

Eugeniusz Kamiński
WPLYW NIELINIOWYCH
PARAMETRÓW NA
CHARAKTERYSTYKI PRZENOSZENIA
BEZWŁADNOŚCIOWYCH
PRZYRZĄDÓW POMIAROWYCH

27/1967

WARSZAWA



Na prawach rękopisu
Do użytku wewnętrznego

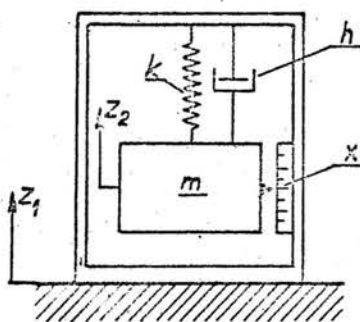
Zakład Teorii Konstrukcji Maszyn IPPT PAN. Na-
kiad 150 egzemplarzy. Ark. wyd. 1.15 Ark. druk. 1.75:
Oddano do drukarni w styczniu 1968 r. Wydrukowa-
no w lutym 1968 r. Zam. 55/o/1968

Warszawska Drukarnia Naukowa, W-wa, ul. Śnia-
deckich 8.

Wpływ nieliniowych parametrów na charakterystyki
przenoszenia bezwładnościowych przyrządów
pomiarowych

Eugeniusz Kamiński

Bezwładnościowe przyrządy pomiarowe do badania drgań modelowane są za pomocą układu, pokazanego na rys. 1, /1/, /2/ /3/..



Rys. 1. Typowy podział przyrządu bezwładnościowego do badania drgań

Masa m związana jest z obudową przyrządu poprzez blok reologiczny Voigta, składający się ze sprężyny i tłumika. Dąży się do tego, aby charakterystyki tych elementów były liniowe: siła oddziaływania sprężyny ma być proporcjonalna do przemieszczenia, a siła tłumiąca proporcjonalna do prędkości masy

w stosunku do obudowy. W tych warunkach, przy tłumieniu bliskim optymalnego, przemieszczenia masy w stosunku do obudowy $x = z_1 - z_2$ jest albo równe badanemu przemieszczeniu z_1 /w tzw. zawieszeniach sejsmicznych/, albo proporcjonalne do badanego przyspieszenia z_1 /w przyspieszeniemierniach/, przy czym w obydwu przypadkach między przebiegiem odczytywanym x a badanym z_1 występuje opóźnienie fazowe. Charakterystyki

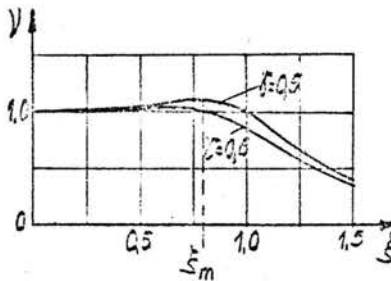
przenoszenia, wyznaczone przy kinematycznym wymuszeniu harmonicznym $z_1 = a \sin \omega t$ są dla tych przyrządów ogólnie znane. W szczególności, charakterystyki amplitudowo-częstościowe przyspieszeń mają przebieg pokazany na rys. 2.

Przyjęto tu następujące oznaczenia: $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$, $\delta = \frac{b}{2m}$,

$\gamma = \frac{\delta}{\omega_0}$, $\xi = \frac{\omega}{\omega_0}$. Współczynnik wzmocnienia ν oznacza stosunek amplitudy przemieszczenia x_{\max} do amplitudy badanego przyspieszenia $a\omega^2$, pomnożony przez stałą przyrządu ω_0^2 : $\nu = \omega_0^2 \frac{x_{\max}}{a\omega^2}$. Jak widać, dla $\xi < 1$ i dla

tłumienia optymalnego $\gamma \approx 0,6$ przemieszczenie względne x jest w przybliżeniu wprost proporcjonalne do badanego przyspieszenia, ponieważ $\nu \approx 1$. Charakterystyki wg rys. 2

mają trzy zasadnicze cechy, a mianowicie:



1 - są niezależne od amplitudy wymuszenia,

2 - maksimum ν występuje w punkcie ξ_m położonym w obszarze

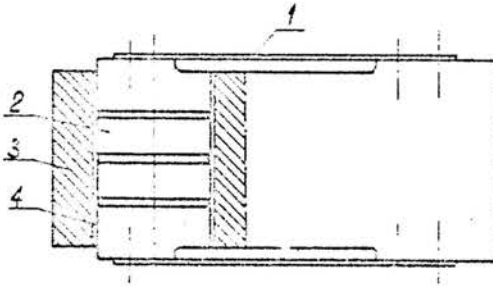
$0 < \xi < 1$,

3 - w obszarze $0 < \xi < \xi_m$, $\nu \geq 1$.

Rys. 2. Charakterystyki amplitudowo-częstościowe przyspieszeń przyrządu wg rys. 1

Charakterystyki rzeczywistych przyrządów bezwładnościowych z reguły odbiegają od pokazanych na rys. 2 i niekiedy nie

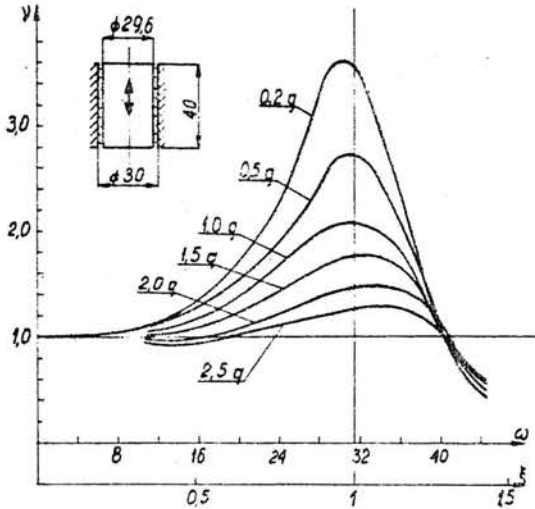
mają żadnej z wymienionych tu cech. Na rys. 3 pokazano



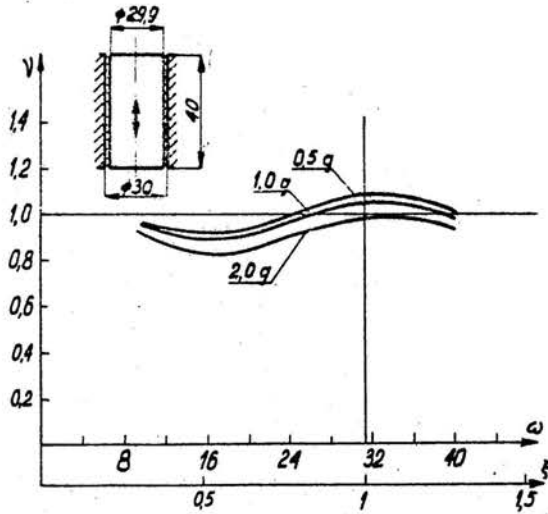
Rys. 3. Badany akcelerometr mechaniczny

schemat jednego z przyrządów, badanych przez autora. Tłok 2 o masie m podwieszony jest na płaskich sprężynach 1. Tłumienie realizowane było przez wypełnienie szczeliny 4 różnymi olejami.

Na rys. 4 i 5 pokazano charakterystyki amplitudowo-częstościowe przyspieszeń, uzyskane dla 2 rodzajów olejów - silnikowego i parafinowego. Krzywe przenoszenia



Rys. 4. Charakterystyki częstościowe przyrządu wg rys. 3 przy tłumieniu olejem silnikowym



Rys. 5. Charakterystyki częstotściowe przyrządu wg rys. 3 przy tłumieniu olejem parafinowym

zależą bardzo silnie od amplitudy przyspieszenia wymuszającego. Maksymalne wzmocnienia występują dla $\xi > 1$, a w obszarze $0 < \xi < \xi_m$ współczynnik wzmocnienia $\nu < 1$.

Pokazane krzywe wykazują niezgodność między charakterystykami wyznaczonymi dla wyidealizowanego modelu obliczeniowego, a charakterystykami rzeczywistymi w sposób bardzo jaskrawy, ale podobne odchylenia występują w wielu przyrządach. Można przewidzieć, że źródłem tych odchyień nie jest nieliniowość charakterystyki sprężystej, bo ta jest łatwa do skontrolowania i uniknięcia, jest nim więc raczej odmienny od założonego mechanizmu tłumienia. Warto podkreślić, że w znanych dziełach na ten temat nie ma prób wyjaśnienia obserwowanych rozbieżności, /1/, /2/, /3/.

W poszukiwaniu modelu adekwatnie reprezentującego przyrząd pomiarowy zbadano kilka różnych układów, a mianowicie układ o jednym stopniu swobody z nieliniowym tłumieniem oraz z nieliniowym tłumieniem i nieliniową sprężystością, a następnie układ o $1\frac{1}{2}$ stopniu swobody, liniowy i z nieliniową sprężystością członu tłumiącego.

1 stopień swobody, nieliniowe tłumienie

Przyjęto, że siła tłumiąca P_t w modelu wg rys. 1 ma postać

$$/1/ \quad P_t = h x + \varepsilon \dot{x}^3,$$

równanie ruchu wymuszającego

$$/2/ \quad z_1 = a \cos / \omega t + \varphi /$$

i badano równanie

$$/3/ \quad \ddot{x} + 2\delta \dot{x} + \mu\beta \dot{x}^3 + \omega_0^2 x = q \cos / \omega t + \varphi /$$

gdzie μ jest małym parametrem, $\mu\beta = \frac{\varepsilon}{m}$, $q = a\omega^2$, pozostałe oznaczenia jak poprzednio. Rozwiązania /3/, podobnie jak i następnych układów nieliniowych, szukano metodą perturbacji w sformułowaniu, podanym przez C.Hayashi /4/.

Równanie /3/ można przedstawić w postaci

x/ określenie umowne dla układu, którego ruch opisany jest jednym równaniem różniczkowym 2-go stopnia i jednym 1-go stopnia. Określenie to stosuje m.inn. Kin N.Tong w "Theory of Mechanical Vibration".

$$/4/ \quad \ddot{x} + \omega^2 x = \mu [\Omega x - \alpha \dot{x} - \beta x^3 + F \cos / \omega t + \varphi /]$$

gdzie $\Omega = \frac{\omega^2 - \omega_0^2}{\mu}$, $\alpha = \frac{2\delta}{\mu}$, $F = \frac{g}{\mu}$. Przewidy-

wane rozwiązanie ma postać szeregów potęgowych

$$/5/ \quad x = x_0 + \mu x_1 + \mu^2 x_2 + \dots$$

$$/6/ \quad \varphi = \varphi_0 + \mu \varphi_1 + \mu^2 \varphi_2 + \dots$$

przy warunkach początkowych: $\dot{x}_1/t = 0/ = 0$, $x_1/t + 2\pi / = x_1/t/$. Przyjmuje się również, że

$$/7/ \quad \begin{aligned} \cos / \omega t + \varphi_0 + \mu \varphi_1 / &= \cos / \omega t + \varphi_0 / \cos \mu \varphi_1 - \\ - \sin / \omega t + \varphi_0 / \sin \mu \varphi_1 &\approx \cos / \omega t + \varphi_0 / - \mu \varphi_1 \sin / \omega t + \\ + \varphi_0 / & \end{aligned}$$

Wstawiając /5/ i /6/ do /4/ i przyrównując człony zawierające te same potęgi małego parametru μ otrzymuje się ciąg równań

$$/8/ \quad \mu^0 \quad \ddot{x}_0 + \omega^2 x_0 = 0$$

$$/9/ \quad \mu^1 \quad \ddot{x}_1 + \omega^2 x_1 = \Omega x_0 - \alpha \dot{x}_0 - \beta x_0^3 + F \cos / \omega t + \varphi_0 /$$

$$/10/ \quad \mu^2 \quad \ddot{x}_2 + \omega^2 x_2 = \Omega x_1 - \alpha \dot{x}_1 - 3\beta x_0^2 \dot{x}_1 - F \varphi_1 \sin / \omega t + \varphi_0 /$$

Z równania /8/ jest

$$/11/ \quad x_0 = A_0 \cos \omega t + B_0 \sin \omega t$$

ale z warunków początkowych wynika, że $B_0 = 0$. Wobec tego dla pierwszego przybliżenia otrzymuje się z /9/ i /11/

$$\ddot{x}_1 + \omega^2 x_1 = \Omega A_0 \cos \omega t + \alpha A_0 \omega \sin \omega t + A_0^3 \omega^3 \beta \sin^3 \omega t + \quad /12/$$

$$+ F \cos / \omega t + \varphi_0 /$$

Uwzględniając, że $\sin^3 \omega t = \frac{1}{4} / 3 \sin \omega t - \sin 3 \omega t /$, otrzymuje się dwa warunki na znikanie członów sekularnych

$$\cos \omega t / A_0 \Omega + F \cos \varphi_0 / = 0$$

$$\sin \omega t / \alpha A_0 \omega + \frac{3}{4} \beta A_0^3 \omega^3 - F \sin \varphi_0 / = 0$$

Można stąd wyznaczyć φ_0 i A_0 , mianowicie

$$\cos \varphi_0 = - \frac{A_0 \Omega}{F} = - \frac{A_0 / \omega^2 - \omega_0^2 /}{q} \quad /13/$$

$$\alpha A_0 \omega + \frac{3}{4} \beta A_0^3 \omega^3 - \sqrt{F^2 - A_0^2 \Omega^2} = 0 \quad /14/$$

Zamiast /12/ do dalszych badań pozostaje więc równanie

$$\ddot{x}_1 + \omega^2 x_1 = - \frac{1}{4} \beta A_0^3 \omega^3 \sin 3 \omega t \quad /15/$$

Stąd

$$x_1 = A_1 \cos \omega t + \frac{1}{32} \beta A_0^3 \omega \sin 3 \omega t \quad /16/$$

Przezwstawienie /16/ do /10/ otrzymuje się

$$\ddot{x}_2 + \omega^2 x_2 = \Omega A_1 \cos \omega t + \frac{\Omega}{32} \beta A_0^3 \omega \sin 3 \omega t + \alpha A_1 \omega \sin \omega t -$$

$$\begin{aligned}
 /17/ \quad & -\kappa \frac{3}{32} A_0^3 \beta \omega^2 \cos 3 \omega t + 3 \beta A_0^2 A_1 \omega^3 \sin^3 \omega t - \\
 & - \frac{9}{32} A_0^5 \beta^2 \omega^4 \sin^2 \omega t \cos 3 \omega t - F \varphi_1 \sin \omega t \cos \varphi_0 - \\
 & - F \varphi_1 \cos \omega t \sin \varphi_0
 \end{aligned}$$

Uwzględniając, że

$$\begin{aligned}
 \sin^2 \omega t \cos 3 \omega t &= \frac{1}{2} /1 - \cos 2 \omega t / \cos 3 \omega t = \\
 &= \frac{1}{2} \cos 3 \omega t - \frac{1}{4} \cos 5 \omega t - \frac{1}{4} \cos \omega t
 \end{aligned}$$

otrzymuje się dwa warunki na znikanie członów sekularnych,

$$\cos \omega t \left[\Omega A_1 + \frac{9}{128} A_0^5 \beta^2 \omega^4 - F \varphi_1 \sin \varphi_0 \right] = 0$$

$$\sin \omega t \left[\kappa A_1 \omega + \frac{9}{4} \beta A_0^2 A_1 \omega^3 - F \varphi_1 \cos \varphi_0 \right] = 0$$

skąd można wyznaczyć A_1 i φ_1 . Jest mianowicie

$$/18/ \quad A_1 \left[\Omega - \operatorname{tg} \varphi_0 \kappa \omega - \frac{9}{4} \beta A_0^2 \omega^3 \operatorname{tg} \varphi_0 \right] = -\frac{9}{128} \beta^2 \omega^4 A_0^5$$

$$/19/ \quad \varphi_1 = \frac{1}{F \sin \varphi_0} \left[\Omega A_1 + \frac{9}{128} A_0^5 \beta^2 \omega^4 \right]$$

Stąd rozwiązanie dla I przybliżenia byłoby

$$/20/ \quad x = x_0 + \mu x_1 = /A_0 + \mu A_1 / \cos \omega t + \mu \frac{1}{32} \beta A_0^3 \omega \sin 3 \omega t$$

$$/21/ \quad \varphi = \varphi_0 + \mu \varphi_1$$

Z równań /13/ i /14/ wyznacza się φ_0 i A_0 , a z równań

$$/18/ \text{ i } /19/ \quad \varphi_1 \text{ i } A_1.$$

Dla uzyskania dalszych przybliżeń należałoby rozwiązywać /17/, które teraz przyjęłoby postać

$$\ddot{x}_2 + \omega^2 x_2 = \sin 3\omega t \left(\frac{\Omega}{32} \beta A_0^3 \omega - \frac{3}{4} \beta A_0^2 A_1 \omega^3 \right) + \\ + \cos 3\omega t / -\pi \frac{3}{32} A_0^3 \beta \omega^2 - \frac{9}{64} A_0^5 \beta^2 \omega^4 / + \\ + \cos 5\omega t / \frac{9}{128} A_0^5 \beta^2 \omega^4 /.$$

Dla zilustrowania uzyskanych wyników wykonano obliczenia dla następujących wartości liczbowych parametrów przyrządu:

$$\omega_0^2 = 40000 \text{ s}^{-2}, \quad k = 29,7 \text{ Ncm}^{-1}, \quad m = 73 \text{ g}, \quad h = 0,006 \text{ Ns},$$

$$/ \delta = \frac{h}{2m} = 40, \quad \gamma = 0,2/, \quad \varepsilon = 0,0002, \quad \mu\beta = \frac{\varepsilon}{m} = 2,7.$$

Przy tych wartościach parametrów łączna praca siły tłumienia przy amplitudzie prędkości $\dot{x}_{\max} = 5 \text{ cm/s}$ byłaby o 62,5% większa w stosunku do pracy siły tłumienia liniowego. Przy ustalonym ruchu harmonicznym $x = x_{\max} \sin t$

praca tłumika liniowego byłaby

$$L_1 = \int_0^T h \dot{x} \dot{x} dt = \int_0^T h x_{\max}^2 \omega^2 \cos^2 \omega t dt = \pi h \dot{x}_{\max} x_{\max}$$

praca tłumika nieliniowego

$$L_2 = \int_0^T \varepsilon \dot{x}^3 \dot{x} dt = \int_0^T \varepsilon x_{\max}^4 \omega^4 \cos^4 \omega t dt = \frac{3}{4} \pi \varepsilon \dot{x}_{\max}^3 x_{\max}$$

Stąd

$$\frac{L_2}{L_1} = \frac{3}{4} \frac{\varepsilon x_{\max}^2}{h} = 0,625.$$

Dla tych danych liczbowych otrzymuje się z /14/ równanie

$$80 A_0 \omega + 2,025 A_0^3 \omega^3 - \sqrt{q^2 - A_0^2 / \omega^2 - \omega^2 / 2} = 0$$

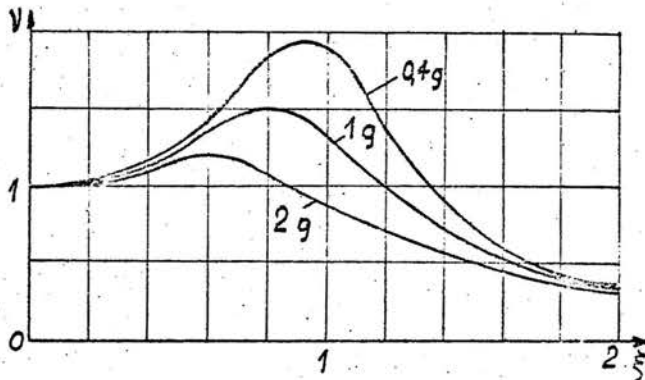
Wyznaczone zostały wartości A_0 i φ_0 dla amplitudy przyspieszenia wymuszającego $q_1 = a \omega^2 = 0,4 \text{ g}$, $q_2 = 1 \text{ g}$, $q_3 = 2 \text{ g}$, co odpowiada ugięciom statycznym $x_{st} = 0,01, 0,025$ i $0,050$ cm. Wyniki obliczeń A_0 , φ_0 i współczynnika wzmocnienia

$$\nu = \omega_0^2 \frac{A_0}{2 a \omega} \quad \text{zestawiono w tabelicy 1 i pokazano na}$$

rys. 6. Jak widać, w układzie tym występuje bardzo wyraźna zależność charakterystyk od amplitudy wymuszeń, ale poza tym krzywe przenoszenia nie wykazują innych cech stwierdzonych doświadczalnie.

Tabela 1. Wyniki obliczeń dla układu o 1 stopniu swobody z nieliniowym tłumieniem

	ω	50	100	150	200	250	300	400
	ξ	0,25	0,50	0,75	1	1,25	1,5	2
$q=0,4\text{g}$	ν	1,05	1,30	1,76	1,87	1,20	0,72	0,33
	φ_0	$10^{\circ}30'$	$12^{\circ}50'$	$40^{\circ}5'$	90°	$131^{\circ}20'$	$154^{\circ}10'$	172°
$q=1\text{g}$	ν	1,05	1,295	1,48	1,26	0,94	0,65	0,31
	φ_0	$12^{\circ}40'$	18°	$50^{\circ}10'$	90°	$121^{\circ}20'$	143°	156°
$q=2\text{g}$	ν	1,05	1,19	1,11	0,88	0,63	0,49	0,30
	φ_0	13°	$28^{\circ}20'$	61°	90°	118°	$140^{\circ}20'$	153°



Rys. 6. Charakterystyki częstotściowe układu z tłumieniem nieliniowym

Warto tu jeszcze dodać, że poprawkowe człony rozwiązania /20/ mają bardzo małe wartości. I tak, gdy $A_0 = 0,0438$ /przy $\omega = 200/$, to $A_1 = 0$, a $\frac{1}{32} \beta A_0^3 \omega = 0,0014$, czyli wynosi około 3% A_0 .

1 stopień swobody, nieliniowe tłumienie i nieliniowa sprężystość

Przyjęto, że siła tłumiąca tak jak poprzednio ma postać wg /1/, natomiast siła restytucyjna P_g

$$/23/ \quad P_g = kx + x^3$$

i badano równanie analogiczne do /4/

$$/24/ \quad \ddot{x} + \omega^2 x = \mu [\Omega x - \alpha x^3 - \beta \dot{x} - \gamma x^3 + F \cos(\omega t + \varphi)]$$

gdzie $\mu \alpha = \frac{6}{m}$. Tok postępowania jest analogiczny do opisanego poprzednio. Dla zerowego przybliżenia

$$x_0 = A_0 \cos \omega t$$

trzymuje się następujące zależności, umożliwiające wyznaczenie φ_0 i A_0

$$/25/ \quad \cos \varphi_0 = \frac{1}{F} \left[\frac{3}{4} A_0^3 \alpha - A_0 \Omega \right] = \frac{1}{q} \left[\frac{3}{4} A_0^3 \alpha - A_0 / \omega^2 - \omega_0^2 / \right]$$

$$/26/ \quad 80 A_0 \omega + \frac{3}{4} \beta A_0^3 \omega^3 - \sqrt{F^2 - \left[\frac{3}{4} A_0^3 \alpha - A_0 \Omega \right]^2} = 0$$

Równanie do dalszego badania ma postać

$$/27/ \quad \ddot{x}_1 + \omega^2 x_1 = -\frac{1}{4} A_0^3 \beta \omega^3 \sin 3\omega t - \frac{1}{4} A_0^3 \alpha \cos 3\omega t$$

a jego rozwiązanie

$$/28/ \quad x_1 = A_1 \cos \omega t + \frac{1}{32} A_0^3 / \frac{\alpha}{\omega^2} \cos 3\omega t + \beta \omega \sin 3\omega t /$$

Przyjęto, że $\bar{G} = 4750 \text{ Ncm}^{-3}$, a pozostałe dane liczbowe jak poprzednio. Przy tej wartości \bar{G} łączna praca sił sprężystych na drodze 0,025 cm będzie o 50 % większa w stosunku do pracy sprężyny liniowej. Mianowicie praca sprężyny liniowej $L_1 = \frac{1}{2} k x^2$, praca sprężyny nieliniowej $L_2 = \frac{1}{4} \bar{G} x^4$, stąd $\frac{L_2}{L_1} = \frac{1}{2} \frac{\bar{G} x^2}{k} = 0,5$

Równanie /26/ przyjmuje postać

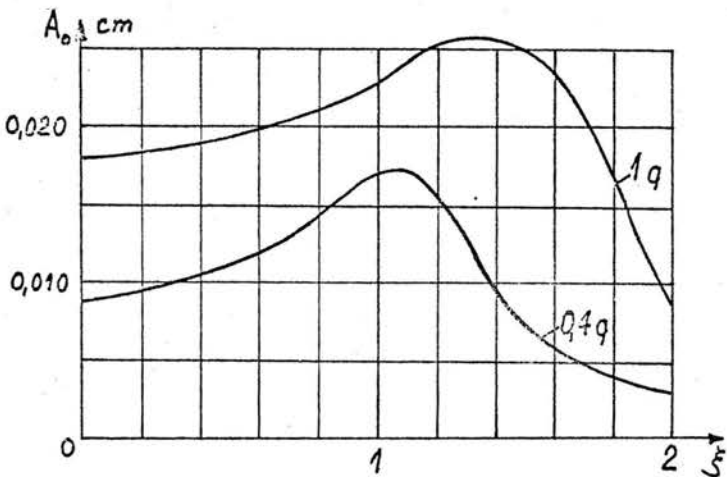
$$/29/ \quad 80 A_0 \omega + 2,025 A_0^3 \omega^3 - \sqrt{q^2 - \left[0,484 A_0^3 10^8 - A_0 / \omega^2 - \omega_0^2 / \right]^2} = 0$$

Wyznaczone zostały wartości A_0 i φ_0 dla $q_1 = 0,4 \text{ g}$ i $q_2 = 1 \text{ g}$. Wyniki zestawiono w tabelicy 2, a na rys. 7 pokazano wykresy $A_0 / \xi /$. W tym przypadku nie ma oczywiście możliwości budowania wykresów $\nu / \xi /$, ponieważ ugięcie statyczne x_{st} nie

rośnie proporcjonalnie do wymuszenia. Pokazane charakterystyki odbiegają od stwierdzonych doświadczalnie, ale mają jedną cechę podobną, mianowicie wzmocnienie maksymalne może wystąpić przy $\xi > 1$.

Tablica 2. Wyniki obliczeń dla układu o 1 stopniu swobody z nieliniowym tłumieniem i nieliniową sprężystością

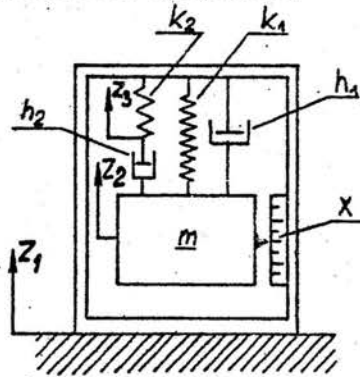
	ω	0	50	100	150	200	250	300	400
	ξ	0	0,25	0,5	0,75	1	1,25	1,5	2
$q=0,4q$	A_0	0,0092	0,0098	0,0110	0,0136	0,0166	0,0140	0,0071	0,0033
	φ_0	0	0	11°	27°	55°30'	117°30'	148°30'	175°
$q=1q$	A_0	0,018	0,0185	0,0203	0,0224	0,0254	0,025	0,0186	0,0082
	φ_0	0	0	6°	22°30'	37°20'	78°	127°	162°



Rys.7. Charakterystyki częstotliwościowe układu z nieliniowym tłumieniem i nieliniową sprężystością

Liniowy model o $1\frac{1}{2}$ stopniu swobody

Wkleśnięcie charakterystyk i przesunięcie maksimów w prawo /rys. 4 i rys. 5/ wskazuje, że czynnik tłumiący ma również cechy sprężyste. Przeprowadzono więc badania modelu, w którym masa powiązana jest z obudową poprzez reologiczny blok Voigta i równoległy z nim blok Maxwella - rys. 8. Blok Maxwella reprezentuje właśnie tę część czynnika tłumiącego, która ma również własności sprężyste.



Rys. 8. Model układu pomiarowego o $1\frac{1}{2}$ stopniu swobody

Równania ruchu mają postać

$$m \ddot{z}_2 + h_1/\dot{z}_2 - \dot{z}_1/ + h_2/\dot{z}_2 - \dot{z}_3/ + k_1/z_2 - z_1/ = 0$$

$$h_2/\dot{z}_3 - \dot{z}_2/ + k_2/z_3 - z_1/ = 0$$

Jeżeli wprowadzi się oznaczenia $\frac{h_1}{m} = 2\delta_1$, $\frac{h_2}{m} = 2\delta_2$,

$\frac{k_1}{m} = \omega_0^2$, $\frac{k_2}{m} = \omega_2^2$ oraz przyjmie, że $z_2 - z_1 = x$, $z_3 - z_1 = y$

$z_1 = a \sin \omega t$, to równania ruchu względem obudowy przyjmą postać

$$/30/ \quad \ddot{x} + /2\delta_1 + 2\delta_2/ \dot{x} + \omega_0^2 x - 2\delta_2 \dot{y} = a \omega^2 \sin \omega t$$

$$/31/ \quad 2\delta_2 \dot{y} + \omega_2^2 y = 2\delta_2 \dot{x}$$

Jeżeli przyjmiemy, że dla ruchu ustalonego

$$/32/ \quad x = A \sin / \omega t - \varphi /$$

to, po podstawieniu /32/ do /31/

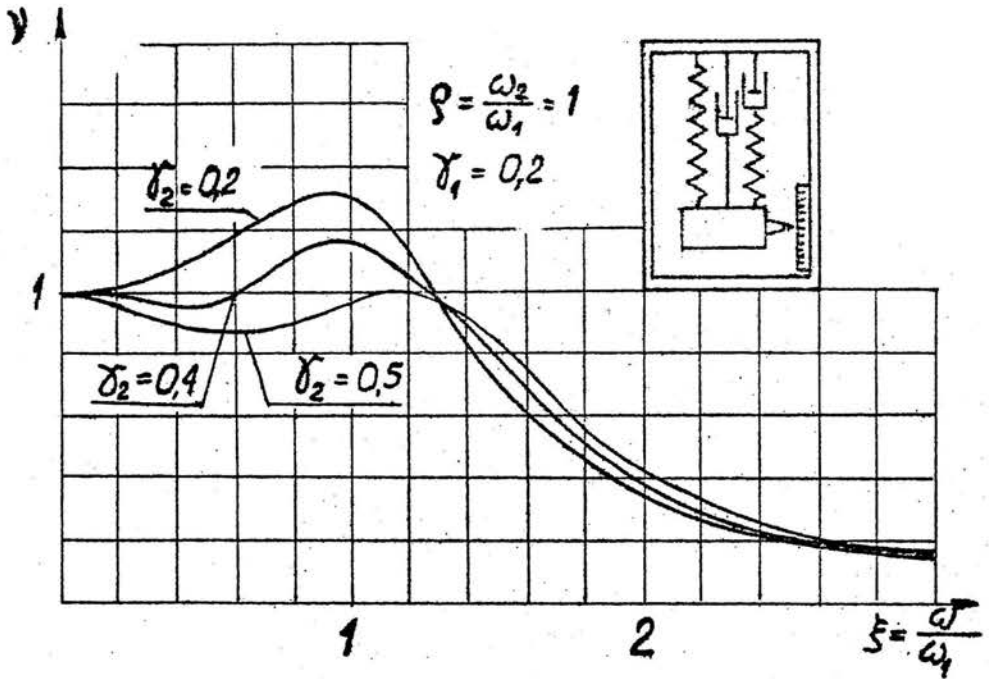
$$/33/ \quad y = \frac{2\delta_2 \omega A}{\sqrt{\omega_2^2 + 4\delta_2^2 \omega}} \cos / \omega t - \varphi - \arctg \frac{2\delta_2 \omega}{\omega_2^2} /$$

Po wprowadzeniu /33/ do /30/ uzyskuje się następujące wyniki

$$/34/ \quad A = \frac{a \xi^2 / \rho^4 + 4 \gamma_2^2 \xi^2}{\sqrt{[\rho^4(1-\xi^2) + 4\gamma_2^2 \xi^2(1+\rho^2-\xi^2)]^2 + [2\gamma_1 \xi(\rho^2 + 4\gamma_2^2 \xi^2) + 2\gamma_2 \xi \rho^4]^2}} = a \xi^2 \rho^2$$

$$/35/ \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{2\xi \gamma_1 (\rho^4 + 4\gamma_2^2 \xi^2) + 2\xi \gamma_2 \rho^4}{(1-\xi^2)\rho^4 + 4\gamma_2^2 \xi^2(1+\rho^2-\xi^2)}$$

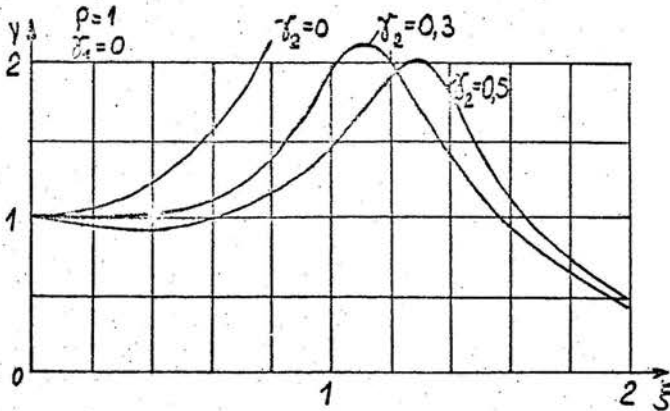
$$\text{gdzie } \frac{\omega_2}{\omega_0} = \rho, \quad \gamma_1 = \frac{\delta_1}{\omega_0}, \quad \gamma_2 = \frac{\delta_2}{\omega_0}, \quad \xi = \frac{\omega}{\omega_0}.$$



Rys. 9. Charakterystyki częstościowe liniowego układu o $1\frac{1}{2}$ stopniu swobody, gdy $\gamma_1 = 0,2$

Na rys. 9 pokazano kilka charakterystyk $v(\xi)$ wg związku /34/ a na rys. 10 kilka charakterystyk dla modelu uproszczonego, w którym $\gamma_1 = 0$. W tym przypadku masa jest związana z obudową za pomocą bloku reologicznego typu "standart".

Wyznaczone krzywe wykazują już dwie cechy, zgodnie z doświadczeniem: w obszarze $0 < \xi < \xi_m$ jest $v < 1$ a maksima są przesunięte do obszaru $\xi > 1$. Nie ma natomiast zależności od amplitudy wymuszeń.



Rys. 10. Charakterystyki częstościowe liniowego układu pomiarowego o $1\frac{1}{2}$ stopniu swobody, gdy $\gamma_1 = 0$.

Nieliniowy model o $1\frac{1}{2}$ stopniu swobody

Zbadany został model podobny do pokazanego na rys. 8. Założono, że $h_1 = 0$ oraz przyjęto, że siła sprężysta bloku Maxwella ma postać

$$/36/ \quad P_s = k_2/z_3 - z_1/ + \delta/z_3 - z_1/3$$

Po wprowadzeniu oznaczeń $\frac{h_2}{m} = 2\delta$, $\frac{k_1}{m} = \omega_0^2$, $\frac{k_2}{m} = \omega_2^2$, $\frac{\delta}{m} = \mu\alpha$, $q = a\omega^2$ i przyjęciu, że $z_2 - z_1 = x$, $z_3 - z_1 = y$, $z_1 = a \cos /\omega t + \varphi/$, równania ruchu mają postać

$$/37/ \quad \ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2 x - 2\delta\dot{y} = q \cos /\omega t + \varphi/$$

$$/38/ \quad -2\delta\dot{x} + 2\delta\dot{y} + \omega_2^2 y + \mu\alpha y^3 = 0.$$

Układ ten rozwiązywany będzie metodą perturbacji i dlatego zostaje zapisany w postaci

$$/39/ \quad \ddot{x} + \omega^2 x = \mu [\Omega_1 x - \alpha x^3 + \alpha y^3 + F \cos (\omega t + \varphi)]$$

$$/40/ \quad \ddot{y} + \omega^2 y = \mu [\Omega_2 y + \alpha x^3 - \alpha y^3 + \varepsilon \ddot{y}]$$

$$\text{gdzie } \Omega_1 = \frac{\omega^2 - \omega_0^2}{\mu}, \quad \Omega_2 = \frac{\omega^2 - \omega_2^2}{\mu}, \quad \alpha = \frac{\varepsilon \delta}{\mu},$$

$$F = \frac{g}{\mu}, \quad \varepsilon = \frac{1}{\mu}.$$

Rozwiązania układu /39/ - /40/ poszukuje się w postaci szeregów

$$/41/ \quad x = x_0 + \mu x_1 + \mu^2 x_2 + \dots$$

$$/42/ \quad y = y_0 + \mu y_1 + \mu^2 y_2 + \dots$$

$$/43/ \quad \varphi = \varphi_0 + \mu \varphi_1 + \mu^2 \varphi_2 + \dots$$

Dla pierwszych przybliżeń $\cos (\omega t + \varphi) = \cos (\omega t + \varphi_0) - \mu \varphi_1 \sin (\omega t + \varphi_0)$.

Warunki początkowe: $\dot{x}_1/t = 0 = 0$, $x_1/t + 2\pi/ = x_1/t$, $y_1/t + 2\pi/ = y_1/t$. Wprowadzając /41/ - /43/ do /39/ - /40/ i porównując człony przy μ w tej samej potęgze uzyskuje się ciąg układów równań

$$/44/ \quad \mu^0 \quad \ddot{x}_0 + \omega^2 x_0 = 0$$

$$\ddot{y}_0 + \omega^2 y_0 = 0$$

$$\begin{aligned}
 /45/ \quad \mu^1 \quad \ddot{x}_1 + \omega^2 x_1 &= \Omega_1 x_0 - \kappa \dot{x}_0 + \kappa \dot{y}_0 + F \cos \omega t \cos \varphi_0 - \\
 &\quad - F \sin \omega t \sin \varphi_0 \\
 \ddot{y}_1 + \omega^2 y_1 &= \Omega_2 y_0 + \kappa \dot{x}_0 - \alpha y_0^3 - \kappa \dot{y}_0 + \varepsilon \ddot{y}_0
 \end{aligned}$$

Rozwiązaniem układu /44/ jest układ równań

$$\begin{aligned}
 /46/ \quad x_0 &= A_0 \cos \omega t \\
 y_0 &= B_0 \cos / \omega t + \varphi_2 /
 \end{aligned}$$

Po wstawieniu /46/ do /45/ otrzymuje się układ równań

$$\begin{aligned}
 /47/ \quad \ddot{x}_1 + \omega^2 x_1 &= \Omega_1 A_0 \cos \omega t + \kappa A_0 \omega \sin \omega t - \kappa B_0 \omega \sin / \omega t + \varphi_2 / + \\
 &\quad + F \cos \omega t \cos \varphi_0 - F \sin \omega t \sin \varphi_0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 /48/ \quad \ddot{y}_1 + \omega^2 y_1 &= \Omega_2 B_0 \cos / \omega t + \varphi_2 / - \kappa A_0 \omega \sin \omega t - \\
 &\quad - \alpha B_0^3 \cos^3 / \omega t + \varphi_2 / + \kappa B_0 \omega \sin / \omega t + \varphi_2 / - \\
 &\quad - \varepsilon B_0 \omega^2 \cos / \omega t + \varphi_2 /.
 \end{aligned}$$

Z warunku znikania członów sekularnych otrzymuje się następujący układ równań, umożliwiających wyznaczenie A_0 , B_0 , φ_0 i φ_2 .

$$/49/ \quad A_0 / \omega_0^2 - \omega^2 / + 2 \delta B_0 \omega \sin \varphi_2 = q \cos \varphi_0$$

$$/50/ \quad 2 \delta A_0 \omega - 2 \delta B_0 \omega \cos \varphi_2 = q \sin \varphi_0$$

$$/51/ \quad / B_0 \omega^2 + \frac{3}{4} \alpha B_0^3 / \cos \varphi_2 - 2 \delta B_0 \omega \sin \varphi_2 = 0$$

$$/52/ \quad /B_0 \omega_2^2 + \frac{3}{4} \alpha B_0^3 / \sin \varphi_2 + 2 \delta B_0 \omega \cos \varphi_2 - 2 \delta A_0 \omega = 0.$$

Do dalszych badań pozostaje układ

$$/53/ \quad \ddot{x}_1 + \omega^2 x_1 = 0$$

$$/54/ \quad \ddot{y}_1 + \omega^2 y_1 = -\frac{1}{4} \alpha B_0^3 \cos /3 \omega t + 3 \varphi_2/$$

skąd

$$x_1 = A_1 \cos \omega t$$

$$y_1 = B_1 \cos / \omega t + \varphi_3 / + \frac{1}{32} \frac{B_0^3}{2} \cos /3 \omega t + 3 \varphi_2/$$

Zbadany zostanie jednak tylko układ /49/ - /52/. Otrzymuje się następujące związki:

$$/55/ \quad \operatorname{tg} \varphi_2 = \frac{\omega_2^2 + \frac{3}{4} \alpha B_0^2}{2 \delta \omega}$$

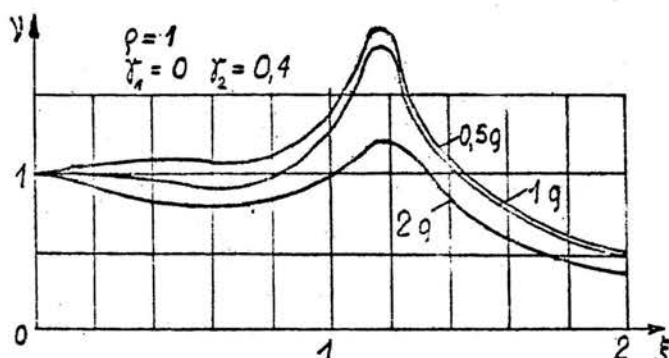
$$/56/ \quad A_0 = \frac{B_0}{\cos \varphi_2}$$

$$/57/ \quad \operatorname{tg} \varphi_0 = \frac{2 \delta \omega / \omega_2^4 + \frac{6}{4} \omega_2^2 \alpha B_0^2 + \frac{9}{16} \alpha^2 B_0^4 /}{/ \omega_0^2 - \omega^2 / / 4 \delta^2 \omega^2 + \omega_2^4 + \frac{6}{4} \omega_2^2 \alpha B_0^2 + \frac{9}{16} \alpha^2 B_0^4 / + 4 \delta^2 \omega^2 / \omega_2^2 + \frac{3}{4} \alpha B_0^2 /}$$

$$/58/ \quad B_0 \sqrt{4 \delta^2 \omega^2 + / \omega_2^2 + \frac{3}{4} \alpha B_0^2 /^2} - \frac{4 \delta^2 \omega^2}{\sqrt{4 \delta^2 \omega^2 + / \omega_2^2 + \frac{3}{4} \alpha B_0^2 /^2}} =$$

$$= q \sin \varphi_0$$

Równania /55/ - /58/ umożliwiają wyznaczenie wszystkich niewiadomych pierwszego przybliżenia, ale - jak widać - związane są z tym żmudne rachunki. Dla uzyskania danych, potrzebnych do ilustracji otrzymanych wyników, postępowano w następujący sposób: dla założonych wartości B_0 i ω wyznaczono z /57/ $\text{tg } \varphi_0$, a z /55/ $\text{tg } \varphi_2$. Obliczono następnie z /56/ A_0 , a z /58/ poszukiwano, jakiej to odpowiada wartości q . Przyjmowano wartości parametrów układu podobne do poprzednich: $\omega_0^2 = 40000$, $\omega_2^2 = 40000$, $2\delta = 160$, $\alpha = 0.645 \cdot 10^8$.



Rys. 11. Charakterystyki częstotliwościowe nieliniowego układu o $1 \frac{1}{2}$ stopniu swobody

Na rysunku 11 pokazano charakterystyki przenoszenia y/ξ dla $q_1 = 0,4 g$, $q_2 = 1 g$, $q_3 = 2 g$. Uzyskane wykresy wykazują zasadniczą zgodność postaci z krzywymi doświadczalnymi, pokazanymi na rys. 4 i 5, chociaż zostały zbudowane tylko na podstawie rozwiązania równań /39/-/40/ w pierwszym przybliżeniu.

Wnioski

1. Konieczne jest w pewnych przypadkach modelowanie bezwładnościowych przyrządów do badania drgań z tłumieniem typu olejowego za pomocą układu o $1\frac{1}{2}$ stopnia swobody, w którym masa przyrządu związana jest z obudową poprzez równoległe bloki reologiczne: Voigta i Maxwella. Blok Maxwella może być nieliniowy.
2. Możliwe jest wyznaczanie parametrów, charakteryzujących własności reologiczne płynów za pomocą badań drganiowych. Należałoby przy tym dążyć do udoskonalenia modelu obliczeniowego i opracowania metod syntezy.
3. Charakterystyki bezwładnościowych przyrządów pomiarowych powinny być wyznaczone przy kilku amplitudach wymuszeń. Jest to warunek niezbędny dla ustalania zgodności modelu z hałosem i wykrycia stopnia nieliniowości.

Literatura

1. Иорш Ю.И., Виброметрия, Изд-во маш. лит., Москва, 1960.
2. Shock and Vibration Handbook, praca zbiorowa pod red. Harris C.M. i Crede C.E., Mc Graw-Hill, N.York, 1961
3. Holzweissig F., Einführung in die Messung mechanischer Schwingungen, VEB Fachbuchverlag, Leipzig, 1963
4. Hayashi C., Nonlinear Oscillations in Physical Systems, Mc Graw-Hill, N.York, 1964

Streszczenie

W bezwładnościowych przyrządach pomiarowych charakterystyki amplitudowo-częstościowe często odbiegają od postaci odpowiadającej układowi liniowemu o jednym stopniu swobody. Jest to związane albo z nieliniowością charakterystyk układu, albo z reologicznymi własnościami płynów tłumiących. W oparciu o metodę perturbacji wyznaczone zostały charakterystyki dla różnych modeli nieliniowych i stwierdzono, że najbliższy rzeczywistości jest układ o $1\frac{1}{2}$ stopniu swobody, w którym masa związana jest z obudową przyrządu za pomocą liniowego bloku reologicznego Voigta i równoległego do niego nieliniowego bloku Maxwella. Przedstawiony model może być wykorzystany do wyznaczania parametrów charakteryzujących własności reologiczne płynów.