

Jadwiga Krzyżowska
DYFRAKCJA MIĘDZY
DWIEMA RÓWNOLEGLYMI
PŁASZCZYZNAMI
DLA FAL BARDZO DŁUGICH

17/1968

WARSZAWA

Prace Zakładu Teorii Łączności

Praca Nr 60



N a p r a w a c h r ę k o p i s u
D o u ż y t k u w e w n ę t r z n e g o

Zakład Teorii Łączności I P P T P A N
Nakład 250 egz. Ark.wyd.0,4. Ark.druk. 1.
Oddano do drukarni w lipcu 1968 r.
Wydrukowano w sierpniu 1968 r. Nr zam.6/5/c

Warszawska Drukarnia Naukowa, Warszawa,
ul.Śniadeckich 8

DYFRAKCJA MIĘDZY DWIEMA RÓWNOLEGLYMI PŁASZCZYZNAMI DLA PAL BARDZO DŁUGICH

Jadwiga Krzyżowska

S t r e s z c z e n i e

Analizuje się postać szeregów otrzymywanych dla zagadnienia dyfrakcji między dwiema równoległymi płaszczyznami idealnie przewodzącymi, gdzie źródłem jest prostopadły dipol elektryczny. W budowie powyższych szeregów dla zakresu długofalowego zauważamy pewne analogie z szeregami otrzymywanymi dla zagadnień dyfrakcji na obiektach rozpraszających o wymiarach skończonych w przestrzeni trójwymiarowej i dwuwymiarowej. Mianowicie, w analizowanych szeregach oprócz składników, których współczynniki przy odpowiednich potęgach parametru $k = 2\pi/\lambda$ nie są funkcjami k , znajdują się również składniki, których współczynniki przy odpowiednich potęgach k są funkcjami $\ln k$. Łączy się to z faktem, iż z rozważanego zagadnienia trójwymiarowego można wyodrębnić zagadnienie dwuwymiarowe.

1. Wstęp

Rezwijając problem dyfrakcji dla zakresu długofalowego dla obiektów rozpraszających o wymiarach skończonych w rozważanej przestrzeni, stwierdzamy istotne różnice między przestrzenią trójwymiarową i dwuwymiarową. Mianowicie dla problemów trójwymiarowych szeregi, przedstawiające rozwiązanie problemów dyfrakcji

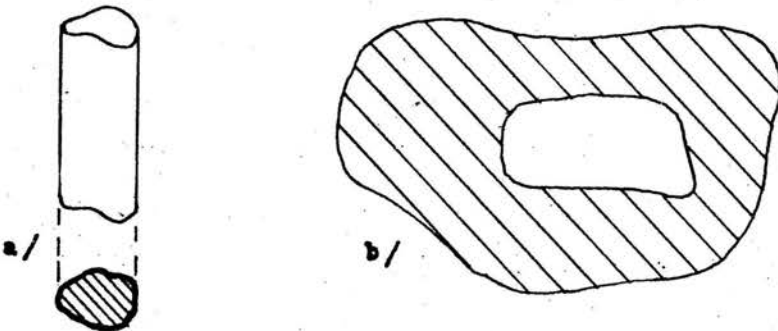
$$\varepsilon = \varepsilon_0 + k\varepsilon_1 + k^2\varepsilon_2 + \dots,$$

gdzie

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

są szeregiami czyste potęgowymi, a dla problemów dwuwymiarowych współczynniki przy odpowiednich potęgach k są na ogół funkcjami $\ln k$. Ma to związek z tym, iż rozwiązanie podstawowe równania Helmholtza oraz warunki wypromieniowania Sommerfelda w przestrzeni trójwymiarowej dla $k \rightarrow 0$ przechodzą w rozwiązanie podstawowe równania Laplace'a oraz w warunki regularności w nieskończoności rozwiązania równania Laplace'a, natomiast w przestrzeni dwuwymiarowej powyższe przejścia nie zachodzą / [3] i [4] /.

Omawiane poniżej zagadnienie dyfrakcji między dwiema płaszczyznami równoległymi dla zakresu długofalowego łączy się zarówno z zagadnieniem trójwymiarowym jak i dwuwymiarowym, w związku z czym opisywane jest przez szeregi (1) zawierające $\ln k$ w pewnej części współczynników ε_n .

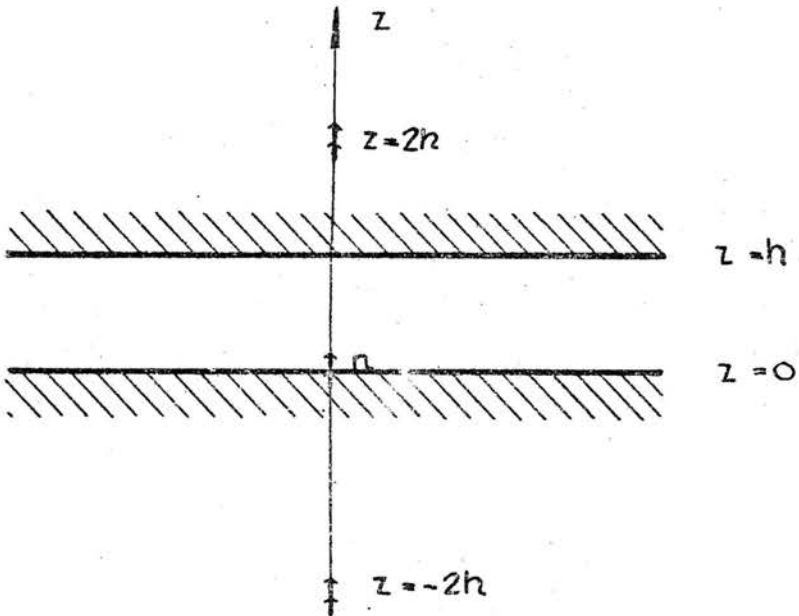


Rys.1. Obiekty rozpraszające:

- a/ obiekt rozpraszający o wymiarach skończonych w przestrzeni dwuwymiarowej /walec nieskończenie długi/;
- b/ obiekt rozpraszający w przestrzeni trójwymiarowej /otwór w ekranie/.

2. Postawienie zagadnienia

Zakładamy dwie płaszczyzny idealnie przewodzące. Na powierzchni jednej z nich umieszczony jest prostopadły dipol elektryczny o momencie $\underline{p} = p\hat{n}$ o zależności czasowej $e^{-i\omega t}$.



Rys.2. Dipol wzbudzający między dwiema płaszczyznami przewodzącymi oraz dipole lustrzane.

Jak wiadomo [2], składowa z-owa pola elektrycznego wyraża się tutaj wzorem:

$$E_z = -\frac{i\epsilon_0 k_e}{4h} \left[H_0^{(1)}(k_e \rho) + \frac{1}{k_e^2} \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^2 H_n^{(1)}(\alpha_n \rho) (e^{i\gamma_n z} + e^{-i\gamma_n z}) \right] \quad (1)$$

gdzie

$$\begin{aligned} I &= i\omega p, \\ k_0 &= \omega \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}, \\ \gamma_n &= \frac{n\pi}{h}, \\ \alpha_n &= \sqrt{k_0^2 - \gamma_n^2}, \end{aligned} \quad \begin{aligned} z_0 &= \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}, \\ \xi &= \sqrt{x^2 + y^2}. \end{aligned}$$

Rozważmy to wyrażenie dla fal bardzo długich. Widzimy, że ze względu na zależność:

$$H_n^{(1)}(k_0 \xi) = 2\pi i \left\{ K_0(\xi) + k_0^2 K_2(\xi) + k_0^4 K_4(\xi) + \dots \right\}, \quad (2)$$

gdzie

$$\begin{aligned} K_0(\xi) &= q + \ln \xi, \\ K_{2n} &= \frac{(-1)^n e^{2n}}{2^{2n} (n!)^2} \left\{ q - 1 - \frac{1}{2} - \dots - \frac{1}{n} + \ln \xi \right\}, \\ q &= C + \ln \frac{1}{2} k_0 - \frac{1}{2} \pi i, \\ C &= 0,5772; \end{aligned}$$

całen zerowy wyrażenia (1) w rozwinięciu pola E_z dla zakresu długofalowego będzie dawał współczynniki zawierające $\ln k_0$ przy odpowiednich potęgach k_0 . Aby znaleźć przyczynę, dla czego wyrażenie (1) dla zakresu długofalowego nie przedstawia się szeregiem czysto potęgowym, jak to ma miejsce w przypadkach trójwymiarowych, przeanalizujemy wyprowadzenie wyrażenia (1) dla przypadku dynamicznego i statycznego oraz przejście graniczne z parametrem $k_0 \rightarrow 0$.

3. Analiza przypadku dynamicznego

Prześledzimy teraz znane z literatury wyprowadzenie przypadku dynamicznego rozważanego zagadnienia. Jak wiadomo, zagadnienie dipola wzbudzającego między płaską ziemią a jonosferą jest równoważne zagadnieniu układu nieskończonego dipoli lustrzanych /rys. 2/. Układ ten możemy traktować jako prąd liniowy o gęstości liniowej

$$j_L = 2I \delta\left(\sin \frac{\pi z}{2h}\right) \mathbf{e}_z, \quad (3)$$

gdzie

$$I = i \omega p.$$

Przedstawiając funkcję δ w postaci szeregu Fouriera otrzymujemy

$$j_L = \frac{I}{h} \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(e^{i\gamma_n z} + e^{-i\gamma_n z} \right) \right] \quad (4)$$

gdzie

$$\gamma_n = \frac{n\pi}{h}.$$

Szukamy pola elektrycznego \underline{E} . W tym celu znajdujemy najpierw potencjał Hertza $\underline{\Pi}$. Dla jednego dipola w wolnej przestrzeni $\Pi_x = \Pi_y = 0$, $\Pi_z = p e^{ik_0 r} / 4\pi r$. Weźcąc to dla rozważanego układu dipoli:

$$\pi_{\mathbf{z}} = \frac{1}{4\pi i\omega} \int_{-\infty}^{+\infty} j_L(\mathbf{z}') \frac{e^{ik_0[\xi^2 + (\mathbf{z} - \mathbf{z}')^2]^{1/2}}}{[\xi^2 + (\mathbf{z} - \mathbf{z}')^2]^{1/2}} d\mathbf{z}' .$$

Do powyższego wyrażenia podstawiamy szereg (4) i po obliczeniu odpowiednich całek otrzymujemy

$$\pi_{\mathbf{z}} = \frac{I}{4\omega h} \left\{ H_0^{(1)}(k_0\xi) + \sum_{n=1}^{\infty} H_0^{(1)}(\xi\sqrt{k_0^2 - \gamma_n^2}) [e^{i\gamma_n \mathbf{z}} + e^{-i\gamma_n \mathbf{z}}] \right\} \quad (5)$$

Pole \mathbf{E} znajdujemy z zależności:

$$\begin{aligned} E_x &= \frac{1}{\xi_0} \frac{\partial^2 \pi_{\mathbf{z}}}{\partial x \partial \mathbf{z}}, \\ E_y &= \frac{1}{\xi_0} \frac{\partial^2 \pi_{\mathbf{z}}}{\partial y \partial \mathbf{z}}, \\ E_z &= \mu_0 \omega^2 \pi_{\mathbf{z}} + \frac{1}{\xi_0} \frac{\partial^2 \pi_{\mathbf{z}}}{\partial \mathbf{z}^2} . \end{aligned} \quad (6)$$

Otrzymujemy

$$E_x = - \frac{I i x}{4\omega h \xi_0 \xi} \sum_{n=1}^{\infty} H_1^{(1)}(\xi\sqrt{k_0^2 - \gamma_n^2}) \gamma_n \sqrt{k_0^2 - \gamma_n^2} [e^{i\gamma_n \mathbf{z}} - e^{-i\gamma_n \mathbf{z}}] , \quad (7)$$

$$E_y = - \frac{I i y}{4\omega h \xi_0 \xi} \sum_{n=1}^{\infty} H_1^{(1)}(\xi\sqrt{k_0^2 - \gamma_n^2}) \gamma_n \sqrt{k_0^2 - \gamma_n^2} [e^{i\gamma_n \mathbf{z}} - e^{-i\gamma_n \mathbf{z}}] \quad (8)$$

i składową E_z tak jak we wzorze (1).

4. Analiza przypadku statycznego

W przypadku statycznym analizowanego zagadnienia rozpatrujemy momenty dipeli rozłożonych liniowo o gęstości liniowej $p_L = \partial p / \partial z$:

$$p_L = 2p \delta \left(\sin \frac{\pi z}{2h} \right) \quad (9)$$

Przedstawiając funkcję δ w postaci szeregu Fouriera otrzymujemy

$$p_L = \frac{p}{h} \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(e^{i \delta_n z} + e^{-i \delta_n z} \right) \right] \quad (10)$$

gdzie

$$\delta_n = \frac{n\pi}{h} .$$

Szukając pola elektrycznego E znajdujemy najpierw potencjał Hertza Π . Dla jednego dipola, znajdującego się w wolnej przestrzeni $\Pi_x = \Pi_y = 0$, $\Pi_z = p/4\pi r$.

Wobec tego dla rozważanego układu dipeli

$$\Pi_z = \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} p_L(z') \frac{1}{[z^2 + (z - z')^2]^{1/2}} dz' .$$

Do powyższego wyrażenia podstawiamy szereg (10). Dla pierwszego członu rozwinięcia $p_{L0} = p/h$ całka

$$\Pi_{z0} = \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} p_{L0} \frac{1}{[z^2 + (z - z')^2]^{1/2}} dz'$$

nie istnieje. Szukamy tutaj najpierw $\partial \Pi_{\text{zo}} / \partial \xi$. Znajdujemy

$$\frac{\partial \Pi_{\text{zo}}}{\partial \xi} = - \frac{P_L}{2 \pi \xi}.$$

Wobec tego

$$\Pi_{\text{zo}} = - \frac{P}{2 \pi h} \ln \xi.$$

Obliczenie następnych wyrazów Π_{zn} nie przedstawia większych kłopotów. Ostatecznie otrzymujemy:

$$\Pi_{\text{z}} = - \frac{P}{2 \pi h} \ln \xi + \frac{1P}{4h} \sum_{n=1}^{\infty} H_n^{(1)}(i \xi \gamma_n) \left[e^{i \gamma_n z} + e^{-i \gamma_n z} \right] \quad (11)$$

Pole elektryczne \underline{E} znajdujemy z wzorów:

$$E_x = \frac{1}{\epsilon_0} \frac{\partial^2 \Pi_{\text{z}}}{\partial x \partial z},$$

$$E_y = \frac{1}{\epsilon_0} \frac{\partial^2 \Pi_{\text{z}}}{\partial y \partial z},$$

$$E_z = \frac{1}{\epsilon_0} \frac{\partial^2 \Pi_{\text{z}}}{\partial z^2}.$$

Otrzymujemy:

$$E_x = \frac{1P x}{4h \epsilon_0 \xi} \sum_{n=1}^{\infty} H_n^{(1)}(i \xi \gamma_n) \gamma_n^2 \left[e^{i \gamma_n z} - e^{-i \gamma_n z} \right], \quad (12')$$

$$E_y = \frac{ipy}{4h \xi_0 \xi} \sum_{n=1}^{\infty} H_1^{(1)}(1 \xi \sigma_n) \sigma_n^2 \left[e^{i \sigma_n z} - e^{-i \sigma_n z} \right], \quad (12)$$

$$E_z = \frac{ip}{4 \xi_0 h} \sum_{n=1}^{\infty} H_0^{(1)}(1 \xi \sigma_n) \sigma_n^2 \left[e^{i \sigma_n z} + e^{-i \sigma_n z} \right]. \quad (12')$$

5. Analiza przejścia granicznego $k_0 \rightarrow 0$.

Dyskusja wyników

W analizie przejścia granicznego $k_0 \rightarrow 0$ jak i w dyskusji wyników istotną jest rzeczą iż zerowy wyraz gęstości liniowej prądu (4)

$$j_{Le} = \frac{I}{h}$$

jak i zerowy wyraz gęstości liniowej momentów dipoli (10)

$$P_{Le} = \frac{P}{h}$$

nie zależą od współrzędnej z , a więc przedstawiają przypadek dwuwymiarowy, natomiast dalsze wyrazy obu rozwinięć (4) i (10) przedstawiają przypadek trójwymiarowy. Przeanalizujmy mianowicie przejście graniczne dla potencjału Hertza (5). Dla $k_0 \rightarrow 0$ zerowy składnik potencjału Hertza odpowiadający zerowemu wyrazowi gęstości liniowej prądu

$$\Pi_{z0} = - \frac{I}{4\omega h} H_0^{(1)}(k_0 \xi) = - \frac{ip}{4h} H_0^{(1)}(k_0 \xi) \xrightarrow[k_0 \rightarrow 0]{} - \frac{p}{2\pi h} \ln \frac{1}{2} k_0 \xi \xrightarrow[k_0 \rightarrow 0]{\rightarrow \infty}$$

natomiast dla $k_0 = 0$ zerowy składnik potencjału Hertza odpowiadający zerowemu składnikowi gęstości liniowej momentów dipoli

$$\Pi_{z0} = - \frac{p}{2\pi h} \ln \xi .$$

Dalsze wyrazy szeregu (5) dla $k_0 \rightarrow 0$ przechodzą w odpowiednie wyrazy szeregu dla przypadku statycznego (11).

Badając przejście graniczne dla wyrażeń na pole elektryczne (1), (7) i (8) widzimy, że pole to dla $k_0 \rightarrow 0$ przechodzi w pole elektryczne dla przypadku statycznego (12).

Wyraz zerowy szeregu (1)

$$E_{z0} = - \frac{I k_0}{4h} H_0^{(1)}(k_0 \xi)$$

dla $k_0 \rightarrow 0$ dąży tutaj do zera.

Jednak komplikacje w przejściu granicznym zerowego składnika potencjału Hertza Π_{z0} odbijają się tutaj w ten sposób, że człon powyższy nie rozwija się na szereg czyste potęgowy względem potęg k_0 , jak na to wskazuje wyrażenie (2). Rozwijając dalsze wyrazy względem potęg k_0 nie napotykamy już na tego typu komplikacje.

L I T E R A T U R A

1. K. G. B u d d e n, Guide Mode Theory of Wave Propagation, London 1961.
2. S. P r z e ź d z i e c k i, Podstawy falowodowej teorii propagacji. Rozchodzenie się bardzo długich fal, Wrocław 1966.
3. J. K r z y ż o w s k a, Analiza wzoru Greena z punktu widzenia zagadnień dyfrakcji, Prace Zakładu Teorii Łączności, Nr 31, Warszawa 1965.
4. J. K r z y ż o w s k a, Convergence of Perturbation Series in Diffraction Problems, Prace Zakładu Teorii Łączności, Nr 38, Warszawa 1967.