HYDRODYNAMIK

AUERBACH

145

1777

1777

DIE

THEORETISCHE HYDRODYNAMIK.

NACH DEM

GANGE IHRER ENTWICKELUNG

IN

DER NEUESTEN ZEIT.

Holzstiche
aus dem xylographischen Atelier
von Friedrich Vieweg und Sohn
in Braunschweig.

Papier
aus der mechanischen Papier-Fabrik
der Gebrüder Vieweg zu Wendhausen
bei Braunschweig.

DIE

THEORETISCHE HYDRODYNAMIK.

NACH DEM

GANGE IHRER ENTWICKELUNG

IN

DER NEUESTEN ZEIT

IN KÜRZE DARGESTELLT

VON

DR. FELIX AUERBACH,
Privatdocent an der Universität zu Breslau.

VON DEM

K. VENETIANISCHEN INSTITUTE DER WISSENSCHAFTEN ETC.

GEKRÖNTE PREISSCHRIFT.

MIT IN DEN TEXT EINGEDRUCKTEN HOLZSTICHEN.

BRAUNSCHWEIG,
DRUCK UND VERLAG VON FRIEDRICH VIEWEG UND SOHN.
1881.

SEINEM THEUEREN VATER

DR. MED. LEOPOLD AUERBACH,

PROFESSOR AN DER UNIVERSITÄT ZU BRESLAU

IN

KINDLICHER LIEBE UND DANKBARKEIT

ZUGEEIGNET

VOM

VERFASSER.

VORREDE.

Auf eine von dem Königlich Venetianischen Institute der Wissenschaften etc. gestellte Preisaufgabe (Stiftung Querini-Stampalia) über die wesentlichen Fortschritte der theoretischen Hydrodynamik liefen drei Bearbeitungen, sämmtlich in deutscher Sprache, ein, von welchen diejenige des Verfassers mit dem Preise gekrönt wurde. Mit ihr stimmt die vorliegende Schrift fast vollständig überein. Zwar hätte der Verfasser gern einzelnen Capiteln Zusätze beigefügt, theils um die neuesten Forschungen eingehend zu berücksichtigen, theils um das, was er in der Preisschrift aus Mangel an Zeit zu behandeln versäumt hatte, nachzuholen und so noch nachträglich der ihm zuerkannten Auszeichnung sich würdig zu erweisen; allein gerade der Charakter als Preisschrift nöthigte ihn, wenigstens vorläufig hiervon abzustehen.

Im Uebrigen beschränkt sich der Verfasser darauf, den bezüglichen Bestimmungen gemäss, aus dem Berichte der Prüfungscommission das auf seine Abhandlung Bezügliche in deutscher Uebersetzung im Auszuge hier mitzutheilen; er thut dies um so lieber, als der Bericht in seinem wesentlichen Theile eine kurze, aber deutliche Uebersicht über den behandelten Gegenstand giebt. Es heisst daselbst:

„Die dritte Abhandlung, mit dem Motto „Narrando judico“, ist der ernstesten Betrachtung werth. Nachdem der Verfasser einen allgemeinen Begriff von den zur theoretischen Hydrodynamik gehörigen Fragen gegeben hat, theilt er seine Arbeit in drei Theile, welche handeln: 1) Von den Grundgleichungen für die Bewegung idealer, d. h. nichtreibender Flüssigkeiten. 2) Von deren Anwendungen auf die wichtigsten Probleme der Hydrodynamik. 3) Von der Reibung der Flüssigkeiten.

Von der Hypothese idealer Flüssigkeiten ausgehend, d. h. die Gleichheit des Drucks in allen Richtungen voraussetzend, stellt der Verfasser im ersten Theile die Grundgleichungen sowohl in der *Euler*'schen als in der sogenannten *Lagrange*'schen Form auf und zeigt gegenüber der Ansicht von *Challis*, dass dieselben ausreichen. In Anbetracht des Umstandes aber, dass sie in der vorliegenden Form nur auf wenige Fälle anwendbar sind, geht er dazu über, die Transformationen darzustellen, welche mit ihnen vorgenommen worden sind, hauptsächlich in Anknüpfung an die Betrachtungen *Dirichlet*'s über das Verhältniss der *Lagrange*'schen Gleichungen zu den *Euler*'schen. Nach Anführung der *H. Weber*'schen Transformation wird ausführlicher diejenige von *Clebsch* und *Hankel* dargestellt, deren hohe Bedeutung derjenigen des Princips der kleinsten Wirkung in der allgemeinen

Dynamik völlig entspricht; hieran schliesst sich bequem die Einführung allgemeiner orthogonaler und speciell der elliptischen, Polar- und cylindrischen Coordinaten, sowie die Darstellung der späteren *Clebsch*'schen Transformation, durch welche man auf zwei Gleichungen zwischen zwei neuen Variabeln geführt wird, Gleichungen, welche für den Fall stationärer Bewegung sofortige Integration gestatten. Die andere von *Clebsch* angegebene, für nicht stationäre Bewegung brauchbare Transformation führt zu der wichtigen Frage der Zerlegung der Flüssigkeitsbewegung, wie sie von *Helmholtz* beantwortet und mathematisch durchgeführt worden ist, und welche schliesslich den Satz ergiebt, dass die Drehungsgeschwindigkeit gleich Null ist, sobald ein Geschwindigkeitspotential existirt. Nach Entwickelung der Idee *Beltrami's*, die Hydrodynamik analog der Elasticitätslehre zu behandeln, führt sodann der Verfasser an, wie dieselbe ebenfalls zu den *Helmholtz*'schen Resultaten führt.

Hiermit schliesst der grundlegende Theil. Den zweiten, die Anwendungen enthaltend, zerlegt der Verfasser in vier Abschnitte, in welchen er behandelt: 1) Strömung und Wellenbewegung. 2) Ausfluss und Strahlbildung. 3) Gleichzeitige Bewegung fester und flüssiger Körper und 4) Wirbelbewegung. In den drei ersten Abschnitten nimmt er die Existenz eines Geschwindigkeitspotentials an; insbesondere beschränkt er sich im ersten auf solche Fälle, in welchen dasselbe von der Zeit unabhängig, die Bewegung also stationär ist, führt die Begriffe der Niveaufläche, der Stromlinie und des Stromfadens nach *Kirchhoff* ein und bemerkt, dass man in solchen Fällen specielle Lösungen erhält in den Functionen, welche der Continuitätsgleichung genügen. Zu diesem Zwecke muss man in letztere neue Coordinaten einführen, was nach den im ersten Theil entwickelten Methoden geschehen kann. So führt die Transformation in elliptische Coordinaten zu Lösungen, welche zwar für die Hydrodynamik nicht von erheblichem Interesse, von desto grösserem aber für die Elektrostatik und Akustik sind. Den Schluss dieses den Strömungen gewidmeten Theiles bildet die Betrachtung solcher Strömungen, welche vorzugsweise in der Richtung einer geraden oder krummlinigen Axe erfolgen, und für welche, falls entweder der Querschnitt oder der Längsschnitt ein constanter ist, die wichtigen *Stefan*'schen Sätze gelten.

Hierauf wendet sich der Verfasser zur Betrachtung der Wellenbewegung und berichtet über die Ergebnisse von *Green*, *Airy*, *Kelland*, *Robertson*, *Hagen* und *Boussinesq*, untersucht das von letzterem behandelte Problem der Bewegung des Wassers in Canälen, falls nur die Längsrichtung und die verticale von Einfluss sind, und giebt die *St. Venant*'sche Lösung des Wellenproblems an, welche jedoch streng nur für unendliche Tiefe gilt. Schliesslich hebt er die Lösung *Kirchhoff*'s für schiefen Boden, sowie die Arbeiten *Rankine's*, *Thomson's* und *Weber's* über die Zusammensetzung der Wellenbewegung mit anderen Bewegungen hervor. Der Rest des Abschnittes ist einer kurzen Darstellung der Untersuchungen gewidmet, welche über die Theorie der

Gezeiten von *Airy, Challis, Abbot* und von *Thomson* und *Tait* angestellt sind; die Hauptsätze, in welche die letzteren die Theorie zusammenfassen, stellt der Verfasser zusammen und berechnet angenähert die geographische Breite, in welcher ein gewisser Theil der Fluth und Ebbe verschwindet.

Im zweiten Abschnitt bespricht der Verfasser zunächst die auf die Contractio venae bezüglichen Experimentaluntersuchungen, sowie die theoretischen Versuche von *Bayer, Gauckler* und *Boussinesq*, welche mit der Erfahrung ziemlich gut stimmen, von denen aber die ersteren auf zweifelhaften Hypothesen beruhen, während der letztere vortheilhaft durch die von *Helmholtz* und *Kirchhoff* benutzte Methode der ähnlichen Abbildung ersetzt wird, deren eingehende Darstellung nun folgt.

Ausführlicher als die ersten sind die letzten beiden Abschnitte dieses Theiles behandelt; Gebiete, in denen gerade in den letzten Jahrzehnten die gewaltigsten Fortschritte gemacht worden sind. Indem der Verfasser zunächst auf die Bewegung fester Körper in Flüssigkeiten eingeht, führt er die von *Dirichlet* gegebene Lösung für die Kugel und die Ausdehnung derselben von *Hoppe* auf Rotationskörper an, welche sich längs ihrer Axe bewegen; er behandelt dann die allgemeineren Lösungen von *Clebsch, Thomson* und *Tait, Kirchhoff* und *Bjerknes*, und zwar besonders ausführlich die von *Kirchhoff* gegebene Behandlung des Falles der Bewegung eines Rotationskörpers, dessen Axe stets in derselben Ebene bleibt; dieselbe zeichnet sich noch dadurch aus, erstens, dass sie die für beliebige Körper und beliebige Kräfte giltigen Bewegungsgleichungen aufzustellen gestattet; sodann dadurch, dass sie das *Hamilton*'sche Princip zum Ausgangspunkt nimmt. Bei dem Falle zweier Ringe, auf welchen der Verfasser nach kurzer Erwähnung der Arbeiten von *Dini, Clebsch, Weber* zu sprechen kommt, und welcher ebenfalls von *Kirchhoff* zuerst behandelt ist, wird die Geschwindigkeit, da der Raum vielfach zusammenhängend ist, vieldeutig; es darf daher, wie *Boltzmann* bemerkt hat, das *Hamilton*'sche Princip nicht ohne Weiteres angewendet werden. Schliesslich folgt eine Auseinandersetzung der von *Kirchhoff* resp. *Bjerknes* behandelten Fälle zweier beliebiger Körper, resp. vieler Kugeln, welche in einer Flüssigkeit sich bewegen, sowie die Bemerkung, dass die hieraus zu ziehenden Schlüsse von *Schiötz* zum grossen Theil experimentell bestätigt worden sind.

Der letzte Abschnitt des zweiten Theils ist den Wirbelbewegungen gewidmet; und zwar folgt auf eine kurze Erwähnung der ersten Untersuchungen *Svanberg*'s sofort die Entwickelung der Ideen von *Helmholtz* sowie die Anführung der wichtigsten, aus ihnen für incompressible Flüssigkeiten bei Existenz eines Kräftepotentials folgenden Sätze. Der Verfasser zeigt, wie sich nach *Helmholtz* aus den Wirbelgeschwindigkeiten die Bewegungsgeschwindigkeiten herleiten lassen, und hebt die merkwürdige Analogie zwischen diesen und den elektrodynamischen Erscheinungen hervor; er setzt sodann auseinander, auf welchem Wege *Hankel* das von der Göttinger Philosophischen Facultät gestellte Problem löste, die Wirbelbewegungen aus den *Lagrange'*schen Grundgleichungen herzuleiten. Hierauf folgt eine kurze aber deutliche Uebersicht über die wichtige Arbeit unseres Landsmannes *Beltrami*, über seine Art, die Wirbellinien und Wirbelfäden zu betrachten und über den Weg, auf dem er zu dem schon von *Helmholtz* angegebenen Resultate gelangt, dass in einem einfach zusammenhängenden Raume eine incompressible Flüssigkeit, die ihn vollständig erfüllt, nur wirbelnd, in einem mehrfach zusammenhängenden Raume aber nur auf ganz bestimmte Weise ohne Wirbel sich bewegen könne. In dem nun folgenden speciellen Theile werden zunächst die geradlinigen Wirbelfäden nach *Kirchhoff* und *Groebli*, sodann die kreisförmigen behandelt und zwar speciell der Fall zweier Wirbelringe; dabei werden auch die Ausdrücke für das Potential angegeben, welche von *Beltrami* herrühren und welche, ganz analog denen für das elektromagnetische Potential, für den Fall ebener Axen auf ein elliptisches Integral erster und eins zweiter Gattung führen. In Wahrheit sind die Erscheinungen der Wirbelbewegungen nicht ewige, sondern, in Folge der Reibung, vergängliche; es ergiebt sich so die Nothwendigkeit, die wirklichen, d. h. die reibenden Flüssigkeiten der Betrachtung zu unterwerfen, und dies geschieht im dritten Theile.

Zunächst wird zwischen innerer und äusserer Reibung unterschieden, die ersten Untersuchungen von *Navier* und *Cauchy*, *Poisson* und *St. Venant* werden angeführt und dann die Theorie von *Stokes* besprochen, welche zwar für incompressible Flüssigkeiten zu denselben Resultaten führt, die sich aber durch die Einfachheit der Hypothesen auszeichnet. Sodann werden nach *Meyer* aus der *Newton*'schen Theorie die Bewegungsgleichungen abgeleitet und, unter Hinweisung auf die Schwierigkeit der Grenzbedingungen, diejenigen unter ihnen aufgestellt, welche ganz allgemein gelten, und welche für unveränderliche Oberflächen ebenfalls von *Meyer* herrühren. Zum Schlusse wird der Weg angegeben, auf welchem *Stefan* und *Kirchhoff* die Reibungsgleichungen analog den Elasticitätsgleichungen abgeleitet haben. Nach diesen Vorbereitungen schreitet der Verfasser zu der Behandlung der wenigen speciellen Probleme, welche bis jetzt gelöst worden sind.

Das erste ist das Problem der Pendelschwingungen einer Kugel unter Einfluss einer umgebenden Flüssigkeit; für diesen Fall hat *Stokes* die erste Integration der Gleichungen bewerkstelligt; *Meyer* hat mit Hilfe einer Transformation die Untersuchung durchgeführt und ist so zu den wichtigen Sätzen gelangt, welche der Verfasser am Ende hervorhebt. Als zweiten Fall behandelt er den einer kreisförmigen Scheibe, welcher bei der Grösse des Einflusses der Reibung sehr geeignet zur Berechnung der Reibungsconstanten ist. Nach Anführung der Versuche *Coulomb*'s und *Meyer*'s beschreibt er die Betrachtungen und die Lösung des Letzteren, gewonnen nach einer der obigen analogen Methode; jedoch werden, ihrer Complication wegen, die Formeln nicht für den allgemeinen Fall, sondern nur für den schwacher Reibung angeführt und aus ihnen diejenigen Folgerungen gezogen, welche entweder bei unbegrenzter oder bei begrenzter Flüssigkeit gelten. Darauf wird die für den praktischen Zweck der Berechnung der Reibungsconstanten sehr geeignete Idee *Maxwell's*, zwischen die schwingenden Scheiben feste zu stellen, erwähnt und zuerst unter Vernachlässigung des Einflusses der Ränder, sodann aber unter Annahme einer sehr geringen Krümmung derselben die Rechnung ausgeführt; auch hier wird im Wesentlichen auf die Untersuchungen von *Meyer* hingewiesen.

Der Fall eines Ellipsoids wurde von *Oberbeck* behandelt, welcher von der Betrachtung ausging, dass, wenn ein Problem ohne Rücksicht auf die Reibung behandelt sei, es genüge, die Wirbelcomponenten hinzuzufügen, um den Einfluss der Reibung in Rechnung zu ziehen. Schliesslich werden die von *Helmholtz* resp. von *Lübeck* behandelten Drehungs- und Pendelschwingungen eines Pendels mit einer von Flüssigkeit erfüllten Hohlkugel angeführt.

Das letzte Problem betrifft die Bewegung der Flüssigkeiten durch cylindrische Röhren, d. h. die Arbeiten von *Poiseuille*, *Neumann*, *Helmholtz*, *Stefan*, *Oberbeck*, *Boussinesq*, *Meyer* und Anderen. Namentlich finden die von *Stefan* gefundenen Sätze Besprechung, von denen hier nur der angeführt werden möge, dass die Wirbelgeschwindigkeit der Druckhöhe und dem Abstand von der Axe direct, der Röhrenlänge aber umgekehrt proportional ist, und dass unter mittleren Umständen Hunderte, ja Tausende von Umdrehungen in der Secunde erfolgen. Daran reiht sich endlich die Darstellung der Ergebnisse der Arbeiten von *Boussinesq* über die Fälle elliptischer und rechteckiger Röhren, sowie eine Uebersicht über die neuesten, diesen Gegenstand betreffenden Untersuchungen.

Zum Schlusse fasst der Verfasser die wesentlichen neuesten Fortschritte der theoretischen Hydrodynamik folgendermaassen zusammen: Vor allem ist hervorzuheben die Würdigung der *Lagrange*'schen Gleichungen durch *Dirichlet*, sodann die Erkenntniss der Wichtigkeit des *Hamilton*'schen Princips, welche von *Clebsch* und *Hankel* ausging, von *Thomson* und *Tait* und von *Kirchhoff* verwerthet und schliesslich von *Boltzmann* völlig klargestellt wurde. Den dritten wichtigen Schritt erblickt der Verfasser in der Zerlegung der Flüssigkeitsbewegung und Auffindung der Wirbelbewegung durch *Helmholtz*, sowie in der Weiterführung dieser Ideen durch *Thomson*, *Kirchhoff* und unseren Landsmann *Beltrami*; endlich den letzten in den Arbeiten von *Stokes* und *Meyer*, welchen es gelang, die Reibungsgleichungen zu integriren.

Der Verfasser bemerkt noch, dass alle hier besprochenen Fortschritte auf der Stetigkeitshypothese beruhen, und dass die dieser gegenüberstehende, die Molecularhypothese, zwar für die Gase, nicht aber für die hier ins Auge gefassten tropfbaren Flüssigkeiten fruchtbar geworden ist; auch darf man in Anbetracht der Schwierigkeiten, welche der Anwendung dieser Theorie schon bei den viel einfacheren Gasen gegenüberstanden, die Lösung des entsprechenden Problems für die Flüssigkeiten nicht allzubald erwarten.

Aus diesem gedrängten Berichte, welchen wir über die wichtige Arbeit geben zu sollen glaubten, werden Sie das Wesentliche derselben mit Leichtigkeit ersehen haben: die ausgezeichnete Anordnung des Stoffes, die strenge Analyse der verschiedenen Fragen; dazu eine ausgedehnte Bibliographie, welche jedem diesen Gegenstand Studirenden von grossem Vortheile sein muss. Man wird also nicht fehl gehen, wenn man behauptet, in dieser Arbeit ein vollständiges Bild alles dessen zu haben, was zu dem in Rede stehenden Theile der rationellen Mechanik gehört, gleichzeitig aber eine vollständige Lösung des von uns gestellten Problems. Und wenn auch hier und da grössere Ausführlichkeit erwünscht gewesen wäre, so zögern wir doch nicht, Ihnen vorzuschlagen, dieser Arbeit den für die beste Abhandlung über die theoretische Hydrodynamik ausgesetzten Preis zuzuerkennen, zugleich mit dem Wunsche, die Schrift, welche für die italienischen Forscher von so grossem Nutzen sein würde, möchte auch in unserer Sprache veröffentlicht werden. Das würde ihr auch bei uns eine grössere Verbreitung geben und so auch hier zu Lande die bezüglichen Studien fördern, in welchen die Ausländer so grossen Ruhm und unser Landsmann *Beltrami* so grosse Ehre geerntet hat."

G. Bellavitis. **F. Rossetti.**

D. Turazza,
Referent.

INHALTSVERZEICHNISS.

Zweiter Abschnitt.

Ausfluss und Strahlbildung.

Dritter Abschnitt.

Gemeinschaftliche Bewegung fester und flüssiger Körper.

Vierter Abschnitt.

Wirbelbewegungen.

Dritter Theil.

Theorie der Reibung.

Schluss.

EINLEITUNG.

§. 1.

Mit besonderem Rechte scheint mir die Königlich Venetianische Gesellschaft der Wissenschaften die Frage nach den Fortschritten der Hydrodynamik aufgestellt und an die Forscher aller Nationen gerichtet zu haben. Denn auf italienischem Boden war es, dass vor mehr als zweitausend Jahren ein erleuchteter Geist, *Archimedes*, den Grundstein zur Lehre von der Bewegung der Flüssigkeiten legte; freilich durch eine spärliche und unvollkommene Anzahl von Beobachtungen und Ideen; aber doch so klar und den Begriffen der gleichzeitigen und folgenden Generationen so weit vorauseilend, dass derjenige, welcher die Geschichte dieser Disciplin verfolgen will, getrost das auf *Archimedes* folgende Jahrtausend und fast noch ein zweites überspringen darf, ohne Gefahr zu laufen, sich in einer neuen Epoche der Wissenschaft wiederzufinden. So findet jener bekannte Ausspruch *Guido Ubaldi's* „Quapropter ad Archimedem confugiendum est, si vera hujus scientiae principia perdiscere cupimus“ auf die Mechanik der Flüssigkeiten mit nicht geringerer Berechtigung Anwendung, als auf die Bewegungslehre im Allgemeinen.

Und wie der Einzelne, der durch Krankheit oder ähnliches Missgeschick zeitweilig am geistigen Fortleben verhindert ist, weit zurückbleibt nicht nur hinter der Mitwelt, sondern auch hinter seinem eigenen Wissen, und wie es, nach eingetretener Genesung, ihm Mühe kostet, zunächst auch nur seinen einstigen Standpunkt wieder zu gewinnen, so verhielt es sich mit der Wissenschaft, als sie aus tausendjährigem Schlummer erwachte. Die Ersten, welche auf dem verödeten Felde erschienen, *Stevin*, *Heron* und Andere, hatten genug damit zu thun, festen Fuss zu fassen, und selbst Männer wie *Galilei* kamen aus Vorstellungen nicht heraus, welche jeden wahren Fortschritt der Wissenschaft unmöglich machen mussten.

Da war es wiederum ein Italiener, *Galilei's* grösster Schüler, *Toricelli*, welcher im speciellen Gebiete der Hydrodynamik gegen die Naturphilosophen Front machte, wie es im grossen Gebiete der Erkenntnisslehre *Bacon* gethan; der horror vacui zog sich vor der leuchtenden Fackel der Wahrheit zurück, und der Sieg war errungen.

Aber ich habe gesagt, mit besonderem Rechte scheine mir eine gelehrte italienische Corporation die vorliegende Frage aufgestellt *und an die Gelehrten aller Nationen gerichtet zu haben;* diesen zweiten Theil des Satzes zu erläutern bleibt mir noch übrig. Allein genügt es in dieser Hinsicht nicht, auf die Namen der Männer hinzuweisen, welche die Wissenschaft weiter geführt haben, welche, getrennt durch die Kluft der Räume und die Verschiedenheit der Sprache, aber von Einem Geiste beseelt, aus der Hydrodynamik jenes glanzvolle, reiche und tiefe Kunstwerk gemacht haben, welches sich heute vor unseren Blicken entfaltet? Wenn ich eines *Laplace* und *Lagrange*, eines *Euler* und *Bernouilli*, eines *Newton*, *Stokes* und *Maxwell*, eines *Dirichlet* und *Clebsch*, eines *Helmholtz* und *Kirchhoff* gedenke? Und in der That, wenn nicht die täglich uns umgebende Welt, wenn nicht das endlose Meer und der tosende Wasserfall, der schäumende Wein und der wirbelnde Tabacksrauch für sich selbst sprächen: aus dem Umstande, dass so viele ausgezeichnete Männer in diesem Gebiete gearbeitet und gewirkt haben, müssten wir die Ueberzeugung gewinnen, dass es lohnend und von Interesse sei, die Entwicklung der Hydrodynamik näher zu verfolgen.

§. 2.

Im Folgenden geschieht dies, etwa für den Zeitraum der letzten dreissig bis vierzig Jahre. Dabei habe ich mir nach der einen Seite hin möglichst viel, nach der andern möglichst wenig vorgenommen. Ich will es versuchen, möglichst tief in das Wesentliche der einschlägigen Theorien einzudringen um die Darstellung selbst schon zur Kritik werden zu lassen; aber andererseits werde ich den Stoff, welchen ich in die Darstellung aufnehme, möglichst einschränken; bei der ausserordentlichen Fülle des Materials kann dies für die Einheitlichkeit und Uebersichtlichkeit des Ganzen nur vortheilhaft sein.

Man kann die Hydrodynamik in ihrer allgemeinsten Bedeutung in *vier* Theile zerlegen, je nachdem es sich um *Gleichgewicht* oder *Bewegung*, und je nachdem es sich um *tropfbare* oder *elastische Flüssigkeiten* handelt.

Ich werde im Folgenden zwar, so lange es die Umstände gestatten und wünschenswerth erscheinen lassen, allgemein bleiben; sobald es sich jedoch als erforderlich herausstellt, zu specialisiren, so werde ich diejenigen Annahmen benutzen, welche sich auf die Bewegung tropfbarer Flüssigkeiten beziehen, d. h. ich werde mich auf die *Hydrodynamik* im engeren Sinne beschränken. Von den Erscheinungen, welche hiernach eigentlich in den Bereich der Hydrodynamik fallen, welche jedoch ebenfalls im Folgenden unberücksichtigt bleiben sollen, nenne ich die Erscheinung der Rotation eines gravitirenden flüssigen Ellipsoids. Maassgebend hierbei war, abgesehen von äusseren Gründen, die Erwägung, dass die Behandlung dieser Erscheinung im Wesentlichen keine hydrodynamische, sondern eine hydrostatische ist, da man von der stationären Rotation in dem einen Falle (dem eines Rotationsellipsoids) gänzlich absehen kann, wenn man die Centrifugalkraft einführt, während es sich auch in dem anderen Falle vorzüglich um die Bestimmung der Gleichgewichtsgestalt der Oberfläche handelt.

Den Rest theile ich in drei Theile. Im ersten handelt es sich um die Grundgleichungen für die Bewegung idealer, d. h. nicht reibender Flüssigkeiten; im zweiten um die Anwendung dieser Gleichungen auf die wichtigsten Probleme der Hydrodynamik (Strömungen und Schwingungen; Ausfluss und Strahlbildung; gleichzeitige Bewegung fester und flüssiger Körper; Wirbelbewegungen); endlich im dritten um die Theorie der Reibung der Flüssigkeiten. — Zu jedem dieser Capitel existirte im Anfange des hier betrachteten Zeitraumes nicht viel mehr als das Gerippe. Die Grundgleichungen lagen zwar in zweierlei Gestalt, der sogenannten *Euler*'schen und *Lagrange*'schen, vor; aber weder hinsichtlich der analytischen Gegensätzlichkeit ihrer Form und damit ihrer Anwendung waren sie hinreichend erkannt, noch war ihre Beziehung zur physikalischen und geometrischen Analyse der Flüssigkeitsbewegung in klarer Weise dargelegt worden; erst durch *Dirichlet*, *Clebsch* und *Hankel* geschah das Erstere, erst durch *Helmholtz* und *Beltrami* das Letztere. Von den im zweiten Theile behandelten speciellen Problemen gehören einige, insbesondere die Theorien der freien Flüssigkeitsstrahlen, der gleichzeitigen Bewegung fester und flüssiger Körper und der Wirbelbewegung nahezu gänzlich der letzten Periode an, und dasselbe gilt von der im dritten Theile behandelten Theorie der Bewegung der realen, d. h. der zähen oder reibenden Flüssigkeiten; denn auf die Skizzirung der Theorie durch *Newton* und die Aufstellung der Gleichungen durch *Navier* folgte erst in der neuesten Zeit deren Integration, insbesondere durch *Stokes*, *Meyer* und *Maxwell*.

Fällt somit die Darstellung der Entwicklung der Hydrodynamik in den letzten Decennien nahezu mit einer Gesammtdarstellung ihres Werdens zusammen, so stellt sich um so mehr die Nothwendigkeit heraus, im Detail Kürze zu beobachten. In der That genügt es auch in jedem Falle den Gedankengang eines einzigen Forschers eingehend zu verfolgen; diesem Ausgangspunkte lässt sich dann ohne Schwierigkeit die Kette der übrigen einschlägigen Ideen anreihen und so das vollkommene Bild des Gegenstandes gewinnen.

Erster Theil.

Die Grundgleichungen für die Bewegung idealer Flüssigkeiten.

§. 3.

Die Grundlage der gesammten Hydrodynamik bildet die Annahme, dass der Druck in einer idealen Flüssigkeit nach allen Richtungen derselbe sei. Man kann diese Annahme, indem man ihr Wesen weiter verfolgt, noch anders aussprechen, nämlich dahin, dass in einer *idealen Flüssigkeit die Wechselwirkung zweier benachbarter unendlich kleiner Theile senkrecht gegen ihre Trennfläche gerichtet ist.* Die Beobachtung hat gezeigt, dass dies für ruhende Flüssigkeiten der Fall ist; hieraus folgt, dass im Zustande der Ruhe jede wirkliche Flüssigkeit eine ideale ist. Im Zustande der Bewegung ist das aber nicht mehr der Fall. Es lassen sich hier häufig die Erscheinungen nur beschreiben, wenn der Normalkraft zwischen zwei Theilchen eine Tangentialkraft hinzugefügt wird. In dem vorliegenden Theile soll jedoch von dieser Tangentialkraft abgesehen und die Annahme gemacht werden, dass es sich um bewegte, ideale Flüssigkeiten handele.

Wie in allen Gebieten der Physik, so ist auch hier das Erste die Aufstellung der Beziehungen, welche bei allen zugehörigen Bewegungen erfüllt sein müssen; es sind das Beziehungen zwischen Raumgrössen und Zeitgrössen, und sie können in zweierlei Weise aufgefasst werden. Man kann nämlich entweder fragen: *Was geht mit einem bestimmten materiellen Punkte in der Flüssigkeit im*

Laufe der Zeit vor? oder man kann fragen: *Was geht an einem bestimmten Orte des Raumes im Laufe der Zeit vor?* Im ersten Falle fragt man mathematisch ausgedrückt: Welche Functionen der Zeit und des Ortes sind diejenigen Grössen, welche einen bestimmten materiellen Punkt der Flüssigkeit bestimmen? Im zweiten Falle fragt man: Welche Functionen von Raum und Zeit sind diejenigen Grössen, welche die Bewegung charakterisiren? Mit diesen Fragen hat sich bekanntlich *Euler* zuerst beschäftigt. Er legte ein rechtwinkliges Coordinatensystem zu Grunde, bezeichnete die Coordinaten eines Punktes des Raumes mit x, y, z, die Zeit mit t, und ermittelte einerseits die nothwendigen Beziehungen zwischen den Grössen x, y, z, t und den ein materielles Theilchen bestimmenden Werthen a, b, c, welche x, y, z für $t = 0$ annehmen (offenbar dürfen es aber beliebige, das Theilchen bestimmende Grössen sein); andererseits die nothwendigen Beziehungen zwischen den Geschwindigkeitscomponenten, d. h. den Grössen

$$u = \frac{dx}{dt}, \quad v = \frac{dy}{dt}, \quad w = \frac{dz}{dt} \tag{1}$$

und den Ort und Zeit vollständig bestimmenden Grössen x, y, z, t. Die ersteren Beziehungen nennt man die *Lagrange*'schen, die letzteren die *Euler*'schen hydrodynamischen Gleichungen [1]). An ihnen ist im Laufe von mehr als hundert Jahren nichts Wesentliches geändert worden; hinsichtlich der Einfachheit und Klarheit ihrer Ableitung sind jedoch mit der Zeit Fortschritte gemacht worden, welche es wünschenswerth erscheinen lassen, auf dieselbe einen Blick zu werfen.

§. 4.

Wir gehen von den allgemeinen Gleichungen der Dynamik aus, die wir nur insofern specialisiren oder vielmehr analysiren wollen, dass wir zwischen Massenkräften und Flächen- oder Druckkräften unterscheiden wollen. Die Componenten nach den Coordinatenaxen der ersteren seien X, Y, Z, diejenigen der letzteren

---

[1]) *Euler*, Princ. gén. du mouv. des fluids, 1755. De princ. mot. fluid. Nov. Comm. Acad., Petr. 14, 1759. *Lagrange*, Méc. anal. 2. Vergl. *Hankel*, Zur allg. Th. d. Bew. d. Flüss., 1861, S. 3, wonach beide Gleichungsformen von *Euler* herrühren.

seien X_n, Y_n, Z_n; erstere bezogen auf die Masseneinheit, letztere bezogen auf die Flächeneinheit. Die Bewegungsgleichungen, welche streng genommen nichts anderes als der Ausdruck der Annahme der Aequivalenz zwischen Ursache und Wirkung sind, lauten dann:

$$\left.\begin{aligned} \int \varrho \frac{d^2 x}{d t^2} d\tau &= \int \varrho X d\tau + \int X_n ds \\ \int \varrho \frac{d^2 y}{d t^2} d\tau &= \int \varrho Y d\tau + \int Y_n ds \\ \int \varrho \frac{d^2 z}{d t^2} d\tau &= \int \varrho Z d\tau + \int Z_n ds \end{aligned}\right\} \qquad (1\,a)$$

Hierin bedeutet ϱ die Dichtigkeit, $d\tau$ ein Raumelement, ds ein Flächenelement. Die Druckkräfte X_n, Y_n, Z_n empfiehlt es sich im Allgemeinen in je drei Componenten zu zerlegen, darstellend die betreffenden Druckcomponenten ebenfalls am Orte des Flächenelements ds, aber nicht auf dieses wirkend, sondern auf drei den Coordinatenebenen parallele Flächenelemente, welche die Projectionen des Elementes ds sind. Nennt man diese Grössen

$$X_x,\ X_y,\ X_z,\quad Y_x,\ Y_y,\ Y_z,\quad Z_x,\ Z_y,\ Z_z,$$

so lehrt die zweite Ausspruchweise der im §. 3 gemachten Grundannahme ohne Weiteres, dass für ideale Flüssigkeiten die sechs Grössen

$$X_y,\ X_z,\quad Y_x,\ Y_z,\quad Z_x,\ Z_y$$

verschwinden, und dass die drei übrigen

$$X_x,\ Y_y,\ Z_z$$

einander und derjenigen Grösse gleich sind, welche von den älteren Analytikern schlechtweg als der Druck p eingeführt wurde. Die Grössen $X_n\, Y_n\, Z_n$ werden daher in diesem Falle gleich den Producten aus dem Drucke p in die Cosinus der Winkel, welche die Normale von ds mit den Coordinatenaxen einschliesst, d. h. es wird

$$\left.\begin{aligned} \int X_n ds &= \int p \cos(nx) ds = \int \frac{\partial p}{\partial x} d\tau \\ \int Y_n ds &= \int p \cos(ny) ds = \int \frac{\partial p}{\partial y} d\tau \\ \int Z_n ds &= \int p \cos(nz) ds = \int \frac{\partial p}{\partial z} d\tau \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

mit Benutzung der bekannten Transformationsformel von Flächenintegralen in Raumintegrale. Setzt man diese Werthe für die Flächenintegrale in die Gleichungen (1 a) ein, so erhält man Gleichungen zwischen lauter Integralen über den Raum, dessen Element $d\,t$ ist, da sie für jeden Theil dieses Raumes gelten sollen, so müssen sie auch durch die Factoren von $d\,t$ unter den Integralzeichen befriedigt werden, man hat

$$\left.\begin{aligned} \varrho\frac{d^2x}{dt^2} &= \varrho X - \frac{\partial p}{\partial x} \\ \varrho\frac{d^2y}{dt^2} &= \varrho Y - \frac{\partial p}{\partial y} \\ \varrho\frac{d^2z}{dt^2} &= \varrho Z - \frac{\partial p}{\partial z} \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

wo das Zeichen ∂ den partiellen Differentialquotienten andeutet. Diese Gleichungen sind jedoch zur unmittelbaren Anwendung nicht geeignet, weil die Grössen x, y, z in ihnen gleichzeitig als abhängige und als unabhängige Variabele auftreten.

Am einfachsten ist es, zur Hebung dieses Uebelstandes die Geschwindigkeitscomponenten als abhängige Variabele einzuführen; nach Auflösung der Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} \varrho\frac{du}{dt} &= \varrho X - \frac{dp}{dx} \\ \varrho\frac{dv}{dt} &= \varrho Y - \frac{dp}{dy} \\ \varrho\frac{dw}{dt} &= \varrho Z - \frac{dp}{dz} \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

hat man dann noch die Gleichungen (1) aufzulösen. Dies sind die *Euler'schen Gleichungen.*

Man kann aber die Grössen x, y, z, statt sie da zu eliminiren, wo sie als abhängige Variabele auftreten, auch da eliminiren, wo sie als unabhängige Variabele auftreten, indem man irgend welche ein Flüssigkeitstheilchen bestimmende Grössen a, b, c neben t als unabhängige Variabele einführt; dadurch kommt man zu den Gleichungen

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial a}+\left(\frac{d^2 x}{d t^2}-X\right)\frac{\partial x}{\partial a}+\left(\frac{d^2 y}{d t^2}-Y\right)\frac{\partial y}{\partial a}\\
&\qquad\qquad+\left(\frac{d^2 z}{d t^2}-Z\right)\frac{\partial z}{\partial a}=0\\
&\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial b}+\left(\frac{d^2 y}{d t^2}-X\right)\frac{\partial x}{\partial b}+\left(\frac{d^2 y}{d t^2}-Y\right)\frac{\partial y}{\partial b}\\
&\qquad\qquad+\left(\frac{d^2 y}{d t^2}-Z\right)\frac{\partial z}{\partial b}=0\\
&\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial c}+\left(\frac{d^2 x}{d t^2}-X\right)\frac{\partial x}{\partial c}+\left(\frac{d^2 y}{d t^2}-Y\right)\frac{\partial y}{\partial c}\\
&\qquad\qquad+\left(\frac{d^2 z}{d t^2}-Z\right)\frac{\partial z}{\partial c}=0
\end{aligned}\right\}\qquad(5)$$

welche ebenfalls von *Euler* herrühren, aber erst durch *Lagrange* bekannt geworden sind, nach welchem sie die *Lagrange*'schen heissen.

§. 5.

Die drei abgeleiteten Gleichungen reichen nicht aus, um die vier unbekannten Grössen u, v, w, p in dem einen Falle oder x, y, z, p in dem anderen vollständig zu bestimmen. Hierzu dient eine vierte Gleichung, welche in der That bei allen Bewegungen erfüllt sein muss, welche aber bei den festen Körpern gewöhnlich nicht berücksichtigt wird, weil sie hier selbstverständlich ist und keine Bedeutung hat. Diese Gleichung sagt aus, dass die Masse eines bestimmten materiellen Theilchens der Flüssigkeit mit der Zeit sich nicht ändere. Sie lautet in der den *Euler*'schen Bewegungsgleichungen entsprechenden Form, in welcher man sie leicht aus der ursprünglichen

$$\frac{d(\varrho\, d\tau)}{d t}=0$$

ableiten kann:

$$\frac{d\varrho}{d t}+\varrho\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)=0, \qquad (6)$$

also speciell für incompressible Flüssigkeiten

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0. \tag{7}$$

In einer den *Lagrange*'schen Bewegungsgleichungen entsprechenden Form ist diese Gleichung, welche gewöhnlich *Continuitätsgleichung* genannt wird, erst in neuerer Zeit dargestellt worden. Bekannte Sätze der Theorie der Functionaldeterminanten ergeben hierfür

$$\frac{d(\varrho D)}{dt} = 0, \quad D = \frac{c}{\varrho} \tag{8}$$

also für incompressible Flüssigkeiten

$$D = c, \tag{9}$$

wo c eine Constante und

$$D = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial a}, & \frac{\partial x}{\partial b}, & \frac{\partial x}{\partial c} \\ \frac{\partial y}{\partial a}, & \frac{\partial y}{\partial b}, & \frac{\partial y}{\partial c} \\ \frac{\partial z}{\partial a}, & \frac{\partial z}{\partial b}, & \frac{\partial z}{\partial c} \end{vmatrix} \tag{10}$$

gesetzt ist[1]).

Die Grösse ϱ steht schliesslich mit p in einem gegebenen Zusammenhange, der aber je nach der Natur der Flüssigkeit verschieden ist. Setzt man daher

$$P = \int \frac{dp}{\varrho}, \tag{11}$$

so fällt aus den drei eigentlichen Bewegungsgleichungen ϱ heraus. Im Folgenden wird da, wo überhaupt specialisirt werden muss, der Grösse ϱ ein constanter Werth und zwar, falls es auf diesen Werth nicht ankommt, der Werth 1 beigelegt werden.

§. 6.

Ein Zweifel daran, dass die fünf aufgestellten Gleichungen (4), (6), (11) oder (5), (8), (11) die vollständige Grundlage für die

---

[1]) *Hankel*, l. c. p. 7. Hier wird die Gleichung (8) Dichtigkeitsgleichung, die Gleichung (9) die Gleichung der Constanz des Volumens genannt.

Theorie der Bewegung idealer Flüssigkeiten bilden, ist nur von Einer Seite geäussert und mit grosser Hartnäckigkeit behauptet worden, nämlich von dem englischen Astronomen *Challis*[1]). Diese Angelegenheit kann hier nur flüchtig berührt werden, da sie von einem positiven Ergebniss für die theoretische Hydrodynamik nicht gekrönt worden ist.

Challis behauptet, es bedürfe zur Grundlegung der Hydrodynamik ausser den schon aufgestellten Gleichungen noch einer neuen, welche ausdrücke, dass die Bewegung immer und überall normal sein müsse zu continuirlich gekrümmten Flächen, den Niveauflächen. Um sie zu gewinnen, hat man die Gleichung der Niveauflächen

$$\psi(x, y, z, t) = 0$$

zu betrachten, aus welcher die neue

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial x} w + \frac{\partial \psi}{\partial y} v + \frac{\partial \psi}{\partial z} \cdot w = 0$$

folgt, und welche man auf die Form

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} + \lambda \left[\left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial z} \right)^2 \right] = 0 \qquad (12)$$

bringen kann, wenn man, unter λ einen integrirenden Factor verstehend,

$$d\psi = \frac{u}{\lambda} dx + \frac{v}{\lambda} dy + \frac{w}{\lambda} dz$$

und folglich

$$u = \lambda \frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad v = \lambda \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad w = \lambda \frac{\partial \psi}{\partial z} \qquad (13)$$

setzt.

Die Gleichung (12) ist dann die fehlende Gleichung, und die Gleichungen (12), (13), (6) und (11) in Verbindung mit einer die Gleichung (4) zusammenfassenden (etwa durch Multiplication mit dx, dy, dz und Addition zu erhaltenden) bilden dann ein System von sieben Gleichungen, aus welchen die sieben Grössen u, v, w, ϱ, p, ψ, λ bestimmt werden können.

Es ist von verschiedenen Physikern, unter anderen von *Stokes*[2]) und von *Tardy*[3]), gezeigt worden, dass die Gleichung von *Challis*

---

[1]) *Challis*, Phil. Mag. (3), Bd. 36. — (4), Bd. 1, 4, 6, 23, 30, 31.
[2]) *Stokes*, Phil. Mag. (4), Bd. 1, p. 157, 393, Bd. 2, p. 60.
[3]) *Tardy*, Phil. Mag. (3), Bd 36.

entweder, nämlich in der gegenwärtigen Gestalt (12), ebenso auch in der von *Challis* modificirten

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} + \lambda \left[\left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial z}\right)^2\right] + \chi(t) = 0 \qquad (12\,\text{a})$$

(wo χ eine beliebige Function von t ist) unrichtig, oder, wenn sie in gehöriger Weise umgestaltet wird, überflüssig ist, da sie dann nichts aussagt, was nicht durch die anderen Gleichungen auch ausgesagt würde.

Ich kann hier nicht auf die speciellen Fälle eingehen, welche *Challis* und seine Gegner zum Gegenstande ihrer Discussionen machten und welche zeigen, dass die Gleichungen (12) und (12 a) zu physikalischen Widersprüchen führen; auch die Anwendungen, welche *Challis* späterhin von seiner hydrodynamischen Theorie auf die Physik im Allgemeinen und die Aethertheorie im Speciellen machte [1]), scheinen mir ausserhalb des Rahmens dieser Darstellung zu liegen; es genügt hervorzuheben, dass der ganze Streit nur dazu gedient hat, zu zeigen, *dass die von Euler und Lagrange gegebene Begründung der Hydrodynamik nicht nur eine nothwendige, sondern auch eine ausreichende ist.* Ich kann mir jedoch nicht versagen, darauf hinzuweisen, dass eine nähere Betrachtung der Function λ zu dem später so wichtig gewordenen Begriffe des Geschwindigkeitspotentials (S. 29) und zur Zerlegung der Flüssigkeitsbewegung wenigstens für stationäre Bewegungen hätte führen müssen.

Auch die Discussion, welche zwischen *Challis* und *Moon* [2]) über die Frage sich entspann, ob man bei bewegten Flüssigkeiten den Druck p gleich $f(\varrho)$ setzen dürfe, oder nicht vielmehr

$$p = f(\varrho, u, v, w)$$

setzen müsse, verliert für Denjenigen jegliche Bedeutung, welcher erwägt, dass man das Recht hat, beim Uebergange von der Hydrostatik zur Hydrodynamik der für jene bereits definirten Grösse p eine neue Bedeutung beizulegen, und dass es unter diesen Umständen am bequemsten ist zu sagen: die Grösse p soll dieselbe Function der Dichtigkeit und nur der Dichtigkeit sein, welche sie beim Gleichgewicht war. Alles was dann etwa an Wechselbeziehungen zwischen Druck und Bewegungsgrössen auftritt, ist

[1]) *Challis*, Phil. Mag. (4) Bd. 31, p. 459.

[2]) *Challis* und *Moon*, Phil. Mag. (4) 46, p. 159, 227, 309, 446.

dann explicite in Rechnung zu ziehen. Wie richtig diese Erwägung ist, zeigt sich schon dadurch, dass die Gewährung einer völligen Freiheit in der Wahl der Function $p = f(\varrho, u, v, w)$ zu Widersprüchen mathematischer und physikalischer Natur führen würde, aus dem einfachen Grunde, weil die Festsetzung einer solchen Function nicht nur, wie die Gleichung (11) oder die entsprechende $p = f(\varrho)$ dem Charakter der Flüssigkeit, sondern auch dem Charakter ihrer Bewegung gewisse Bedingungen auferlegen würde, während doch dieser Charakter durch die vier Grundgleichungen der Bewegung bereits vollständig bestimmt ist.

§. 7.

Die Grundgleichungen gelten für die *ganze Masse* der bewegten Flüssigkeit.

Für ihre *Oberfläche* gelten noch weitere Bedingungen, welche in jedem speciellen Falle besonders erörtert werden müssen. Es ist jedoch schon von *Lagrange* ausgesprochen worden, dass für die Oberfläche der bewegten Flüssigkeit ganz allgemein eine Bedingung bestehen müsse, nämlich die, *dass die Oberfläche stets aus denselben Theilchen zusammengesetzt sein müsse.*

Aber erst später ist erkannt worden, dass dieser Satz eine nothwendige Folge der Continuitätsgleichung ist, und es sind insbesondere die beiden schwedischen Physiker *Svanberg* und *Edlund*[1]), welche sich um die Feststellung dieses Zusammenhanges verdient gemacht haben.

Am einfachsten ergiebt sich der in Rede stehende Satz aus der Betrachtung der Veränderungen, welche die unendlich kleinen Theile eines beliebigen Körpers erleiden können. Diese Betrachtung ergiebt nämlich, dass ein unendlich kleines Ellipsoid stets ein solches bleibt. Da folglich ein beliebiger Punkt im Innern als Mittelpunkt eines solchen Ellipsoids stets im Innern gewesen ist und stets daselbst bleibt, so ist der obige Satz bewiesen, und zwar nicht nur für flüssige, sondern ebenso auch für elastische feste Körper[2]).

---

[1]) *Svanberg* und *Edlund*, in verschied. Bdn. d. Nov. Act. Soc. Ups., zuletzt *Edlund*, Bd. 13 (1847).

[2]) Vgl. *Kirchhoff*, Vorles. üb. Math. Phys., Zehnte Vorles.

§. 8.

Selbst nach Erledigung der Frage, ob die vorhandenen Bewegungsgleichungen hinreichend seien zur Begründung der Hydrodynamik, bleibt für die Ausführung der allgemeinen Theorie noch ein weites und fruchtbares Feld der Thätigkeit übrig. Denn es giebt wenig Probleme, bei denen es zweckmässig oder auch nur möglich ist, die Grundgleichungen in der vorliegenden Gestalt anzuwenden, und es stellt sich somit die Nothwendigkeit heraus, diese Gestalten durch geeignete *Transformationen* zu vermannigfaltigen.

Den Anstoss zu diesen in den letzten Jahrzehnten sehr zahlreich durchgeführten Transformationen haben unstreitig die Betrachtungen gegeben, welche *Dirichlet* [1]) über die Ueberlegenheit der *Lagrange*'schen Gleichungen gegenüber den *Euler*'schen angestellt und so fruchtbar verwerthet hat. In der That besitzen die *Lagrange*'schen Gleichungen Vorzüge mehrfacher Art. Einmal sind in ihnen die unabhängigen Variabelen wirklich vollständig unabhängig von einander, während dies bei den Gleichungen von *Euler* hinsichtlich der Grössen x, y, z nur in zwei Fällen gilt, nämlich für stationäre Bewegungen und für den Fall einer unendlich ausgedehnten Flüssigkeit. Ueberdies nehmen die Continuitätsgleichung und andere Gleichungen, auf welche man im Laufe der Untersuchung stösst, bei Zugrundelegung der *Lagrange*'schen Gleichungen eine verhältnissmässig einfache Form an.

Eine bei physikalischen Problemen fast immer erfüllte Bedingung gestattet es, den Grundgleichungen eine sehr viel homogenere und einfachere Gestalt zu geben. Die Kräfte X, Y, Z haben nämlich, wie man sagt, ein *Potential*, d. h. sie lassen sich in der Form

$$X = \frac{\partial V}{\partial x}, \quad Y = \frac{\partial V}{\partial y}, \quad Z = \frac{\partial V}{\partial z} \tag{14}$$

darstellen, wo V das Potential bedeutet; benutzt man diese Gleichungen und die Gleichung (11) zur Umgestaltung der Gleichungen (4) und (5), so erhält man die *Euler*'schen Gleichungen:

---

[1]) *Dirichlet*, l. c. Crelle's Journ., Bd. 55, S. 181.

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial (V-P)}{\partial x}, \quad \frac{dv}{dt} = \frac{\partial (V-P)}{\partial y}, \quad \frac{dw}{dt} = \frac{\partial (V-P)}{\partial z} \tag{15}$$

die *Lagrange*'schen:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2 x}{dt^2}\frac{\partial x}{\partial a} + \frac{d^2 y}{dt^2}\frac{\partial y}{\partial a} + \frac{d^2 z}{dt^2}\frac{\partial z}{\partial a} &= \frac{\partial (V-P)}{\partial a} \\ \frac{d^2 x}{dt^2}\frac{\partial x}{\partial b} + \frac{d^2 y}{dt^2}\frac{\partial y}{\partial b} + \frac{d^2 z}{dt^2}\frac{\partial z}{\partial b} &= \frac{\partial (V-P)}{\partial b} \\ \frac{d^2 x}{dt^2}\frac{\partial x}{\partial c} + \frac{d^2 y}{dt^2}\frac{\partial y}{\partial c} + \frac{d^2 z}{dt^2}\frac{\partial z}{\partial c} &= \frac{\partial (V-P)}{\partial c} \end{aligned}\right| \tag{16}$$

§. 9.

Der Versuch, die Grundgleichungen auf eine Gestalt zu bringen, in welcher sie die Vortheile der *Euler*'schen Form mit denen der *Lagrange*'schen vereinigen, ist von *H. Weber*[1]) gemacht worden. Man multiplicire die Gleichungen (16) mit dt und integrire zwischen 0 und t; die Glieder links integrire man partiell und setze zur Abkürzung

$$\lambda = \int_0^t \left(V - P + \tfrac{1}{2}\left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2\right] dt \right); \tag{17}$$

man erhält dann:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt}\frac{\partial x}{\partial a} + \frac{dy}{dt}\frac{\partial y}{\partial a} + \frac{dz}{dt}\frac{\partial z}{\partial a} - u_0 &= \frac{\partial \lambda}{\partial a} \\ \frac{dx}{dt}\frac{\partial x}{\partial b} + \frac{dy}{dt}\frac{\partial y}{\partial b} + \frac{dz}{dt}\frac{\partial z}{\partial b} - v_0 &= \frac{\partial \lambda}{\partial b} \\ \frac{dx}{dt}\frac{\partial x}{\partial c} + \frac{dy}{dt}\frac{\partial y}{\partial c} + \frac{dz}{dt}\frac{\partial z}{\partial c} - w_0 &= \frac{\partial \lambda}{\partial c} \end{aligned} \tag{18}$$

wo u_0, v_0, w_0 die Anfangsgeschwindigkeiten bezeichnen. Diese Gleichungen sind wie die *Euler*'schen von der ersten Ordnung (während die *Lagrange*'schen von der zweiten sind); mit der Continuitätsgleichung und der Gleichung (17) bilden sie die zur Bestimmung von x, y, z, p, λ nothwendigen fünf Gleichungen. Sie

[1]) *H. Weber*, Cr. J. Bd. 68, S. 287, 1871.

haben aber noch zwei andere Vorzüge. Erstens ist im Falle incompressibler Flüssigkeiten der Druck in den vier ersten Gleichungen gar nicht enthalten; man kann diese daher für sich integriren und nachträglich den Druck bestimmen. Zweitens kommt es häufig vor, dass die Grössen u, v, w Differentialquotienten einer einzigen Function nach den Coordinatenaxen sind, später wird von dieser Function häufig die Rede sein; in die obigen Gleichungen lässt sich die Existenz dieser Function ohne Weiteres aufnehmen; denn in diesem Falle sind offenbar u_0, v_0, w_0 die Differentialquotienten einer Function $\mathfrak{u}$ nach den Grössen a, b, c; vereinigt man λ und $\mathfrak{u}$ zu einer neuen Variabele λ', so erhält man daher die einfachen Gleichungen

$$\left.\begin{aligned}
\frac{dx}{dt}\frac{\partial x}{\partial a}+\frac{dy}{dt}\frac{\partial y}{\partial a}+\frac{dz}{dt}\frac{\partial z}{\partial a}&=\frac{\partial \lambda'}{\partial a}\\
\frac{dx}{dt}\frac{\partial x}{\partial b}+\frac{dy}{dt}\frac{\partial y}{\partial b}+\frac{dz}{dt}\frac{\partial z}{\partial b}&=\frac{\partial \lambda'}{\partial b}\\
\frac{dx}{dt}\frac{\partial x}{\partial c}+\frac{dy}{dt}\frac{\partial y}{\partial c}+\frac{dz}{dt}\frac{\partial z}{\partial c}&=\frac{\partial \lambda'}{\partial c}
\end{aligned}\right\}$$

Anwendungen sind bisher von diesen Gleichungen meines Wissens noch nicht gemacht worden.

§. 10.

In vielen Fällen ist keine der beiden Formen der Grundgleichungen geeignet zur Beschreibung der Flüssigkeitsbewegungen zu dienen, nämlich immer dann, wenn es sich einerseits um *stationäre* Bewegung oder doch um solche Probleme handelt, bei denen es wünschenswerth ist, die Charakteristik des stationären Bewegungsstandes ohne Weiteres in den Gleichungen zu haben, und wenn es andererseits gleichwohl vermieden werden soll, nach Lösung der Grundgleichungen noch das System der gewöhnlichen Differentialgleichungen (1) behandeln zu müssen.

Auch die *Weber*'schen Gleichungen (17) und (18) sind dann, wie man leicht einsieht, nicht wohl geeignet.

Für eine in solchen Fällen vorzunehmende Transformation der Gleichungen ist eine auch an sich sehr interessante Darstellung derselben geeignet, welche von *Clebsch*[1]) und von *Hankel*[2]) angegeben worden ist, und welche für die Hydrodynamik etwa dieselbe Bedeutung besitzt, wie *das Princip der kleinsten Wirkung* für die Dynamik überhaupt.

Einfacher als auf dem Wege, welchen *Clebsch* einschlug, ergiebt sich die Aequivalenz der neuen Darstellung mit den Grundgleichungen bei Zugrundelegung des *Princips der virtuellen Geschwindigkeiten* und der verlorenen Kräfte. Setzt man nämlich

$$V - P = \Omega, \tag{19}$$

so ist jenes Princip durch die Gleichung

$$\int\!\!\int\!\!\int \varrho_0\, da\, db\, dc \left(\frac{d^2 x}{dt^2}\,\delta x + \frac{d^2 y}{dt^2}\,\delta y + \frac{d^2 z}{dt^2}\,\delta z - \delta\,\Omega\right) = 0$$

ausgedrückt, in welcher ϱ_0 die Anfangsdichtigkeit, also für incompressible Flüssigkeiten durch ϱ zu ersetzen ist, wo ferner δ das Zeichen der Variation ist, und welche Gleichung leicht auf die Form

$$\delta \int\!\!\int\!\!\int \varrho_0\, da\, db\, dc \int dt \left[\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 + 2\,\Omega\right] = 0 \tag{20}$$

gebracht werden kann, wenn mit ds das Bahnelement des Punktes x, y, z bezeichnet wird. Hieraus folgt nun der Satz:

Sobald die Grundgleichungen bestehen, besteht auch die Gleichung (20), d. h. es ist das in dieser Gleichung variirte Integral ein Minimum, und umgekehrt. Oder, anders ausgedrückt: *Die nothwendige und hinreichende Bedingung für das Bestehen der Grundgleichungen ist die, dass das obige Integral ein Minimum werde.*

Um nun zu einer Darstellung der Grundgleichungen in neuen Coordinaten zu gelangen, braucht man nur in (20) ds^2, statt durch x, y, z durch die neuen Coordinaten auszudrücken und die Coefficienten der dann auftretenden Variationen dieser Grössen einzeln gleich Null zu setzen.

Wendet man auf die so entstehenden Gleichungen von Neuem das Princip der virtuellen Geschwindigkeiten an, so erhält man aus ihnen unmittelbar die neuen Grundgleichungen und zwar, je nach Wunsch, in der *Euler*'schen oder *Lagrange*'schen Gestalt. Sind ξ, η, ζ die neuen Variabelen, so wird das zu variirende Integral

---

1) *Clebsch*, Cr. J. Bd. 54, S. 301.

2) *Hankel*, l. c. S. 15.

$$\iiint \varrho_0\, da\, db\, dc \int dt \Big[N_1\left(\frac{d\xi}{dt}\right)^2 + N_2\left(\frac{d\eta}{dt}\right)^2 + N_3\left(\frac{d\zeta}{dt}\right)^2 + 2n_1\frac{d\eta}{dt}\frac{d\zeta}{dt} + 2n_2\frac{d\zeta}{dt}\frac{d\xi}{dt} + 2n_3\frac{d\xi}{dt}\frac{d\eta}{dt} + 2\Omega\Big],$$

wo gesetzt wurde:

$$N_1 = \left(\frac{dx}{d\xi}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\xi}\right)^2 + \left(\frac{dz}{d\xi}\right)^2 \quad n_3 = \frac{dx}{d\xi}\frac{dx}{d\eta} + \frac{dy}{d\xi}\frac{dy}{d\eta} + \frac{dz}{d\xi}\frac{dz}{d\eta}$$

$$N_2 = \left(\frac{dx}{d\eta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\eta}\right)^2 + \left(\frac{dz}{d\eta}\right)^2 \quad n_1 = \frac{dx}{d\eta}\frac{dx}{d\zeta} + \frac{dy}{d\eta}\frac{dy}{d\zeta} + \frac{dz}{d\eta}\frac{dz}{d\zeta}$$

$$N_3 = \left(\frac{dx}{d\zeta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\zeta}\right)^2 + \left(\frac{dz}{d\zeta}\right)^2 \quad n_2 = \frac{dx}{d\zeta}\frac{dx}{d\xi} + \frac{dy}{d\zeta}\frac{dy}{d\xi} + \frac{dz}{d\zeta}\frac{dz}{d\xi}$$

Ferner wird die Continuitätsgleichung

$$\begin{vmatrix} \frac{d\xi}{d\xi_0} & \frac{d\xi}{d\eta_0} & \frac{d\xi}{d\zeta_0} \\ \frac{d\eta}{d\xi_0} & \frac{d\eta}{d\eta_0} & \frac{d\eta}{d\zeta_0} \\ \frac{d\zeta}{d\xi_0} & \frac{d\zeta}{d\eta_0} & \frac{d\zeta}{d\zeta_0} \end{vmatrix} \cdot \frac{\varrho}{\varrho_0} = \left\{ \begin{vmatrix} N_1^0 & n_3^0 & n_2^0 \\ n_3^0 & N_2^0 & n_1^0 \\ n_2^0 & n_1^0 & N_3^0 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} N_1 & n_3 & n_2 \\ n_3 & N_2 & n_1 \\ n_2 & n_1 & N_3 \end{vmatrix} \right\}^{1/2}$$

wo ξ_0, η_0, ζ_0, N_1^0 u. s. w. die Werthe bedeuten, welche ξ, η, ζ, N_1 u. s. w. für $x = a$, $y = b$, $z = c$ annehmen.

§. 11.

Für *orthogonale Coordinaten*, wie sie meist Anwendung finden, ist

$$n_1 = n_2 = n_3 = 0$$

$$N_1 = \frac{1}{\left(\frac{d\xi}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\xi}{dy}\right)^2 + \left(\frac{d\xi}{dz}\right)^2}, \quad N_2 = \frac{1}{\left(\frac{d\eta}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\eta}{dy}\right)^2 + \left(\frac{d\eta}{dz}\right)^2},$$

$$N_3 = \frac{1}{\left(\frac{d\zeta}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\zeta}{dy}\right)^2 + \left(\frac{d\zeta}{dz}\right)^2}.$$

Es wird daher das zu variirende Integral

$$\int dt \int d\tau \Big[N_1\left(\frac{d\xi}{dt}\right)^2 + N_2\left(\frac{d\eta}{dt}\right)^2 + N_3\left(\frac{d\zeta}{dt}\right)^2 + 2\Omega\Big]$$

und die Gleichung der Continuität

$$\begin{vmatrix} \frac{d\xi}{d\xi_0} & \frac{d\xi}{d\eta_0} & \frac{d\xi}{d\zeta_0} \\ \frac{d\eta}{d\xi_0} & \frac{d\eta}{d\eta_0} & \frac{d\eta}{d\zeta_0} \\ \frac{d\zeta}{d\xi_0} & \frac{d\zeta}{d\eta_0} & \frac{d\xi}{d\zeta_0} \end{vmatrix} \cdot \frac{\varrho}{\varrho_0} = \sqrt{\frac{N_1^0\,N_2^0\,N_3^0}{N_1\,N_2\,N_3}}.$$

Die Bewegungsgleichungen lauten daher in der *Euler*'schen Form[1]):

$$\left.\begin{aligned}
2\frac{d\Omega}{d\xi} &= \frac{2d\left(N_1\frac{d\xi}{dt}\right)}{dt} - \left(\frac{d\xi}{dt}\right)^2\frac{dN_1}{d\xi} - \left(\frac{d\eta}{dt}\right)^2\frac{dN_2}{d\xi} \\
&\qquad - \left(\frac{d\zeta}{dt}\right)^2\frac{dN_3}{d\xi} \\
2\frac{d\Omega}{d\zeta} &= \frac{2d\left(N_2\frac{d\eta}{dt}\right)}{dt} - \left(\frac{d\xi}{dt}\right)^2\frac{dN_1}{d\eta} - \left(\frac{d\eta}{dt}\right)^2\frac{dN_2}{d\eta} \\
&\qquad - \left(\frac{d\zeta}{dt}\right)^2\frac{dN_3}{d\eta} \\
2\frac{d\Omega}{d\zeta} &= \frac{2d\left(N_3\frac{d\zeta}{dt}\right)}{dt} - \left(\frac{d\xi}{dt}\right)^2\frac{dN_1}{d\zeta} - \left(\frac{d\eta}{dt}\right)^2\frac{dN_2}{d\zeta} \\
&\qquad - \left(\frac{d\zeta}{dt}\right)^2\frac{dN_3}{d\zeta}
\end{aligned}\right\} \quad (21)$$

und in der *Lagrange*'schen Form:

$$\left.\begin{aligned}
2\frac{d\Omega}{d\xi_0} &= \frac{2d\left(N_1\frac{d\xi}{dt}\right)}{dt}\frac{d\xi}{d\xi_0} + \frac{2d\left(N_2\frac{d\eta}{dt}\right)}{dt}\frac{d\eta}{d\xi_0} + \frac{2d\left(N_3\frac{d\zeta}{dt}\right)}{dt}\frac{d\zeta}{d\xi_0} \\
&\quad - \left(\frac{d\xi}{dt}\right)^2\frac{dN_1}{d\xi_0} - \left(\frac{d\eta}{dt}\right)^2\frac{dN_2}{d\xi_0} - \left(\frac{d\zeta}{dt}\right)^2\frac{dN_3}{d\xi_0} \\
2\frac{d\Omega}{d\eta_0} &= \frac{2d\left(N_1\frac{d\xi}{dt}\right)}{dt}\frac{d\xi}{d\eta_0} + \frac{2d\left(N_2\frac{d\eta}{dt}\right)}{dt}\frac{d\eta}{d\eta_0} + \frac{2d\left(N_3\frac{d\zeta}{dt}\right)}{dt}\frac{d\zeta}{d\eta_0} \\
&\quad - \left(\frac{d\xi}{dt}\right)^2\frac{dN_1}{d\eta_0} - \left(\frac{d\eta}{dt}\right)^2\frac{dN_2}{d\eta_0} - \left(\frac{d\zeta}{dt}\right)^2\frac{dN_3}{d\eta_0} \\
2\frac{d\Omega}{d\zeta_0} &= \frac{2d\left(N_1\frac{d\xi}{dt}\right)}{dt}\frac{d\xi}{d\zeta_0} + \frac{2d\left(N_2\frac{d\eta}{dt}\right)}{dt}\frac{d\eta}{d\zeta_0} + \frac{2d\left(N_3\frac{d\zeta}{dt}\right)}{dt}\frac{d\zeta}{d\zeta_0} \\
&\quad - \left(\frac{d\xi}{dt}\right)^2\frac{dN_1}{d\zeta_0} - \left(\frac{d\eta}{dt}\right)^2\frac{dN_2}{d\zeta_0} - \left(\frac{d\zeta}{dt}\right)^2\frac{dN_3}{d\zeta_0}
\end{aligned}\right\} \quad (22)$$

[1]) Diese Form entspricht streng genommen nicht den *Euler*'schen Gleichungen, sondern den Gleichungen (3).

Für elliptische Coordinaten z. B. hat man hierin zu setzen:

$$N_1 = \frac{1}{4} \frac{(\xi - \eta)(\xi - \zeta)}{(\xi + \varkappa^2)(\xi + \lambda^2)(\xi + \mu^2)},$$

$$N_2 = \frac{1}{4} \frac{(\eta - \zeta)(\eta - \xi)}{(\eta + \varkappa^2)(\eta + \lambda^2)(\eta^2 + \mu^2)},$$

$$N_3 = \frac{1}{4} \frac{(\zeta - \xi)(\zeta - \eta)}{(\zeta + \varkappa^2)(\zeta + \lambda^2)(\zeta + \mu^2)},$$

wo $\varkappa^2$, λ^2, μ^2 durch die Gleichung

$$\frac{x^2}{\varkappa^2 + \varepsilon} + \frac{y^2}{\lambda^2 + \varepsilon} + \frac{z^2}{\mu^2 + \varepsilon} = 1 \tag{23}$$

definirt sind, deren Wurzeln nach ε die elliptischen Coordinaten des Punktes x, y, z sind.

Für Polarcoordinaten

$$x = r \cos \vartheta, \quad y = r \sin \vartheta \cos \varphi, \quad z = r \sin \vartheta \sin \varphi \tag{24}$$

erhält man die Continuitätsgleichung

$$\begin{vmatrix} \frac{dr}{dr_0} & \frac{d\vartheta}{dr_0} & \frac{d\varphi}{dr_0} \\ \frac{dr}{d\vartheta_0} & \frac{d\vartheta}{d\vartheta_0} & \frac{d\varphi}{d\vartheta_0} \\ \frac{dr}{d\varphi_0} & \frac{d\vartheta}{d\varphi_0} & \frac{d\varphi}{d\varphi_0} \end{vmatrix} = \frac{\varrho_0 r_0^2 \sin \vartheta_0}{\varrho r^2 \sin \vartheta}, \tag{24 a}$$

während sich aus (21) die sehr einfachen Gleichungen

$$\frac{d\Omega}{dr} = A, \quad \frac{d\Omega}{d\vartheta} = B, \quad \frac{d\Omega}{d\varphi} = C,$$

aus (22) die complicirteren Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} A \frac{dr}{dr_0} + B \frac{d\vartheta}{dr_0} + C \frac{d\varphi}{dr_0} - \frac{d\Omega}{dr_0} = 0 \\ A \frac{dr}{d\vartheta_0} + B \frac{d\vartheta}{d\vartheta_0} + C \frac{d\varphi}{d\vartheta_0} - \frac{d\Omega}{d\vartheta_0} = 0 \\ A \frac{dr}{d\varphi_0} + B \frac{d\vartheta}{d\varphi_0} + C \frac{d\varphi}{d\varphi_0} - \frac{d\Omega}{d\varphi_0} = 0 \end{aligned}\right\}$$

ergeben, wenn man zur Abkürzung

$$\frac{d^2 r}{dt^2} - r\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2 - r^2 \sin^2\vartheta\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = A,$$

$$d\left(\frac{r^2 d\vartheta}{dt}\right) - \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 r^2 \sin\vartheta\cos\vartheta = B,$$

$$\frac{d\left(r^2 \sin^2\vartheta \dfrac{d\varphi}{dt}\right)}{dt} = C$$

setzt.

Die den *Euler*'schen entsprechenden Gleichungen werden auch für cylindrische Coordinaten

$$x = r\cos\vartheta,\quad y = r\sin\vartheta,\quad z = z \tag{25}$$

sehr einfach, nämlich

$$\frac{d\Omega}{dr} = \frac{d^2 r}{dt^2} - r\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2,\quad \frac{d\Omega}{d\vartheta} = \frac{d\left(r^2\dfrac{d\vartheta}{dt}\right)}{dt},\quad \frac{d\Omega}{dz} = \frac{d^2 z}{dt^2}, \tag{25 a}$$

ferner die Continuitätsgleichung

$$\begin{vmatrix} \dfrac{dr}{dr_0} & \dfrac{d\vartheta}{dr_0} & \dfrac{dz}{dr_0} \\ \dfrac{dr}{d\vartheta_0} & \dfrac{d\vartheta}{d\vartheta_0} & \dfrac{dz}{d\vartheta_0} \\ \dfrac{dr}{dz_0} & \dfrac{d\vartheta}{dz_0} & \dfrac{dz}{dz_0} \end{vmatrix} = \frac{\varrho_0 r_0}{\varrho r};$$

endlich die *Lagrange*'schen Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned}
\left[\frac{d^2 r}{dt^2} - r\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2\right]\frac{dr}{dr_0} + \frac{d\left(\dfrac{r^2 d\vartheta}{dt}\right)}{dt}\frac{d\vartheta}{dr_0} + \frac{d^2 z}{dt^2}\frac{dz}{dr_0} &= \frac{d\Omega}{dr_0}\\
\left[\frac{d^2 r}{dt^2} - r\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2\right]\frac{dr}{d\vartheta_0} + \frac{d\left(\dfrac{r^2 d\vartheta}{dt}\right)}{dt}\frac{d\vartheta}{d\vartheta_0} + \frac{d^2 z}{dt^2}\frac{dz}{d\vartheta_0} &= \frac{d\Omega}{d\vartheta_0}\\
\left[\frac{d^2 r}{dt^2} - r\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2\right]\frac{dr}{dz_0} + \frac{d\left(\dfrac{r^2 d\vartheta}{dt}\right)}{dt}\frac{d\vartheta}{dz_0} + \frac{d^2 z}{dt^2}\frac{dz}{dz_0} &= \frac{d\Omega}{dz_0}
\end{aligned}\right\}$$

§. 12.

In nahem Zusammenhange hiermit steht eine Transformation der Gleichungen, welche auf zwei Gleichungen zwischen zwei neuen Variabelen a_1 und a_2 führt, und welche für stationäre Bewegungen eine sofortige Integration gestattet. Diese äusserst geistreiche, von *Clebsch*[1]) angegebene Transformation beruht auf der Bemerkung, dass die Continuitätsgleichung für incompressible Flüssigkeiten, d. h. die Gleichung (7) identisch ist mit derjenigen Gleichung, welche von den Unterdeterminanten D_1, D_2, D_3 der Functionaldeterminante der drei Grössen a, a_1, a_2 nach x, y, z in Bezug auf eine derselben erfüllt wird.

Ist nämlich

$$D = D_1 \frac{\partial a}{\partial x} + D_2 \frac{\partial a}{\partial y} + D_3 \frac{\partial a}{\partial z},$$

so ist

$$\frac{\partial D_1}{\partial x} + \frac{\partial D_2}{\partial y} + \frac{\partial D_3}{\partial z} = 0,$$

und man kann

$$u = D_1, \quad v = D_2, \quad w = D_3 \tag{26}$$

setzen.

Aus den *Euler*'schen Gleichungen folgen dann, falls die Bewegung im Punkte x, y, z von t unabhängig, d. h. stationär ist, auf einfache Weise die Integralgleichungen

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial T}{\partial \frac{\partial a_1}{\partial x}} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial T}{\partial \frac{\partial a_1}{\partial y}} + \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial T}{\partial \frac{\partial a_1}{\partial z}} + \frac{\partial F(a_1, a_2)}{\partial a_1} = 0 \\ \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial T}{\partial \frac{\partial a_2}{\partial x}} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial T}{\partial \frac{\partial a_2}{\partial y}} + \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial T}{\partial \frac{\partial a_2}{\partial z}} + \frac{\partial F(a_1, a_2)}{\partial a_2} = 0 \end{aligned}\right\}$$

wo F eine Function ausschliesslich der Variabelen a_1, a_2 selbst und

$$T = \frac{u^2 + v^2 + w^2}{2}$$

die lebendige Kraft ist. Diese Gleichungen sind völlig äquivalent der Gleichung (20), in welcher die lebendige Kraft in der Form $\left(\frac{ds}{dt}\right)^2$ vorkommt und in welcher ausserdem wie hier nur noch eine Function der Variabelen selbst, dort Ω, hier F, enthalten ist. Diese neue Form hat aber den Vorzug, dass sie die Integrale der

[1]) *Clebsch*, Cr. J. Bd. 56, S. 1.

Bewegung sofort anzugeben gestattet. Die Gleichung (26) erfordert nämlich, dass die Grösse

$$\frac{d a_1}{dt} = \frac{\partial a_1}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial a_1}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial a_1}{\partial z}\frac{dz}{dt} = \frac{\partial a_1}{\partial x} D_1 + \frac{\partial a_1}{\partial y} D_2 + \frac{\partial a_1}{\partial z} D_3$$

gleich Null sei (nach einem bekannten Satze der Determinantentheorie), d. h. dass a_1 und, wie sich ebenso zeigen lässt, a_2 Constanten seien. Die Integrale sind daher

$$a_1 = const., \quad a_2 = const.$$

In den Schnittcurven der durch diese Gleichungen dargestellten Flächen geht daher die Bewegung vor sich, und der Druck ist gegeben durch die Gleichung

$$p = \varrho\,(V - T) + F.$$

Die Transformation in andere Coordinaten geschieht hier in derselben Weise, wie sie oben bereits für einige specielle Fälle durchgeführt worden ist. Man braucht nämlich nur den Ausdruck für die lebendige Kraft zu transformiren, und das kommt im Wesentlichen auf die Transformation des Ausdrucks für das Bahnelement ds hinaus.

§. 13.

Wenn die Bewegung nicht stationär ist, werden die Gleichungen sehr complicirt. Für diesen Fall hat aber derselbe Autor eine andere Substitution angegeben, welche eine ähnliche Bedeutung hat, welche ebenfalls zu Gleichungen führt, die äquivalent sind mit der Minimumsbedingung eines gewissen Integrals, von denen aber zwei erster, eine zweiter Ordnung ist, abgesehen von den hier wie dort hinzutretenden Gleichungen (1).

Die Transformation beruht auf der jederzeit gestatteten Substitution

$$u = \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \chi \frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad v = \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \chi \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad w = \frac{\partial \varphi}{\partial z} + \chi \frac{\partial \psi}{\partial z} \tag{27}$$

und giebt die Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \chi}{\partial t} + u\frac{\partial \chi}{\partial x} + v\frac{\partial \chi}{\partial y} + w\frac{\partial \chi}{\partial z} = 0 \\ \frac{\partial \psi}{\partial t} + u\frac{\partial \psi}{\partial x} + v\frac{\partial \psi}{\partial y} + w\frac{\partial \psi}{\partial z} = 0 \end{aligned}\right|$$

zu denen noch die Gleichung (7) hinzukommt. Mit anderen Worten, es soll das Integral

$$\int\int\int\int\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}+\chi\frac{\partial\psi}{\partial t}+\frac{u^2+v^2+w^2}{2}\right)dt\,dx\,dy\,dz$$

ein Minimum oder Maximum werden. Die Integrale der obigen Gleichungen aber sind

$$\chi = const. \text{ und } \psi = const.$$

(sowie ein drittes, nach der Methode des letzten Multiplicators sich ergebendes, jedoch hier unwesentliches).

Dieses allgemeine Ergebniss der Betrachtungen von *Clebsch* ist nicht nur an sich als ein höchst wichtiger Fortschritt der Hydrodynamik zu bezeichnen, sondern auch insofern von grossem Interesse, als es am naturgemässesten auf eine Theorie führt, welche in neuester Zeit von allen hydrodynamischen Theorien mit der grössten Vorliebe behandelt worden ist. Ich meine die Theorie der *Wirbelbewegungen*, welche stets existiren, sobald χ von Ort zu Ort sich ändert, so dass es unmöglich ist, die Gleichungen (27) durch die einfacheren

$$u=\frac{\partial\varphi}{\partial x},\quad v=\frac{\partial\varphi}{\partial y},\quad w=\frac{\partial\varphi}{\partial z} \tag{28}$$

zu ersetzen. Fälle, in welchen χ nicht constant ist, sind aber schon bekannt gewesen, lange bevor die obige Zerlegung der Geschwindigkeitscomponenten zur Transformation der Gleichungen der Bewegung benutzt wurde, und z. B. von *Euler* schon erwähnt worden.

§. 14.

Mit den Gleichungen (27) sind wir an die wichtige Frage nach der *Zerlegung der Flüssigkeitsbewegung* herangetreten. Diese Frage ist unter den allgemeinsten Gesichtspunkten von *Helmholtz* [1]) in seiner berühmten Abhandlung: „Ueber die Integrale der hydrodynamischen Gleichungen, welche den Wirbelbewegungen entsprechen", beantwortet worden.

---

[1]) *Helmholtz*, Cr. J. Bd. 55, S. 25 (zeitlich also gerade zwischen die erste und zweite Abhandlung von *Clebsch* hineinfallend).

Helmholtz zerlegt jede Flüssigkeitsbewegung in ähnlicher Weise, wie es für feste elastische Körper zuerst *Kirchhoff*[1]) gethan hat, nämlich für jedes Volumenelement in:

1) eine Bewegung seines Schwerpunktes,

2) bis 4) drei Dilatationen oder Contractionen in drei auf einander senkrechten Richtungen,

5) eine Rotation um eine gewisse Axe.

Man könnte von vornherein im Zweifel sein, ob hiermit alle möglichen Flüssigkeitsbewegungen wirklich erledigt sind und ob z. B. eine Dilatation nach drei *schiefen* Richtungen sich aus den obigen Componenten 2) bis 5) (1) kommt nicht in Betracht) zusammensetzen lässt. In der That hat *Bertrand*[2]) auf folgendem Wege eine Flüssigkeitsbewegung abzuleiten geglaubt, welche durch 2) bis 5) nicht darstellbar sein soll. Er fragt: Giebt es durch den Punkt x, y, z eine Ebene, welche sich selbst parallel bleibt? Sie habe die Richtungswinkel α, β, γ; dann ist die Componente der Geschwindigkeit in einer zu ihr senkrechten Richtung

$$V = u \cos \alpha + v \cos \beta + w \cos \gamma,$$

und diese Grösse muss für alle ihre Punkte constant sein, d. h. gleichzeitig mit der Gleichung

$$dx \cos \alpha + dy \cos \beta + dz \cos \gamma = 0$$

muss die Gleichung

$$\frac{\partial V}{\partial x} dx + \frac{\partial V}{\partial y} dy + \frac{\partial V}{\partial z} dz = 0$$

bestehen, was nur möglich ist, wenn die Proportion

$$\frac{\partial V}{\partial x} : \cos \alpha = \frac{\partial V}{\partial y} : \cos \beta = \frac{\partial V}{\partial z} : \cos \gamma$$

stattfindet. Diese Forderung ist aber identisch mit der anderen, dass, wenn S irgend eine Grösse ist, die drei Gleichungen bestehen:

---

[1]) *Kirchhoff*, Cr. J. Bd. 40.

[2]) *Bertrand*, Compt. R. de l'Ac. des Sc. de Paris, T. 66, p. 1227. T. 67, an verschiedenen Stellen. 1868.

$$S = \frac{\cos\alpha \frac{\partial u}{\partial x} + \cos\beta \frac{\partial v}{\partial x} + \cos\gamma \frac{\partial w}{\partial x}}{\cos\alpha}$$

$$= \frac{\cos\alpha \frac{\partial u}{\partial y} + \cos\beta \frac{\partial v}{\partial y} + \cos\gamma \frac{\partial w}{\partial y}}{\cos\beta} = \frac{\cos\alpha \frac{\partial u}{\partial z} + \cos\beta \frac{\partial v}{\partial z} + \cos\gamma \frac{\partial w}{\partial z}}{\cos\gamma}.$$

Da nun S hiernach nur der einen Bedingung genügen muss, dass

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} - S & \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial y} - S & \frac{\partial w}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial z} & \frac{\partial v}{\partial z} & \frac{\partial w}{\partial z} - S \end{vmatrix} = 0$$

sei, so folgt, dass es in der That *nicht nur eine, sondern zuweilen sogar drei Ebenen von der gedachten Eigenschaft giebt.*

Bertrand betrachtet nun weiter die Bewegung in einer dieser Ebenen, die Ebene selbst als ruhend gedacht. Diese Bewegung wird, wenn ϑ einen Winkel bedeutet, dargestellt durch die Gleichung

$$\frac{d\vartheta}{dt} = \cos^2\vartheta \frac{\partial v}{\partial x} + \sin\vartheta \cos\vartheta \left(\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial x}\right) - \sin^2\vartheta \frac{\partial u}{\partial x}.$$

Es ist also die *Drehungsgeschwindigkeit der einzelnen Linien umgekehrt proportional dem Quadrate des Radius vectors einer Linie zweiten Grades.*

Ist dieselbe eine Ellipse, so drehen sich alle Linien in *demselben* Sinne, ist sie eine Hyperbel, so kommen Drehungen in *beiden* Richtungen vor, und die Linien in der Richtung der *Asymptoten* drehen sich *gar nicht.*

Diese Betrachtungen sind an sich sehr interessant; sie haben eine gewisse Beziehung zu Betrachtungen, welche von *Beltrami* herrühren und auf welche ich sogleich zu sprechen komme. Aber sie führen nicht, wie *Bertrand* meinte, zu einer neuen Flüssigkeitsbewegung.

Allerdings stehen die drei Flächen, welche sich selbst parallel bleiben und durch den Punkt x, y, z gehen, nur dann auf einander senkrecht, wenn der Ausdruck

$$u\,dx + v\,dy + w\,dz \tag{29}$$

ein *vollständiges Differential* ist, in allen übrigen Fällen erleidet das betreffende unendlich kleine Parallelepipedon drei Dilatationen nach drei gegen einander schiefen Richtungen. Aber mit Hülfe einer *Rotation* kann dieselbe, wie *Helmholtz*[1]) zeigte, stets beschrieben werden, und derartige Rotationen sind in der That immer vorhanden, wenn jener Ausdruck kein vollständiges Differential ist.

Es ist hier nicht der Raum, auf die weiteren Einwürfe *Bertrand's* einzugehen. Dieselben sind, soweit sie sich auf die Begriffe „Translation" und „Dilatation" beziehen, von dem Redacteur der „Mondes"[2]), soweit sie sich aber auf den Begriff „Rotation" beziehen, von *Helmholtz* selbst widerlegt worden mit dem Hinweise auf Stokes[3]), welcher dasselbe Wort, nur für feste Körper, bereits in ganz analoger Weise angewandt hatte.

§. 15.

Wir wollen uns vielmehr zur *mathematischen Darstellung der Zerlegbarkeit der Flüssigkeitsbewegung* wenden, wie sie von *Helmholtz* gegeben worden ist.

Es seien in irgend einem Punkte x_0, y_0, z_0 der Flüssigkeit die Geschwindigkeitscomponenten u_0, v_0, w_0; ihre Differentialquotienten resp. nach x, y, z seien u_0', v_0', w_0'; es bleiben dann noch die sechs anderen Differentialquotienten

$$\frac{\partial u_0}{\partial y}\,\frac{\partial u_0}{\partial z}\quad \frac{\partial v_0}{\partial x}\,\frac{\partial v_0}{\partial z}\quad \frac{\partial w_0}{\partial x}\,\frac{\partial w_0}{\partial y}.$$

Aber, wenn (29) ein vollständiges Differential ist, oder, was dasselbe ist, wenn die drei Geschwindigkeitscomponenten die partiellen Differentialquotienten nach den Coordinaten von einer und derselben Function φ sind, also (vergl. Gleichung 28)

$$u_0 = \frac{\partial \varphi}{\partial x},\quad v_0 = \frac{\partial \varphi}{\partial y},\quad w_0 = \frac{\partial \varphi}{\partial z}$$

---

1) *Helmholtz*, C. R. de l'Ac. des Sc. T. 67 und 68.

2) Les Mondes, T. 17, p. 621.

3) *Stokes*, Trans. of the Cambr. Philos. Soc. vol. 9 pt. 1, p. 1. 1850.

so sind von jenen sechs Grössen je zwei einander gleich, nämlich

$$\frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial z} = u_0'', \quad \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial w}{\partial x} = v_0'', \quad \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} = w_0''$$

und folglich werden die Geschwindigkeitscomponenten in dem dem Punkte x_0, y_0, z_0 benachbarten Punkte x, y, z

$$\left.\begin{aligned} u &= u_0 + (x - x_0) u_0' + (y - y_0) w_0'' + (z - z_0) v_0'' \\ v &= v_0 + (y - y_0) v_0' + (z - z_0) u_0'' + (x - x_0) w_0'' \\ w &= w_0 + (z - z_0) w_0' + (x - x_0) v_0'' + (y - y_0) u_0'' \end{aligned}\right\} \tag{29 a}$$

φ selbst aber wird eine Function zweiten Grades der Coordinaten. Diese Function φ, welche bei *Clebsch* in dem ersten Gliede der Transformation von u, v, w vorkommt (vergl. Gleichung 27), ohne dass *Clebsch* ihre volle Bedeutung erkannt hätte, hat *Helmholtz* das *Geschwindigkeitspotential* genannt, offenbar, weil die Componenten der Geschwindigkeit aus ihm in derselben Weise sich ableiten lassen, wie die Kraftcomponenten aus dem Kräftepotential, und weil dieses für incompressible Flüssigkeiten gerade wie jenes ausserhalb der wirkenden Massen die Gleichung

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0 \text{ oder kurz } \triangle \varphi = 0 \tag{30}$$

befriedigt, welche sich aus (7) bei Benutzung von (28) unmittelbar ergiebt, und von welcher weiter unten vielfach die Rede sein wird. Durch geeignete Drehung des Coordinatensystems kann man die obigen Werthe von u, v, w sowie φ selbst auf die Form

$$u = A + a x_1, \quad v = B + b y_1, \quad w = C + c z_1,$$
$$\varphi = A x_1 + B y_1 + C z_1 + \frac{a}{2} x_1^2 + \frac{b}{2} y_1^2 + \frac{c}{2} z_1^2$$

bringen; d. h. *Flüssigkeitstheilchen, welche anfangs in einer Ebene lagen, welche einer der drei Coordinatenebenen parallel ist, thun es auch jetzt noch.* Ein gewisses rechtwinkliges, unendlich kleines Parallelepipedon bleibt also rechtwinklig und seine Flächen *sich selbst parallel.* Daraus folgt, dass die Bewegung desselben nur in einer *Ausdehnung* oder Zusammenziehung seiner Kanten und möglicherweise einer hinzukommenden *Translationsbewegung* besteht; eine Rotation dagegen ist nicht Bestandtheil der in Rede stehenden Bewegung.

Fügt man nun aber *Rotationsbewegungen* um die drei Axen x, y, z hinzu, deren Winkelgeschwindigkeiten ξ, η, ζ sind, so kommen zu jeder der drei Componenten u, v, w noch zwei Glieder hinzu, und man erhält

$$\left.\begin{aligned}u &= u_0 + (x - x_0)\,u_0' + (y - y_0)(w_0'' + \zeta) + (z - z_0)(v_0'' - \eta)\\ v &= v_0 + (y - y_0)\,v_0' + (z - z_0)(u_0'' + \xi) + (x - x_0)(w_0'' - \zeta)\\ w &= w_0 + (z - z_0)\,w_0' + (x - x_0)(v_0'' + \eta) + (y - y_0)(u_0'' - \xi)\end{aligned}\right\}\quad(29\,\mathrm{b})$$

woraus durch Differentiation folgt:

$$\frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y} = 2\,\xi,\quad \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial z} = 2\,\eta,\quad \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} = 2\,\zeta \qquad (31)$$

Diese Gleichungen sind der Ausdruck des Satzes, *dass die Drehungsgeschwindigkeiten gleich Null sind, falls ein Geschwindigkeitspotential existirt.*

§. 16.

Noch deutlicher tritt die Zerlegung der Flüssigkeitsbewegung hervor bei einer Behandlungsweise, welche analog ist der Behandlung der Elasticitätslehre im Gebiete der Mechanik fester Körper, welche also auf analytisch-geometrischem Wege diejenigen Richtungen und Flächen aufzusuchen unternimmt, welche in irgend einer Beziehung Eigenthümlichkeiten darbieten. Es ist das Verdienst von *Beltrami*[1]), diesen Gedanken verwirklicht zu haben. *Beltrami* giebt dabei seine anschaulichen Gleichungen fast sämmtlich in den beiden Ausdrucksweisen, welche man als die *Euler*'sche und die *Lagrange*'sche bezeichnet.

Die Differentiationen nach t mögen durch Striche, die Zuwachse von a, b, c und von x, y, z resp. mit α, β, γ und mit ξ, η, ζ bezeichnet werden. Dann ist für einen Punkt x, y, z:

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = A\alpha^2 + B\beta^2 + C\gamma^2 + 2A_1\beta\gamma + 2B_1\gamma\alpha + 2C_1\alpha\beta,$$

und für zwei Punkte x, y, z, und x_1, y_1, z_1

$$\begin{aligned}\xi\xi_1 + \eta\eta_1 + \zeta\zeta_1 = A\alpha\alpha_1 + B\beta\beta_1 + C\gamma\gamma_1 + A_1(\beta\gamma_1 + \gamma\beta_1)\\ + B_1(\gamma\alpha_1 + \alpha\gamma_1) + C_1(\alpha\beta_1 + \beta\alpha_1),\end{aligned}$$

wo

---

[1]) *Beltrami*, Mem. di Bol. T. I, p. 431, T. II, p. 381, T. III, p. 349. 1871 bis 1873.

$$A = \Sigma_{x,y,z}\left(\frac{\partial x}{\partial a}\right)^2,\quad B = \Sigma\left(\frac{\partial x}{\partial b}\right)^2,\quad C = \Sigma\left(\frac{\partial x}{\partial c}\right)^2,$$
$$A_1 = \Sigma\frac{\partial x}{\partial b}\frac{\partial x}{\partial c},\qquad B_1 = \Sigma\frac{\partial x}{\partial c}\frac{\partial x}{\partial a},\ C_1 = \Sigma\frac{\partial x}{\partial a}\frac{\partial x}{\partial b}$$

ist. Hieraus ergiebt sich der Satz, dass Punkte, welche ursprünglich auf dem Ellipsoide

$$A\alpha^2 + B\beta^2 + C\gamma^2 + 2A_1 B\gamma + 2B_1\gamma\alpha + 2C_1\alpha\beta = r^2$$

lagen, wo r eine unendlich kleine Constante bedeutet, gegenwärtig auf der Kugel

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = r^2$$

liegen, mit anderen Worten, es ergiebt sich die Lösung der Aufgabe, *dasjenige ursprüngliche Ellipsoid zu finden, welches augenblicklich gerade eine Kugel ist.* Dabei ist Mittelpunkt Mittelpunkt, Oberfläche Oberfläche und die conjugirten Durchmesser sind conjugirte Durchmesser geblieben. Es sind das alles noch Eigenschaften, welche die Flüssigkeit mit dem festen Körper gemein hat.

Die drei Richtungen, welche hiernach stets auf einander senkrecht bleiben, sollen auch hier *Hauptrichtungen* genannt werden. Es soll ferner das Verhältniss

$$\frac{r'}{r} = \theta \tag{32}$$

die *lineare Dilatation* der Linie zwischen dem Punkte x, y, z und dem ihm benachbarten genannt werden. Sie ist constant auf der Oberfläche jedes Kegels mit der Gleichung

$$0 = (A\alpha^2 + B\beta^2 + C\gamma^2 + 2C_1\alpha\beta + 2A_1\beta\gamma + 2B_1\gamma\alpha)\theta - \tfrac{1}{2}(A'\alpha^2 + B'\beta^2 + C'\gamma^2 + 2C_1'\alpha\beta + 2A_1'\beta\gamma + 2B_1'\gamma\alpha)$$

oder in der *Euler*'schen Form

$$(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2)\theta - 2E = 0,$$

wo

$$2E = \frac{\partial x'}{\partial x}\xi^2 + \frac{\partial y'}{\partial y}\eta^2 + \frac{\partial z'}{\partial z}\zeta^2 + \left(\frac{\partial z'}{\partial y} + \frac{\partial y'}{\partial z}\right)\eta\zeta + \left(\frac{\partial z'}{\partial z} + \frac{\partial z'}{\partial x}\right)\zeta\xi + \left(\frac{\partial y'}{\partial x} + \frac{\partial x'}{\partial y}\right)\xi\eta$$

gesetzt wurde. Auf dem Kegel

$$A'\alpha^2 + B'\beta^2 + C'\gamma^2 + 2C_1'\alpha\beta + 2A_1'\beta\gamma + 2B_1'\gamma\alpha = 0$$

oder

$$E = 0$$

ist sie z. B. gleich Null, während sie nie unendlich werden kann, da der Factor von θ nie verschwindet. Die Axen des allgemeinen Kegels sind zugleich die Hauptrichtungen, und θ bestimmt sich aus der Gleichung

$$\begin{vmatrix} A\,\theta - \tfrac{1}{2}A' & C_1\theta - \tfrac{1}{2}C_1' & B_1\theta - \tfrac{1}{2}B_1' \\ C_1\theta - \tfrac{1}{2}C_1' & B\,\theta - \tfrac{1}{2}B' & A_1\theta - \tfrac{1}{2}A_1' \\ B_1\theta - \tfrac{1}{2}B_1' & A_1\theta - \tfrac{1}{2}A_1' & C\,\theta - \tfrac{1}{2}C' \end{vmatrix} = 0,$$

oder in der *Euler*'schen Form aus der Gleichung

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial x'}{\partial x} - \theta & \tfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial y'}{\partial x} + \dfrac{\partial x'}{\partial y}\right) & \tfrac{1}{2}\left(\dfrac{d x'}{\partial z} + \dfrac{\partial z'}{\partial x}\right) \\ \tfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial y'}{\partial x} + \dfrac{\partial x'}{\partial y}\right) & \dfrac{\partial y'}{\partial y} - \theta & \tfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial z'}{\partial y} + \dfrac{\partial y'}{\partial z}\right) \\ \tfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial x'}{\partial z} + \dfrac{\partial z'}{\partial x}\right) & \tfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial z'}{\partial y} + \dfrac{\partial y'}{\partial z}\right) & \dfrac{\partial z'}{\partial z} - \theta \end{vmatrix} = 0.$$

Schliesslich ergiebt sich die Richtung des betrachteten Linienelementes, d. h. das Verhältniss $\alpha : \beta : \gamma$ resp. das Verhältniss $\xi : \eta : \zeta$ aus den Gleichungen, welche nach den bekannten Aenderungen aus den obigen entstehen.

Es wird im Allgemeinen sich empfehlen, die Coordinatenaxen in die Richtungen der Hauptdilatationen zu legen, dann kann man jede beliebige Dilatation durch diese ausdrücken vermittelst der Gleichung

$$\theta = \theta_x \cos^2 \lambda + \theta_y \cos^2 \mu + \theta_z \cos^2 \nu,$$

wo λ, μ, ν die Richtungswinkel des betrachteten Elementes sind.

Wir werden bei der Betrachtung der Drehungscomponenten noch Gelegenheit haben, hierauf zurückzukommen. Vorläufig soll nur hervorgehoben werden, dass sich auch auf diesem Wege nach den obigen Vorbereitungen ohne Weiteres das Resultat ergiebt, das oben nach *Helmholtz* abgeleitet wurde, dass nämlich die Flüssigkeitsbewegung in drei Theile sich zerlegen lässt, nämlich in eine Verschiebung, Drehung und Ausdehnung oder Zusammenziehung. Letztere ist passender Weise als die *Fluiditätsbewegung* zu bezeichnen.

§. 17.

In den ersten Abschnitten des folgenden Theils wird von der Rotation der Theile abgesehen, d. h. die *Existenz eines Geschwindigkeitspotentials* angenommen werden. Damit werden, wie *Helmholtz* gezeigt hat, *zwei Fälle von sehr allgemeiner Natur von der Betrachtung ausgeschlossen*, nämlich der Fall der Bewegung einer vollständig von festen Wänden eingeschlossenen incompressibeln Flüssigkeit und der Fall der stationären Bewegung einer solchen. Was den ersten Fall betrifft, so folgt aus einem bekannten Satze von *Green*, dass das Geschwindigkeitspotential im Innern eines Raumes constant ist, wenn es überall an seiner Oberfläche constant ist, dass somit eine Flüssigkeitsbewegung mit der Existenz eines der Gleichung (30) genügenden Geschwindigkeitspotentials im Innern nur dann stattfinden kann, wenn sie irgendwo an der Oberfläche stattfindet. Daraus folgt aber, *dass in einem vollständig von tropfbarer Flüssigkeit erfüllten Raume mit festen Wänden, an denen die Flüssigkeit haftet*, *Bewegung ohne Rotationen der Elemente nicht möglich ist.* Es ist jedoch dieses Ergebniss auf solche Räume zu beschränken, welche im Sinne von *Riemann*[1]) *einfach zusammenhängen*, weil in mehrfach zusammenhängenden die Function φ vieldeutig sein kann, der *Green*'sche Satz aber nur für eindeutige Functionen gilt. Hieran lassen sich unmittelbar die Bemerkungen knüpfen, dass in einem mehrfach zusammenhängenden, vollständig von Flüssigkeit erfüllten Raume mit festen Wänden nur *eine einzige rotationsfreie Bewegung* existiren kann und zwar mit vieldeutigem Geschwindigkeitspotentiale, dass in einem einfach zusammenhängenden Raume mit theilweise freien Wänden nur eine einzige Bewegung mit eindeutigem und in einem entsprechenden mehrfach zusammenhängenden Raume nur eine einzige Bewegung mit mehrdeutigem Geschwindigkeitspotentiale möglich ist, wenn in den letzten beiden Fällen die Normalcomponente der Geschwindigkeit an der freien Oberfläche gegeben ist. Und zwar ist das Geschwindigkeitspotential im letzten Falle gleich der Summe derjenigen, welche gelten, wenn einmal der Raum vielfach zusammenhängend ist und die

---

[1]) *Riemann*, Cr. J. Bd. 54, S. 108.

Wände durchweg fest sind, und wenn das andere Mal der Raum einfach zusammenhängend und die Wände zum Theil frei sind.

Dass eine *stationäre Bewegung ebenfalls nicht ohne elementare Rotationen vor sich gehen kann*, ergiebt sich nach *Hankel* schon aus der Bemerkung, dass hier wie bei dem eben betrachteten Falle die zur Oberfläche normalen Geschwindigkeitscomponenten verschwinden; dieselben Folgerungen, welche an diese Thatsache dort sich knüpfen, ergeben sich daher auch hier, und so erhält man den erwähnten Satz.

Im Folgenden wird, wie gesagt, zunächst die Existenz der Function φ vorausgesetzt werden. Wenn trotzdem auch stationäre Bewegungserscheinungen behandelt werden, so geschieht dies mit *Vernachlässigung* der dann nothwendig vorhandenen Rotationen der Theilchen. In der That kann man trotz dieser Vernachlässigung zu einer annähernd befriedigenden Beschreibung mancher Erscheinungen gelangen. Die meisten ihrer Eigenschaften hat die Function φ mit der durch die Gleichung (14) definirten Function V gemein; in mehrfach zusammenhängenden Räumen kann es, wie gesagt, mehrdeutig werden. Es enthält wie V eine willkürliche Constante, welche man für beide Grössen meist durch die Fortsetzung bestimmt, dass in der Unendlichkeit dieselben verschwinden sollen. Wesentlich ist, *dass die Differentialquotienten beider Grössen stets und überall eindeutig und stetig sein müssen*, letzteres mit einer Einschränkung, von welcher in dem Capitel über freie Flüssigkeitsstrahlen die Rede sein wird.

Dass unter Wirkung von Kräften, welche ein Potential V haben, und bei unendlich kleinen Bewegungen u, v, w der Ausdruck (29) immer in erster Annäherung ein vollständiges Differential, also näherungsweise eine Function φ vorhanden sei, ist bekanntlich von *Lagrange*[1]) behauptet, aber von *Poisson*[2]) widerlegt worden. *Challis*[3]) hat sogar gezeigt, dass, selbst wenn für $t = 0$ die Grössen u, v, w exact gleich Null sind und immer unendlich klein bleiben, (29) nicht nothwendig ein vollständiges Differential ist, dass es vielmehr, um ein solches zu erhalten, der Multiplication mit einem Factor $t^{-\alpha}$ bedürfe, in welchem aber α nicht nur nicht gleich Null sein dürfe, sondern sogar so gross sein müsse, dass das Product für $t = 0$ endlich werde.

---

[1]) *Lagrange*, Mécanique analytique, T. I.

[2]) *Poisson*, Mém. de l'Ac. des Sc. 10, p. 554.

[3]) *Challis*, Phil. Mag. (2) Bd. 24, p. 94.

Von grosser Wichtigkeit für die Entwickelung der Hydrodynamik ist dagegen ein anderer, schon von *Lagrange* aufgestellter Satz geworden, welcher aussagt, *dass, falls der Ausdruck* (29) *einmal ein vollständiges Differential sei, er immer ein solches bleibe.* Dieser von *Lagrange* und *Power* [1]) nur für einzelne Fälle, von *Cauchy* [2]) allgemein bewiesene Satz scheidet diejenigen Flüssigkeitsbewegungen, welche wir hier betrachten, äusserst scharf von denen, welche später ins Auge gefasst werden sollen und bei welchen die *Clebsch*'schen Functionen χ und ψ, d. h. die elementaren Rotationen in Betracht kommen. Es kann nie eine Bewegung der einen Art in eine solche der anderen Art übergehen. Dieser Satz ist das Charakteristicum der idealen Flüssigkeiten; bei den wirklichen, d. h. reibenden Flüssigkeiten wird er, wie sich im dritten Theile zeigen wird, hinfällig. Während zu seinem Beweise sich *Cauchy* der Integrale der *Lagrange*'schen Gleichungen bedient, hat später *Stokes* [3]) einen Beweis gegeben, welcher eine Integration nicht erfordert. Ihn anzuführen ist hier nicht nothwendig, da der in Rede stehende Satz bei der Betrachtung der elementaren Rotationen ohne Weiteres sich ergeben wird.

---

[1]) *Power*, Trans. of the Cambr. Phil. S. Vol. 7, p. 455.

[2]) *Cauchy*, Mém. des Sav. Etr. T. I, p. 40.

[3]) *Stokes*, Trans. of the Cambr. Phil. Soc. Vol. 8, p. 307.

Zweiter Theil.

Anwendungen der Grundgleichungen.

Erster Abschnitt.

Strömung und Wellenbewegung der Flüssigkeiten.

§. 18.

Die Einführung des Geschwindigkeitspotentials gestattet die *Euler*'schen Gleichungen auf eine Form zu bringen, welche unmittelbar zur Beschreibung gewisser Strömungserscheinungen der Flüssigkeiten hinleitet. Aus (15) und (28) erhält man nämlich

$$d(V-P) = d\left(\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right) + \frac{\partial \varphi}{\partial x}\, d\,\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\, d\,\frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial z}\, d\,\frac{\partial \varphi}{\partial z},$$

und durch Integration, mit Benutzung einer auf S. 33 gemachten Festsetzung

$$V-P = \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \tfrac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)^2\right]. \qquad (33)$$

Hierzu kommt die Continuitätsgleichung (30) $\triangle\,\varphi = 0$.

Die Flächen $V = const.$ werden in der Dynamik gewöhnlich Niveauflächen genannt, und die auf ihnen überall senkrecht stehenden Linien Kraftlinien. Analog sollen hier die Flächen

$$\varphi = const.$$

Niveauflächen, die auf ihnen senkrechten Linien aber, welche durch die Gleichungen

$$dx : dy : dz = \frac{\partial \varphi}{\partial x} : \frac{\partial \varphi}{\partial y} : \frac{\partial \varphi}{\partial z} \tag{34}$$

bestimmt sind, *Stromlinien* genannt werden; denn in ihnen strömt die Flüssigkeit. Einen Raum, der von sich stetig an einander schliessenden Stromlinien gebildet wird, hat *Kirchhoff*[1]) einen *Stromfaden* genannt. Ein solcher Stromfaden kann niemals im Innern der Flüssigkeit enden; erfüllt dieselbe einen einfach zusammenhängenden Raum, so kann er auch nicht in sich zurücklaufen; es müssen dann also sämmtliche Stromfäden in der Oberfläche der Flüssigkeit enden. In der *Hydrodynamik* tritt die Betrachtung *geschlossener Stromfäden* an Wichtigkeit für die praktische Anwendung zurück gegen die Betrachtung ungeschlossener Stromfäden. Gerade das umgekehrte ist in einem Gebiete der Fall, welches im übrigen eine nahezu vollständige Analogie mit der Hydrodynamik darbietet, im Gebiete der *Electrodynamik*.

Eingehend sind bisher nur solche Strömungserscheinungen behandelt worden, bei denen φ von t unabhängig, also die Bewegung *stationär* ist. In diesem Falle beschränkt sich das Problem auf die Lösung der Continuitätsgleichung (30). Specielle Lösungen ergeben sich ohne Weiteres; es braucht z. B. nur φ irgend einer linearen Function von x, y, z gleichgesetzt zu werden; die Niveauflächen sind dann parallele Ebenen, und die Stromlinien auf ihnen senkrecht stehende gerade Linien. Um allgemeinere Lösungen zu finden, muss man die Gleichung (30) in andere Coordinaten ξ, η, ζ transformiren. Der hierzu bequeme Weg ist völlig analog dem im §. 10 zur Einführung neuer Coordinaten in die Bewegungsgleichungen selbst eingeschlagenen.

Die Gleichung (30) ist nämlich äquivalent mit der Minimumsbedingung des Integrals

$$\Omega_1 = \int dx\, dy\, dz \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)^2\right]$$

oder, da für orthogonale Coordinaten

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)^2 = \Xi^2\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \xi}\right)^2 + H^2\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \eta}\right)^2 + Z^2\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \zeta}\right)^2$$

und

[1]) *Kirchhoff*, Vorl. über Math. Phys., S. 188.

$$dx\,dy\,dz = \frac{d\xi\,d\eta\,d\zeta}{\Xi H Z}$$

ist, wenn

$$\frac{1}{\left(\frac{dx}{\partial\xi}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial\xi}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial\xi}\right)^2} = \Xi^2, \quad \frac{1}{\left(\frac{\partial x}{d\eta}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial\eta}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial\eta}\right)^2} = H^2,$$

$$\frac{1}{\left(\frac{\partial x}{\partial\zeta}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial\zeta}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial\zeta}\right)^2} = Z^2$$

gesetzt wird [1]), äquivalent der Minimumsbedingung des Integrals

$$\Omega_1 = \int d\xi\,d\eta\,d\zeta\left[\frac{\Xi}{HZ}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}\right)^2+\frac{H}{\Xi Z}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\eta}\right)^2+\frac{Z}{\Xi H}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\zeta}\right)^2\right].$$

Diese Bedingung ihrerseits aber führt durch Variation des Integrals zu der Gleichung

$$\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{\Xi}{HZ}\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}\right)+\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{H}{\Xi Z}\frac{\partial\varphi}{\partial\eta}\right)+\frac{\partial}{\partial\zeta}\left(\frac{Z}{\Xi H}\frac{\partial\varphi}{\partial\zeta}\right) = 0. \tag{35}$$

Für elliptische Coordinaten, welche durch die Gleichung (23) definirt sind, sind die Grössen $\Xi H Z$:

$$\Xi = 2\sqrt{\frac{(\xi+\varkappa^2)(\xi+\lambda^2)(\xi+\mu^2)}{(\xi-\eta)(\xi-\zeta)}},$$

$$H = 2\sqrt{\frac{(\eta+\varkappa^2)(\eta+\lambda^2)(\eta+\mu^2)}{(\eta-\xi)(\eta-\zeta)}},$$

$$Z = 2\sqrt{\frac{(\zeta+\varkappa^2)(\zeta+\lambda^2)(\zeta+\mu^2)}{(\zeta-\xi)(\zeta-\eta)}}.$$

Hieraus ist die merkwürdige Folgerung zu ziehen, dass die Grösse $\left(\frac{\Xi}{HZ}\right)$ das Product einer Function von ξ in eine Function von η und ζ ist, und dass das Entsprechende von den beiden anderen Grössen gilt. Führt man daher an Stelle von ξ, η, ζ neue Coordinaten ξ_1, η_1, ζ_1 ein, von denen jede eine Function ausschliesslich der gleichnamigen alten ist, nämlich

[1]) Die Grössen Ξ, H, Z sind die reciproken Quadratwurzeln der Grössen N_1, N_2, N_3 im §. 10 (S. 18).

$$\xi_1 = \int \frac{d\xi}{\sqrt{(\varkappa^2+\xi)(\lambda^2+\xi)(\mu^2+\xi)}},$$

$$\eta_1 = \int \frac{d\eta}{\sqrt{(\varkappa^2+\eta)(\lambda^2+\eta)(\mu^2+\eta)}},$$

$$\zeta_1 = \int \frac{d\zeta}{\sqrt{(\varkappa^2+\zeta)(\lambda^2+\zeta)(\mu^2+\zeta)}},$$

so wird die Gleichung (35) einfacher

$$(\eta-\zeta)\frac{\partial^2\varphi}{\partial\xi_1^2} - (\zeta-\xi)\frac{\partial^2\varphi}{\partial\eta_1^2} + (\xi-\eta)\frac{\partial^2\varphi}{\partial\zeta_1^2} = 0. \tag{35 a}$$

Diese Gleichung hat unter anderen auch die Lösungen

$$\varphi = \xi_1, \quad \varphi = \eta_1, \quad \varphi = \zeta_1.$$

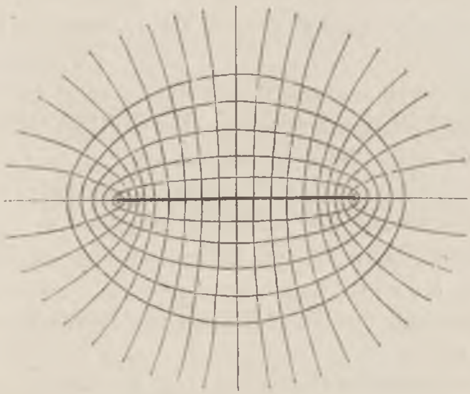
Es giebt daher Flüssigkeitsströmungen, bei welchen die Niveauflächen gewisse Flächen zweiten Grades und die Stromlinien die Schnittlinien der beiden zugehörigen Schaaren von Flächen zweiten Grades sind. Für die Hydrodynamik sind diese Strömungen nur von geringem Interesse, da sie in der Wirklichkeit kaum vorkommenden Fällen entsprechen. Die eine derselben findet z. B. statt, wenn eine von der Ellipse

$$z = 0, \quad \frac{x^2}{\varkappa^2-\mu^2} + \frac{y^2}{\lambda^2-\mu^2} = 1$$

begrenzte, irgendwie gestaltete Fläche in der Flüssigkeit sich befindet, und wenn entsprechende Theile derselben entweder auf beiden Seiten Flüssigkeit ausströmen lassen oder auf beiden Seiten solche aufsaugen (Fig. 1).

Wohl aber ist dieser Fall von grosser Wichtigkeit für die Elektrostatik, da, wie sich zeigen lässt, die in Rede stehende Lösung zur Beschreibung der Gleichgewichtsvertheilung der Elektricität auf einer elliptischen Scheibe dienen kann. Ferner sind die obigen Betrachtungen für die Akustik von Bedeutung; sie finden nämlich mit geringen Modificationen auch auf Luftströmungen in Räumen Anwendung, welche durch Flächen zweiten Grades begrenzt sind. Die Wände vieler musikalischer Instrumente sind aber in der That theils von cylindrischer, theils von hyperboloidischer Gestalt. Es empfiehlt sich, bei dieser Analogie zwischen elektrischen und hydrodynamischen Erscheinungen sogar, einen zuerst in der Theorie der Elektricität eingeführten Begriff, den des Widerstandes, auch in die Hydrodynamik einzuführen. Dort ist der Widerstand eines von zwei Niveauflächen und festen Wänden eingeschlossenen Raumes definirt, als der Potentialunterschied zwischen den beiden Niveauflächen, dividirt durch die in der Zeiteinheit durch den

Fig. 1.



Raum hindurchströmende Elektricitätsmenge; hier hat man zum Zwecke der hydrodynamischen Definition nur Potential durch Geschwindigkeitspotential, Elektricitätsmenge durch Flüssigkeitsmenge zu ersetzen.

§. 19.

In der Praxis handelt es sich meist um Strömungen, bei welchen die Bewegung vorzugsweise oder im Mittel nach der *Richtung einer geradlinigen oder krummlinigen Axe* vor sich geht. Unter den Gestalten, welche in solchen Fällen die Begrenzung der Flüssigkeit haben kann, zeichnen sich zwei durch Einfachheit aus, nämlich diejenigen mit *constantem Querschnitt* und diejenigen mit *constantem Längsschnitt*; die ersteren Grenzen sind als *Cylinderflächen*, die letzteren als *Rotationsflächen* zu bezeichnen.

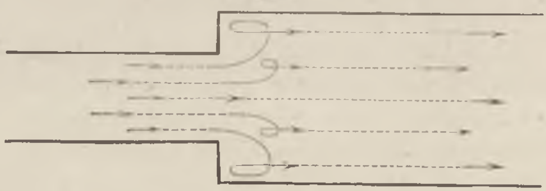
Wenn man, was in allen diesen Fällen von Wichtigkeit ist, zur Untersuchung der stattfindenden Bewegung dieselbe in eine axiale und in eine transversale zerlegt, so findet man, wie *Stefan*[1])

[1]) *Stefan*, Sitz.-Ber. d. Wien. Ak. Bd. 37, Th. 2, S. 420.

gezeigt hat, eine Reihe von interessanten Beziehungen, welche als Consequenzen des Bestehens der Continuitätsgleichung erscheinen und welche für die beiden Componenten der lebendigen Kraft der Bewegung gelten. Für cylindrische Wände gilt nämlich der einfache Satz, der sich aus den Gleichungen ohne Schwierigkeit ergiebt: *Beim Uebergange aus einem Querschnitte zu einem anderen wächst die axiale lebendige Kraft genau um ebensoviel wie die transversale.* Die Bedeutung dieses Satzes zeigt sich am einfachsten in solchen Fällen, in denen ausser der Mantelfläche noch ein Querschnitt als fette Wand vorhanden ist, z. B. als Boden. Da an diesem Boden die axiale Geschwindigkeit gleich Null ist, so muss sie überall kleiner als die radiale sein; die Curven, welche die Theilchen beschreiben, werden daher (bei einer gewissen Voraussetzung) stets eine grössere transversale als axiale Ausdehnung haben, ein Resultat, das für die Theorie der Wellenbewegung von Wichtigkeit ist.

Ein sehr interessanter Fall ist der, wo Flüssigkeit hinter einander durch zwei cylindrische Röhren von ungleichem Querschnitte, z. B. aus einer engeren in eine weitere, strömt. Dann giebt es am Anfange der weiten Röhre lebhafte Radialbewegungen in grosser Entfernung von der Uebergangsstelle, aber nicht mehr; folglich ist nach dem Satze von *Stefan* auch die axiale lebendige Kraft kurz hinter der Uebergangsstelle grösser als weiterhin, das verträgt sich aber mit der Continuität der incompressiblen Flüssigkeit nur dann, wenn die axiale lebendige Kraft am Anfang der weiten Röhre sich nicht aus lauter gleich gerichteten Geschwindigkeiten, sondern aus hin- und hergehenden zusammengesetzt; mit anderen Worten, es treten an der Uebergangsstelle Rotations- oder Wirbel-

Fig. 2.



bewegungen ein, für welche ein Geschwindigkeitspotential φ nicht existirt (Fig. 2).

Ist der Querschnitt des von der Flüssigkeit erfüllten Raumes veränderlich, dagegen der Längsschnitt ein constanter, so gilt der obige Satz nicht, z. B. an der eben betrachteten Uebergangsstelle nicht zu deren beiden Seiten. *Dann unterscheidet sich vielmehr beim Uebergange von einem Querschnitt zum nächsten der Zuwachs der transversalen lebendigen Kraft von dem der axialen durch das Product der zwischen beiden Querschnitten an der Wand vorhandenen lebendigen Kraft in den Sinus des Neigungswinkels der Wand gegen die Axe.* Hierbei ist, worauf *Stefan* nicht aufmerksam macht, der Ausdruck „lebendige Kraft" nicht in dem gewöhnlichen Sinne zu verstehen; man hat vielmehr in der Definition der lebendigen Kraft, wie sie üblich ist, die Raummasse durch eine Flächenmasse, d. h. den Raum durch eine Fläche zu ersetzen. Beim Uebergange von einem kleineren zu einem grösseren Querschnitte wächst die transversale lebendige Kraft stärker als die axiale, beim Uebergange von einem grösseren zu einem kleineren Querschnitte wächst die transversale weniger als die axiale.

Ist die Wand nicht fest, sondern beweglich, so ist der betrachtete Unterschied noch grösser, falls sie sich nach aussen bewegt, dagegen kleiner, falls sie sich nach innen bewegt.

§. 20.

In den meisten Fällen sind die Strömungen der Flüssigkeiten mit *Wellenbewegungen* verknüpft, besonders immer dann, wenn ein Theil der Oberfläche frei ist, d. h. wenn die incompressible Flüssigkeit theilweise an compressible grenzt. Diese Wellenbewegungen sollen jetzt, und zwar unabhängig von den Strömungen, ins Auge gefasst werden. Es hat sich in diesem Gebiete nicht als vortheilhaft erwiesen, von den allgemeinsten Gesichtspunkten der Theorie auszugehen, wie sie durch die Grundgleichungen dargestellt sind. Aus diesem Grunde hat man sich schon zu Anfang dieses Jahrhunderts mit Vorliebe mit speciellen Problemen beschäftigt, und auch in neuerer Zeit ist meist an diese Arbeiten angeknüpft worden. Dank den Arbeiten von *Cauchy*, *Poisson*, *Airy*, *Russel* u. A. m. waren in der Mitte dieses Jahrhunderts die einfachsten Probleme bereits gelöst und an der Hand der Erfahrung diese Lösungen geprüft worden. Hierher gehören namentlich diejenigen Fälle von Wellenbewegung, in welchen die Wellenlänge gross ist gegen die Tiefe des Wassers, diese selbst aber, ebenso wie die Breite, nur geringen Schwankungen unterworfen ist, während oben die Oberfläche frei ist.

Für diesen Fall fand *Green*[1]), wenn β die Breite, γ die Tiefe bedeutet, die Höhe der Wellen proportional mit $\beta^{-1/2}\gamma^{-1/4}$, die Horizontalgeschwindigkeit mit $\beta^{-1/2}\gamma^{-3/4}$, die Wellenlänge proportional mit $\gamma^{-1/2}$ und die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Wellenbewegung gleich $\sqrt{g\gamma}$, wenn g die Beschleunigung durch die Schwerkraft bedeutet; letztere beiden Grössen sind also von der Breite unabhängig. Dieses Gesetz hat *Russel* durch Beobachtungen bestätigt gefunden; Andere, besonders *Kelland* und *Airy*, haben das Problem für beliebigen und veränderlichen Querschnitt erweitert, um so dem Ziele, d. h. der *Beschreibung der Wellenbewegung in einem Canale oder in einem Flussbette* näher zu kommen[2]).

Ist umgekehrt die *Wellenlänge sehr klein*, so findet sich für den Fall einer periodischen Wellenbewegung von constanter Geschwindigkeit und Form in einer Flüssigkeit von gleichförmiger Tiefe, wenn c die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Bewegung, λ die Wellenlänge, h die Tiefe der Flüssigkeit und $m = \frac{2\pi}{\lambda}$ ist,

$$c = \sqrt{\frac{g}{m} \cdot \frac{e^{mh} - e^{mh}}{e^{mh} + e^{mh}}}.$$

Jede Verticalebene, welche der Richtung des Bettes parallel geht, schneidet die Oberfläche in einer Sinuslinie; jedes Theilchen beschreibt eine Ellipse, welche an der Oberfläche in einen Kreis, am Boden in eine gerade Linie übergeht.

Für einen *dreieckigen Canal* hat *Kelland*[3]) die Lösung auch bei variabeler Tiefe gefunden. Ist x die Längs-, y die Quer- und z die Verticalrichtung, so findet er das Geschwindigkeitspotential

$$\varphi = A(e^{\alpha y} + e^{-\alpha y}) \cdot (e^{\alpha z} + e^{-\alpha z}) \sin \sqrt{2}\,\alpha(x - ct). \qquad (36)$$

Auch die hieraus fliessenden Sätze hat *Russel* durch die Beobachtung bestätigt gefunden.

Schwieriger ist es, die entsprechenden Probleme zu behandeln, wenn *Tiefe des Wassers und Länge der Wellen in einem endlichen Verhältnisse zu einander stehen.* Man findet dann mit einer gewissen Annäherung

---

1) *Green*, Trans. of the Cambr. Phil. Soc. Vol. 6, p. 457.
2) *Airy*, *Tides* and *Waves*, in der Encyclopedia metropolitana (London).
3) *Kelland*, Trans. of the R. Soc. of Edinb. vol. 15, p. 121.

$$c = \sqrt{g(h + 3k)},$$

wo k die Höhe der Wellen ist, und weiter ergiebt sich, wie *Earnshaw* gezeigt hat, das Charakteristicum, dass die Welle während ihres Fortschreitens sich ändert. Die Annahme von Reibung ist zur Erklärung dieser Gestaltsänderung nicht, wie *Russel* geglaubt hatte, erforderlich.

Eines besonderen Interesses hat sich bei den Theoretikern eine Welle einfachster Art zu erfreuen gehabt, die von *Russel* eingeführte *Einzelwelle* (primary oder solitary wave). Dieselbe entsteht z. B. durch Einschieben eines Kegels oder eines Prismas in einen Canal und besteht aus einem einzigen Berg ohne nachfolgendes Thal. Eine ähnliche Welle, aber von entgegengesetzter Natur, entsteht, wenn man plötzlich eine schmale Schicht aus dem Canal heraushebt, und diese Welle besteht aus einem einzigen Thal ohne Berg. Bedeutet L die halbe Länge des Berges resp. Thales, T die Schwingungsdauer, so ist

$$L = \pi\left(h + \frac{k}{2}\right), \quad T = \frac{L}{h + \frac{k}{2}}\sqrt{\frac{h + \frac{k}{2}}{g}} = \pi\sqrt{\frac{h + \frac{k}{2}}{g}}$$

$$c = \sqrt{\frac{h \pm \frac{k}{2}}{h} \cdot (h \pm k) g},$$

wo das obere Zeichen für die positive, das untere für die negative Welle gilt. Diese Formeln sind von *Robertson* [1]) abgeleitet worden; charakteristisch für die durch sie dargestellte Wellenbewegung ist, dass die Theilchen nicht Ellipsen, sondern nur halbe Ellipsen beschreiben. Verschiedene englische Physiker haben später die *Russel*'sche Theorie dieses und einiger mit ihm zusammenhängender Probleme angefochten, jedoch, wie *Lord Rayleigh* gezeigt hat, ohne ausreichenden Grund.

Von den Untersuchungen allgemeiner Wellenbewegungen können hier nur die für die Entwickelung der Hydrodynamik wesentlichsten hervorgehoben werden. Dahin gehören die Arbeiten von *Hagen* [2]), welche auf der von *Gerstner* herrührenden Theorie basiren. Nach dieser Theorie giebt es (was auch mit dem obigen übereinstimmt) eine Wellenbewegung, bei welcher die Tiefe des

---

1) *Robertson*, Phil. Mag. (3), Vol. 37. — (4), Vol. 1 und 5.

2) *Hagen*, Poggend. Ann. Bd. 107.

Wassers zunächst als unendlich vorausgesetzt, alle Theilchen Kreise senkrecht zur Fortpflanzungsrichtung der Bewegung beschreiben, die Theilchen von gleichen Bahnen zusammengefasst Cycloiden bilden, und wenn b der Radius jener Kreise ist, die Formeln

$$c = \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi}}, \quad b = \frac{1}{m} e^{-mr}$$

gelten; $r + \frac{1}{m}$ ist dabei der Abstand eines in seiner Gleichgewichtslage befindlichen Theilchens von einem gewissen Niveau; diese Niveauebene würde die Oberfläche der Flüssigkeit selbst sein, wenn Länge und Höhe der Welle sich wie $\pi : 1$ verhielten; wie die Versuche gezeigt haben, ist aber das Verhältniss viel grösser (ungefähr $= 15 : 1$) und folglich liegt das gedachte Niveau über der Oberfläche. Als Charakteristicum dieses Falles ist zu erwähnen, dass jeder senkrechte Flüssigkeitsfaden mit seiner Wurzel feststeht und nur mit seinem oberen Ende hin- und herschwankt.

Das ist nicht mehr der Fall, sobald man die Tiefe als endlich annimmt[1]). Ist die Tiefe sehr gering, also das Wasser, wie man sagt, seicht, so bewegen sich alle senkrechten Fäden mit sich selbst parallel hin und her, dabei sich verlängernd und verkürzend. Für unendlich kleine Bewegungen war dies schon von *Lagrange* erkannt worden. Das Missliche ist bei diesem Problem, dass man nicht gleichzeitig allen Grundgleichungen mit Genauigkeit genügen kann. *Hagen* begnügt sich mit einer angenäherten Darstellung, und es ist mir nicht bekannt, ob später Jemand die strenge Lösung gegeben habe. Für eine Tiefe des Wassers, welche weder sehr klein noch sehr gross ist, versuchte *Hagen* eine Lösung durch Combination der beiden ersten Fälle. Diese Idee ist sehr naheliegend; aber es fragt sich: wo soll die Grenzschicht angenommen werden, über welcher der erste, unter welcher der zweite Specialfall als giltig betrachtet werden kann? Und ferner: lässt sich für diese Grenzschicht die nothwendige Continuität der Darstellung erreichen? Letzteres ist nicht möglich; man erhält zwar für die Schicht in der Höhe $\frac{\lambda}{2\pi}$ über dem Boden dieselbe Wellenbewegung, aber verschiedene Fortpflanzungsgeschwindigkeiten, je nachdem man den ersten Fall oder den letzten benutzt.

[1]) *Hagen*, Ber. d. Berl. Ak. 1860.

Noch allgemeinerer Natur ist der von *Boussinesq*[1]) betrachtete Fall von Schwingungen, welche irgendwo in einer Flüssigkeit erregt werden und sich derart ausbreiten, dass sie schliesslich die ganze Flüssigkeit erfüllen.

Wird der Boden horizontal angenommen, so findet man, dass jedes Theilchen eine Ellipse beschreibt (am Boden eine gerade Linie, an der Oberfläche einen Kreis), und dass die Wellenflächen nahezu Kreiscylinder sind, deren gemeinsame Axe die durch den Erregungspunkt gelegte Verticale ist. Die Amplitude ist umgekehrt proportional der Quadratwurzel aus der Entfernung von der Axe, ändert sich aber auch bei constantem Abstand von Richtung zu Richtung.

§. 21.

In etwas engerem Zusammenhang mit der Theorie steht eine andere Arbeit desselben französischen Physikers[2]), welche die Bewegung des Wassers in Canälen unter der Voraussetzung behandelt, dass dieselbe nur von der Längsrichtung x und der verticalen Richtung z, nicht aber von der Breite des Canales abhängig sei; die x-Componente der Geschwindigkeit, d. h. die Grösse u, soll sogar auch von z unabhängig sein. Das Geschwindigkeitspotential, dessen Existenz angenommen wird, entwickelt der Verfasser nach *Taylor's* Reihe nach Potenzen von z, setzt dann den Druck an der Oberfläche gleich Null und nimmt an, dass deren Theilchen sie nie verlassen. So ergeben sich zwei Gleichungen, aus welchen die Horizontalgeschwindigkeit am Grunde und die Höhe eines Oberflächentheilchens über seinem Ruhepunkte bestimmt werden kann. Die erste Annäherung ergiebt die *Lagrange*'schen Formeln für die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Wasserwellen; die zweite giebt:

$$\left.\begin{aligned} \frac{w}{\sqrt{gH}} &= 1 + \frac{3h}{4H} + \frac{H^2}{6h}\frac{d^2h}{dx^2} \\ h &= f(x - w_0 t) - t\,\frac{d[h(w-w_0)]}{dx} \end{aligned}\right|,$$

---

[1]) *Boussinesq*, Compt. R. 68, p. 905.

[2]) *Boussinesq*, Compt. R. 72, p. 755. 73, p. 256.

wo H die ursprüngliche Höhe des Wassers, h die Erhebung, w_0 nahezu gleich $\sqrt{gH}$ ist und w die Fortpflanzungsgeschwindigkeit bedeutet. Mit der Zeit nähert sich die Bewegung mehr und mehr einem stationären Zustande, welcher durch die Gleichungen

$$w = w_0 = const.$$

ausgedrückt ist.

De St. Venant [1]) ist es zuerst gelungen, ausgehend von den Gleichungen

$$\left.\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{d^2 x}{dt^2}, \quad \frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial z} = g - \frac{d^2 z}{dt^2}\right\},$$

giltig für ebene Wellen unter Einfluss der Schwere, zwei wesentlich verschiedene Lösungen derselben aufzufinden. Sind x_0, z_0, t_0 Constanten, so ist die erste Lösung

$$\left.\begin{aligned} x &= x_0 + h e^{-\frac{\pi z}{\lambda}} \sin\left(\pi \frac{t-t_0}{T} - \frac{x_0}{\lambda}\right) \\ z &= z_0 - h e^{-\frac{\pi z}{\lambda}} \cos\left(\pi \frac{t-t_0}{T} - \frac{x_0}{\lambda}\right) \end{aligned}\right\},$$

wo λ die halbe „Breite" (d. h. Länge) der Welle und T die Schwingungsdauer ist; zwischen beiden Constanten besteht die Beziehung

$$T = \sqrt{\frac{\pi\lambda}{g}}.$$

Streng richtig ist diese Lösung freilich nur für unendliche Tiefe. Jedes Theilchen beschreibt einen Kreis, deren Radien geometrisch abnehmen, wenn man im Wasser in arithmetischer Progression in die Tiefe dringt. Theilchen, deren Rotationscentren auf geraden, horizontalen Linien liegen, bilden Trochoiden, und das Wellenthal ist überall breiter als der Wellenberg. Diese Welle nennt *de St. Venant* „*die grosse Welle*" und stellt ihr als zweite Lösung *die Plätscherwelle* entgegen, definirt durch die Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} x &= x_0 + h e^{-\frac{\pi z}{\lambda}} \sin\frac{\pi x_0}{\lambda} \cos\pi\frac{t-t_0}{T} \\ z &= z_0 + h e^{-\frac{\pi z}{\lambda}} \cos\frac{\pi x_0}{\lambda} \cos\pi\frac{t-t_0}{T} \end{aligned}\right\}.$$

---

[1]) *De St. Venant*, Compt. R. 73, p. 521 und 589.

Die Wellenbäuche bleiben hier stets in derselben Verticalen, die Knotenpunkte dagegen schwingen in horizontaler Linie um $r = \pm e^{-\frac{\pi z}{\lambda}}$ hin und her; jeder andere Punkt beschreibt auch eine gerade Linie von der Länge r; aber diese Linie hat eine Neigung, welche von Punkt zu Punkt zwischen O und $\frac{\pi}{2}$ variirt.

Für endliche Tiefe H muss man an den obigen Formeln eine Aenderung vornehmen; man muss die Exponentialausdrücke in x und z durch folgende neue ersetzen:

$$\text{in } x: \frac{e^{\pi\frac{H-z_0}{\lambda}} + e^{-\pi\frac{H-z_0}{\lambda}}}{e^{\frac{\pi H}{\lambda}} - e^{-\frac{\pi H}{\lambda}}}, \quad \text{in } z: \frac{e^{\pi\frac{H-z_0}{\lambda}} - e^{-\pi\frac{H-z_0}{\lambda}}}{e^{\frac{\pi H}{\lambda}} - e^{-\frac{\pi H}{\lambda}}},$$

und ferner ist jetzt:

$$\sqrt{\frac{\pi\lambda}{g} \frac{e^{\frac{\pi H}{\lambda}} + e^{-\frac{\pi H}{\lambda}}}{e^{\frac{\pi H}{\lambda}} - e^{-\frac{\pi H}{\lambda}}}}.$$

Aber auch diese Formeln sind nur mit einer gewissen Annäherung richtig. Die Kreise werden hier Ellipsen, die geraden Linien der Plätscherwellen r bleiben gerade Linien, ändern aber von Punkt zu Punkt ihre Länge. Das gleichzeitige Auftreten dieser beiden Arten von Wellen auf dem Meere und ihr gegenseitiges Uebergehen in einander erklärt sich aus dem Umstande, dass jede der beiden Arten aus zwei übereinander gelagerten der anderen Art entstanden gedacht werden kann.

Zu ähnlichen Ergebnissen sind bei analogen Untersuchungen *Holtzmann* [1]) und *Kirchhoff* [2]) gelangt. *Kirchhoff* [3]) hat dann im vergangenen Jahre auch den Fall behandelt, dass der *Boden der Flüssigkeit* nicht durch eine horizontale, sondern durch *eine oder zwei geneigte Ebenen* gebildet wird, jedoch nur unter der Annahme, dass φ eine einfach periodische Function von t ist. Am einfachsten werden die Lösungen, wenn der Boden gegen die Horizontale um einen rechten Winkel oder um einen halben oder drittel solchen geneigt ist; im ersten Falle wird, wenn $a = \frac{n^2\pi^2}{g}$ und n die Schwingungszahl ist:

---

1) *Holtzmann*, Programm der polytechnischen Schule zu Stuttgart. 1858.
2) *Kirchhoff*, Vorl. üb. Math. Phys., S. 354.
3) *Kirchhoff*, Mon. Ber. d. Berl. Ak. 1879, Mai.

$$\varphi = e^{-az} \cos a x,$$

im zweiten

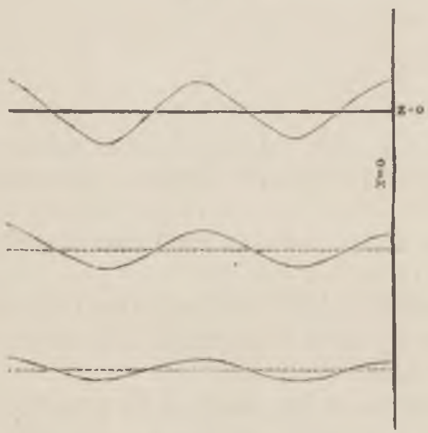
$$\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-az} (\cos a x - \sin a x) + \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-ax} (\cos a z - \sin a z),$$

im dritten

$$\varphi = - e^{-az} \sin a x + \sqrt{3} \,.\, e^{-\frac{a}{2}(z + x\sqrt{3})} \cos \frac{a}{2}(z\sqrt{3} - x)$$
$$- e^{\frac{a}{2}(z - x\sqrt{3})} \sin \frac{a}{2}(z\sqrt{3} + x).$$

Für den ersten und zweiten Fall sind in Fig. 3 und 4 die Werthe von φ für verschiedene x und z dargestellt; aus ihnen gewinnt man zugleich eine Vorstellung von der Gesammtbewegung; der zweite Fall liefert in roher Annäherung die Beschreibung der Brandung an flachen Ufern; für den ersten Fall sind in Fig. 5 auch die Niveau- und Stromlinien gezeichnet.

Fig. 3.



In einem rechtwinkligen Prisma ist die einfachste Flüssigkeitsbewegung diejenige, bei welcher das Geschwindigkeitspotential

$$\varphi = 1 - a(z + x) + a^2 z x$$

ist; die Tiefe des Prismas über der Kante ist dabei $\frac{1}{a}$, also die Schwingungsdauer des Wassers gleich derjenigen eines gleichlangen einfachen Pendels. Die Oberfläche ist hier stets eine Ebene. Für diesen Fall sind die Strom- und Niveaulinien die in Fig. 5 dargestellten.

Verschiedene Physiker haben versucht, die Zusammensetzung der Wellenbewegung mit anderen oder die Beeinflussung derselben durch fremde Kräfte zu studiren, so *Rankine* [1]) die Zusammen-

---

[1]) *Rankine*, Phil. Mag. (4) 36, S. 52.

Fig. 4.

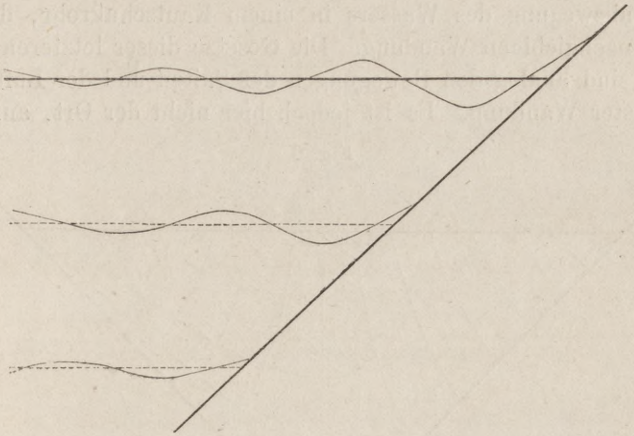
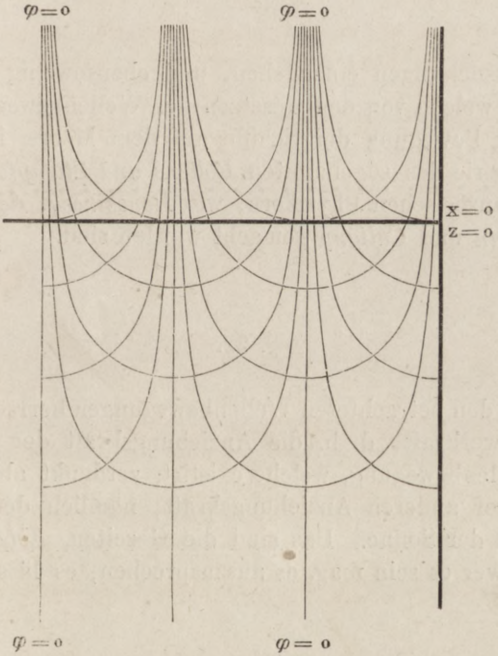
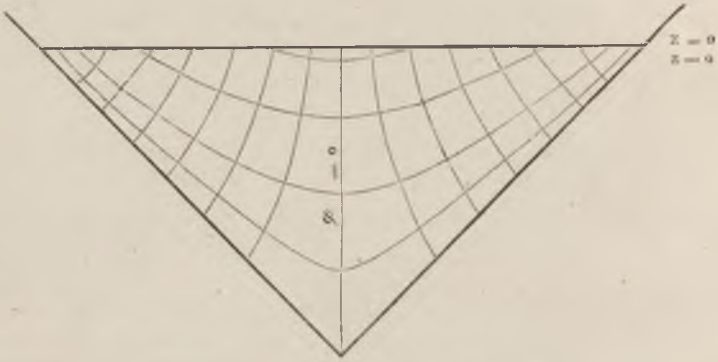


Fig. 5.



setzung mit einer fortschreitenden Bewegung, *Thomson*[1]) den Einfluss des Windes auf die Wellen, und endlich *W. Weber*[2]) die Wellenbewegung des Wassers in einem Kautschukrohr, d. h. in einer nachgiebigen Wandung. Die Gesetze dieser letzteren Bewegung sind analog den Bewegungen der Saiten und der Luftsäulen bei fester Wandung. Es ist jedoch hier nicht der Ort, auf diese

Fig. 6.



Specialuntersuchungen einzugehen, und ebensowenig auf die Anwendungen, welche von den Gesetzen der Wellenbewegung auf die Theorie der Bewegung der Schiffe auf dem Meere, insbesondere auf die Theorie des sogenannten *Rollens und Stampfens*, namentlich von französischen Physikern, wie *Boussinesq*, *de St. Venant*, *Bertin*, *Morin* und *Caligny* gemacht worden sind.

§. 22.

Die bei den betrachteten Wellenbewegungen herrschende Kraft ist die Schwerkraft, d. h. die Anziehungskraft der Erde. Die grösste Wellenbewegung, welche existirt, verdankt aber ihre Entstehung einer anderen Anziehungskraft, nämlich derjenigen des Mondes und der Sonne. Das sind die Gezeiten, *Ebbe und Fluth*. Und so schwer es sein mag, es auszusprechen, es lässt sich nicht

---

[1]) *W. Thomson*, Phil. Mag. (4) Vol. 42, p. 362.
[2]) *W. Weber*, Ber. d. K. Sächs. Ges. d. W. 1867, Vol. 4, p. 353.

läugnen, dass die Theorie der Gezeiten in den letzten dreissig Jahren wenig und in wesentlicher Hinsicht überhaupt keine Fortschritte gemacht hat. Vielleicht liegt das daran, dass ein grosser englischer Gelehrter, *G. B. Airy*[1]), seiner Zeit vorauseilend, damals eine Theorie aufstellte und ausführte, welche in Anbetracht der Schwierigkeit und der Verwickelung der Verhältnisse geradezu bewundernswürdig ist, und in welcher er nicht nur die einfacheren Umstände, sondern auch den Einfluss der Reibung, der Continente, der Winde u. a. m. berücksichtigte, um den örtlichen und zeitlichen Verlauf, sowie die quantitativen Verhältnisse von Ebbe und Fluth mit möglichster Genauigkeit zu bestimmen. Aber trotz alledem sind die Mängel an Uebereinstimmung zwischen Theorie und Beobachtung nicht gering, und sie sind, wie gesagt, inzwischen nicht geringer geworden.

Ich beschränke mich daher, nach dem einfachen Hinweise auf die Untersuchungen von *Challis*[2]) und *Abbot*[3]), denen noch einige andere ebenso unwesentliche Hinweise hinzugefügt werden könnten, darauf, die Sätze anzuführen, in welche *Thomson* und *Tait*[4]) den gegenwärtigen Stand der Theorie zusammengefasst haben.

A) In der *Gleichgewichtstheorie* wird angenommen, dass die Oberfläche des Wassers in jedem Augenblicke senkrecht sei zur Resultante der wirkenden Kräfte.

Diese Theorie gehört eigentlich nicht hierher; sie muss aber angeführt werden, weil die dynamische Theorie bisher nicht anders dargestellt worden ist als in Form einer Correction der Gleichgewichtstheorie. Nach ihr *stellt sich die Fluthhöhe als eine Summe von drei auf den Mond und drei auf die Sonne bezüglichen Gliedern dar*, welche sich resp. auf die *halbtäglichen* Mond- und Sonnenfluthen, auf die *täglichen* Mond- und Sonnenfluthen und auf die *vierzehntägigen* Mond- und *halbjährigen* Sonnenfluthen beziehen.

1) Die erste ist einfache harmonische Function der geographischen Länge mit der Periode 180^0, und ihre Amplitude ist proportional dem Quadrate des Cosinus der Declination von Mond

---

[1]) *G. B. Airy, Tides* and *Waves*, London 1846.

[2]) *Challis*, Phil. Mag. (4), Vol. 39, p. 18, 260, 435.

[3]) *Abbot*, Phil. Mag. (4), Vol. 39, p. 49.

[4]) *Thomson* and *Tait*, Natural Philosophy, Vol. I, §. 805 bis 811. — Vergl. die neueste Abhandlung von *Thomson* über diesen Gegenstand, Phil. Mag. 1880, Bd. 10.

4*

resp. Sonne, also nur innerhalb sehr enger Grenzen schwankend. Das Maximum findet an jedem Orte genau zur Zeit des Meridiandurchganges des wirkenden Körpers oder des entgegengesetzten Punktes statt.

2) Die tägliche Fluth ist eine einfache harmonische Function der geographischen Länge mit der Periode von 360°, und ihre Amplitude variirt mit dem Sinus der doppelten Declination von Mond resp. Sonne, also ziemlich stark und rasch. Ihr Maximum (oder Minimum, je nach dem Vorzeichen der Declination) findet genau zur Zeit des Meridiandurchganges statt.

3) Die vierzehntägige Mond- und halbjährige Sonnenfluth ist eine Variation der mittleren Wasserhöhe in der Weise, dass bei kleinen Declinationen das Wasser am Aequator am höchsten, an den Polen am niedrigsten ist, bei grossen nördlichen oder südlichen Declinationen dagegen umgekehrt an den Polen am höchsten, am Aequator am niedrigsten ist.

B) Diese Theorie ist aber mit der Erfahrung völlig im Widerspruch, was auch nicht wunderbar ist, da ihre Grundvoraussetzungen nicht erfüllt sind. Bringt man demgemäss passende Correctionen an der Gleichgewichtstheorie an, so erhält man die folgenden Hauptsätze der *dynamischen Theorie:*

1) Die halbtägliche Fluth zeigt ihr Maximum nicht genau zur Zeit des Meridiandurchganges des wirkenden Körpers oder seines entgegengesetzten Punktes, sondern vorher oder nachher; ihre Höhe variirt mit der geographischen Breite nach einem complicirten Gesetze, so dass sie an den Polen nicht gleich Null ist; ausserdem ist sie auch von der geographischen Länge abhängig.

2) Dasselbe gilt von der täglichen Fluth. Es findet hier nicht genau beim Meridiandurchgange Fluth oder Ebbe statt, je nachdem die Declination nördlich oder südlich ist, sondern sie kann sehr lange vorher oder nachher stattfinden; ihr Betrag ist weder an den Polen noch am Aequator wie oben gleich Null, und überdies von der geographischen Länge abhängig.

3) Was endlich die vierzehntägigen Mond- und halbjährlichen Sonnenfluthen betrifft, so giebt es zwar nach beiden Theorien eine Breite, in welcher dieselbe fortfällt, während sie in jeder anderen Breite einen constanten Werth hat, und ihr Werth daselbst ist nach beiden Theorien proportional der Abweichung des Quadrates des Sinus dieser Breite von dem Quadrate des Sinus derjenigen Breite φ_0, wo die Fluth Null ist; aber diese letztere ist hier nicht

gleich $arcsin \sqrt{\frac{1}{3}}$ wie dort, sondern gleich $arcsin \sqrt{\frac{1+\delta}{3}}$, wo δ der Mittelwerth von $3\, sin^2\, \varphi - 1$ (φ geographische Breite) für den ganzen mit Wasser bedeckten Theil der einen oder der anderen Erdhalbkugel ist. Wäre die Erdoberfläche ganz oder in verschiedenen Breiten in gleichmässiger Weise mit Wasser bedeckt, so wäre somit

$$\delta = \frac{1}{\pi}\int_0^{+\frac{\pi}{2}} (3\, sin^2\, \varphi - 1)\, cos\, \varphi\, d\, \varphi = 0, \text{ also } \varphi_0 = arcsin \sqrt{\frac{1}{3}} = 35^0\, 16'.$$

In Wahrheit drängt sich aber das Land mehr im Norden, das Wasser mehr im Süden zusammen, und eine ungefähre Berechnung, welche ich anstellte (eine genaue scheint nicht ausgeführt worden zu sein), ergiebt für die nördliche Halbkugel

$$\delta = -0{,}1584, \text{ also } \varphi_0 = 31^0\, 59',$$

für die südliche Halbkugel

$$\delta = +0{,}0893, \text{ also } \varphi_0 = 37^0\, 3'.$$

Zweiter Abschnitt.

Ausfluss und Strahlbildung.

§. 23.

Auch die Lehre vom Ausfluss der Flüssigkeiten und der Bildung freier Strahlen weist zwischen Beobachtung und Berechnung eine noch bedeutende Lücke auf; nur die einfachsten, dem Boden der Wirklichkeit entzogenen Fälle haben bisher mathematisch behandelt werden können; alle der Beobachtung zugänglichen Fälle dagegen bieten der Analysis noch unüberwundene Schwierigkeiten dar.

Was zunächst die Theorie der Ausflussmenge betrifft, so kann ich mich kurz fassen. Was sich bei Vernachlässigung der Reibung über dieselbe sagen lässt, ist durch das *Torricelli'sche Theorem:* $v = \sqrt{2gh}$ (wo v die Geschwindigkeit und h die Tiefe unter dem Niveau, d. h. die Druckhöhe bedeutet) in Verbindung mit der „Contractio venae" gegeben.

Die Untersuchungen andererseits, welche z. B. *Hagen* über den Einfluss der Temperatur auf den Ausfluss der Flüssigkeiten angestellt hat, auch soweit derselbe von der Reibung unabhängig ist, gehören nicht in den Rahmen dieser Abhandlung.

Was die *Contractio venae* an sich und die übrigen in der Nähe der Ausflussöffnung in Betracht kommenden Erscheinungen betrifft, so lagen zum Anfange dieses Jahrhunderts zahlreiche Experimentaluntersuchungen vor, insbesondere von *Bossut*, *Eytelwein*, *D'Aubuisson* etc.

Eine theoretische Bestimmung versuchte auf Grund einer einfachen Anschauung vom Vorgange des Ausflusses *Bayer*[1]). Derselbe nimmt an, dass alle Theilchen im Innern des Gefässes, welche in einem bestimmten Zeitpunkte auf einer um den Mittelpunkt der Oeffnung beschriebenen Halbkugelfläche liegen, diese Eigenschaft auch bei ihrer Annäherung an die Oeffnung beibehalten. Dadurch wird erfordert, dass die Geschwindigkeiten sich verhalten wie die Quadrate der Entfernung von der Oeffnung. Das geht so lange fort, bis die Entfernung nur noch klein gegen den Radius der Oeffnung ist, von nun an tritt eine eigenthümliche Veränderung ein. Von den beiden Componenten der nach dem Mittelpunkt der Oeffnung gerichteten Geschwindigkeit nämlich, der axialen und der transversalen, nimmt die erstere immer mehr zu, die letztere immer mehr ab, bis schliesslich ausserhalb des Gefässes an der Stelle des kleinsten Querschnittes nur noch die axiale Geschwindigkeit vorhanden ist, und zwar in demselben Betrage, wie ursprünglich die nach dem Mittelpunkt der Oeffnung gerichtete, d. h. im Betrage $\sqrt{2gh}$.

Unter diesen Voraussetzungen ergiebt sich die Contraction des Strahles bei kreisförmiger Oeffnung gleich $\left(\frac{\pi}{4}\right)^2 = 0{,}617$, was mit den empirischen Zahlen von *Bossut* (0,617), *Eytelwein* (0,6176) und *D'Aubuisson* (0,619) sehr gut übereinstimmt.

Ferner ergiebt sich als Verhältniss der axialen zur transversalen Geschwindigkeitscomponente in der Oeffnung $\left(\frac{4}{\pi}\right)^2 - 1$, so dass der Grenzwinkel $58^0\,8'\,54''$ wird. Endlich ergiebt sich, dass der Strahl in einem dem Radius der Oeffnung gleichen Abstande von derselben seine grösste Contraction aufweist.

---

[1]) *Bayer*, Crelle's Journ. f. Baukunst, Bd. 25, Compt. R. T. 26.

Von anderen Vorstellungen scheint *Gaukler*[1]) bei Ableitung der Resultate ausgegangen zu sein, welche er ohne diese Ableitung mitgetheilt hat. Er nimmt zuerst den Fall eines unendlich langen Spaltes zwischen zwei Ebenen und findet hierfür, wenn die Ebenen eine Neigung von ϑ^0 gegen die Verticale besitzen, als Contraction

$$C = \tfrac{1}{2}\left(\frac{\vartheta}{\sin\vartheta} + \cos\vartheta\right),$$

also für einen Spalt in horizontaler Wand $C = \frac{\pi}{4}$. Denkt man sich nun eine quadratische Oeffnung als Durchschnitt zweier derartiger Spalte, so findet man für diesen Fall, gerade wie *Bayer* für eine kreisförmige Oeffnung, $C = \left(\frac{\pi}{4}\right)^2$. Dagegen ergiebt sich für letztere hier $C = \frac{2}{3}$ und endlich für den Fall, dass an eine Oeffnung mit dem Contractionscoefficienten C eine Röhre angesetzt wird, der Coefficient $\sqrt{C}$.

Von fundamentaleren Grundlagen geht *Boussinesq*[2]) aus. Er stellt nämlich die Differentialgleichung des Geschwindigkeitspotentials auf, d. h. die Gleichung $\triangle\, \varphi = 0$, und fügt ihr diejenigen Bedingungen hinzu, welche noch erfüllt werden müssen. Die Oeffnung liege in der z-Ebene; dann sei für $z = 0$ $\frac{\partial \varphi}{\partial z} = -f(x, y)$. Die Geschwindigkeit im Innern muss ferner in der Nähe der Oeffnung klein sein. Diesen Bedingungen genügt die Function

$$\varphi = \frac{\pi}{2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\!\!\int \frac{f(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta}{\sqrt{z^2 + (x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}}.$$

Was nun die Function f betrifft, so muss sie verschwinden für alle Punkte der z-Ebene (für welche sie ja überhaupt nur gilt), ausser für die Punkte der Oeffnung. Das ist zweifellos. Zweifelhaft dagegen ist die Richtigkeit der weiteren Annahme *Boussinesq's*, dass nicht nur am Rande der Oeffnung, sondern auch in ihrer Mitte f verschwinde, d. h. also die Geschwindigkeitscomponente nach der z-Richtung nicht existire. Nimmt man dies trotzdem an, so findet man für eine rechteckige Oeffnung mit den Seiten $2\,a = \infty$

[1]) *Gaukler*, Mém. de l'Acad. des Sc. T. 10, 475.

[2]) *Boussinesq*, C. R. T. 70, p. 33, 117, 1279.

parallel der x-Axe und $2b$ parallel der y-Axe, falls die Bewegung von x unabhängig ist,

$$f = c\,\frac{y^2}{b^2}\left(1 - \frac{y^2}{b^2}\right).$$

Die Constante c bestimmt sich aus der Bedingung, dass am Rande

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2 = 2gh$$

sein muss, wenn h die Druckhöhe bezeichnet. Diese Theorie ergiebt die Ausflussmenge gleich $0{,}6283 \times 2b\sqrt{2gh}$, also den Contractionscoefficienten $C = 0{,}6283$. Nahezu derselbe Werth ergiebt sich auch aus einer weiter unten folgenden strengeren Untersuchung, bei welcher freilich die Schwerkraft ausser Acht gelassen ist.

§. 24.

Auch über die Beobachtungen des ausfliessenden Strahles selbst darf hier rasch hinweggegangen werden, weil die an dieselben geknüpften Betrachtungen einer Theorie der Erscheinungen beträchtlich fern bleiben. So die Untersuchungen von *Dejean* [1]), *Laroque* [2]) und selbst die an sich so schönen Untersuchungen von *Magnus* [3]).

Letzterer ging von der Beobachtung aus, dass man den Austritt des Wassers aus einem breiten Ansatzrohre verhindern kann, wenn man in dasselbe einen dünnen Wasserstrahl von aussen eintreten lässt.

Zur Gewinnung eines Verständnisses dieser Erscheinung studirte er das Aufeinanderplatzen verschiedener Strahlen, und dies gab ihm Veranlassung, späterhin auch die Erscheinungen an einem einzigen Strahle durch Combination zu erklären. Er fand zunächst, dass zwei auf einander stossende Strahlen eine schalenförmige Fläche bilden, deren concave Seite nach dem Strahle mit geringerem Durchmesser, resp. geringerer Geschwindigkeit gerichtet ist,

---

1) *Dejean*, C. R. T. 40, L'Inst. 1855.

2) *Laroque*, Ann. de Ch. et de Phys. (3) 57, p. 484. — (4) 1, p. 276.

3) *Magnus*, Mon. Ber. d. Berl. Ak. 1847. Abhandl. ders. 1848. Pogg. Ann. Bd. 80, 95, 106.

und welche für gleich starke Strahlen, deren Axen überdies in gerader Linie liegen, in eine ebene Scheibe übergeht.

Diese Anschauungsweise lässt sich nun, wie *Magnus* meint, auf die Erscheinung der Bäuche an einem senkrecht herabfallenden Strahle (Fig. 7) anwenden. Betrachtet man nämlich von allen austretenden und, wie bekannt, convergirenden Wasserfäden nur die beiden äussersten, so hat man es mit zwei auf einander platzenden Strahlen zu thun und kommt zu dem Ergebnisse, dass das Wasser sich in einer Ebene ausbreitet, welche auf der ursprünglichen Ebene der beiden Fäden senkrecht steht. Von dieser Wasserfläche sind nun wieder die äussersten Fäden zu betrachten, und so erklärt sich die abwechselnde Richtung der Bäuche des Strahles.

Fig. 7.

Man wird zugeben müssen, dass diese Erklärung zu einem vollen Verständnisse der Erscheinung nicht ausreicht. In der That kann eine solche nur auf Grund der allgemeinen Theorie der Bewegung der Flüssigkeiten gegeben werden, und für diese ist der vorliegende Fall viel zu complicirt.

§. 25.

Zunächst handelt es sich aber für die Theorie gar nicht um dergleichen verwickelte Erscheinungen. Es handelt sich für sie darum, *festzustellen, welche Eigenthümlichkeiten die Beziehungen zwischen den in den Grundgleichungen vorkommenden Grössen aufweisen, sobald die Flüssigkeit sogenannte Strahlen bildet.*

In diesem Sinne hat *Helmholtz*[1]) die Aufgabe gefasst. Das Charakteristische der in Rede stehenden Bewegung ist ein zweifaches: erstens die *Discontinuität der Bewegung* und zweitens das *Entstehen von sogenannten Wirbeln.* Dass die letzteren, denen

---

[1]) *Helmholtz*, Mon. Ber. d. Berl. Ak. 1868, p. 215. Phil. Mag. (4) 36, p. 337.

sich die Aufmerksamkeit der Beobachter vorzugsweise gewidmet hat, hier entstehen müssen, folgt schon aus den im §. 19 angeführten Untersuchungen von *Stefan* über die lebendige Kraft bewegter Flüssigkeit. Es zeigte sich dort, dass Rotationen bei jeder Aenderung des zur Bewegungsrichtung senkrechten Querschnittes eintreten müssen; eine solche Aenderung des Querschnittes findet aber hier in hohem Grade statt. Wie diese Wirbel entstehen, das freilich lässt sich hier nicht zeigen; dazu reicht nämlich die Betrachtung der Continuitätsgleichung nicht aus; es müssen die Bewegungsgleichungen selbst hinzugezogen werden; diese schliessen aber in der im ersten Theile betrachteten Form die Entstehung von Rotationen überhaupt aus, wie am Schlusse des §. 17 hervorgehoben wurde und später bewiesen werden wird; mit anderen Worten: die mathematische Beschreibung der Entstehung der Wirbel beim Ausflusse kann nur bei Zugrundelegung vollständigerer Bewegungsgleichungen, als die obigen sind, gegeben werden, nämlich mit Zugrundelegung der Gleichungen für die Bewegung reibender Flüssigkeiten.

Was nun den anderen Punkt, die Discontinuität der Bewegung, betrifft, so müssen die Grundgleichungen, wenn sie überhaupt im Stande sein sollen, die Entstehung freier Flüssigkeitsstrahlen annähernd zu beschreiben, die Möglichkeit einer discontinuirlichen Beziehung der in ihnen vorkommenden Grössen geben. Das ist nun in der That der Fall. Die drei wesentlichsten der vorkommenden Grössen sind Dichtigkeit, Druck und Geschwindigkeit. Bei einer incompressiblen Flüssigkeit ist die erste constant, und daher der Druck ausschliesslich eine Function der Geschwindigkeit; wie ferner die aus der Gleichung (33) bei Ausschluss äusserer Kräfte und Annahme stationärer Bewegung sich ergebende Gleichung

$$p = const. - \tfrac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)^2\right],$$

in der $\varrho = 1$ gesetzt wurde, zeigt, nimmt der Druck stetig ab, wenn die Geschwindigkeit wächst, und wird $-\infty$, wenn jene $+\infty$ wird. Erfahrungsgemäss kann aber der Druck nicht unter einen gewissen negativen Werth sinken, ohne dass die Flüssigkeit zerreisst. Wenn aber Flüssigkeit bei ihrer Bewegung auf scharfe Ränder stösst, so wird ihre Geschwindigkeit in der That unendlich gross, gerade wie die Dichtigkeit einer im Uebrigen endlichen elektrischen Vertheilung an scharfen Kanten und spitzen Ecken unendlich gross wird. Wie nun in diesem Falle die Elektricität Strahlen bildet, so auch die Flüssigkeit. In Wirklichkeit ist freilich der Rand keiner Oeffnung absolut scharf, also wird auch die Geschwindigkeit nie unendlich; aber sie wird doch gross genug, um eine Discontinuität der Bewegung im Sinne der Bildung von Strahlen zu veranlassen. Was dabei discontinuirlich wird, ist jedoch nur die Geschwindigkeit; der Druck dagegen, ebenso wie die Normalcomponente der Geschwindigkeit müssen auch an den Grenzen des Strahles stetig bleiben.

§. 26.

Die Beschränkungen, unter denen allein das Problem der freien Flüssigkeitsstrahlen hat gelöst werden können, sind die folgenden: Von der Reibung wird abgesehen, äussere Kräfte wirken nicht, die Bewegung ist stationär; ferner ist sie von einer der drei Coordinaten, es sei dieselbe z, unabhängig; dann gilt statt der Gleichung (30) die neue:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0. \tag{37}$$

Endlich dürfen nicht sämmtliche Bedingungen gegeben sein. Es darf nicht gefragt werden: Welche Bewegung hat das Wasser beim Ausfluss aus diesem bestimmten Gefässe mit dieser bestimmten Oeffnung? Eben so wenig, wie man in der Elektrostatik fragen darf: Wie vertheilt sich auf einer gegebenen Oberfläche die Elektricität? Sondern *man muss sich darauf beschränken, mögliche Bewegungen analytisch darzustellen, und dann zusehen, welcher concrete Fall, d. h. der Ausfluss aus welchem Gefässe und mit welcher Oeffnung dadurch beschrieben wird*[1]). Es bleiben dann noch einige Bedingungen übrig, welche für die freie Oberfläche des Strahles gelten; nimmt man die hier an ihn grenzende Luft als ruhend an, so sind diese Bedingungen die, dass die freie Grenze des Strahles aus Stromlinien zusammengesetzt und dass die Geschwindigkeit in ihr constant, etwa gleich der Einheit sei.

---

[1]) Von denen, welche vor *Helmholtz* das Problem und seine Gleichungen klar hingestellt haben, ist besonders *Svanberg* hervorzuheben. Da er jedoch von der Wirkung der Schwerkraft nicht absah, behielt er zwei Gleichungen, deren gemeinsame Integration unmöglich wurde. Crelle's J. Bd. 24, p. 161.

Die Gleichung (37) lässt nun eine Methode der Lösung zu, welche die allgemeinere Gleichung (30) nicht gestattet. Setzt man nämlich, unter i die Grösse $+\sqrt{-1}$ verstehend,

$$z = x + iy, \quad w = \varphi + i\psi$$

und w gleich irgend einer Function von z, so ist φ ein möglicher Werth des Geschwindigkeitspotentials, die Linien

$$\varphi = const.$$

sind die Niveaulinien, und die Linien

$$\psi = const.,$$

welche auf jenen senkrecht stehen, sind die Stromlinien.

Die Bedingungen für eine freie Grenze des Strahles lauten daher:

$$\psi = const. \quad \text{und} \quad \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2 = 1,$$

oder, was dasselbe ist, sie sagen aus, dass, wenn man sich x und y als Functionen von φ dargestellt denkt,

$$\left(\frac{dx}{d\varphi}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\varphi}\right)^2 = 1$$

sei. Es handelt sich darum, Functionen w von z zu finden, welche diesen Bedingungen genügen. Hierzu dient in vortrefflicher Weise die Methode der ähnlichen Abbildung, welche ebenfalls auf der Gleichung (37) beruht[1]).

Um sie anzuwenden, muss man die beiden Grössen, um deren Beziehung es sich handelt, als complexe Grössen auf zwei Ebenen darstellen, auf der z-Ebene und auf der w-Ebene; man vereinfacht aber die Untersuchung, wenn man weiter auch noch eine dritte Ebene einführt, die ζ-Ebene, und auf ihr die Punkte

$$\zeta = \xi + i\eta = \varrho\,(cos\,\vartheta + i\,sin\,\vartheta) = \frac{dz}{dw}$$

darstellt. Man kann sich leicht von der Richtigkeit der Gleichung

$$\frac{dz}{dw} = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial y}\right)^2}} \cdot \frac{\frac{\partial \varphi}{\partial x} + i\frac{\partial \varphi}{\partial y}}{\sqrt{\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2}}$$

---

[1]) *Kirchhoff*, Vorl., p. 273 ff. Die Figuren sind den dortigen nachgebildet.

überzeugen, und aus ihrer Vergleichung mit der darüber stehenden folgt, dass, wenn man vom Punkte $\zeta = 0$ nach dem Punkte ζ eine gerade Linie zieht, die Länge dieser Linie, d. h. die Grösse ϱ, das Reciproke der Geschwindigkeit, und ihre Richtung die Richtung der Bewegung der Flüssigkeit im Punkte z ist. Für die freien Grenzen muss also $\varrho = 1$, für die freien und festen Grenzen $\psi = const.$ sein; zu diesen Grenzen wollen wir, um das Gebiet von z vollständig zu begrenzen, noch Flächen hinzufügen, durch welche die Flüssigkeit ein- und ausströmt, indem wir die Gebiete, aus welchen sie kommt und in welche sie fliesst, vom Gebiete der z ausschliessen, als solche Gebiete, in welchen Erscheinungen der hier betrachteten discontinuirlichen Art nicht stattfinden. Es erübrigt nach diesen Festsetzungen nur noch, für w ein den Bedingungen entsprechendes Gebiet zu wählen, dasselbe in der ζ-Ebene in den kleinsten Theilen ähnlich abzubilden und schliesslich z nach der Gleichung

$$z = \int \zeta \, d w$$

zu bestimmen. Die möglichen Arten derartiger ähnlicher Abbildungen sind bekanntlich äusserst zahlreich und für die Kartographie fast sämmtlich von grossem Interesse. In dem hier betrachteten Gebiete sind bisher nur einige mit Erfolg angewendet worden. Dahin gehört vor allem der Fall, dass die w-Ebene ein unendlicher Streifen von der Breite b sei, d. h. das Gebiet, welches von $\psi = \psi_0$ bis $\psi = \psi_0 + b$ und von $\varphi = -\infty$ bis $\varphi = +\infty$ sich erstreckt. In diesem Falle kann man w und ζ als einwerthige Functionen von einander darstellen, indem man dem Gebiet von ζ die Gestalt einer Sichel, d. h. die Gestalt zweier sich schneidender Kreisbögen giebt, von denen der eine den Mittelpunkt $\zeta = 0$ und den Radius $\varrho = 1$ hat (auch der Streifen ist ein specieller Fall einer solchen Sichel), indem man ferner die beiden Grössen

$$\left(\frac{w - c_1}{w - c_2}\right)^{\frac{\pi}{\alpha}} \quad \text{und} \quad \left(\frac{\zeta - c_3}{\zeta - c_4}\right)^{\frac{\pi}{\beta}}$$

als willkürliche gebrochene lineare Functionen von einander ausdrückt und die drei in ihnen vorkommenden Constanten durch willkürliche Festsetzung dreier Punktepaare der Grenzen der Gebiete, welche einander entsprechen sollen, bestimmt. Dabei ist β der Winkel der Sichel in der ζ-Ebene und α der Winkel derjenigen Sichel, als welche man den Streifen in der w-Ebene sich denken kann, d. h., es ist $\alpha = 0$ und die erste der obigen Grössen verwandelt sich in

$$e^{\frac{\pi w}{b}} (\cos \gamma - i \sin \gamma),$$

oder endlich in

$$e^{\frac{\pi w}{b}},$$

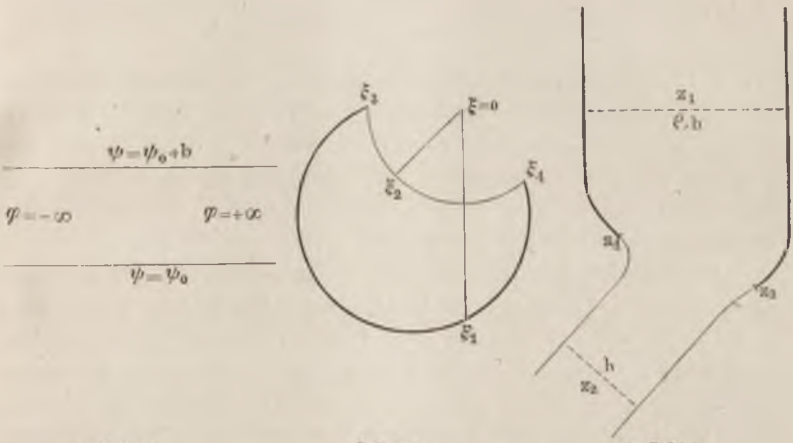
wenn die Neigung γ des Streifens gegen die x-Axe (oder φ-Axe) gleich Null ist. Von den drei Punktepaaren kann man zwei wählen, ohne dadurch die Aufgabe einzuschränken; es möge dem Punkte $\varphi = -\infty$ der Punkt $\zeta = \zeta_1$ auf dem einen Kreisbogen, dem Punkte $\varphi = +\infty$ der Punkt $\zeta = \zeta_2$ auf dem anderen Kreisbogen, etwa auf demjenigen mit dem Radius 1, entsprechen. Das dritte Punktepaar dient dann zur Specialisirung der Aufgabe.

§. 27.

Einiges über die Natur der dargestellten Erscheinungen lässt sich übrigens schon aus den allgemeinen Betrachtungen herauslesen. z_1 und z_2 seien die im Gebiete von z den Punkten ζ_1 und ζ_2 entsprechenden, und ϱ_1 und ϱ_2 seien die beiden von $\zeta = 0$ nach ζ_1 und ζ_2 gezogenen Linien, so dass $\varrho_2 = 1$ ist. Dann ist in z_1 und in endlicher Entfernung davon die Geschwindigkeit des Wassers gleich $\frac{\varrho}{\varrho_1}$ und in z_2 und in endlicher Entfernung davon gleich $\frac{1}{\varrho_2} = 1$.

Das Gebiet von z (Fig. 8) ist überall dem Gebiete von w in den kleinsten Theilen ähnlich, und $1 : \varrho$ ist das Grössenverhältniss kleinster Theile; bei z_2 wird daher die Aehnlichkeit zur Congruenz, und folglich ist hier die Breite des Strahls gleich b, denn das Gebiet von z stellt ja unmittelbar das Gebiet der Flüssigkeit dar. Bei z_1 dagegen ist die Breite der Flüssigkeit gleich $\varrho_1 b_1$; hier müssen übrigens die Wände fest sein, denn hier ist nicht $\varrho = 0$; bei z_2 ist das der Fall, hier können also die Grenzen frei sein. In denjenigen beiden Punkten z_3 und z_4, welche den beiden Spitzen ζ_3 und ζ_4 der Sichel entsprechen, stossen die festen Wände mit der freien Grenze zusammen, d. h. die Linie z_3 und z_4 ist ein Querschnitt der Oeffnung, durch welche die Flüssigkeit aus dem durch die festen Wände bestimmten Gefässe in die Luft austritt. Die Tangenten an die Grenzen des Gebietes in z_3 und z_4 sind Wendetangenten, da die ihnen entsprechenden Radien ϱ_3 und ϱ_4 die äussersten Radien sind; z_3 und z_4 selbst sind daher Wendepunkte und zwar die einzigen, welche es überhaupt giebt; die Krümmung ist in ihnen, wie sich leicht zeigen lässt, unendlich gross.

Fig. 8.

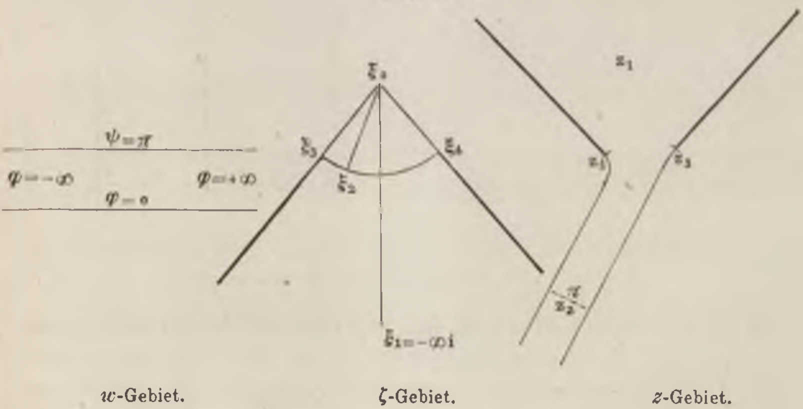


w-Gebiet. ζ-Gebiet. *z*-Gebiet.

Allgemeinster Fall. Streifen und Sichel.

Verhältnissmässig am einfachsten gestaltet sich die Rechnung, wenn man den Streifen in der *w*-Ebene von $\psi = 0$ bis $\psi = \pi$ reichen lässt und den einen Kreisbogen der Sichel in der ζ-Ebene unendlich gross wählt, so dass die Begrenzung des Gebietes von ζ aus einem Kreisbogen von dem Radius $\varrho = 1$ und der Winkelgrösse α und aus den beiden in seinen Endpunkten angesetzten Verlängerungen der Radien bis in die Unendlichkeit besteht (Fig. 9).

Fig. 9.



w-Gebiet. ζ-Gebiet. *z*-Gebiet.

Theilweise specialisirt. Der eine Sichelradius unendlich gross.

In diesem Falle wird die Beziehung zwischen ζ und w

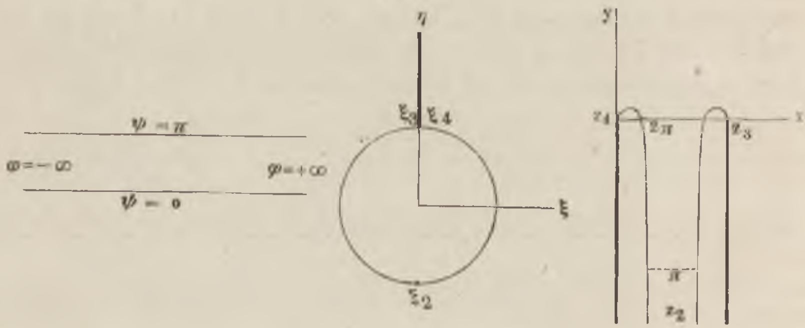
$$\left(\frac{\zeta^{\frac{\pi}{\alpha}} - \zeta_3^{\frac{\pi}{\alpha}}}{\zeta^{\frac{\pi}{\alpha}} - \zeta_4^{\frac{\pi}{\alpha}}}\right)^2 = K \cdot \frac{e^w - C}{e^w - C'}, \tag{38}$$

wo K, C, C' Constanten und ζ_3 und ζ_4 die Werthe von ζ für die Endpunkte des Kreisbogens bedeuten. In diesem Falle dürfen, wie leicht zu übersehen, noch zwei Punktepaare in den Gebieten von ζ und w als einander entsprechend gewählt werden; es liege ζ_1 in der Unendlichkeit, ζ_2 auf dem Kreisbogen, und die entsprechenden Punkte seien $\varphi = -\infty$ und $\varphi = +\infty$.

Die Gestalt des von der Flüssigkeit erfüllten Raumes ist in diesem Falle sehr einfach zu bestimmen. Die festen Wände sind geradlinig, weil die Grenze vom ζ-Gebiet überall geradlinig ist, ausser wo $\varrho = 1$ ist. Die Richtungen dieser Wände stimmen mit den Richtungen von ϱ_3 und ϱ_4 überein. Der freie Strahl hat in der Unendlichkeit die Richtung von ϱ_2 und die Breite π. Beim Austritt aus der Oeffnung ist die letztere dagegen beträchtlich grösser.

Einige specielle Fälle sind besonders interessant. Einer derselben (Fig. 10) ist der von *Helmholtz* (l. c.) behandelte, wo

Fig. 10.



w-Gebiet. ζ-Gebiet. z-Gebiet.

Erster Specialfall. Voller Kreis.

$\alpha = 2\pi$ genommen wird, so dass die Grenzen des ζ-Gebietes aus einem vollständigen Kreise mit dem Radius Eins und dem ausserhalb desselben liegenden Stücke der positiven η-Axe bestehen. Die Punkte ζ_3 und ζ_4 fallen hier in den Punkt $\xi = 0$, $\eta = 1$ zusammen, d. h. in den Punkt $+i$, und ζ_2 hat den Ort $-i$. Die Bedingungen sind im Uebrigen

$$\zeta = \infty \text{ für } \varphi = -\infty,\ \zeta = -i \text{ für } \varphi = +\infty \text{ und } \zeta = i \text{ für } w = 0.$$

Die Gleichung (38) wird für diesen Fall

$$\left(\frac{\sqrt{\zeta} - \sqrt{i}}{\sqrt{\zeta} + \sqrt{i}}\right)^2 = \frac{1 - e^w}{1 + e^w},$$

also

$$\zeta = i\left(2e^{-2w} - 1 + 2e^{-w}\sqrt{e^{-2w-1}}\right),$$

und somit

$$z = -i\left[e^{-2w} + w - 1 + e^{-w}\sqrt{e^{-2w} - 1} - lg\left(e^{-w} + \sqrt{e^{-2w} - 1}\right)\right].$$

Durch Ableitung der Werthe von x und y aus dieser Gleichung, ausgedrückt durch φ und ψ und durch Einsetzung der für die Grenzen des w-Gebietes für φ und ψ giltigen Werthe erhält man die Grenzen des z-Gebietes, d. h. die Wände des Gefässes und die Gestalt des freien Strahls, wie sie in Fig. 10 dargestellt sind. Der Abstand der scharfen Ränder der festen Wände, d. h. die Breite der Oeffnung, ist 2π, die Breite des Strahles in der Unendlichkeit gleich π. Da nun bei der hier stattfindenden Darstellung der kleinste Querschnitt nicht im Endlichen, sondern im Unendlichen liegt, so folgt, dass die Contraction des Strahles gleich $\frac{1}{2}$ ist.

Einen anderen Werth hierfür erhält man, wenn man $\alpha = \pi$, also im ζ-Gebiete statt des Kreises einen Halbkreis wählt. Man gelangt so zu dem in Fig. 11 dargestellten Falle des Ausflusses aus einer Oeffnung in ebener Wand. Es sei

$$\zeta_3 = -1, \quad \zeta_4 = +1, \quad \zeta_2 = -i, \quad \zeta_1 = \infty.$$

Man erhält dann im z-Gebiete als feste Wand die ganze x-Axe mit Ausnahme des Stückes von $x = 0$ bis $x = 2 + \pi$. Die Richtung des Strahles ist senkrecht zur Richtung der Wand und seine Breite in der Unendlichkeit (mit grosser Annäherung aber schon nahe der Wand) gleich π. Die Contractio venae ist also hier

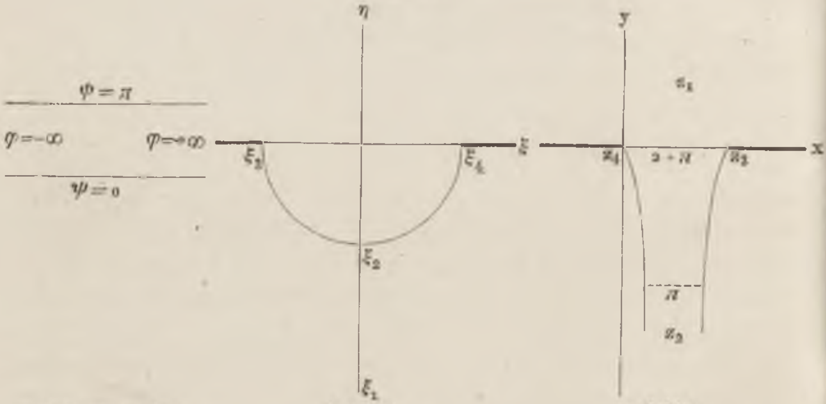
$$C = \frac{\pi}{2 + \pi} = 0{,}611.$$

Es ist merkwürdig, wie nahe dieser Werth mit dem unter ganz anderen Verhältnissen von *Bossut* beobachteten und von

Boussinesq berechneten Werthe übereinstimmt. Dieser Fall ist von *Kirchhoff*[1]) behandelt worden.

In ähnlicher Weise lässt sich eine Reihe anderer, theoretisch weniger hervorragender Fälle erledigen. Hier soll nur noch ein von *Kirchhoff* (l. c.) gegebener kurz angeführt werden, welcher einen Strahl beschreibt, der auf eine feste Wand stösst. Die Behandlung dieses Falles ist durch die Fig. 12 zur Genüge erläutert.

Fig. 11.

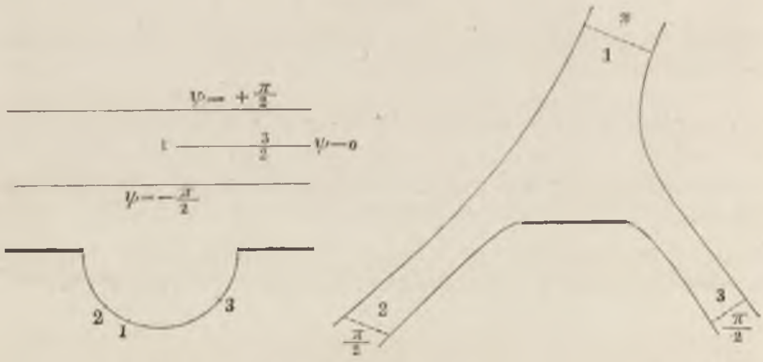


w-Gebiet wie oben. ξ-Gebiet. z-Gebiet.

Zweiter Specialfall. Halbkreis.

Der Strahl von der Gegend 1 kommend theilt sich in zwei; in der festen Wand giebt es einen Punkt, in welchem sich eine Strom-

Fig. 12.



w-Gebiet. ζ-Gebiet. z-Gebiet.

Theilung eines Strahles.

[1]) *Kirchhoff*, Crelle's J. Bd. 71, S. 289. Vorl. S. 292 ff.

linie in zwei neue theilt. Wird der Streifen unendlich breit, so wird auch der auf die Wand treffende Strahl unendlich breit; er theilt sich und lässt zwischen seinen beiden Armen ein Gebiet frei, welches eine Gestalt hat, reciprok zu der in Fig. 11 von Flüssigkeit erfüllten. Auch lässt sich in diesem Falle der Druck leicht berechnen, welchen die Wand erleidet. Ist nämlich die Geschwindigkeit in der Unendlichkeit gleich 1, die Breite der Wand gleich $4 + \pi$, so ist der Druck $p = \pi$. Ist also allgemein die Geschwindigkeit in der Unendlichkeit v, die Breite der Wand b und die Dichtigkeit der Flüssigkeit ϱ, so ist

$$p = \varrho v^2 \cdot \frac{b\pi}{4+\pi}.$$

Die theoretischen Ergebnisse von *Helmholtz* und *Kirchhoff* haben *Oberbeck*[1]) veranlasst, die discontinuirlichen Bewegungen von Neuem der Beobachtung zu unterwerfen, und seine Aufmerksamkeit, mit Ausserachtlassung aller nebensächlichen Fragen, auf die wesentlichen Erscheinungen zu richten. Wie er fand, macht sich der Einfluss der Reibung dahin geltend, dass es sehr schwierig ist und längeren Strömens bedarf, damit ein beständiger Strahl einer incompressiblen Flüssigkeit in einer anderen solchen sich bilde (in Luft würde die Schwere den Vergleich mit der Theorie unmöglich machen). Hat sich aber endlich ein Strahl gebildet, d. h. ein an ruhende Flüssigkeit stossender Strom bewegter, dann verhalten sich die Erscheinungen völlig der Theorie gemäss, d. h. als ob keine Reibung vorhanden wäre. Nur an der Ausflussstelle entstehen natürlich Wirbel, und bei grossen Geschwindigkeiten bildet sich ein Strahl überhaupt nicht.

---

[1]) *Oberbeck*, Wied. Ann. Bd. 2, S. 1.

Dritter Abschnitt.

Gemeinschaftliche Bewegung fester und flüssiger Körper.

§. 28.

Zu denjenigen Theilen der Hydrodynamik, welche stets mit Vorliebe studirt worden sind, gehört das Capitel von der Bewegung fester Körper in Flüssigkeiten, oder was dasselbe ist, das Capitel von der relativen Bewegung einer Flüssigkeit gegen einen in ihr befindlichen festen Körper.

In der That, kennt man die absolute Bewegung einer Flüssigkeit, in welcher ein fester Körper ruht, so genügt es, ausserdem die Bewegung des festen Körpers zu kennen, um die relative gemeinschaftliche Bewegung ermitteln zu können. Streng genommen ist die Aufgabe eine unendlich vielfache. Die Bewegung des festen Körpers beeinflusst diejenige der Flüssigkeit, diese wieder diejenige des festen Körpers u. s. f. Durch die obige Erwägung wird jedoch die Aufgabe zu einer, wenigstens principiell, wesentlich einfacheren.

Der Erste, welcher erkannte, wie vortrefflich zur Lösung derartiger Probleme die *Lagrange*'schen Gleichungen geeignet seien, und welcher auch in der That einen Specialfall wirklich löste, war *Dirichlet*[1]). Es ist dies der Fall einer Kugel.

Hängt die wirkende Kraft nur von der Zeit ab, sind ihre Componenten X, Y, Z, und setzt man

$$\lambda = \int_0^t X\,dt, \quad \mu = \int_0^t Y\,dt, \quad \nu = \int_0^t Z\,dt, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2},$$

so ist das Geschwindigkeitspotential

$$\varphi = \left(1 + \frac{R^3}{2\,r^3}\right) \cdot (\lambda x + \mu y + \nu z),$$

wo R der Radius der Kugel ist.

---

[1]) *Dirichlet*, Mon. Ber. d. Berl. Ak. 1852, S. 12.

Für den Druck erhält man ferner die Gleichung

$$P = \frac{p}{\varrho} = f(t) - \frac{R^2}{2r^3}(X\,dx + Y\,dy + Z\,dz) - \tfrac{1}{2}(u^2 + v^2 + w^2),$$

und folglich für den Druck P_0 auf die Kugeloberfläche, wenn

$$K = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}$$

gesetzt wird:

$$P_0 = \frac{2\pi}{3} R^3 \varrho K.$$

Dieser Druck ist also der Kraft parallel und proportional, dagegen merkwürdigerweise im Uebrigen von der Geschwindigkeit der Flüssigkeit unabhängig. Denkt man sich nun umgekehrt auf die Kugel die Kräfte, deren Componenten

$$-\left(1 + \frac{\varrho}{2\varrho_0}\right)X, \quad -\left(1 + \frac{\varrho}{2\varrho_0}\right)Y, \quad -\left(1 + \frac{\varrho}{2\varrho_0}\right)Z$$

sind, einwirkend (ϱ_0 Dichtigkeit der Kugel), auf die Flüssigkeit aber keine Kräfte wirkend, so erhält man ohne Weiteres für die Componenten der Geschwindigkeit der Kugel

$$u_0 = -\lambda, \quad v_0 = -\mu, \quad w_0 = -\nu,$$

dagegen für die Componenten der Geschwindigkeit u' v' w' des Flüssigkeitstheilchens, welches die Coordinaten

$$x' = x - \int_0^t \lambda\,dt, \quad y' = y - \int_0^t \mu\,dt, \quad z' = z - \int_0^t \nu\,dt$$

hat, die Grössen

$$u' = \frac{\partial\varphi}{\partial x} - \lambda, \quad v' = \frac{\partial\varphi}{\partial y} - \mu, \quad w' = \frac{\partial\varphi}{\partial z} - \nu.$$

Man sieht, dass zur Ueberwindung des Widerstandes der Flüssigkeit die Zusatzkraft $\frac{\varrho}{2\varrho_0}K$ erforderlich ist. Auch hier hängt mithin der Widerstand nur von der Kraft und ausserdem noch vom Dichtigkeitsverhältnisse zwischen Flüssigkeit und festem Körper ab, durchaus nicht von der Geschwindigkeit. Mit anderen Worten: *Der Widerstand hängt nicht von der augenblicklichen Bewegung, sondern nur von deren Aenderung im nächsten Augenblicke ab;* er würde sofort verschwinden, wenn die beschleunigende Kraft aufhörte zu wirken, die Bewegung aber fortdauerte.

§. 29.

Dieses merkwürdige Ergebniss ist von *Hoppe*[1]) auch auf die in der Richtung ihrer Axe fortschreitenden Rotationskörper ausgedehnt worden; nur ist hier der Widerstand natürlich noch von der Gestalt abhängig. Sei nämlich

$$r = \sqrt{(x-a)^2 + y^2 + z^2},$$

und a und c variabele Grössen, so ist

$$\Sigma \frac{c}{r^3} = 1 \quad \text{oder} \quad \int \frac{c\,da}{r^3} = 1$$

eine Form, in welcher die Gleichung der Rotationskörper aufgestellt werden kann. Der Gleichung $\triangle \varphi = 0$ genügt, wenn λ nur Function von t ist,

$$\varphi = \lambda \left(x + \Sigma c \frac{x-a}{2r^3} \right),$$

also

$$u = \lambda \left(1 + \Sigma c \frac{r^2 - 3(x-a)^2}{2r^3} \right),$$

$$v = -\tfrac{3}{2} \lambda y \Sigma c \frac{x-a}{r^5}, \quad w = -\tfrac{3}{2} \lambda z \Sigma c \frac{x-a}{r^5}.$$

Hieraus ergeben sich die Stromlinien als Integrale der Gleichungen

$$u : v : w = dx : dy : dz,$$

d. h. aus den Gleichungen:

$$\int z\,dy = \int y\,dz \quad \text{und} \quad R^2 \left(1 - \Sigma \frac{c}{r^3} \right) = A,$$

wo $R = \sqrt{y^2 + z^2}$ ist.

Nach der ersten dieser Gleichungen liegen alle Stromlinien in Ebenen, welche durch die x-Axe gehen, in der zweiten kann $A = 0$ oder $A > 0$ sein. Im ersten Falle erhält man diejenigen Stromlinien, welche theils in der Oberfläche des Rotationskörpers, theils in der x-Axe verlaufen, im anderen Falle erhält man die übrigen Stromlinien.

---

[1]) *Hoppe*, Pogg. Ann. Bd. 93, S. 321.

Für das Folgende wird angenommen, dass alle Punkte $r=0$ im Innern des festen Körpers liegen und dass die Flüssigkeit die obige Bewegung Kräften verdankt, welche seit $t=0$ wirken und deren Componenten X, Y, Z sind. Der Körper dagegen befinde sich im Zustande der Ruhe. Dann ist, wenn V die Geschwindigkeit bedeutet:

$$\frac{p}{\varrho} = const + \int (X\,dx + Y\,dy + Z\,dz) - \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \tfrac{1}{2} V^2;$$

in der Unendlichkeit aber, wo der Druck constant sein soll, muss

$$X = \frac{\partial \lambda}{\partial t}, \quad Y = 0, \quad Z = 0$$

sein.

Eine Lösung des Problems erhält man, wenn man auch im Endlichen

$$X = \frac{\partial \lambda}{\partial t}, \quad Y = 0, \quad Z = 0$$

setzt, oder wenn man zu diesen Kräften noch Kräfte hinzufügt, die ein im Unendlichen constantes Potential besitzen; im letzteren Falle wird die Druckgleichung

$$p = \varrho \left(const - X \sum c \frac{x-a}{2r^3} - \tfrac{1}{2} V^2 \right)$$

oder, nach leichter Umformung,

$$p = \varrho\,(const - XM - \lambda^2 N),$$

wo

$$M = \sum c \frac{x-a}{2r^3}, \quad N = \tfrac{2}{8} \varrho^2 \left(\sum \frac{c^2}{r^8} + \sum \sum c c' \frac{r^2 + r'^2 - (a-a')^2}{r^3 r'^3} \right)$$

ist, und wo die gestrichenen Buchstaben andere Werthe der ungestrichenen in der Summe andeuten. Der Widerstand W ergiebt sich nun durch Integration

$$W = 2\pi \int p\,R\,dR,$$

mit den Grenzen 0 und 0′ und der Bedingung, dass gleichzeitig für diese Grenzen

$$\int R\,dR = 0$$

sei. Man findet

$$W = \varrho X\,(2\pi \sum c - Q),$$

wo Q das Volumen des Körpers bedeutet. Dies ist die Kraft, welche den Körper in der Richtung der x-Axe zu bewegen strebt. Die entgegengesetzte Kraft wäre nothwendig, um den Körper, wenn er frei beweglich wäre, in Ruhe zu erhalten. Der Fall, dass umgekehrt der Körper in Folge einer auf ihn wirkenden Kraft in der Richtung seiner Axe in einer anfangs ruhenden Flüssigkeit sich bewegt, lässt sich hieraus wiederum unmittelbar ableiten, und man findet

$$W = \varrho \varkappa Q \frac{dl}{dt},$$

wo l die in der Zeit t durch das Wirken der Kraft K erlangte Geschwindigkeit des Körpers und

$$\varkappa = \frac{2\pi \sum c}{Q} - 1$$

gesetzt ist.

Die letztere Grösse hängt nur von der Gestalt des Körpers ab; ihre Bedeutung erkennt man leicht, wenn man die Dichtigkeit ϱ_0 des Körpers einführt; man findet dann nämlich, dass die Grösse $\frac{\varrho}{\varrho_0} \cdot \varkappa$ das Verhältniss der lebendigen Kräfte der Flüssigkeit und des festen Körpers darstellt.

Die Gleichung einer Kugel ist in der hier gewählten Form

$$\frac{c}{r^3} = 1.$$

Es wird dann $Q = \frac{4}{3}\pi c$, $\varkappa = \frac{1}{2}$ und $c = R^3$; man erhält daher das *Dirichlet*'sche Resultat. Für ein Rotationsellipsoid lässt sich das Ergebniss einfacher aus dem unten abgeleiteten für das allgemeine Ellipsoid berechnen.

Dagegen hat *Hoppe* diejenigen Rotationskörper als Beispiele behandelt, deren Gleichung

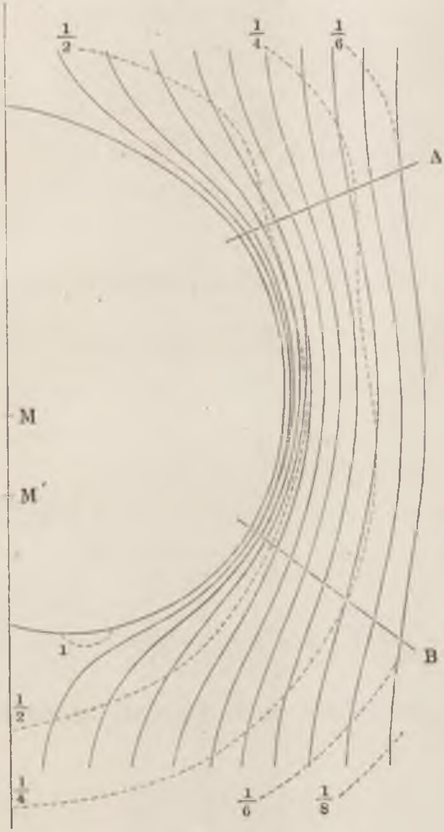
$$\frac{81}{r^3} - \frac{16}{r'^3} = 1$$

ist, wenn $x^2 + R^2 = r^2$, $(x-1)^2 + R^2 = r'^2$ (also $a_1 = 0$, $a_2 = 1$) gesetzt wird, so dass die beiden Centra $r = 0$ und $r' = 0$ auf der x-Axe um die Einheit von einander abstehen. Die beistehende Figur stellt diesen Fall dar.

In zwei Linien der Oberfläche des Körpers wird die Geschwindigkeit der Flüssigkeit der seinigen gleich; in der Nähe der

Einbuchtung wird sie sogar um $1/_{40}$ grösser. Zwischen den Linien A und B strömt die Flüssigkeit zurück; endlich wird

Fig. 13.



$$\varkappa = 0{,}5405,$$

also etwas grösser als bei der Kugel.

Mit den Beobachtungen stimmen die Ergebnisse der Rechnung nur in sehr unvollkommener Weise. Der Grund hiervon ist in der Reibung zu suchen, und zwar theils in der Reibung zwischen festem Körper und Flüssigkeit, theils in der Reibung der Theilchen der letzteren selbst, d. h. in ihrer Zähigkeit. Im dritten Theile dieser Darstellung wird hiervon ausführlicher die Rede sein.

§. 30.

Das Problem der Bewegung einer Flüssigkeit, in welcher ein *Ellipsoid* ruht, und damit auch *das Problem der relativen Bewegung einer Flüssigkeit gegen ein in ihr bewegtes Ellipsoid* ist von *Dirichlet* nur angekündigt, von *Clebsch*[1]) gelöst worden. In diesem Falle ist

$$\varphi = M \frac{\partial \Omega}{\partial x} - x$$

---

[1]) *Clebsch*, Crelle's J. Bd. 52, S. 103; Bd. 53, S. 287.

ein möglicher Werth des Geschwindigkeitspotentials, wenn M eine Constante ist, die so bestimmt werden muss, dass für die Oberfläche des Ellipsoids $\frac{\partial \varphi}{\partial n} = 0$ werde, und wenn Ω das Potential des mit Masse von der Dichtigkeit 1 erfüllt gedachten Ellipsoids ist, d. h. es ist

$$\Omega = \pi a b c \int_u^\infty d\lambda \, \frac{1 - \frac{x^2}{a^2+\lambda} - \frac{y^2}{b^2+\lambda} - \frac{z^2}{c^2+\lambda}}{\sqrt{(a^2+\lambda)(b^2+\lambda)(c^2+\lambda)}},$$

wenn

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

die Gleichung des Ellipsoids, und u die grösste Wurzel der Gleichung

$$\frac{x^2}{a^2+u} + \frac{y^2}{b^2+u} + \frac{z^2}{c^2+u} = 1$$

ist[1]). Die Oberflächenbedingung lässt sich in der Form

$$M \frac{\partial^2 \Omega}{\partial n_i \partial x} = (4\pi M - 1) \cos(n_a x),$$

schreiben, wo n_i die Normale nach dem Innern des festen Körpers, n_a diejenige nach dem Innern der Flüssigkeit bedeutet. Diese Gleichung wird erfüllt, wenn

$$M = \frac{1}{2\pi(2-C)}, \; C = a b c \int_0^\infty \frac{du}{(a^2+u)\sqrt{(a^2+u)(b^2+u)(c^2+u)}}$$

gesetzt wird. Ist $b = c$, so liegen auch hier die Stromlinien nach der einen der beiden Gleichungen

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} : \frac{\partial \varphi}{\partial y} : \frac{\partial \varphi}{\partial z} = dx : dy : dz$$

in durch die x-Axe gehenden Ebenen; wie die andere lehrt, giebt es eine Function U von x und $\varrho = \sqrt{y^2+z^2}$, von der Eigenschaft, dass

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \varrho \frac{\partial \varphi}{\partial \varrho}, \quad \frac{\partial U}{\partial \varrho} = -\varrho \frac{\partial \varphi}{\partial x}$$

ist; hieraus folgt, dass die Gleichung

$$U = const, \text{ d. h. } \varrho \left(M \frac{\partial \Omega}{\partial \varrho} + \frac{\varrho}{2} \right) = const$$

---

1) Vergl. *Dirichlet*, Crelle's J. Bd. 32, S. 80.

die Stromlinien darstellt, wenn für ϱ, M, Ω die ihnen zukommenden Werthe eingesetzt werden. Für die Kugel erhält man hieraus Specialfälle der von *Dirichlet* in allgemeiner Weise gegebenen Formeln.

Nach einer Mittheilung von *Bjerknes*[1]) ist der Fall eines Ellipsoides gleichzeitig mit *Clebsch* auch von *Schering* behandelt worden, und zwar in abweichender Weise; beide Methoden hat dann *Kirchhoff*[2]) zusammengestellt.

§. 31.

Andere Fälle sind in neuerer Zeit von verschiedenen Physikern, namentlich von *Thomson und Tait*, *Kirchhoff*, *Bjerknes* behandelt worden.

Nur einige wenige Untersuchungen dieser Art, welche von hervorragendem Interesse im principiellen Sinne sind, können hier beleuchtet werden; in Bezug auf die übrigen muss ein kurzer Hinweis genügen.

Der erste der von *Thomson und Tait*[3]) behandelten Fälle ist der einer *Flüssigkeit, welche den unendlichen Halbraum erfüllt, und in welcher eine Kugel sich bewegt.* Ist die yz-Ebene die Grenze der Flüssigkeit, so sind die Bewegungsgleichungen:

$$\left.\begin{aligned} P\frac{du}{dt} + \tfrac{1}{2}\left(\frac{dP}{dx}u^2 - \frac{dQ}{dx}(v^2+w^2)\right) &= X \\ Q\frac{dv}{dt} + \frac{dQ}{dx}vu \qquad\qquad &= Y \\ Q\frac{dw}{dt} + \frac{dQ}{dx}wu \qquad\qquad &= Z \end{aligned}\right\} \qquad (39)$$

Die Functionen P und Q sind hierin noch unbestimmt.

Jedenfalls ergiebt sich aber schon aus diesen Gleichungen, mit Hinzuziehung einfacher Betrachtungen, Folgendes:

1) Eine Kugel, welche von einer unendlichen Grenzebene aus in senkrechter Richtung in eine Flüssigkeit hineingeworfen wird, und auf welche nur der Druck der Flüssigkeit wirkt, erleidet eine

---

[1]) *Bjerknes*, Gött. Nachr. 1874, S. 439.

[2]) *Kirchhoff*, Vorl. S. 214 und S. 233.

[3]) *Thomson* und *Tait*, Natural Philosophy, Vol. 1, p. 264 ff.

allmähliche Beschleunigung; in einer Entfernung von der Ebene, welche ihren Durchmesser mehrfach übertrifft, ist aber die Geschwindigkeit schon nahezu constant.

2) Eine Kugel, welche in einer Flüssigkeit parallel der unendlichen Grenzebene derselben geworfen wird, bewegt sich so, als ob sie von dieser Ebene angezogen würde. Dieser Satz lässt sich am leichtesten aus der *Hamilton*'schen Form der Bewegungsgleichungen ableiten, von welcher bald die Rede sein wird.

3) Zwei Kugeln, welche in einer nach allen Richtungen unbegrenzten Flüssigkeit senkrecht zur Verbindungslinie ihrer Mittelpunkte sich bewegen, bewegen sich so, als ob sie sich gegenseitig anzögen.

Das letztere Resultat ist von besonderem Interesse. In seine Kategorie fallen auch einige Ergebnisse von *Bjerknes*, *Kirchhoff* und *Hoppe*.

Hinsichtlich der ersten beiden verweise ich auf das Folgende; *Hoppe* [1]) hat den von ihm behandelten, oben besprochenen Fall später noch weiter verfolgt, unter der Annahme, dass der Rotationskörper in mehrere getrennte Körper zerfällt, welche ihre Axenrichtung gemeinsam haben und in dieser sich fortbewegen. Es wird auf solche Körper von der Flüssigkeit ein Druck ausgeübt, welcher den Anschein erweckt, als ob die Körper sich gegenseitig abstiessen.

§. 32.

Complicirter ist der Fall eines *Rotationskörpers*, welcher sich nicht in der Richtung seiner Axe durch die Flüssigkeit bewegt, sondern nur *unter der Bedingung, dass seine Axe stets in derselben Ebene Z bleibe.*

Die Bewegungsgleichungen, wie sie für diesen Fall von *Thomson* und *Tait* [2]) abgeleitet sind, enthalten ausser den Kräften $X\,Y$ (Z werde gleich Null gewählt) und dem Kräftepaare L noch als Hülfsgrössen diejenigen Kräfte $\xi\,\eta$ und dasjenige Kräftepaar λ, welche erforderlich sind, um in jedem Momente die augenblickliche Bewegung zu erzeugen; sie lauten (nach Elimination von λ):

---

1) *Hoppe*, Quart. Journ. of Math. Vol. 1, p. 301.

2) *Thomson* und *Tait*, Nat. Philos. p. 264.

$$\mu \frac{d^2 \vartheta}{dt^2} - \frac{A-B}{2AB} \Big((-\xi^2 + \eta^2) \sin 2\vartheta + 2 \xi \eta \cos 2\vartheta \Big) = L$$

$$\frac{d\xi}{dt} = X, \ \frac{d\eta}{dt} = Y.$$

ϑ ist der augenblickliche Winkel zwischen der Axe des Körpers und der x-Axe, μ, A und B sind Constanten, welche von der Figur und der Masse des Körpers und von der Dichtigkeit der Flüssigkeit abhängen.

Wirken keine Kräfte und kein Kräftepaar, so ist $L = X = Y = 0$, und folglich sind ξ und η constant; die übrig bleibende erste Gleichung aber wird, wenn man $2\vartheta = \varphi$ und $\frac{A-B}{AB} \xi^2 = g W$ setzt, folgende:

$$\mu \frac{d^2 \varphi}{dt^2} + g W \sin \varphi = 0,$$

d. h. sie wird identisch mit der Bewegungsgleichung eines gemeinen Pendels mit der Masse W und dem Trägheitsmomente μ. Hieraus findet man φ und dann u und v aus den Gleichungen

$$u = \xi \left(\frac{\cos^2 \vartheta}{A} + \frac{\sin^2 \vartheta}{B} \right), \ v = - \frac{A-B}{2AB} \xi \sin^2 \vartheta.$$

Das Problem ist hiermit auf Quadraturen zurückgeführt.

Dass auch nach Aufhebung der beschränkenden Bedingung, betreffend das Verbleiben der Rotationsaxe in einer festen Ebene, das Problem durch elliptische Integrale lösbar sei, hat *Kirchhoff* [1]) gezeigt. Diese Abhandlung ist auch abgesehen von ihrem Endergebnisse in zweifacher Hinsicht interessant; erstens weil die Ableitung der Differentialgleichungen der Bewegung für einen beliebigen Körper und beliebige auf ihn wirkende Kräfte gegeben wird, während erst bei der Integration die Annahmen des Rotationskörpers und des Verschwindens der Kräfte eingeführt werden; und zweitens weil der Ausgangspunkt (worin freilich schon *Thomson* und *Tait* in speciellerer Weise vorangegangen waren) durch das *Hamilton'sche Princip* gebildet wird, dessen Fruchtbarkeit von so vielen Seiten bestritten zu werden pflegte.

Ist Ω das Potential der auf den Körper wirkenden Kräfte und T die lebendige Kraft des ganzen Systems, so ist das Princip bekanntlich durch die Gleichung

---

[1]) *Kirchhoff*, Crelle's J. Bd. 71, S. 237.

$$\delta \int (\Omega + T) = 0$$

ausgesprochen.

Zunächst lässt sich nun zeigen, dass, bei einigen leicht einzusehenden Voraussetzungen, nicht nur die lebendige Kraft des Körpers, sondern auch diejenige der Flüssigkeit sich darstellen lässt als homogene Function zweiten Grades der Geschwindigkeiten $u\,v\,w$ des Anfangspunktes des im Körper festen Coordinatensystems der x, y, z nach deren Richtungen und der Drehungsgeschwindigkeiten p, q, r des Körpers um dieselben Axen. Die Coefficienten dieser Function sind ferner durch die Gestalt des Körpers und die Dichtigkeit der Flüssigkeit bestimmt.

Bezeichnet man mit ξ, η, ζ ein im Raume festes Coordinatensystem und setzt

$$\begin{aligned}
\xi &= \alpha + \alpha_1 x + \alpha_2 y + \alpha_3 z \\
\eta &= \beta + \beta_1 x + \beta_2 y + \beta_3 z \\
\zeta &= \gamma + \gamma_1 x + \gamma_2 y + \gamma_3 z
\end{aligned}$$

so handelt es sich um die Bestimmung der Coefficienten α, β, γ . . ., von denen α, β, γ als Coordinaten, die übrigen als Cosinusse zu betrachten sind, als Functionen von t. Von diesen 12 Grössen hängt Ω ab, während T von den 6 oben angegebenen u, v, w, p, q, r abhängt; zwischen den hiernach im Ganzen vorhandenen 18 Grössen bestehen aber 12 Bedingungsgleichungen, nämlich erstens sechs Gleichungen, welche u, v, w, p, q, r durch α, β, γ . . . ausdrücken, und zweitens die bekannten 6 Gleichungen zwischen den 9 Cosinussen α_1, β_1, γ_1 . . .

Um das *Hamilton*'sche Princip zu entwickeln, muss man zu $\Omega + T$ bekanntlich die mit einem unbestimmten Factor multiplicirten 12 Ausdrücke hinzufügen, welche nach diesen 12 Bedingungsgleichungen verschwinden müssen, und, wenn man mit S die entstehende Summe, mit s aber irgend eine der 18 Variablen bezeichnet, die 18 Gleichungen bilden, welche die Form

$$\frac{\partial S}{\partial s} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial S}{\partial \frac{ds}{dt}}\right)$$

bilden.

Schliesslich muss man aus diesen 18 Gleichungen die 12 unbestimmten Factoren eliminiren. Die 6 Gleichungen, welche man dann erhält, kann man in zwei verschiedenen Formen schreiben, deren jede gewisse Vorzüge hat, nämlich die drei ersten entweder in der Form

$$\frac{d}{dt}\left(\alpha_1\frac{\partial T}{\partial u}+\cdots\right)=\frac{\partial\Omega}{\partial\alpha},\quad \frac{d}{dt}\left(\beta_1\frac{\partial T}{\partial u}+\cdots\right)=\frac{\partial\Omega}{\partial\beta},$$
$$\frac{d}{dt}\left(\gamma_1\frac{\partial T}{\partial u}+\cdots\right)=\frac{\partial\Omega}{\partial\gamma} \tag{40}$$

oder in der Form

$$\left.\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial u}&=q\frac{\partial T}{\partial w}-r\frac{\partial T}{\partial v}+\alpha_1\frac{\partial\Omega}{\partial\alpha}+\beta_1\frac{\partial\Omega}{\partial\beta}+\gamma_1\frac{\partial\Omega}{\partial\gamma}\\
\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial v}&=r\frac{\partial T}{\partial u}-p\frac{\partial T}{\partial w}+\alpha_2\frac{\partial\Omega}{\partial\alpha}+\beta_2\frac{\partial\Omega}{\partial\beta}+\gamma_2\frac{\partial\Omega}{\partial\gamma}\\
\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial w}&=p\frac{\partial T}{\partial v}-q\frac{\partial T}{\partial u}+\alpha_3\frac{\partial\Omega}{\partial\alpha}+\beta_3\frac{\partial\Omega}{\partial\beta}+\gamma_3\frac{\partial\Omega}{\partial\gamma}
\end{aligned}\right\} \tag{40 a}$$

die drei letzten entweder in der Form

$$\left.\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\left\{\begin{aligned}&(\beta_1\gamma-\gamma_1\beta)\frac{\partial T}{\partial u}+(\beta_2\gamma-\gamma_2\beta)\frac{\partial T}{\partial v}+(\beta_3\gamma-\gamma_3\beta)\frac{\partial T}{\partial w}\\&\quad+\alpha_1\frac{\partial T}{\partial p}\qquad+\alpha_2\frac{\partial T}{\partial q}+\qquad\alpha_3\frac{\partial T}{\partial r}\end{aligned}\right\}&=M\xi\\
\frac{d}{dt}\left\{\begin{aligned}&(\gamma_1\alpha-\alpha_1\gamma)\frac{\partial T}{\partial u}+(\gamma_2\alpha-\alpha_2\gamma)\frac{\partial T}{\partial v}+(\gamma_3\alpha-\alpha_3\gamma)\frac{\partial T}{\partial w}\\&\quad+\beta_1\frac{\partial T}{\partial p}\qquad+\beta_2\frac{\partial T}{\partial q}+\qquad\beta_3\frac{\partial T}{\partial r}\end{aligned}\right\}&=M\eta\\
\frac{d}{dt}\left\{\begin{aligned}&(\alpha_1\beta-\beta_1\alpha)\frac{\partial T}{\partial u}+(\alpha_2\beta-\beta_2\alpha)\frac{\partial T}{\partial v}+(\alpha_3\beta-\beta_3\alpha)\frac{\partial T}{\partial w}\\&\quad+\gamma_1\frac{\partial T}{\partial p}+\qquad\gamma_2\frac{\partial T}{\partial q}\qquad\gamma_3\frac{\partial T}{\partial r}\end{aligned}\right\}&=M\zeta
\end{aligned}\right\} \tag{40 b}$$

wo $M\xi$, $M\eta$, $M\zeta$ die Drehungsmomente der auf den Körper wirkenden Kräfte in Bezug auf die Axen der ξ, η, ζ sind, als Functionen von α, β, γ, α_1 ... und Ω, oder aber in der Form:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial p} &= v\frac{\partial T}{\partial w} - w\frac{\partial T}{\partial v} + q\frac{\partial T}{\partial r} - r\frac{\partial T}{\partial q}\\
&+ \alpha_2\frac{\partial \Omega}{\partial \alpha_3} - \alpha_3\frac{\partial \Omega}{\partial \alpha_2} + \beta_2\frac{\partial \Omega}{\partial \beta_3} - \beta_3\frac{\partial \Omega}{\partial \beta_2} + \gamma_2\frac{\partial \Omega}{\partial \gamma_3} - \gamma_3\frac{\partial \Omega}{\partial \gamma_2}\\
\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial q} &= w\frac{\partial T}{\partial u} - u\frac{\partial T}{\partial w} + r\frac{\partial T}{\partial p} - p\frac{\partial T}{\partial r}\\
&+ \alpha_3\frac{\partial \Omega}{\partial \alpha_1} - \alpha_1\frac{\partial \Omega}{\partial \alpha_3} + \beta_3\frac{\partial \Omega}{\partial \beta_1} - \beta_1\frac{\partial \Omega}{\partial \beta_3} + \gamma_3\frac{\partial \Omega}{\partial \gamma_1} - \gamma_1\frac{\partial \Omega}{\partial \gamma_3}\\
\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial r} &= u\frac{\partial T}{\partial v} - v\frac{\partial T}{\partial u} + p\frac{\partial T}{\partial q} - q\frac{\partial T}{\partial p}\\
&+ \alpha_1\frac{\partial \Omega}{\partial \alpha_2} - \alpha_2\frac{\partial \Omega}{\partial \alpha_1} + \beta_1\frac{\partial \Omega}{\partial \beta_2} - \beta_2\frac{\partial \Omega}{\partial \beta_1} + \gamma_1\frac{\partial \Omega}{\partial \gamma_2} - \gamma_2\frac{\partial \Omega}{\partial \gamma_1}
\end{aligned}\right\}\quad(40\,\mathrm{c})$$

Die letzten Formen eignen sich besonders zum Uebergange auf den Fall, dass keine Kräfte wirken; sie werden dann einfach:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial u} = q\frac{\partial T}{\partial w} - r\frac{\partial T}{\partial v},\quad \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial v} = r\frac{\partial T}{\partial u} - p\frac{\partial T}{\partial w},$$
$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial w} = p\frac{\partial T}{\partial v} - q\frac{\partial T}{\partial u} \qquad (41\,\mathrm{a})$$

und

$$\left.\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial p} &= v\frac{\partial T}{\partial w} - w\frac{\partial T}{\partial v} + q\frac{\partial T}{\partial r} - r\frac{\partial T}{\partial q},\\
\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial q} &= w\frac{\partial T}{\partial u} - u\frac{\partial T}{\partial w} + r\frac{\partial T}{\partial p} - p\frac{\partial T}{\partial r},\\
\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial r} &= u\frac{\partial T}{\partial v} - v\frac{\partial T}{\partial u} + p\frac{\partial T}{\partial q} - q\frac{\partial T}{\partial p}.
\end{aligned}\right\}\quad(41\,\mathrm{b})$$

Sie liefern die Integrale

$$2T = L,$$
$$\left(\frac{\partial T}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial T}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial T}{\partial w}\right)^2 = M$$
$$\frac{\partial T}{\partial u}\frac{\partial T}{\partial p} + \frac{\partial T}{\partial v}\frac{\partial T}{\partial q} + \frac{\partial T}{\partial w}\frac{\partial T}{\partial r} = N$$

wo L, M, N Constanten sind. Sechs andere Integrale erhält man aus den ersten Formen der Bewegungsgleichungen; jedoch sind nicht sämmtliche dieser 9 Gleichungen von einander unabhängig. Eine particuläre Lösung ist übrigens auch

$$p = q = r = 0$$
$$u : v : w = \frac{\partial T}{\partial u} : \frac{\partial T}{\partial v} : \frac{\partial T}{\partial w}.$$

Es giebt daher für jeden Körper drei und im Allgemeinen nur drei auf einander senkrechte Richtungen, in welchen er sich, ohne sich zu drehen, in der Flüssigkeit fortbewegen kann; dieselben lassen sich als die Axen eines gewissen Ellipsoids leicht bestimmen.

Vereinfachungen in der Aufgabe treten ein, wenn der Ausdruck von T

$$\begin{aligned} 2T = c_{11} u^2 + c_{12} u v + 2 c_{13} u w + 2 c_{14} u p + \cdots\cdot \\ + c_{22} v^2 + 2 c_{23} v w + 2 c_{24} v p + \cdots\cdot \\ + c_{33} w^2 \quad + 2 c_{34} w p + \cdots\cdot \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}$$

der im Allgemeinen 21 Glieder enthält, sich reducirt. Das ist z. B. der Fall, wenn der Körper, sowohl hinsichtlich seiner Oberfläche, als auch hinsichtlich seiner Massenvertheilung *symmetrisch* zu einer Ebene, etwa zur xz-Ebene ist; es fallen nämlich dann alle Coefficienten fort, welche einen geraden und einen ungeraden Index haben. Wenn der Körper in Bezug auf die xz-Ebene und in Bezug auf die xy-Ebene symmetrisch ist, dass heisst, wenn er „ein Rotationskörper oder vom Charakter eines solchen“, z. B. entweder ein Kreiscylinder oder Kreiskegel, oder aber ein reguläres Prisma oder eine reguläre Pyramide ist, so fallen auch noch diejenigen Coefficienten fort, von deren beiden Indices der eine der Reihe 2, 1, 6, der andere der Reihe 3, 5, 4 angehört. Es wird daher

$$\begin{aligned} 2T = c_{11} u^2 + c_{22} v^2 + c_{33} w^2 + c_{44} p^2 \\ + c_{55} q^2 + c_{66} r^2 + 2 c_{26} v r + 2 c_{35} w q. \end{aligned}$$

Wie man aber leicht findet, muss auch noch

$$c_{22} = c_{33}, \quad c_{55} = c_{66}, \quad c_{26} = - c_{35}$$

sein, und folglich wird, wenn man noch den Anfangspunkt auf der x-Axe so wählt, dass c_{26} verschwindet,

$$2T = c_{11} u^2 + c_{22} (v^2 + w^2) + c_{44} p^2 + c_{55} (q^2 + r^2).$$

Die Substitution dieses Werthes in die Gleichungen (41 a) und (41 b) ergiebt nun unmittelbar:

$$p = const.$$
$$c_{11}\frac{du}{dt} = -c_{22}(vr - wq)$$
$$c_{22}\frac{dv}{dt} = c_{11}ur - c_{22}wp$$
$$c_{22}\frac{dw}{dt} = -c_{11}uq + c_{22}vp$$
$$c_{55}\frac{dq}{dt} = (c_{11} - c_{22})uw + (c_{44} - c_{55})pr$$
$$c_{55}\frac{dr}{dt} = -(c_{11} - c_{22})uv - (c_{44} - c_{55})pq.$$

Die erste dieser Gleichungen stellt einen Theil der Lösung des Problems dar, der Rest ergiebt sich durch die Substitutionen

$$v = s\cos\varphi,\ w = s\sin\varphi,\ q = \sigma\cos(\varphi + \chi),\ r = \sigma\sin(\varphi + \chi).$$

Zunächst nämlich ergeben sich t und φ durch die Gleichungen

$$c_{22}\,dt = -c_{11}\frac{du}{\sqrt{(f - f^1u^2)(g - g^1u^2) - (h - h^1u)^2}}$$

$$c_{22}^2\,d\varphi = \frac{c_{11}}{f - f^1u^2}\cdot\frac{c_{11}u(h - h^1u) - c_{22}p(f - f^1u^2)}{\sqrt{(f - f^1u^2)(g - g^1u^2) - (h - h^1u)^2}}\,du,$$

in welchen $f f^1\ g g^1\ h h^1$ Constanten sind, die von $L M N p$ und den Grössen c abhängen; nachdem man so t und φ als elliptische Integrale von u gefunden hat, kann man ohne Schwierigkeit die übrigen Unbekannten als Functionen von t darstellen.

Setzt man p und N gleich null, so kommt man auf den von *Thomson* und *Tait* behandelten Specialfall; man erhält aber hier die wirkliche Lösung dieses Falles, welche Jene nur angedeutet hatten. Es wird nämlich $w = 0$ und $q = 0$, also bleiben nur die Gleichungen

$$c_{11}\frac{du}{dt} = c_{22}vr,\quad c_{22}\frac{dv}{dt} = c_{11}ur,\quad c_{55}\frac{dr}{dt} = -(c_{11} - c_{22})uv.$$

Sie lehren bekanntlich, dass die Grössen u, v, r bei passender Bestimmung der Constanten den elliptischen Functionen

$$l\sin am\,\lambda t,\ m\cos am\,\lambda t,\ n\,\triangle\,am\,\lambda t$$

gleichgesetzt werden können; die Bestimmung der Constanten ist von *Kirchhoff* (l. c.) in der That durchgeführt worden. Ausserdem hat er noch einen anderen Fall behandelt, in welchem der Anfangspunkt der x, y, z eine Schraubenlinie beschreibt. Angedeutet hat er auch den allgemeinen Fall eines Körpers von beliebiger Gestalt. Auch hier hat man nach Bestimmung von u, v, w, p, q, r durch die Gleichungen (41a) und (41b) zur Bestimmung von α, β, γ, α_1 . . . . . nur noch Quadraturen auszuführen; die Functionen, auf welche man kommt, sind aber selbstverständlich von höherer Gattung als die elliptischen.

§. 33.

Ueber eine grosse Reihe anderer Untersuchungen, welche hierher gehören, muss rasch hinweggegangen werden. Den Fall eines Ellipsoids haben ausser *Clebsch* und *Kirchhoff* auch noch *Ferrers* [1]) und *Craig* [2]) behandelt. Die Arbeiten von *Bjerknes* [3]), in welchen sich dieser geistvolle Forscher mit der Verallgemeinerung dieses Problems auf einen n-dimensionalen Raum beschäftigt, gehören wohl eher in das Gebiet der reinen Mathematik als in dasjenige der Physik. Mit einem Rotationskörper hat sich ferner *Köpcke* [4]) beschäftigt.

Die Bewegung eines Kreisringes im Speciellen hat *W. Thomson* [5]) studirt, unter der Voraussetzung, dass derselbe nicht um seine Axe rotirt, und dass keine Kräfte auf ihn wirken. Ein solcher Kreisring bewegt sich wie ein Kreisel. Die allgemeinen Betrachtungen, von denen *Thomson* hierbei ausgeht, stimmen mit denen von *Kirchhoff* im Wesentlichen überein.

Mit anderen Specialfällen haben sich *Schieck* [6]), *Michaelis* [7]) und *Beltrami* [8]) beschäftigt. Letzterer untersucht die Fälle, in welchen die Axen des Ellipsoids einander gleich werden (Kugel) und in welchen eine Axe unendlich gross (Cylinder) oder unendlich klein wird (*Scheibe*). Der Fall der Scheibe, welcher an sich grosses Interesse darbietet, verliert es an dieser Stelle in Folge des Umstandes, dass die Reibung in ihm sehr gross wird, so dass die diesem Theile zu Grunde gelegten Gleichungen auch nicht mehr angenäherte Giltigkeit haben. Um so ausführlicher wird von diesem

---

1) *Ferrers*, Quart. Journ. of Math. Vol. 13, p. 330.
2) *Craig*, Amer. J. of Math. Vol. 2, p. 260.
3) *Bjerknes*, Gött. Nachr. 1873, S. 743 und 829; 1874, S. 285.
4) *Köpcke*, Math. Annalen Bd. 12, S. 387.
5) *W. Thomson*, Phil. Mag. (4) 42, p. 362.
6) *Schieck*, Poggend. Ann. Bd. 127, S. 524.
7) *Michaelis*, Astron. Nachr. Bd. 8, S. 183.
8) *Beltrami*, Mem. di Bologna. N. S. t. 3, p. 349.

Probleme daher im dritten Theile die Rede sein. Für einen *Cylinder* ergiebt sich das Geschwindigkeitspotential

$$\varphi = -\frac{a+b}{A+B}\left(\frac{b(l+qz)x}{A} + \frac{a(m-pz)y}{B} + \frac{(a+b)(a^2-b^2)rxy}{2AB(A+B)}\right),$$

also speciell für den Kreiscylinder

$$\varphi = -a^2\left(\frac{(l+qz)x+(m-pz)y}{x^2+y^2}\right),$$

wozu noch das mit der willkürlichen Constanten k behaftete Glied $k^2 \ arc \ tg \frac{y}{x}$ hinzukommen kann. Es bedeutet dabei: a und b die Axen, $l\,m\,n\,p\,q\,r$ die Bewegungscomponenten, A ist gleich $\sqrt{a^2+u}$, B gleich $\sqrt{b^2+u}$, und u die kleinste Wurzel der Gleichung

$$\frac{x^2}{a^2+u} + \frac{y^2}{b^2+u} = 1.$$

Für einen Kreiscylinder kann man auch, unter ϱ die Entfernung eines Punktes von der Axe verstehend, kurz schreiben:

$$\varphi = -a^2\,\frac{\partial\left(\frac{1}{\varrho}\right)}{\partial t}.$$

Noch andere Specialfälle sind auf Grund interessanter Beobachtungsthatsachen untersucht worden; so der Fall einer in einer incompressiblen Flüssigkeit schwingenden Stimmgabel, deren Tonhöhe dabei, wie der Verfasser [1]) zeigte, im Verhältniss von 1,15 : 1 gegen diejenige in Luft erniedrigt wird. Den Fall einer Stimmgabel kann man natürlich analytisch nicht behandeln; es ist jedoch *Kolaczek* [2]) gelungen, näherungsweise die Ergebnisse der Rechnung mit denen der Erfahrung in Uebereinstimmung zu bringen.

Endlich das allgemeine Problem der Bewegung eines *beliebigen Körpers* in einer incompressiblen Flüssigkeit haben untersucht *Craig* [3]), jedoch ohne gegenüber *Kirchhoff* Neues beizubringen, *Dini* [4]), *Clebsch* [5]) und *H. Weber* [6]), welcher sich zur Darstellung

---

1) *Auerbach*, Wiedem. Ann. Bd. 3, S. 157.

2) *Kolaczek*, Wiedem. Ann. Bd. 7, S. 23.

3) *Craig*, Amer. Journ. of Mathem. Vol. 2, p. 162. Die neuesten Arbeiten dieses Forschers konnten hier noch nicht berücksichtigt werden.

4) *Dini*, Ann. di Math. (2) T. 5. (Ueber Integration der Gleichung $\triangle\varphi = 0$.)

5) *Clebsch*, Math. Ann. Bd. 3, S. 238.

6) *H. Weber*, Math. Ann. Bd. 14, S. 173.

des Ergebnisses der Thetafunctionen von zwei Veränderlichen mit Erfolg bediente. Die Arbeit von *Clebsch* schliesst sich unmittelbar an diejenige von *Kirchhoff* an. Die Gleichungen des Letzteren werden nämlich so transformirt, dass der Multiplicator derselben gleich 1 wird, so dass es möglich wird, ausser den beiden schon von *Kirchhoff* angegebenen Integralen noch ein drittes zu finden, so dass nur noch eines unbekannt bleibt. Dieses lässt sich nun freilich nicht allgemein ermitteln; aber es lassen sich Fälle ermitteln, in welchen das Problem lösbar wird. Hierzu gehört der Fall, wo das letzte Integral eine lineare Function der Differentialquotienten der lebendigen Kraft nach den Geschwindigkeiten ist: in diesem Falle führt das Problem auf elliptische Integrale; ferner auch der Fall, wo das Integral eine homogene Function zweiter Ordnung von denselben Variablen ist; hier kommt man aber natürlich auf Integrale höherer Ordnung.

Nur zwei Probleme müssen hier, ihres principiellen Interesses halber, ausführlicher noch besprochen werden, nämlich das Problem zweier Ringe, und das Problem mehrerer kleiner Kugeln, welche in Flüssigkeit tauchen.

§. 34.

Der zuerst von *Kirchhoff* [1]) behandelte Fall *zweier Ringe* bietet ein ähnliches Interesse dar, wie der von *Thomson* und *Tait* betrachtete Fall zweier in Wasser sich scheinbar anziehender Kugeln. Die Ringe seien von unendlich kleinem kreisförmigem Querschnitte, die Mittellinie sei eine willkürliche geschlossene Curve. Auf zwei solche Ringe werden von der Flüssigkeit Druckkräfte ausgeübt, deren Moment für irgend eine Verrückung gleich dem Momente der Kräfte ist, welche die Ringe auf einander ausüben würden, wenn elektrische Ströme in ihnen flössen.

Das Carakteristische in der mathematischen Natur des Problems ist die Mehrwerthigkeit von φ, welche stets dann eintreten kann, wenn der von der Flüssigkeit erfüllte Raum ein mehrfach zusammenhängender ist; hier ist er dreifach zusammenhängend. Man kann nun allen Bedingungen des Problems genügen, wenn man φ als Summe dreier Glieder darstellt; die ersten beiden sind

---

[1]) *Kirchhoff*, Crelle's J. Bd. 71, S. 263.

der Ausdruck der scheinbaren Grössen der beiden Ringe, gesehen vom Punkte $x y z$, auf welchen φ sich bezieht; das letzte Glied ist das Potential von Massen, welche auf den Ringoberflächen liegen, ist also nur in unendlicher Nähe der Ringe von Null verschieden.

Aus φ findet man aber leicht die lebendige Kraft T und aus der Form, welche δT dann erhält, ergiebt sich der obige Satz.

Es ist im Allgemeinen nicht erlaubt, aus der Gleichheit der Momente der oben angeführten Kräfte einen Schluss zu ziehen auf die Gleichheit der Kräfte, welche die Ringe scheinbar auf einander ausüben und welche sie ausüben würden, wenn sie von elektrischen Strömen durchflossen wären. Hierauf hat *Boltzmann* [1]) aufmerksam gemacht. In der Arbeit, in welcher er dies thut, giebt er auch eine Erweiterung des *Kirchhoff*'schen Satzes, für Ringe mit beliebigem Querschnitte, wenn dieser nur unendlich klein ist, und zeigt endlich, dass die Anwendung, welche *Thomson* und *Tait* sowie *Kirchhoff* vom *Hamilton*'schen Princip auf die Bewegung fester Körper in Flüssigkeiten gemacht hatten, nur dann erlaubt ist, wenn das Geschwindigkeitspotential einwerthig, d. h. der von der Flüssigkeit erfüllte Raum einfach zusammenhängend ist. Das *Hamilton*'sche Princip setzt nämlich voraus, dass bei der Variation die Anfangs- und Endlage aller Punkte keine Aenderung erleide. Hier ist das aber nur hinsichtlich der festen Theile, nicht aber für die flüssigen erreichbar; in Folge dessen kommt zur Entwickelung noch ein Glied hinzu, welches nur verschwindet, wenn φ eindeutig ist. Für mehrfach zusammenhängende Räume ist deshalb die Berechnung des Druckes auf diesem Wege eine sehr verwickelte, und *Boltzmann* hat daher einen anderen Weg eingeschlagen, nämlich einfach aus den Drucken auf die einzelnen Oberflächenelemente durch Integration den Gesammtdruck abgeleitet.

Das Ergebniss ist, dass in der That die beiden Kräfte hydrodynamischen und elektrodynamischen Ursprungs, welche hier mit einander verglichen werden, sich noch um gewisse Kräfte von einander unterscheiden, falls die Ringe sich bewegen, dass aber das Drehungsmoment dieser Zusatzkräfte für jede Verrückung gleich Null ist.

---

[1]) *Boltzmann*, Crelle's J. Bd. 73, S. 111.

§. 35.

Noch hervorragender an theoretischem Interesse ist *der Fall mehrerer unendlich kleiner, in einer Flüssigkeit sich bewegender Kugeln.* Dieser Fall ist erst in der neuesten Zeit von *Kirchhoff* und von *Bjerknes* behandelt worden.

Der Ausgangspunkt von *Kirchhoff's* [1]) Untersuchung ist in einer Hinsicht specieller, in einer anderen allgemeiner als derjenige von *Bjerknes.* Specieller ist er, insofern von vornherein *nur zwei* Körper angenommen werden, während *Bjerknes* deren beliebig viele annimmt. Allgemeiner ist er insofern, als zunächst die *Gestalt* der Körper *willkürlich* gelassen wird, während *Bjerknes* sofort Kugelgestalt voraussetzt.

Bewegt sich nur ein einziger Körper in der Flüssigkeit, so kann φ eine lineare Function der sechs Bewegungsgrössen $u\, v\, w\, p\, q\, r$ sein, deren sechs Coefficienten $\varphi_1\ \varphi_2 \cdots \varphi_6$ einzeln der Gleichung $\triangle\varphi = 0$ genügen, ausserdem aber den für die Oberfläche des Körpers gültigen Bedingungen:

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial n} = \cos(n\,x),\quad \frac{\partial \varphi_2}{\partial n} = \cos(n\,y),\quad \frac{\partial \varphi_3}{\partial n} = \cos(n\,z)$$

$$\frac{\partial \varphi_4}{\partial n} = y\cos(n\,z) - z\cos(n\,y),\quad \frac{\partial \varphi_5}{\partial n} = z\cos(n\,x) - x\cos(n\,z),$$

$$\frac{\partial \varphi_6}{\partial n} = x\cos(n\,y) - y\cos(n\,x).$$

Aehnlich kann man vorgehen, wenn zwei Körper in der Flüssigkeit sich befinden. Es ist dann φ eine Function der zwölf Grössen, welche die Bewegung beider Körper bestimmen, und die Oberflächenbedingungen sind die, dass an der Oberfläche des einen Körpers die ersten sechs Coefficienten den sechs obigen Bedingungen genügen, die sechs letzten aber verschwinden müssen, während an der Oberfläche des anderen Körpers die sechs ersten Coefficienten verschwinden, die sechs letzten aber den obigen Bedingungen genügen müssen. Für zwei Kugeln ergeben diese Bedingungen, dass die Coefficienten der sechs Drehungscomponenten verschwinden müssen. φ, welches dann nur noch sechs Glieder enthält, lässt sich ferner mit Hülfe der Kugelfunc-

[1]) *Kirchhoff*, Vorl., S. 226 und S. 247.

tionen in eine unendliche Reihe entwickeln, welche desto schneller convergirt, je kleiner die Kugeln im Vergleich zu ihrem Abstande von einander sind.

Für eine einzige Kugel ergiebt sich aus §. 30

$$\varphi = \frac{R^3}{2}\left(u\,\frac{\partial\,\frac{1}{r}}{\partial x} + v\,\frac{\partial\,\frac{1}{r}}{\partial y} + w\,\frac{\partial\,\frac{1}{r}}{\partial z}\right).$$

Dieser Ausdruck, für den Mittelpunkt der einen Kugel $a\,b\,c$, vermehrt um den entsprechenden für die zweite Kugel (gekennzeichnet durch gestrichene Buchstaben), ist das erste Glied von φ im Falle zweier Kugeln; zugleich ist dieses Glied ein Näherungswerth von φ selbst, da die folgenden Glieder desto kleiner sind, je entfernter von einander die Kugeln sind. Das nächste Glied setzt sich ebenfalls aus zwei Summanden zusammen. Der erste ist, wenn r_0 den Abstand der Mittelpunkte bedeutet,

$$\begin{aligned}\frac{R^3 R'^3}{4}\Bigg\{&\left(u'\,\frac{\partial^2\frac{1}{r_0}}{\partial a^2} + v'\,\frac{\partial^2\frac{1}{r_0}}{\partial a\,\partial b} + w'\,\frac{\partial^2\frac{1}{r_0}}{\partial a\,\partial c}\right)\frac{\partial\,\frac{1}{r}}{\partial a}\\ &+\left(u'\,\frac{\partial^2\frac{1}{r_0}}{\partial b\,\partial a} + v'\,\frac{\partial^2\frac{1}{r_0}}{\partial b^2} + w'\,\frac{\partial^2\frac{1}{r_0}}{\partial b\,\partial c}\right)\frac{\partial\,\frac{1}{r}}{\partial b}\\ &+\left(u'\,\frac{\partial^2\frac{1}{r_0}}{\partial c\,\partial a} + v'\,\frac{\partial^2\frac{1}{r_0}}{\partial c\,\partial b} + w'\,\frac{\partial^2\frac{1}{r_0}}{\partial c^2}\right)\frac{\partial\,\frac{1}{r}}{\partial c}\Bigg\}.\end{aligned}$$

Der andere Summand entsteht hieraus, wenn man in den kleinen Klammern $u\,v\,w$ statt $u'\,v'\,w'$, ausserhalb aber $a'\,b'\,c'\,r'$ statt $a\,b\,c\,r$ setzt. In ähnlicher Weise bilden sich die folgenden Glieder.

Die lebendige Kraft T der Flüssigkeit ist ein Integral, ausgedehnt über den ganzen Raum, den sie einnimmt; dafür kann man aber bekanntlich das Integral einer anderen Grösse über die Begrenzung jenes Raumes setzen, nämlich, wenn die Dichtigkeit der Flüssigkeit gleich 1 gesetzt wird,

$$-\frac{1}{2}\int ds\,\varphi\,\frac{\partial\varphi}{\partial n},$$

ausgedehnt über die beiden Kugeloberflächen. Es wird daher

$$T_1 = \frac{\pi}{3} R^3 (u^2 + v^2 + w^2) + \frac{\pi}{3} R'^3 (u'^2 + v'^2 + w'^2)$$

$$+ \frac{\pi}{3} R^3 R'^3 \left(u u' \frac{\partial^2 \frac{1}{r_0}}{\partial a^2} + (v w' + v' w) \frac{\partial^2 \frac{1}{r_0}}{\partial b \partial c} \right.$$

$$+ v v' \frac{\partial^2 \frac{1}{r_0}}{\partial b^2} + (w u' + u w') \frac{\partial^2 \frac{1}{r_0}}{\partial c \partial a}$$

$$\left. + w w' \frac{\partial^2 \frac{1}{r_0}}{\partial c^2} + (u v' + v u') \frac{\partial^2 \frac{1}{r_0}}{\partial a \partial b} \right).$$

Andererseits ist die lebendige Kraft der beiden Kugeln, falls dieselben nicht rotiren:

$$T_2 = \frac{m}{2} (u^2 + v^2 + w^2) + \frac{m'}{2} (u'^2 + v'^2 + w'^2).$$

Finden Drehungen statt, so finden sie gerade so statt, als ob die Flüssigkeit gar nicht vorhanden wäre, und sind ohne Einfluss auf die Bewegung der Mittelpunkte der Kugeln und der Flüssigkeit. Die Summe

$$T = T_1 + T_2$$

ist dann die lebendige Kraft des ganzen Systems.

Nach diesen Vorbereitungen lassen sich die Gleichungen der Bewegung der Kugelmittelpunkte unter dem Einflusse gegebener Kräfte $X\, Y\, Z\, X'\, Y'\, Z'$ aus dem *Hamilton*'schen Principe ableiten; sie sind folgende:

$$\left.\begin{array}{l}
\frac{da}{dt} = u, \quad \frac{db}{dt} = v, \quad \frac{dc}{dt} = w, \quad \frac{da'}{dt} = u', \quad \frac{db'}{dt} = v', \quad \frac{dc'}{dt} = w'. \\
\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial u} = \frac{\partial T}{\partial a} + X, \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial v} = \frac{\partial T}{\partial b} + Y, \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial w} = \frac{\partial T}{\partial c} + Z. \\
\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial u'} = \frac{\partial T}{\partial a'} + X', \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial v'} = \frac{\partial T}{\partial b'} + Y', \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial w'} = \frac{\partial T}{\partial c'} + Z'.
\end{array}\right\} \quad (42)$$

Mit der Integration dieser Gleichungen hat sich *Kirchhoff* nicht beschäftigt; er hat nur die Frage sich vorgelegt, unter der Wirkung welcher Kräfte die Kugeln sich gleichförmig bewegen würden? Es ergiebt sich, dass die auf die Kugel $a\,b\,c$ wirkende Kraft das Potential

$$V_1 = \frac{\pi}{3} R^3 R'^3 \left[\left(u'^2 \frac{\partial^2 \frac{1}{r_0}}{\partial a^2} + v'^2 \frac{\partial^2 \frac{1}{r_0}}{\partial b^2} + w'^2 \frac{\partial^2 \frac{1}{r_0}}{\partial c^2}\right)\right.$$
$$\left. + \left(2\, v' w' \frac{\partial^2 \frac{1}{r_0}}{\partial b \partial c} + 2\, w' u' \frac{\partial^2 \frac{1}{r_0}}{\partial c \partial a} + 2\, u' v' \frac{\partial^2 \frac{1}{r_0}}{\partial a \partial b}\right)\right]$$

hat, die zweite das durch Vertauschung von $u' v' w'$ mit $u v w$ aus diesem entstehende. Schon dieser sehr specielle Fall weist die Eigenthümlichkeit auf, dass die Wirkung jeder Kugel auf die andere (denn auch so lassen sich die Kräfte deuten) nur von der Geschwindigkeit der wirkenden Kugel abhängt. Die beiden Wirkungen sind einander also nicht gleich und entgegengesetzt. Das ist nur der Fall, wenn die Geschwindigkeiten beider Kugeln gleich gross und gleich oder entgegengesetzt gerichtet sind.

Uebrigens sind die Kräfte dieselben wie diejenigen zweier magnetischer Molecüle, deren magnetische Axen die Richtung der Bewegung haben und deren Momente gleich den Producten der Geschwindigkeiten in die Grössen $R^3 \sqrt{\frac{\pi}{3}}$ resp. $R'^3 \sqrt{\frac{\pi}{3}}$ sind.

Wenn $R = R'$, $u = u'$, $v = v'$ und $w = - w'$ ist, so kann man die xy-Ebene, in Bezug auf welche Symmetrie stattfindet, fest machen und kommt auf den Fall der Bewegung einer Kugel in der Nähe einer festen Wand, von welchem schon oben (§. 31) die Rede war.

§. 36.

Bjerknes [1]) nimmt für seine kleinen Körper von vornherein die *Kugelgestalt* an. Aber erstens dürfen ihrer *unendlich viele* sein, *und zweitens dürfen sie ihr Volumen verändern.* Die Radien sollen gegen die Entfernungen sehr klein, und der Druck soll in unendlicher Ferne, wo die Flüssigkeit ruht, einen constanten oder nur von der Zeit abhängigen Werth annehmen. Aeussere Kräfte sollen nicht wirken. Dann kann man φ darstellen in der Form

$$\varphi = \Sigma \varphi_g + \Sigma \varphi_{gk},$$

---

1) *Bjerknes*, Gött. Nachr. 1876, S. 245.

wo g und k irgend zwei der m Kugeln bedeuten, und $g \gtrless k$ ist. Um diesen Ausdruck zu bilden, geht *Bjerknes* gerade wie *Kirchhoff* vom Falle einer einzigen Kugel aus; aber es ist hier zu beachten, dass auch R von t abhängt; es wird daher für eine Kugel

$$\varphi_1 = -\frac{R_1}{2}\frac{d}{dt}\left(\frac{R_1^2}{r_1}\right).$$

Hieraus kann man ohne Schwierigkeit mit Hülfe der Kugelfunctionen (ähnlich wie oben) φ_g und φ_{gk} ermitteln; es wird, wenn $a\,b\,c$ die Mittelpunktscoordinaten einer Kugel sind, und e eine beliebige der vier Grössen $a\,b\,c\,R$ bedeutet,

$$\varphi_g = -\frac{1}{2}R_g \sum^{e} \frac{de_g}{dt}\frac{\partial}{\partial e_g}\left(\frac{R_g^2}{r_g}\right),$$

und ferner, wenn D_g die Operation

$$\frac{x-a_g}{r_g}\cdot\frac{\partial}{\partial a_g}+\frac{y-b_g}{r_g}\frac{\partial}{\partial b_g}+\frac{z-c_g}{r_g}\frac{\partial}{\partial c_g}$$

bedeutet, und $n! = 1.2.3\ldots\ldots n$ ist,

$$\varphi_{gk} = \sum^{n} \frac{n}{n+1}\cdot\frac{R_g^{2n+1}}{r_g^{\;n+1}}\frac{D_g^n}{n!}\left(\varphi_k \frac{1}{r_{gk}}\right),$$

und hieraus φ in seiner bequemsten Gestalt:

$$\varphi = \varphi_g + \sum_g^k\left(\varphi_k + \varphi_{gk}\right) + \sum^{i}\sum_g^{h} \varphi\, i\, h,$$

wo h und i ebenfalls beliebige der Zahlen $1\ldots m$ und $i \gtrless h$ ist. Diese Function φ genügt mit grosser Annäherung nicht nur der Gleichung $\triangle\varphi = 0$, sondern auch sämmtlichen Oberflächenbedingungen.

Auch die lebendige Kraft bestimmt *Bjerknes* in analoger Weise wie *Kirchhoff* und findet, wenn V die absolute Geschwindigkeit eines Kugelmittelpunktes, und $(i\,h,\,h\,g)$ den Winkel bedeutet, welchen die Centrallinie der Kugeln i und h mit derjenigen der Kugeln h und g bildet:

$$\begin{aligned} T = 2\pi\, \Sigma_g\, R_g^3\left(\frac{dR_g^2}{dt}+\frac{1}{6}\frac{dV_g^2}{dt}\right) + 2\pi \sum_g\sum_k \varphi_g\,\varphi_k\,\frac{1}{r_{gk}} \\ -\pi\sum_i\sum_h\sum_g \frac{R_i^2\frac{dR\,i}{dt}\,R_h^3\,R_g^2\,\frac{dR_g}{dt}}{r_{ih}^2\,r_{hg}^2}\cos(ih,\,hg). \end{aligned} \tag{43}$$

Wenn die Radialgeschwindigkeiten gegen die Radien selbst klein sind, so kann das letzte Glied vernachlässigt werden. Nunmehr ist zur Ermittelung der Wirkung während der Zeit τ nur noch die Variation $\delta \int_0^\tau T\,dt$ zu bilden (mit Berücksichtigung des Umstandes, dass am Anfang und Ende die Variationen verschwinden sollen); das heisst die Variation:

$$\sum^{e} \int_0^\tau dt \left(\frac{\partial T}{\partial e_g} - \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \frac{d e_g}{dt}} \right) \delta e_g,$$

oder, wenn p den Druck im Endlichen, p_0 im Unendlichen, und $d\,S_g$ ein Element der Oberfläche der Kugel g bedeutet, die Grösse

$$-\int_0^\tau dt \int (p - p_0)(\delta a_g \cos(r_g, x) + \delta b_g \cos(r_g, y)\,\delta c_g \cos(r_g, z) + \delta R_g)\,d S_g.$$

Hieraus erhält man, da die Variationen von $a\,b\,c\,R$ von einander unabhängig sind, die vier Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} -\int (p - p_0) \cos(r_g, x)\,d S_g &= \frac{\partial T}{\partial a_g} - \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \frac{d a_g}{dt}} \\ -\int (p - p_0) \cos(r_g, y)\,d S_g &= \frac{\partial T}{\partial b_g} - \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \frac{d b_g}{dt}} \\ -\int (p - p_0) \cos(r_g, z)\,d S_g &= \frac{\partial T}{\partial c_g} - \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \frac{d c_g}{dt}} \end{aligned}\right\} \text{ und } -(p - p_0)\,d S_g = \frac{\partial T}{\partial R_g} - \frac{d}{dt}$$

Hiernach sind die Bewegungsgleichungen, analog mit den Gleichungen (42), wenn ausser den Kräften X_g, Y_g, Z_g noch die *Dilatations- oder Pulsationskraft* U_g wirkt, und wenn M_g die Masse der Kugel g und N_g eine andere Constante bedeutet, diese:

$$\left.\begin{aligned} M_g \frac{d^2 a_g}{dt^2} &= X_g - \int p \cos(r_g, x)\,d S_g \\ M_g \frac{d^2 b_g}{dt^2} &= Y_g - \int p \cos(r_g, y)\,d S_g \\ M_g \frac{d^2 c_g}{dt^2} &= Z_g - \int p \cos(r_g, z)\,d S_g \end{aligned}\right\} \text{ und } N_g \frac{d^2 R_g}{dt^2} = U_g - \int p\,d S_g.$$

Nach Einsetzung der Werthe der Integrale erhält man daher drei Gleichungen, welche sich von den *Kirchhoff*'schen nur der

Form nach, nämlich durch die Zerlegung von T in zwei Glieder, deren eines hier T heisst, unterscheiden; dazu erhält man als vierte Gleichung

$$N_g \frac{d^2 R^g}{d t^2} = U_g + \frac{\partial T}{\partial R_g} - \frac{d}{d t} \frac{\partial T}{\partial \frac{d R_g}{d t}} - 4 \pi R_g^2 p_0,$$

welche sich von jenen drei ersten, abgesehen von Selbstverständlichem, durch das bei jenen fehlende letzte Glied unterscheidet.

Setzt man nun für T den nach Fortlassung des letzten Gliedes vereinfachten Werth (43) und ferner $M_g + \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} \pi R_g^3 = M_g'$, so dass M_g' die Masse der Kugel, vermehrt um die halbe Masse der verdrängten Flüssigkeit ($\varrho = 1$), bedeutet, ebenso endlich

$$N_g' = N_g + 3 \cdot \tfrac{4}{3} \pi R_g^3, \quad O_g = 2 \pi R_g^3 \Sigma_k \varphi_k \frac{1}{r_{gk}},$$

$$O_g' = 4 \pi \Sigma_k \varphi_g \varphi_k \frac{1}{r_{gk}}, \quad \Omega_g = \frac{d O_g}{d t} + O_g',$$

so erhält man die folgenden vier Bewegungsgleichungen:

$$\frac{d}{d t}\left(M_g' \frac{d a_g}{d t}\right) = \frac{\partial \Omega_g}{\partial a_g} + X_g, \quad \frac{d}{d t}\left(M_g' \frac{d b_g}{d t}\right) = \frac{\partial \Omega_g}{\partial b_g} + Y_g,$$

$$\frac{d}{d t}\left(M'_g \frac{d c_g}{d t}\right) = \frac{\partial \Omega_g}{\partial c_g} + Z_g,$$

$$\frac{d}{d t}\left(N_g' \frac{d R_g}{d t}\right) = \frac{\partial}{\partial R_g}\left[\tfrac{2}{3} \frac{d O_g}{d t} + O_g' + 2 \pi R_g^3 \left(\frac{d R_g^2}{d t} + \tfrac{1}{6} \frac{d V_g^2}{d t}\right)\right] + U_g - 4 \pi R_g^2 p_0.$$

Bjerknes hat auch untersucht, ob diese Gleichungen mit der Elasticitätslehre im Einklange sind und gefunden, dass dies der Fall ist.

Unter den Specialfällen, auf welche er dann seine Theorie anwendet [1]), verdient hier *der Fall zweier pulsirender und senkrecht zu ihrer Verbindungslinie oscillirender Kugeln* hervorgehoben zu werden. Diesen Fall hat dann *Schiötz* [2]) experimentell verfolgt und die Ergebnisse der Theorie bestätigt gefunden. *Hiernach ziehen sich Kugeln, welche in gleicher Phase oscilliren und pulsiren, an; solche, welche entgegengesetzt oscilliren und pulsiren, stossen sich ab. Die Wirkung ist ferner desto grösser, je grösser die*

---

[1]) *Bjerknes,* Vid. Selsk. Forh. Christ. 1875.

[2]) *Schiötz,* Gött. Nachr. 1877, S. 291.

Geschwindigkeit ist, und nimmt mit der Entfernung der Kugeln sehr rasch ab.

Auch das von *Kirchhoff* hervorgehobene *Phaenomen der Irreciprocität der Wechselwirkung zweier gleichförmig sich bewegender Kugeln* fand *Schiötz* in der Erfahrung wieder, und ebenso die Anziehung oder Abstossung, welche eine einzige schwingende Kugel auf andere ruhende ausübt, je nachdem letztere schwerer oder leichter sind als die Flüssigkeit, und welche von *Thomson*[1]) und von *Bjerknes* theoretisch abgeleitet worden war; dabei hatte eine Differenz zwischen beiden stattgefunden; beide hatten zwar gefunden, dass, auch wenn die ruhende Kugel leichter als die Flüssigkeit ist, zuweilen Anziehung stattfinde; nämlich wenn $r < C$ ist; aber diesem C geben die beiden Forscher die verschiedenen Werthe

$$C = \frac{R}{\sqrt{1 - \sqrt[3]{\frac{1}{3} + \frac{2}{3}\frac{\varrho'}{\varrho}}}} \text{ (Thomson)}, \quad C = \frac{R}{\sqrt{1 - \sqrt[4]{\frac{1}{3} + \frac{2}{3}\frac{\varrho'}{\varrho}}}} \text{ (Bjer}$$

(R Radius, ϱ' Dichtigkeit der ruhenden Kugel). Und diese Differenz liess sich durch die Beobachtungen nicht entscheiden.

Vierter Abschnitt.

Wirbelbewegungen.

§. 37.

Mit Recht sagt *Bjerknes* im Eingange seiner Abhandlung über die Druckkräfte von Kugeln, welche in Flüssigkeit tauchen: „Die Entdeckungen von *Dirichlet* und von *Helmholtz* haben in der letzten Zeit für die hydrodynamischen Untersuchungen ein neues Feld eröffnet. Ein vortreffliches Bild der eben auf diesen Grundlagen weiter fortschreitenden Wissenschaft giebt die grosse Abhandlung von *Beltrami:* „Sui principii fondamentali dell' Idrodinamica razionale.“ Ja, er hätte mit noch grösserem Rechte sagen können: *Zwei* ganz neue Gebiete wurden der Wissenschaft durch jene beiden grossen Forscher eröffnet. Das eine dieser Gebiete,

---

[1]) *Thomson*, Phil. Mag. (4), Bd. 40.

umfassend die Theorie der Bewegung fester Körper in Flüssigkeiten, haben wir soeben, ausgehend von *Dirichlet's* grundlegender Abhandlung, skizzirt; zu dem anderen, welches die Theorie der Wirbelbewegungen umfasst, wollen wir uns jetzt wenden.

Auch dieses Gebiet verdankt sein Bekanntwerden der neuesten Zeit.

Die erste Abhandlung, welche hierher gehört, ist die von *Svanberg*[1]) über die Bewegung der Flüssigkeiten. Zwar hat dieser Gelehrte die eminente Tragweite seiner Betrachtungen über die Rotation flüssiger Theilchen nicht erkannt; er gelangt aber doch zu einigen Sätzen, welche die Grundlage aller späteren Untersuchungen über diesen Gegenstand bilden. Der erste Satz sagt aus, dass die Rotationsgeschwindigkeit eines Theilchens umgekehrt proportional ist dem Quadrate seines Abstandes von der Rotationsaxe. Aus den Gleichungen von *Euler*, deren sich der Verfasser, wie damals alle Analytiker, bediente, ergiebt er sich auf folgendem Wege. Wenn die Bewegung um die z-Axe symmetrisch ist, so ist für cylindrische Coordinaten z, r und ϑ bei Bezeichnung der Geschwindigkeitscomponenten durch z', r', ϑ' das Gleichungssystem dieses (vergl. die Gleichung 25 a auf p. 21):

$$\left.\begin{array}{l}
\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial r}+\frac{\partial r'}{\partial t}+r'\frac{\partial r'}{\partial r}+z'\frac{\partial r'}{\partial z}-(\vartheta')^2 r=\sqrt{X^2+Y^2} \\
\frac{\partial \vartheta'}{\partial t}+r'\frac{\partial \vartheta'}{\partial r}+z'\frac{\partial \vartheta'}{\partial z}+\frac{2r'}{r}\vartheta'=0, \\
\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial z}+\frac{\partial z'}{\partial t}+r'\frac{\partial z'}{\partial r}+z'\frac{\partial z'}{\partial z}=Z,
\end{array}\right|$$

und

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t}+\frac{1}{r}\frac{\partial(\varrho r r')}{\partial r}+\frac{\partial(\varrho z')}{\partial z}=0.$$

Die zweite dieser Gleichungen kann man auch in der Form

$$\frac{d\vartheta'}{dt}+\frac{2\vartheta'}{r}\frac{dr}{dt}=0 \tag{44}$$

schreiben und erhält so unmittelbar, wenn a eine Constante ist, die aber von Theilchen zu Theilchen variiren kann,

$$\vartheta'=\frac{a}{r^2}.$$

---

[1]) *Svanberg*, K. Vet. Acad. Handl. 1839, p. 139. Crelle's J. Bd. 24, S. 153.

Interessant ist die Uebereinstimmung dieses Satzes mit dem zweiten *Kepler*'schen Gesetze.

Die Gleichung (44) führt auch ohne Weiteres zu dem am Schlusse des ersten Theiles besprochenen, aber nicht bewiesenen Satze, dass ein Theilchen, welches einmal nicht rotirt, niemals rotirt. Nimmt man nun weiter an, dass a irgend einmal für alle Theilchen denselben Werth gehabt habe, so ist es eine absolute Constante, und dann ergeben die übrigen Grundgleichungen das Integral

$$\frac{\partial r'}{\partial z} - \frac{\partial z'}{\partial r} = b \varrho r,$$

wo die Constante b, wenn sie einmal gleich Null ist, dies immer ist, so dass es eine Function φ giebt, für welche

$$d\varphi = r' d r + z' d z$$

ist.

Die drei Geschwindigkeitscomponenten zerfallen also ihrer Natur nach in drei Classen; in die eine gehört die Drehungsgeschwindigkeit ϑ'; wenn sie *einmal* Null ist, so ist sie es *immer*. Das gilt von den beiden anderen Componenten, der axialen z' und der radialen r' nicht; aber für sie gilt der etwas allgemeinere Satz, dass, wenn sie einmal die Differentialquotienten einer einzigen Function nach ihren respectiven Richtungen sind, sie dies immer bleiben.

§. 38.

Lässt man die gemachten Annahmen specialisirender Natur sämmtlich fallen, giebt man jedem Theilchen seine eigene Rotationsaxe und dieser eine beliebige und variirende Richtung, so kommt man von den *Svanberg*'schen Untersuchungen *zur Theorie der Wirbelbewegungen.* Die beiden obigen Sätze gelten auch hier. Um weitere zu finden, müssen wir uns der im ersten Theile durchgeführten Zerlegung der Flüssigkeitsbewegung erinnern, wie sie nach *Helmholtz* durch die Gleichung (29 b) auf S. 29 ausgesprochen ist, und welche für die Drehungscomponenten ξ, η, ζ zu den schon von *Cauchy*[1]) gefundenen, aber nicht vollständig gewürdigten Gleichungen (31):

---

[1]) *Cauchy*, Mém. des Sav. Etr. T. 1.

$$2\xi=\frac{\partial v}{\partial z}-\frac{\partial w}{\partial y},\quad 2\eta=\frac{\partial w}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial z},\quad 2\zeta=\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial x},\tag{31}$$

führt, welche, wie schon hervorgehoben, der Ausdruck dafür sind, dass die Existenz von Rotationen und die Existenz eines Geschwindigkeitspotentials einander ausschliessen. Für diese Rotationen wollen wir mit *Helmholtz*[1]) den Namen „*Wirbelbewegungen*" benutzen.

Die Flüssigkeit sei incompressibel und die Kräfte mögen ein Potential haben. Die Gleichungen

$$\frac{d\xi}{dt}=\xi\frac{du}{dx}+\eta\frac{du}{dy}+\zeta\frac{du}{dz} \text{ u. s. w.}$$

oder auch

$$\frac{d\xi}{dt}=\xi\frac{du}{dx}+\eta\frac{dv}{dx}+\zeta\frac{dw}{dx} \text{ u. s. w.}$$

geben dann unmittelbar die Verallgemeinerung des zweiten *Svanberg*'schen Satzes. Ferner ergeben sich ohne Schwierigkeit die folgenden interessanten Sätze:

1) *Jede Wirbellinie, d. h. jede Linie, deren Richtung überall mit der Richtung der Rotationsaxe der in ihr befindlichen Theilchen zusammenfällt, besteht fortwährend aus denselben Theilchen, während sie mit diesen Theilchen in der Flüssigkeit fortschwimmt.*

2) *Die Grösse der resultirenden Wirbelgeschwindigkeit*

$$q=\sqrt{\xi^2+\eta^2+\zeta^2}$$

eines Theilchens ändert sich in demselben Verhältnisse wie sein Abstand von seinen Nachbaren in der Wirbellinie.

3) *Das Product aus der Wirbelgeschwindigkeit in den Querschnitt eines Wirbelfadens, d. h. eines durch einen unendlich dünnen Mantel von Wirbellinien eingeschlossenen Theiles der Flüssigkeit, bleibt bei der Fortbewegung des Fadens constant.*

4) *Dieses Product ist auch in der ganzen Länge eines und desselben Wirbelfadens constant.*

Hieraus folgt auch, dass ein Wirbelfaden nicht im Innern der Flüssigkeit aufhören kann; er endet entweder in der Oberfläche derselben oder läuft in sich zurück. Des Weiteren handelt es sich nun darum, aus den Wirbelgeschwindigkeiten ξ, η, ζ die Bewegungsgeschwindigkeiten u, v, w zu berechnen. Dass dies

---

[1]) *Helmholtz*, Crelle's J. Bd. 55, S. 25.

möglich ist, hat ebenfalls *Helmholtz* gezeigt. Man muss also Functionen finden, welche den vier Gleichungen (7) und (31) genügen. Solche Functionen sind:

$$\left.\begin{aligned} u &= \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y} - \frac{\partial M}{\partial z} \\ v &= \frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial L}{\partial z} - \frac{\partial N}{\partial x} \\ w &= \frac{\partial P}{\partial z} + \frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial L}{\partial y} \end{aligned}\right| \tag{45}$$

wo

$$\begin{aligned} L &= -\frac{1}{2\pi}\int\int\int \frac{\xi_a}{r}\, da\, db\, dc, \\ M &= -\frac{1}{2\pi}\int\int\int \frac{\eta_a}{r}\, da\, db\, dc, \\ N &= -\frac{1}{2\pi}\int\int\int \frac{\zeta_a}{r}\, da\, db\, dc, \\ P &= \int\int\int \frac{k}{r}\, da\, db\, dc, \end{aligned} \tag{45a}$$

und wo ferner ξ_a, η_a, ζ_a die Werthe von ξ, η, ζ in den variabelen Punkten a, b, c sind, während r die Entfernung zwischen x, y, z und a, b, c, und k eine durch die Oberflächenbedingungen zu bestimmende Constante ist.

Dabei sind die drei ersten Integrationen auszudehnen über einen Raum, welcher die ganze Flüssigkeitsmasse enthält, und an dessen Oberfläche überall die Normalcomponente der Wirbelgeschwindigkeit gleich Null ist. Die letzte Integration dagegen ist über den ganzen Raum, welcher keine Flüssigkeit enthält, auszudehnen. Diese Gleichungen zeigen eine neue und die interessanteste Analogie zwischen den hydrodynamischen und den elektrodynamischen Erscheinungen; eine Analogie, welche man, die Elementarwirkung ins Auge fassend, so aussprechen kann:

Jedes rotirende Wassertheilchen a bedingt in jedem anderen Theilchen b eine Geschwindigkeit, welche senkrecht auf der durch die Rotationsaxe von a und das Theilchen b gelegten Ebene steht, und deren Grösse dem Volumen von a, seiner Wirbelgeschwindigkeit und dem Sinus des Winkels zwischen der Linie ab und der Rotationsaxe direct, dagegen dem Quadrate der Entfernung beider Theilchen umgekehrt proportional ist.

Genau demselben Gesetze folgt die Kraft, welche eine in a befindliche, der Wirbelaxe parallele elektrische Strömung auf ein in b befindliches magnetisches Theilchen ausüben würde. Das Gemeinsame zwischen beiden Classen von Erscheinungen ist, dass die Geschwindigkeiten und Kräfte ausserhalb des von Wirbeln resp. Strömen erfüllten Raumes von mehrdeutigen Potentialfunctionen, innerhalb dagegen von complicirteren Combinationen von Functionen P, L, M, N abhängen, während die wirbellosen Bewegungen des Wassers und die magnetischen Wirkungen von eindeutigen Potentialfunctionen abhängen, gerade wie die Erscheinungen der Gravitation, der im Gleichgewicht befindlichen Elektricität und der constanten elektrischen und thermischen Strömungen.

§. 39.

Die lebendige Kraft T nimmt nach den Gleichungen (45) und (45 a) die Gestalt

$$T = -\frac{\varrho}{2}\int d w \,[P q \cos\vartheta + L (v \cos\gamma - w \cos\beta) + M (w \cos\alpha - u \cos\gamma) + N (u \cos\beta - v \cos\alpha)] - \varrho\int\int\int (L\xi + M\eta + N\zeta)\, dx\, dy\, dz$$

an, wo $d w$ ein Oberflächenelement, $\alpha, \beta, \gamma, \vartheta$ die Winkel ihrer Normale mit den Axen und mit der Richtung der Geschwindigkeit q sind. Ist die Flüssigkeit vollständig von festen Wänden eingeschlossen, so wird, wie die Betrachtung des Differentialquotienten zeigt, T constant. Sind diese festen Wände sämmtlich im Unendlichen, die Wirbelfäden aber sämmtlich im Endlichen, so kann man sogar das erste Glied vernachlässigen und

$$T = -\varrho\int\int\int (L\xi + M\eta + N\zeta)\, dx\, dy\, dz$$

setzen.

Die Frage, in welcher Weise die Wirbelbewegungen aus der *Lagrange*'schen Form der Grundgleichungen abgeleitet werden können, ist von der philosophischen Facultät der Universität zu Göttingen gestellt und von *Hankel*[1]) beantwortet worden. Am besten thut man, sich auch zu diesem Zwecke der Function Ω zu

[1]) *Hankel,* loco comm. S. 33.

bedienen, welche durch die Gleichung (19) auf S. 17 eingeführt wurde. Man erhält nämlich aus den durch ihre Einführung vereinfachten Gleichungen durch Differentiation und Subtraction, wenn man schliesslich Ω wieder eliminirt, die Gleichungen:

$$\frac{\partial \beta}{\partial c} - \frac{\partial \gamma}{\partial b} = 2A, \quad \frac{\partial \gamma}{\partial a} - \frac{\partial \alpha}{\partial c} = 2B, \quad \frac{\partial \alpha}{\partial b} - \frac{\partial \beta}{\partial a} = 2C,$$

in welchen

$$\alpha = u\frac{\partial x}{\partial a} + v\frac{\partial y}{\partial a} + w\frac{\partial z}{\partial a}, \quad \beta = u\frac{\partial x}{\partial b} + v\frac{\partial y}{\partial b} + w\frac{\partial z}{\partial b},$$

$$\gamma = u\frac{\partial x}{\partial c} + v\frac{\partial y}{\partial c} + w\frac{\partial z}{\partial c}$$

ist, während A, B, C Constanten bedeuten.

Um hiernach die Gleichungen der Wirbellinien, deren Elemente da, db, dc seien, d. h. die Gleichungen

$$\chi = const. \quad \text{und} \quad \psi = const.$$

oder

$$\frac{\partial \chi}{\partial a}da + \frac{\partial \chi}{\partial b}db + \frac{\partial \chi}{\partial c}dc = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial \psi}{\partial a}da + \frac{\partial \psi}{\partial b}db + \frac{\partial \psi}{\partial c}dc = 0,$$

oder die wegen der Proportion

$$da : db : dc = A : B : C$$

mit ihnen identischen Gleichungen

$$\frac{\partial \chi}{\partial a}A + \frac{\partial \chi}{\partial b}B + \frac{\partial \chi}{\partial c}C = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial \psi}{\partial a}A + \frac{\partial \psi}{\partial b}B + \frac{\partial \psi}{\partial c}C = 0$$

zu befriedigen, braucht man diese Gleichungen nur mit der ebenfalls aus den Grundgleichungen in der *Hankel*'schen Form sich ergebenden

$$\frac{\partial A}{\partial a} + \frac{\partial B}{\partial b} + \frac{\partial C}{\partial c} = 0$$

zusammenzuhalten. Man findet dann nämlich, dass χ und ψ den Gleichungen

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial \chi}{\partial b} & \frac{\partial \chi}{\partial c} \\ \frac{\partial \psi}{\partial b} & \frac{\partial \psi}{\partial c} \end{vmatrix} = -2A, \quad \begin{vmatrix} \frac{\partial \chi}{\partial c} & \frac{\partial \chi}{\partial a} \\ \frac{\partial \psi}{\partial c} & \frac{\partial \psi}{\partial a} \end{vmatrix} = -2B, \quad \begin{vmatrix} \frac{\partial \chi}{\partial a} & \frac{\partial \chi}{\partial b} \\ \frac{\partial \psi}{\partial a} & \frac{\partial \psi}{\partial b} \end{vmatrix} = -2C$$

gemäss gewählt werden müssen. Hieraus ergeben sich nun die bereits besprochenen Eigenschaften der Wirbellinien und Wirbelfäden.

Die obigen Gleichungen führen ferner ohne Schwierigkeit zu den folgenden, in welchen φ eine Function von a, b, c, t bedeutet:

$$\alpha = \frac{\partial \varphi}{\partial a} + \chi \frac{\partial \psi}{\partial a}, \quad \beta = \frac{\partial \varphi}{\partial b} + \chi \frac{\partial \psi}{\partial b}, \quad \gamma = \frac{\partial \varphi}{\partial c} + \chi \frac{\partial \psi}{\partial c}$$

und folglich auch zu diesen:

$$u = \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \chi \frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad v = \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \chi \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad w = \frac{\partial \varphi}{\partial z} + \chi \frac{\partial \psi}{\partial z}. \quad (27)$$

Das sind aber dieselben Gleichungen (27) (S. 23), welche im ersten Theil nach *Clebsch* eingeführt wurden, und welche, die Bewegung in eine Rotation und eine rotationslose Bewegung zerlegend, die Integrale $\psi = const.$ und $\chi = const.$ lieferten. Was sich hier zeigt, was aber *Clebsch* verborgen blieb, ist die Bedeutung von φ, ψ, χ. φ ist das Geschwindigkeitspotential, welches existiren würde, wenn χ verschwände, und ψ und χ ergeben, Constanten gleich gesetzt, die Wirbellinien.

§. 40.

Auch die Art und Weise, wie *Beltrami*[1]) die Drehungscomponenten einführt und bestimmt, schliesst sich unmittelbar an die Betrachtungen an, welche im ersten Theile über die Zerlegung der Flüssigkeitsbewegung nach der Darstellung dieses geistvollen Analytikers gegeben wurden. Man erhält nach ihm in etwas anderer Form:

$$\left.\begin{aligned}
\xi &= \frac{1}{D}\left(\xi_0 \frac{\partial x}{\partial a} + \eta_0 \frac{\partial x}{\partial b} + \zeta_0 \frac{\partial x}{\partial c}\right)\\
\eta &= \frac{1}{D}\left(\xi_0 \frac{\partial y}{\partial a} + \eta_0 \frac{\partial y}{\partial b} + \zeta_0 \frac{\partial y}{\partial c}\right)\\
\zeta &= \frac{1}{D}\left(\xi_0 \frac{\partial z}{\partial a} + \eta_0 \frac{\partial z}{\partial b} + \zeta_0 \frac{\partial z}{\partial c}\right)
\end{aligned}\right|$$

wo D die durch Gleichung (10) bestimmte Determinante,

$$\xi_0 = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \Gamma}{\partial b} - \frac{\partial B}{\partial c}\right), \quad \eta_0 = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial A}{\partial c} - \frac{\partial \Gamma}{\partial a}\right), \quad \zeta_0 = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial B}{\partial a} - \frac{\partial A}{\partial b}\right),$$

und endlich

---

1) *Beltrami*, Mem. di Bol. T. I, p. 431.

$$A = \sum_{xyz} \frac{\partial x}{\partial a}\frac{\partial x}{\partial t}, \quad B = \sum \frac{\partial x}{\partial b}\frac{\partial x}{\partial t}, \quad \Gamma = \sum \frac{\partial x}{\partial c}\frac{\partial x}{\partial t}$$

ist. Diese Formeln sind insofern interessant, als sie sich unmittelbar auf die *Euler*'sche resp. *Cauchy*'sche Form bringen lassen. Für $t = 0$ sind nämlich A, B, Γ offenbar die Anfangsgeschwindigkeiten; die Anfangswerthe der Drehungscomponenten sind daher:

$$\xi_0 = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial \frac{dc}{dt}}{\partial b} - \frac{\partial \frac{db}{dt}}{\partial c}\right], \quad \eta_0 = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial \frac{da}{dt}}{\partial c} - \frac{\partial \frac{dc}{dt}}{\partial a}\right],$$

$$\zeta_0 = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial \frac{db}{dt}}{\partial a} - \frac{\partial \frac{da}{dt}}{\partial b}\right],$$

und folglich, da man jeden Zustand als Anfangszustand ansehen kann:

$$\xi = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial \frac{dz}{dt}}{\partial y} - \frac{\partial \frac{dy}{dt}}{\partial z}\right], \quad \eta = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial \frac{dx}{dt}}{\partial z} - \frac{\partial \frac{dz}{dt}}{\partial x}\right],$$

$$\zeta = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial \frac{dy}{dt}}{\partial x} - \frac{\partial \frac{dx}{dt}}{\partial y}\right],$$

also übereinstimmend mit (31).

Die *Wirbelfäden* betrachtet *Beltrami*[1]) auf folgende Weise. Man denke sich eine Linie im Innern der Flüssigkeit und den Inbegriff der durch ihre Punkte gehenden Wirbellinien, dann hat man eine, wie sich leicht zeigen lässt, stets geschlossene Fläche, welche ein *tabularer Wirbelfaden* heisst. Jede auf ihm gezogene geschlossene Linie, welche alle Wirbellinien schneidet, heisst seine *Directrix*; auf der Oberfläche eines unendlich dünnen Wirbelfadens ist jede Wirbellinie als Axe zu bezeichnen. Das Innere eines Wirbelfadens heisst ein *Wirbel*, und zwar bei unendlich kleinen Dimensionen der Directrix ein elementarer Wirbel. Die Betrachtungen, welche *Beltrami* an diese Definitionen knüpft, schliessen sich meist an diejenigen von *Helmholtz* und besonders von *Hankel* an. Von *Thomson*[2]) entlehnt werden die beiden Begriffe „*Strom*“ und „*Circulation*“, von welchen jener das

---

[1]) *Beltrami*, Mem. di Bol. T. 2, p. 381.

[2]) *Thomson*, Trans. of the Edinb. Soc. Vol. 25.

$\int (u\,dx + v\,dy + w\,dz)$, ausgedehnt über eine Linie, dieser dasselbe Integral, ausgedehnt über eine geschlossene Linie, bedeutet. Aus den für die Wirbelfäden geltenden Gleichungen folgt dann unmittelbar, dass die Circulation längs jeder auf einem Wirbelfaden liegenden, einfach zusammenhängenden Linie gleich Null ist, und dass sie für alle diejenigen auf einem Wirbelfaden liegenden geschlossenen Linien, welche sich stetig in einander überführen lassen, denselben Werth hat. Hieraus folgt weiter, dass die Function $u\,dx + v\,dy + w\,dz$ für jeden Wirbelfaden das exacte Differential einer Function zweier unabhängiger Variabelen ist, welche Function von Faden zu Faden wechselt. Auf jedem Wirbelfaden giebt es ferner auch einige nicht geschlossene Linien, längs welcher der Strom gleich Null ist. Alle Linien, welche zwei Punkte zweier solcher Linien verbinden, und welche überdies stetig in einander überführbar sind, haben gleichen Strom. Die Circulation längs jeder Directrix ist auf einem Wirbelfaden die gleiche und heisst *transversale* Circulation. Da allgemein die Circulation gleich dem doppelten Producte der Rotationsgeschwindigkeit in die umströmte Fläche ist, so ist insbesondere die transversale Circulation gleich dem doppelten Producte derselben Grösse in den Querschnitt des Wirbelfadens; nach *Helmholtz* ist sie daher für einen und denselben Wirbelfaden constant; wie *Beltrami* hervorhebt, eignet sie sich in Folge dessen zum Maass der Intensität des Wirbels.

Das allgemeine Gesetz der Wirkung der Wirbelfäden auf einander ergiebt sich auf diesem Wege ebenfalls in besonders einfacher Weise; überdies stellt es sich als eines von drei zusammengehörigen Gesetzen dar, welche sich auf die beiden Bestandtheile beziehen, in welche man die von *Beltrami* Fluiditätsbewegung genannte Bewegung (vergl. S. 31) zerlegen kann. Diese Sätze sind die folgenden:

1) *Contraction oder Dilatation* eines Flüssigkeitstheilchens hat in jedem anderen eine Geschwindigkeit gegen ersteres hin oder von ihm weg zur Folge, proportional der Grösse der Contraction oder Dilatation und umgekehrt proportional dem Quadrate der Entfernung. Dieser Satz ist zuerst von *Roch*[1]) abgeleitet worden.

---

[1]) *Roch*, Crelle's J. Bd. 61.

2) *Rotation* eines Flüssigkeitstheilchens erzeugt in jedem anderen eine Geschwindigkeit von derjenigen Richtung, welche bei starrer Verbindung vorhanden wäre, und von einer Grösse proportional der Rotationsgeschwindigkeit und dem Volumen, und umgekehrt proportional dem Cubus der Entfernung. Diesen Satz hat wohl zuerst *Veltmann*[1]) abgeleitet.

3) Jeder *elementare Wirbel* von der Intensität k erzeugt in den anderen Punkten der Flüssigkeit eine Geschwindigkeit der Richtung und der Grösse nach gleich der elektrodynamischen Wirkung, welche der elektrische Strom $\frac{k}{2\pi}$, am Orte des Wirbels fliessend, in den anderen Orten ausüben würde.

Auch die Sätze betreffend die Möglichkeitsbedingungen und Beschaffenheit der Wirbelbewegung in Gefässen ergeben sich einfach. Wenn ein Geschwindigkeitspotential existirt, so ist nämlich die Dilatation $\theta = \triangle \varphi$; wenn nun φ eindeutig ist, so ist die Circulation für alle geschlossenen Linien gleich Null, sonst ist sie Null für diejenigen Linien, welche sich durch stetige Veränderung auf einen Punkt reduciren lassen; für die übrigen ist sie gleich dem k-fachen Periodicitätsmodul C des Geschwindigkeitspotentials φ, wo k denselben Werth für alle Linien hat, welche sich stetig in einander überführen lassen, stets aber ganzzahlig ist. Hiernach erhält man für incompressible Flüssigkeiten die interessante Gleichung

$$\int q^2 d\tau = -\sum_k C \int \frac{\partial \varphi}{\partial n} d w,$$

welche für jede Flüssigkeitsbewegung in einem von festen Wänden begrenzten Raume gilt, und in der q die Geschwindigkeit, $d\tau$ ein Element des Raumes und dw ein Element aller derjenigen Flächen ist, welche erforderlich sind, um den Raum zu einem einfach zusammenhängenden zu machen. Ist der Raum von vornherein einfach zusammenhängend, so wird die rechte Seite der obigen Gleichung Null, also auch die linke.

Damit ist der schon im §. 17 bewiesene Satz von *Helmholtz* unter allgemeineren Gesichtspunkten abgeleitet, wonach innerhalb fester Wände sich Flüssigkeit im einfach zusammenhängenden Raume nur mit Wirbelbildung bewegen kann. In einem mehrfach zusammenhängenden ist auch ohne Wirbelbildung Bewegung mög-

[1]) *Veltmann*, Schlöm. Zeitschr. f. Math. und Phys., Bd. 15, S. 461.

lich, aber nur in einer einzigen ganz bestimmten Weise. Sind die Wände nicht fest, sondern beweglich, so ist auch in einfach zusammenhängendem Raume eine wirbellose Bewegung des Wassers möglich; aber bei gegebener Normalcomponente der Oberflächengeschwindigkeit nur eine einzige ganz bestimmte; das letztere gilt, wie oben S. 32 ausgeführt, auch im mehrfach zusammenhängenden Raume, nur dass hier φ vieldeutig ist.

§. 41.

In neuester Zeit hat sich die Literatur über diesen Gegenstand ungemein vervielfältigt; manche dieser Arbeiten sind dabei von ganz anderen Gesichtspunkten, theils rein mathematischer, theils elektrodynamischer Natur, aus unternommen worden, liefern aber, mutatis mutandis, schätzenswerthe Beiträge auch zur Theorie der Hydrodynamik; so ausser den schon citirten Abhandlungen von *Roch* und von *Dini* diejenigen von *Lipschitz*[1]) und *Maxwell*[2]). Es muss hier genügen, darauf hinzuweisen, ebenso wie auf die Bedeutung der grossen und berühmten Abhandlung von *W. Thomson*[3]), in welcher die Resultate von *Helmholtz* auf anderem Wege abgeleitet werden, und welche besonders in zweierlei Hinsicht ein vorzügliches Interesse darbietet; erstens durch die Allgemeinheit der zu Grunde gelegten Anschauungen, und zweitens durch die Analogie, in welche sie die Theorie der Wirbelbewegungen mit der Theorie der Bewegung fester Körper in Flüssigkeiten stellt. Später hat bekanntlich *Thomson*[4]), ausgehend von der wunderbaren Gesetzmässigkeit und grossartigen Stabilität der Wirbelerscheinungen, den Versuch gemacht, nach dem Vorgange von *Rankine* die beiden bis dahin durch eine weite Kluft getrennten Hypothesen über die Beschaffenheit der Materie, die Theorie der Continuität und die Atomtheorie in *einer* Anschauungsweise zu vereinigen. Ob diese *Thomson'sche Theorie der Wirbelatome* sich

---

[1]) *Lipschitz*, Crelle's J. Bd. 69.

[2]) *Maxwell*, in verschiedenen Abschnitten seines „Treatise on Electricity and Magnetism"; vergl. auch einige Tafeln.

[3]) *Thomson*, Trans. Roy Soc. of Edinb. Vol. 25, p. 219. 1867. Vergl. auch die Specialuntersuchungen desselben Phil. Mag. (5) 1880.

[4]) *Thomson*, Phil. Mag. (4) Vol. 34, p. 15. 1867.

bewährt habe, darüber ein Urtheil abzugeben, ist jedoch noch nicht an der Zeit.

§. 42.

Von speciellen Fällen sind bisher nur einige ausführlich behandelt worden. Wie in der Theorie freier Flüssigkeitsstrahlen, so ist auch hier der Fall, in welchem die Bewegung überall parallel einer Ebene, etwa der xy-Ebene, und unabhängig von der z-Coordinate ist, von verhältnissmässiger Einfachheit [1]). Man kann sich in diesem Falle die Flüssigkeit als eine unendlich ausgedehnte Schicht denken, begrenzt durch zwei der xy-Ebene parallele Wände.

Unter dieser Voraussetzung werden zwei Drehungscomponenten ξ und η gleich Null und die dritte $\zeta = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)$.

Die Wirbelfäden sind also der z-Axe parallel, und da sie hiernach ihre Länge nicht ändern, so ändert auch ζ für irgend ein Theilchen seinen Werth mit der Zeit nicht. Die obige Gleichung in Verbindung mit der zweiten

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

giebt dann, wenn ϱ die Entfernung des Punktes x, y vom Elemente df der xy-Ebene ist, wenn ferner

$$\pi W = -\int \zeta \, df \, lg \, \varrho$$

gesetzt und die Integration über die ganze xy-Ebene ausgedehnt wird, die folgende Lösung

$$u = \frac{\partial W}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial W}{\partial x}.$$

Jeder Wirbelfaden erzeugt also gleichsam eine Geschwindigkeit, deren Componenten

$$-\frac{1}{\pi}\frac{\zeta \, df}{\varrho} \cdot \frac{\partial \varrho}{\partial y} \quad \text{und} \quad +\frac{1}{\pi}\frac{\zeta \, df}{\varrho} \cdot \frac{\partial \varrho}{\partial x}$$

---

[1]) *Kirchhoff*, Vorl. S. 255.

sind, deren Richtung also auf ϱ senkrecht steht und deren Grösse

$$\frac{1}{\pi}\,\zeta\,\frac{df}{\varrho}$$

ist.

Kirchhoff hat auch den Begriff des *Schwerpunktes von Wirbelfäden* eingeführt. Seine Coordinaten $x_0\ y_0$ sind, analog den Coordinaten des Schwerpunktes von Massen, durch die Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} x_0 \int \zeta\, df &= \int x\,\zeta\, df \\ y_0 \int \zeta\, df &= \int y\,\zeta\, df \end{aligned}\right|$$

definirt; ζ vertritt also die Stelle der Masse. Auch gilt hier wie in der Lehre vom Massenschwerpunkte der Satz, dass in dem jetzt betrachteten Specialfalle der Schwerpunkt seinen Ort nicht ändert.

Die lebendige Kraft schliesslich wird unendlich gross, ausser wenn

$$\int \zeta\, df = 0$$

ist.

Ist nur *ein einziger geradliniger Wirbelfaden* vorhanden, und sein Querschnitt unendlich klein, so ändert er seinen Ort nicht, und die Theilchen in der Entfernung ϱ beschreiben Kreise mit der constanten Geschwindigkeit $\frac{m}{\pi\varrho}$ um ihn, wo

$$m = \int \zeta\, df$$

die „*Masse*“ des Wirbelfadens ist, d. h. die Grösse, welche sich zu der oben nach *Beltrami* eingeführten „Intensität“ verhält, wie in der Mechanik die Masse zur Dichtigkeit.

Das *Potential* eines geradlinigen Wirbelfadens auf einen äusseren Punkt ist nach *Lipschitz* und *Beltrami*[1]) als der imaginäre Theil des mit $\frac{k}{\pi}$ multiplicirten Logarithmus der complexen Grösse z darstellbar, wenn $z = x + iy$ und k die Intensität des Wirbels ist.

In ähnlicher Weise lässt sich dann auch das Potential von n parallelen Wirbelfäden darstellen, nämlich

[1]) *Beltrami,* Mem. di Bol. T. II, p. 420.

$$V = \frac{1}{\pi} \, arc \, tg \, \frac{Q}{P},$$

wo

$$P + i\,Q = (z - c_1)^{k_1}\,(z - c_2)^{k_2}\ldots\ldots,$$

$$z = x + i\,y,\ c_1 = a_1 + i\,b_1,\ c_2 = a_2 + i\,b_2\ldots\ldots,$$

$a_1\,b_1$, $a_2\,b_2$ u. s. w. die Schnittpunkte der Fäden mit der $x\,y$-Ebene und $k_1\,k_2\ldots\ldots$ ihre Intensitäten sind.

Sind z. B. *zwei parallele Wirbelfäden* vorhanden, so drehen sich dieselben mit der gleichen Geschwindigkeit

$$G = \frac{1}{\pi}\,\frac{m_1\,m_2}{m_1\,\varrho_1^2 + m_2\,\varrho_2^2}$$

um ihren im Abstande ϱ_1 resp. ϱ_2 befindlichen Schwerpunkt.

Die Massen m_1 und m_2 unterscheiden sich von wirklichen Massen besonders dadurch, dass sie, je nach dem Sinne der Wirbelbewegung, positiv oder negativ sein können. Ist z. B. $m_2 = -m_1$, so liegt der Schwerpunkt in der Unendlichkeit, und die Fäden schreiten mit der gemeinsamen Geschwindigkeit

$$G = \frac{m}{2\,\pi\,(\varrho_2 - \varrho_1)} = \frac{m}{2\,\pi\,d}$$

senkrecht gegen ihre Verbindungslinie fort, wo d ihren Abstand von einander bedeutet. Die Theilchen zwischen ihnen schreiten mit ihnen fort, sogar schneller als sie, wie *Thomson*[1]) für einen ähnlichen Fall schon früher gefunden hatte, die gerade in der Mittelebene befindlichen bleiben in ihr und bewegen sich viermal so schnell vorwärts. Man kann hiernach die Mittelebene auch zur festen Wand machen und kommt so auf den Fall eines längs einer festen Wand fortschreitenden Wirbelfadens.

Der Fall *dreier paralleler Wirbelfäden*, welchen *Gröbli*[2]) behandelt hat, lässt sich nur für gewisse einfache Verhältnisse der Massen m_1, m_2, m_3 analytisch durchführen. Ist z. B.

$$m_1 = m_2 = -m_3,$$

so rotirt das Wirbelfädendreieck mit constanter Geschwindigkeit um seinen Schwerpunkt; durch den dem Faden 3 gegenüberliegenden Schwerpunkt wird das Dreieck jederzeit zu einem Parallelogramm vervollständigt; nach einer gewissen Zeit befinden

---

[1]) *Thomson*, Phil. Mag. (4) 34, S. 19 f.

[2]) *Gröbli*, Specielle Probleme über die Bewegung geradliniger paralleler Wirbelfäden. Zürich 1877. (Gött. Dissertation.)

sich die Fäden wieder in derselben relativen Lage und demselben Bewegungszustande.

Im Uebrigen aber ist die Bewegung sehr complicirt; die Fäden beschreiben transcendente Curven, und zwar die Fäden 1 und 2 Schleifenlinien, der Faden 3 eine Wellenlinie. Ein specieller Fall ist der, dass das Dreieck stets rechtwinklig bleibt, und dass die Fäden alle in derselben Richtung und in demselben Sinne, 1 und 2 sogar in derselben Linie sich fortbewegen, 1 mit abnehmender, 2 (vorauseilend) mit zunehmender, 3 mit constanter Geschwindigkeit. Ein zweiter Specialfall ist der, dass 1 und 3 auf Spiralen sich bewegen, welche je eine gerade zur Anfangsasymptote, und je einen Kreis zur Endasymptote haben, während 2 auf einem Kreise sich bewegt, nämlich auf dem, welchem sich die Spirale des Fadens 1 nähert. Die Annäherung an die Kreise geschieht so rasch, dass sehr bald 1 und 2 einen, 3 einen zweiten Kreis durchläuft, und zwar derart, dass die beiden Radien sowohl als die beiden Geschwindigkeiten wie $\sqrt{3} : 1$ sich verhalten, und dass der Schwerpunkt der gemeinsame Mittelpunkt ist. Fig. 14 stellt den allgemeinen, Fig. 15 den zweiten Specialfall, Fig. 16 (a. f. S.) einen ihm correspondirenden Specialfall dar.

Wenn dagegen $m_1 = m_2 = m_3$, so ist die Bewegung die durch Fig. 17 (a. f. S.) dargestellte.

Fig. 14.

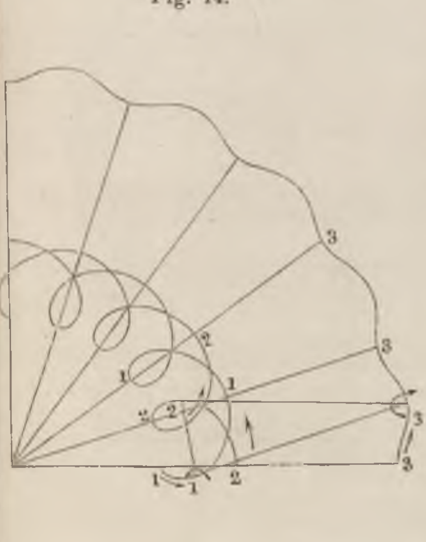
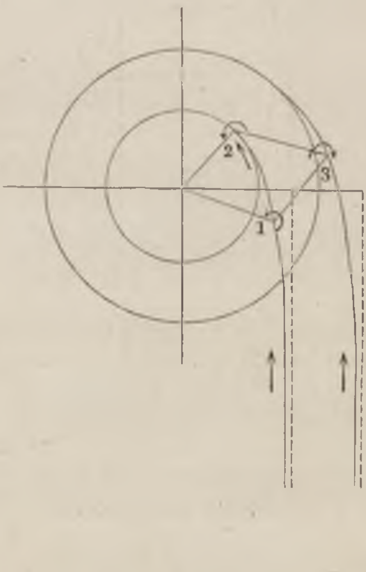
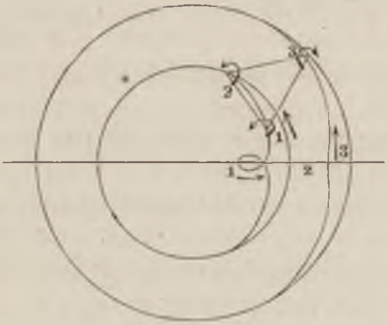


Fig. 15.



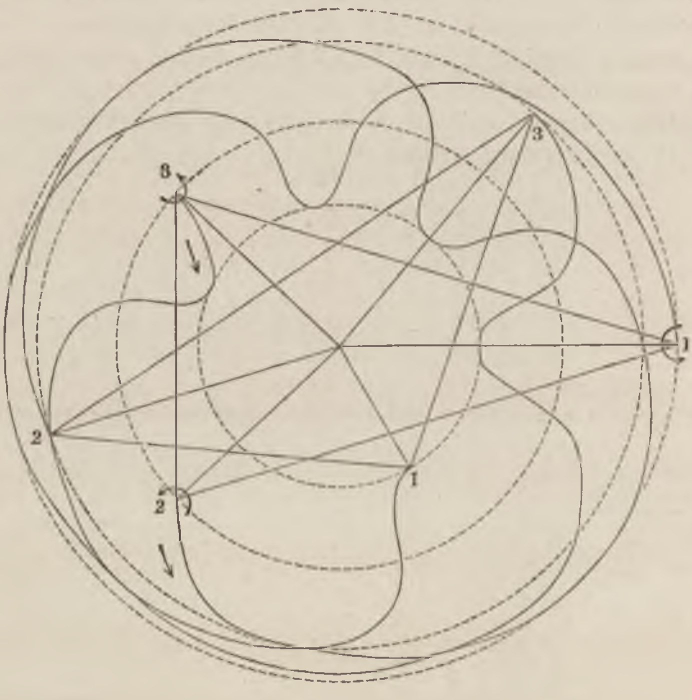
Gröbli[1]) untersuchte auch *die Bewegung von vier parallelen Wirbelfäden und von* 2 *n solchen*, jedoch nur unter der Voraussetzung von einer resp. n-Symmetrieebenen. Auf specielle Fälle bei vier Fäden beziehen sich die Figuren 18 bis 21.

Fig. 16.



Sind unendlich viele Wirbelfäden von gleicher Richtung vorhanden, und schliessen diese sich stetig an einander an, derart, dass *ein elliptischer*

Fig. 17.



1) *Gröbli*, l. c. p. 63 ff.

Wirbelcylinder[1]) entsteht, mit endlichem Querschnitt, so bleibt der Querschnitt stets eine Ellipse und die Axen dieser Ellipse behalten ihre Grösse $2a$ und $2b$, drehen sich aber mit der Geschwindigkeit

$$G = 2\zeta \frac{ab}{(a+b)^2}$$

um die Axe des Cylinders; gleichzeitig aber erfahren die Fäden relative Verschiebungen.

Fig. 18.

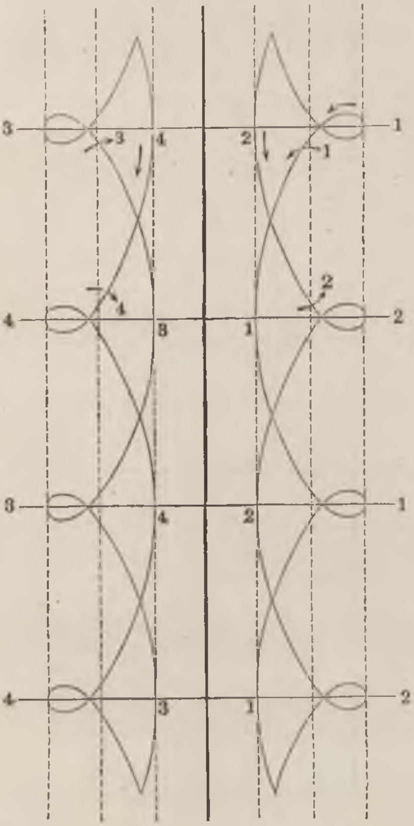
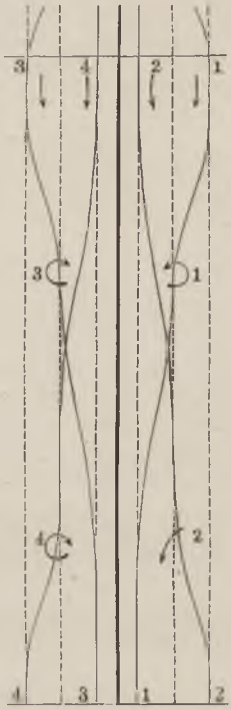


Fig. 19.



Wird a unendlich, so kommt man auf den Fall einer Wirbelebene und findet, dass dieselbe sich mit der Zeit nicht dreht. Wird

---

[1]) *Kirchhoff*, Vorl., S. 261 ff.

Fig. 20.

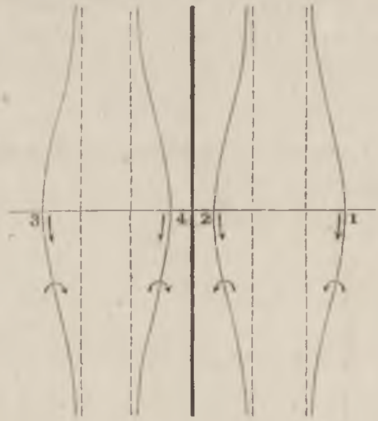
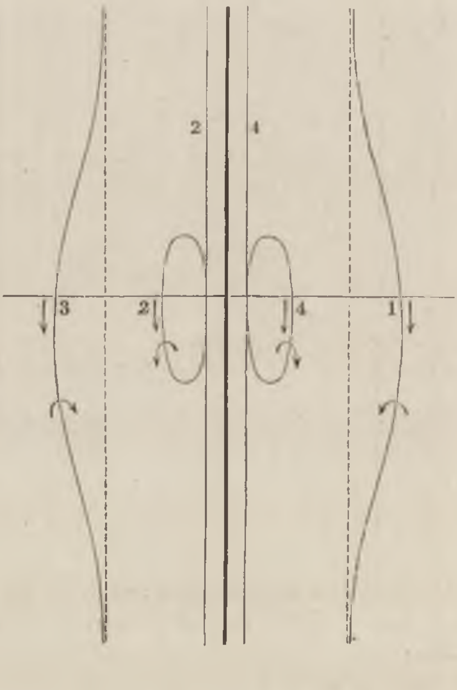


Fig. 21.



andererseits $a = b$, so erhält man einen kreisförmigen Wirbelcylinder und findet, dass die ihn bildenden Wirbelfäden ohne Aenderung ihrer relativen Lage mit der Geschwindigkeit ζ um seine Axe rotiren.

§. 43.

Noch interessanter sind die Erscheinungen, welche *kreisförmige Wirbelfäden, d. h. Wirbelringe*, darbieten; diese Gestalt ist es auch, welche man mit *Thomson* den Atomen zu geben hätte. Befindet sich in einer Flüssigkeit *ein einziger solcher Wirbelring* und steht er senkrecht auf der z-Axe, so bewegt er sich in der Richtung derselben mit constantem Radius vorwärts und zwar in demjenigen Sinne, in welchem die von ihm begrenzte Flüssigkeit durch sein Inneres strömt. Dass dem so sein müsse, davon kann man sich auch ohne Rechnung durch die Erwägung überzeugen, dass dieselbe Flüssigkeitsmenge, welche ausserhalb durch einen grösseren Raum zurückströmt, innerhalb durch einen viel kleineren vorwärts geströmt ist; sie muss also den Ring mitreissen. Sind *zwei Ringe* vorhanden[1]), so schreiten sie, falls sie gleiche Richtung und gleiche Wirbelrichtung haben, in derselben Richtung vorwärts; der vorangehende erweitert sich und verlangsamt gleichzeitig seine Bewegung, so dass unter Umständen der nachfolgende, welcher sich umgekehrt verengt und seine Bewegung beschleunigt, schliesslich durch ihn hindurchgeht, worauf dasselbe Spiel mit vertauschten Rollen sich wiederholt. Haben dagegen die Ringe entgegengesetzte Wirbelrichtung, so bewegen sie sich geradlinig auf einander zu, erweitern sich dabei in immer rascherem Tempo, während sie ihre fortschreitende Bewegung mehr und mehr verlangsamen, und verlieren sich schliesslich, in einander aufgehend, in der Unendlichkeit.

Dasselbe gilt von einem *einzigen Ringe, welcher gegen eine feste Wand sich hinbewegt;* er verlangsamt seine Bewegung mehr und mehr, erweitert sich und zerstreut sich zuletzt nach allen Seiten.

Die Potentialausdrücke für kreisförmige und allgemeinere Wirbelringe sind von *Beltrami*[2]) aufgestellt worden; formal sind

[1]) *Helmholtz*, l. c. Schlussworte.

[2]) *Beltrami*, Mem. di Bol. T. 3, p. 349.

sie natürlich mit den entsprechenden elektromagnetischen Potentialausdrücken identisch; allgemein ist also bei leicht ersichtlicher Bezeichnungsweise

$$V = -\frac{k}{2\pi}\int \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n}\, dw;$$

ist die Axe speciell eine ebene Curve, so wird

$$V = -\frac{k}{2\pi}\frac{\partial}{\partial z}\int \frac{dw}{r} = \frac{k z_1}{2\pi}\int \frac{d\vartheta}{\sqrt{r^2 + z_1^2}},$$

wo r und ϑ Polarcoordinaten in der xy-Ebene des Wirbelringes sind, und z_1 die Länge des vom betrachteten Punkte auf jene gefällten Perpendikels. Für geradlinige Wirbelfäden fliesst hieraus der oben bereits angegebene Ausdruck; für kreisförmige kommt man auf ein elliptisches Integral erster und eins dritter Gattung.

In Wirklichkeit sind die Erscheinungen der Wirbelbewegung in incompressiblen Flüssigkeiten nicht nur nicht ewig andauernde, sondern sogar überaus vergängliche; die Ursache hiervon ist die bei den durchgeführten Betrachtungen vernachlässigte Reibung. Es hat aber *Tait*[1]) Versuche mit compressiblen Flüssigkeiten angestellt, welche einige der wichtigsten Ergebnisse der Rechnung vollauf bestätigen.

Es ist nicht zu verwundern, dass, wenn schon die analytische Behandlung der Wirbelbewegungen an sich so complicirt ist, es noch ungleich schwieriger ist, den Einfluss dieser Wirbel auf den Verlauf der in den drei ersten Abschnitten dieses Theiles betrachteten Bewegungen zu studiren. Einen Fall, in welchem dies möglich ist, hat *Rankine*[2]) geliefert; es ist dies die Erscheinung der von *De St. Venant* „*grosse Welle*“ genannten Bewegung, welche, ohne Rücksicht auf die Wirbel, im §. 21 behandelt wurde. Man findet, wenn wie dort z die Richtung der Schwere ist:

$$\xi = 0, \quad \zeta = 0, \quad \eta = \frac{+\frac{4\pi^2}{\lambda T} r \frac{dr}{dz_0}}{1 + \frac{2\pi}{\lambda} r \frac{dr}{dz_0}},$$

wo zur Abkürzung

---

1) *Tait*, Lectures on some recent advancements in Science. 1877.

2) *Rankine*, Lond. Phil. Trans. 1863, pt. 1, p. 227.

$$h e^{-\frac{2\pi}{\lambda} z_0} = r$$

gesetzt wurde.

Die somit dargestellte wirbelnde Wellenbewegung erleidet mit der Zeit keine Schwächung; sie war stets so und wird stets so sein, wie sie jetzt ist; das ist das Charakteristische der Wirbelbewegung in idealen, d. h. nicht reibenden Flüssigkeiten.

In Wirklichkeit aber entstehen allenthalben Wirbel und vergehen andere, das kann man beim Rudern und bei vielen anderen Vorgängen beobachten.

Zwingender als je drängt sich also hier die Betrachtung derjenigen Eigenthümlichkeiten auf, welche die wirklichen Flüssigkeiten von den hier behandelten idealen unterscheiden.

Der dritte Theil dieser Darstellung wird deshalb der Reibung der Flüssigkeiten gewidmet sein.

Dritter Theil.

Theorie der Reibung der Flüssigkeiten.

---

§. 44.

Die grosse Bedeutung, welche dem Vorgange der *Reibung* zukommt, ist erst in neuester Zeit im Zusammenhange mit der Erkenntniss des Gesetzes von der *Erhaltung der Energie* und mit den *Clausius*'schen Betrachtungen über die *Entropie* vollständig zur Würdigung gelangt. Die Reibung ist unter den die Energie verwandelnden Vorgängen weitaus die mächtigste; sie lässt Arbeit verloren gehen und Wärme gewinnen.

Die Reibung findet, strenggenommen, überall statt, wo Bewegung stattfindet, also sowohl an der Grenze heterogener Körper, als im Innern homogener; im ersteren Falle nennt man sie *äussere*, im letzteren *innere Reibung*. Die Theorie hat es zunächst und vorzugsweise mit der letzteren zu thun. Um die äussere Reibung zu behandeln, dazu bedarf es nach Behandlung der inneren nicht mehr wesentlich neuer Methoden.

Der Erste, welcher die Gleichungen der Bewegung von Flüssigkeiten aufstellte, für Fälle, in welchen, wie wir nach *Newton* [1])

---

[1]) *Newton*, Phil. nat. princ. math. Liber 2, Sectio 9.

sagen, die innere Reibung sich geltend macht, war *Navier*[1]). Von molecularen Vorstellungen ausgehend fand er, dass man das Glied $\frac{\partial p}{\partial x}$ in der ersten der Bewegungsgleichungen (3) oder (4) ersetzen müsse durch

$$\frac{\partial p}{\partial x} - A \triangle u,$$

wo A eine Constante ist, und dass man die entsprechende Aenderung an den beiden anderen Gleichungen vornehmen müsse. Zu demselben Ergebnisse kann man aber auch ohne die Annahme von Molekeln gelangen, indem man einen Weg einschlägt, der ganz analog ist dem von *Cauchy*[2]) bei der Betrachtung fester, vollkommen unelastischer Körper eingeschlagenen. Eine zweite Theorie hat *Poisson*[3]) aufgestellt, welche für Gase andere Gleichungen liefert als die *Navier*'sche; das unterscheidende Glied enthält jedoch den Factor

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z};$$

für incompressible Flüssigkeiten, welche hier allein betrachtet werden sollen, stimmen daher beide Theorien hinsichtlich des Ergebnisses überein.

Dasselbe gilt von einer dritten Theorie, welche von *de St. Venant*[4]) aufgestellt ist, deren Vorstellungen jedoch sehr künstlicher Natur sind.

Als sehr gelungen ist die Theorie von *Stokes*[5]) zu bezeichnen, welche für tropfbare Flüssigkeiten ebenfalls zu denselben Ergebnissen führt, wie die übrigen Theorien, welche sich jedoch durch die Armuth an Hypothesen vortheilhaft gegenüber den obigen auszeichnet. Die Gleichungen, zu welchen alle diese Analytiker gelangen, sind folgende:

---

[1]) *Navier*, Mém. de l'Ac. des Sc. T. 6, p. 389.
[2]) *Cauchy*, Exerc. de Math. 3, p. 187.
[3]) *Poisson*, Journ. de l'Ec. Polyt. T. 13, p. 139.
[4]) *De St. Venant*, C. R. T. 17, p. 1240.
[5]) *Stokes*, Trans. of the Chambr. Phil. Soc. Vol. 8, p. 287. 1849.

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial p}{\partial x} &= \varrho\left(X - \frac{du}{dt}\right) + \eta \triangle u \\ \frac{\partial p}{\partial y} &= \varrho\left(Y - \frac{dv}{dt}\right) + \eta \triangle v \\ \frac{\partial p}{\partial z} &= \varrho\left(Z - \frac{dw}{dt}\right) + \eta \triangle w\end{aligned}\right\} . \tag{46}$$

Die Constante η definirt *Stokes* als den tangentiellen Druck auf die Flächeneinheit bei einer Geschwindigkeitsdifferenz gleich der Einheit der Länge in zwei Schichten, welche um die Einheit der Entfernung von einander abstehen. Es wird sich weiter unten zeigen, wie man am naturgemässesten zu dieser Definition gelangt. Die Grösse η ist die sogenannte *Reibungsconstante* oder der *Reibungscoefficient.*

Obgleich die Theorie von *Stokes* diejenigen seiner Vorgänger an Einfachheit übertrifft, so sind doch in dieser Hinsicht später noch beträchtliche Fortschritte gemacht worden. Insbesondere ist die von *O. E. Meyer*[1]) gegebene Ableitung der Gleichungen aus der *Newton*'schen Hypothese hervorzuheben. *Meyer* definirt zunächst den Unterschied zwischen äusserer und innerer Reibung in analytischer Hinsicht; derselbe besteht darin, dass erstere dem Unterschiede der Geschwindigkeiten beider reibenden Schichten proportional ist, während man die letztere, um als Proportionalitätsfactor eine endliche Zahl zu erhalten, nicht mit dem Differential, sondern mit dem Differentialquotienten der Geschwindigkeit nach der Normale der Grenzebene proportional setzen muss.

Es werden dann die Reibungskräfte auf die Flächen eines unendlich kleinen Prisma in derselben Weise aufgestellt, wie dies *Fourier* für die Bestimmung der Wärmeleitung gethan hatte, und dabei diejenigen Vereinfachungen eingeführt, welche bei isotropen Mitteln eintreten. Man erhält dann, in Uebereinstimmung mit dem Obigen, die drei Reibungscomponenten

$$\eta \triangle u, \quad \eta \triangle v, \quad \eta \triangle w.$$

Die Grenzbedingungen sind verschieden, je nach der Art des speciellen Problems, um welches es sich handelt, und gerade ihre Complication ist es, welche die Lösung der meisten Probleme überaus schwierig macht. Einige Bedingungsgleichungen, nämlich diejenigen für die freie und die feste Oberfläche, müssen aber stets

---

[1]) *O. E. Meyer,* Crelle's J. Bd. 59, 229. 1861. Bd. 75.

gelten, wo eine solche vorhanden ist, und diese Gleichungen sind von *Meyer* zuerst aufgestellt worden, freilich nur für den Fall, dass die Oberfläche durch die Bewegung sich nicht ändert. Dann muss zunächst die Normalcomponente der Geschwindigkeit an der Oberfläche verschwinden, und ferner muss in ihr der Druck p gleich dem äusseren Drucke P sein; also es muss

$$u \cos(n x) + v \cos(n y) + w \cos(n z) = 0, \quad p = P$$

sein. Zwei weitere Bedingungen beziehen sich auf die beiden in der Oberfläche verlaufenden Geschwindigkeitscomponenten σ_1 und σ_2. Sind nämlich σ_1' und σ_2' die entsprechenden Grössen für das anstossende Medium, so muss

$$\eta \frac{\partial \sigma_1}{\partial n} + E(\sigma_1 - \sigma_1') = 0 \quad \text{und} \quad \eta \frac{\partial \sigma_2}{\partial n} + E(\sigma_2 - \sigma_2') = 0$$

sein, wo E eine neue Constante, welche zweckmässig als die *Constante der äusseren Reibung* zu bezeichnen ist, im Gegensatze zur Constante η der *inneren Reibung*. Zwei Fälle sind besonders beachtenswerth: erstens der Fall einer absolut freien Oberfläche, d. h. einer Grenze gegen ein Vacuum, für welche

$$\frac{\partial \sigma_1}{\partial n} = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial \sigma_2}{\partial n} = 0$$

wird, und zweitens der Fall einer benetzten Grenzfläche, für welche

$$\sigma_1 = \sigma_1', \quad \sigma_2 = \sigma'$$

wird.

§. 45.

Auf demjenigen Wege, welcher die vollständigste Analogie mit den Methoden der Theorie der Elasticität fester Körper, insbesondere mit der Theorie von *Cauchy* darbietet, und welcher darum als der vorzüglichste zu bezeichnen ist, haben *Stefan* [1]) und später *Kirchhoff* [2]) die Gleichungen für die Reibung der Flüssigkeiten abgeleitet. Der Gedankengang dieser Ableitung, anknüpfend an das im ersten Theile §. 4 bereits Gesagte, ist kurz der folgende.

[1]) *Stefan*, Wien. Sitz.-Ber. Bd. 46, p. 8. 1862.

[2]) *Kirchhoff*, Vorl. Elfte und sechsundzwanzigste Vorlesung.

Eine ideale Flüssigkeit ist dadurch charakterisirt, dass bei ihr von den neun Druckcomponenten X_x u. s. w. sechs verschwinden, die drei übrigen aber, nämlich X_x, Y_y, Z_z, einander gleich werden; ihren gemeinsamen Werth stellt der Druck p dar. Bei idealen Flüssigkeiten ist also zur vollständigen Bestimmung der inneren Kräfte nur eine einzige Grösse nöthig. Bei festen Körpern bedarf es bekanntlich ausserdem noch zweier Constanten, der beiden Elasticitätsconstanten; bei den wirklichen, d. h. reibenden Flüssigkeiten genügt eine einzige Constante η; es genügt hier, zu setzen:

$$X_x = p - 2\eta \frac{\partial u}{\partial x}, \quad Y_y = p - 2\eta \frac{\partial v}{\partial y}, \quad Z_z = p - 2\eta \frac{\partial w}{\partial z},$$

$$Y_z = -\eta \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right), \quad Z_x = -\eta \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right),$$

$$X_y = -\eta \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right).$$

Setzt man diese Werthe der Druckcomponenten in die Gleichungen (1 a) oder die aus ihnen folgenden

$$\left.\begin{aligned}
\varrho \frac{d^2 x}{dt^2} &= \varrho X - \frac{\partial X_x}{\partial x} - \frac{\partial X_y}{\partial y} - \frac{\partial X_z}{\partial z} \\
\varrho \frac{d^2 y}{dt^2} &= \varrho Y - \frac{\partial Y_x}{\partial x} - \frac{\partial Y_y}{\partial y} - \frac{\partial Y_z}{\partial z} \\
\varrho \frac{d^2 z}{dt^2} &= \varrho Z - \frac{\partial Z_x}{\partial x} - \frac{\partial Z_y}{\partial y} - \frac{\partial Z_z}{\partial z}
\end{aligned}\right\}$$

ein, so erhält man die Gleichungen (46), welche in Verbindung mit der unveränderten Continuitätsgleichung genügen, um die vier Unbekannten u, v, w, p zu bestimmen, falls η gegeben ist. Beobachtet man umgekehrt die Bewegungserscheinungen einer reibenden Flüssigkeit, so kann man aus den obigen Gleichungen die unbekannte Reibungsconstante berechnen.

Auf einen wesentlichen Unterschied zwischen der Elasticität der festen Körper und der Reibung der Flüssigkeiten macht bei dieser Gelegenheit *Stefan*[1]) aufmerksam. Es ist ein Unterschied, ganz analog demjenigen, welcher bei einer reibenden Flüssigkeit zwischen der äusseren und inneren Reibung besteht. Bei einem elastischen festen Körper ist nämlich die Kraft proportional der Verrückung, d. h. dem Differential des Weges; hier, bei einer

---

[1]) *Stefan*, l. c. p. 13.

reibenden Flüssigkeit, ist die Kraft der Geschwindigkeit, d. h. dem Differentialquotienten des Weges proportional.

Die Oberflächenbedingungen sind in ihrer Allgemeinheit von *Kirchhoff*[1]) discutirt worden. Man muss zunächst für jede Grenzfläche die Normalcompetente der Geschwindigkeit auf beiden Seiten gleichsetzen, d. h. es muss

$$(u - u') \cos(nx) + (v - v') \cos(ny) + (w - w') \cos(nz) = 0$$

sein; das ist die Verallgemeinerung der ersten Bedingung von *Meyer*. Man muss ferner die Druckcomponenten auf beiden Seiten einander gleichsetzen, also

$$X_n = X'_n, \quad Y_n = Y'_n, \quad Z_n = Z'_n;$$

d. i. eine etwas schärfere Fassung der zweiten Bedingung von *Meyer*.

Diese Bedingung reicht aber nicht aus, um die Lösungen der Differentialgleichungen zu bestimmen. Es ist eine Hypothese nöthig, um dieselben zu ergänzen. Die allgemeinste Hypothese, welche gemacht worden ist, und welche bei gewissen Problemen sich bewährt hat, ist die, dass die der Grenzfläche parallele Componente des Druckes der nach der ersten Bedingung ebenfalls dieser Fläche parallelen Geschwindigkeit proportional und, was die Richtung betrifft, entgegengesetzt sei. Diese Hypothese stellt sich in folgenden, im Wesentlichen mit der dritten und vierten Gleichung von *Meyer* identischen, dar:

$$\left.\begin{aligned} X_n - [X_n \cos(nx) + Y_n \cos(ny) + Z_n \cos(nz)] \cos(nx) &= E(u' - u) \\ Y_n - [X_n \cos(nx) + Y_n \cos(ny) + Z_n \cos(nz)] \cos(ny) &= E(v' - v) \\ Z_n - [X_n \cos(nx) + Y_n \cos(ny) + Z_n \cos(nz)] \cos(nz) &= E(w' - w) \end{aligned}\right\}.$$

Für unendlich grosse Reibung, d. h. für den Fall der Benetzung, geben sie

$$u = u', \quad v = v', \quad w = w',$$

andererseits für unendlich kleine Reibung, d. h. für eine absolut freie Grenze oder für eine Grenze gegen eine ideale Flüssigkeit

$$X_n : Y_n : Z_n = \cos(nx) : \cos(ny) : \cos(nz),$$

d. h. der Druck ist ein normaler.

---

[1]) *Kirchhoff*, Vorl., p. 371.

§. 46.

Nach Feststellung der Grundgleichungen und der Grenzbedingungen für die Bewegung reibender Flüssigkeiten haben wir uns mit ihren Anwendungen auf specielle Probleme zu beschäftigen, d. h. nachdem wir den dem ersten Theile dieser Abhandlung analogen Theil der Theorie der Reibung durchgeführt haben, müssen wir den dem zweiten Theile analogen Gang durchmachen. Es sind aber von den dort behandelten Problemen nur einige wenige auch mit Rücksicht auf die Reibung untersucht worden. Es möge daher hier, unabhängig von dem dort eingehaltenen Gange, das Wesentliche hervorgehoben werden, während es hier mehr noch als früher nothwendig wird, die grosse Fülle von principiell unwesentlichen Betrachtungen unberücksichtigt zu lassen.

Der Erste, welchem es gelang, für einige Probleme *die Reibungsgleichungen zu integriren*, war *Stokes*[1]). Es soll hier insbesondere das eine dieser Probleme ins Auge gefasst werden, *das Problem der Schwingungen einer Pendelkugel unter dem Einflusse einer umgebenden Flüssigkeit.*

Der Einfluss, um den es sich hier handelt, ist doppelter Art, worauf schon *Leibnitz*[2]) aufmerksam gemacht hat; der erste ist eine Folge der *Trägheit* der Flüssigkeit, die eine gewisse Kraft erfordert, damit die Flüssigkeit, was nicht ausbleiben kann, an den Bewegungen der Pendelkugel theilnehme; der zweite ist eine Folge der äusseren und inneren *Reibung*, welche einen Theil der mitgetheilten Bewegung und damit auch einen Theil der Bewegung der Kugel, wenigstens als dynamische lebendige Kraft, vernichtet. Den ersten Widerstand nennt man passend den Trägheitswiderstand, den letzten den Reibungswiderstand. Der Einfluss des Trägheitswiderstandes einer Flüssigkeit auf die Bewegung fester Körper in ihr ist bereits im zweiten Theile in dem Abschnitte über die gemeinsame Bewegung fester und flüssiger Körper betrachtet worden. Es wurde aber dort (S. 63) darauf hingewiesen, dass eine Uebereinstimmung der Theorie mit der

---

1) *Stokes*, Trans. of the Cambr. Phil. Soc. Vol. 9, p. 2, p. 8.

2) *Leibnitz*, Acta eruditorum 1689.

Erfahrung nur bei Berücksichtigung des Reibungswiderstandes erzielt werden kann.

In der That ergeben hinsichtlich des Problems der Pendelkugel die übereinstimmenden Resultate von *Poisson*[1]), *Green*[2]) und *Plana*[3]) für unendlich kleine Schwingungen und von *Clebsch*[4]) für endliche ausschliesslich einen vergrössernden Einfluss des Trägheitswiderstandes auf die Schwingungsdauer, dagegen gar keinen Einfluss auf die Amplitude der Schwingungen. In Wahrheit nehmen aber die letzteren mit der Zeit meist sehr rasch ab, und auch die erstere wird durch eine flüssige Umgebung in stärkerem Maasse vergrössert, als der Trägheitswiderstand es erwarten liesse. So fand z. B. *Bessel*[5]) aus seinen zahlreichen Beobachtungen in Wasser und Luft, dass man die Schwingungsdauer, um sie auf den leeren Raum zu reduciren, mit

$$\frac{1-k\dfrac{M'}{M}}{1+k\dfrac{M'}{M}}$$

multipliciren müsse, wo M die Masse der Kugel, M' die Masse der verdrängten Flüssigkeit und k eine Constante ist, welche für Luft den Werth 0,95 haben muss; *Poisson*'s Theorie dagegen ergiebt für sie den Werth 0,5, also einen viel zu kleinen Werth. Die Ursache ist, wie zuerst *Stokes* erkannt hat, die Vernachlässigung des Reibungswiderstandes.

Um nun denselben zu ermitteln, vereinfacht *Stokes* seine Gleichungen für den vorliegenden Fall, in welchem von äusseren Kräften nur die Schwerkraft in der Richtung der z-Axe wirkt; sie lauten daher

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial p}{\partial x} &= \eta \triangle u - \varrho \frac{du}{dt} \\
\frac{\partial p}{\partial y} &= \eta \triangle v - \varrho \frac{dv}{dt} \\
\frac{\partial p}{\partial z} &= \eta \triangle w - \varrho \frac{dw}{dt} + \varrho g
\end{aligned}\right|$$

[1]) *Poisson*, Mem. de l'Acad. des Sc. T. 11, p. 521. 1832.
[2]) *Green*, Edinb. Phil. Trans. T. 13, p. 54. 1836.
[3]) *Plana*, Mem. Acad. Torino, T. 37. 1835.
[4]) *Clebsch*, Abhandl. d. Berl. Akad. 1826.
[5]) *Bessel*, Abhandl. d. Berl. Akad. 1826.

wo die Grössen $\frac{du}{dt}$, $\frac{dv}{dt}$, $\frac{dw}{dt}$ auch einfacher als partielle Differentialquotienten von u, v, w nach t aufgefasst werden können, da die Glieder, welche $u\frac{du}{dx}$ u. s. w. enthalten, als Grössen zweiter Ordnung bei unendlich kleinen Schwingungen, um welche es sich hier handeln soll, vernachlässigt werden können. Die Reibungsconstante η erscheint in der Lösung stets dividirt durch ϱ; die Grösse $\frac{\eta}{\varrho} = \gamma^2$ nennt *Stokes* den *Reibungsindex*. Sein Verfahren, um die Bewegung zu finden, ist ein Annäherungsverfahren; er nimmt zunächst die Amplituden constant an, um die Bewegung der Flüssigkeit zu finden, und berechnet hieraus dann die Abnahme der Amplituden. Als Kraft, welche die Flüssigkeit auf die Kugel ausübt, ergiebt sich

$$F = -kM'\frac{d^2\xi}{dt^2} - k'\frac{\pi}{T}M'\frac{d\xi}{dt},$$

wo

$$k = \tfrac{1}{2} + \frac{9}{4\nu a}, \quad k' = \frac{9}{4\nu a}\left(1 + \frac{1}{\nu a}\right), \quad \nu = \frac{1}{\gamma}\sqrt{\frac{\pi}{2T}} = \sqrt{\frac{\pi\varrho}{2\eta T}}$$

gesetzt worden ist, und wo ξ die Abscisse des Kugelmittelpunktes, a ihr Radius, T die Schwingungsdauer ist. Das erste Glied stellt die Vergrösserung des Trägheitsmomentes und damit die Vergrösserung der Schwingungsdauer dar; sie ist hier nicht, wie bei Vernachlässigung der Reibung, ein ganz bestimmter Bruchtheil des ursprünglichen Werthes, sondern sie hängt von der Grösse der Kugel und der Grösse der Schwingungsdauer in verwickelterer Weise ab; mit ersterer nimmt sie ab, mit der letzteren zu. Es folgt das erstere schon daraus, dass die Reibung auf die Oberflächen wirkt; das letztere daraus, dass sie von der Geschwindigkeit der Bewegung abhängt. Beiläufig sei bemerkt, dass aus der zwischen F und a bestehenden Beziehung es sich erklärt, dass kleine Wassertröpfchen sich in der Luft schwebend erhalten können, wie wir es bei den Wolken thatsächlich beobachten. Das zweite Glied von F stellt die bei Vernachlässigung der Reibung überhaupt fehlende Verminderung des Schwingungsbogens dar.

§. 47.

Ausgeführt wurde die *Theorie der Pendelschwingungen* von *O. E. Meyer*[1]) und zwar mit Hülfe einer sehr zweckmässigen Coordinatentransformation. Es schwinge die Kugel in der x-Axe unendlich wenig hin und her, und es mögen in den der yz-Ebene parallelen Ebenen Polarcoordinaten eingeführt werden, von welchen hier der Winkel φ nicht in Betracht kommt, da eine Pendelkugel sich nicht um ihre Bahn als Axe dreht; dann zeigt sich, dass die Bestimmung der x-Componente und der Radialcomponente der Geschwindigkeit u und q abhängt von der Auflösung einer Differentialgleichung vierter Ordnung, welche in zwei solche der zweiten Ordnung zerfällt. Physikalisch hat das die Bedeutung, dass die Bewegung in zwei Theile zerfällt; in einen, für welchen ein Geschwindigkeitspotential existirt, und in einen zweiten, welcher mit Rotationen verknüpft ist. Der erste Theil ist, wie sich zeigt, unabhängig von der Reibung und würde auch ohne diese genau in derselben Weise erfolgen; der andere Theil verschwindet mit der Reibung, wie er mit ihr entsteht. Auch hier zeigt sich also der Zusammenhang zwischen Reibung und Wirbelbewegung in der klarsten Weise.

Man kann diesen Zusammenhang, wie *Stefan*[2]) schon früher gezeigt hatte, ganz allgemein darlegen. Man kann nämlich die Grössen $\triangle u$, $\triangle v$, $\triangle w$, durch welche die Reibungsgleichungen von den gewöhnlichen hydrodynamischen Gleichungen sich unterscheiden, durch Benutzung der Continuitätsgleichung für incompressible Flüssigkeiten auf die Form

$$\triangle u = 2\left(\frac{\partial \xi}{\partial y} - \frac{\partial \eta}{\partial z}\right), \quad \triangle v = 2\left(\frac{\partial \xi}{\partial z} - \frac{\partial \zeta}{\partial x}\right),$$

$$\triangle w = 2\left(\frac{\partial \eta}{\partial x} - \frac{\partial \xi}{\partial y}\right)$$

bringen, wo ξ, η, ζ die Componenten der Wirbelgeschwindigkeit sind.

---

1) *O. E. Meyer*, Crelle's J. Bd. 73, S. 31. 1871.

2) *Stefan*, Wien. Sitz.-B. Bd. 46 (2), S. 25.

Mit den Rotationen ξ, η, ζ verschwindet also auch die Reibung; sie verschwindet aber auch dann, d. h. man kann von ihrem Einflusse auch dann absehen, wenn ξ, η, ζ constant sind. Dagegen lässt sich ihre Aenderung, insbesondere das Entstehen und Vergehen der Wirbelbewegung nur mit Hülfe der inneren Reibung beschreiben.

Zum Zwecke der Integration der Reibungsgleichungen für das Problem der Pendelkugel ist es vortheilhaft, nach der schon eingeführten noch eine weitere Transformation vorzunehmen, nämlich statt der Abscisse x des Kugelmittelpunktes und des Abstandes von der x-Axe als neue Variabele die Entfernung r von der Gleichgewichtslage des Kugelmittelpunktes und den Winkel ϑ einzuführen, welchen diese Entfernung mit der x-Axe, d. h. mit der Richtung der Schwingungen bildet. Man findet dann für die beiden Componenten der Geschwindigkeit in der Flüssigkeit, wenn $B\,C\,B_1\,C_1$, $n\,n_1$, $\lambda\,\lambda_1$, $f\,f_1$ Constanten sind:

$$u = \frac{1}{r \sin\vartheta} \cdot \frac{d\psi}{d(r\sin\vartheta)} \quad \text{und} \quad q = \frac{-1}{r\sin\vartheta} \cdot \frac{d\psi}{d(r\cos\vartheta)},$$

wo $\psi = \psi_1 + \psi_2$ ist, und ferner:

$$\psi_1 = \Sigma(B\,\theta_n + C\,Z_n)\,R\,e^{\lambda_1^2 \nu^2 t}, \quad \psi_2 = \Sigma(B_1\,\theta_{n_1} + C_1\,Z_{n_1})\,R_1\,e^{\lambda^2 \nu^2 t},$$

θ_n und Z_n aber die beiden Lösungen der Gleichung

$$\frac{d}{d\vartheta}\left(\frac{1}{\sin\vartheta}\,\frac{d\theta}{d\vartheta}\right) = -\,n(n+1)\,\frac{\theta}{\sin\vartheta}$$

sind, d. h. die beiden Kugelfunctionen

$$\theta_n = 1 - \frac{n(n+1)}{1\,.\,2}\cos^2\vartheta + \frac{n(n+2)(n+1)(n-1)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4}\cos^4\vartheta - \cdots$$

$$Z_n = \cos\vartheta - \frac{(n+1)\,n}{1\,.\,2}\cos^3\vartheta + \frac{(n+1)(n+3)(n-2)\,n}{2\,.\,3\,.\,4\,.\,5}\cos^5\vartheta - \cdot$$

wo ferner R der Gleichung

$$\frac{d^2 R}{d r^2} = n(n+1)\,\frac{R}{r^2}$$

genügt, also

$$R = \frac{1}{r^n} + f\,r^{n+1}$$

ist, und wo endlich R_1 der Gleichung

$$\frac{d^2 R_1}{d r^2} = n_1 (n_1 + 1) \frac{R_1}{r^2} + \lambda^2 R_1$$

genügt, d. h.

$$R_1 = P_{n_1}(r) + (f_1 - 1) Q_{n_1}(r)$$

ist, wenn man

$$P_{n_1}(r) = r^{n_1+1} \int_{-\lambda}^{+\lambda} e^{rs} (\lambda^2 - s^2)^{n_1} d s \quad \text{und}$$

$$Q_{n_1}(r) = r^{n_1+1} \int_{\lambda}^{\infty} e^{-rs} (s^2 - \lambda^2)^{n_1} d s$$

setzt.

Schliesslich findet man den Druck p aus der Gleichung

$$p = \int \frac{\varrho}{\sin \vartheta} \left(\frac{d^2 \psi_1}{d r\, d t} d \vartheta - \frac{1}{r^2} \frac{d^2 \psi_1}{d \vartheta\, d t} d r \right) - \varrho g r \sin \vartheta \sin \varphi,$$

wo φ die Richtung angiebt, in welcher ein Punkt der Flüssigkeit von der x-Axe aus sich befindet.

Die Grenzbedingungen, welche zu erfüllen sind, verursachen eine grosse Vereinfachung der in der Lösung vorkommenden Hülfsgrössen. Es zeigt sich nämlich, dass $n = n_1$ und zwar gleich einer ganzen positiven Zahl sein muss; ist diese ungerade, so muss ferner $C = C_1 = 0$ sein; ist sie gerade, so muss $B = B_1 = 0$ sein. Die Functionen θ, Z, P, Q lassen sich dann als endliche Reihen darstellen. Von den übrigen Constanten bestimmen sich alle bis auf eine durch die weiteren Bedingungen, dass für eine die Flüssigkeit einhüllende grosse Kugelfläche $u = q = 0$ sei, und dass für die Oberfläche der Pendelkugel, an welcher die Flüssigkeit haften möge, $q = 0$, $u = U$ sein muss, wenn U die Geschwindigkeit der Pendelkugel selbst ist. Dadurch wird $\lambda = \lambda_1$, alle übrigen Constanten bestimmen sich, nur λ bleibt, als Wurzel einer oder einer anderen transcendenten Gleichung (je nachdem $n > 1$ oder $n = 1$ ist) unendlich vielwerthig; es stellen sich daher auch U und die Verrückung ξ der Pendelkugel als unendliche Summen über λ dar, nämlich

$$U = \Sigma D e^{\lambda^2 \gamma^2 t}, \quad \xi = \Sigma \frac{D}{\lambda^2 \gamma^2} e^{\lambda^2 \gamma^2 t},$$

wo die D neue Constanten bedeuten; ferner wird ψ, wodurch sich u und q, d. h. die Bewegung der Flüssigkeit, bestimmt:

$$\psi = \theta_1 \Sigma (B R + B_1 R_1) e^{\lambda^2 \gamma^2 t} + \Sigma \theta_n \Sigma (B R + B_1 R_1) e^{\lambda^2 \gamma^2 t} + \Sigma Z_n \Sigma (C R + C_1 R_1) e^{\lambda^2 \gamma^2 t},$$

wo die in den beiden letzten Gliedern voranstehenden Summen auf n und zwar die erste auf ungerade, die zweite auf gerade n sich beziehen, während die drei übrigen für λ gelten.

Die letzte noch willkürliche Constante (D für $n = 1$, B_1 für ungerade n, C_1 für gerade n) bestimmt sich durch den Anfangszustand der Pendelbewegung, welcher gegeben sein muss.

Die Discussion der Lösungen führt zu folgenden allgemeinen Sätzen:

1) Diejenige Bewegung, welche die Flüssigkeit ohne die Kugel ausführt, kann nur aus einer anfänglichen Bewegung der Flüssigkeit, nicht durch eine Einwirkung der Kugel entstehen.

2) Die Flüssigkeit kann ohne die Pendelkugel weder in pendelnde Schwingungen gerathen, noch überhaupt ohne dieselbe dauernd in Bewegung bleiben.

3) Für ein complexes λ sei $\lambda \gamma = a + b i$; dann nehmen die Schwingungen von der Dauer

$$T = \frac{\pi}{2 a b}$$

nach dem Gesetze einer *geometrischen Reihe* ab, deren *logarithmisches Decrement*

$$\varepsilon = (b^2 - a^2) T = \frac{\pi}{2} \frac{b^2 - a^2}{a b}$$

ist.

4) Die *Dauer der Pendelschwingungen* wird erstens durch das *Mitschwingen* und zweitens durch die innere *Reibung* des umgebenden Mediums vergrössert (die äussere Reibung an der Kugel wurde unendlich gross angenommen).

5) Zur Bestimmung von T und ε gelten bei gewissen Vernachlässigungen die Gleichungen

$$\frac{T^2}{\pi^2} = \frac{(M + k M') l}{(M - M') g}, \quad \varepsilon = \frac{\frac{1}{2} \pi k_1 M'}{M + \frac{1}{2}(k + \frac{1}{2}) M'},$$

wo l die Länge des Pendels und

$$k = \tfrac{1}{2} + \frac{9}{4 \nu a} \quad \text{und} \quad k_1 = \frac{9}{4 \nu a} \left(1 + \frac{1}{\nu a} - \frac{1}{2} \frac{\varepsilon}{\pi}\right)$$

ist.

Der Werth von k stimmt mit dem von *Stokes* gefundenen und oben angegebenen überein; der Werth von k_1 stimmt mit dem *Stokes*'schen nur für den Fall, dass ε klein gegen π ist.

Die Grösse k fand *Meyer*[1]), wie *Bessel* ursprünglich allgemein angenommen hatte, für lange Pendel in der That von der Schwingungsdauer unabhängig; für kurze Pendel ist dies jedoch nicht mehr der Fall.

Endlich ergiebt sich, wenn λ und m Länge und Masse des Fadens, m' die von ihm verdrängte Flüssigkeitsmasse, μ das Trägheitsmoment der Kugel in Bezug auf einen horizontalen Durchmesser bedeutet, die *Länge des correspondirenden einfachen Pendels*

$$l = \frac{(M + k M')(\lambda + a)^2 + \mu + \frac{1}{3} m \lambda^2}{(M - M')(\lambda + a)^2 + \frac{1}{2}(m - m')\lambda}.$$

Weitere Fälle der Schwingungen von Kugeln und anderen Körpern in reibenden Flüssigkeiten sind von verschiedenen Analytikern, namentlich von *Gronau*[2]), *Lampe*[3]) und *Röhrs*[4]), behandelt worden. Der Fall, welchen *Lampe* untersucht hat, nämlich die *drehenden Schwingungen einer Kugel um eine feste Axe*, ist in gewissem Sinne als eine Ergänzung des von *Meyer* behandelten Falles zu bezeichnen, in welchem gerade diese Schwingungen ausgeschlossen und deshalb von den vier Differentialgleichungen nur drei im Auge behalten werden.

Indessen kann hier nicht näher darauf eingegangen werden.

§. 48.

Nur ein Fall der Bewegung fester Körper in reibenden Flüssigkeiten muss noch betrachtet werden, nämlich der Fall einer *Scheibe von kreisförmiger Gestalt*, weil gerade hier, wie schon im vorigen Theile bei Gelegenheit der Berechnung von *Beltrami* erwähnt wurde, der Einfluss der Reibung ein grosser ist, und weil überdies, eben in Folge hiervon, dieser Fall sehr geeignet ist, *zur Berechnung der Reibungsconstanten zu dienen.*

---

[1]) *Meyer*, Pogg. Ann. Bd. 143.

[2]) *Gronau*, Ueber die Bewegung schwingender Körper im widerstehenden Mittel. Danzig 1850.

[3]) *Lampe*, Ueber die Bewegung einer Kugel etc. Progr. des Gymn. z. Danzig 1866.

[4]) *Röhrs*, Proceed. of the math. Soc. Vol. 5, p. 125.

Der Beobachtung unterworfen wurde dieser Fall zuerst bekanntlich von *Coulomb* [1]), welcher fand, dass die Amplituden eine geometrische Reihe abnehmender Art bilden, wenn die Zeiten eine zunehmende geometrische Reihe bilden, d. h. dass das logarithmische Decrement constant ist für eine und dieselbe Scheibe und eine und dieselbe Flüssigkeit; dass es dagegen für verschieden grosse Scheiben der vierten Potenz der Radien proportional sei. Später unternahm es *O. E. Meyer* [2]), diese Versuche eingehender zu wiederholen, und gleichzeitig [3]) theoretisch das Problem zu behandeln, d. h. die Reibungsgleichungen unter den hier giltigen Bedingungen zu integriren, und zwar, ähnlich wie bei dem Kugelprobleme, durch Einführung von Polarcoordinaten in einer Ebene, hier in der Mittelebene der Scheibe, auf welcher die x-Axe senkrecht steht. Die Oberflächenbedingungen liefern, falls das Gefäss ein oben und unten geschlossener Cylinder ist, 18 Gleichungen zwischen den Geschwindigkeitscomponenten und den drei Reibungsconstanten, nämlich der Reibung der Flüssigkeit an sich selbst, an der Scheibe und am Gefässe. Von diesen Gleichungen gelten je drei für den oberen, unteren und peripherischen Rand der Scheibe und für die obere, untere und peripherische Wand des Gefässes.

Schliesslich ist noch die Gleichung für die Bewegung der Scheibe selbst aufzustellen.

Was zunächst aus den Gleichungen zu entnehmen ist, ist dies:

Wenn die Geschwindigkeiten klein sind und, was hier der Fall ist, die Bewegung vom Polarwinkel in der horizontalen yz-Ebene unabhängig ist, so ist auch die Drehungsgeschwindigkeit der Flüssigkeit unabhängig von den übrigen Geschwindigkeitscomponenten.

Es wird also die Oscillation der Scheibe durch solche Strudel, welche in den durch die Drehungsaxe gelegten Verticalebenen und zwar in allen auf dieselbe Weise stattfinden, nicht beeinflusst.

Waren überdies die verticale und die radiale Componente der Geschwindigkeit zu irgend einer Zeit gleich Null, so bleiben sie es nahezu immer, und man braucht sich bloss mit der Winkelgeschwindigkeit zu beschäftigen.

---

1) *Coulomb*, Mém. de l'Inst. nat. T. 3, p. 246.
2) *O. E. Meyer*, Pogg. Ann. Bd 113, S. 55. 1861.
3) *O. E. Meyer*, Crelle's J. Bd. 59, S. 229. 1861.

Man hat es dann mit den verhältnissmässig einfachen Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} \varrho \frac{\partial \psi}{\partial t} &= \eta \left[\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial r^2 \psi}{r \partial r}\right)\right] \\ &\text{für die Flüssigkeit und} \\ M \frac{d^2 \varphi_1}{d t^2} &= -\tau \varphi_1 + 2 \pi \eta \left\{R^3 \int_{-c_1}^{+c_1} \left(\frac{\partial \psi}{\partial r}\right)_{R=r} d x \right. \\ &\left. + \int_0^R \left[\left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)_{x=c_1} - \left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)_{x=-c_1}\right] r^3 d r\right\} \end{aligned}\right\} \quad (47)$$

für die Scheibe zu thun, in welchen ψ die Winkelgeschwindigkeit der Flüssigkeit, r die horizontale Entfernung von der Axe, φ_1 den Winkelabstand der Scheibe von ihrer Gleichgewichtslage, M ihr Trägheitsmoment, τ das Torsionsmoment des Aufhängedrahtes, $x = \pm c_1$ die Coordinaten der Scheibenränder und R den Radius des Gefässes bezeichnet.

Die Integration dieser Gleichungen führt aber immer noch zu sehr verwickelten Resultaten.

Einfacher werden dieselben, wenn man sich darauf beschränkt, die Winkelgeschwindigkeit nur für die nahezu ebenen Theile derjenigen Rotationsellipsoide zu berechnen, auf welchen ψ constant ist.

Diese Theile werden um so grösser, und damit die Annäherung an die Wirklichkeit eine um so vollständigere, je dünner und je grösser die Scheibe ist. Ist sie unendlich dünn, so werden die Gleichungen (47) einfach

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\eta}{\varrho} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2},$$

$$M \frac{d^2 \varphi_1}{d t^2} = -\tau \varphi_1 + \frac{\pi}{2} \eta R^4 \left\{\left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)_{+0} - \left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)_{-0}\right\}.$$

Von den sechs Bedingungen fallen die beiden auf den Mantel des Gefässes und den Rand der Scheibe bezüglichen fort; die übrigen nehmen, wenn weder an den Wänden des Gefässes ($x = c_2$ und $x = c_3$) noch an den Flächen der Scheibe Gleitung stattfindet, die einfache Gestalt an:

$$\psi = \psi_1 \text{ für } x = \pm 0,$$

wenn $\frac{d \varphi_1}{d t} = \psi_1 =$ Winkelgeschwindigkeit der Scheibe gesetzt wird, und

$$\psi = 0 \text{ für } x = c_2, \quad \psi = 0 \text{ für } x = c_3.$$

Versteht man, der Symmetrie halber, unter x nunmehr einfach den verticalen Abstand über *oder* unter der Scheibe und unterscheidet demgemäss zwischen ψ_2 und ψ_3 (über und unter der Scheibe), so sind dieses die vollständigen Integrale:

$$\left.\begin{aligned}
\psi_1 &= \Sigma_m C_m e^{-m^2 t}, \quad \text{also } \varphi_1 = -\Sigma_m \frac{C_m}{m^2} e^{-m^2 t} \\
\psi_2 &= \Sigma_m C_m \frac{\sin m(c - \gamma x)}{\sin m c} e^{-m^2 t} + \Sigma_n B_n \sin n \gamma y e^{-n^2 t} \\
\psi_3 &= \Sigma_m C_m \frac{\sin m(c' - \gamma x)}{\sin m c'} e^{-m^2 t} - \Sigma_n B_n \sin n \gamma y e^{-n^2 t}
\end{aligned}\right\}.$$

Hierin ist $\gamma = \sqrt{\frac{\eta}{\varrho}}$ wieder der Reibungsindex, C_m eine von m, B_n eine von n abhängige Grösse; ferner m und n durch die Gleichungen

$$0 = m^4 + \alpha^4 - 2\beta m^3 (ctg\, m c + ctg\, m c')$$
$$0 = \sin n c \text{ und } 0 = \sin n c'$$

bestimmt, wenn

$$c = \frac{c_2}{\gamma}, \quad c' = \frac{c_3}{\gamma}, \quad \alpha = \sqrt[4]{\frac{\tau}{M}}, \quad \beta = \frac{\pi R^4 \sqrt{\eta \varrho}}{4 M}$$

gesetzt wird; endlich bestimmen sich die B_n und C_m aus dem Anfangszustande $t = 0$, $\varphi_1 = \Phi$, $\psi_1 = \Psi_1$, $\psi_2 = \Psi_2(\gamma x)$, $\psi_3 = \Psi_3(\gamma x)$ in der bekannten Weise als die Integrale:

$$B_n = \frac{2}{c + c'} \left\{ \int_0^c \Psi_2(\gamma x) \sin n \gamma x \, d(\gamma x) - \int_0^{c'} \Psi_3(\gamma x) \sin n \gamma x \, d(\gamma x) \right\}$$

$$\begin{aligned}
C_m = \Bigg[2\beta \Bigg\{ &\int_0^c \Psi_2(\gamma x) \frac{\sin m(c - \gamma x)}{\sin m c} d(\gamma x) \\
&+ \int_0^{c'} \Psi_3(\gamma x) \frac{\sin m(c' - \gamma x)}{\sin m c'} d(\gamma x) \Bigg\} + \Psi_1 + \frac{\alpha^4}{m^2} \Phi \Bigg] \\
&: 2\beta \left(\frac{c}{\sin^2 m c} + \frac{c'}{\sin^2 m c'} \right) - \frac{3\alpha^4}{m^4} + 1.
\end{aligned}$$

Für eine unendliche Ausdehnung der Flüssigkeit lassen sich die Wurzeln m und n ermitteln und somit die Lösungen vollständig angeben. Aber sie sind von so complicirter Gestalt, dass hier darauf verzichtet werden muss, sie mitzutheilen. Es kann jedoch die principielle Bedeutung gerade dieser Untersuchung und ihrer Lösung durch *O. E. Meyer* nicht genug hervorgehoben werden.

§. 49.

Für $\eta = 0$ ergeben die Gleichungen, wie es sein muss, Schwingungen der Scheibe von der constanten Dauer

$$T = \pi \sqrt{\frac{M}{\tau}} = \frac{\pi}{\alpha^2},$$

für die Flüssigkeit aber Ruhe, falls dieselbe anfangs in Ruhe war. Ist *Reibung* vorhanden, aber nur *geringe*, so vereinfachen sich die Gleichungen ebenfalls und bedeutend, und man erhält:

$$T = \frac{\pi}{\alpha^2}\left(1 + k + k^2 - \frac{3}{4} k^3 + \cdots\right),$$

wenn

$$k = \sqrt{2}\,\frac{\beta}{\alpha}$$

ist.

Ferner ist die Verspätung der Phase in der Entfernung x von der Scheibe

$$D = \frac{x}{\alpha}\sqrt{\frac{\varrho}{2\eta}}\left(1 + k + k^2 - \frac{3}{4} k^3 + \cdots\right).$$

Die Schwingungsdauer wird also durch die Reibung vergrössert, und die Fortpflanzung der Schwingungen ist eine um so raschere, je grösser die Reibung ist.

Ferner nimmt die Geschwindigkeit der Flüssigkeitstheilchen mit der Entfernung von der Scheibe nach dem Gesetze einer *geometrischen Reihe* ab, und zwar desto langsamer, je grösser die Reibung ist; sie nimmt ebenso wie die Amplitude auch mit der Zeit nach demselben Gesetze ab.

Der *Exponent* dieser Reihe ist für die Scheibe selbst

$$\varepsilon = \pi k\left(1 - k + \frac{3}{4} k^2 - k^3 + \cdots\right),$$

also, da

$$k = \sqrt{2} \cdot \frac{\beta}{\alpha} = \frac{\pi R^4}{4M} \cdot \sqrt{2\eta\varrho\sqrt{\frac{M}{\tau}}}$$

ist, *mit der 4. Potenz des Scheibenradius* angenähert proportional (wie schon *Coulomb* gefunden hatte), ausserdem aber proportional mit der *Quadratwurzel aus dem Reibungscoefficienten* und der *Quadratwurzel aus der Dichtigkeit der Flüssigkeit.*

Bestimmt man ε durch Beobachtungen, so kann man hieraus k nach der Formel

$$k = \frac{\varepsilon}{\pi} + \left(\frac{\varepsilon}{\pi}\right)^2 + \frac{5}{4}\left(\frac{\varepsilon}{\pi}\right)^3 + \frac{9}{4}\left(\frac{\varepsilon}{\pi}\right)^4 + \cdots$$

und schliesslich aus k auch η selbst ermitteln. Man kann aber k und damit η auch aus der Vergrösserung der Schwingungsdauer

$$\delta = \frac{T - T_0}{T_0}$$

ableiten und findet

$$k = \delta - \delta^2 + \delta^3 - \delta^4 + \cdots.$$

Für Wasser fand *Meyer*[1]), bezogen auf Centimeter und Secunden, $\eta = 0{,}0132$; für Luft ist η, was sehr interessant ist, gar nicht so sehr klein gegen Wasser; es ist etwa der vierzigste Theil.

Das eigenthümliche des hier behandelten Falles in functionaler Beziehung ist dies, dass die Bewegung der Scheibe, so weit sie in Schwingungen besteht, eine einfach periodische mit eindeutig bestimmter Schwingungsdauer ist, gerade wie nach *Meyer's* Rechnung die Schwingungsdauer eines Pendels mit einer Kugel in einer Flüssigkeit eine eindeutig bestimmte ist. Es ist das sehr merkwürdig und durchaus nicht selbstverständlich, wie man zugeben wird, wenn man bedenkt, dass eine Pfeifenröhre sehr verschiedene Töne geben kann. Das in Rede stehende Ergebniss spricht sich analytisch darin aus, dass neben unendlich vielen reellen Lösungen der Gleichungen für m und n, deren Einfluss überdies mit der Zeit rasch verschwindet, *nur zwei complexe Lösungen* existiren.

Das ist, wie *Meyer*[2]) später fand, nicht mehr der Fall, wenn die Flüssigkeit in einem *endlichen Gefässe* eingeschlossen und folglich der Einfluss der inneren Reibung so gross ist, dass er die

---

[1]) *Meyer*, Pogg. Ann. Bd. 113, S. 384. 1861.

[2]) *Meyer*, Crelle's J. Bd. 62, S. 201. 1863.

übrigen Kräfte, welche regelmässige Schwingungen hervorzubringen streben, übertrifft; dann giebt es, je nach den Abständen der Scheibe von den Wänden des Gefässes, mehr als zwei oder gar keine complexe Lösungen, und überdies haben die reellen nicht mehr die Eigenschaft, sehr rasch ohne Einfluss zu werden. Die Bewegung ist folglich in diesen Fällen eine sehr complicirte.

§. 50.

Handelt es sich weniger um theoretische Vollständigkeit und Allgemeinheit, als um den praktischen Zweck der *Ermittelung der Reibungsconstanten* η, so bedient man sich mit Vortheil eines von *Maxwell*[1]) ersonnenen Kunstgriffes, welcher darin besteht, dass über und unter der schwingenden Scheibe je eine ruhende Scheibe angebracht gedacht wird, und dass man sich nun einfach auf die Beantwortung der Frage beschränkt:

Welcher Theil der Verzögerung einer zwischen zwei festen Scheiben schwingenden Scheibe kommt auf Rechnung der Reibung der Flüssigkeit?

Bei gewissen Annahmen kommt man dann, zunächst die Räder unberücksichtigt lassend, auf folgende Bewegungsgleichung für eine Schicht der Flüssigkeit:

$$\varrho \frac{d^2 \varphi}{d t^2} = \eta \frac{d^3 \varphi}{d x^2 \, d t},$$

wo φ derjenige Winkel ist, welcher die augenblickliche Lage der Schicht bestimmt. Da in dieser Gleichung r, der Abstand von der Drehungsaxe, gar nicht vorkommt, so folgt, dass sich die Schicht als ein Ganzes bewegt. Die Lösung ist:

$$\varphi = e^{-\lambda t} \left[e^{p x} \cos (n t + q x) - e^{-p x} \cos (n t - q x) \right],$$

wo zu setzen ist:

$$2 p q = \frac{\varrho n}{\eta}, \quad p^2 - q^2 = \frac{\varrho \lambda}{\eta},$$

und wo λ das beobachtete logarithmische Decrement der Scheibe ist. Der auf die innere Reibung kommende Theil k ist bestimmt durch die Gleichung

---

[1]) *Maxwell*, Phil. Trans. of the R. Soc. London 1866, p. 249.

$$2Mb(\lambda - k) = M_1 \eta \Big[1 - \frac{1}{3} c\lambda + \frac{1}{6} c^2 (n^2 - 3\lambda^2) + \frac{1}{7} \cdot \frac{2}{3} c^3 (n^2 \lambda - \lambda^3)$$
$$+ \frac{1}{10} c^4 \left(\frac{7}{16} n^4 + \frac{215}{16} n^2 \lambda^2 - \frac{145}{4} \lambda^4\right)\Big],$$

in welcher M das Trägheitsmoment der schwingenden Scheibe, M_1 das Trägheitsmoment der der Reibung ausgesetzten Oberflächen, b der Abstand einer festen von der schwingenden Scheibe und

$$c = \frac{4b^2 \varrho}{\eta}$$

ist.

Es ist noch übrig, die Correction wegen der scharfen Ränder anzubringen, und gerade das macht im Allgemeinen erhebliche analytische Schwierigkeiten; *Maxwell* hat sich daher nur mit dem Falle einer sehr grossen Scheibe beschäftigt, bei der die Krümmung des Randes sehr klein und die Schwingungsdauer gross ist. In diesem Falle findet man als Linien gleicher Tangentialgeschwindigkeit w Hyperbeln mit den Radienvectoren r_1 und r_2 und als Geschwindigkeit selbst

$$w = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{1}{\sin \frac{r_1 - r_2}{2}}.$$

Im Anschlusse hieran ergiebt sich, dass bei einer unendlich dünnen Scheibe die Ecke nicht einflusslos wird, sondern denselben Einfluss hat, als ob die Scheibe um einen Ringstreifen von der Breite $\frac{2b}{\pi} lg\, 2$ grösser wäre und auf den Rand keine Rücksicht genommen würde.

Bei einer Scheibe von endlicher Dicke 2β muss man mehr hinzufügen, nämlich

$$\frac{2b}{\pi} lg_e 10 \left(log_{10} 2 + log_{10} \sin \frac{\pi(b-\beta)}{2b}\right).$$

Noch erheblich complicirter gestalten sich die Rechnungen, bei welchen die *äussere Reibung E* als endliche Grösse in Betracht kommt, und welche einerseits zu den Gesetzen des Einflusses dieser äusseren Reibung auf die Bewegung der flüssigen und festen Körper, andererseits zur Bestimmung der Constante E der äusseren Reibung führen.

Bei der vollständigen principiellen Analogie dieser Untersuchungen mit den oben durchgeführten genügt es aber, auf die Arbeiten von *Meyer* [1]), welcher sich namentlich hiermit beschäftigt hat, hinzuweisen.

§. 51.

In neuester Zeit hat *Oberbeck* [2]) ohne Rücksicht auf die Schwere nach einer sehr allgemeinen Methode *die stationäre Bewegung einer reibenden Flüssigkeit bestimmt, in welcher ein Ellipsoid sich befindet;* diese Aufgabe enthält zugleich diejenige, welche sich auf *die Bewegung eines Ellipsoids in einer reibenden Flüssigkeit* bezieht.

Der Ausgangspunkt jener Methode ist die Erwägung, dass, wenn man eine Aufgabe der Hydrodynamik mit Vernachlässigung der Reibung gelöst hat, nur nöthig hat, die *elementaren Rotationen*, d. h. die Wirbelbewegungen, hinzuzufügen, um die Reibung vollständig zu berücksichtigen.

Freilich hat diese Methode den einen Uebelstand, dass die Geschwindigkeiten, d. h. die Bewegung, sich nicht unmittelbar in ihrer Abhängigkeit von der Grösse der Reibung ergiebt.

Nehmen wir zunächst an, es befinde sich in der Flüssigkeit eine Kugel mit ihrem Mittelpunkte im Anfangspunkte der Coordinaten, so ist bei Vernachlässigung der Reibung die Bewegung durch das Geschwindigkeitspotential

$$\varphi = \sum_0^\infty \alpha_n \left(r^n + \frac{n}{n+1} \frac{R^{2n+1}}{r^{n+1}} \right) K_n = \sum_0^\infty R_n P_n$$

bestimmt, wo R der Radius der Kugel,

$$R_n = 1 + \frac{n}{n+1} \cdot \frac{R^{2n+1}}{r^{2n+1}}, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

und P_n die räumliche Kugelfunction n^{ter} Ordnung ist.

Um nun die Reibung zu berücksichtigen, braucht man nur für jede Geschwindigkeitscomponente zu dem von φ abhängigen Gliede

---

[1]) *O. E. Meyer:* De mutua duorum fluidorum frictione. Regiomonti Pruss. 1860. Crelle's J. Bd. 59, S. 283.

[2]) *Oberbeck*, Crelle's J. Bd. 81, S. 22.

diejenigen beiden Glieder hinzuzufügen, welche von den in dem Abschnitte über Wirbelbewegungen eingeführten, durch die Gleichungen (45 a) auf S. 98 bestimmten Functionen L, M, N abhängen.

Nimmt man schliesslich an, dass die Flüssigkeit an der Kugel hafte, dass also

$$u = v = w = 0 \text{ für } r = R$$

sei, so findet man:

$$\left.\begin{aligned}
u &= \sum_0^\infty \left[\frac{\partial P_n}{\partial x}\left((n+1) S_n + r\frac{d S_n}{d r} - R_n\right) - \frac{x}{r} P_n \frac{d}{d r}\left(R_n + n S_n\right)\right] \\
v &= \sum_0^\infty \left[\frac{\partial P_n}{\partial y}\left((n+1) S_n + r\frac{d S_n}{d r} - R_n\right) - \frac{y}{r} P_n \frac{d}{d r}\left(R_n + n S_n\right)\right] \\
w &= \sum_0^\infty \left[\frac{\partial P_n}{\partial z}\left((n+1) S_n + r\frac{d S_n}{d r} - R_n\right) - \frac{z}{r} P_n \frac{d}{d r}\left(R_n + n S_n\right)\right]
\end{aligned}\right\},$$

wo zur Abkürzung

$$S_n = \frac{1}{2}\,\frac{2n+1}{n+1} \cdot \frac{R^{2n-1}}{r^{2n-1}}\left(1 - \frac{R^2}{r^2}\right)$$

gesetzt worden ist. Die Wirbelcomponenten ferner sind durch die Gleichungen

$$\xi = z\frac{\partial f}{\partial y} - y\frac{\partial f}{\partial z},\quad \eta = x\frac{\partial f}{\partial z} - z\frac{\partial f}{\partial x},\quad \zeta = y\frac{\partial f}{\partial x} - x\frac{\partial f}{\partial y}$$

gegeben, in welchen

$$f = \sum_0^\infty \frac{2n+1}{n+1} \cdot (2n-1)\frac{R^{2n-1}}{r^{2n+1}} P_n$$

ist, und endlich ist der Druck

$$p = -\eta n f.$$

Besonders einfach werden die Formeln bei der Annahme, dass in der Unendlichkeit die Flüssigkeit überall in der Richtung der x-Axe mit der Geschwindigkeit g ströme:

$$\left.\begin{aligned}
u &= g\left(1 - \frac{3}{4}\frac{R}{r} - \frac{1}{4}\frac{R^3}{r^3}\right) - \frac{3g}{4}\frac{R}{r^3}\left(1 - \frac{R^2}{r^2}\right)x^2 \\
v &= -\frac{3}{4} g \frac{R}{r^3}\left(1 - \frac{R^2}{r^2}\right) x y,\quad w = -\frac{3}{4} g \frac{R}{r^3}\left(1 - \frac{R^2}{r^2}\right) x^2
\end{aligned}\right\}$$

$$p = \frac{3}{2} g \eta \frac{R}{r^3} x$$

$$\xi = 0,\quad \eta = \frac{3}{2} g \frac{R}{r^3} z,\quad \zeta = -\frac{3}{2} g \frac{R}{r^3} y.$$

Unter derselben Voraussetzung ergiebt sich dann in ähnlicher Weise für die stationäre Bewegung eines Ellipsoids:

$$\left.\begin{aligned} u &= g\left[1+\frac{1}{Q_0-Aa^3}\left(x\frac{\partial Q}{\partial x}-Q+a^2\frac{\partial^2 P}{\partial x^2}\right)\right] \\ v &= \frac{g}{Q_0-Aa^3}\left(x\frac{\partial Q}{\partial y}+a^2\frac{\partial^2 P}{\partial x\,\partial y}\right) \\ w &= \frac{g}{Q_0-Aa^3}\left(x\frac{\partial Q}{\partial z}+a^2\frac{\partial^2 P}{\partial x\,\partial z}\right) \end{aligned}\right\},$$

wo P das Massenpotential des gleichmässig mit der Dichtigkeit eins erfüllten Ellipsoids, Q_0 das constante Oberflächenpotential für einen inneren Punkt und Q das variable für einen äusseren Punkt, endlich A die Anziehungskraft des Ellipsoids auf den Endpunkt der grossen Axe a ist, sämmtlich Grössen, welche durch bekannte bestimmte Integrale ausgedrückt sind. Der Gesammtdruck auf das Ellipsoid aber ist

$$D = \frac{8\pi\eta g E}{Q_0-Aa^3},$$

wo E das über die ganze Oberfläche des Ellipsoids genommene Integral

$$E = \int \frac{dw}{\sqrt{\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}}}$$

bedeutet. Für ein verlängertes Rotationsellipsoid ($b = c$) sind alle Grössen leicht auszurechnen und finden sich:

$$E = 4\pi a b^2,\quad Q_0 = \frac{2\pi a b^2}{e}\, lg\,\frac{a+e}{a-e},\quad A = \frac{4\pi a b^2}{e^3}\left(\frac{1}{2}\, lg\,\frac{a+e}{a-e}-\frac{e}{a}\right),$$

wo zur Abkürzung

$$\sqrt{a^2-b^2} = e$$

gesetzt wurde.

§. 52.

Ebenfalls durch Beobachtungen *Bessel's* (gerade wie im Falle des §. 46) wurde die Aufmerksamkeit der Theoretiker auf das Problem der *Schwingungen einer Pendelkugel* gelenkt, *deren Hohlraum von einer reibenden Flüssigkeit* erfüllt ist. Die Theorie der *drehenden* Schwingungen einer solchen Hohlkugel hat *Helmholtz*, die Theorie der *Pendelschwingungen Lübeck* in Rechnung gezogen.

In dem ersten, von *Helmholtz* [1]) behandelten Falle ergiebt sich für kleine Schwingungen die Winkelgeschwindigkeit

$$\psi = \frac{A\sqrt{m}}{\sqrt{\eta}\,.\,r^2}\left[e^{\tau r - \beta t}\cos(\sigma r + \gamma t + \varepsilon) + e^{-\tau r - \beta t}\cos(\sigma r - \gamma t - \varepsilon)\right]$$
$$- \frac{A}{r^3}\left[e^{\tau r - \beta t}\cos(\sigma r + \gamma t) - e^{-\tau r - \beta t}\cos(\sigma r - \gamma t)\right].$$

Hierin bedeutet r die Entfernung vom Mittelpunkte der Kugel, t die Zeit, $\frac{2\pi}{\gamma} = T$ die Schwingungsdauer, β den Exponent der durch die Amplituden gebildeten geometrischen Reihe, ferner ist

$$\varepsilon = \frac{1}{2}\,arc\,tg\left(-\frac{\gamma}{\beta}\right),\quad m = \sqrt{\beta^2 + \gamma^2},\quad \tau = \sqrt{\frac{m}{\eta}}\cos\varepsilon,$$
$$\sigma = \sqrt{\frac{m}{\eta}}\sin\varepsilon;$$

endlich ist A eine Constante. Die ganze Bewegung kann man sich hiernach so vorstellen, dass von der inneren Oberfläche der festen Hohlkugel aus Rotationswellen nach innen verlaufen, aber mit schnell abnehmender Intensität, und im Mittelpunkte reflectirt wieder zurückkehren.

Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit dieser Wellen ist

$$V = \frac{\gamma}{\sigma} = \frac{2\pi}{T\sin\varepsilon}\sqrt{\frac{\eta}{m}}$$

oder, wenn die Schwingungen der Oberfläche constante Amplituden behalten, also $\beta = 0$ ist,

$$V = 2\sqrt{\frac{\pi\eta}{T}}.$$

Die Wellenlänge ist

$$\lambda = 2\sqrt{\pi\eta T},$$

also der Quadratwurzel aus der Schwingungsdauer proportional, nicht, wie bei den Licht- und Schallwellen, dieser selbst. Ferner ist die Wellenlänge desto grösser, je grösser die Reibung ist, und

---

[1]) *Helmholtz*, Wien. Sitz. Ber. Bd. 40 (2), S. 631. 1860.

auf desto grössere Strecken pflanzt sich daher die Bewegung der Flüssigkeit merklich fort.

Die Bewegung der Kugel selbst endlich, welcher die durch ψ dargestellte Flüssigkeitsbewegung entspricht, ist durch

$$\Psi = B e^{-\beta t} (\sigma R + \gamma t + \varepsilon + \delta + w)$$

bestimmt, wenn $C\, C_1\, \delta\, \delta_1$ Functionen des Radius R der Kugel sind, und zur Abkürzung

$$tg\, w = \frac{\eta_1 C_1 \sin(\varepsilon + \delta_1 - \delta)}{C + \eta_1 C_1 \cos(\varepsilon + \delta_1 - \delta)}, \quad B = \frac{C \sin(\varepsilon + \delta_1 - \delta)}{\sin(\varepsilon + \delta_1 - \delta - w)}$$

gesetzt wird. Einige Schwierigkeit macht noch die Bestimmung der Grössen $C\, C_1\, \delta\, \delta_1$, wenigstens bei strenger Rechnung; ferner die Elimination des Trägheitsmomentes des Apparates, welches bei der Berechnung von Versuchen in die Formeln eingeht, und die Berücksichtigung des äusseren Fluidums. Schliesslich erhält man näherungsweise, wenn J die aus den Versuchen leicht zu ermittelnde Grösse

$$J = \frac{\eta C_1}{C \sin(\varepsilon + \delta_1 - \delta)}$$

und (η) den bei Vernachlässigung von δ und δ_1 gefundenen Werth von η bezeichnet:

$$tg\, \delta = \sqrt{\frac{(\eta)}{m}} \sin \varepsilon, \; tg\, (\varepsilon + \delta_1 - \delta) = \frac{tg\, (\varepsilon - \delta)}{1 - \frac{3 \sin \delta \sin \varepsilon}{\cos(\varepsilon - \delta) \sin^2(\varepsilon + \delta)}},$$

und hieraus den genauen Werth

$$\eta = \left(J \frac{\sin \varepsilon \sin^2(\varepsilon + \delta_1 - \delta)}{\sqrt{m} \sin(\varepsilon - \delta) \sin(\varepsilon + \delta)}\right)^2,$$

ähnlich für die Constante der äusseren Reibung

$$E = \frac{\eta \sin w}{J \sin(\varepsilon + \delta_1 - \delta - w) \sin(\varepsilon + \delta_1 - \delta)}.$$

Will man noch genauere Werthe haben, so muss man noch einmal aus η die Grössen δ und δ_1 berechnen, und hieraus wieder η. Das ist aber nur bei sehr grosser Reibung erforderlich.

Auf diese Weise ergiebt sich nach den Versuchen von *v. Piotrowski* [1]) ein ebenfalls etwas von den übrigen abweichender Werth der Reibungsconstante für Wasser.

---

[1]) *v. Piotrowski*, Wien. Sitz. Ber. 40 (2), S. 607. 1860.

Andererseits hat *Lübeck*[1]) die unendlich kleinen *Pendelschwingungen einer mit reibender Flüssigkeit gefüllten Hohlkugel* behandelt, und zwar durch Zusammensetzung aus einer geradlinigen Hin- und Herbewegung und einer Oscillation um eine Axe, welche auf der durch die geradlinige Bewegungsrichtung und die Richtung der Schwere bestimmten Ebene senkrecht steht.

Die Formeln sind natürlich denen von *Helmholtz*, sowie auch den für eine Vollkugel giltigen, von *Lampe* abgeleiteten und oben erwähnten analog, wenn sich auch der Verfasser zu ihrer Ableitung und Darstellung etwas abweichender Functionen bedient, um beide Bewegungscomponenten in ähnlichen Formen zu erhalten.

Für den ersten Theil der Bewegung ergiebt sich der Satz, dass sich die Flüssigkeit im Innern, soweit es sich um die Bewegung handelt, wie ein fester Körper verhält; nur äussert sich ihre Trägheit dadurch, dass der Druck an der Wandung der der Gleichgewichtslage abgewandten Hälfte der Hohlkugel grösser ist, als derjenige auf der entgegengesetzten Seite. Dagegen veranlasst der zweite Theil der Bewegung, die Oscillationen um die zur Schwingungsebene senkrechte Richtung, die Flüssigkeit zu analogen Oscillationen von einer Amplitude und Phase, welche ausschliesslich von der Entfernung vom Mittelpunkte abhängt. Beide Bewegungen zusammengenommen, ergiebt sich, dass die Schwingungsdauer des Pendels grösser ist, als wenn eine nicht reibende Flüssigkeit im Hohlraume enthalten wäre; dagegen bleibt es zweifelhaft, ob sie auch grösser ist als diejenige eines Pendels mit einer Vollkugel von gleicher Masse; in den meisten Fällen wird sie im Gegentheil kleiner sein. Eine etwaige Anfangsbewegung der Flüssigkeit wird durch die Pendelbewegung bald vernichtet. Bei sehr grossen Pendellängen endlich macht sich der Einfluss der Reibung so gut wie gar nicht geltend.

§. 53.

Das letzte Problem, welches aus Anlass seiner Bedeutung für den Fortschritt der theoretischen Hydrodynamik hier betrachtet

---

[1]) *Lübeck*, Ueber den Einfluss einer reibenden Flüssigkeit im Hohlraume einer Pendelkugel etc. Berlin 1873. Crelle's J. Bd. 77, S. 1.

werden muss, welches aber andererseits auch für die Praxis von der denkbar grössten Wichtigkeit ist, bezieht sich auf die *Strömung reibender Flüssigkeiten durch cylindrische Röhren.* Das empirische Grundgesetz dieser Strömungen wurde, wenigstens für enge Röhren von kreisförmigem Querschnitte, bekanntlich von *Poiseuille* [1]) aufgestellt. Es sagt aus, dass die in der Zeiteinheit aus einer engen Röhre ausfliessende Wassermasse dem Druckunterschiede an den beiden Enden der Röhre und der vierten Potenz des Radius direct, dagegen der Länge der Röhre umgekehrt proportional sei. Die Theorie ist später von verschiedenen Forschern, namentlich von *Neumann* [2]), *Helmholtz* [3]), *Stefan*, *Oberbeck*, *Boussinesq*, *Meyer* u. A., bearbeitet worden. Ist die Bewegung stationär und wirken keine Kräfte, so ergeben die Gleichungen der Reibung für die Geschwindigkeit u, welche der Axe x der Röhre parallel sei:

$$u = \frac{(p_0 - p_1)}{\varrho l}\left(\frac{R^2 - r^2}{4\eta} + \frac{R}{2E}\right),$$

wo p_1 und p_0 die beiden Drucke an den Enden der Röhre, R ihren Radius, r die Entfernung von der Axe und l die Länge bedeutet. Durch Integration erhält man hieraus die der Beobachtung zugängliche Ausflussmenge

$$Q = 2\pi\varrho\int_0^R u\,r\,dr = \frac{\pi(p_0 - p_1)}{2l}\left(\frac{R^4}{4\eta} + \frac{R^3}{E}\right),$$

d. h. das *Poiseuille*'sche Gesetz gilt nur bei unendlich grosser Reibung E der Flüssigkeit an der Wand der Röhre, d. h. für den Fall der Benetzung. Auch der aus derartigen Versuchen für Wasser sich ergebende Werth von η weicht von den übrigen einigermaassen ab; es muss aber erwogen werden, wie verschiedenartig alle diese Methoden sind und wieviel Vernachlässigungen gemacht wurden. Aus der obigen Gleichung lässt sich aber bei geeigneter Wahl von R und des Materials der Röhre auch E berechnen, falls dasselbe endlich ist; für Kupfer hat *Girard* diesen Gedanken ausgeführt.

Für das Innere der Röhre gelten, wie *Stefan* [4]) hervorhebt, die folgenden Sätze:

---

[1]) *Poiseuille*, Mem. des Sav. Etr. T. 9, p. 523, 1847. Ann. de Ch. et Phys. T. 21.

[2]) *Neumann*, nach *Jacobson*, Arch. f. Anat. u. Phys. 1860, S. 80, 1861, S. 304.

[3]) *Helmholtz*, Wien. Sitz. Ber. Bd. 40, S. 631, 1860.

[4]) *Stefan*, Wien. Sitz. Ber. Bd. 46.

1) *Die Geschwindigkeit ist nach der ganzen Länge der Röhre für jeden zu ihrer Axe parallelen Faden constant.* Es ist dies einfach der Ausdruck für das Bestehen der Continuitätsgleichung in ihrer durch die Reibung unveränderten Gestalt.

2) *Der Druck ist in einem und demselben Querschnitte der Röhre constant.* Dieser Satz gilt auch dann, wenn in der Längsrichtung der Röhre eine äussere Kraft wirkt.

3) *Die Geschwindigkeit ändert sich von der Axe nach der Wand hin, nach dem Gesetze einer Parabel.*

4) *Der Druck ändert sich längs der Axe nach dem Gesetze einer geraden Linie, falls die in der Richtung der Axe wirkende Kraft constant ist.*

Diese Gesetze zeigen eine interessante Reciprocität zwischen Druck und Geschwindigkeit.

Nach der obigen Formel stellt das *Poiseuille'sche Gesetz* nur einen extremen Fall eines allgemeineren dar, nämlich den, wo E gegen η sehr gross ist. Nimmt man umgekehrt E als sehr klein gegen η an, so gilt das *Poiseuille*'sche Gesetz zwar noch in Bezug auf Länge der Röhre und Druckdifferenz an ihren Enden; aber jetzt ist die Ausflussmenge nicht der vierten, sondern nur noch der dritten Potenz des Radius der Röhre proportional, und ferner ist sie nicht wie dort der inneren Reibung oder Zähigkeit der Flüssigkeit, sondern der äusseren Reibung zwischen dieser und der Gewandung des Gefässes umgekehrt proportional. Mit jeder Bewegung einer reibenden Flüssigkeit sind Wirbel verknüpft; so auch hier. Und zwar liegen die Wirbelaxen in den Querschnittskreisen und stehen auf den Radien derselben senkrecht. Der Sinn der Drehung ist der, dass die der Axe zugewandten Seiten der Theilchen in der Richtung der Strömung sich bewegen, die abgewandten Seiten dagegen dieser Richtung entgegen. Die Geschwindigkeit der Wirbelbewegung ist der Druckhöhe und der Entfernung der Theilchen von der Axe direct, der Röhrenlänge umgekehrt proportional. Sie ist nach einer interessanten Zahlenrechnung von *Stefan* unter mittleren Verhältnissen sehr gross; es erfolgen nämlich in der Secunde einige hundert oder gar einige tausend Umdrehungen.

Wenn die Flüssigkeit ausser ihrer Strömung noch eine Gesammtumdrehung um die Axe der Röhre aufweist, so wird die Untersuchung verwickelter; es gelten aber, wie *Stefan* gezeigt, auch dann noch die obigen Sätze mit Ausnahme des dritten, und auch die Ausflussmenge wird durch die Rotation nicht beeinflusst.

Unabhängig von seinen Vorgängern und, wie es scheint, ohne deren Arbeiten zu kennen, hat *Boussinesq*[1]) die allgemeine Theorie des vorliegenden Problems in einer sehr interessanten Abhandlung ausgeführt, und dieselbe auf die vor ihm noch nicht betrachteten Fälle eines elliptischen und eines rechteckigen Querschnitts angewendet. Im ersten Falle ist für stationäre Bewegung die Geschwindigkeit

$$u = C \cdot \frac{b^2 c^2}{b^2 + c^2} \left(1 - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2}\right) \text{ (}2\,b\text{ und }2\,c\text{ die Axen)},$$

wo C eine von der Reibung in leicht ersichtlicher Weise abhängige Constante ist, und folglich die Ausflussmenge

$$Q = \int\int u\, dy\, dz = C \cdot \frac{\pi b c}{2} \frac{b^2 c^2}{b^2 + c^2} = 0{,}0796 \frac{2\, C\, \sigma^2}{\frac{b}{c} + \frac{c}{b}},$$

wenn $\sigma = \pi b c$ die Fläche des Querschnitts ist; für $b = c = R$ erhält man hieraus, wie es sein muss, Proportionalität von Q mit R^4. Für rechteckigen Querschnitt wird, wenn man

$$k = (2\,k' + 1)\frac{\pi}{2}$$

setzt und unter k' eine ganze Zahl versteht ($2\,b$ und $2\,c$ die Kanten),

$$u = C \cdot \frac{b^2 c^2}{b^2 + c^2} \left\{ 1 - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} + 2 \sum_{k'=0}^{k'=\infty} \pm \frac{1}{k}\left(1 - \frac{2}{k^2}\right) \right.$$
$$\left. \left[\frac{e^{k\frac{z}{b}} + e^{-k\frac{z}{b}}}{e^{k\frac{c}{b}} + e^{-k\frac{c}{b}}} \cos k \frac{y}{b} + \frac{e^{k\frac{y}{c}} + e^{-k\frac{y}{c}}}{e^{k\frac{b}{c}} + e^{-k\frac{b}{c}}} \cos k \frac{z}{c} \right] \right\}$$

und folglich, wenn man zur Abkürzung

$$\alpha = \frac{1}{8} \left\{ \frac{1}{3} + 2 \sum_{k'=0}^{k'=\infty} \frac{1}{k^3}\left(1 - \frac{2}{k^2}\right) \left[\frac{b}{c} \frac{e^{k\frac{c}{b}} - e^{-k\frac{c}{b}}}{e^{k\frac{c}{b}} + e^{-k\frac{c}{b}}} + \frac{c}{b} \frac{e^{k\frac{b}{c}} - e^{-k\frac{b}{c}}}{e^{k\frac{b}{c}} + e^{-k\frac{b}{c}}} \right] \right\}$$

setzt, die Ausflussmenge

[1]) *Boussinesq*, *Lionville*, J. d. Math., T. 13, S. 395. 1868.

$$Q = 32\,\alpha\,C\,b\,c \cdot \frac{b^2 c^2}{b^2 + c^2} = 2\,\alpha\,C \cdot \frac{\sigma^2}{\frac{b}{c} + \frac{c}{b}},$$

wenn $\sigma = 4\,b\,c$ wieder den Querschnitt bedeutet. Für α erhält man leicht eine angenäherte Reihenentwickelung; für $b = c$ ergiebt dieselbe $\alpha = 0{,}0703$; je gestreckter das Rechteck ist, desto grösser wird α; für $b = 12\,c$ etwa wird $\alpha = 0{,}08$, also so gross wie bei dem elliptischen Querschnitt; für $\frac{b}{c} = \infty$ endlich ist $\alpha = 0{,}0833\ldots = \frac{1}{12}$.

Boussinesq [1]) hat unter Anderem auch den Fall *einer in sich zurückkehrenden Röhre* oder eines ebensolchen Canals betrachtet. Den Fall der *Verzweigung der Röhren* haben *Jacobson* [2]) und *Rostalski* [3]) untersucht; die Formeln, welche hier gelten, haben eine fast vollständige Analogie mit denen, welche die Verzweigung stationärer elektrischer Ströme darstellen.

In allerneuester Zeit wendet sich die Aufmerksamkeit der Analytiker mehr und mehr dem Studium der Bewegung zäher, d. h. reibender Flüssigkeiten zu; Zeugniss hierfür legen unter Anderen die Arbeiten von *Butcher* [4]), *Briggs* [5]), *Graetz* [6]) und *Stearn* [7]) ab, der Hinweis auf welche unsere Betrachtungen schliessen möge.

---

[1]) *Boussinesq*, l. c. p. 413.

[2]) *Jacobson*, Arch. f. Anat. u. Phys. 1860, S. 100.

[3]) *Rostalski*, Ueb. d. Erweiterung der Pois. Ges. für verzweigte Capillarröhren. Breslau 1878.

[4]) *Butcher*, Proc. of the London Math. Soc. Vol. 8.

[5]) *Briggs*, Proc. of the Am. Phil. Soc. Vol. 17, p. 124.

[6]) *Graetz*, Schlömilch's Zeitschr. f. Math. u. Phys. Bd. 24.

[7]) *Stearn*, Quart. J. of Math. Vol. 17, p. 90. 1880.

Schluss.

§. 54.

Erschiene es angebracht, im Gebiete der exacten und positiven Wissenschaften dieselbe kritische Methode anzuwenden, wie im Gebiete der Geisteswissenschaften, und wäre die hier gegebene Skizze der Entwickelung der Hydrodynamik in den letzten Jahrzehnten nichts weiter als eine Darstellung der Leistungen, so wäre mit ihr erst das Material gegeben, und die eigentliche Untersuchung hätte nunmehr zu beginnen. Aber nach der Ansicht des Verfassers ist gerade dies ein unschätzbarer Vorzug der exacten Wissenschaften, dass bei ihnen Darstellung und Kritik in Eins zusammenfallen können und sollen. Die Gedanken, welche im Gebiete der reinen und angewandten Mathematik gefasst und ausgeführt werden, tragen, sobald sie in das Gebäude der ihnen zugehörigen übrigen Ideen eingeordnet werden, den Stempel ihres Werthes oder Unwerthes, ihrer Bedeutung oder Bedeutungslosigkeit, ihrer Fruchtbarkeit oder Unfruchtbarkeit auf der eigenen Stirn. Und so musste auch die hier versuchte Darstellung der Fortschritte der Lehre von der Bewegung der Flüssigkeiten Selbstkritik werden. In der That, das, was des Verfehlten oder Unfruchtbaren in diesem Gebiete gedacht worden ist, konnte in der Darstellung keine Stelle finden, wenigstens im Allgemeinen nicht, weil sich weder eine Gelegenheit der völlig harmonischen Anknüpfung noch eine solche des Ueberganges zu dem Folgenden geboten hätte. Die klaren und fruchtbaren Ideen andererseits konnten gar nicht unberücksichtigt bleiben, und ihre mehr oder minder vollkommene Ausführung musste überall in der ihr gebührenden Weise gegeben und hinsichtlich ihres principiellen Werthes geschätzt werden, weil ohne dies die Fortführung des Fadens unmöglich gewesen wäre.

Was insbesondere die fundamentalen Fortschritte betrifft, welche in dem in Rede stehenden Gebiete in den letzten vierzig Jahren gemacht worden sind, so kennzeichnen sich dieselben, und darauf wurde oben mehrfach hingewiesen, in bestimmterer und einfacherer Weise, als vielleicht in irgend einem anderen Gebiete. Allem Uebrigen voran steht Folgendes: Erstens die Würdigung der zweiten *Euler*'schen Form der Bewegungsgleichungen, der sogenannten *Lagrange*'schen, durch *Dirichlet* und ihre Anwendung zur Erschliessung eines Gebietes, welches nicht lange vorher ein sonst so tiefer Forscher wie *Navier* für unzugänglich erklärt hatte; zweitens, in naturgemässer Fortführung der *Dirichlet*'schen Idee, das Verständniss für die Bedeutung des fundamentalsten aller mechanischen Principien, des *Hamilton*'schen Princips, auch im Gebiete der Hydrodynamik; ein Verständniss, welches von *Clebsch* und *Hankel* angebahnt, von *Thomson* und *Tait* und von *Kirchhoff* verwerthet und schliesslich von *Boltzmann* zur völligen Klarheit gebracht wurde. Der dritte epochenmachende Schritt betrifft die Zerlegung der Flüssigkeitsbewegung, und im Zusammenhange hiermit die Entdeckung der Wirbelbewegung im mathematischen Sinne des Wortes durch *Helmholtz*, *Thomson* und *Beltrami*. Unabhängig hiervon endlich vollzog sich die Integration der Reibungsgleichungen durch *Stokes* und *Meyer*.

Alle diese Fortschritte stehen auf dem Boden einer Hypothese, welche der gesammten hier gegebenen Darstellung stillschweigend zu Grunde gelegt ist. Es ist eine Hypothese über die Natur der Materie, und zwar diejenige, welche dem Augenscheine und dem Vorstellungsvermögen am nächsten kommt, und welche gleichzeitig im Stande ist, die meisten Erscheinungen in befriedigender Weise darzustellen, *die Hypothese, dass die Materie den Raum stetig erfüllt.* Freilich, alle Erscheinungen vollständig beschreiben zu können, davon ist diese Hypothese weit entfernt. Es ist ihr daher auch in diesem Gebiete wie überall sonst eine andere Hypothese gegenübergestellt worden, welche fast so alt ist wie das wissenschaftliche Denken überhaupt, und welche als die *Molecularhypothese* bezeichnet wird. In der obigen Darstellung ist auf die Arbeiten, welche sich im Hinblick auf die Bewegung der incompressiblen Flüssigkeiten neuerdings mit dieser Hypothese beschäftigt haben, nicht eingegangen worden, weil sie in ihrer Gesammtheit einen wesentlichen Fortschritt der Wissenschaft vorläufig nicht bezeichnen.

Auf einem anderen Gebiete, nämlich in der Theorie der Bewegung der *compressiblen* Flüssigkeiten oder Gase, verhält es sich bekanntlich ganz anders. Es sind hier nicht nur die Bewegungsgleichungen, trotz der Complication, welche bei Zugrundelegung der Molecularhypothese eintritt, aufgestellt worden, sondern man hat sie auch zur Entscheidung wichtiger Fragen mit Erfolg angewendet.

Aber gerade in der Stellung, welche die verschiedenen Aggregatzustände angewiesen erhalten, liegt der Hauptunterschied beider Hypothesen.

Während nämlich die Hypothese von der Stetigkeit der Materie hauptsächlich zwei Classen von materiellen Systemen einander gegenüberstellt, die *festen* und die *flüssigen*, und nun erst die letzteren wiederum in tropfbare und gasförmige Flüssigkeiten gliedert, so stehen bei Annahme der Molecularhypothese die *Gase* allen übrigen Systemen durch die Einfachheit ihrer Constitution gegenüber, während die tropfbaren Flüssigkeiten denselben Complicationen unterworfen sind wie die festen Körper, zwischen welchen und den Gasen sie vielleicht in Wahrheit nur einen Uebergangszustand darstellen.

Es möge in dieser Beziehung kurz auf die Arbeiten von *Potter*, *M. Levy* und namentlich von *van der Waals* aufmerksam gemacht werden [1]).

Insbesondere zeigt sich die Unzulänglichkeit der Stetigkeitshypothese in der Theorie der Wirbelbewegung und in der Theorie der inneren Reibung.

Was die erstere betrifft, so bleibt es, wie *Stefan* mit Recht hervorhebt, völlig unentschieden, wie gross denn die wirbelnden Theilchen sind, und es *muss* dies bei der rein kinematischen Einführung der Wirbelbewegungen durch Wirbellinien und Wirbelfäden unbestimmt bleiben.

Die Zähigkeit der Flüssigkeiten andererseits legt, wenn man sie als innere Reibung, wie oben geschehen, auffasst — und

---

[1]) Ganz neuerdings beschäftigt sich mit dieser Frage *Cantoni* (vgl. Il nuovo Cimento (3) 6, S. 277 u. a. a. O.).

dafür spricht die Gesammtheit der bezüglichen Erscheinungen — den Gedanken an die Zusammensetzung der Flüssigkeit aus Molekeln, schon im Hinblicke auf die Analogie mit der äusseren Reibung in unmittelbare Nähe.

So muss es denn schliesslich als die wichtigste Aufgabe der nächsten Zukunft bezeichnet werden, die Erscheinungen der Wirbelbewegungen sowie der übrigen Componenten der Fluiditätsbewegung in reibenden Flüssigkeiten unter Berücksichtigung insbesondere der Frage zu studiren, inwieweit die Molecularhypothese zu ihrer Darstellung geeigneter sei als die Stetigkeitshypothese, und ob die erstere einen Aufschluss darüber gebe, welches denn die reibenden und welches die wirbelnden Theilchen seien, ob Atome und Molekeln oder nur diese letzteren oder endlich, was aus vielen Gründen nicht unwahrscheinlich wäre, sogar ganze Gruppen von Molekeln. Zur Lösung dieser Frage wird es sich besonders darum handeln, eine geeignete Hypothese über die Natur und über die Bewegung der Molekeln der tropfbaren Flüssigkeiten aufzustellen und zur Ableitung der Bewegungsgleichungen zu verwerthen.

Bedenkt man aber, welche Schwierigkeiten die entsprechende Aufgabe schon bei den ungleich einfacher constituirten Gasen gemacht hat, so wird man die Lösung dieses Problems in nicht allzukurzer Frist erwarten dürfen.