

Jerzy Wicher, Stefan Ziemba
**WYZNACZANIE CHARAKTERYSTYK
DYNAMICZNYCH UKŁADÓW
ZNAJDUJĄCYCH SIĘ POD WPLYWEM
WYMUSZEŃ LOSOWYCH**

18/1967

WARSZAWA



NA PRAWACH RĘKOPISU
DO UŻYTKU WEWNĘTRZNEGO

Zakład Teorii Konstrukcji Maszyn IPPT PAN
Nakład 175 egz. Arkuszy wyd. 1,1. Arkuszy druk.
1,5. Oddano do drukarni w listopadzie 1967 r.
Wydrukowano w grudniu 1967 r.

WARSZAWSKA DRUKARNIA NAUKOWA
Warszawa, ul. Śniadeckich 2. Zam. 1000/0/67.

WYZNACZANIE CHARAKTERYSTYK DYNAMICZNYCH UKŁADÓW ZNAJDUJĄCYCH SIĘ POD WPLYWEM WYMUSZEŃ LOSOWYCH

Jerzy Wicher, Stefan Zienba

1. Wstęp

Własności dynamiczne układów elektrycznych, pneumatycznych, hydraulicznych bada się zazwyczaj bądź na podstawie rozważań teoretycznych, bądź na drodze doświadczalnego wyznaczania charakterystyk. Metody analityczne prowadzące do uzyskania układu równań różniczkowych, a następnie przepustowości operatorowej /transmitancji, funkcji przejścia, funkcji przenoszenia/, w wielu zagadnieniach praktycznych są bardzo pracochłonne, lub - ze względu na konieczność wprowadzenia zbyt dużych uproszczeń - mało dokładne. Budowanie analityczne równań różniczkowych, oraz wyznaczanie przepustowości operatorowych układu opiera się na znajomości parametrów poszczególnych elementów układu. W przypadku elementów mechanicznych musimy uwzględnić: bezwładność, tarcie występujące między współpracującymi częściami, zmiany geometryczne np. ugięcia pod wpływem działających sił itp. W przypadku układów elektrycznych konieczna jest znajomość oporności, pojemności, indukcyjności poszczególnych elementów. Najczęściej mamy do dyspozycji dane niekompletne oraz niedokładne. Ponadto przy wyznaczaniu analitycznym przepustowości układu, mogą być pominięte niektóre szkodliwe **sprzężenia**, a jeśli do tego

doładamy uproszczenia czynione w trakcie liczenia, to powstaje groźba popełnienia znacznych błędów. Dlatego wydaje się, że metody analityczne dają dobre efekty tylko w przypadku niezbyt skomplikowanych układów.

W praktyce najczęściej stosowanym sposobem wyznaczania charakterystyk dynamicznych rzeczywistych obiektów są metody eksperymentalne. Pozwalają nam na znaczne skrócenie czasu potrzebnego do uzyskania charakterystyk. Wylimowane są źródła błędów występujące przy obliczeniach analitycznych. Tym niemniej, mogą występować odchylenia charakterystyk wyznaczonych eksperymentalnie od charakterystyk rzeczywistych, co spowodowane jest przede wszystkim niedokładnością stosowanych metod oraz niedokładnością aparatury pomiarowej.

Szczególnie ważne jest zdanie sobie sprawy z występujących nieliniowości. Pomiar dynamiczny na ogół sprowadza się do pomiarów w liniowym zakresie działania mierzonego układu, operując małymi odchyleniami od wybranego punktu pracy. Wartość sygnału wymuszającego nie może być zbyt mała ze względu na występowanie zakłóceń. Nie może też być zbyt duża, ponieważ chcemy, aby układ nie wychodził poza strefę liniowości. Nie zawsze można znaleźć kompromis dla tych sprzecznych wymagań. Na przykład przy pomiarze charakterystyki częstotliwościowej z jednej strony jesteśmy zmuszeni ograniczyć wartość sygnału wejściowego, aby utrzymać się w strefie liniowości, a z drugiej - tłumienie układu jest takie, że sygnał na wyjściu może okazać się zbyt mały, aby mógł być zarejestrowany przez użyte do pomiarów przyrządy.

2. Metody wyznaczania charakterystyk dynamicznych

Badanie własności dynamicznych układów liniowych lub takich, które w pewnym zakresie można traktować jako liniowe, w praktyce sprowadza się do wyznaczenia ich przepus-

towości operatorowej $\phi(s)$ lub funkcji wagi $k(t)$, to jest odpowiedzi układu na impuls Dirac'a /impuls jednostkowy/. Jak wiemy, przepustowość operatorowa $\phi(s)$ jest transformatą Laplace'a funkcji wagi $k(t)$:

$$/2.1/ \quad \phi(s) = \int_0^{\infty} k(t) e^{-st} dt$$

Istnieją trzy zasadnicze metody eksperymentalnego badania własności dynamicznych:

a/ Metoda sygnałów impulsowych lub skokowych pozwalająca na bezpośrednie wyznaczenie funkcji wagi $k(t)$. Metoda ta polega na pomiarze przebiegu przejściowego na wyjściu badanego układu przy sygnale skokowym na wejściu /charakterystyka skokowa, odpowiedź skokowa/ lub sygnale impulsowym /charakterystyka impulsowa, odpowiedź impulsowa/.

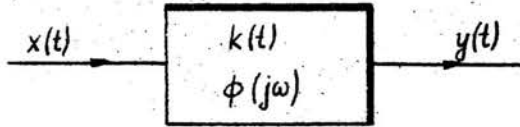
b/ Metoda sygnałów o przebiegu sinusoidalnym oparta na znanej zasadzie mówiącej, że jeżeli na wejściu układu liniowego przyłożyć wymuszenie sinusoidalne, to po zaniknięciu przebiegu przejściowego sygnał wyjściowy jest sinusoidalny i różni się od sygnału wejściowego amplitudą i fazą. Zmieniając częstotliwość sygnału wejściowego i obliczając każdorazowo stosunek amplitud i różnicę faz w stanie ustalonym, można otrzymać charakterystyki częstotliwościowe: amplitudową $A(\omega)$ i fazową $\varphi(\omega)$, lub przepustowość widmową układu $\phi(j\omega)$. Przepustowość widmową $\phi(j\omega)$ otrzymać możemy przez podstawienie $s=j\omega$ do wyrażenia na przepustowość operatorową $\phi(s)$.

c/ Metody stochastyczne. Metody stochastyczne wyznaczania $k(t)$ lub $\phi(j\omega)$ można podzielić na metody oparte na wyznaczeniu funkcji korelacji wymuszenia i odpowiedzi oraz metody polegające na wyznaczeniu odpowiednich gęstości widmowych wymuszenia i odpowiedzi.

Przedstawmy pokrótce zależności występujące między funkcją korelacji $R(t)$ i funkcją wagi $k(t)$ oraz gęstoś-

cią widmową $S(\omega)$ i przepustowością widmową $\phi(j\omega)$.

Niech będzie dany układ liniowy przedstawiony schematycznie na rys.1.



Rys.1.

Jak wiadomo, dla takiego układu wymuszenie wejściowe $x(t)$ i odpowiedź układu $y(t)$ na wymuszenie są związane za pomocą splotu:

$$/2.2/ \quad y(t) = \int_0^t x(t+\tau)k(\tau) d\tau$$

Jeżeli $x(t)$ jest stacjonarnym i ergodycznym procesem stochastycznym o wartości przeciętnej równej zeru, to odpowiedź układu $y(t)$ jest również procesem stochastycznym stacjonarnym i ergodycznym o wartości przeciętnej równej zeru [3].

Funkcję korelacji własnej $R_{xx}(\tau)$ /autocorrelation function/ procesu $x(t)$ oraz funkcję korelacji wzajemnej $R_{xy}(\tau)$ /crosscorrelation function/ procesu $y(t)$ możemy przedstawić w postaci:

$$/2.3/ \quad R_{xx}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t)x(t+\tau) dt$$

$$/2.4/ \quad R_{xy}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t)y(t+\tau) dt$$

Na podstawie zależności /2.2/, /2.3/, /2.4/ można łatwo wyprowadzić następującą zależność między funkcją korelacji własnej i wzajemnej oraz funkcją wagi:

$$/2.5/ \quad R_{xy}(\tau) = \int_0^{\infty} k(t)R_{xx}(t+\tau) dt$$

Gęstość widmowa stochastycznej funkcji stacjonarnej jest transformatą Fourier'a funkcji korelacji. Mamy więc:

$$/2.6/ \quad S_{xx}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} R_{xx}(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau$$

$$/2.7/ \quad S_{xy}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} R_{xy}(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau$$

gdzie:

$S_{xx}(\omega)$ - gęstość widmowa własna wymuszenia $x(t)$,

$S_{xy}(\omega)$ - gęstość widmowa wzajemna odpowiedzi $y(t)$.

Na podstawie zależności /2.5/, /2.6/, /2.7/ oraz /2.1/ /po podstawieniu $s=j\omega$ /, możemy otrzymać następujące wyrażenie na przepustowość widmową układu:

$$/2.8/ \quad \phi(j\omega) = \frac{S_{xy}(\omega)}{S_{xx}(\omega)}$$

Zależność /2.8/, wiążąca gęstości widmowe z przepustowością widmową układu, ma wyjątkowo duże znaczenie praktyczne. Pozwala bowiem na szybkie określenie własności dynamicznych, ponieważ:

$$/2.9/ \quad \phi(j\omega) = P(\omega) + jQ(\omega) = A(\omega) e^{j\varphi(\omega)}$$

gdzie:

$$A(\omega) = \sqrt{P^2(\omega) + Q^2(\omega)} \quad - \text{amplitudowa charakterystyka}$$

częstotliwościowa układu,

$$\varphi(\omega) = \arctg \left[\frac{Q(\omega)}{P(\omega)} \right] \quad - \text{fazowa charakterystyka częstotli-$$

wościowa układu.

Wyznaczenie gęstości widmowych $S_{xx}(\omega)$ i $S_{xy}(\omega)$ nie jest sprawą łatwą. Przybliżone wyrażenie na gęstość widmową stacjonarnego i ergodycznego procesu stochastycznego można trzymać w następujący sposób: założymy, że mamy daną w postaci np. oscylogramu realizację $x_T(t)$ takiego procesu danego w przedziale czasu $-T \leq t \leq +T$. Wprowadźmy do rozważań funkcje:

$$/2.10/ \quad X(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x_T(t) e^{-j\omega t} dt = \int_{-T}^{T} x_T(t) e^{-j\omega t} dt$$

$$/2.11/ \quad R_T(\tau) = \int_{-T}^{T} x_T(t) x_T(t+\tau) dt = \frac{1}{2T} \int_{-\infty}^{+\infty} x_T(t) x_T(t+\tau) dt$$

Transformata Fourier'a $S_T(\omega)$ funkcji $R_T(\tau)$ ma postać:

$$/2.12/ \quad S_T(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} R_T(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau$$

Podstawiając do /2.12/ wzór /2.11/ oraz zmieniając porządek całkowania otrzymamy:

$$\begin{aligned} /2.13/ \quad S_T(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j\omega\tau} \frac{1}{2T} \int_{-\infty}^{+\infty} x_T(t) x_T(t+\tau) dt d\tau = \\ &= \frac{1}{2T} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x_T(t) e^{j\omega t} x_T(t+\tau) e^{-j\omega(t+\tau)} dt d\tau = \\ &= \frac{1}{2T} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} x_T(t) e^{j\omega t} dt \right] \left[\int_{-\infty}^{+\infty} x_T(t') e^{-j\omega t'} dt' \right] \end{aligned}$$

gdzie $t' = t + \tau$.

Na podstawie /2.10/ możemy napisać:

$$/2.14/ \quad S_T(\omega) = \frac{1}{2T} X_T(j\omega) X_T(-j\omega)$$

gdzie $X_T(-j\omega)$ jest wartością sprzężoną $X_T(j\omega)$.

Dla procesów stacjonarnych wartość oczekiwana /średnia statystyczna/ :

$$/2.15/ \quad E[S_T(\omega)] = S_{XX}(\omega)$$

Jeżeli proces jest ergodyczny, to średnią statystyczną można zastąpić średnią czasową:

$$/2.16/ \quad \lim_{T \rightarrow \infty} S_T(\omega) = S_{XX}(\omega)$$

Wobec tego możemy napisać, że dla dostatecznie długiego odcinka czasu:

$$/2.17/ \quad S_{XX}(\omega) \cong S_T(\omega)$$

$$/2.18/ \quad S_{XX}(\omega) \cong \frac{1}{2T} X_T(j\omega) \cdot X_T(-j\omega)$$

Jeżeli weźmiemy pod uwagę wymuszenia wejściowe $x(t)$ i odpowiedź układu $y(t)$, to postępując w podobny sposób jak wyżej otrzymany następujące wyrażenie na gęstość widmową wzajemną:

$$/2.19/ \quad S_{XY}(\omega) = \frac{1}{2T} Y_T(j\omega) \cdot X_T(-j\omega)$$

gdzie:

$$/2.20/ \quad X_T(j\omega) = \int_{-T}^T x_T(t) e^{-j\omega t} dt$$

$$/2.21/ \quad Y_T(j\omega) = \int_{-T}^T y_T(t) e^{-j\omega t} dt$$

3. Przybliżona metoda wyznaczania gęstości widmowej przy pomocy funkcji Laguerre'a

Funkcję korelacji lub gęstość widmową danego procesu stochastycznego można wyznaczyć za pomocą korelatora lub analizatora widmowego. Istnieje szereg metod graficznych lub graficzno - analitycznych pozwalających bez przyrządów wyznaczyć funkcję korelacji lub gęstość widmową. Jednak metody te są bardzo pracochłonne. Jedną z bardziej interesujących metod graficzno - analitycznych jest przybliżona metoda wyznaczania gęstości widmowej oparta na zastosowaniu funkcji Laguerre'a /patrz [2] str 154 - 157/.

Funkcja Laguerre'a k-tego rzędu jest zdefiniowana w następujący sposób:

$$\begin{aligned} /3.1/ \quad l_k(t) &= e^{-t} \left\{ \frac{2^{k+1/2} t^k}{k!} - \frac{k 2^{k-1/2} t^{k-1}}{(k-1)!} + \dots \right. \\ &\quad \dots + \frac{k! 2^{k-i+1/2} t^{k-i}}{[(k-i)!]^2 i!} (-1)^i + \dots \\ &\quad \left. \dots + 2^{1/2} (-1)^k \right\} = k! e^{-t} \sum_{i=0}^k \frac{2^{k-i+1/2} t^{k-i}}{[(k-i)!]^2 i!} (-1)^i \end{aligned}$$

Transformata Fourier'a funkcji Laguerre'a ma bardzo prostą postać:

$$/3.2/ \quad L_k(j\omega) = \sqrt{2} \frac{(1-j\omega)^k}{(1+j\omega)^{k+1}}$$

Rozwijając w szereg funkcji Laguerre'a realizację $x_T(t)$ procesu stacjonarnego określonego w przedziale $0 \leq t \leq 2T$

i równego zero dla pozostałych t , otrzymamy [1],[2] :

$$/3.3/ \quad x_T(t) = \sum_{k=0}^n a_k L_k(t)$$

gdzie współczynniki szeregu są równe:

$$/3.4/ \quad a_k = \int_0^{2\pi} L_k(t) x_T(t) dt$$

Ponieważ funkcje Laguerre'a tworzą układ zupełny funkcji funkcji ortogonalnych [1], [2], równych zero dla $t < 0$, więc przy dostatecznie dużym n równość /3.3/ będzie spełniona z dowolną dokładnością.

Biorąc transformatę Fourier'a dla obu stron równości /3.3/ otrzymamy:

$$/3.5/ \quad X_T(j\omega) = \sum_{k=0}^n a_k L_k(j\omega)$$

Na podstawie /2.18/ i /3.5/ możemy napisać:

$$/3.6/ \quad S_{XX}(\omega) \cong \frac{1}{2\pi} \left[\sum_{k=0}^n a_k L_k(j\omega) \right] \left[\sum_{k=0}^n a_k L_k(-j\omega) \right]$$

4. Wyznaczanie charakterystyk częstotliwościowych.

Biorąc pod uwagę zależności /2.3/, /2.18/ i /2.19/ możemy napisać:

$$/4.1/ \quad \phi(j\omega) \cong \frac{1/2\pi \int_{-\infty}^{\infty} Y_{\Gamma}(j\omega) X_{\Gamma}(-j\omega) dt}{1/2\pi \int_{-\infty}^{\infty} X_{\Gamma}(j\omega) X_{\Gamma}(-j\omega) dt} = \frac{Y_{\Gamma}(j\omega)}{X_{\Gamma}(j\omega)}$$

ale z /3.2/ i /3.5/ mamy:

$$/4.2/ \quad X_{\Gamma}(j\omega) = \sum_{k=0}^n a_{\Gamma k} I(j\omega) = \sum_{k=0}^n a_{\Gamma k} \sqrt{2} \frac{(1-j\omega)^k}{(1+j\omega)^{k+1}} = \\ = \frac{\sqrt{2}}{1+j\omega} \sum_{k=0}^n a_{\Gamma k} \left(\frac{1-j\omega}{1+j\omega} \right)^k$$

$$/4.3/ \quad Y_{\Gamma}(j\omega) = \sum_{k=0}^m b_{\Gamma k} I(j\omega) = \frac{\sqrt{2}}{1+j\omega} \sum_{k=0}^m b_{\Gamma k} \left(\frac{1-j\omega}{1+j\omega} \right)^k$$

gdzie:

$$/4.4/ \quad \begin{cases} a_{\Gamma k} = \int_0^{2\pi} 1_k X_{\Gamma}(t) dt \\ b_{\Gamma k} = \int_0^{2\pi} 1_k Y_{\Gamma}(t) dt \end{cases}$$

Podstawiając /4.2/ i /4.3/ do /4.1/ otrzymamy:

$$/4.5/ \quad \phi(j\omega) = \frac{\sum_{k=0}^m b_{\Gamma k} z^k}{\sum_{k=0}^n a_{\Gamma k} z^k}$$

gdzie: $z = \frac{1-j\omega}{1+j\omega}$

Jak widzimy z zależności /4.5/, wyznaczenie przepustowości widmowej układu ogranicza się do wyznaczenia wartości współczynników a_k i b_k z wzorów /4.4/. We wzorach tych $x_T(t)$ jest realizacją wymuszenia $x(t)$ daną w postaci oscylogramu, a $y_T(t)$ jest realizacją odpowiedzi $y(t)$ układu, również daną w postaci oscylogramu.

Wartości całek /4.4/ można wyliczyć metodą graficzną lub przy pomocy specjalnego urządzenia liczącego. W metodzie graficznej mnożymy przez siebie rzędne krzywych $x_T(t)$ i $y_T(t)$ przez odpowiednie wartości funkcji Laguerre'a i wyznaczamy przy pomocy planimetru powierzchnie objęte przez krzywe wypadkowe. Wartości funkcji Laguerre'a można odczytać z tablic. Tablice takie można znaleźć np. w cytowanej już książce W.W. Sołodownikowa, "Dynamika Statystyczna Liniowych Układów Regulacji Automatycznej", WNT, 1964.

Podane są tam wartości dla $k=0,1,2,3,4$ i $0 \leq t \leq 30$ sek.⁺

Urządzenie liczące powinno składać się z generatora funkcji Laguerre'a, układu mnożącego i integratora. Dane dotyczące zbudowania generatora funkcji Laguerre'a można znaleźć w [4] str. 197 - 199.

Po wyznaczeniu współczynników a_k i b_k możemy od razu napisać wyrażenie analityczne /4.5/ na przepustowość widmową układu. W celu otrzymania charakterystyk częstotliwościowych należy wyrażenie na $\Phi(j\omega)$ rozbić na część rzeczywistą i urojoną /patrz /2.9//. Okazuje się, że postać /4.5/ jest bardzo niewygodna, zwłaszcza w przypadku gdy m i n przybierają większe wartości. Na przykład dla $m = n = 0,1,2,3$ otrzymamy:

⁺/ patrz też: Norbert Wiener, Extrapolation, Interpolation and Smoothing of Stationary Time Series, Publ., by the Press of the Massachusetts Instituté of Technology and John Wiley and Sons, Inc., London, New York, 1950, strony: 124 - 128.

$$\begin{aligned} \phi(j\omega) &= \frac{\sum_{k=0}^n b_k \left(\frac{1-j\omega}{1+j\omega}\right)^k}{\sum_{k=0}^n a_k \left(\frac{1-j\omega}{1+j\omega}\right)^k} = \\ &= \frac{b_0 + b_1 \frac{1-j\omega}{1+j\omega} + b_2 \left(\frac{1-j\omega}{1+j\omega}\right)^2 + b_3 \left(\frac{1-j\omega}{1+j\omega}\right)^3}{a_0 + a_1 \frac{1-j\omega}{1+j\omega} + a_2 \left(\frac{1-j\omega}{1+j\omega}\right)^2 + a_3 \left(\frac{1-j\omega}{1+j\omega}\right)^3} \end{aligned}$$

Po licznych przekształceniach otrzymujemy następującą postać:

$$\phi(j\omega) = \frac{(b_0 + b_1 + b_2 + b_3) + \omega^2 [b_1 + b_2 - 3(b_0 + b_3)] + j\omega [3(b_0 + b_1 - b_2 - b_3) + \omega^2 (b_1 - b_2 - b_0 + b_3)]}{(a_0 + a_1 + a_2 + a_3) + \omega^2 [a_1 + a_2 - 3(a_0 + a_3)] + j\omega [3(a_0 + a_1 - a_2 - a_3) + \omega^2 (a_1 - a_2 - a_0 + a_3)]}$$

Jak widać z przytoczonego przykładu praktyczne wyznaczenie przebiegu charakterystyk częstotliwościowych w postaci wykresu jest bardzo pracochłonne. Należy zatem tak przekształcić wyrażenie /4.5/, aby łatwo można było przedstawić $\phi(j\omega)$ w postaci /2.9/. Napiszmy:

$$z = \frac{1-j\omega}{1+j\omega} \cdot \frac{1-j\omega}{1-j\omega} = \frac{1-2j\omega - \omega^2}{1 + \omega^2} = \frac{1 - \omega^2}{1 + \omega^2} - j \frac{2\omega}{1 + \omega^2}$$

$$|z| = \sqrt{\left(\frac{1 - \omega^2}{1 + \omega^2}\right)^2 + \left(\frac{2\omega}{1 + \omega^2}\right)^2} = \frac{1}{1 + \omega^2} \sqrt{1 - 2\omega^2 + \omega^4 + 4\omega^2} = 1$$

Zatem postać trygonometryczna liczby zespolonej z będzie:

$$/4.6/ \quad z = \cos\alpha - j\sin\alpha$$

gdzie:

$$/4.7/ \quad \alpha = \arctg \left[-\frac{2\omega}{1-\omega^2} \right]$$

Z wzoru Moivre'a mamy:

$$/4.8/ \quad z^k = (\cos\alpha - j\sin\alpha)^k = \cos k\alpha - jsink\alpha$$

Podstawiając /4.8/ do /4.5/ otrzymujemy:

$$/4.9/ \quad \phi(j\omega) = \frac{\sum_{k=0}^M b_k (\cos k\alpha - jsink\alpha)}{\sum_{k=0}^N a_k (\cos k\alpha - jsink\alpha)} = \frac{M - jN}{R - jS}$$

gdzie:

$$/4.10/ \quad \begin{cases} M = \sum_{k=0}^M b_k \cos k\alpha \\ N = \sum_{k=0}^M b_k \sin k\alpha \\ R = \sum_{k=0}^N a_k \cos k\alpha \\ S = \sum_{k=0}^N a_k \sin k\alpha \end{cases}$$

Postać /4.9/ łatwo już sprowadzić do postaci /2.9/ i wyznaczyć charakterystyki częstotliwościowe. Wyrażenie na amplitudową charakterystykę częstotliwościową będzie miało postać:

$$/4.11/ \quad A(\omega) = \sqrt{P^2(\omega) + Q^2(\omega)} = |\phi(j\omega)| = \cdot$$

$$= \left| \frac{M - jN}{R - jS} \right| = \frac{|M - jN|}{|R - jS|} = \sqrt{\frac{M^2 + N^2}{R^2 + S^2}}$$

a wyrażenie na fazową charakterystykę częstotliwościową po prostych przekształceniach:

$$/4.12/ \quad \varphi(\omega) = \overset{\text{Arc tg}}{\frac{MS - NR}{MR + NS}}$$

W celu ułatwienia obliczeń w tabelicy 1 podane zostały wartości funkcji $\cos k\alpha$ i $\sin k\alpha$ w zależności od ω dla $0 \leq \omega \leq 50$ i $k = 0, 1, 2, 3$.

Na podstawie powyższych wywodów metodę wyznaczania charakterystyk częstotliwościowych dla układu przedstawionego na rys.1 można streścić następująco:

1. Zapisujemy na taśmie rejestratora realizację $x_{\text{p}}(t)$ przebiegu wymuszenia $x(t)$ i realizację $y_{\text{p}}(t)$ odpowiedzi $y(t)$ układu.

2. Z wzorów /4.4/ wyznaczamy wartości współczynników a_k i b_k . Przy metodzie graficznej korzystamy z tabeli funkcji Laguerre'a.

3. Z wzorów /4.10/ wyznaczamy wartości M, N, R, S w zależności od ω . Wyniki przedstawiamy w postaci tabeli. Przy wyznaczaniu wartości M, N, R i S korzystamy z tabelicy 1.

4. Z wzorów /4.11/ i /4.12/ wyznaczamy poszukiwane charakterystyki.

5. Uwagi końcowe.

Przedstawiona metoda ma tę zaletę w stosunku do innych metod opartych na wykorzystaniu sygnałów stochastycznych,

że pozwala znaleźć przybliżenie przepustowości widmowej układu wprost na podstawie zapisu realizacji stacjonarnego procesu stochastycznego bez konieczności wstępnej obróbki zapisu, polegającej na ogół na znalezieniu najpierw przebiegu funkcji korelacji, a następnie gęstości widmowej. Zależność /4.9/ pozwala na otrzymanie bezpośrednio wyrażenia analitycznego na przepustowość widmową, podczas gdy wiele innych metod pozwala jedynie otrzymać przebieg krzywej gęstości widmowej, którą zwykle trzeba następnie aproksymować za pomocą jakiegokolwiek znanego wyrażenia analitycznego.

W przypadku zbudowania urządzenia liczącego do otrzymywania współczynników a_k i b_k , wyrażenie na przepustowość widmową układu otrzymuje się natychmiast, a wykreślenie charakterystyki częstotliwościowej nie następuje specjalnych trudności. Obliczanie wartości współrzędnych poszczególnych punktów charakterystyki można znacznie ułatwić wykorzystując podane w tablicy 1 wartości składników $\sin ka$ i $\cos ka$.

Przedstawiona metoda może być stosowana do wyznaczania charakterystyk dynamicznych różnych układów mechanicznych, pneumatycznych, hydraulicznych, przyjmując, że na wejściu układu mamy wymuszenia będące zakłóceniami stochastycznymi występującymi w czasie normalnej pracy układu. Należy przy tym pamiętać, że nie zawsze można stosować metody zdejmowania charakterystyk dynamicznych przy zastosowaniu sztucznych wymuszeń, ponieważ wymuszenia te naruszają normalny proces technologiczny. W takim przypadku możemy być zmuszeni do zastosowania metody wykorzystującej zakłócenia, które będą odgrywały rolę sygnałów wymuszających.

T a b l i c a 1

ω	$\cos \alpha$	$\cos 2\alpha$	$\cos 3\alpha$	$\sin \alpha$	$\sin 2\alpha$	$\sin 3\alpha$
0,0	1,0	1,0	1,0	0,0	0,0	0,0
0,1	0,980214	0,921638	0,826590	-0,197942	-0,388052	-0,562805
0,2	0,923098	0,704221	0,377033	-0,384564	-0,709931	-0,926200
0,3	0,803684	0,291815	-0,334629	-0,595057	-0,956475	-0,942350
0,4	0,724372	0,049431	-0,652760	-0,689409	-0,998778	-0,757565
0,5	0,600188	-0,279550	-0,935752	-0,799859	-0,960131	-0,385101
0,6	0,469728	-0,558710	-0,994613	-0,882811	-0,829363	0,103661
0,7	0,342567	-0,765296	-0,866897	-0,939493	-0,643679	0,498488
0,8	0,219562	-0,903585	-0,616349	-0,975598	-0,428410	0,787473
0,9	0,105107	-0,977905	-0,310676	-0,994461	-0,209050	0,965400
1,0	0,0	-1,0	0,0	1,0	0,0	-1,0
1,1	0,095556	-0,981738	-0,283179	0,995424	0,190238	-0,959067
1,2	0,180519	-0,934826	-0,518027	0,983571	0,355107	-0,855364
1,3	0,256571	-0,868343	-0,702153	0,966526	0,495964	-0,712026
1,4	0,324468	-0,789441	-0,836764	0,945897	0,613826	-0,547563
1,5	0,384564	-0,704221	-0,926200	0,923098	0,709981	-0,377033
1,6	0,438371	-0,627057	-0,978148	0,898794	0,788011	-0,207912
1,7	0,485827	-0,527944	-0,998806	0,874055	0,849279	-0,048850
1,8	0,528438	-0,441506	-0,995056	0,848972	0,897258	0,099320
1,9	0,566166	-0,358911	-0,972573	0,824291	0,933372	0,232597
2,0	0,599955	-0,280108	-0,936060	0,800034	0,959968	0,351842
2,1	0,630450	-0,205065	-0,889017	0,776230	0,973748	0,457874
2,2	0,657594	-0,135139	-0,835328	0,753372	0,990327	0,549752
2,3	0,682211	-0,069176	-0,776596	0,731155	0,997604	0,629998
2,4	0,704221	-0,008145	-0,715693	0,709981	0,999967	0,698415
2,5	0,724172	0,048850	-0,653421	0,689620	0,998806	0,756995
2,6	0,742366	0,102214	-0,590606	0,669995	0,994762	0,806960
2,7	0,758893	0,151836	-0,543174	0,651216	0,988406	0,839620
2,8	0,774209	0,198790	-0,466387	0,632931	0,980041	0,884581
2,9	0,787473	0,240228	-0,409127	0,616349	0,970716	0,912477
3,0	0,800034	0,280108	-0,351842	0,599955	0,959968	0,936060
3,1	0,811574	0,317305	-0,296542	0,584250	0,948324	0,955020

T a b l i c a 1 / c . d . /

ω	$\cos \alpha$	$\cos 2\alpha$	$\cos 3\alpha$	$\sin \alpha$	$\sin 2\alpha$	$\sin 3\alpha$
3,2	0,822144	0,351842	-0,243615	0,569280	0,936060	0,969872
3,3	0,831793	0,383758	-0,193378	0,555006	0,923434	0,981124
3,4	0,840882	0,414164	-0,144356	0,541219	0,910202	0,989526
3,5	0,849125	0,442028	-0,098451	0,528191	0,897001	0,995142
3,6	0,856718	0,467930	-0,054950	0,515786	0,883766	0,998489
3,7	0,863836	0,492424	-0,013090	0,503774	0,870356	0,999914
3,8	0,870642	0,516035	0,027922	0,491917	0,856567	0,999610
3,9	0,876587	0,536809	0,064532	0,481244	0,843704	0,997916
4,0	0,882401	0,557262	0,101056	0,470499	0,830337	0,994381
4,1	0,887815	0,576432	0,135716	0,460200	0,817145	0,990748
4,2	0,892717	0,593887	0,167629	0,450610	0,804548	0,985850
4,3	0,897337	0,610606	0,198513	0,441245	0,791935	0,980098
4,4	0,901833	0,612907	0,228351	0,432086	0,779330	0,973579
4,5	0,905939	0,614450	0,256289	0,423409	0,767165	0,966600
4,6	0,909841	0,615620	0,266397	0,414958	0,755091	0,963863
4,7	0,913309	0,616826	0,307357	0,407268	0,743923	0,951594
4,8	0,916828	0,618147	0,315649	0,399283	0,732147	0,948376
4,9	0,920050	0,619298	0,355107	0,391862	0,720954	0,934826
5,0	0,923098	0,704221	0,377033	0,384564	0,709981	0,926200
5,1	0,925980	0,714880	0,397949	0,377571	0,699248	0,917403
5,2	0,928702	0,724974	0,417867	0,370828	0,688776	0,908508
5,3	0,931374	0,734915	0,437587	0,364064	0,678160	0,899176
5,4	0,933685	0,743534	0,454768	0,358096	0,668698	0,890610
5,5	0,935957	0,752032	0,471782	0,352114	0,659127	0,881715
5,6	0,938191	0,760406	0,488621	0,346117	0,649448	0,872496
5,7	0,940208	0,768284	0,504528	0,340380	0,640110	0,863396
5,8	0,942350	0,776046	0,520265	0,334629	0,630676	0,854005
5,9	0,944185	0,782970	0,534352	0,329416	0,622059	0,845262
6,0	0,945991	0,789798	0,548293	0,324193	0,613367	0,836286
6,1	0,947676	0,796178	0,561361	0,319235	0,605062	0,827571
6,2	0,949334	0,802470	0,574291	0,314269	0,596692	0,818651

T a b l i c a 1 /c.d./

ω	$\cos\alpha$	$\cos 2\alpha$	$\cos 3\alpha$	$\sin\alpha$	$\sin 2\alpha$	$\sin 3\alpha$
6,3	0,950377	0,808333	0,586372	0,309570	0,588726	0,810042
6,4	0,952396	0,814116	0,598325	0,304864	0,580703	0,801254
6,5	0,953804	0,819486	0,609454	0,300423	0,573160	0,792822
6,6	0,955192	0,824785	0,620464	0,295936	0,565447	0,784235
6,7	0,956475	0,829683	0,630676	0,291815	0,558228	0,776046
6,8	0,957906	0,835163	0,642119	0,287082	0,549995	0,766605
6,9	0,958902	0,838987	0,650111	0,283736	0,544151	0,759839
7,0	0,960050	0,843391	0,659346	0,279829	0,537300	0,751840
7,1	0,961101	0,847431	0,667833	0,276197	0,530906	0,744312
7,2	0,962139	0,851422	0,676233	0,272560	0,524481	0,736687
7,3	0,963163	0,855364	0,684547	0,268920	0,518027	0,728969
7,4	0,964173	0,859258	0,692773	0,265276	0,511543	0,721156
7,5	0,965093	0,862808	0,700287	0,261908	0,505532	0,713862
7,6	0,965926	0,866025	0,707107	0,258819	0,500000	0,707107
7,7	0,966823	0,869495	0,714473	0,255446	0,493942	0,699663
7,8	0,967709	0,872922	0,721760	0,252069	0,487860	0,692143
7,9	0,968511	0,876026	0,726375	0,248972	0,482263	0,687299
8,0	0,969231	0,878817	0,734323	0,246153	0,477159	0,678801
8,1	0,969943	0,881578	0,740218	0,243333	0,472038	0,672367
8,2	0,970716	0,884531	0,746638	0,240228	0,466387	0,665230
8,3	0,971411	0,887279	0,752415	0,237403	0,461232	0,658639
8,4	0,972029	0,889682	0,757565	0,234859	0,456530	0,652760
8,5	0,972708	0,892323	0,763232	0,232031	0,451397	0,646124
8,6	0,973313	0,894675	0,768284	0,229484	0,446710	0,640110
8,7	0,973910	0,897001	0,773287	0,226936	0,442028	0,634056
8,8	0,974566	0,899553	0,778791	0,224101	0,436802	0,627284
8,9	0,975085	0,901158	0,783151	0,221832	0,432610	0,621831
9,0	0,975598	0,903585	0,787473	0,219562	0,428410	0,616349
9,1	0,976107	0,905569	0,791757	0,217292	0,424199	0,610836
9,2	0,976672	0,907777	0,796530	0,214735	0,419452	0,604599

T a b l i c a 1 /c.d./

ω	$\cos \alpha$	$\cos 2\alpha$	$\cos 3\alpha$	$\sin \alpha$	$\sin 2\alpha$	$\sin 3\alpha$
9,2	0,977169	0,909720	0,800731	0,212462	0,415223	0,599024
9,4	0,977600	0,911403	0,804376	0,210472	0,411514	0,594121
9,5	0,978087	0,913309	0,808504	0,208196	0,407268	0,588491
9,6	0,978569	0,915194	0,812592	0,205920	0,403013	0,582832
9,7	0,978927	0,916595	0,815633	0,204211	0,399816	0,578570
9,8	0,979399	0,918446	0,819652	0,201933	0,395546	0,572861
9,9	0,979809	0,920050	0,823136	0,199938	0,391802	0,567844
10,0	0,980156	0,921412	0,826098	0,198228	0,388588	0,563526
11,0	0,983571	0,934826	0,835364	0,180519	0,355107	0,518027
12,0	0,986238	0,945329	0,878400	0,163340	0,326118	0,477925
13,0	0,988273	0,953366	0,896099	0,152698	0,301815	0,443853
14,0	0,989859	0,959642	0,909961	0,142053	0,281225	0,414693
15,0	0,991177	0,964864	0,921525	0,132545	0,262751	0,388320
16,0	0,992224	0,969016	0,939737	0,124467	0,246999	0,365689
17,0	0,993103	0,972506	0,938493	0,117249	0,232880	0,345298
18,0	0,993865	0,975535	0,945234	0,110602	0,219846	0,326393
19,0	0,994461	0,977905	0,950516	0,105107	0,209050	0,310676
20,0	0,995027	0,980156	0,955536	0,099609	0,198228	0,294874
21,0	0,995479	0,981959	0,959560	0,094977	0,189095	0,281504
22,0	0,995834	0,983571	0,963163	0,090633	0,180519	0,268920
23,0	0,996220	0,984909	0,966151	0,086866	0,173075	0,257926
24,0	0,996541	0,986189	0,969016	0,083098	0,165621	0,246999
25,0	0,996825	0,987322	0,971549	0,079619	0,158732	0,236838
26,0	0,997053	0,988228	0,973579	0,076719	0,152986	0,228351
27,0	0,997293	0,989187	0,975720	0,073528	0,146659	0,218995
28,0	0,997462	0,989859	0,977231	0,071207	0,142053	0,212178
29,0	0,997625	0,990509	0,978689	0,068886	0,137445	0,205350
30,0	0,997782	0,991133	0,980098	0,066564	0,132833	0,198513
31,0	0,997934	0,991746	0,981460	0,064242	0,128219	0,191666
32,0	0,998045	0,992187	0,982450	0,062500	0,124756	0,186524

Tablica 1 /c.d./

ω	$\cos \alpha$	$\cos 2\alpha$	$\cos 3\alpha$	$\sin \alpha$	$\sin 2\alpha$	$\sin 3\alpha$
33,0	0,998170	0,992687	0,983571	0,060468	0,120714	0,180519
34,0	0,998274	0,993107	0,984503	0,058726	0,117249	0,175367
35,0	0,998392	0,993572	0,985556	0,056693	0,113203	0,169350
36,0	0,998473	0,993897	0,986286	0,055241	0,110313	0,165048
37,0	0,998552	0,994214	0,986996	0,053788	0,107421	0,160743
38,0	0,998645	0,994538	0,987824	0,052045	0,103950	0,155572
39,0	0,998690	0,994762	0,988228	0,051174	0,102224	0,152966
40,0	0,998749	0,994993	0,988756	0,050012	0,099899	0,149535
41,0	0,998874	0,995340	0,989526	0,048269	0,096425	0,144356
42,0	0,998876	0,995507	0,989900	0,047397	0,094687	0,141765
43,0	0,998931	0,995725	0,990389	0,046275	0,092371	0,138309
44,0	0,998971	0,995884	0,990748	0,045363	0,090633	0,135716
45,0	0,999010	0,996041	0,991100	0,044491	0,088894	0,133121
46,0	0,999061	0,996245	0,991558	0,043329	0,086576	0,129661
47,0	0,999098	0,996385	0,991894	0,042457	0,084837	0,127065
48,0	0,999135	0,996541	0,992224	0,041585	0,083098	0,124467
49,0	0,999171	0,996685	0,992546	0,040713	0,081359	0,121869
50,0	0,999194	0,996779	0,992757	0,040132	0,080199	0,120137

Literatura cytowana.

1. H. M. James, N. E. Nichols, R. S. Phillips, Theory of Servomechanisms, New York, 1965.
2. W. W. Sołodownikow, Dynamika Statystyczna Liniowych Układów Sterowania Automatycznego, Wyd. Naukowo Techniczne, 1964.
3. A. A. Świesznikow, Podstawowe Metody Funkcji Losowych, PWN, 1965.
4. B. Van der Pol, H. Bremner, Operational Calculus Based on the Two - Sided Laplace Integral, Cambridge, 1955.