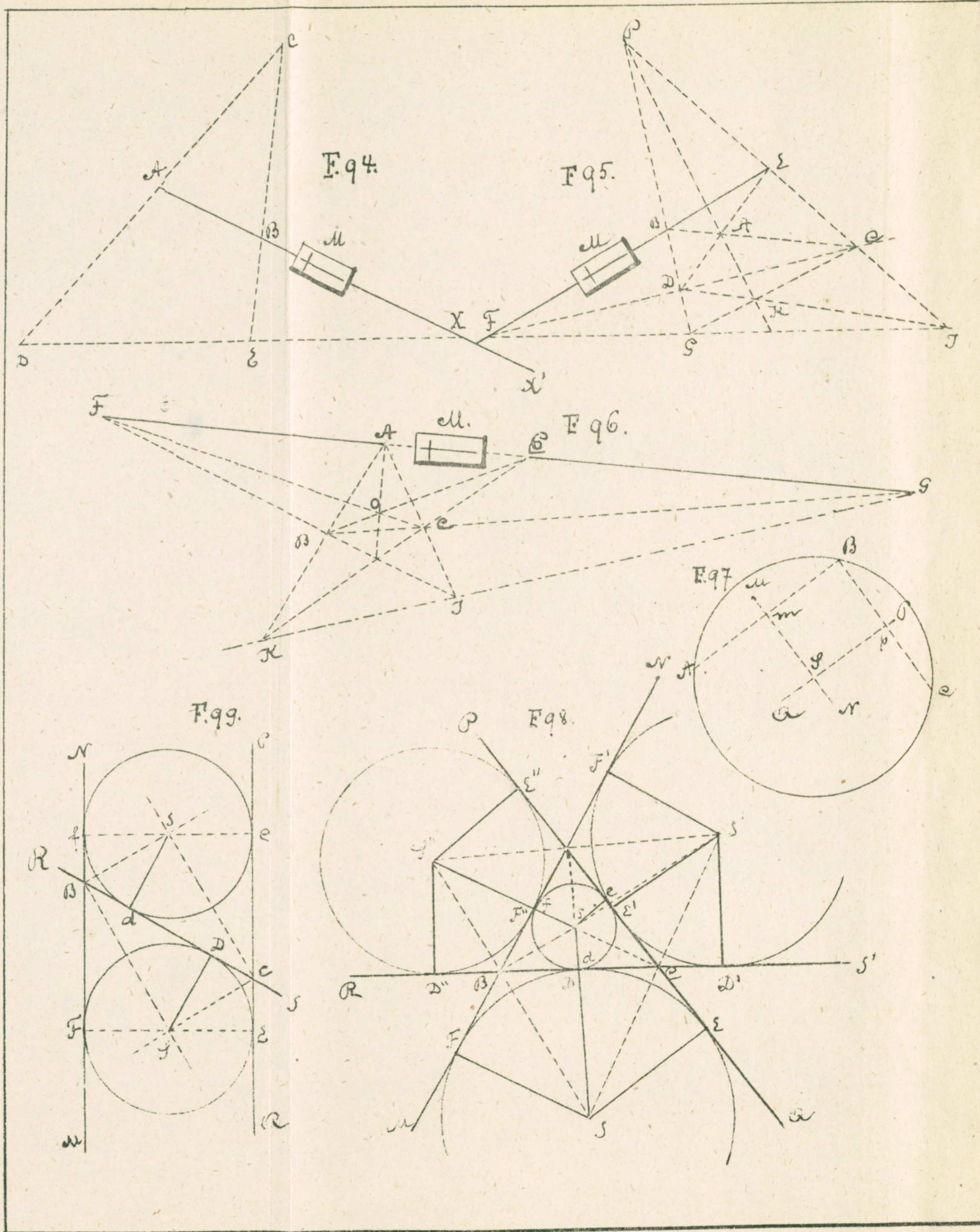


F. 78.

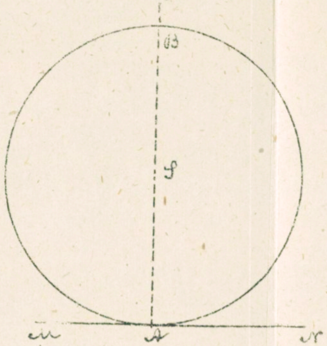
Tab. 16.



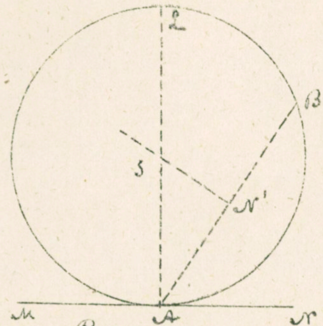

F.86
F.87
F.88
F.89
118,75 pr.
75
80
60
100 pr.
F.90
F.91.
F.92
F.93.


F. 94.
F. 95.
F. 96.
F. 97.
F. 98.
F. 99.

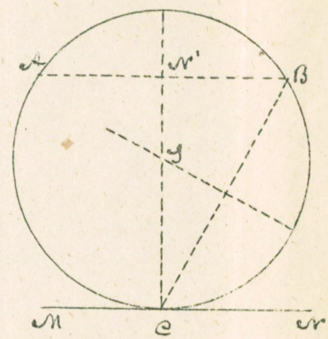
F100.



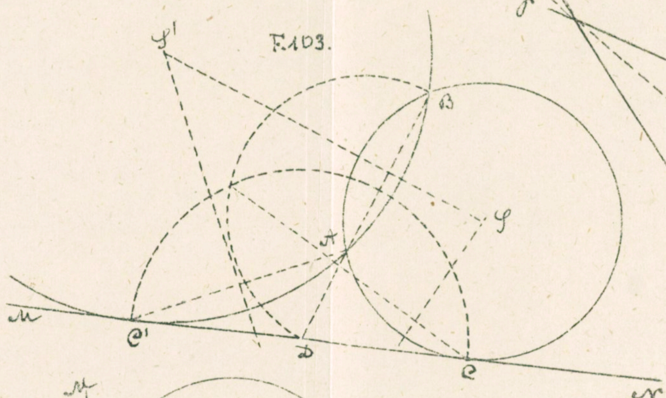
F101.



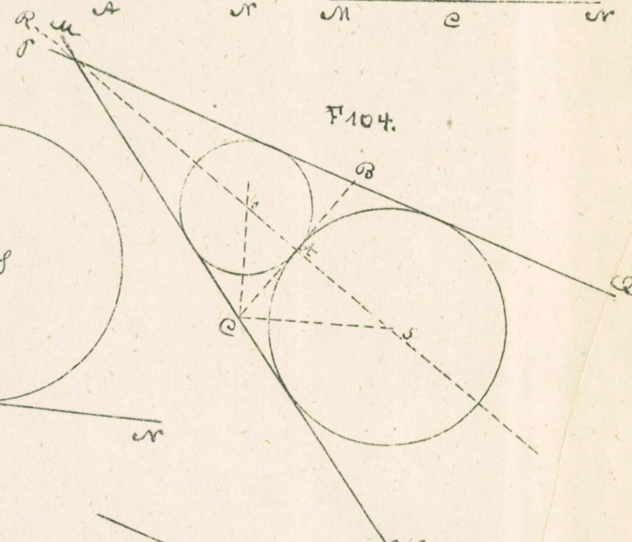
F102



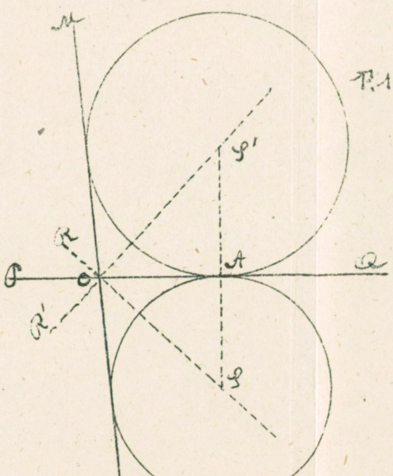
F103.



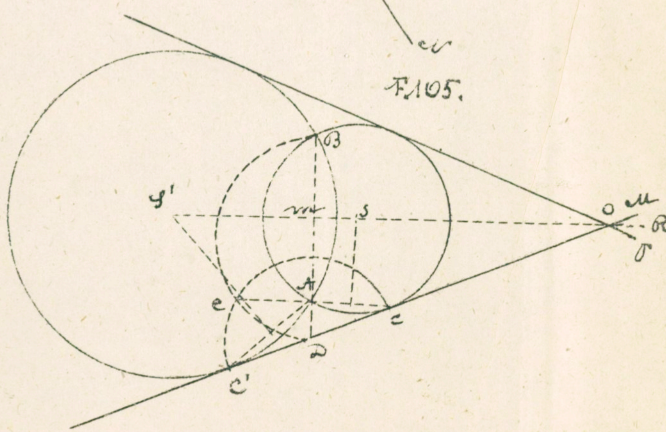
F104.

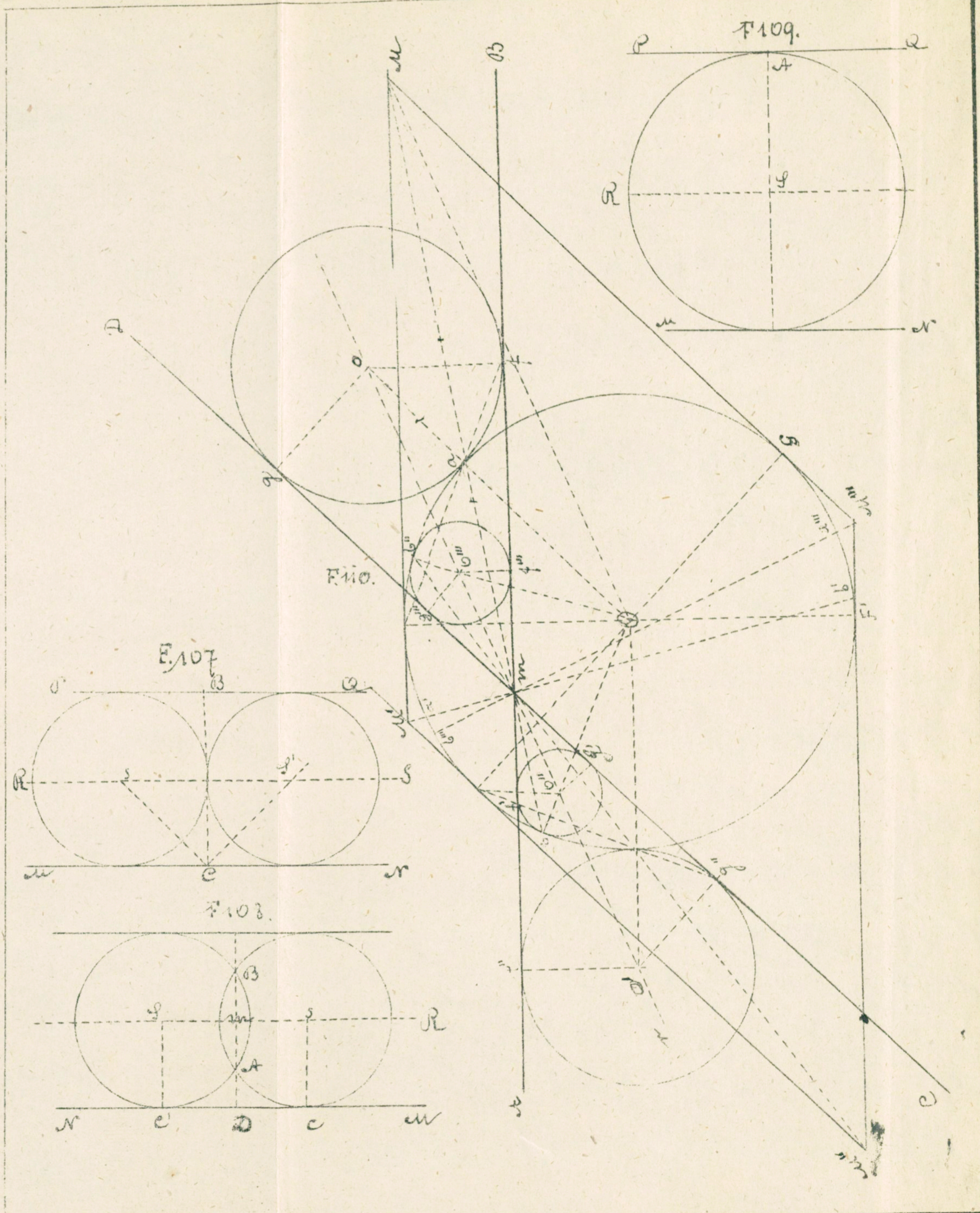


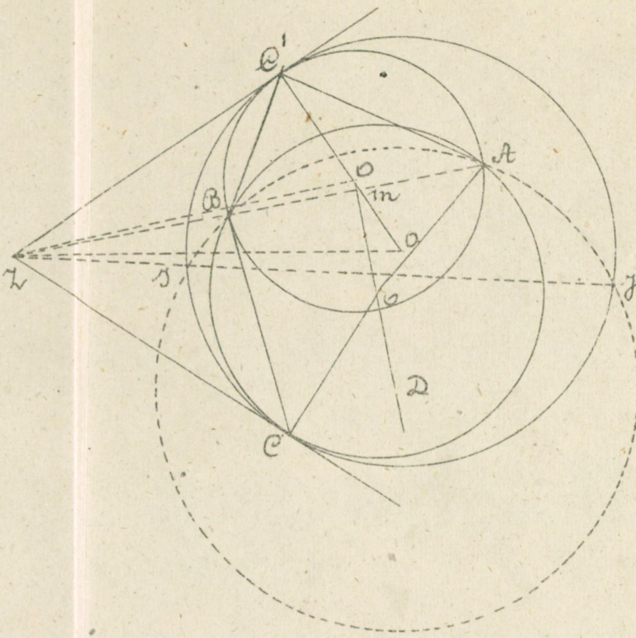
F106.



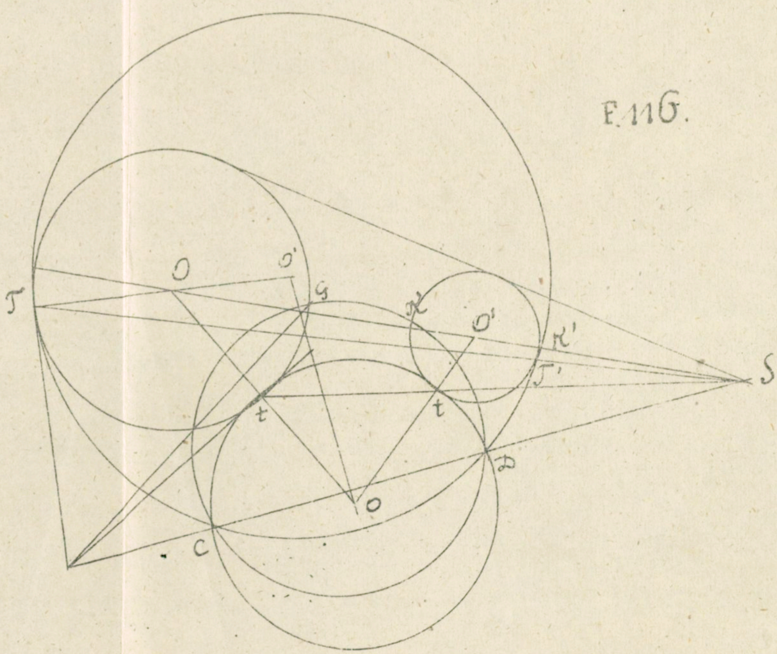
F105.



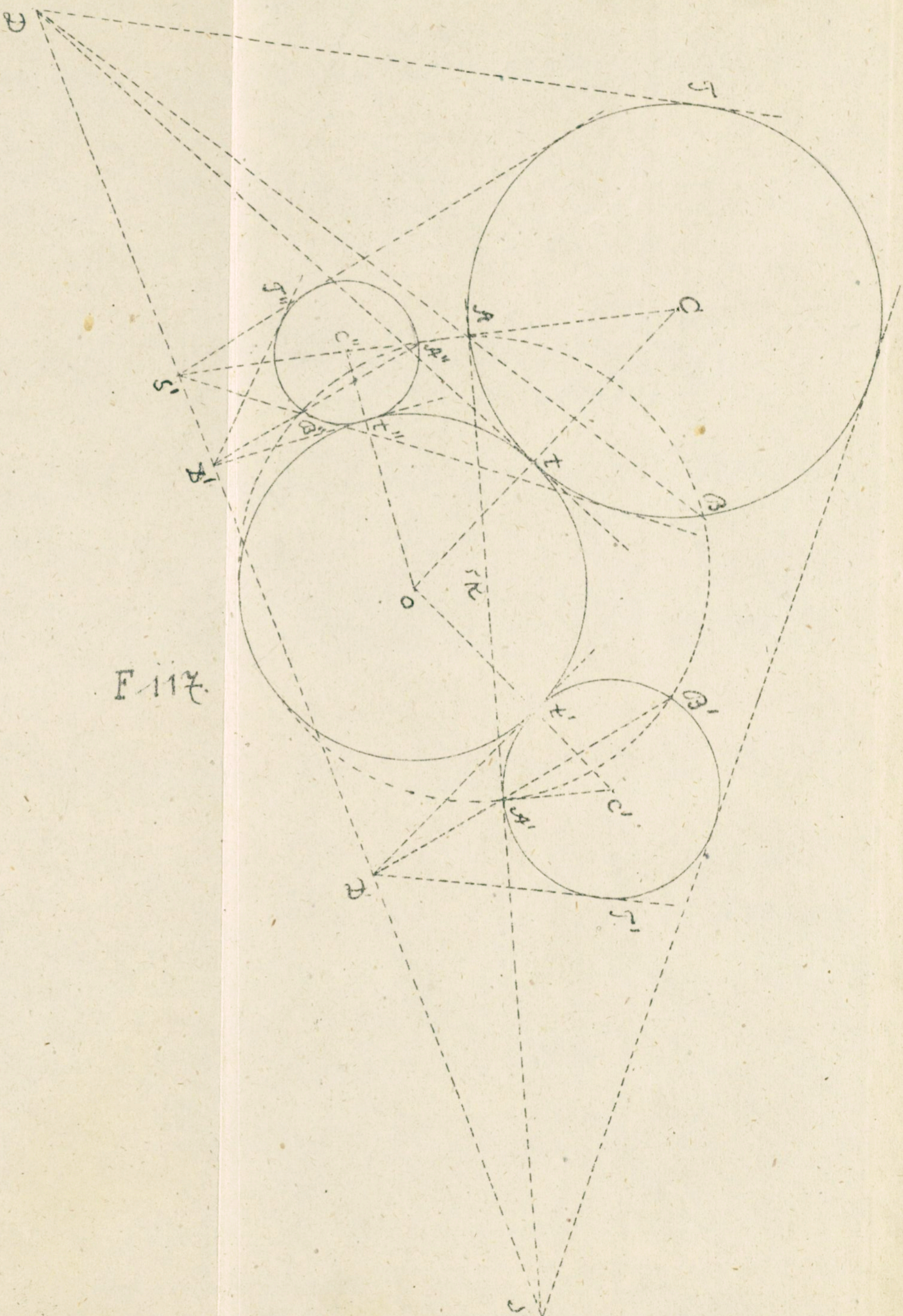

F 109.
F 110.
F.107
F 108.



F. 115.

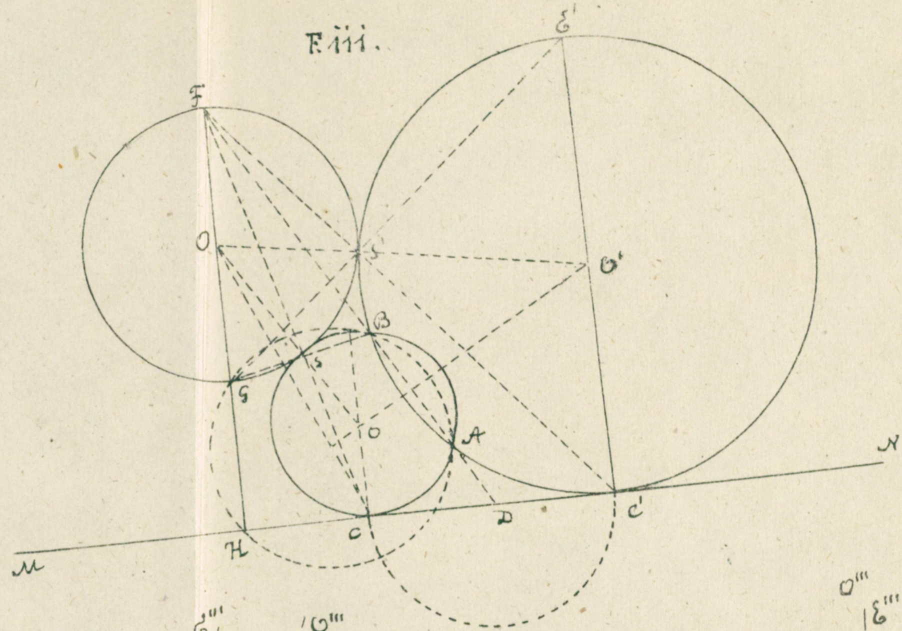


F. 116.

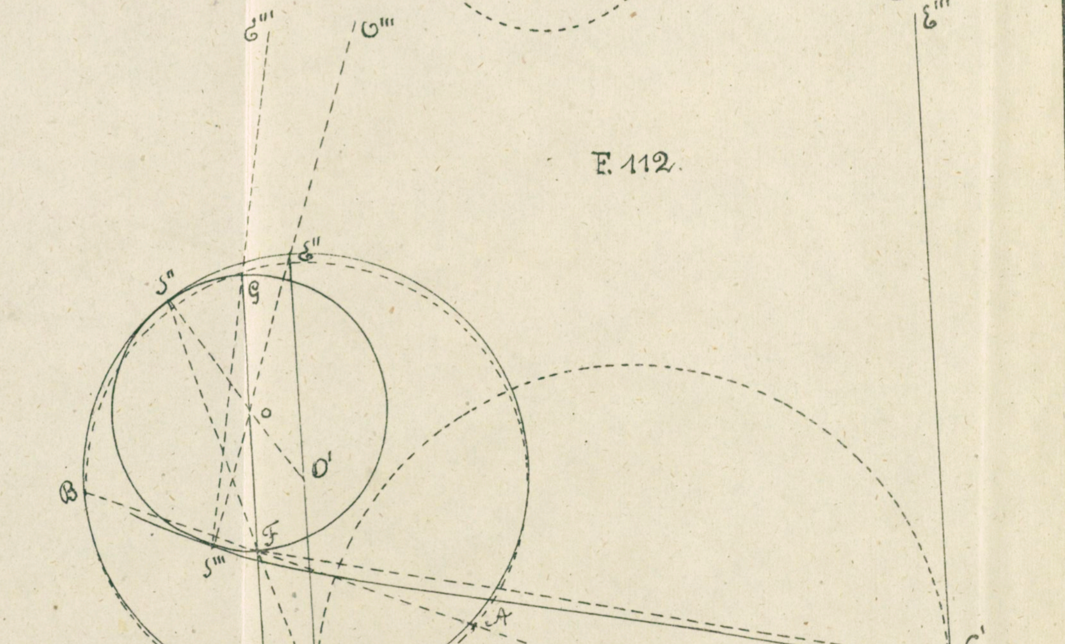


F 117.

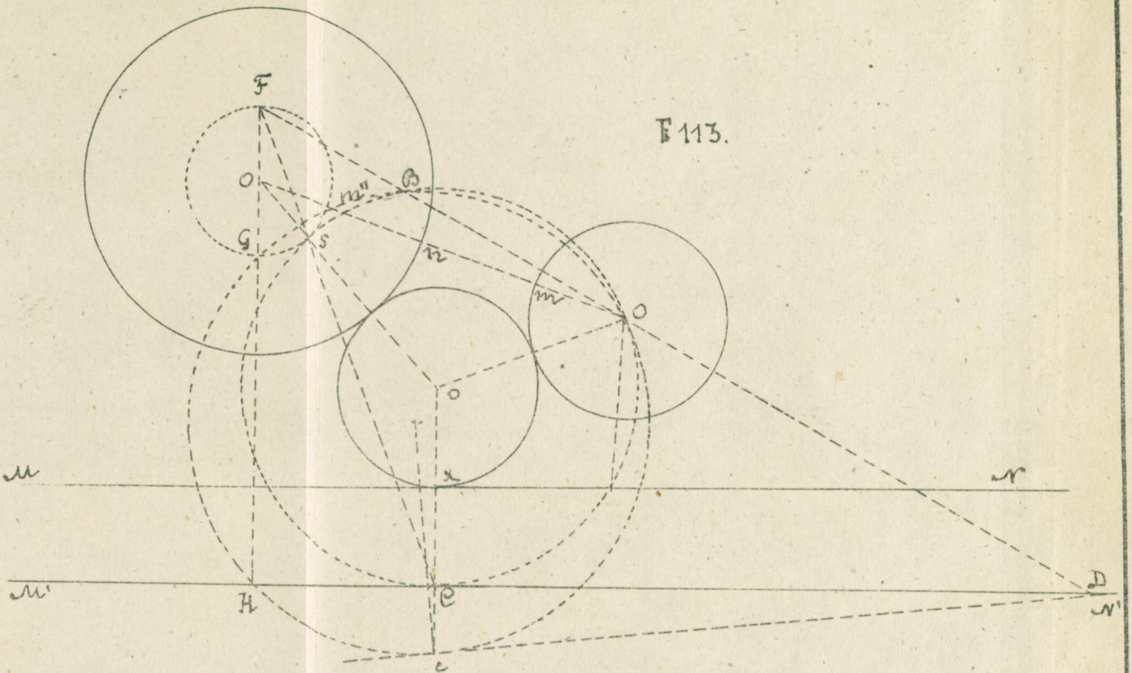
F. 111.



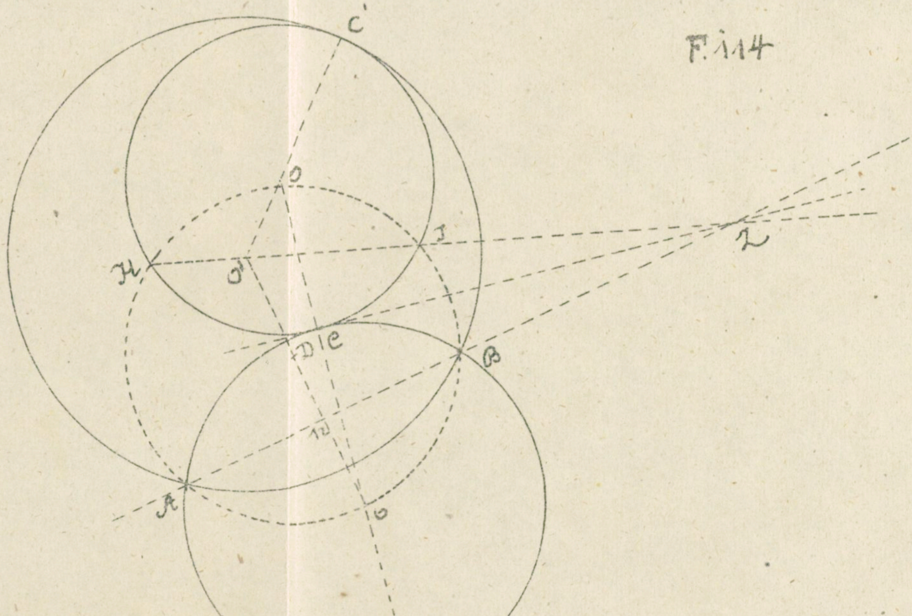
F. 112.



F. 113.



F. 114



PIERWSZE POCZĄTKI GEOMETRYI WYŻSZÉJ