B. Radziszewski, S. Ziemba

O PEWNYCH SZCZEGÓLNYCH PRZYPADKACH UOGÓLNIONYCH POTENCJAŁÓW LAGRANGE'A

22/1968

WARSZAWA

N a   p r a w a c h   r ę k o p i s u

D o   u ż y t k u   w e w n ę t r z n e g o

Zakład Teorii Konstrukcji Maszyn IPPT PAN

Nakład 150 egz. Ark.wyd. 0,6. Ark. druk. 1 .
Oddano do drukarni we wrześniu 1968r.
Wydrukowano w październiku 1968r. Nr zam.740 /0/68

Warszawska Drukarnia Naukowa , Warszawa ,
ul.Śniadeckich 8

O PEWNYCH SZCZEGÓLNYCH PRZYPADKACH UOGÓLNIONYCH POTENCJAŁÓW LAGRANGE'A

BOGUSŁAW RADZISZEWSKI, STEFAN ZIEMBA

1. Ograniczając się do układów o więzach holonomicznych idealnych, ruch ich, jak wiadomo, można ująć z pomocą różniczkowych równań ruchu Lagrange'a II rodzaju, o postaci:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j , \qquad j = 1,\dots,n \tag{1}$$

gdzie n - ilość stopni swobody układu,

$q_1,\dots,q_n$ - współrzędne uogólnione,

$\dot{q}_j = \frac{dq_j}{dt}$, $j = 1,\dots,n$,

T - energia kinetyczna układu,

$Q_j = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}$ $\left(j = 1,\dots,n\right)$ - siły uogólnione, przy czym $\vec{F}_i$ $\left(i = 1,\dots,N\right)$ - wypadkowa sił czynnych przyłożonych do i-tego punktu układu, $\vec{r}_i$ - wektor promień wodzący i-tego punktu układu, N - ilość punktów.

Warto zaznaczyć, że na podstawie twierdzenia Delassus'a, w równaniach (1) dla układów holonomicznych energia kinetyczna T może być zastąpiona przez dowolną funkcję, różniącą się od niej o pochodną całkowitą względem czasu dowolnej funkcji czasu i współrzędnych uogólnionych. Wynika stąd, że przy badaniu ruchu układów holonomicznych funkcja, zwana energią kinetyczną nie jest jedynym odpowiednikiem matematycznym wewnętrznych własności fizycznych układu, wpływających na charakter jego ruchu. Na równi z energią kinetyczną T odpowiednikami tymi będą wszystkie funkcje

$$(2) \qquad T^{*}(t,q,\dot{q}) = T(t,q,\dot{q}) + \frac{dz(t,q)}{dt} ,$$

gdzie $z = z(t,q)$ jest dowolną funkcją klasy C^2.

Z twierdzenia tego wynika następujący wniosek natury praktycznej: przy tworzeniu równań Lagrange'a (1) wolno w wyrażeniu na energię kinetyczną odrzucić każdy wielomian liniowy względem prędkości uogólnionych, przedstawiający pochodną całkowitą względem czasu pewnej funkcji czasu i współrzędnych.

Bliższego omówienia, ze względów praktycznych, wymaga sprawa doskonałości więzów. Każdy złożony mechanizm możemy w zasadzie rozpatrywać jako układ brył materialnych (tzn. ciał doskonale sztywnych), które zazwyczaj parami są połączone między sobą sztywnie, ze wspólną osią, ze wspólnym podłożem, albo stykają się swoimi powierzchniami. Jeżeli można przyjąć, że wszystkie połączenia są doskonale sztywne, wszystkie łożyska i przeguby są doskonałe, tj. beztarciowe, wszystkie stykające się powierzchnie są doskonale gładkie, to cały taki złożony mechanizm można traktować jako układ punktów materialnych o więzach doskonałych. Wiemy jednakże, że w wielu przypadkach taka idealizacja jest niedopuszczalna. Pominięcie np. sił tarcia może w sposób istotny zmienić pod względem jakościowym obraz zjawiska. W takich przypadkach założenie o doskonałości więzów należy odrzucić, przyjmując inne warunki uwzględniające siły tarcia. W praktyce traktujemy więzy jako doskonałe, uwzględniając przy tym tylko normalne składowe reakcji więzów, zaś siły tarcia traktujemy jako, nieznane narazie, siły czynne. Wprowadzenie nowych niewiadomych kompensujemy dodatkowymi związkami, wynikającymi z empirycznych praw tarcia.

Nazwy "równania Lagrange'a" używa się często, mając na myśli przypadek układu zachowawczego. W tym przypadku siły $\vec{F}_i$ $(i = 1,\ldots,N)$ otrzymujemy z energii potencjalnej wg. wzoru:

$$\vec{F}_i = -\vec{\nabla}_i V , \qquad i = 1,\ldots,N . \tag{3}$$

Siły uogólnione możemy wtedy napisać w postaci

$$Q_j = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} = -\sum_{i=1}^{N} \vec{\nabla}_i V \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} = -\frac{\partial V}{\partial q_j} , \qquad j = 1,\ldots,n . \tag{4}$$

Wtedy równania (2) możemy napisać w postaci:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial (T - V)}{\partial q_j} = 0, \qquad j = 1,\ldots,n .$$

Skoro zaś, z założenia, V zależy tylko od położenia, a nie zależy od prędkości uogólnionych $\dot{q}_j$ $(j = 1,\ldots,n)$, zatem

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial (T - V)}{\partial \dot{q}_j} \qquad j = 1,\ldots,n ,$$

i równania ruchu możemy napisać w postaci:

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial (T - V)}{\partial \dot{q}_j}\right] - \frac{\partial (T - V)}{\partial q_j} = 0, \qquad j = 1,\ldots,n ,$$

a oznaczając

$$T - V = L , \tag{5}$$

gdzie L - funkcja Lagrange'a (potencjał kinetyczny Lagrange'a), możemy równania (1) napisać w postaci

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0, \qquad j = 1,\ldots,n . \tag{6}$$

2. Równania (1) można przedstawić w postaci podobnej do (6) również wtedy, gdy układ nie jest zachowawczy w zwykłym znaczeniu. Można tego dokonać w tym przypadku, gdy siły uogólnione Q_j $(j = 1,\ldots,n)$ można otrzymać z funkcji

$$W = W(t, q_1,\ldots,q_n, \dot{q}_1,\ldots,\dot{q}_n)$$

wg. wzoru

$$Q_j = -\frac{\partial W}{\partial q_j} + \frac{d}{dt}\frac{\partial W}{\partial \dot{q}_j}, \qquad j = 1,\dots,n . \tag{7}$$

Wtedy kładąc

$$L = T - W \tag{8}$$

równanie (1) można napisać w postaci (6).

Funkcję $-W$ można nazwać potencjałem uogólnionym albo potencjałem zależnym od prędkości, a funkcję $L = T - W$ uogólnionym potencjałem kinetycznym Lagrange'a. Historia tej nazwy jest dość ciekawa. Prawdopodobnie została ona początkowo (i mylnie) wprowadzona przez Webera w Elektrodynamice Klasycznej, gdzie postuluje się istnienie sił zależnych od prędkości. Niemiecki matematyk E. Schering był prawdopodobnie pierwszym, który serio usiłował wprowadzić takie siły do mechaniki. Tak np. w pierwszym wydaniu G.T. Whittacker'a : " A Treatise on the Analytical Dynamics of Particles and Rigid Bodies " z roku 1904 jest odsyłacz odnośnie potencjału w sensie " funkcji potencjalnej Scheringa " . Jednakże termin ten prawdopodobnie nie wszedł w użycie, skoro w następnych wydaniach został usunięty. G. Goldstein [1] jest za używaniem terminu: potencjał uogólniony, podciągając pod to pojęcie również zwykłą energię potencjalną, będącą funkcją tylko położenia . Podobne stanowisko zajmuje również F. R. Gantmacher [2].

3. W pewnych przypadkach pojęcie funkcji potencjalnej można rozszerzyć na układy dynamiczne, w których działające siły zależne są nie tylko od położenia, nie tylko od położenia i prędkości, lecz także od położenia, prędkości i przyśpieszenia. Jednoznacznie i wyczerpująco ujmuje to A. Mayer w pracy [3]. Pytanie brzmiało: jakie warunki winny spełniać

n dowolnych funkcji $Q_1,\dots,Q_n$ zmiennych $q_1,\dots,q_n$, ich pierwszych i drugich pochodnych względem czasu i ewentualnie zmiennej niezależnej t, żeby istniała funkcja H zależna od $t,q_1,\dots,q_n,\dot q_1,\dots,\dot q_n$, i taka, że spełnia ona tożsamościowo n równań:

$$-\frac{\partial H}{\partial q_j}+\frac{d}{dt}\frac{\partial H}{\partial \dot q_j}=Q_j\,, \qquad j=1,\dots,n\,. \tag{9}$$

W bardzo elegancki sposób A. Mayer dowodzi następujące twierdzenie.

" Aby istniała funkcja H, zależna od $t,q_1,\dots,q_n$, $\dot q_1,\dots,\dot q_n$, potrzeba i wystarcza, żeby $Q_1,\dots,Q_n$, liniowo zależne od $\ddot q_1,\dots,\ddot q_n$, były funkcjami $q_1,\dots,q_n,\dot q_1,\dots,\dot q_n$, przy czym mogą one zależeć także wyraźnie od czasu, spełniającymi tożsamościowo $3n(n-1)$ równań:

$$\frac{\partial Q_i}{\partial \ddot q_j}-\frac{\partial Q_j}{\partial \ddot q_i}=0, \tag{10}$$

$$\frac{\partial Q_i}{\partial \dot q_j}-\frac{\partial Q_j}{\partial \dot q_i}=\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial Q_i}{\partial \ddot q_j}+\frac{\partial Q_j}{\partial \ddot q_i}\right), \tag{11}$$

$$\frac{\partial Q_i}{\partial q_j}-\frac{\partial Q_j}{\partial q_i}=\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial Q_i}{\partial \dot q_j}-\frac{\partial Q_j}{\partial \dot q_i}\right), \qquad i,j=1,\dots,n\text{''}. \tag{12}$$

4. Przede wszystkim należy zauważyć, że układ warunków (10), (11) i (12) spełniają siły uogólnione $Q_1,\dots,Q_n$ zależne jedynie od czasu (mogą być również siły stałe). Rozpatrzmy teraz inne, mniej trywialne przypadki.

a. Jeżeli siły są pozycyjne tzn.

$$Q_j=Q_j(t,q_1,\dots,q_n)\,, \qquad j=1,\dots,n\,,$$

to układy równań (10) i (11) są spełnione tożsamościowo, zaś układ równań (12) sprowadza się do znanych warunków Schwartza

$$(12a) \qquad \frac{\partial Q_i}{\partial q_j} - \frac{\partial Q_j}{\partial q_i} = 0, \qquad i,j = 1,\dots,n \ .$$

W przypadku układu o jednym stopniu swobody układ równań (12a) redukuje się do tożsamości.

Dla układu o większej ilości stopni swobody, układ równań (12a) redukuje się także do tożsamości w przypadku m.in. gdy siły uogólnione Q_j $(j = 1,\dots,n)$ są liniowo zależne od współrzędnych uogólnionych tzn.

$$(13) \qquad Q_j^a = \sum_{i=1}^{n} A_{ji}(t)\, q_i \ , \qquad j = 1,\dots,n \ ,$$

gdzie $A = \{A_{ji}\}$ jest macierzą symetryczną tzn. $A_{ij} = A_{ji}$ $(i,j = 1,\dots,n)$. Na podstawie twierdzenia Mayera istnieje więc dla sił uogólnionych Q_j^a $(j = 1,\dots,n)$ w postaci (13) funkcja H^a, która może zależeć od czasu, współrzędnych uogólnionych i prędkości uogólnionych taka, że

$$(14) \qquad -\frac{\partial H^a}{\partial q_j} + \frac{d}{dt}\frac{\partial H^a}{\partial \dot q_j} = Q_j^a \ , \qquad j = 1,\dots,n \ .$$

b. W przypadku, gdy siły uogólnione Q_j $(j = 1,\dots,n)$ zależą tylko od czasu i prędkości uogólnionych, układ warunków (10) jest spełniony tożsamościowo, zaś układy (11) i (12) można napisać w postaci

$$(11b) \qquad \frac{\partial Q_i}{\partial \dot q_j} + \frac{\partial Q_j}{\partial \dot q_i} = 0,$$

$$(12b) \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial Q_i}{\partial \dot q_j} + \frac{\partial Q_j}{\partial \dot q_i}\right) = 0, \qquad i,j = 1,\dots,n$$

lub

$$\frac{\partial Q_i}{\partial \dot q_j} + \frac{\partial Q_j}{\partial \dot q_i} = 0,$$

$$\frac{\partial Q_i}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial Q_j}{\partial \dot{q}_i} = K_{ij}\,, \qquad i,j = 1,\dots,n\,,$$

gdzie K_{ij} $(i,j = 1,\dots,n)$ - dowolne stałe.
Stąd mamy

$$K_{ij} = 0 \qquad \text{dla} \quad i = j,$$

$$K_{ij} = -K_{ji} \qquad \text{dla} \quad i \neq j, \quad i,j = 1,\dots,n$$

tzn. $K = \{K_{ij}\}$ jest macierzą antysymetryczną w której wyrazy na przekątnej są równe zeru.

Dla układu o jednym stopniu swobody, siła uogólniona zależna od prędkości uogólnionej nie może spełniać układu warunków (11b) i (12b).

Dla układu o większej ilości stopni swobody siły uogólnione Q_j $(j = 1,\dots,n)$, spełniające tożsamościowo układ warunków (11b) i (12b) można przedstawić w postaci

$$Q_j^b = \sum_{i=1}^{n} K_{ji}^* \dot{q}_i\,, \qquad j = 1,\dots,n\,, \tag{15}$$

gdzie stałe K_{ji}^* $(i,j = 1,\dots,n)$ tworzą macierz antysymetryczną $K^* = \frac{1}{2}K$.

Ponieważ praca sił uogólnionych Q_j^b $(j = 1,\dots,n)$ jest równa zeru, tzn.

$$\sum_{j=1}^{n} Q_j^b \dot{q}_j = 0,$$

dlatego siły uogólnione wyrażone wzorem (15) są siłami giroskopowymi.

Dla sił giroskopowych, wyrażonych wzorem (15), istnieje więc na podstawie twierdzenia Mayera funkcja H^b, która może zależeć od czasu, współrzędnych uogólnionych i prędkości uogólnionych taka, że

(16) $$-\frac{\partial H^b}{\partial q_j} + \frac{d}{dt}\frac{\partial H^b}{\partial \dot{q}_j} = Q_j^b, \qquad j = 1,\ldots,n.$$

c. Zastanowimy się teraz, dla jakich sił uogólnionych, zależnych tylko od czasu i przyśpieszeń uogólnionych, istnieje funkcja H^c, która może zależeć od czasu, współrzędnych uogólnionych i prędkości uogólnionych taka, że

(17) $$-\frac{\partial H^c}{\partial q_j} + \frac{d}{dt}\frac{\partial H^c}{\partial \dot{q}_j} = Q_j^c, \qquad j = 1,\ldots,n.$$

W tym przypadku układ warunków (12) jest spełniony tożsamościowo, zaś z układu warunków (10) i (11) mamy

(10c) $$\frac{\partial Q_i}{\partial \ddot{q}_j} - \frac{\partial Q_j}{\partial \ddot{q}_i} = 0,$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial Q_i}{\partial \ddot{q}_j} + \frac{\partial Q_j}{\partial \ddot{q}_i}\right) = 0, \qquad i,j = 1,\ldots,n.$$

Stąd mamy

$$\frac{\partial Q_i}{\partial \ddot{q}_j} - \frac{\partial Q_j}{\partial \ddot{q}_i} = 0,$$

$$\frac{\partial Q_i}{\partial \ddot{q}_j} + \frac{\partial Q_j}{\partial \ddot{q}_i} = M_{ij}, \qquad i,j = 1,\ldots,n,$$

gdzie M_{ij} $(i,j = 1,\ldots,n)$ -dowolne stałe.

Z ostatniego układu warunków mamy

$$\frac{\partial Q_i}{\partial \ddot{q}_j} = \frac{1}{2} M_{ij},$$

$$\frac{\partial Q_j}{\partial \ddot{q}_i} = \frac{1}{2} M_{ij}, \qquad i,j = 1,\ldots,n.$$

W ten sposób wykazaliśmy, że układy warunków (10c) i (11c) spełniają tożsamościowo siły uogólnione m.in. w postaci

$$Q_j^c = \sum_{i=1}^{n} M_{ji}\,\ddot{q}_i \,, \qquad j = 1,\ldots,n \,, \tag{18}$$

gdzie $M = \{M_{ij}\}$ jest macierzą symetryczną.

d. Jeżeli siły uogólnione zależą od czasu, współrzędnych uogólnionych i prędkości uogólnionych, to układ warunków (10) spełniony jest tożsamościowo, zaś układy warunków (11) i (12) sprowadzają się do postaci

$$\frac{\partial Q_i}{\partial \dot{q}_j} + \frac{\partial Q_j}{\partial \dot{q}_i} = 0, \tag{11d}$$

$$\frac{\partial Q_i}{\partial q_j} - \frac{\partial Q_j}{\partial q_i} = \frac{1}{2}\,\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial Q_i}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial Q_j}{\partial \dot{q}_i}\right), \quad i,j = 1,\ldots,n \,. \tag{12d}$$

W przypadku układu o jednym stopniu swobody, układ warunków (11d) i (12d) spełniony będzie tożsamościowo, jeżeli

$$\frac{\partial Q}{\partial \dot{q}} = 0 \,.$$

Dla takiego układu siły uogólnione nie mogą zależeć od prędkości uogólnionych.

Dla układu o większej ilości stopni swobody, warunki (11d) i (12d) spełniają tożsamościowo siły uogólnione m.in. w postaci

$$Q_j^d = \sum_{i=1}^{n} G_{ji}\left(q_1,\ldots,q_n\right)\dot{q}_i \qquad j = 1,\ldots,n \,, \tag{19}$$

gdzie $G = \{G_{ij}\}$ jest macierzą antysymetryczną oraz $G_{ii} = 0$ $(i = 1,\ldots,n)$. Można łatwo sprawdzić, że praca sił uogólnionych w postaci (19) jest równa zeru, tzn.

$$\sum_{j=1}^{n} Q_j^d \dot{q}_j = 0 \,.$$

Siły te są więc siłami giroskopowymi. Dla nich, na podstawie twierdzenia Mayera istnieje funkcja H^d, która może zależeć od czasu, współrzędnych uogólnionych i prędkości uogólnionych taka, że

$$(20) \qquad -\frac{\partial H^d}{\partial q_j} + \frac{d}{dt}\frac{\partial H^d}{\partial \dot{q}_j} = Q_j^d , \qquad j = 1,\ldots,n .$$

e. Czy siły uogólnione mogą być jednocześnie zależne od współrzędnych uogólnionych i przyśpieszeń uogólnionych ? Okazuje się, że nie. W tym bowiem przypadku układ warunków (10) i (11) sprowadza się do układu warunków (10c) i (11c).

f. Rozważmy w końcu przypadek, gdy siły uogólnione są zależne od prędkości uogólnionych i przyśpieszeń uogólnionych. Z układu warunków (10), (11) i (12) mamy teraz

$$(10f) \qquad \frac{\partial Q_i}{\partial \ddot{q}_j} - \frac{\partial Q_j}{\partial \ddot{q}_i} = 0,$$

$$(11f) \qquad \frac{\partial Q_i}{\partial \dot{q}_j} + \frac{\partial Q_j}{\partial \dot{q}_i} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial Q_i}{\partial \ddot{q}_j} + \frac{\partial Q_j}{\partial \ddot{q}_i}\right) ,$$

$$(12f) \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial Q_i}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial Q_j}{\partial \dot{q}_i}\right) = 0, \qquad i,j = 1,\ldots,n .$$

Powyższe układy warunków redukują się do tożsamości m.in. wtedy, gdy siły uogólnione można przedstawić w postaci

$$(21) \qquad Q_j^f = \frac{d}{dt} M_j(t,\dot{q}_j) , \qquad j = 1,\ldots,n .$$

W związku z tym na podstawie twierdzenia Mayera, dla sił uogólnionych w postaci (21), istnieje funkcja H^f, która może zależeć od czasu, współrzędnych uogólnionych i prędkości uogólnionych taka, że

$$(22) \qquad -\frac{\partial H^f}{\partial q_j} + \frac{d}{dt}\frac{\partial H^f}{\partial \dot{q}_j} = Q_j^f , \qquad j = 1,\ldots,n .$$

Warto zaznaczyć, że siły uogólnione w postaci (21) mają charakter sił bezwładności. Na podstawie wzoru (21) stwierdzamy także, że uogólniona masa j-tego punktu materialnego może zależeć od czasu i prędkości uogólnionej tego punktu.

5. Reasumując stwierdzamy, że jeżeli w równaniach Lagrange'a (1) siły uogólnione dadzą się przedstawić w postaci:

$$Q_j = Q_j^a + Q_j^b + Q_j^c + Q_j^d + Q_j^f , \qquad j = 1,\dots,n ,$$

to istnieje funkcja H, która może zależeć od czasu, współrzędnych uogólnionych i prędkości uogólnionych taka, że

$$-\frac{\partial H}{\partial q_j} + \frac{d}{dt}\frac{\partial H}{\partial \dot{q}_j} = Q_j , \qquad j = 1,\dots,n ,$$

gdzie

$$H = H^a + H^b + H^c + H^d + H^f .$$

Wtedy, kładąc

$$L = T - H ,$$

równanie Lagrange'a (1) można napisać w postaci (6).

LITERATURA

[1] Голдстейн Г., Класическая механика, Гостехиздат, Москва, 1957.

[2] Гантмахер Ф.Р., Лекции по аналитической механике, Из-во Наука, Москва, 1966.

[3] **Mayer A., Die Existenzbedingungen eines kinetischen Potentiales, Leipz. Ber., t. XLVIII, 1896.**