

Andrzej Szadkowski

**O RUCHU CZĘŚCIOWO
BEZINERCYJNEGO
ZACHOWAWCZEGO UKŁADU
MECHANICZNEGO**

4/1968

WARSZAWA



Na prawach rękopisu
Do użytku wewnętrznego

Zakład Teorii Konstrukcji Maszyn IPPT PAN
Nakład 150 egz. Ark. wyd. 1,5 . Ark. druk. 2.
Oddano do drukarni w lutym 1968 r.
Wydrukowano w lutym 1968 r. Zam. nr 133/0/68.
Warszawska Drukarnia Naukowa , Warszawa ,
ul. Śniadeckich 8

O RUCHU CZĘŚCIOWO BEZINERCYJNEGO
ZACHOWAWCZEGO UKŁADU MECHANICZNEGO

Andrzej Szadkowski

Możliwość sprowadzenia rzeczywistego ustroju konstrukcyjnego do układu dyskretnego o skończonej liczbie stopni swobody pozwala badać ruch takiego ustroju przez badanie dynamiki modelu układu pomyślanego jako skończony zbiór punktów materialnych powiązanych wzajemnie i z nieruchomym układem odniesienia tłumikami i sprężynami, które odpowiednio modelują wewnętrzne i zewnętrzne siły dyssypacyjne i zachowawcze [1]. Dotychczasowe prace z dynamiki układów mechanicznych dotyczyły niemal wyłącznie modelu mechanicznego powstałego z elementów w formie nieliniowego modelu reologicznego Voigta.

Przypadki, kiedy 1^o - cechy wewnątrzmaterialowe opisane są lepiej nieliniowym modelem reologicznym Maxwella lub mieszanym Voigta-Maxwella i 2^o - istnieją specjalne względy konstrukcyjne, np. przy bezpośrednim szeregowym oddziaływaniu na siebie elementów sprężystych i tłumiących (jeśli uzasadnione jest pominięcie mas tych elementów), nakazują łączenie szeregowo elementów reprezentujących siły i prowadzą do uogólnienia poprzedniego modelu mechanicznego dopuszczając zerowanie się pewnych mas w modelu.

chonym układzie współrzędnych w postaci

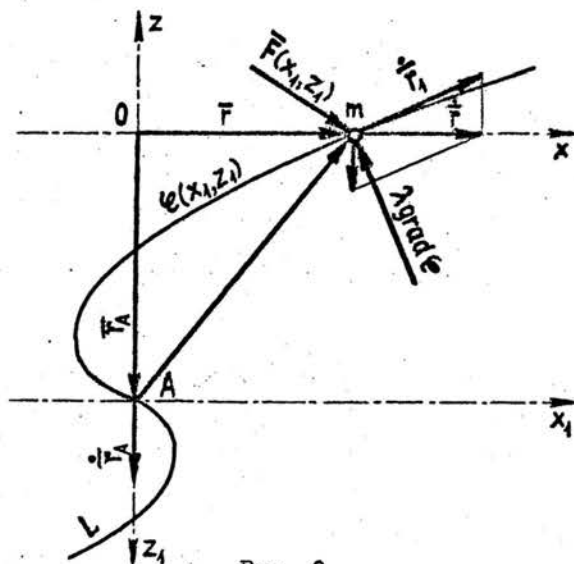
$$(4) \quad \mathcal{L}(x_1, z_1) = f_1(z_1) - f_{12}(x_1 - z_1) = 0.$$

Zauważmy, że warunek funkcyjny zobrazowany krzywą (4) jest torem ruchu masy w ruchomej płaszczyźnie konfiguracji $\{(x_1, z_1)\}$, tzn. ruchu masy m względem punktu A . Wykorzystamy tą interpretację do ustalenia pewnej analogii mechanicznej, która przydatna będzie do wyznaczenia ruchu układu M .

Niech w układzie mechanicznym \mathcal{M} (Rys. 3) masa m porusza się po krzywej geometrycznych więzów skleronomicznych dwustronnych L wyznaczonej przez (4) w płaszczyźnie konfiguracji $\{(x_1, z_1)\}$ pod działaniem sił wyznaczonych przez funkcję sił

$$(5) \quad U(x_1, z_1) = - \left[\int_0^{x_1 - z_1} f_{12}(\xi - \bar{z}) d(\xi - \bar{z}) + \int_0^{z_1} f_1(\bar{z}) d\bar{z} + \int_0^{x_1} f_2(\xi) d\xi \right]$$

i niech ruch unoszenia ruchomego układu współrzędnych x_1, z_1



Rys. 3

będzie tak dobrany, aby ruch masy m w bezwzględnym układzie współrzędnych $x, 0, z$ był prostoliniowy wzdłuż osi x , tzn.

$$(6) \quad \vec{r} = \vec{i} x, \quad \vec{r}_1 = \vec{i}_1 x_1 + \vec{j}_1 z_1, \quad \vec{r}_A = \vec{j} z_A,$$

co wobec równości (3) prowadzi do równań

$$(7) \quad \begin{aligned} \bar{r} &= \bar{r}_A + \bar{r}_1 & \text{czyli} & \quad x = x_1, \quad z_A = z_1, \\ \dot{\bar{r}} &= \dot{\bar{r}}_A + \dot{\bar{r}}_1 & \text{czyli} & \quad \dot{x} = \dot{x}_1, \quad \dot{z}_A = \dot{z}_1, \\ \ddot{\bar{r}} &= \ddot{\bar{r}}_A + \ddot{\bar{r}}_1 & \text{czyli} & \quad \ddot{x} = \ddot{x}_1, \quad \ddot{z}_A = \ddot{z}_1. \end{aligned}$$

I^0 - Wykażemy, że ruch układu \mathcal{M}^0 jest równoważny ruchowi układu M , ponieważ zjawiska dynamiczne w obu tych układach opisane są takimi samymi równaniami.

II^0 - Wyrazimy całkę energii w układzie \mathcal{M}^0 , a poprzez I^0 i w układzie M .

Na wstępie określimy pole wektorowe sił wyznaczone przez (5). W oparciu o (i)

$$U(x_1, z_1) = - [F_{12}(x_1 - z_1) + F_1(z_1) + F_2(x_1)]$$

jest sumą funkcji ciągłych jako funkcji granic górnych całek z funkcji ciągłych, a więc pochodne tych funkcji określone są przez funkcje pierwotne. Mamy

$$\begin{aligned} \frac{\partial U(x_1, z_1)}{\partial x_1} &= - [f_{12}(x_1 - z_1) + f_2(x_1)], \\ \frac{\partial U(x_1, z_1)}{\partial z_1} &= - [f_1(z_1) - f_{12}(x_1 - z_1)]. \end{aligned}$$

Funkcja skalarna $U(x_1, z_1)$ wyznacza pole wektorowe sił

$$(8) \quad \bar{F}(x_1, z_1) = \text{grad } U(x_1, z_1),$$

lub skalarnie

$$(8a) \quad \begin{aligned} F_{x_1} &= - [f_{12}(x_1 - z_1) + f_2(x_1)], \\ F_{z_1} &= - [f_1(z_1) - f_{12}(x_1 - z_1)], \end{aligned}$$

które spełnia warunek bezwirowości

$$\frac{\partial U(x_1, z_1)}{\partial x_1 \partial z_1} - \frac{\partial U(x_1, z_1)}{\partial z_1 \partial x_1} = 0 ,$$

a więc pole wektorowe (8) jest potencjalne. Stacjonarna funkcja sił $U(x_1, z_1)$ wyznacza energię potencjalną na płaszczyźnie konfiguracji $\{(x_1, z_1)\}$

$$(9) \quad V(x_1, z_1) = -U(x_1, z_1) .$$

Możemy zapisać równania ruchu masy m w ruchu względnym (Rys.3) w postaci

$$(10) \quad m \ddot{\vec{r}}_1(x_1, z_1) = \vec{F}(x_1, z_1) + \lambda \text{grad } e(x_1, z_1) + [-m \ddot{\vec{r}}_A(x, z)] ,$$

gdzie warunek więzów określony jest przez (4) . Na mocy (6) równanie różniczkowe (10) zapisze się skalarnie

$$(10a) \quad \begin{aligned} m \ddot{x}_1 &= F_{x_1}(x_1, z_1) + \lambda \frac{\partial e(x_1, z_1)}{\partial x_1} , \\ m \ddot{z}_1 &= F_{z_1}(x_1, z_1) + \lambda \frac{\partial e(x_1, z_1)}{\partial z_1} + m \ddot{z}_A . \end{aligned}$$

Założenie (i) zabezpiecza istnienie składowych $\text{grad } e(x_1, z_1)$, słuszne jest więc

$$(11) \quad \frac{d e(x_1, z_1)}{dt} = \frac{\partial e(x_1, z_1)}{\partial x_1} \dot{x}_1 + \frac{\partial e(x_1, z_1)}{\partial z_1} \dot{z}_1 = 0 .$$

Układ równań (10a) po wykorzystaniu (7) i (8a) prowadzi do równań

$$\begin{aligned} m \ddot{x}_1 &= - [f_{12}(x_1 - z_1) + f_2(x_1)] + \lambda \frac{\partial e(x_1, z_1)}{\partial x_1} , \\ 0 &= - [f_1(z_1) - f_{12}(x_1 - z_1)] + \lambda \frac{\partial e(x_1, z_1)}{\partial z_1} \end{aligned}$$

i pozwala wyrugować mnożnik więzów λ . Przy obowiązującym warunku (4) z ostatniego równania tego układu wynika, że $\lambda \equiv 0$ i ostatecznie (10a) wyraża się w układzie inercyjnym układem

równań

$$m \ddot{x} = - [f_{12}(x-z_A) + f_2(x)] ,$$

$$f_{12}(x-z_A) = f_1(z_A) .$$

Równania te są identyczne z równaniami (1) i (2), a więc teza I^o jest dowiedziona.

Wniosek 1. Fakt zerowania się mnożnika więzów $\lambda \equiv 0$ fizycznie oznacza, że nie ma reakcji więzów, a więc krzywa L założonych "więzów" istotnie jest torem swobodnego ruchu masy m w układzie \mathcal{M} .

Wniosek 2. Z (11) wynika równanie

$$\dot{z}_1 = - \frac{\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial x_1}}{\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial z_1}} \dot{x}_1 ,$$

które przy założeniu (iii) jest równoważne postaci (4) i poprzez (7) może zastępować warunek (2) dla $\partial \mathcal{E} / \partial z_1 = 0$. Istotnie (11) jako pochodna zupełna po scałkowaniu prowadzi do

$$\mathcal{E}(x_1, z_1) = C ,$$

gdzie stałą $C = 0$ wyznacza założenie (iii).

Pokażemy, że dla układu \mathcal{M} opisanego równaniami (10) i (4) istnieje tzw. uogólniona całka energii [2]. W tym celu rozpatrzmy poszczególne człony równania (10) pomnożonego skalarnie przez $\dot{\bar{r}}_1$ uwzględniając, że $\lambda \equiv 0$, czyli

$$(12) \quad m \ddot{\bar{r}}_1 \dot{\bar{r}}_1 = \bar{F} \dot{\bar{r}}_1 - m \ddot{\bar{r}}_A \dot{\bar{r}}_1 .$$

Ponieważ ruchomy układ współrzędnych nie obraca się w stosunku do układu inercjalnego, dla dowolnego wektora \bar{a} słuszna jest zależność $d\bar{a}/dt = d'\bar{a}/dt$, gdzie symbol d'/dt oznacza różniczkowanie w układzie ruchomym. Stosując zasady różniczkowania w ruchu względnym otrzymamy

$$m \ddot{\bar{r}}_1 \dot{\bar{r}}_1 = \frac{d'}{dt} \left(\frac{m \dot{\bar{r}}_1^2}{2} \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{m \dot{\bar{r}}_1^2}{2} \right) ,$$

$$\bar{F} \dot{\bar{r}}_1 = \frac{\text{grad } U \, d' \bar{r}_1}{dt} = \frac{d' U}{dt} = \frac{dU}{dt} ,$$

$$m \ddot{\bar{r}}_A \dot{\bar{r}}_1 = m \ddot{\bar{r}}_1 \dot{\bar{r}}_1 - m \ddot{\bar{r}}_1 \dot{\bar{r}}_1 = \frac{d}{dt} \left(\frac{m \dot{\bar{r}}_1^2}{2} \right) - \frac{d}{dt} \left(\frac{m \dot{\bar{r}}_1^2}{2} \right) .$$

W rezultacie tych przekształceń (12) zapisze się w postaci

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{m \dot{\bar{r}}_1^2}{2} \right) = \frac{dU}{dt} ,$$

która prowadzi do całki energii

$$\frac{m \dot{\bar{r}}_1^2}{2} = U + \text{const}$$

lub po skorzystaniu z (6), (7) i (9)

$$(13) \quad \frac{m \dot{\bar{x}}^2}{2} + V(x, z_A) = h ,$$

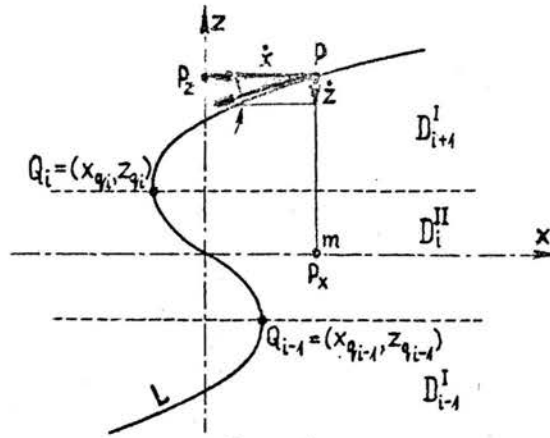
gdzie h jest stałą dowolną i wyraża całkowitą energię mechaniczną układu \mathcal{M} , a więc i M (co dowodzi II^o).

W n i o s e k 3. Ponieważ dopuszczamy niejednoznaczność rozwikłania warunku (2) ze względu na x i z , należy podawać warunki początkowe w postaci

$$(14) \quad x(0) = x_0 , \quad z(0) = z_0 , \quad \dot{x}(0) = \dot{x}_0 ,$$

mimo, że poprzez (iii) tylko dwa z nich są niezależne. Zadanie warunków początkowych (14) pozwoli na jednoznaczne określenie ruchu układu.

W n i o s e k 4. Unieruchamiając układ współrzędnych poruszający się wraz z punktem A możemy interpretować ruch układu M (Rys.4) jako ruch punktu P po krzywej określonej przez (2).



Rys. 4

Każdemu położeniu na krzywej odpowiada energia potencjalna określona przez (9) z uwzględnieniem (7), a więc $V(x, z)$. Niech tylko rzut P_x punktu P na oś x będzie obdarzony całą masą m , a więc i całkowitą energią kinetyczną układu $m\dot{x}^2/2$, wtedy będzie obowiązywała całka energii w postaci (13). Odpowiednio bezmasowy rzut P_z punktu P na oś z będzie reprezentował punkt A modelu.

3. Przy dalszych rozważaniach wygodniej będzie równania (1) i (2) przedstawić w postaci normalnej

$$(15) \quad \begin{aligned} \dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= -\frac{1}{m} [f_{12}(x-z) + f_2(x)], \\ \mathcal{E}(x, z) &= Q, \end{aligned}$$

albo z uwagi na Wniosek 2 w postaci równoważnej

$$(15a) \quad \begin{aligned} \dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= -\frac{1}{m} [f_{12}(x-z) + f_2(x)], \\ \dot{z} &= -\frac{\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial x}}{\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial z}} y. \end{aligned}$$

Założymy dodatkowo, że

(iv) - funkcja φ jest jednoznaczna względem z *) .

Zgodnie z interpretacją podaną we Wniosku 4 będziemy badali ruch punktu P na płaszczyźnie $\{(x,y)\}$.

Układ równań (15) wyznacza w przestrzeni fazowej E^4 trajektorie ruchu punktu P, które leżą na dwuwymiarowej hiperpowierzchni wyznaczonej przez ostatnie równanie układu (15). Śladem tej hiperpowierzchni na płaszczyźnie $\{(x,z)\}$ jest krzywa L. Dla określenia trajektorii będziemy wyznaczali ich rzuty na płaszczyzny fazowe $\{(x,y)\}$ i $\{(z,z)\}$ stanowiące odpowiednio obrazy ruchu masy m i punktu A.

Kąt pochylenia stycznej do krzywej L w punkcie P (Rys.4) określony jest przez zależność

$$\operatorname{tg} \omega = - \frac{\frac{\partial \varphi}{\partial x}}{\frac{\partial \varphi}{\partial z}} .$$

Wprowadźmy podział płaszczyzny $\{(x,y)\}$ na kolejne obszary D_i ($i = 1, 2, \dots, n; n \geq 1$) rozdzielone normalnymi do krzywej L równoległymi do osi x. Oczywiście w tych obszarach krzywa L jest ściśle monotoniczna ((iv)), $\operatorname{tg} \omega$ jest stałego znaku. W zależności od znaku $\operatorname{tg} \omega$ mamy dwa typy obszarów D_i :

- D^I - dla $\operatorname{tg} \omega > 0$, tzn. kiedy $\operatorname{sign} \dot{x} = \operatorname{sign} \dot{z}$;
 D^{II} - dla $\operatorname{tg} \omega < 0$, tzn. kiedy $\operatorname{sign} \dot{x} = - \operatorname{sign} \dot{z}$.

Zgodnie z podziałem na obszary D_i w przypadku przegięcia krzywej L ze styczną pionową mamy do czynienia z graniczeniem obszarów tego samego typu.

Poprzez (7) i (9) mamy zapisaną energię potencjalną $V(x,z)$ wzdłuż krzywej L, jest ona funkcją ciągłą. Dla dowolnych warun-

*) - założenie to nie wyklucza możliwości badania przypadków niejednoznaczności względem x, lub niejednoznaczności względem x i z, które wymagają innej nieco procedury badania.

ków początkowych (14) mamy wyznaczony odpowiedni obszar D_p oraz całkowitą energię mechaniczną

$$h = \frac{m y_0^2}{2} + V(x_0, z_0).$$

Odpowiednią krzywą całkową zbudujemy korzystając z (13) i zawsze pozostając na krzywej L.

Niech będzie rozwikłanie^{*)} warunku (2) dla poszczególnych obszarów D_i w postaci

$$(16) \quad z = z_1(x) \quad \text{dla} \quad z_{q_{i-1}} \leq z \leq z_{q_i}.$$

Poszczególne gałęzie energii potencjalnej dla łuków krzywej L zawartych w odpowiednich obszarach D_i wyrażą się w zależności od jednej zmiennej x

$$(17) \quad V_i(x) = V(x, z_1(x)),$$

a z (13)

$$(18) \quad y_1 = \sqrt{\frac{2}{m} [h - V_i(x)]}$$

wyznacza trajektorie na rzutni $\{(x, y)\}$ odpowiadające obszarowi D_i . Trajektorie $y_k(x)$, $y_l(x)$ powstałe ze zrzutowania z obszarów D_k i D_l ($k \neq l$) oczywiście mogą przecinać się, o ile odpowiednie łuki krzywej L rzutując się na oś x zachodzą na siebie. Przez skorzystanie z ostatniego równania układu (15a) i funkcji (16) mamy natychmiast krzywe całkowite na rzutni $\{(z, \dot{z})\}$.

Zbadajmy przypadek, gdy punkt P poruszając się po krzywej L zbliży się do punktu $Q_i = (x_{q_i}, z_{q_i})$ rozdzielającego obszary D_i i D_{i+1} (Rys.4). Przyjmijmy, że energia mechaniczna ukła-

*) - jeśli rozwikłanie warunku (2) jest niemożliwe, możemy wykreślić przeprowadzić badanie przybliżone. Należy w tym celu 1^o - zbudować krzywą L na płaszczyźnie $\{(x, z)\}$, 2^o - wykreślić rzut $V(x)$ trójwymiarowej krzywej energii potencjalnej $V(x, z)$ obliczonej dla punktów krzywej L i 3^o - korzystając z (13) wykreślić rzut trajektorii $y(x)$, [3].

du jest na tyle duża

$$h > V_{q_1}(x_{q_1}, z_{q_1}),$$

że układ posiada w chwili zbliżenia i osiągnięcia punktu Q_1 energię kinetyczną, tzn. $|\dot{x}| > 0$. Rozpatrzmy dwa przypadki:

1). Niech D_i i D_{i+1} będą obszarami różnych typów. Ponieważ punkt P nie może opuścić krzywej L (Wniosek 1), a prawo zachowania energii jest zawsze obowiązujące (II^0), więc przy zachowanym warunku $|\dot{x}| > 0$ prędkość \dot{x} musi zmienić znak. Istnieją dwie równoprawne alternatywy przebiegu zjawiska:

a) - przejście punktu P do obszaru następnego, czyli

$$\text{sign } \dot{x}^* = - \text{sign } \dot{x}^{**}, \quad \text{sign } \dot{z}^* = \text{sign } \dot{z}^{**},$$

b) - powrót punktu P do obszaru poprzedniego, czyli

$$\text{sign } \dot{x}^* = - \text{sign } \dot{x}^{**}, \quad \text{sign } \dot{z}^* = - \text{sign } \dot{z}^{**},$$

gdzie * - oznacza stan przed dojściem P do Q_1 , ** - stan po odejściu P od Q_1 .

2). Niech D_i i D_{i+1} będą obszarami jednego typu. Z tych samych względów co poprzednio też są dwie alternatywy przebiegu zjawiska:

a) - przejście punktu P do obszaru następnego, czyli

$$\text{sign } \dot{x}^* = \text{sign } \dot{x}^{**}, \quad \text{sign } \dot{z}^* = \text{sign } \dot{z}^{**},$$

b) - powrót punktu P do obszaru poprzedniego, czyli

$$\text{sign } \dot{x}^* = - \text{sign } \dot{x}^{**}, \quad \text{sign } \dot{z}^* = - \text{sign } \dot{z}^{**}.$$

W obu przypadkach mamy $|\text{tg } \omega| \xrightarrow{P \rightarrow Q_1} \infty$, co oznacza, że $|\dot{z}| \xrightarrow{P \rightarrow Q_1} \infty$ (prawa strona ostatniego z równań (15a) w punktach Q_1 posiada nieciągłość).

Zmiana znaku prędkości masy przy obowiązującej zasadzie zachowania energii w przypadkach 1) oraz 2)b) oznacza, że zjawisko przejścia punktu P przez Q_1 nosi charakter idealnie sprężystego odbicia masy m w położeniu x_{q_1} .

Wyznamy położenia równowagi układu mechanicznego M opisanego równaniami (15), w których współrzędne układu zachowują w czasie stałą wartość, a prędkości są równe zeru. W przestrzeni fazowej E^4 odpowiadają im pewne położenia $R = (x_R, 0, z_R, 0)$ punktu reprezentującego, tzw. punkty spoczynku.

Zerowanie się prawych stron równań różniczkowych (15), tzn.

$$(19) \quad \begin{aligned} y &= 0, \\ f_{12}(x-z) + f_2(x) &= 0 \end{aligned}$$

nie jest warunkiem dostatecznym, aby współrzędne przestrzeni E^4 wyznaczone przez (19) i ostatnie równanie układu (13) były współrzędnymi punktów spoczynku. Warunek dostateczny jest wyznaczony przez układ równań

$$(19a) \quad \begin{aligned} y &= 0, \\ f_{12}(x-z) + f_2(x) &= 0, \\ \frac{\frac{\partial e}{\partial x}}{\frac{\partial e}{\partial z}} y &= 0 \end{aligned}$$

powstały z wyzerowania prawych stron układu równań (15a).

Niech układ (19) ma j -te rozwiązanie

$$(20) \quad x_j = x_{R_j}, \quad y_j = 0, \quad z_j = z_{R_j}$$

leżące wewnątrz obszaru D_i . Ponieważ w obszarze D_i

$$\operatorname{tg} \omega = \frac{\frac{\partial e}{\partial x}}{\frac{\partial e}{\partial z}} = B, \quad |B| < \infty,$$

więc wszystkie równania układu (19a) są spełnione i istotnie R_j jest punktem spoczynku.

Niech j -te rozwiązanie układu (19) leży na granicy obszarów D_i i D_{i+1} , tzn.:

$$(21) \quad x_{R_j} = x_{q_i}, \quad y_j = 0, \quad z_{R_j} = z_{q_i}.$$

Współrzędne (21) mogą nie wyznaczać punktu spoczynku. Istotnie w punktach rozgraniczających obszary

$$\frac{1}{\operatorname{tg} \omega} = - \frac{\frac{\partial \epsilon}{\partial z}}{\frac{\partial \epsilon}{\partial x}} = 0 ,$$

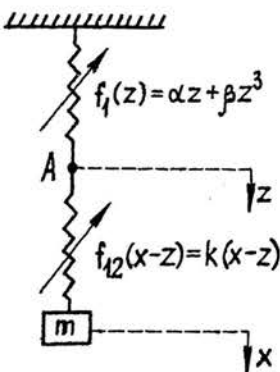
a więc trzecie równanie układu (15a) wyznacza współrzędną \dot{z}_j jako symbol nieoznaczony. Punkty $Q_i = (x_{Q_i}, y, z_{Q_i}, \dot{z})$ przestrzeni E^4 są punktami nieciągłości trajektorii ze względu na nieoznaczoność \dot{z} .

Możliwe są jakościowo różne przypadki nieciągłości trajektorii w zbiorze punktów określonych przez (21) w zależności od tego, czy

$$\lim_{P \rightarrow Q_i} \frac{\frac{\partial \epsilon}{\partial x}}{\frac{\partial \epsilon}{\partial z}} y$$

dla $h = V_{Q_i}$ jest zerem, czy wartością skończoną różną od zera^{*)}.

4. Pokażemy zastosowanie przedstawionej metody określania krzywych całkowych rozpatrując układ mechaniczny (Rys.5), w którym połączono szeregowo sprężystość liniową k z nieliniową $f_1(z) = \alpha z + \beta z^3$, gdzie k , α i β - współczynniki stałe.



Rys. 5

Badanie przeprowadzimy w zależności od współczynników charakterystyk.

Założenia (i), (ii) są spełnione; będziemy zakładali: 1^o - $k > 0$, 2^o - zachodzi (iii).

Rozpatrzmy równania różniczkowe ruchu w postaci (15a)

^{*)} - szczegółowe badanie punktów osobliwych wykracza poza ramy tej pracy.

$$(22) \quad \begin{aligned} \dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= -\frac{k}{m}(x-z), \\ \dot{z} &= \frac{k}{3\beta z^2 + \alpha + k} y, \end{aligned}$$

gdzie ostatnie równanie układu równoważne jest warunkowi algebraicznemu

$$(23) \quad k(x-z) = \alpha z + \beta z^3$$

wyznaczającemu krzywą L. Warunek ten zapiszemy inaczej

$$(23a) \quad \varphi(x, z) = z^3 + pz + qx = 0,$$

gdzie

$$(24) \quad p = \frac{\alpha + k}{\beta}, \quad q = -\frac{k}{\beta}.$$

Energia potencjalna układu wynosi

$$V(x, z) = \frac{k}{2}(x-z)^2 + \frac{\alpha}{2}z^2 + \frac{\beta}{4}z^4,$$

a poprzez (23) można przedstawić ją w postaci

$$(25) \quad V(z) = \frac{\beta}{2k} \left[\beta z^6 + \frac{4\alpha + k}{2} z^4 + \frac{\alpha(\alpha + k)}{\beta} z^2 \right].$$

Wyznaczmy współrzędne punktów Q_1 rozgraniczających obszary ścisłej monotoniczności krzywej L z warunku $\partial \varphi / \partial z = 0$

$$(26) \quad \begin{aligned} x_{q_{1,2}} &= \pm x_q = \pm \frac{2p}{3q} \sqrt{-\frac{p}{\beta}} = \mp \frac{2(\alpha + k)}{3k} \sqrt{-\frac{\alpha + k}{3\beta}}, \\ z_{q_{1,2}} &= \mp z_q = \mp \sqrt{-\frac{p}{\beta}} = \mp \sqrt{-\frac{\alpha + k}{3\beta}}. \end{aligned}$$

Oczywiście współrzędne te istnieją w dziedzinie liczb rzeczywistych, a więc dla $p \leq 0$. Dla $p > 0$ cała płaszczyzna $\{(x, z)\}$ jest obszarem typu D^I , krzywa L odwzorowuje jednojednoznacznie x w z .

Określimy położenia równowagi układu mechanicznego (x_{r_j}, z_{r_j}) ,

którym odpowiadają punkty spoczynku R_j w przestrzeni fazowej E^4 . Warunek konieczny (zerowania dwu pierwszych równań (22), przy spełnionym warunku (23a)) wyznacza na płaszczyźnie $\{(x, z)\}$ współrzędne jako pierwiastki rzeczywiste równań

$$z_r(z_r^2 + p + q) = 0, \quad x_r = z_r$$

w postaci

$$(27) \quad x_{r_1} = z_{r_1} = 0,$$

$$(28) \quad x_{r_{2,3}} = z_{r_{2,3}} = \mp \sqrt{-(p+q)} = \mp \sqrt{-\frac{\alpha}{\beta}}$$

dla $\alpha/\beta \leq 0$. Współrzędne (27) wyznaczają położenia równowagi przy $\alpha \neq -k$, a współrzędne (28) przy $\alpha \neq k/2$ (wykluczone przypadki odpowiadają nieoznaczoności prawej strony ostatniego równania (22)).

Rozpatrzmy wszystkie możliwe przypadki obrazów fazowych rozpatrywanego układu z wyjątkiem przypadku banalnego $\beta = 0$ i fizycznie nieinteresującego przypadku całkowicie ujemnej charakterystyki: $\alpha \leq 0$, $\beta < 0$.

P r z y p a d e k : $\alpha < -k$, $\beta > 0$. Trzy pierwiastki rzeczywiste (27) i (28) wyznaczają trzy położenia równowagi, istnieją dwa punkty rozgraniczenia obszarów (26) na krzywej L przy czym $x_q > 0$, $z_q > 0$ (Rys.6a).

Korzystając ze znanych wzorów otrzymamy rozwikłanie warunku (23a) ze względu na zmienną z . W poszczególnych obszarach D_i ($i = 1, 2, 3$) mamy odpowiednio

$$(29) \quad z_1(x) = \begin{cases} \frac{-2\sqrt{-\frac{p}{3}}}{\sin \delta(x)} & \text{dla } x \leq -x_q, \\ 2\sqrt{-\frac{p}{3}} \cos \left[\varepsilon(x) + \frac{2}{3}\pi \right] & \text{dla } -x_q \leq x \leq x_q; \end{cases}$$

$$z_2(x) = 2\sqrt{-\frac{p}{3}} \cos \left[\varepsilon(x) + \frac{4}{3}\pi \right];$$

$$z_3(x) = \begin{cases} 2\sqrt{-\frac{p}{3}} \cos \varepsilon(x) & \text{dla } -x_q \leq x \leq x_q, \\ \frac{-2\sqrt{-\frac{p}{3}}}{\sin \delta(x)} & \text{dla } x \geq x_q, \end{cases}$$

gdzie

$$\delta(x) = 2 \operatorname{arc} \operatorname{tg} \sqrt[3]{\operatorname{tg} \frac{1}{2} \operatorname{arc} \sin(-\frac{x_q}{x})}, \quad \varepsilon(x) = \frac{\operatorname{arc} \cos \frac{x}{x_q}}{3}.$$

Oczywiście będziemy przyjmowali tylko wartości główne funkcji odwrotnych.

Podstawiając (29) do (25) otrzymamy poszczególne gałęzie energii potencjalnej odpowiadające obszarom D_i ($i = 1, 2, 3$) w postaci

$$V_1(x) = \begin{cases} d_1 \left[\frac{d_2}{\sin^6 \delta(x)} - \frac{d_3}{\sin^4 \delta(x)} + \frac{d_4}{\sin^2 \delta(x)} \right] - & \text{dla } x \leq -x_q, \\ d_1 \left\{ d_2 \cos^6 \left[\varepsilon(x) + \frac{2}{3} \pi \right] - d_3 \cos^4 \left[\varepsilon(x) + \frac{2}{3} \pi \right] + \right. & \\ \left. + d_4 \cos^2 \left[\varepsilon(x) + \frac{2}{3} \pi \right] \right\} & \text{dla } -x_q \leq x \leq x_q; \end{cases}$$

$$(30) \quad V_2(x) = d_1 \left\{ d_2 \cos^6 \left[\varepsilon(x) + \frac{4}{3} \pi \right] - d_3 \cos^4 \left[\varepsilon(x) + \frac{4}{3} \pi \right] + \right. \\ \left. + d_4 \cos^2 \left[\varepsilon(x) + \frac{4}{3} \pi \right] \right\};$$

$$V_3(x) = \begin{cases} d_1 \left[d_2 \cos^6 \varepsilon(x) - d_3 \cos^4 \varepsilon(x) + d_4 \cos^2 \varepsilon(x) \right] - & \text{dla } -x_q \leq x \leq x_q, \\ d_1 \left[\frac{d_2}{\sin^6 \delta(x)} - \frac{d_3}{\sin^4 \delta(x)} + \frac{d_4}{\sin^2 \delta(x)} \right] - & \text{dla } x \geq x_q, \end{cases}$$

gdzie

$$d_1 = \frac{2}{3} \frac{(\alpha + k)^2}{k} > 0, \quad d_2 = -\frac{16}{9} (\alpha + k) > 0, \\ d_3 = -\frac{2}{3} (4\alpha + k) > 0, \quad d_4 = -\alpha > 0.$$

Przebieg zmienności energii wzdłuż krzywej L ilustrują Rys.6b.)

i Rys.6b₂).

Zbadamy szczegółowo krzywą energii potencjalnej $V(x)$ o postaci analitycznej (30). Krzywa ta składa się z trzech gałęzi $V_1(x)$ i posiada oś symetrii $x = 0$. Wszystkie gałęzie krzywej są wypukłe i mają po jednym minimum określonym przez współrzędną x_{rj} odpowiedniego położenia równowagi.

Łatwo wykazać, że w punktach K_1 i K_3 , po obu stronach których odpowiednie gałęzie mają różny zapis analityczny, są one gładkie i wyznaczają: np. dla punktu K_3 - energię

$$V_3(x_q) = -\frac{10k + \alpha}{9}$$

i kąt nachylenia stycznej

$$\lim_{x \rightarrow x_q} \frac{dV_3}{dx} = -\frac{2}{3} \sqrt{-\frac{\alpha + k}{3\beta}} (\alpha + 4k).$$

Minima funkcji dla gałęzi $V_1(x)$ i $V_3(x)$ mogą być dowolnie położone względem punktów K_1 i K_3 .

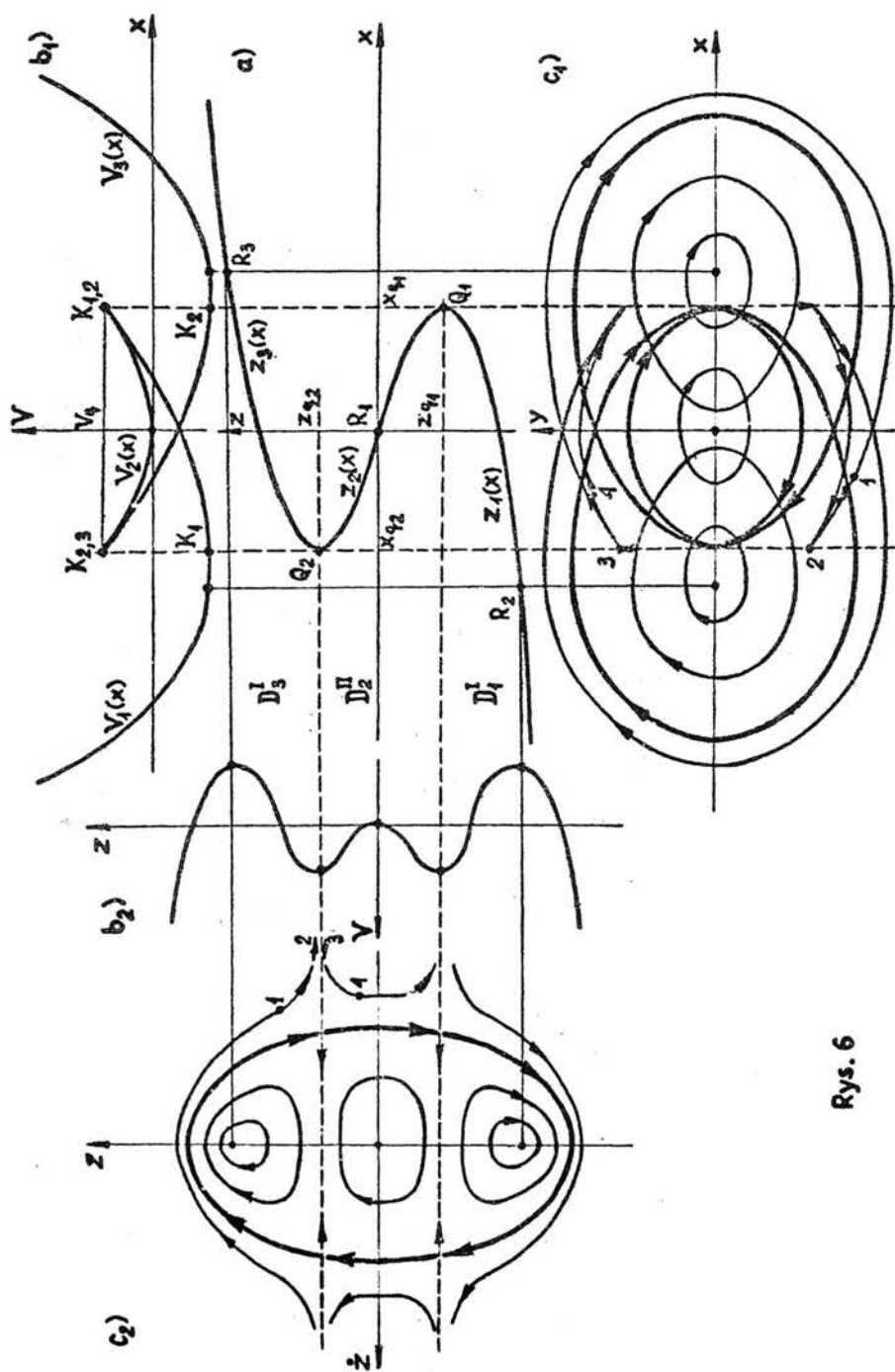
Można wykazać, że punkty $K_{1,2}$ i $K_{2,3}$ są punktami osobliwymi krzywej $V(x)$, w punktach tych spotykają się nie biegnąc dalej po dwie gałęzie krzywej, przy czym obie w punkcie spotkania mają wspólną styczną i są w pobliżu punktu osobliwego po tej samej stronie stycznej, a więc punkty $K_{1,2}$ i $K_{2,3}$ są punktami zwrotu drugiego rodzaju. Wyznaczają one: np. $K_{2,3}$ - dodatnią energię

$$(31) \quad V_q = V_2(-x_q) = V_3(-x_q) = \frac{1}{108} \frac{(\alpha + k)^2 (k - 8\alpha)}{k\beta} > 0$$

i styczną o nachyleniu

$$\lim_{x \rightarrow -x_q} \frac{dV_2}{dx} = \lim_{x \rightarrow -x_q} \frac{dV_3}{dx} = \frac{1}{3} \sqrt{-\frac{\alpha + k}{3\beta}} (2\alpha - k) < 0.$$

Punkty K_1 i K_3 leżą poniżej punktów $K_{1,2}$ i $K_{2,3}$, więc gałęzie odpowiadające sąsiednim obszarom nie przecinają się.



Rys. 6

Zauważmy ponadto, że

$$V(x) \xrightarrow{x \rightarrow \pm \infty} \infty.$$

Zgodnie z rozważaniami z §3 korzystając z zależności (18) otrzymany rzuty $y(x)$ trajektorii jako rzuty krzywych stałej energii mechanicznej na płaszczyznę fazową $\{(x,y)\}$ (Rys.6c₁). Z trzeciego równania układu (22), wyrażając y przez (25), otrzymamy rzut trajektorii na płaszczyznę $\{(z,\dot{z})\}$ (Rys.6c₂) w postaci

$$(32) \quad \dot{z} = \sqrt{e_1 \left[-e_2 z^2 + e_3 + \frac{h - V_q}{(e_4 z^2 + e_5)^2} \right]},$$

gdzie

$$e_1 = 2 \frac{k^2}{m} > 0, \quad e_2 = \frac{1}{18k} > 0, \quad e_3 = \frac{k - 8\alpha}{108\beta k} > 0,$$

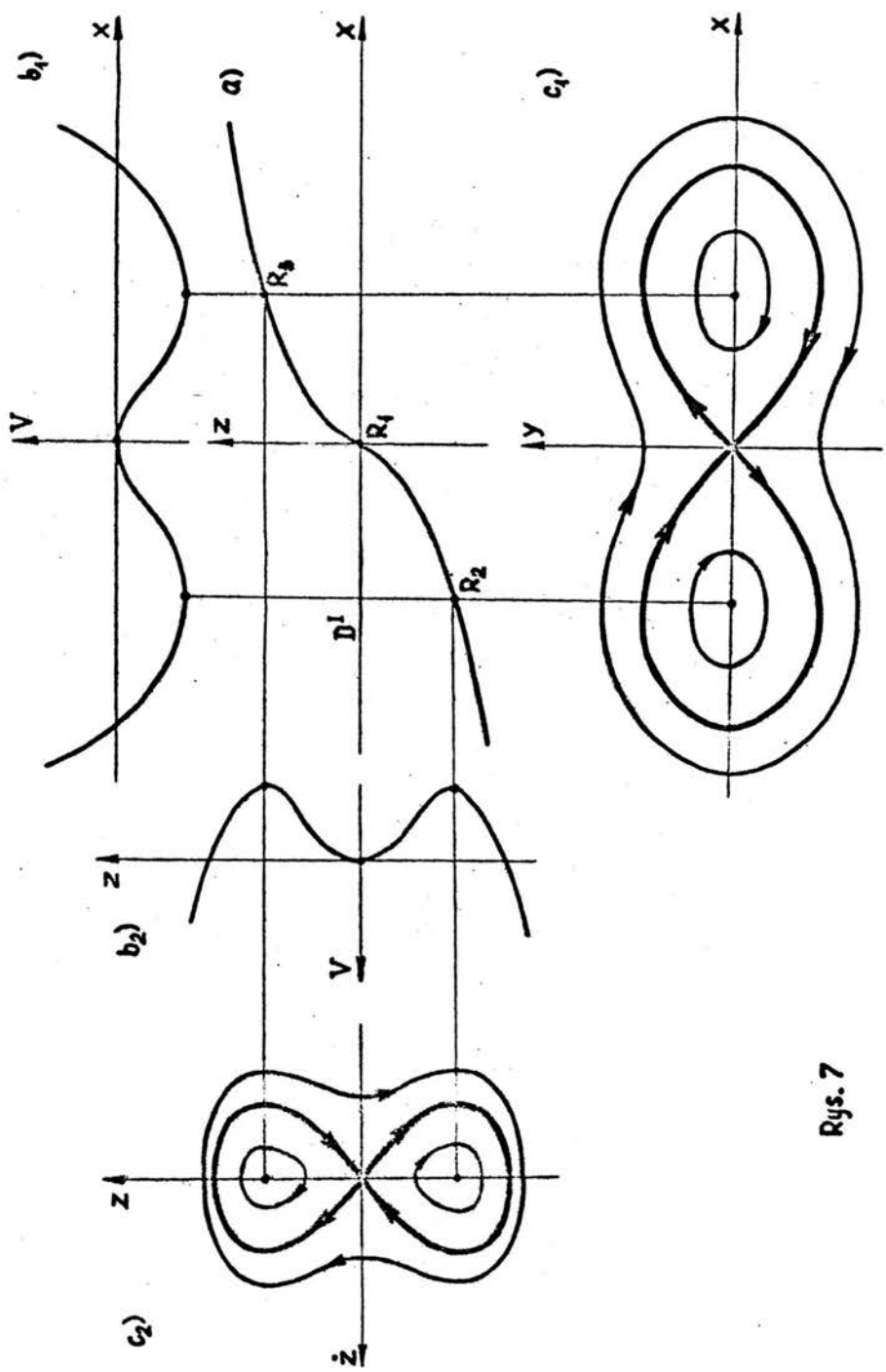
$$e_4 = 3\beta > 0, \quad e_5 = \alpha + k > 0.$$

W zależności od poziomu energii h mamy różne rodzaje trajektorii:

Dla $h < V_q$ wszystkie krzywe na obu rzutniach fazowych, niezależnie od obszaru D_j , są krzywymi zamkniętymi leżącymi w odpowiednim obszarze D_j , które przebiegają dookoła centrów znajdujących się w punktach spoczynku R_j ($j = 1, 2, 3$)^{*)};

Dla $h > V_q$ trajektorie są krzywymi nieciągłymi. Współrzędne punktów Q_1 i Q_2 wyznaczają na rzutniach linie nieciągłości: proste $x = x_{q_1}$, $x = x_{q_2}$ na rzutni $\{(x,y)\}$ są liniami odbicia sprężystego (por. §3), odpowiadające im proste $z = z_{q_1}$ i $z = z_{q_2}$ na $\{(z,\dot{z})\}$ są asymptotami trajektorii. Rozpatrzmy (np. zgodnie z alternatywą a)) przejście punktu reprezen-

^{*)} - łatwo sprawdzić rozwijając prawe strony układu (22), przy znanym rozwikłaniu (27), wg szeregu Maclaurina w punktach spoczynku i stosując kryterium Poincaré dla jednego stopnia swobody ([3]), że rzuty punktów spoczynku na obie rzutnie są punktami osobliwymi typu centrum.



Rys. 7

tującego np. z obszaru D_3 do D_2 . W obszarze D_3 punkt-obraz porusza się po odpowiedniej trajektorii (poł.1), dochodząc do linii nieciągłości (poł.2). Następuje przeskok do położenia 3 na rzutni $\{(x,y)\}$, któremu odpowiada osiągnięcie $\dot{z} = -\infty$ na rzutni $\{(z,\dot{z})\}$. Dalszy ruch odbywa się po trajektorii obszaru D_2 (poł.4), aż do następnej linii nieciągłości i td.;

Dla $h = V_q$ trajektoria, przedstawiona na Rys.6 linią grubą, oddziela od siebie różne jakościowo rozwiązania. Jak widać z (32) trajektoria

$$(32a) \quad \frac{\dot{z}^2}{\frac{k(k-8\alpha)}{59m\beta}} + \frac{z^2}{\frac{9(k-8\alpha)}{59}} = 1, \quad z \neq \pm z_q$$

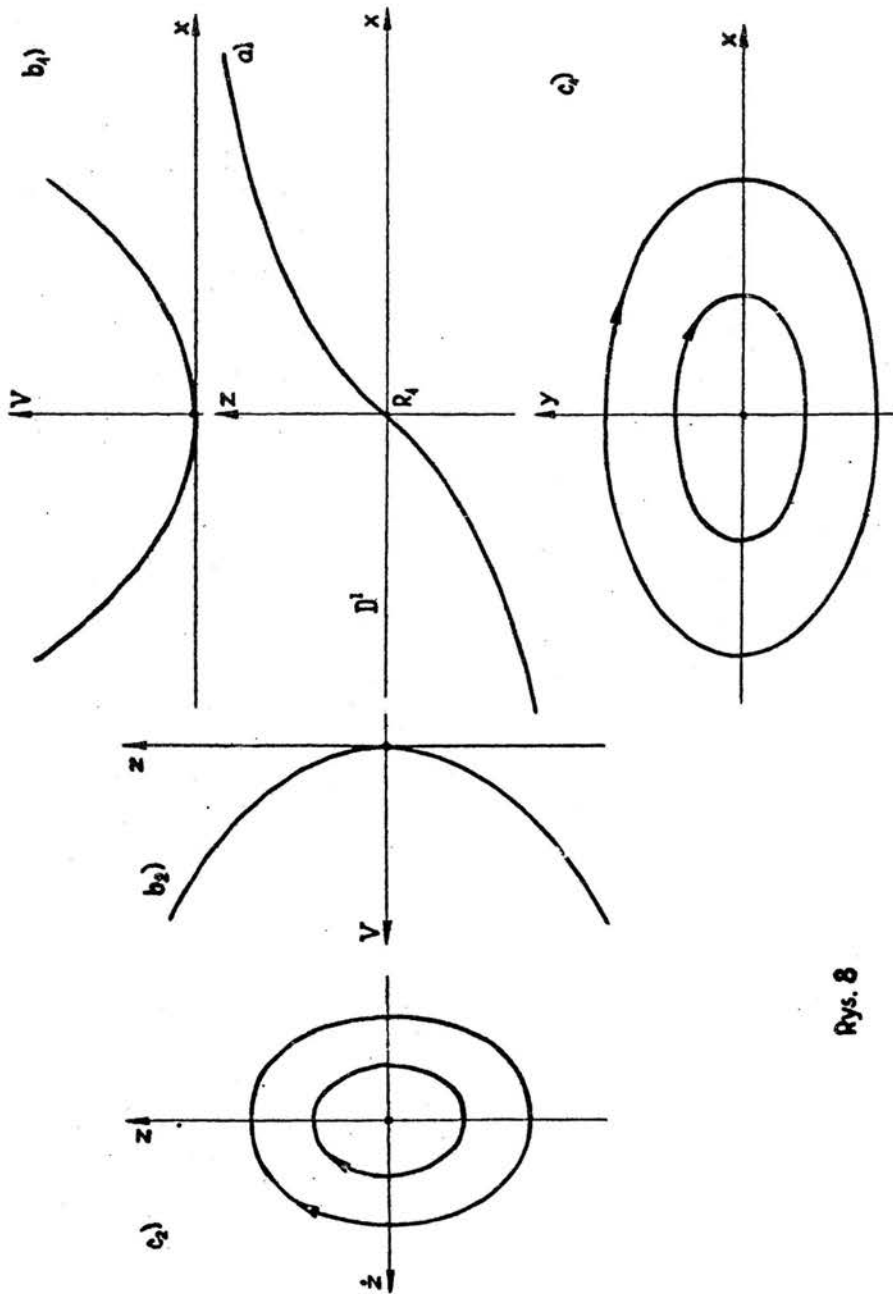
na rzutni $\{(z,\dot{z})\}$ jest odcinkowo ciągłą elipsą posiadającą punkty nieciągłości w punktach przecięcia z liniami nieciągłości. Na rzutni $\{(x,y)\}$ odpowiadają jej krzywe zamknięte, po jednej dla każdego obszaru, przy czym krzywe sąsiednich obszarów są styczne do siebie i do linii nieciągłości.

P r z y p a d e k : $-k < \alpha < 0, \beta > 0$. Wszystkie trzy pierwiastki (27) i (28) są rzeczywiste i wyznaczają położenia równowagi. Krzywa L jest monotoniczna (Rys.7a) i z (23a)

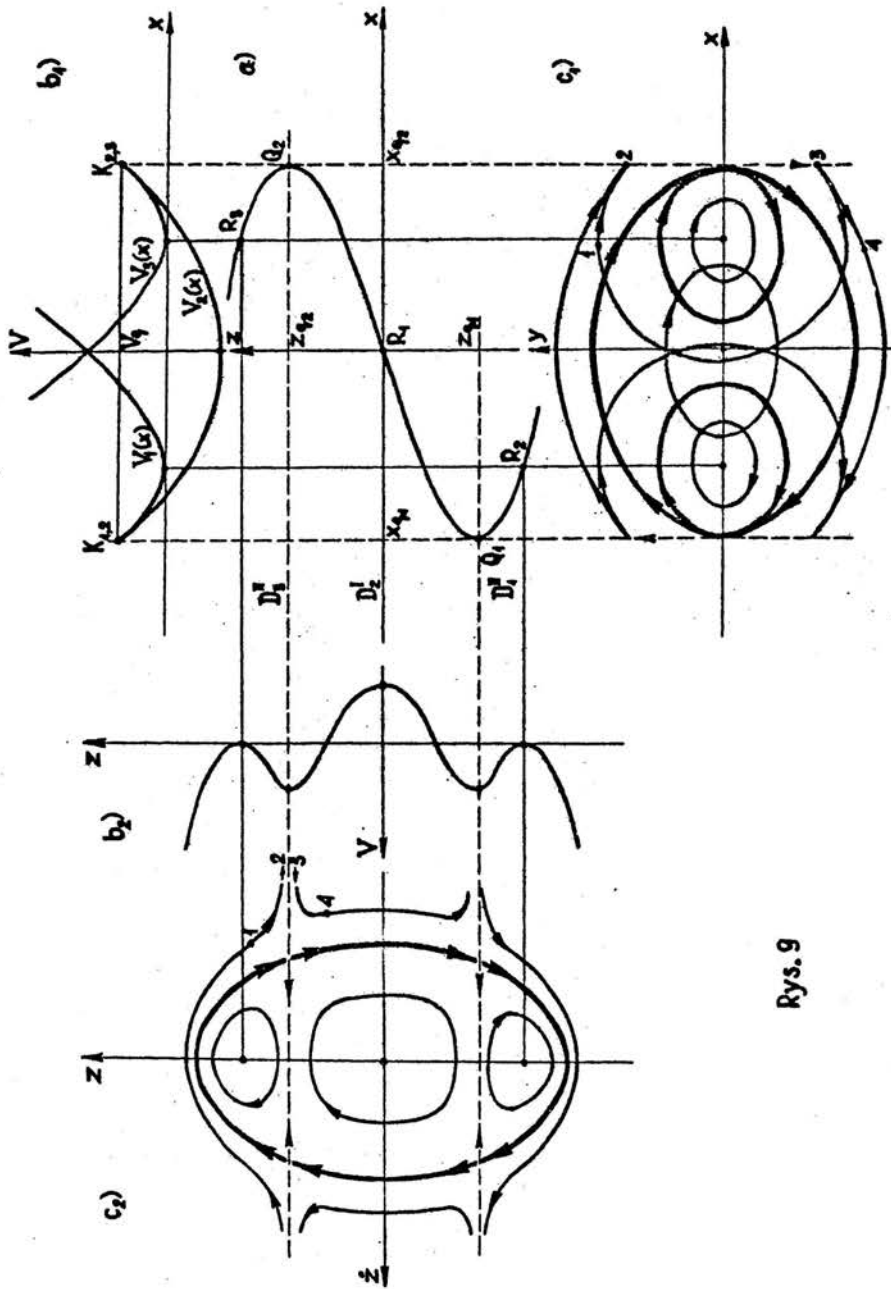
$$(34) \quad z = -2 \sqrt{\frac{\alpha+k}{3\beta}} \operatorname{ctg} 2 \arcs \operatorname{tg} \sqrt[3]{\operatorname{tg} \frac{1}{2} \arcs \operatorname{tg} \frac{-\frac{2}{3} \frac{\alpha+k}{k} \sqrt{\frac{\alpha+k}{3}}}{x}}$$

Współrzędne położen równowagi określają maksimum energii (27) i dwa minima (28), które odpowiadają na obu rzutniach fazowych punktowi siodłowemu i punktom centrów (Rys.7). Wszystkie trajektorie są ciągłe.

P r z y p a d e k : $\alpha \geq 0, \beta > 0$. W tym przypadku istnieje tylko jeden pierwiastek rzeczywisty (27), który wyznacza położenie równowagi. Obowiązuje tutaj jednoznaczne rozwiązanie (34). Na Rys.8 przedstawiono przebieg funkcji energii i obrazy fazowe ruchu.



Rys. 8



Rys. 9

Przypadek: $\alpha > \frac{k}{2}$, $\beta < 0$. Przypadek ten jakościowo jest identyczny z poprzednio omówionym przypadkiem $\alpha < -k$, $\beta > 0$; wszystkie poprzednie rozważania i wzory mają zastosowanie i tutaj.

Wyniki przedstawiono na Rys.9.

Przypadek: $0 < \alpha < \frac{k}{2}$, $\beta < 0$. W przypadku tym wszystkie pierwiastki (27) i (28) są rzeczywiste i wyznaczają położenia równowagi układu. Dwa punkty Q_1 i Q_2 określone przez (26) wyznaczają linie nieciągłości (Rys.10).

Energia potencjalna (Rys.10b₁) i 10b₂) o postaci analitycznej (30), podobnie jak w przypadku poprzednim, w położeniu równowagi (27) posiada minimum, a w położeniach (28) maksima, wszystkie w obszarze D_2 . Punkty $K_{1,2}$ i $K_{2,3}$ są punktami zwrotu pierwszego rodzaju.

Rysunki 10c₁) i 10c₂) przedstawiają obrazy fazowe:

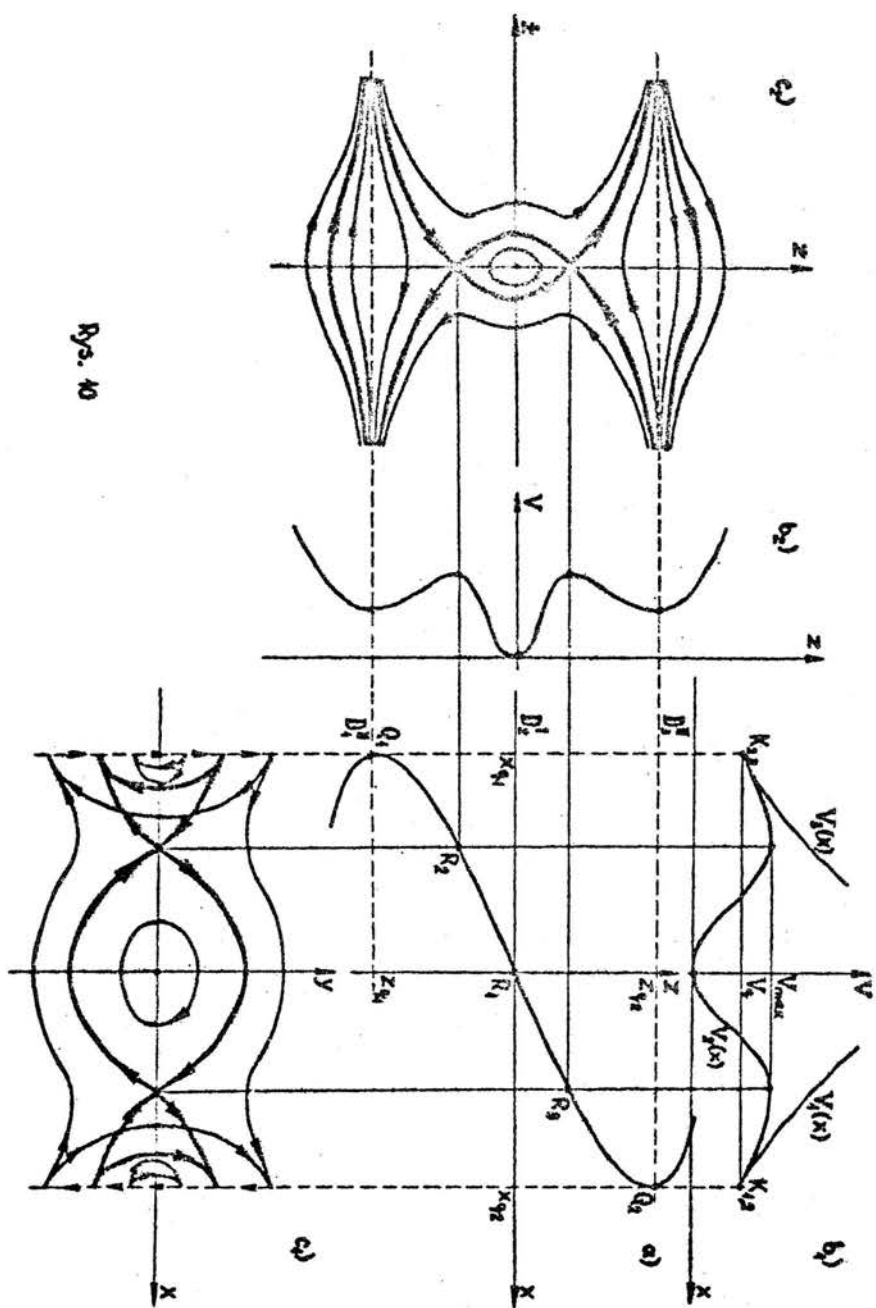
Dla $h < V_{\max}(x_{R_{2,3}}, z_{R_{2,3}})$ mamy w otoczeniu punktu spoczynku R_1 , który jest typu centrum, krzywe zamknięte; w otoczeniu linii nieciągłości trajektorie są nieciągłe (zjawisko odbicia sprężystego). Punkty $(x_{q_i}, 0, z_{q_i}, 0)$ ($i = 1, 2$) nie są punktami spoczynku;

Dla $h = V_{\max}$ trajektoria przechodzi przez dwa punkty spoczynku R_j ($j = 2, 3$) będące siodłkami. Trajektoria ta jest również nieciągła;

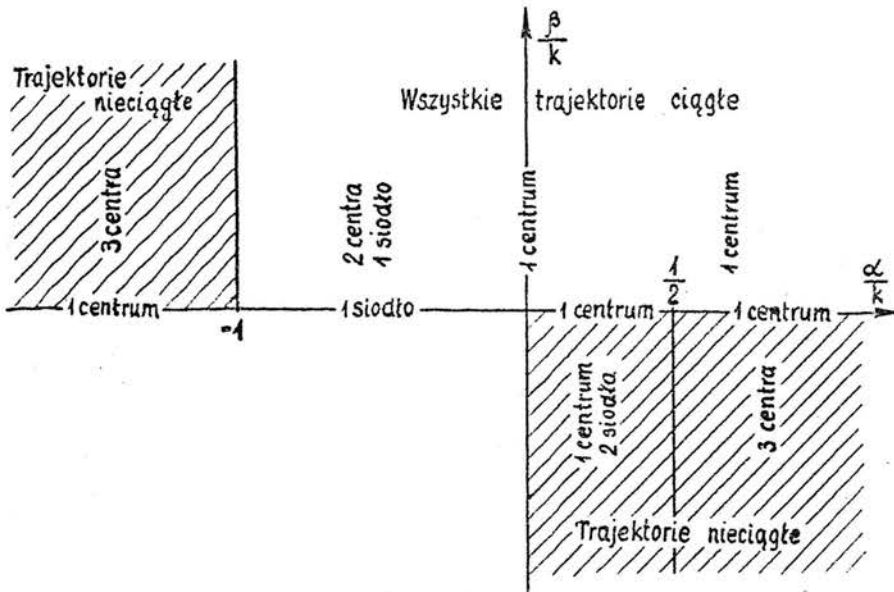
Dla $h > V_{\max}$ wszystkie trajektorie są nieciągłe.

Wyniki dotyczące obrazów fazowych omówionych przypadków przedstawiono na Rys.11 z zaznaczeniem ilości i rodzaju punktów spoczynku i charakteru trajektorii w zależności od współczynników α , β i k . W obszarach zakreskowanych występują trajektorie nieciągłe.

Konstrukcje krzywych całkowych dla układu przedstawionego na Rys.5 oparliśmy na całce energii w postaci (18), dla której



Rys. 10



Rys. 11

potrzebna jest znajomość energii w postaci $V = V(x)$. Przy badaniu pełnego modelu przedstawionego na Rys.1 energia dodatkowej sprężyny $\int_0^x f_2(\xi) d\xi$ dodaje się do rzędnych poszczególnych gałęzi krzywej $V(x)$. Jeśli dodatkowa sprężyna jest liniowa, charakter ruchu nie ulega zmianie.

L i t e r a t u r a

- [1] - J.M.Skowroński, The character of motion of nonlinear mechanical systems, *Nonl.Vibr. Problems*, Vol.4, 1962
- [2] - G.K.Susłow, *Mechanika Teoretyczna*, PWN, Warszawa, 1960
- [3] - Л.Стокер, *Нелинейные колебания в механических и электродинамических системах*, ИЛ, Москва, 1958.