K. Kwaszczyńska, Z. Mróz
A. Drescher

ANALIZA ŚCISKANIA KRÓTKICH WALCÓW Z MATERIAŁU COULOMBA

29/1968

WARSZAWA

910

N a   p r a w a c h   r ę k o p i s u

D o   u ż y t k u   w e w n ę t r z n e g o

Zakład Mechaniki Ośrodków Ciągłych IPPT PPAN

Nakład 180 egz, Ark. wyd. 1,6. Ark. druk. 3.
Oddano do drukarni w październiku 1968 r.
Wydrukowano w grudniu 1968 r. Nr zam. 910/0/68.

Warszawska Drukarnia Naukowa, Warszawa, ul. Śniadeckich 8

Analiza ściskania krótkich walców z materiału Coulomba

K. Kwaszczyńska, Z. Mróz, A. Drescher - Warszawa

1. Wprowadzenie

Jednym z podstawowych schematów doświadczeń, mających na celu określenie własności i wytrzymałości różnych materiałów, jest próba jednokierunkowego ściskania walców kołowych. Doświadczenie to jest powszechnie stosowane przy określaniu wytrzymałości materiałów kruchych np. betonu, skał czy żeliwa. Jest faktem dobrze znanym, że uzyskiwane z doświadczeń wartości wytrzymałości zależą w dużym stopniu od warunków tarcia na ściskanych podstawach walców, jak i ich geometrii określonej stosunkiem średnicy do wysokości $\frac{2R}{t}$. Dla uniknięcia wpływu tych czynników normy opisujące sposób oznaczania cech wytrzymałościowych precyzują warunki jakim muszą odpowiadać badane próbki. Zagadnienie wpływu geometrii i tarcia na podstawach na uzyskiwaną nośność było przedmiotem szeregu prac dotyczących przede wszystkim próbek betonowych [9, 10]. Prace te, reprezentujące głównie podejście empiryczne wykazały, że ze wzrostem tarcia na podstawach, jak i wzrostem stosunku $\frac{2R}{t}$, wzrasta gwałtownie wytrzymałość materiału.

Rozważania przedstawione w niniejszej pracy mogą stanowić pewną próbę wyjaśnienia przyczyn tych efektów i matematycznego ich ujęcia z punktu widzenia pewnej konsekwentnej teorii opisu ciał - teorii plastyczności. W oparciu o założenia fizykalne i aparat matematyczny teorii plastyczności rozpatrzono zależność nośności walców od ich geometrii, warunków tarcia i własności materiału.

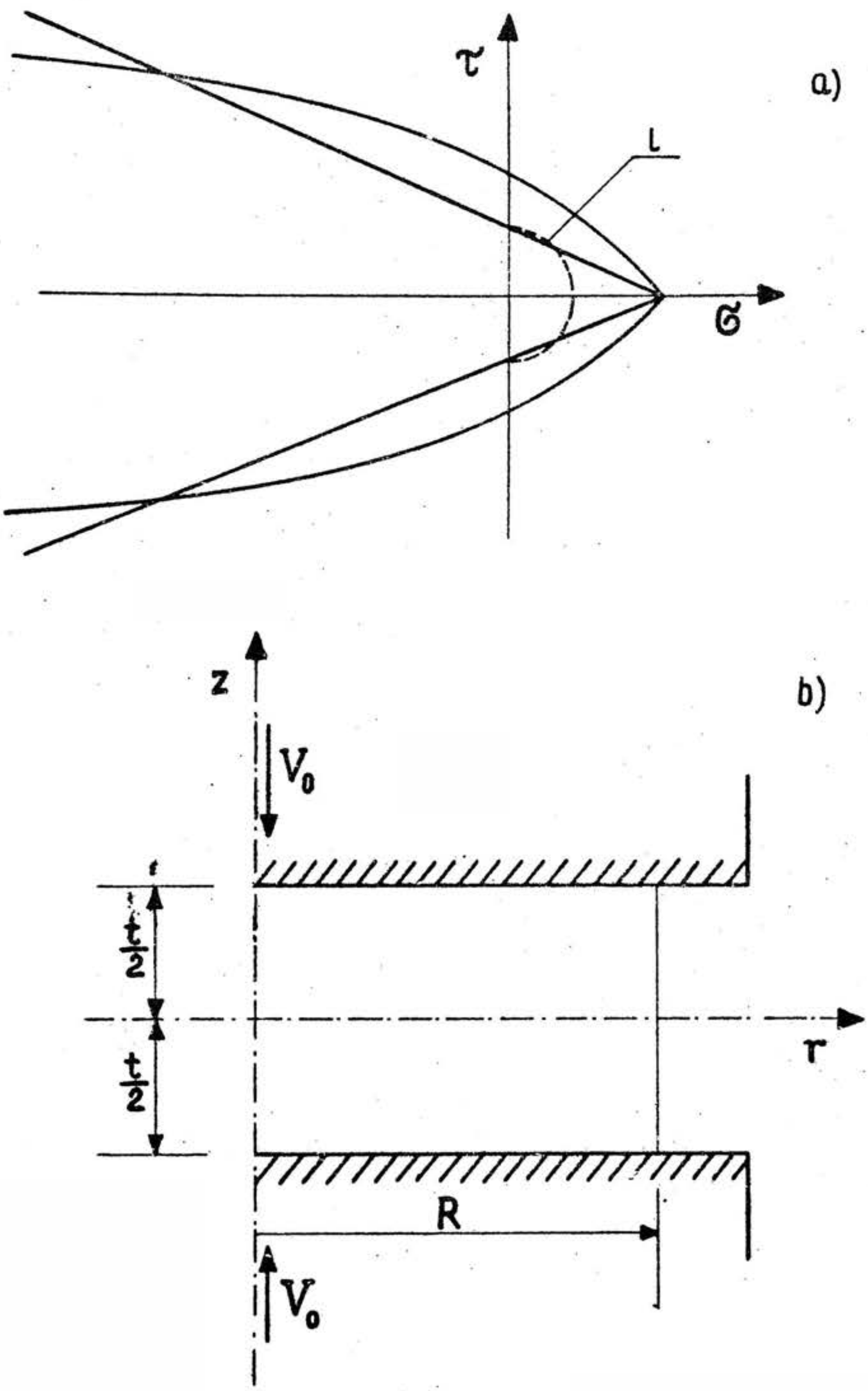
Zasadniczym założeniem przyjętym w pracy jest utożsamienie stanu granicznego materiału kruchego - wytrzymałości, z momentem uplastycznienia, a warunku zniszczenia materiału z warunkiem plastyczności. Wobec pomijalnie małych wartości odkształceń plastycznych przed zniszczeniem, sam moment zniszczenia może być traktowany jako początek ich rozwoju; dalszy rozwój odkształceń plastycznych jest oczywiście ograniczony przez dekohezję materiału. W konsekwencji rozpatrywanie stanu zniszczenia jako stanu plastycznego równoważne jest rozpatrywaniu zagadnienia początkowego plastycznego płynięcia.

Zagadnienie wpływu geometrii i warunków tarcia na nośność walców z materiałów ciągliwych rozpatrzono w pracy [4]. Stąd też niniejsza praca stanowi pewne uogólnienie wcześniej uzyskanych rozwiązań na materiały kruche.

W przypadku materiałów ciągliwych obserwacje doświadczalne wskazują, że moment uplastycznienia może być opisany warunkiem plastyczności niezależnym od wartości pierwszego niezmiennika tensora naprężenia - ciśnienia hydrostatycznego, przynajmniej w zakresie powszechnie stosowanych obciążeń. Zasadniczą zatem różnicą pomiędzy obu rodzajami materiałów, przy utożsamieniu momentu zniszczenia materiału kruchego z uplastycznieniem, jest postać warunku plastyczności. Istniejąca obszerna literatura wskazuje, że warunek zniszczenia takich materiałów jak: beton, skały czy żeliwo, może być przedstawiony w przestrzeni naprężeń głównych bryłą zbliżoną do ostrosłupa o płaskich lub wypukłych ścianach, rozszerzającego się w stronę naprężeń ściskających. Spowodowane jest to znacznie mniejszą wytrzymałością tych materiałów na rozciąganie niż na ściskanie. Często przedstawiana reprezentacja warunku zniszczenia na płaszczyźnie Mohra /τ, σ/ przybiera postać dwóch odcinków krzywych zbliżonych do paraboli lub cykloidy, a w pewnych przypadkach odcinków prostych / rys. 1a /. Istnieją również propozycje bardziej złożonych postaci warunków uwzględniających różny mechanizm zniszczenia w przypadku działania naprężeń ściskających i rozciągających [3]. Obrazem geometrycznym jest krzywa l na rys. 1a. W pracy przyjęto najprostszą postać warunku zależnego od ciśnienia hydrostatycznego - warunek liniowy Coulomba - Mohra. Stosowalność jego do opisu rzeczywistych materiałów kruchych jest przybliżeniem, które jednakże może być w szeregu przypadkach dopuszczalne. Rozszerzenie rozważań na inne postacie warunku zniszczenia będzie tematem dalszych prac.

Następnym założeniem uczynionym w pracy jest przyjęcie, że materiał kruchy może być opisany modelem ciała sztywno idealnie-plastycznego. Oznacza to, że pominięto wszelkie odkształcenia materiału przed jego zniszczeniem. Założenie to, powszechnie przyjmowane przy opisie materiałów ciągliwych, mimo sprzeczności z obserwacjami doświadczalnymi daje możliwość ścisłego rozwiązania szeregu zagadnień brzegowych, których wyniki wykazują dobrą zgodność z eksperymentem.

Powyżej przyjęte założenia pozwoliły zbudować rozwiązanie statyczne zagadnienia ściskania walca pomiędzy dwiema sztywnymi płytami, a tym samym określić nośność walców przy różnych stosunkach $\frac{2R}{t}$ i warunkach tarcia na podstawach. W pracy zanalizowano także zagadnienie pola prędkości przy przyjęciu jako prawa fizycznego materiału-stowarzyszonego prawa płynięcia. Brak danych doświadczalnych, dotyczących postaci prawa fizycznego materiału kruchego w momencie jego zniszczenia, uniemożliwia bezpośrednią ocenę słuszności przyjęcia stowarzyszonego prawa płynięcia. Przewidywany jednakże przez to prawo, przy przyjęciu warunku plastyczności zależnego od ciśnienie hydrostatycznego, wzrost objętości materiału w momencie zniszczenia- dylatacja, wydaje się znajdować uzasadnienie w obserwacjach doświadczalnych, kiedy powstające mikropęknięcia w materiale zwiększają jego objętość.



Rys. 1

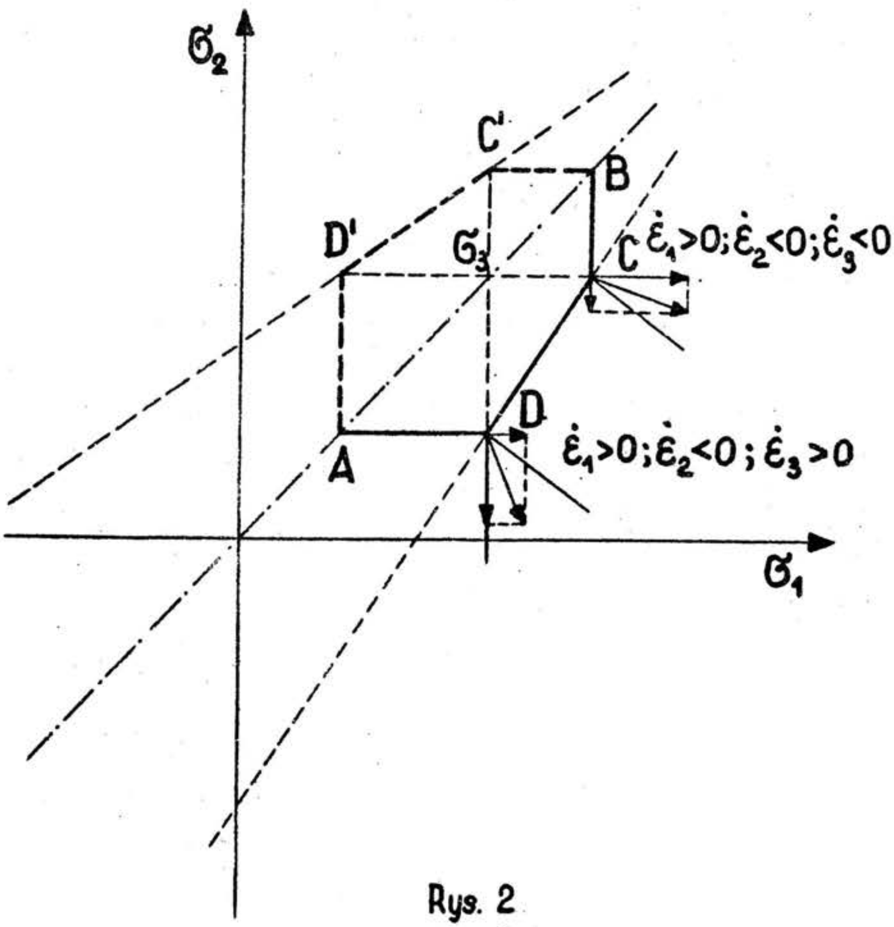
2. Równania statyki i kinematyki dla rozpatrywanego zagadnienia

Geometrię i schemat rozpatrywanego zagadnienia przedstawia rys. 1b. Walec o średnicy $2R$ i wysokości t lub o danym stosunku $\frac{2R}{t}$, jest ściskany pomiędzy dwiema nieskończenie sztywnymi płytami. Pobocznica walca jest wolna od obciążeń. Przyjmując walcowy układ współrzędnych r, θ, z i pomijając siły masowe, równania równowagi elementu walca mają postać:

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = 0$$

$$\frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\tau_{rz}}{r} = 0. \qquad /2.1/$$

Z warunku osiowej symetrii zadania wynika, że σ_θ jest naprężeniem głównym. Przyjmujemy ponadto umowę, że większym algebraicznie naprężeniem głównym w płaszczyźnie r, z jest σ_1 a mniejszym σ_2. Poszukiwany stan naprężenia w walcu musi spełniać oprócz równań /2.1/ warunek plastyczności Coulomba - Mohra. Warunek ten w przestrzeni naprężeń głównych przedstawia ostrosłup o podstawie sześciokąta o trójkrotnej symetrii. Na rys. 2 przedstawiono przekrój ostrosłupa płaszczyzną $\sigma_3 = \sigma_\theta = \text{const}$. Na płaszczyźnie $/\tau, \sigma/$ / rys. 3a / warunek Coulomba - Mohra reprezentują dwie proste nachylone do osi σ pod kątem ϱ zwanym kątem tarcia wewnętrznego. Odcinek c reprezentuje kohezję, tzn. wytrzymałość materiału na ścinanie, gdy naprężenie σ jest równe zeru. Sześć płaszczyzn ostrosłupa Coulomba - Mohra przedstawia różne stany naprężenia, a przy przyjęciu stowarzyszonego prawa płynięcia różne stany prędkości płynięcia materiału. Systematyczną analizę obszarów oraz obowiązujących w nich równań statyki i kinematyki przedstawili Cox, Eason i Hopkins [1]. Autorzy ci rozpatrzyli także pełne rozwiązanie zagadnienia wciskania osiowo-symetrycznego stempla w półprzestrzeń. Poniżej rozważono tylko przypadek, gdy stan naprężenia panujący w walcu spełnia hipotezę Haara-Kármána głoszącą, że w stanie granicznym w zagadnieniach osiowo-symetrycznych naprężenie główne σ_θ jest równe jednemu z naprężeń głównych w płaszczyźnie r, z. Stanowi temu odpowiadają na rys. 2 punkty C i D. Punkty C' i D' odpowiadają również stanowi Haara-Kármána, ale przy przyjęciu, że naprężenie σ_2 jest algebraicznie większe od σ_1.



Rys. 2

Stan naprężenia reprezentowany przez punkt C musi spełniać warunek plastyczności Coulomba - Mohra zapisany dla dwóch płaszczyzn DC i BC

$$f_1 = \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2) + \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2)\sin\varphi - c\cos\varphi = 0,$$

$$f_1 = \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_\theta) + \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_\theta)\sin\varphi - c\cdot\cos\varphi = 0. \quad /2.2/$$

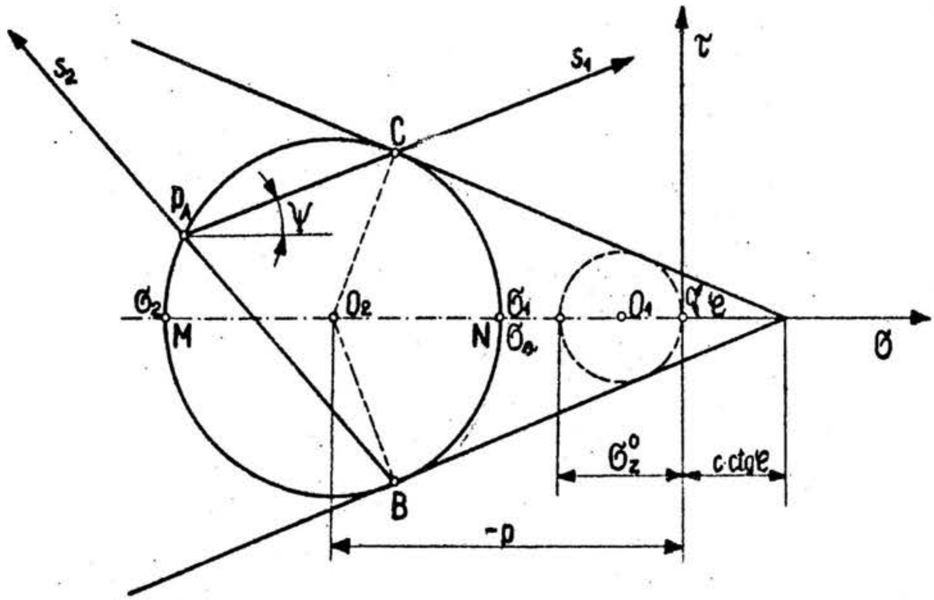
Z /2.2/ wynika, że w punkcie C $\sigma_\theta = \sigma_2$. Analogicznie równania dla płaszczyzn DC i AD

$$f_1' = \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2) + \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2)\sin\varphi - c\cos\varphi = 0,$$

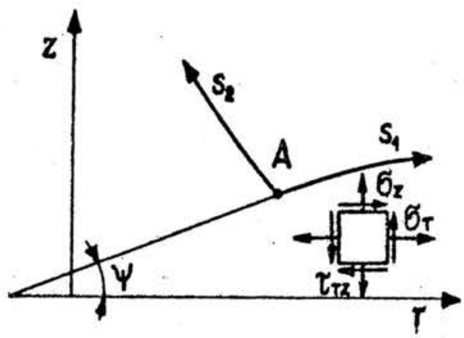
$$f_1' = \frac{1}{2}(\sigma_\theta - \sigma_2) + \frac{1}{2}(\sigma_2 + \sigma_\theta)\sin\varphi - c\cos\varphi = 0, \quad /2.3/$$

prowadzą do związku $\sigma_\theta = \sigma_1$ obowiązującego w punkcie D. Przyjęcie hipotezy Haara-Kármána powoduje, że układ równań statyki staje się statycznie wyznaczalny i do jego rozwiązazania nie potrzebne są równania kinematyki. Innymi słowy można niezależnie rozwiązać pole naprężeń i pole prędkości. Pewne przypadki pola naprężeń w osiowo-symetrycznym stanie naprężenia rozpatrzył Bierezancew [2].

Otrzymany układ czterech równań na cztery poszukiwane naprężenia $\sigma_r, \sigma_z, \tau_{rz}$ i σ_θ daje się przekształcić do dwóch równań różniczkowych cząstkowych quasiliniowych typu hiperbolicznego, dających się rozwiązać metodą charakterystyk. Rozpatrywany stan naprężenia przedstawiony jest na płaszczyźnie Mohra jednym kołem. Położenie bieguna naprężeń P_A określa jednoznacznie stan naprężenia w danym punkcie walca A, a kierunek $P_A C$ i $P_A B$ kierunki charakterystyk S_1 i S_2 w tym punkcie. Stan naprężenia przedstawiony na rys. 2 punktem C reprezentuje na rys. 3a punkt M, a stan D punkt N. Poszukiwane naprężenia można wyrazić za pomocą koła Mohra następującymi związkami



Rys. 3a)



Rys. 3b)

$$\sigma_r = -p - q\sin(\varphi + 2\psi); \quad \sigma_z = -p + q\sin(\varphi + 2\psi);$$

$$\tau_{rz} = q\cos(\varphi + 2\psi) \quad ; \quad \sigma_\theta = -p - \beta q , \qquad /2.4/$$

gdzie p jest odległością środka koła od początku układu, q promieniem koła, a ψ kątem nachylenia pierwszej rodziny charakterystyk do osi r / rys. 3b /. Wielkość $\beta = 1$, gdy σ_θ reprezentowane jest punktem M , $\beta = -1$, gdy σ_θ reprezentowane jest punktem N . Wielkość q może być dodatkowo wyrażona zależnością

$$q = p\sin\varphi + c\cdot\cos\varphi . \qquad /2.5/$$

Podstawiając /2.4/ do równań równowagi /2.1/ otrzymujemy układ rownań hiperbolicznych, dla którego charakterystyki S_1 i S_2 określone są zależnościami

$$\frac{dz_1}{dr_1} = tg\psi \; ; \quad \frac{dz_2}{dr_2} = tg\left(\psi + \frac{\pi}{2} + \varphi\right) , \qquad /2.6/$$

gdzie dr_1, dz_1 , dr_2 , dz_2 są rzutami elementów ds_1 i ds_2 na osie r i Z . Związki zachodzące wzdłuż charakterystyk mają postać

$$\cos\varphi \frac{\partial p}{\partial s_1} + 2q\frac{\partial \psi}{\partial s_1} = \frac{\beta q}{r}\left[\cos(\psi + \varphi) - \beta\sin\psi\right] ,$$

$$\cos\varphi \frac{\partial p}{\partial s_2} - 2q\frac{\partial \psi}{\partial s_2} = \frac{q}{r}\left[\cos(\psi + \varphi) - \beta\sin\psi\right] . \qquad /2.7/$$

Wprowadzając nową zmienną

$$\lambda = ctg\varphi \ln\frac{q}{c} , \qquad /2.8/$$

równania /2.7/ przybierają postać

$$d\lambda + 2d\Psi = \frac{\beta}{r}\left[dr_1 \cos\varphi - \beta dz_1(1-\sin\varphi)\right],$$

$$d\lambda - 2d\Psi = -\frac{1}{r}\left[dr_2 \cos\varphi + \beta dz_2(1-\sin\varphi)\right].$$

/2.9/

Rozpatrzmy z kolei równania opisujące pole prędkości. Przyjęte prawo fizyczne w postaci stowarzyszonego z warunkiem plastyczności Coulomba - Mohra prawa płynięcia, mające ogólną postać

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \mu \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}, \qquad /2.10/$$

gdzie f jest warunkiem plastyczności, a μ dodatnio określonym współczynnikiem mającym wymiar prędkości, jest rownoznaczne ze współosiowością kierunków głównych tensorów naprężenia i prędkości odkształcenia. Prawo to prowadzi również do ortogonalności wektora prędkości do powierzchni plastyczności / warunku plastyczności /. Cztery poszukiwane prędkości odkształcenia wyrażają się przez dwie składowe u i w wektora prędkości wzdłuż kierunków r i z następującymi zależnościami

$$\dot{\varepsilon}_r = \frac{\partial u}{\partial r}; \quad \dot{\varepsilon}_z = \frac{\partial w}{\partial z}; \quad \dot{\gamma}_{rz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r}; \quad \dot{\varepsilon}_\theta = \frac{u}{r}.$$

/2.11/

Otrzymane z prawa płynięcia prawo zmian objętościowych materiału oraz warunek współosiowości [1] przedstawiają układ dwóch równań quasiliniowych typu hiperbolicznego, który może być rozwiązany analogicznie do równań statyki - metodą charakterystyk. Charakterystyki tego układu pokrywają się z charakterystykami pola naprężeń. Równania wzdłuż charakterystyk wyrażone przez składowe wektora u i w mają postać

$$\cos\varphi \frac{\partial u}{\partial s_1} + \sin\varphi \frac{\partial w}{\partial s_1} = -\left(1+\beta\sin\varphi\right)\frac{u}{2r} ,$$

$$\sin(\psi+\varphi)\frac{\partial u}{\partial s_2} - \cos(\psi+\varphi)\frac{\partial w}{\partial s_2} = \left(1+\beta\sin\varphi\right)\frac{u}{2r} . \qquad /2.12/$$

Równania /2.12/ mogą być przedstawione w korzystniejszej do całkowania postaci przez zastąpienie składowych u i w przez rzuty wektora prędkości na kierunki s_1 i s_2, U i W

$$\frac{\partial U}{\partial s_1} - \frac{1}{\cos\varphi}\left(W+U\sin\varphi\right)\frac{\partial \psi}{\partial s_1} = -\frac{1-\sin\varphi}{\cos\varphi}\left[U\cos(\psi+\varphi)-W\sin\psi\right]\frac{1}{2r},$$

$$\frac{\partial W}{\partial s_2} - \frac{1}{\cos\varphi}\left(U+W\sin\varphi\right)\frac{\partial \psi}{\partial s_2} = -\frac{1-\sin\varphi}{\cos\varphi}\left[U\cos(\psi+\varphi)-W\sin\psi\right]\frac{1}{2r}.$$

/2.13/

Równania /2.12/ lub /2.13/ oznaczają, że charakterystyki pola prędkości w zagadnieniach osiowo-symetrycznych w odróżnieniu od zagadnienia płaskiego stanu odkształcenia doznają skrócenia lub wydłużenia. Prędkość skrócenia lub wydłużenia wyrażona jest prawą stroną /2.12/ lub /2.13/, to znaczy

$$\dot{\varepsilon}_{s_1} = \dot{\varepsilon}_{s_2} = -\frac{u}{2r}\left(1+\beta\sin\varphi\right) . \qquad /2.14/$$

Związek ten wynika bezpośrednio z prawa płynięcia /2.10/ i zależności /2.11/. Należy zauważyć, że w przypadku płaskiego stanu odkształcenia, w równaniach /2.12/ i /2.13/ prawe strony znikają; szybkości odkształceń wzdłuż charakterystyk są wtedy równe zeru.

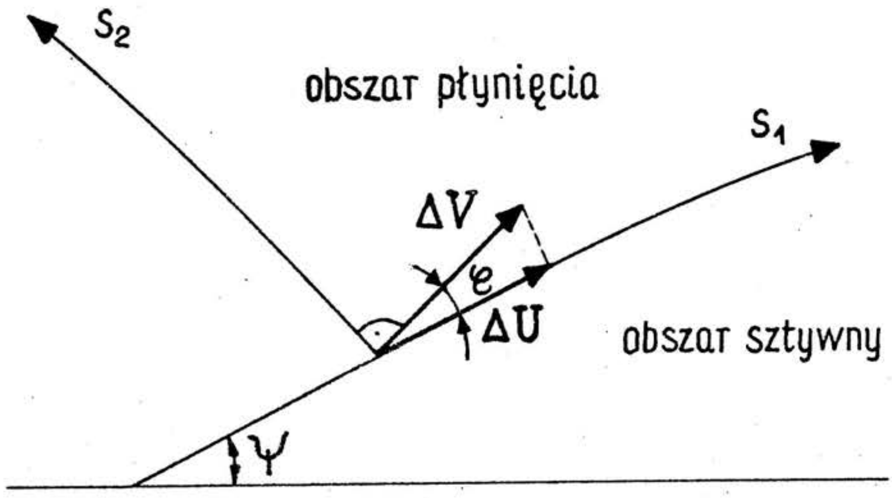
W przypadku pojawienia się nieciągłości wektora prędkości można ustalić zmianę wektora nieciągłości wzdłuż charakterystyki naprężeń. Załóżmy, że nieciągłość ΔV propaguje się wzdłuż linii S_1 / rys. 4 /. Ponieważ, podobnie jak w problemie płaskim wektor skoku prędkości jest nachylony do linii nieciągłości pod kątem φ, rzut nieciągłości ΔV na S_2 równa się zeru. Oznaczając rzut ΔV na S_1 przez ΔU możemy pierwsze równanie /2.13/ napisać po obu stronach linii nieciągłości. Po odjęciu stronami otrzymujemy związek

$$\frac{d\Delta U}{\Delta U} = \operatorname{tg}\varphi \, d\psi - (1-\sin\varphi)(1-\operatorname{tg}\varphi \operatorname{tg}\psi)\frac{dr}{2r}, \qquad /2.15/$$

który po scałkowaniu ma postać

$$\ln\left(\frac{\Delta U}{\Delta U_0}\right) = \operatorname{tg}\varphi(\psi-\psi_0) - (1-\sin\varphi)\int_{r_0}^{r}(1-\operatorname{tg}\varphi \operatorname{tg}\psi)\frac{dr}{2r}, \qquad /2.16/$$

gdzie ΔU_0 oznacza wartość ΔU dla $r = r_0$.



Rys. 4

Przedstawione powyżej równania statyki i kinematyki ważne są zarówno dla punktu C jak i D na rys. 2 . W przypadku rozwiązywania konkretnego zadania brzegowego pozostaje do określenia, który z tych dwu możliwych stanów obowiązuje. Prawo płynięcia odniesione do naroży C i D warunku plastyczności żąda, by wektor płynięcia był skierowany na zewnątrz i zawarty pomiędzy ortogonalnymi do przylegających do naroży płaszczyzn AD, DC i BC /rys. 2/. Przyjmując odpowiednią postać warunku plastyczności dla dwóch przecinających się w danym narożu płaszczyzn /2.2/ lub /2.3/, z prawa płynięcia /2.10/ otrzymujemy informacje o znakach prędkości głównych odkształceń. Prędkości odkształceń głównych w obu punktach określone są następującymi nierównościami

$$\dot{\varepsilon}_1 > 0 \; , \quad \dot{\varepsilon}_2 < 0 \; , \quad -\beta\dot{\varepsilon}_\theta > 0 \; , \qquad /2.17/$$

gdzie β przyjmuje wartość $\beta = +1$ dla punktu C i $\beta = -1$ dla punktu D . Znając zatem z warunków brzegowych zadania znak odkształceń $\dot{\varepsilon}_\theta$ stan naprężenia jest jednoznacznie określony. W rozpatrywanym zadaniu wypływ materiału walca musi następować, przy zbliżaniu obu sztywnych płyt, na zewnątrz, co odpowiada składowej wektora prędkości w kierunku r , większej od zera, $u > 0$. W konsekwencji $\dot{\varepsilon}_\theta = \frac{u}{r} > 0$ i stan naprężenia odpowiada narożu D . W równaniach statyki i kinematyki β przyjmuje wartość -1 .

3. Rozwiązanie statyczne dla dużych współczynników tarcia

Rozwiązanie zagadnienia pola naprężeń w ściskanym walcu o określonej geometrii $\frac{2R}{t}$ zależne jest od postaci warunków brzegowych. Warunek brzegowy na wolnej pobocznicy walca jest stały, $\sigma_r = 0$. Istotny wpływ na rozwiązanie mają natomiast warunki na płaszczyznach ściskanych płytami. Z fizycznego punktu widzenia dopuścić można dwa przypadki:
a/ na powierzchniach walca istnieje określone tarcie, scharakteryzowane współczynnikiem tarcia μ takim, że materiał doznaje prześlizgu po sztywnych płytach przy stałym stosunku naprężenia stycznego do normalnego,
b/ tarcie jest tak duże, że prześlizg materiału zachodzi poprzez ścięcie warstw wewnątrz materiału, włączając dowolnie bliskie sąsiedztwo z płytami. W niniejszym punkcie pracy rozpatrzono przypadek b/. W obu przypadkach przyjęto, że ze względu na osiową symetrię zadania / geometrii i warunków brzegowych /, poszukiwane pole naprężeń jest symetryczne względem osi z oraz płaszczyzny środkowej walca. Wystarczy zatem rozpatrzyć jedną czwartą przekroju walca płaszczyzną r, z .

Budowę rozwiązania oraz analizę poszczególnych obszarów wygodnie jest przedstawić w oparciu o rozpatrzenie konkretnego przykładu przedstawionego na rys. 5 , w którym przyjęto $\frac{2R}{t} = 2$, $\varphi = 20^0$. W obszarze OAB sformułowane jest zagadnienie brzegowe Cauchy'ego. Na linii OA nie będącej charakterystyką znane są naprężenia $\sigma_r = 0$. Naprężenie σ_r jest większym naprężeniem głównym. Ze związków zachodzących dla naroża D wynika, że $\sigma_r = \sigma_\theta = 0$. Mniejsze naprężenie główne wynosi

$$\sigma_z = \sigma_2 = - \frac{2c \cdot \cos\varphi}{1 - \sin\varphi} \quad . \qquad /3.1/$$

W obszarze OAB panuje jednoosiowy stan naprężenia; charakterystyki są prostoliniowe. Rodzina S_1 jest nachylona pod kątem $\varphi = 3/4\pi - \varphi/2$. Następny obszar OBE zbudowano przy założeniu, że punkt O jest punktem osobliwym, w którym charakterystyka S_1 jest zdegenerowana, a charakterystyki S_2 wychodzą z niego w postaci wachlarza. Z /2.9/ dla $d\tau_1 = 0$ i $dz_1 = 0$ wartości λ dla kolejnej charakterystyki S_2 wychodzącej z O określone są zależnością $\Delta\lambda = -2\Delta\Psi$. Znając wartości λ i Ψ w punkcie O oraz wzdłuż linii OB zbudowano rozwiązanie w obszarze OBE / zdegenerowane zagadnienie charakterystyczne/. Dla numerycznego rozwiązania równań /2.6/ i /2.9/ zapisano je w postaci równań

$$z_C - z_A = tg\,\Psi_A(\tau_C - \tau_A); \qquad z_C - z_B = tg\,\Psi_B(\tau_C - \tau_B);$$

$$\lambda_C - \lambda_A + 2(\Psi_C - \Psi_A) = -\frac{1}{\tau_A}\left[(\tau_C - \tau_A)\cos\varphi + (z_C - z_A)(1 - \sin\varphi)\right], \quad /3.2/$$

$$\lambda_C - \lambda_B - 2(\Psi_C - \Psi_B) = -\frac{1}{\tau_B}\left[(\tau_C - \tau_B)\cos\varphi + (z_C - z_B)(1 - \sin\varphi)\right],$$

gdzie A i C oraz B i C są blisko położonymi punktami odpowiednio na charakterystyce S_1 i S_2. Rozwiązanie równań /3.2/ określa pierwszą iterację układu /2.6/ i /2.9/. W drugiej iteracji za wartości λ i Ψ punktów wyjściowych A i B przyjęto wartości będące średnimi w punktach wyjściowych i otrzymanych z pierwszej iteracji. Szczegóły numerycznego rozwiązania można znaleźć w pracy [1].

Rozwiązanie w trzecim obszarze EBC otrzymano wychodząc z danych na charakterystyce EB oraz warunku, że charakterystyki S_1 muszą przecinać linię BC pod stałym kątem $\Psi = 3/4\pi - \varphi/2$ / linia BC jest osią symetrii rozwiązania, naprężenia σ_z i σ_r są naprężeniami głównymi /. W obszarze tym sformułowane jest zatem mieszane zagadnienie brzegowe. Zasięg rozwiązania określa charakterystyka S_2 wychodząca z punktu O i przecinająca środek symetrii zadania / punkt C /. Otrzymane z rozwiązania wartości λ i Ψ w węzłach siatki charakterystyk pozwoliły wyznaczyć składowe poszukiwanego stanu naprężenia. Wyrażenie na σ_z i τ_{rz}, otrzymane po przekształceniach /2.4/ i /2.8/ mają postać

$$\sigma_z = c\left[e^{\lambda tg\varphi}\sin(\varphi+2\Psi) - \frac{e^{\lambda tg\varphi}}{\sin\varphi} + ctg\varphi\right]$$

$$\tau_{rz} = c\cdot e^{\lambda tg\varphi}\cos(\varphi+2\Psi) . \qquad /3.3/$$

Występującą w związkach /3.3/ niewiadomą wielkość kohezji C zastąpiono przez naprężenie odpowiadające wytrzymałości materiału na jednoosiowe ściskanie

$$\sigma_z^o = -\frac{2c\cos\varphi}{1-\sin\varphi} ; \qquad /3.4/$$

otrzymując związki

$$\frac{\sigma_z}{\sigma_z^o} = -\frac{1-\sin\varphi}{2\cos\varphi}\left[e^{\lambda tg\varphi}\sin(\varphi-2\Psi) - \frac{e^{\lambda tg\varphi}}{\sin\varphi} + ctg\varphi\right] ,$$

$$\frac{\tau_{rz}}{\sigma_z^o} = -\frac{1-\sin\varphi}{2\cos\varphi}\, e^{\lambda tg\varphi}\cos(\varphi+2\Psi) . \qquad /3.5/$$

Na rys. 5 przedstawiono rozkład naprężeń pionowych $\frac{\sigma_z}{\sigma_z^o}$ wzdłuż linii AC. Całkując wartości $\frac{\sigma_z}{\sigma_z^o}$ po powierzchni środkowej walca i dzieląc wynik przez pole powierzchni otrzymano wartość średniego naprężenia granicznego, odniesionego do wytrzymałości jednoosiowej

$$\frac{\bar{\sigma}_z^{AC}}{\sigma_z^o} = \frac{2}{R^2}\int_0^R \frac{\sigma_z}{\sigma_z^o}\, r\, dr . \qquad /3.6/$$

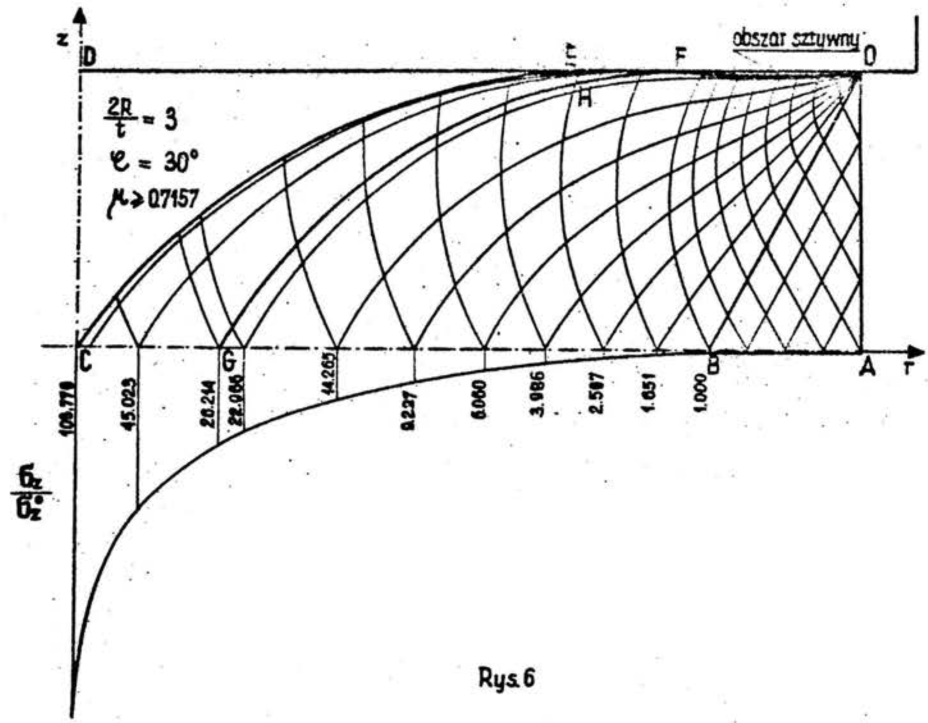
Dla sprawdzenia dokładności rozwiązania numerycznego otrzymane wartości nacisku średniego $\frac{\bar{\sigma}_z}{\sigma_z^o}$ wzdłuż linii AC porównano z wartościami nacisku średniego wzdłuż charakterystyki OEC, określonego wzorem

$$\frac{\bar{\sigma}_z^{OEC}}{\sigma_z^o} = \frac{2}{R^2}\left[\int_0^R \frac{\sigma_z}{\sigma_z^o}\, r\, dr_2 - \int_0^{t/2} \frac{\tau_{rz}}{\sigma_z^o}\, r\, dz_2\right] , \qquad /3.7/$$

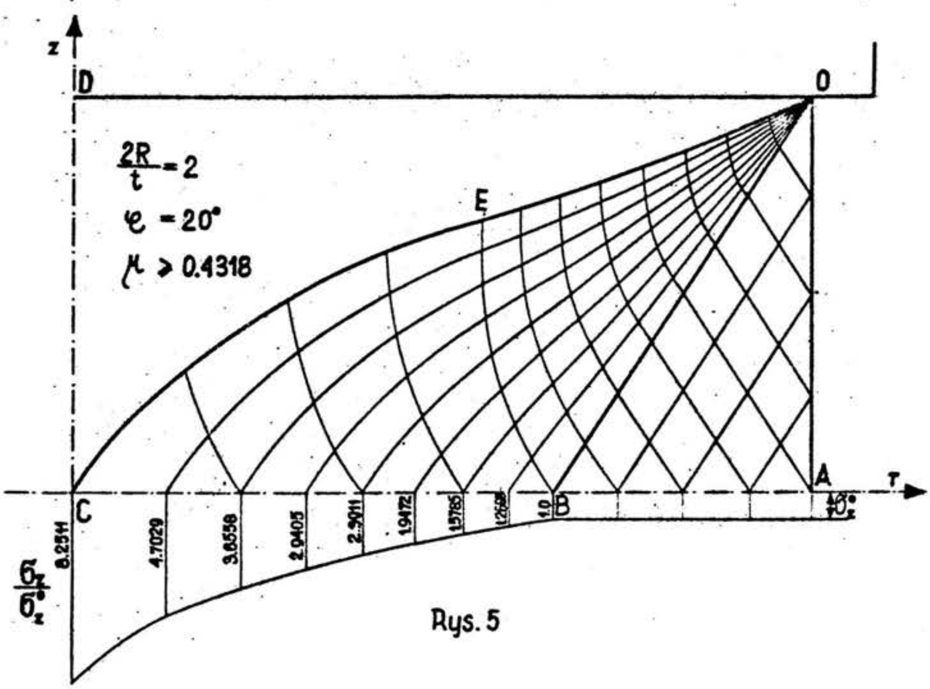
gdzie dr_2 i dz_2 są rzutami elementu ds_2 na osie r i z, a σ_z i τ_{rz} naprężeniami normalnymi i stycznymi na tej linii. Stwierdzono, że otrzymane z wyrażeń /3.6/ i /3.7/ wartości różnią się nie więcej niż o 0,05 %.

Jak wykazano w pracy [5], dla $\varphi = 0$, przedłużenie rozwiązania w obszar sztywny istnieje. Z tego też względu w niniejszej pracy zagadnienia tego nie analizowano.

Rozwiązanie omówione powyżej / rys. 5 / ważne jest jedynie dla pewnego zakresu małych wartości stosunku $\frac{2R}{t}$. Dla dużych stosunków $\frac{2R}{t}$ charakterystyka S_2 wychodząca z punktu O może podchodzić stycznie do linii kontaktu OD nie przecinając przy tym jeszcze środka symetrii C. Oznacza to, że w miejscu styku charakterystyki z linią kontaktu naprężenie styczne na kontakcie osiąga wytrzymałość materiału na ścinanie. Przypadek ten przedstawiono na rys. 6 dla $\frac{2R}{t} = 3$, $\varphi = 30^o$. W obszarze AOFG rozwiązanie jest podobne do podanego na rys.5 . Rozwiązanie poza tym obszarem zbudowano przy założeniu, że prześlizg materiału przez ścięcie występuje na pewnym odcinku EF. Odpowiada to stycznemu wyjściu kolejnych charakterystyk S_2 z linii kontaktu; odcinek EF jest obwiednią charakterystyk. Położenie punktu E określa charakterystyka przechodząca przez środek symetrii C. W obszarze EFH istnieje zagadnienie mieszane - na linii FH znane są wszystkie wielkości, na linii styku charakterystyki S_1 podchodzą pod stałym kątem $\psi = \pi/2 - \varphi$. Dalsze rozwiązanie przebiega podobnie jak na rys. 5 . Po rozwiązaniu pola naprężeń wyznaczono wartości $\frac{\sigma_z}{\sigma_z^o}$ na linii AC i po scałkowaniu porównano z wartościami otrzymanymi na linii CEFO. Pole charakterystyk przedstawione na rys. 6 zaczyna obowiązywać


z
D
F
obszar sztywny
O
$\frac{2R}{t} = 3$
$\varphi = 30°$
$\mu > 0.7157$
H
C
G
B
A
r
45.023
28.214
14.265
6.060
3.986
2.587
1.651
1.000
$\frac{\sigma_z}{\sigma_z^0}$

Rys. 6

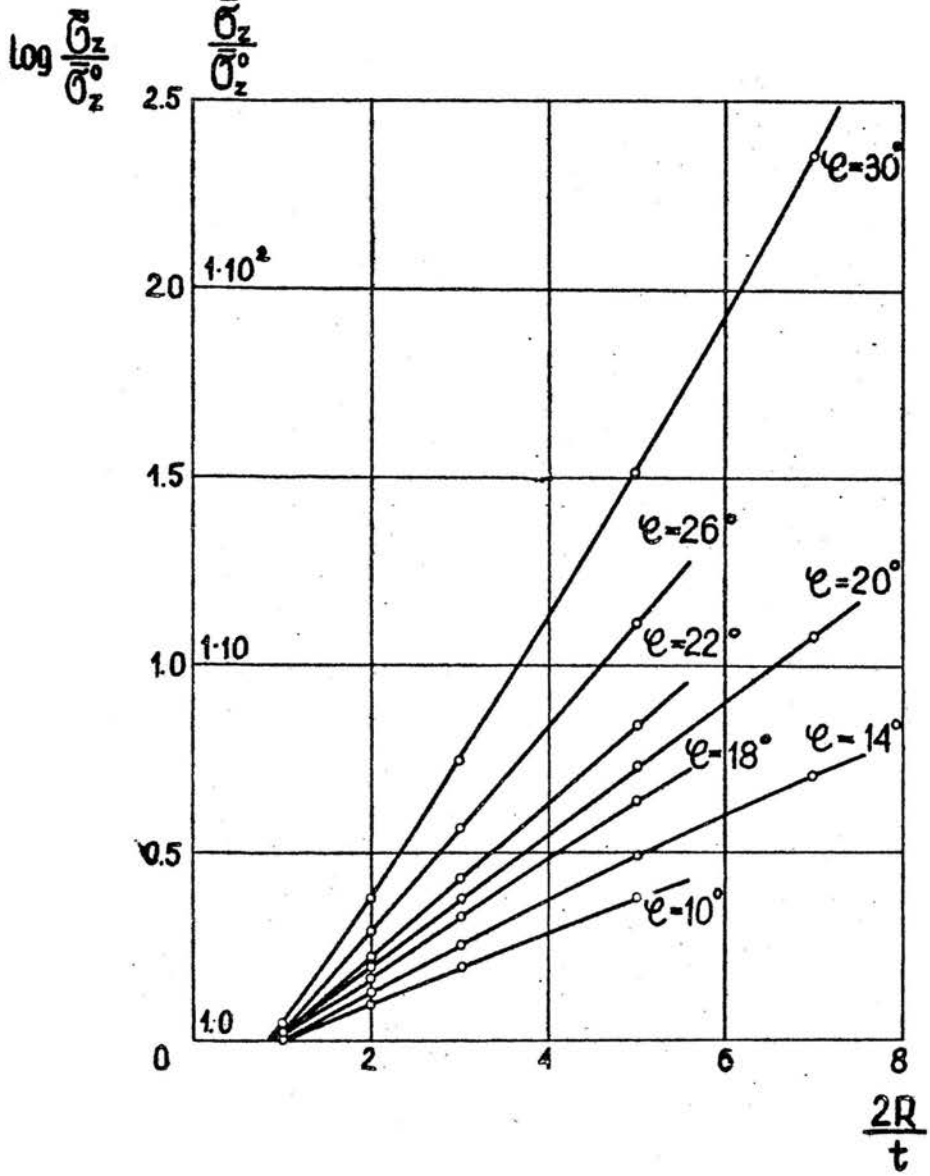

z
D
O
$\frac{2R}{t} = 2$
$\varphi = 20°$
$\mu > 0.4318$
E
A
r
C
B
4.7029
2.9405
1.9472
1.0
σ_z^0
$\frac{\sigma_z}{\sigma_z^0}$

Rys. 5

dla $\frac{2R}{t} = 3$ jeżeli $\varphi > 22^\circ$ i dla dowolnych wartości φ jeżeli $\frac{2R}{t} > 5$. Oba przedyskutowane przypadki są naturalnym uogólnieniem rozwiązań dla płaskiego stanu odkształcenia [6].

Przedstawione rozwiązania pola naprężeń ważne są jeżeli na powierzchniach kontaktowych występuje odpowiednio duży współczynnik tarcia. Współczynnik ten musi być większy od maksymalnej wartości stosunku $\frac{\tau_{rz}}{\sigma_z}$ na kontakcie, wynikającej z rozwiązania. Stosunek ten obliczono dla obu rozwiązań w punkcie O oraz dla rozwiązań z rys. 6 - na odcinku EF.

Numeryczne rozwiązanie przeprowadzono na maszynie cyfrowej GIER dla następujących wartości stosunku $\frac{2R}{t}$ i kąta tarcia wewnętrznego φ : $\frac{2R}{t} = 1,2,3,5$; $\varphi = 10^\circ$, 14°, 18°, 20°, 22°, 26°, 30° oraz dla $\frac{2R}{t} = 7$ i $\varphi = 14^\circ$, 20°, 30°. Uzyskane z obliczeń wyniki zestawiono w Tablicy 1. Pierwszy rząd dla każdej wartości φ przedstawia wartości stosunku $\frac{\sigma_z}{\sigma_z^\circ}$, rząd drugi - minimalne wartości współczynnika tarcia μ_{gr} na kontakcie, przy których rozwiązania z rys. 5 lub rys. 6 są ważne. W rzędzie trzecim zamieszczono wartości bezwymiarowego naprężenia $\frac{\sigma_z^c}{\sigma_z^\circ}$ w punkcie C. Na rys. 7 wykreślono w skali półlogarytmicznej zależność $\frac{\sigma_z}{\sigma_z^\circ}$ od $\frac{2R}{t}$ dla różnych kątów φ. Rysunek wskazuje, że w zakresie przebadanych stosunków $\frac{2R}{t}$ i kątów φ otrzymane zależności mają na wykresie półlogarytmicznym przebieg liniowy. Wraz ze wzrostem stosunku $\frac{2R}{t}$ jak i kąta φ średnie naprężenie graniczne wzrasta gwałtownie. Wszystkie krzywe przecinają oś $\frac{2R}{t}$ w punktach $\frac{2R}{t} = \mathrm{tg}(\pi/4 - \varphi/2)$. Ta wartość $\frac{2R}{t}$ określa moment przejścia od jednoosiowego stanu naprężenia w walcu do stanu złożonego wywołanego istnieniem tarcia na kontakcie.


log $\frac{\bar{\sigma}_z}{\bar{\sigma}_z^0}$
$\frac{\bar{\sigma}_z}{\bar{\sigma}_z^0}$
2.5
2.0
1.5
1.0
0.5
0
$1 \cdot 10^2$
1·10
1.0
2
4
6
8
$\frac{2R}{t}$
$\varphi = 30°$
$\varphi = 26°$
$\varphi = 22°$
$\varphi = 20°$
$\varphi = 18°$
$\varphi = 14°$
$\varphi = 10°$

Rys. 7

ϱ \ $\frac{2R}{t}$	1	2	3	5	7	
10^o	1.0037 0.0667 1.0966	1.2257 0.3096 3.6782	1.5841 0.4370 5.3217	2.4203 0.4691 10.2847		$\frac{\sigma_x}{\sigma_x^o}$ $\frac{\sigma_x^c}{\sigma_x}$
14^o	1.0070 0.0819 1.6155	1.3169 0.3553 4.3821	1.8150 0.4934 7.2887	3.0982 0.5089 17.2788	5.0451 0.5099 38.0253	
18^o	1.0200 0.0986 2.0677	1.4482 0.4036 7.1578	2.1568 0.5147 10.7644	4.3275 0.5526 34.7505		
20^o	1.0286 0.1143 2.3354	1.5310 0.4318 8.2511	2.3720 0.5680 13.2229	5.3482 0.5760 58.1566	11.9601 0.5773 210.4640	
22^o	1.0392 0.1287 2.6194	1.6406 0.4610 11.9214	2.7097 0.5974 18.8675	6.8632 0.6015 85.7057		
26^o	1.0683 0.1596 3.1866	1.9426 0.5237 13.2673	3.6825 0.6531 41.6267	13.0895 0.6562 643.6510		
30^o	1.1119 0.2057 3.7703	2.4396 0.6047 23.9276	5.6187 0.7157 103.7790	32.5395 0.7189 3434.5100	227.6900 0.7198 15369.1000	

4. Rozwiązanie dla małych współczynników tarcia

Jeżeli tarcie na podstawach walca jest mniejsze od określonego w poprzednim punkcie μ_{gr}, dla danego $\frac{2R}{t}$ i φ, rozwiązania z rys. 5 i 6 przestają obowiązywać. Warunek istnienia poślizgu po powierzchniach płyt przy stałym tarciu oznacza, że charakterystyki nie mogą podchodzić do linii kontaktu dowolnie. Rozwartość wachlarza w punkcie O jest ograniczona, niemożliwe jest styczne podejście charakterystyk S_2 na odcinku EF. Stosunek naprężenia stycznego do normalnego na linii kontaktu musi spełniać warunek

$$\frac{\tau_{rz}}{\sigma_z} = \mu = \operatorname{tg} \varrho \quad . \qquad /4.1/$$

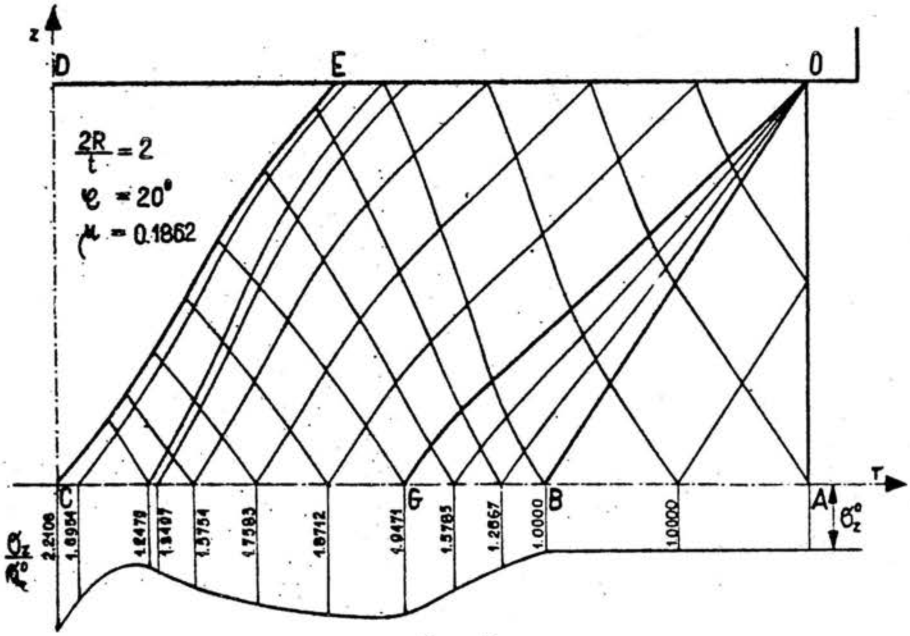
Wstawiając /3.5/ do /4.1/, kąt nachylenia pierwszej rodziny charakterystyk S_1 na linii kontaktu wyraża się zależnością

$$\Psi = \pi - \frac{1}{2}\left\{ \arccos\left[\frac{\sin\varrho}{e^{\lambda \operatorname{tg}\varphi} \sin\varphi} \left(\cos\varphi - e^{\lambda \operatorname{tg}\varphi}\right)\right] + (\varrho + \varphi)\right\} \quad . \qquad /4.2/$$

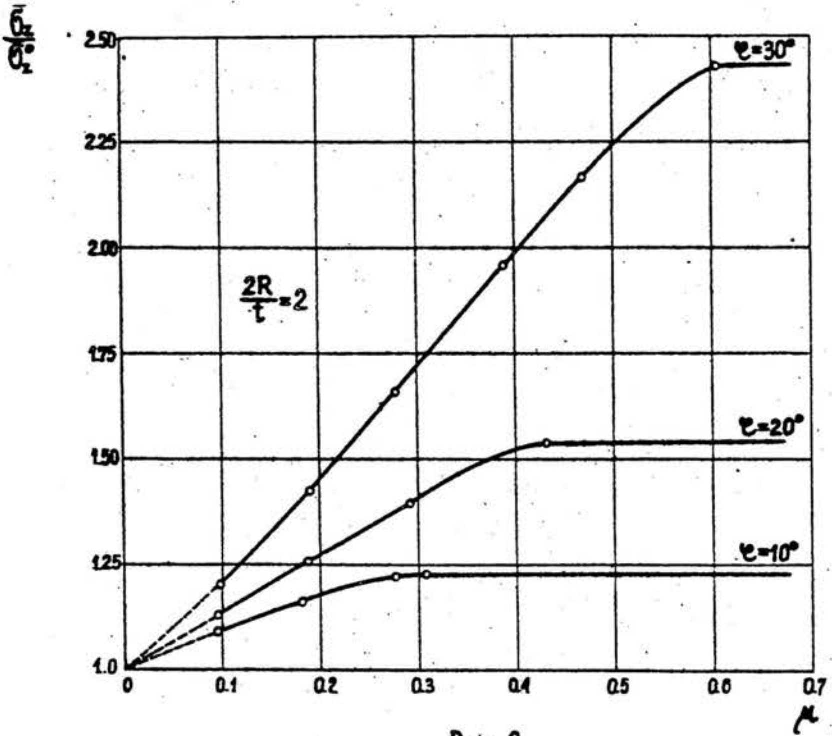
Przykład rozwięzania dla małego współczynnika tarcia przedstawia rys.8, gdzie $\frac{2R}{t} = 2$, $\varphi = 20^{\circ}$, $\mu = 0{,}1862$. Obszar OAB jest identyczny z rozwiązaniami z rys. 5 i rys. 6. Rozwartość wachlarza w punkcie O określa wyrażenie /4.2/. Dalsze rozwiązanie odpowiada zagadnieniu mieszanemu. Na linii OG znane są wszystkie wielkości, na linii OD znany jest kąt podejścia charakterystyk S_1 określony przez /4.2/. W tym przypadku konieczna jest jednak większa ilość iteracji układu /3.2/, gdyż kąt podejścia charakterystyki do linii OD nie jest stały, ale zależny od wyniku pierwszej iteracji. Rozwiązanie w pozostałym obszarze do punktu C obejmuje opisane już zagadnienia charakterystyczne i mieszane ze znanym, stałym nachyleniem charakterystyk do linii CG. Należy zaznaczyć, że dla pewnych wartości μ, większych dla rozpatrywanego stosunku

$\frac{2R}{t}$ = 2 od 0,2 , $\mu > 0{,}2$, charakterystyki S_2 wychodzące z linii OD przecinają się wewnątrz obszaru płynięcia przed osiągnięciem środka symetrii C. W takim przypadku konieczne jest wprowadzenie linii nieciągłości naprężeń. Obecność linii nieciągłości naprężeń komplikuje znacznie rozwiązanie numeryczne. Zagadnienia tego w pracy szczegółowo nie analizowano. Porównując pola naprężeń z rys.5 i rys. 6 widać wyraźnie,że wartość współczynnika μ wpływa istotnie zarówno na rozkład naprężeń wzdłuż linii AC, jak i kształt pola uplastycznionego. Wraz ze zmniejszeniem się μ obszar uplastyczniony obejmuje większą część materiału. Numeryczne rozwiązanie dla przypadków małego tarcia wykonano dla jednego stosunku $\frac{2R}{t} = 2$, $\varphi = 10^{\circ}, 20^{\circ}, 30^{\circ}$ oraz kilku wartości μ z zakresu $0{,}09 \leq \mu \leq \mu_{gr}$. Wyniki obliczeń przedstawiono w postaci zależności $\frac{\sigma_z}{\sigma_{z^0}}$ od μ dla różnych wartości φ / rys. 9 / . Wraz ze wzrostem μ wzrasta wartość $\frac{\sigma_z}{\sigma_{z^0}}$. Z rys. 9 widać również, że im większy jest kąt φ, tym większą jest wartość μ_{gr}, odpowiadająca na rys. 9 punktowi ustalenia się stosunku $\frac{\sigma_z}{\sigma_{z^0}}$. Należy zatem przypuszczać, że w większości eksperymentów, gdzie specjalne zabiegi mają na celu zmniejszenie tarcia na podstawach ściskanych walców, realizuje się poślizg materiału przy spełnieniu warunków tarcia Coulomba / rys. 8 /.

Podobną analizę wpływu współczynnika tarcia na rozwiązanie dla płaskiego stanu odkształcenia przeprowadzono dla $\varphi = 0$ w pracach [7, 8, 11].


z
D
E
O
$\frac{2R}{t} = 2$
$\varphi = 20°$
$\mu = 0.1862$
C
G
B
A
r
$\frac{\sigma_z}{p_0}$
σ_z^0
2.2106
1.6951
1.6479
1.3407
1.5754
1.7583
1.8712
1.9471
1.5785
1.2667
1.0000
1.0000

Rys. 8


$\frac{\bar{\sigma}_z}{\sigma_z^0}$
2.50
2.25
2.00
1.75
1.50
1.25
1.0
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
μ
$\frac{2R}{t} = 2$
$\varphi = 30°$
$\varphi = 20°$
$\varphi = 10°$

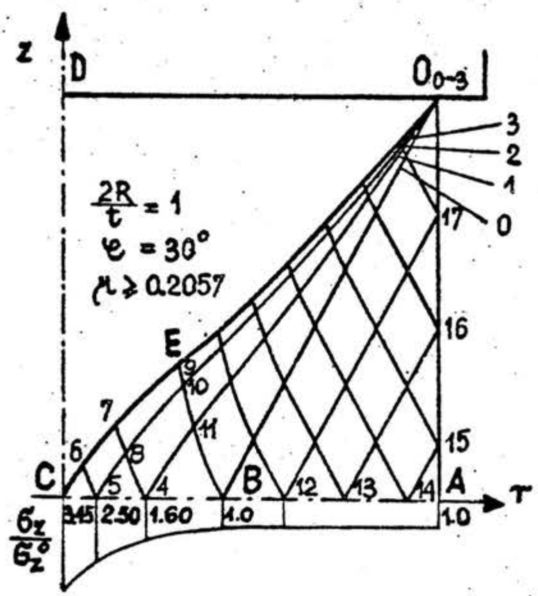
Rys. 9

5. Pole kinematyczne

Przedstawione w punktach 3 i 4 rozwiązania odnosiły się jedynie do pola statycznego, tzn. określały wartości naprężeń w poszczególnych punktach walców, rozkład nacisku na liniach środkowych oraz wartości nacisku średniego / nośności / wynikające z rozwiązania równań statyki. Z twierdzeń o nośności granicznej dla ciała idealnie plastycznego [12] wynika, że ścisłe rozwiązanie nośności danego zagadnienia otrzymuje się w przypadku, gdy dla otrzymanego pola statycznie dopuszczalnego można zbudować pole kinematycznie dopuszczalne. Jeżeli pole statycznie dopuszczalne jest polem niedopuszczalnym kinematycznie, nośność obliczona z rozwiązania statycznego jest jedynie dolną oceną wartości nośności. Samo pole kinematyczne daje z kolei ocenę górną. Dla przypadku, gdy pole statycznie dopuszczalne jest zarazem kinematycznie dopuszczalne, nośności obliczone z obu pól są identyczne. W zagadnieniach osiowej symetrii i przy przyjęciu stowarzyszonego prawa płynięcia pole statyczne będzie zarazem kinematycznie dopuszczalne, jeżeli to ostatnie spełnia następujące trzy warunki: a/ zapewnia możliwość wypływu całej masy materiału uplastycznionego, b/ moc dysypacji obliczona z obu pól jest dodatnia, c/ wektory prędkości płynięcia spełniają odpowiednie nierówności /2.17/ wynikające z prawa płynięcia dla przyjętego w rozwiązaniu statycznym stanu naprężenia.

Przyjęte w pracy stowarzyszone prawo płynięcia prowadzi do pokrywania się charakterystyk pola kinematycznego z charakterystykami pola statycznego / por. punkt 2 /. Z tego też względu do pełnego określenia pola kinematycznego pozostaje jedynie wyznaczenie wektorów prędkości płynięcia materiału w poszczególnych punktach siatki. W niniejszej pracy nie rozwiązano szczegółowo pól prędkości dla wszystkich przedstawionych typów rozwiązań statycznych i różnych wartości $\frac{2R}{t}$ i ϱ, a ograniczono się do omówienia tego zagadnienia na przykładzie rozwiązania jednego pola dla $\frac{2R}{t} = 1$, $\varphi = 30^\circ$ i $\mu > \mu_{gr}$, zaczerpniętego z wcześniejszej pracy [5].

Ze względu na przyjęcie znacznego tarcia na podstawach rozwiązanie statyczne a zarazem siatka charakterystyk prędkości ma postać przedstawioną na rys. 10.



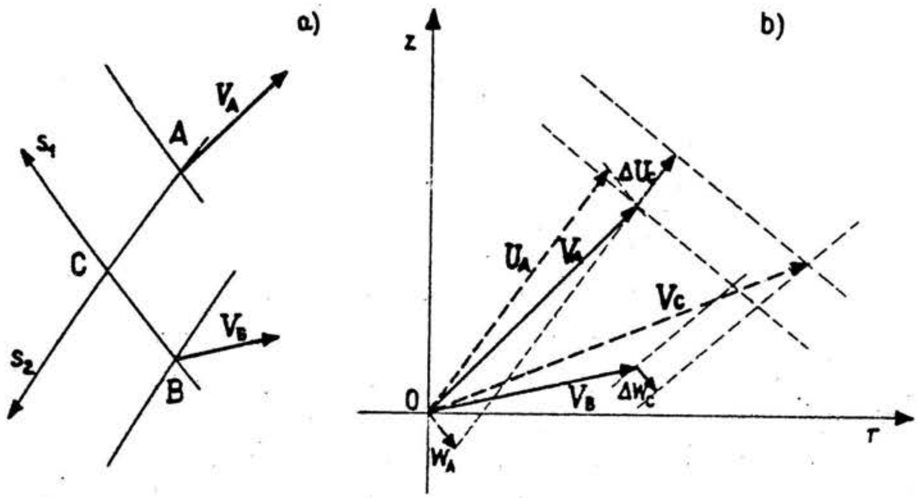
Rys. 10

Założono, że plastyczne płynięcie materiału odbywa się w obszarze ograniczonym polem charakterystyk OABCE. Obszar OECD przyjęto za sztywny i poruszający się razem z płytami z prędkością V_o. Jak wykazano w pracy [5], dla rozpatrywanego typu siatki charakterystyk w zagadnieniu osiowo-symetrycznym, linia OEC oddzielająca oba obszary może być linią tylko słabej nieciągłości, tzn. skoku doznawać mogą jedynie pierwsze pochodne prędkości. Stąd też punkty znajdujące się na linii OEC mają prędkości pionowe i równe V_o. Z warunku symetrii zadania wynika ponadto, że kierunki wektorów prędkości na linii CBA muszą być poziome. Powyższe warunki brzegowe wystarczają do wyznaczenia pola wektorów prędkości. W obszarze CEB istnieje zagadnienie mieszane, w obszarze OEB zagadnienie charakterystyczne, a w obszarze OAB zagadnienie mieszane i charakterystyczne. Numeryczne wyznaczenie wektorów prędkości w węzłach siatki charakterystyk można wykonać stosując analogiczną, jak w przypadku rozwiązania statycznego, aproksymację układu /2.13/ różnicami skończonymi. W pracy wykorzystano inną metodę polegającą na graficznym skonstruowaniu hodografu. Zasada hodografu opiera się o związki zachodzące wzdłuż charakterystyk /2.13/. Określają one jak zmieniają się składowe U i W wektora prędkości przy poruszaniu się wzdłuż odpowiedniej charakterystyki. Rozważmy wpierw przypadek płaskiego stanu odkształcenia, dla którego w równaniach /2.13/ prawe strony równe są zeru. Otrzymane związki oznaczają, że charakterystyki są liniami zerowych wydłużeń. W szczególnym przypadku, gdy obie charakterystyki są liniami prostymi, przyrost składowej U wzdłuż s_1 musi być równy zeru i analogicznie składowej W wzdłuż s_2. Rozpatrzmy dwa punkty A i B znajdujące się w węzłach charakterystyk, w których znane są wektory prędkości V_A i V_B / rys. 11a/. Na płaszczyźnie hodografu / rys. 11b/ wielkości V_A i V_B reprezentowane są przez dwa wektory wychodzące z dowolnie przyjętego bieguna O. Warunek zerowych wydłużeń charakterystyk oznacza geometrycznie, że koniec wektora V_C musi leżeć na przecięciu dwóch linii ortogonalnych odpowiednio do kierunków s_1 i s_2 / linie przerywane/. W przypadku osiowej symetrii charakterystyki nie są liniami zerowych wydłużeń, ale doznają skrócenia lub wydłużenia określonego związkami /2.14/. Składowe U i W wektora prędkości w punkcie C w stosunku do składowych w punktach A i B doznają przyrostów

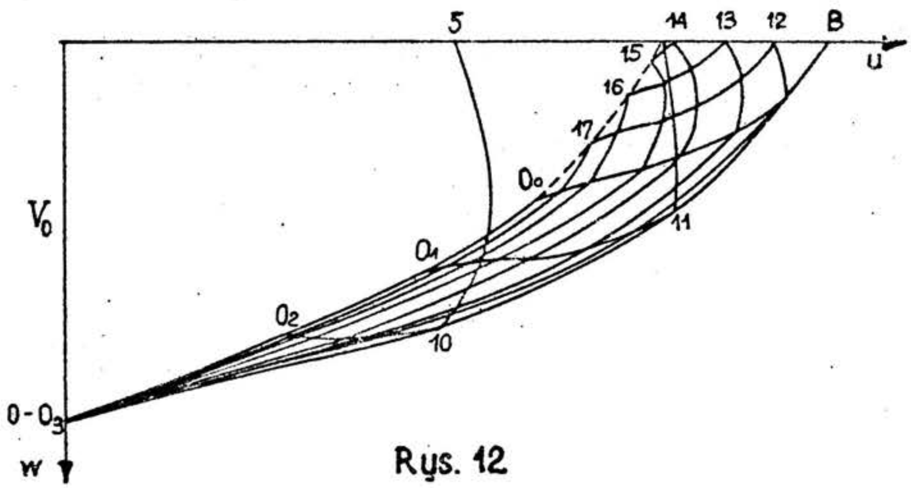
$$\Delta U_C = -\frac{u_A}{2r}\left(1+\beta\sin\varphi\right)ds_1 ,$$

$$\Delta W_C = -\frac{u_B}{2r}\left(1+\beta\sin\varphi\right)ds_2 . \qquad /5.1/$$

Na płaszczyźnie hodografu odcinki ΔU_C i ΔW_C wykreślone są wzdłuż kierunków s_1 i s_2. Prowadząc z końców odcinków


a)
b)
A
C
B
s_1
s_2
V_A
V_B
z
r
0
U_A
V_A
V_C
V_B
W_A
ΔU_C
ΔW_C

Rys. 11


5
14
13
12
B
u
15
16
17
O_0
O_1
O_2
11
10
V_0
$0-O_3$
w

Rys. 12

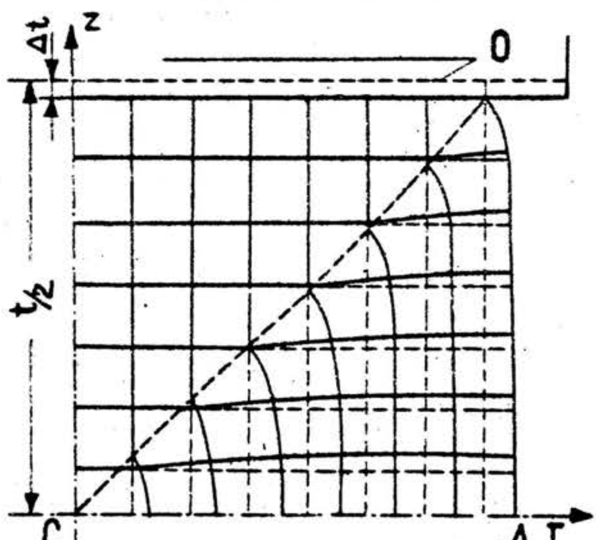
linie ortogonalne do kierunków charakterystyk, w punktach A i B otrzymuje się pierwsze położenie końca wektora V_C. Drugie przybliżenie można otrzymać przyjmując zamiast stycznych sieczne pomiędzy A i C oraz B i C . W rozpatrywanym zadaniu, $u > 0$, a więc charakterystyki doznają skrócenia.

Opierając się na powyższej konstrukcji hodografu, wychodząc ze znanych wielkości na OEC i kierunków wektorów na ABO , wyznaczono graficznie wektory prędkości w całym polu charakterystyk. Otrzymany hodograf przedstawia rys. 12. Dla sprawdzenia poprawności konstrukcji w pobliżu punktu C wartości wektora prędkości porownano z obliczonymi analitycznie, wg. wzoru [1] .

$$\frac{U}{V_o} = \frac{2}{\pi}\left(tg^2\Psi - tg^2\chi\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\frac{W}{V_o} = \frac{2}{\pi}\, arc\cos\left(-\frac{tg\chi}{tg\Psi}\right), \qquad /5.2/$$

gdzie χ jest nachyleniem do osi τ wektora promienia wychodzącego z punktu C do rozpatrywanego punktu. W oparciu o pole wektorów prędkości wykreślono na rys. 13 zdeformowaną



Rys. 13

ortogonalną siatkę pola płynięcia. Siatka ta informuje o zmianach geometrii walca w chwili początkowego płynięcia.

Wyznaczone pole prędkości pozwoliło sprawdzić, czy spełnione są warunki zapewniające kinematyczną dopuszczalność pola statycznego. Warunek pierwszy jest spełniony z samej postaci pola prędkości - nie ma obszarów izolowanych, ograniczonych obszarem sztywnym ani linii nieciągłości kończących się na granicy obszarów. Dla sprawdzenia pozostałych dwóch warunków obliczono w szeregu punktach siatki, korzystając z hodografu i związków /2.11/, wartości prędkości odkształceń $\dot{\varepsilon}_r$, $\dot{\varepsilon}_\theta$, $\dot{\varepsilon}_z$ i $\dot{\gamma}_{rz}$, a następnie prędkości główne $\dot{\varepsilon}_1$ i $\dot{\varepsilon}_2$. Stwierdzono, że warunek dodatniości mocy dyssypacji, mający postać

$$D = \sigma_2 \cdot \dot{\varepsilon}_2 + \sigma_1 \cdot (\dot{\varepsilon}_1 + \dot{\varepsilon}_\theta) > 0 \quad , \qquad /5.3/$$

jest spełniony w całym obszarze płynięcia. Niespełnione są natomiast w obszarze OAB nierówności /2.17/, gdyż obie prędkości $\dot{\varepsilon}_1$ i $\dot{\varepsilon}_2$ są w tym obszarze mniejsze od zera. Oznacza to, że pole prędkości w OAB odpowiada innemu narożu warunku plastyczności, gdzie oba naprężenia σ_1 i σ_2 są sobie równe. Prowadzi to do wniosku, że otrzymane pole statyczne jest jedynie statycznie dopuszczalne i obliczona z niego nośność stanowi ocenę dolną. Należy przypuszczać, że nierówności /2.17/ będą w obszarze OAB niespełnione i dla innych wartości $\frac{2R}{t}$ i φ .Przedstawione w punktach 3 i 4 rozwiązania statyczne i otrzymane z nich nośności stanowią wobec tego jedynie oceny dolne. Ocenę górną można obliczyć z otrzymanego pola prędkości przyjmując je jako jedno z pól tylko kinematycznie dopuszczalnych / niespełniających równań statyki /. Zagadnienia tego w pracy nie analizowano. Opierając się jednakże o wyniki uzyskane w pracy [4] dla $\varphi = 0$ można spodziewać się, że różnica pomiędzy dwiema ocenami nośności jest nieznaczna i przedstawione rozwiązania statyczne dają dobre przybliżenie rzeczywistej nośności granicznej.

6. Analiza przybliżona

W poprzednich punktach rozpatrzono ścisłe rozwiązanie zagadnienia ściskania walców z materiału Coulomba, z punktu widzenia teorii ciała sztywno idealnie- plastycznego. Poniżej przedstawiono rozwiązanie przybliżone, oparte na założeniach przyjętych przez W. Schroedera i D.A. Webstera [11] dla opisu procesu tłoczenia kołowych płyt z materiału Misesa. Schroeder i Webster założyli, że stan naprężenia w cienkim walcu ściskanym pomiędzy dwiema sztywnymi płytami jest zależny jedynie od odległości od osi symetrii walca, tzn. jest funkcją jedynie promienia r. Naprężenie w kierunku osi z, σ_z, jest na całej wysokości walca stałe i równe naciskowi płyt. Pominięte są również naprężenia styczne, $\tau_{rz} = 0$, co równoważne jest z pokrywaniem się kierunków głównych z osiami układu r, θ, z. Na skutek istnienia tarcia na obu powierzchniach ściskanych działają na nich jednostkowe siły styczne f. Przyjęty uproszczony stan naprężenia przedstawiono na rys. 14a. Stan ten opisany jest jednym równaniem równowagi

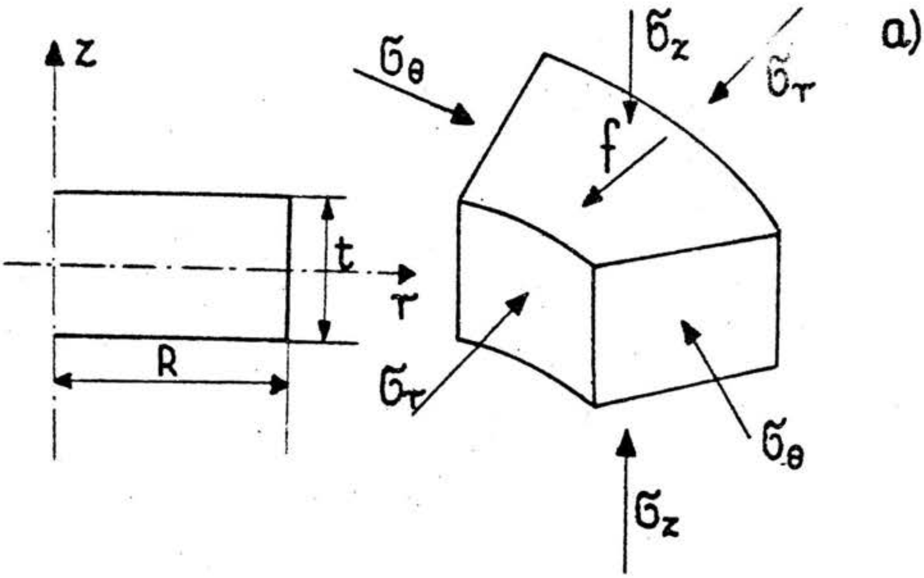
$$\frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} + \frac{2f}{t} = 0 , \qquad /6.1/$$

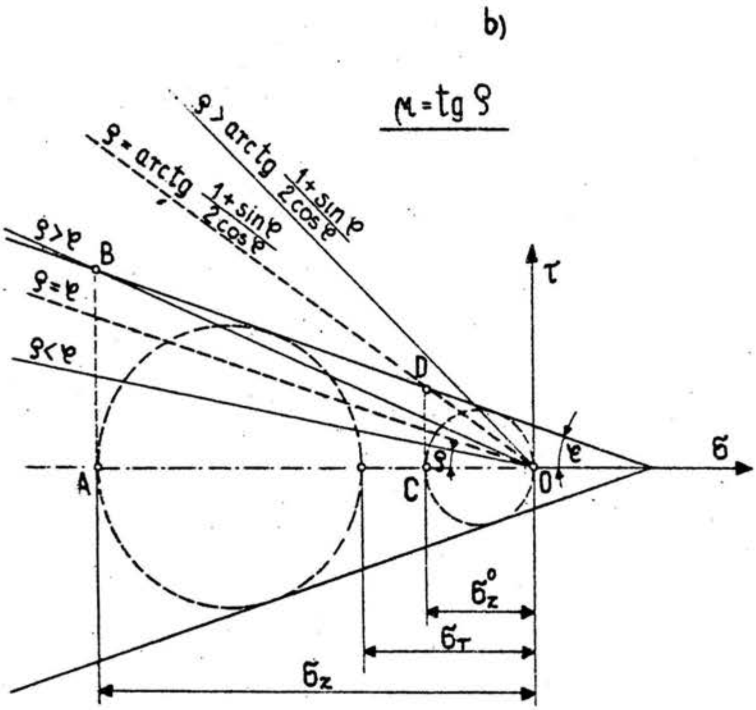
ktore przy przyjęciu hipotezy Haara- Kármána, $\sigma_r = \sigma_\theta$, redukuje się do następującej postaci

$$\frac{d\sigma_r}{dr} = - \frac{2f}{t} . \qquad /6.2/$$

Warunek plastyczności Coulomba - Mohra dla kierunków głównych r, z ma postać

$$\frac{1}{2}(\sigma_r - \sigma_z) + \frac{1}{2}(\sigma_r + \sigma_z)\sin\varphi - c\cos\varphi = 0 . \qquad /6.3/$$


a)
z
t
r
R
σ_θ
σ_z
σ_r
f
σ_r
σ_θ
σ_z


b)
$\mu = tg\, \varrho$
$\varrho > arctg \frac{1+\sin\varphi}{2\cos\varphi}$
$\varrho = arctg \frac{1+\sin\varphi}{2\cos\varphi}$
$\varrho > \varphi$
B
$\varrho = \varphi$
$\varrho < \varphi$
τ
D
φ
σ
A
C
0
σ_z^0
σ_r
σ_z

Rys. 14

Równanie /6.2/ i równanie /6.3/ zapisane w postaci przyrostowej wraz z warunkami brzegowymi pozwalają określić stan naprężenia w walcu w granicznym stanie materiału. Istotnym warunkiem brzegowym, określającym podobnie jak w metodzie charakterystyk rozwiązanie, są warunki tarcia na powierzchniach kontaktowych materiału z płytami. Warunki tarcia wpływają bezpośrednio na wartość siły f występującej w równaniu równowagi /6.2/. Rozpatrzmy to zagadnienie w oparciu o wykres Mohra przedstawiony na rys. 14b . Stan naprężenia na kontakcie reprezentowany jest przez wektor naprężenia o składowej normalnej σ_z i składowej stycznej f . Wektor ten o nachyleniu do normalnej pod kątem ϱ ma początek w punkcie O , a koniec na płaszczyźnie / τ, σ / ograniczonej obwiedniami kół Mohra. Jeżeli koniec wektora znajduje się wewnątrz obszaru ograniczonego obwiedniami, z ich wyłączeniem, to składowa styczna wyraża się związkiem

$$f = \mu \sigma_z , \qquad /6.4/$$

gdzie $\mu = tg\,\varrho$ jest współczynnikiem tarcia. Jeżeli natomiast koniec wektora znajduje się na obwiedni, to składowa styczna jest równa wytrzymałości materiału na ścinanie

$$f = \tau_{kr} = \sigma_z tg\,\varrho + c . \qquad /6.5/$$

Z rys. 14b widać, że o tym który z powyższych przypadków zachodzi decyduje wartość μ . Przypadek opisany zależnością /6.4/ oznacza, że poślizg materiału po sztywnych płytach odbywa się przy istnieniu tarcia suchego. Odpowiada on dyskutowanemu w punkcie 4 przypadkowi a/. Warunek /6.5/ oznacza, że poślizg następuje przez ścięcie warstw przylegających do płyt. Przypadek ten jest szczególną postacią przypadku b/. /Występuje on na odcinku EF rozwiązania z rys. 6/. W zależności od przyjęcia wyrażenia /6.4/ lub /6.5/ postać rozwiązania będzie różna.

Przypadek I

Z rys. 14b widać, że dla małych wartości $\mu < tg\varphi$ $(\varrho < \varphi)$ składowa styczna f jest zawsze mniejsza od wytrzymałości materiału na ścinanie, niezależnie od wartości składowej normalnej. Wstawiając /6.4/ do /6.2/ i wykorzystując /6.3/ wyrażenie na bezwymiarowe średnie naprężenie ściskające przybiera postać

$$\frac{\bar{\sigma}_z}{\sigma_z^o} = \frac{2}{C^2}\left(e^C - C - 1\right), \qquad /6.6/$$

gdzie $C = \frac{2R}{t}\mu\, tg^2(\pi/4 + \varphi/2)$. Rozwiązanie to jest ważne przy $\mu < tg\varphi$ dla dowolnej geometrii walca.

Przypadek II

Jeżeli współczynnik μ osiągnie nieco większą wartość, $\mu > tg\varphi\ (\varrho > \varphi)$, ale składowa normalna σ_z na całej powierzchni walca będzie mniejsza od pewnej granicznej wartości, przy której f= τ_{kr} / punkt B na rys. 14b /, to w dalszym ciągu obowiązuje wyrazenie / 6.4/, a rozwiązaniem jest /6.6/. Decyduje o tym geometria walca, która musi spełniać warunek

$$\frac{2R}{t} \leqslant \frac{1}{\mu\, tg^2(\pi/4 + \varphi/2)} \ln \frac{1 - \sin\varphi}{2\cos\varphi(\mu - tg\varphi)} \quad . \qquad /6.7/$$

Przypadek III

Dla większych wartości stosunku $\frac{2R}{t}$ od określonych wyrażeniem /6.7/, przy $\mu > tg\varphi$, składowa normalna σ_z na pewnej powierzchni walca określonej promieniem $0 < r < r_c$ osiąga wartości, przy których składowa styczna wyrażona jest przez /6.5/. Na pozostałej powierzchni dla $r_c < r < R$ nadal ważny jest związek /6.4/ oraz /6.6/. Promień r_c wyraża się zależnością

$$r_c = R - \frac{t}{2}\,\frac{1}{\mu\, tg^2(\pi/4 + \varphi/2)} \ln \frac{1 - \sin\varphi}{2\cos\varphi(\mu - tg\varphi)} \quad . \qquad /6.8/$$

Dla przedziału $0 < r < r_c$ z /6.2/, /6.3/ i /6.5/ otrzymujemy

$$\frac{\bar{\sigma}_z}{\sigma_z^o} = \frac{2e^C}{C^2}\left[e^{-K}(K+1) - e^{-C}(C+1)\right] + \frac{2}{D^2}(B+e^F)e^H\left[1 - e^{-H}(H+1)\right] - B\left(\frac{r_c}{R}\right)^2, \qquad /6.9/$$

gdzie

$C = \frac{2R}{t}\mu\, tg^2(\pi/4 + \varphi/2)$; $F = \frac{2}{t}(R - r_c)\mu\, tg^2(\pi/4 + \varphi/2)$;

$B = \frac{1 - \sin\varphi}{2\sin\varphi}$; $H = \frac{2r_c}{t}\, tg\varphi\, tg^2(\pi/4 + \varphi/2)$;

$D = \frac{2}{t} R\, tg\varphi\, tg^2(\pi/4 + \varphi/2)$; $K = \frac{2r_c}{t}\mu\, tg^2(\pi/4 + \varphi/2)$;

Przypadek III zachodzi do momentu, aż promień r_c osiągnie wartość R. Z /6.8/ wynika, że ma to miejsce, gdy

$$\mu = \frac{1 + \sin\varphi}{2\cos\varphi}, \qquad /6.10/$$

a zatem przypadek III obowiązuje dla $tg\varphi < \mu < \frac{1+\sin\varphi}{2\cos\varphi}$.
Dla $r_c = R$ wektor naprężenia kontaktowego w skrajnym włóknie $r = R$ reprezentuje na rys. 14b odcinek OD.

Przypadek IV

Dla $\mu > \frac{1+\sin\varphi}{2\cos\varphi}$ składowa styczna f osiąga na całej powierzchni walca wartość określoną przez /6.5/. Naprężenie średnie wynosi

$$\frac{\bar{\sigma}_z}{\sigma_z^o} = \frac{2A}{D^2}\left(e^D - D - 1\right) - B, \qquad /6.11/$$

gdzie B i D wyrażają się, jak poprzednio, natomiast

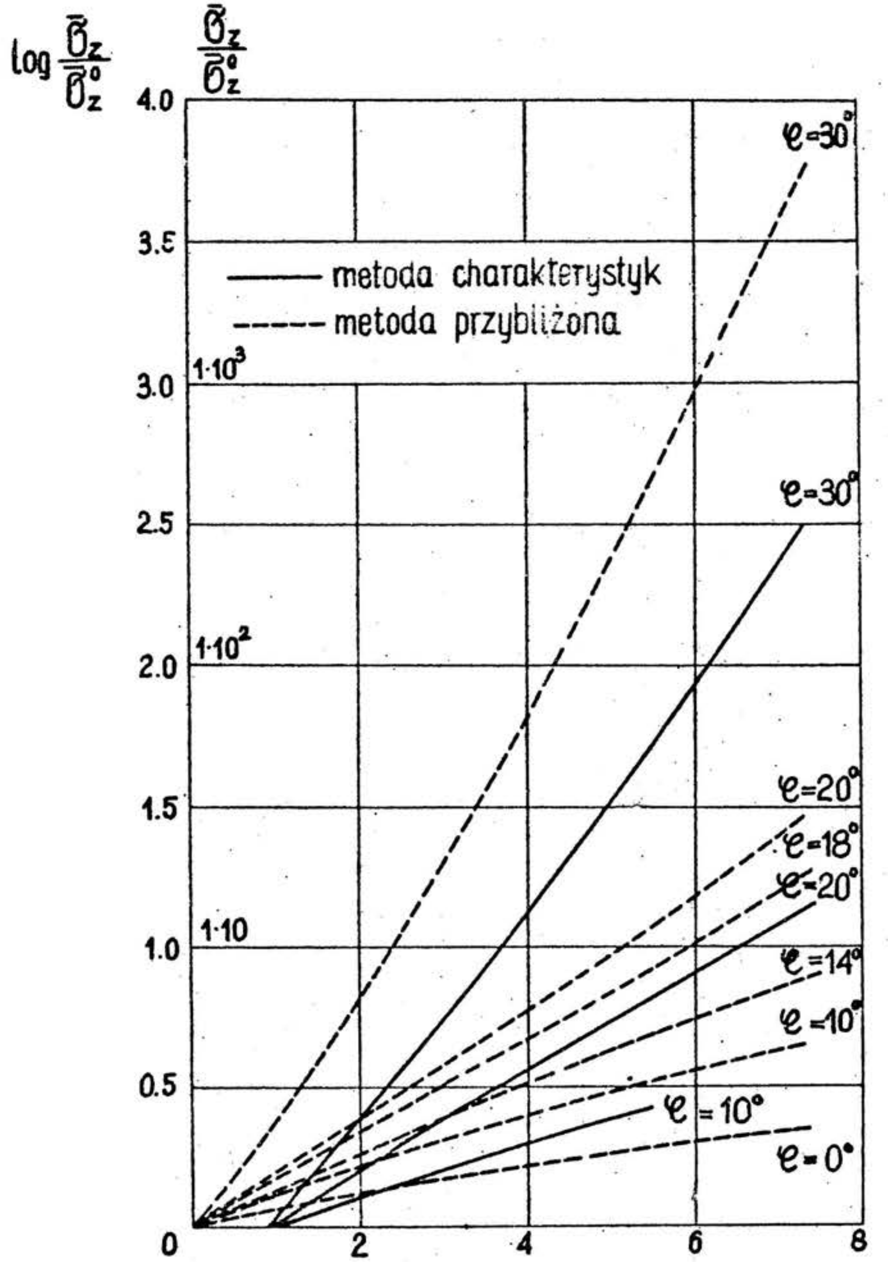
$$A = \frac{1 + \sin\varphi}{2\sin\varphi}.$$

W przypadkach I i II na całej powierzchni walca zachodzi poślizg przy istnieniu tarcia suchego, w przypadku III tarcie suche występuje na części zewnętrznej, a prześlizg materiału przez ścięcie warstw przylegających na części wewnętrznej. Ten ostatni mechanizm obowiązuje na całej powierzchni walca w przypadku IV.

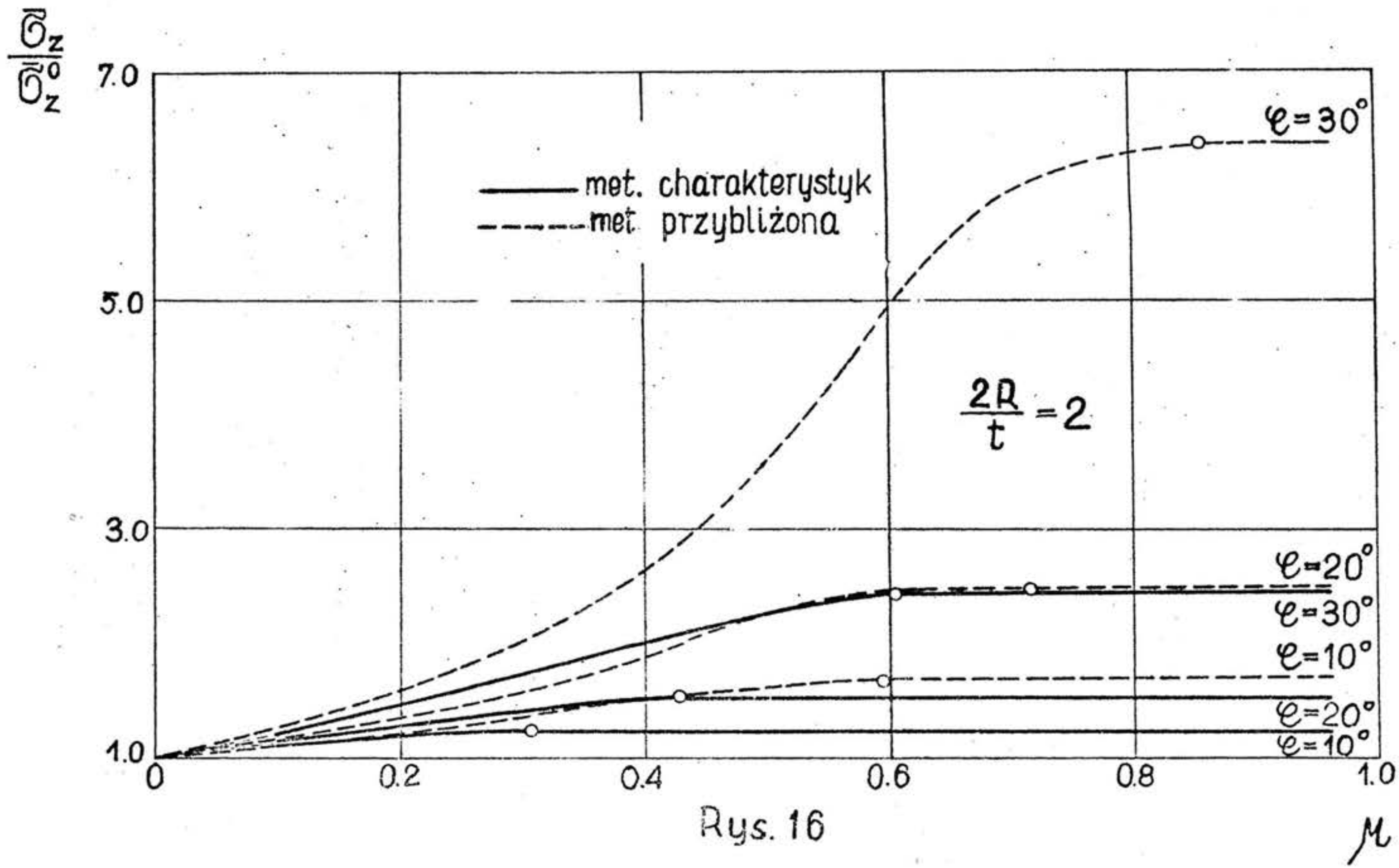
7. Porównanie metody charakterystyk i przybliżonej

Do porównania rozwiązań obu przedyskutowanych metod wybrano przypadek występowania na powierzchni kontaktowej znacznego współczynnika tarcia. Przyjęto, że współczynnik ten jest tak duży, że rozwiązanie metodą charakterystyk odpowiada siatkom przedstawionym na rysunkach 5 i 6 , a rozwiązanie metodą przybliżoną IV przypadkowi. Przy spełnieniu tego warunku nośność graniczna ściskanego walca nie zależy w obu rozwiązaniach od wartości μ . Na rys. 15 przedstawiono zależność $\frac{\overline{\sigma}_z}{\sigma_z^o}$ od $\frac{2R}{t}$ dla różnych kątów tarcia wewnętrznego. Rozwiązaniom ścisłym odpowiadają linie ciągłe, rozwiązaniom przybliżonym linie przerywane. Z rysunku widoczna jest wyraźnie różnica pomiędzy wartościami $\frac{\overline{\sigma}_z}{\sigma_z^o}$ uzyskanymi obiema metodami . Dla danego kąta φ metoda przybliżona daje wyższe wartości $\frac{\overline{\sigma}_z}{\sigma_z^o}$ niż metoda charakterystyk, przy czym rozbieżność jest tym większa im większą wartość osiąga kąt φ . Zasadnicza różnica pomiędzy obu rozwiązaniami występuje dla małych wartości $\frac{2R}{t}$. W metodzie charakterystyk przy stosunku $\frac{2R}{t} < tg\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right)$ rozwiązanie jest niezależne zarówno od geometrii walca, jak i wartości μ ; w walcu panuje wtedy jednoosiowy stan naprężeń ściskających i $\frac{\overline{\sigma}_z}{\sigma_z^o}$ = const. W metodzie przybliżonej rozwiązanie zawsze zależne jest od wartości $\frac{2R}{t}$. Niezgodność rozwiązań obiema metodami widoczna jest także na rys. 16.

Różnice jakościowe pomiędzy obu rozwiązaniami występują ponadto przy anlizie mechanizmu i stref płynięcia materiału. Rozpatrzmy przykładowo przypadek $\frac{2R}{t} = 2$, $\varphi = 20^o$. Według metody ścisłej mogą wystąpić dwa typy rozwiązań zależne od wartości μ. Dla $\mu > 0,4318$ otrzymujemy siatkę charakterystyk przedstawioną na rys. 5. Zakładając, że pole kinematyczne nieznacznie odbiega od pola statycznego płynięcie materiału zachodzi w obszarze zbliżonym do OECA; materiał przylegający do płyt jest sztywny. Dla $\mu < 0,4318$ rozwiązanie


log $\frac{\bar{\sigma}_z}{\bar{\sigma}_z^0}$
$\frac{\bar{\sigma}_z}{\bar{\sigma}_z^0}$
4.0
3.5
3.0
2.5
2.0
1.5
1.0
0.5
0
$1 \cdot 10^3$
$1 \cdot 10^2$
$1 \cdot 10$
2
4
6
8
$\frac{2R}{t}$
metoda charakterystyk
metoda przybliżona
$\varphi = 30°$
$\varphi = 30°$
$\varphi = 20°$
$\varphi = 18°$
$\varphi = 20°$
$\varphi = 14°$
$\varphi = 10°$
$\varphi = 10°$
$\varphi = 0°$

Rys. 15



$\frac{\bar{\sigma}_z}{\bar{\sigma}_z^0}$
7.0
5.0
3.0
1.0
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0
met. charakterystyk
met. przybliżona
$\frac{2R}{t} = 2$
$\varphi = 30^\circ$
$\varphi = 20^\circ$
$\varphi = 30^\circ$
$\varphi = 10^\circ$
$\varphi = 20^\circ$
$\varphi = 10^\circ$
μ

Rys. 16

ma postać zależną od μ, przykładowo przedstawioną na rys.8. Obszar sztywny nadal występuje, jest teraz jednak mniejszy. Na części powierzchni EO następuje prześlizg przy istnieniu tarcia suchego. Zgodnie z rozwiązaniami metody przybliżonej mogą zachodzić cztery przypadki. Dla $\mu < 0,4258$ obowiązuje przypadek II równoważny I. Na całej powierzchni walca występuje prześlizg przez pokonanie oporów tarcia. Dla $\mu > 0,4258$ pojawiają się dwa obszary : suchego tarcia i prześlizgu przez ścięcie materiału - przypadek III. Przy wzroście μ powyżej $\mu = 0,718$ obszar prześlizgu przez ścięcie obejmuje całą powierzchnię kontaktową walca - przypadek IV. Graniczna wartość współczynnika tarcia μ, powyżej której rozwiązanie przestaje być od niego zależne jest według metody przybliżonej znacznie większa od wartości uzyskanej z rozwiązania ścisłego / $\mu_p = 0,718$, $\mu_{ch} = 0,4318$ /. Według metody przybliżonej, niezależnie od rodzaju rozwiązania, cały materiał walca znajduje się w stanie granicznym w przeciwieństwie do rozwiązań metodą charakterystyk, kiedy zawsze część wewnętrzna materiału pozostaje sztywna. Na słuszność występowania mechanizmu płynięcia, przewidywanego przez rozwiązanie ścisłe, wskazują wyniki badań doświadczalnych, omówione w punkcie 9. Zniszczenie materiału obejmuje strefy zewnętrzne; wewnątrz próbki pozostaje niezniszczony obszar mający kształt dwóch przenikających się stożków.

8. Możliwość wykorzystania rozwiązań do określenia parametrów wytrzymałościowych materiałów kruchych

Przytoczone w punktach 3 i 4 wyniki rozwiązań mogą posłużyć do wytłumaczenia obserwowanej doświadczalnie przez wielu autorów zależności nośności walca od jego geometrii i warunków tarcia. W przypadku stwierdzenia zgodności pomiędzy wynikami badań a rozwiązaniami teoretycznymi, te ostatnie mogą stanowić podstawę pewnej metody wyznaczania parametrów wytrzymałościowych materiałów kruchych: φ i C. Rozpatrzmy w tym celu zależności przedstawione na rys. 7 odpowiadające nośności walców przy znacznych wartościach μ. Zauważmy, że dla określonej geometrii walca $\frac{2R}{t}$ wartość średniego naprężenia ściskającego, odniesionego do wytrzymałości jednoosiowej, jest zależna jedynie od kąta tarcia wewnętrznego materiału. Równocześnie w przypadku stałego kąta tarcia φ wartość $\frac{\overline{\sigma}_z}{\sigma_z^o}$ zależy tylko od stosunku $\frac{2R}{t}$. Każda z uzyskanych krzywych zajmuje inne położenie; krzywe te ponadto nigdzie się nie przecinają. Dla każdej pary wartości $\frac{2R}{t}$ i φ istnieje zatem tylko jedna wartość $\frac{\overline{\sigma}_z}{\sigma_z^o}$. Wykonując doświadczenie dla określonego stosunku $\frac{2R}{t}$, znając przy tym z innego badania wytrzymałość materiału na jednoosiowe ściskanie, otrzymana wartość $\overline{\sigma}_z$ podzielona przez σ_z^o powinna leżeć na jednej tylko krzywej odpowiadającej poszukiwanej wartości φ. Mając do dyspozycji wykresy przedstawione na rys. 7 można wyinterpolować poszukiwaną krzywą, a tym samym wartość φ. Proponowana zatem procedura postępowania jest następująca: Należy wykonać jedno doświadczenie przy małym stosunku $\frac{2R}{t}$, takim, by panujący w próbce stan naprężenia był jednoosiowy /$\frac{2R}{t} < tg(\pi/4 - \varphi/2)$/. Z doświadczenia tego otrzymujemy wartość σ_z^o. Drugie doświadczenie należy wykonać przy dużym stosunku $\frac{2R}{t}$, a uzyskaną wartość $\overline{\sigma}_z$ po podzieleniu przez σ_z^o przenieść na wykres. Celem uzyskania większej pewności o poszukiwanej wartości φ można wykonać szereg badan przy różnych stosunkach $\frac{2R}{t}$ i otrzymane punkty połączyć krzywą. Znając wartość σ_z^o i odczytując z wykresu φ wartość poszukiwanej kohezji określa wzór /3.4 /. Warunkiem koniecznym jest zapewnienie znacznego tarcia na podstawach badanych próbek, co z praktycznego punktu widzenia nie przedstawia trudności.

Proponowana metoda ogranicza się do wykonania jedynie badań jednokierunkowego ściskania, które w porównaniu do stosowanych metod trójosiowego ściskania są znacznie prostsze. Badania trójosiowe materiałów kruchych wymagają specjalnej, trudnej do wykonania aparatury ze względu na konieczność wytwarzania znacznych ciśnień hydrostatycznych.

Rozumowanie przytoczone powyżej oparte jest o uzyskane na drodze teoretycznej rozwiązania ściskania krótkich walców z materiału charakteryzującego się warunkiem zniszczenia Coulomba - Mohra. Warunek ten, aczkolwiek dwuparametrowy, ma postać liniową, co jak zaznaczono we wprowadzeniu jest uproszczeniem rzeczywistego zachowania się szeregu materiałów kruchych. Analogiczne rozumowanie można przeprowadzić, jeżeli warunek zniszczenia na płaszczyznie $\tau = \tau(\sigma)$ będzie miał postać dwuparametrowej krzywej np. cykloidy lub paraboli symetrycznych względem osi σ. W tym celu konieczne jest jednak zbudowanie nowych rozwiązań i nowych wykresów zależności $\frac{\sigma_z}{\sigma_{z^o}}$ od wielkości $\frac{2R}{t}$.

O słuszności proponowanej metody muszą zadecydować badania doświadczalne i porównanie z badaniami trójosiowymi.

9. Badania doświadczalne 1/

Zagadnienie wpływu geometrii walca oraz warunków tarcia na jego ściskanych powierzchniach na wielkość siły ściskającej było przedmiotem szeregu prac eksperymentalnych. Szczególnie wiele prac dotyczyło zagadnienia ściskania walców betonowych. Badania takie omówione są np. w pracy J. Murdocka i C. Keslera [9]. M. Livneh i E. Shklarsky [10] badali trójosiowe ściskanie krótkich walców stosując do analizy wyników analogię z płaskim stanem odkształcenia.

Celem uzyskania wstępnych informacji, czy przedstawione w poprzednich punktach rozwiązania oraz proponowana metoda wyznaczania φ i C znajdują potwierdzenie w badaniach doświadczalnych, przeprowadzono serię eksperymentów obejmującą jednokierunkowe ściskanie walców betonowych. Uzyskane wyniki porównano także z danymi innych autorów. Ograniczono się do przebadania wpływu stosunku $\frac{2R}{t}$ na nośność walców przy dużych współczynnikach tarcia, $\mu > \mu_{gr}$. Dla zapewnienia znacznego tarcia, gwarantującego słuszność rozwiązań przedstawionych w punkcie 3, użyto żłobkowanych płyt ściskających. Wykonanie doświadczeń przy określonej małej wartości współczynnika tarcia napotyka na znaczne trudności doświadczalne.

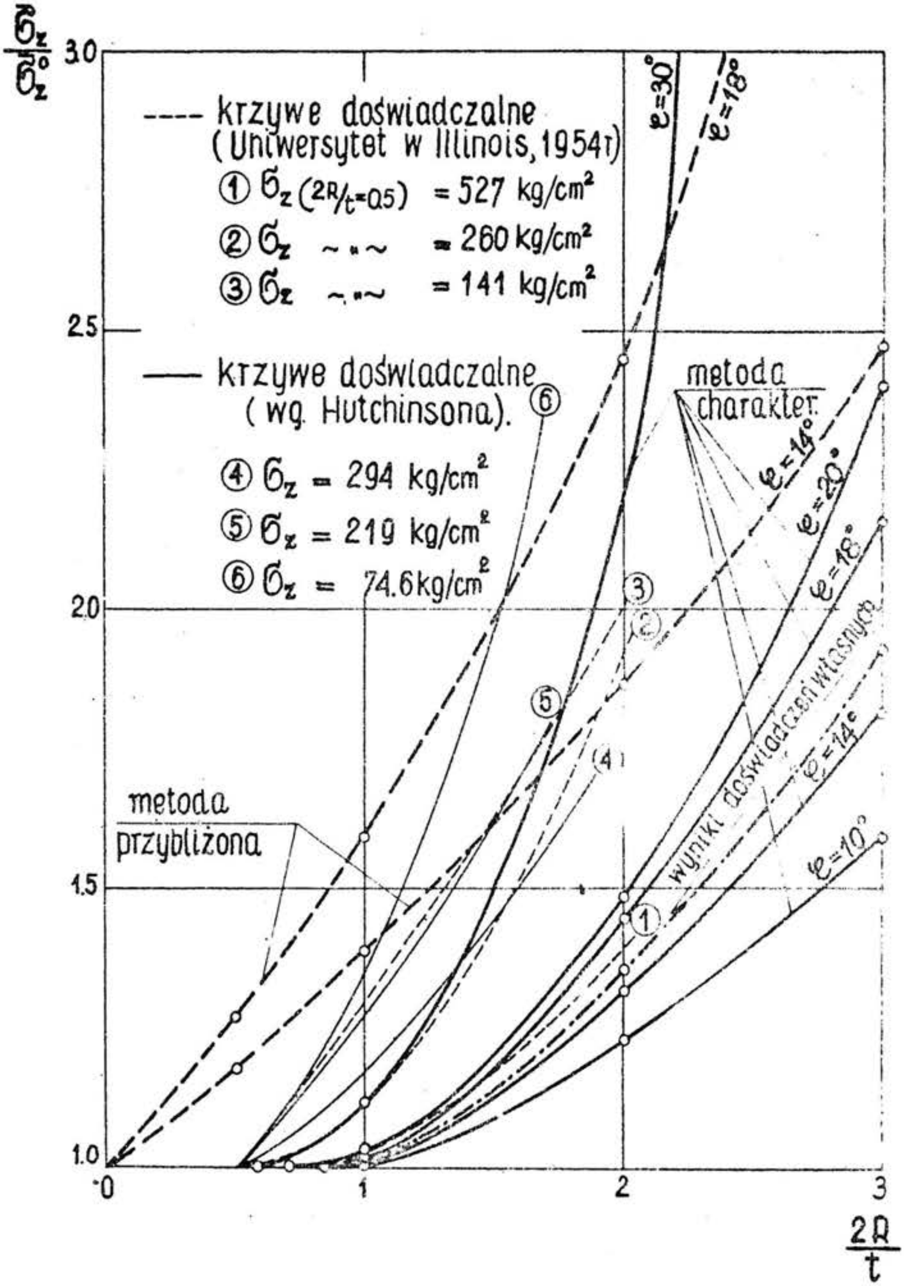
Wszystkie walce miały stałą średnicę $2R = 150$ mm i zmienną wysokość, odpowiadającą stosunkom $\frac{2R}{t} = 1/4$, $1/2$, 1, 2, 3, 7. Próbki wykonano z jednej marki betonu i przechowywano w warunkach stałej wilgotności przez czas ca 90 dni. Wytrzymałość kontrolnych walców o stosunku $\frac{2R}{t} = 1/2$ wynosiła $\sigma_z^o = 180$ kG/cm². Dla każdej wartości $\frac{2R}{t}$ przebadano sześć próbek. W przypadku $\frac{2R}{t} = 7$ stwierdzono znaczny rozrzut wyników spowodowany prawdopodobnie wpływem wielkości

---

1/ Autorzy pracy pragną wyrazić podziękowanie prof. dr S. Kajfaszowi za cenne uwagi odnośnie strony doświadczalnej pracy, jak również za pomoc w przygotowaniu badań.

ziaren kruszywa. Dla tych próbek wymiar ziarna był porównywalny z wysokością próbek. Z tego względu do porównania użyto jedynie walców o $\frac{2R}{t} \leqslant 3$. Uzyskane z doświadczeń wartości $\frac{\sigma_z}{\sigma_z^o}$ w funkcji $\frac{2R}{t}$ przedstawiono na rys. 17 linią kreska - kropka. Na rysunku tym wykreślono także grubymi liniami ciągłymi wyniki uzyskane metodą charakterystyk, a liniami przerywanymi - metodą przybliżoną. Cienkie linie ciągłe i przerywane przedstawiają dane eksperymentalne różnych autorów , uzyskane dla betonów różnych marek.

Położenie krzywej doświadczalnej badanych próbek i jej kształt wskazują na dobrą zgodność rozwiązań ścisłych z eksperymentami. Krzywa doświadczalna zawarta jest pomiędzy krzywymi teoretycznymi dla $\varphi = 14^o$ i $\varphi = 18^o$, co zgodnie z rozważaniami w punkcie 8 pozwala przypuszczać, że kąt tarcia wewnętrznego badanego betonu waha się pomiędzy tymi wartościami. Z drugiej jednak strony większość wykresów innych autorów / krzywe 2 ÷ 6 / odbiega od krzywych teoretycznych. Wyjaśnienie tych rozbieżności jest trudne z uwagi na brak danych o warunkach tarcia w tych eksperymentach. W przypadku małych współczynników tarcia przestają obowiązywać rozwiązania zamieszczone w punkcie 3, a tym samym krzywe przedstawione na rys. 7 . Drugą przyczyną rozbieżności może być odstępstwo od liniowości warunku plastyczności. Rysunek wskazuje jednak, że wszystkie krzywe doświadczalne odbiegają znacznie od krzywych otrzymanych z rozwiązań przybliżonych. Aczkolwiek przeprowadzone doświadczenia wydają się potwierdzać poprawność rozwiązań teoretycznych, dla pełnej ich weryfikacji niezbędne są dalsze badania obejmujące znacznie szerszą klasę materiałów, większą liczbę badań i różne warunki tarcia.



$\frac{\sigma_z}{\sigma_z^0}$
3.0
2.5
2.0
1.5
1.0
0
1
2
3
$\frac{2R}{t}$
krzywe doświadczalne (Uniwersytet w Illinois, 1954r)
① σ_z (2R/t=0.5) = 527 kg/cm²
② σ_z ~"~ = 260 kg/cm²
③ σ_z ~"~ = 141 kg/cm²
krzywe doświadczalne (wg. Hutchinsona).
④ σ_z = 294 kg/cm²
⑤ σ_z = 219 kg/cm²
⑥ σ_z = 74.6 kg/cm²
metoda charakter.
metoda przybliżona
wyniki doświadczeń własnych
e=30°
e=18°
e=14°
e=20°
e=18°
e=14°
e=10°

Rys. 17

10. Wnioski

Rozpatrzony w pracy problem początkowego plastycznego płynięcia osiowo-symetrycznego walca z materiału Coulomba, ściskanego pomiędzy sztywnymi płytami, wskazuje, że istnieje możliwość wytłumaczenia w oparciu o teorię plastyczności przyczyn obserwowanego doświadczalnie wpływu geometrii, wrunków brzegowych i własności materiału na nośność walców. Uzyskane rozwiązania przewidują wzrost nośności ze wzrostem stosunku $\frac{2R}{t}$ i tarcia na podstawach, którego przyczyną jest przejście od prostego, jednoosiowego stanu naprężenia do stanu złożonego. W pracy ograniczono się do liniowego warunku zniszczenia, jednakże analogiczne rozwiązania można zbudować dla bardziej złożonej jego postaci. Należy przypuszczać, że wyniki ich wpłyną jedynie na ilościową zależność nośności od parametrów zadania.

Porównanie wyników teoretycznych z wynikami wstępnej serii doświadczeń wskazuje na dobrą ilościową ich zgodność. Nie potwierdza tego wniosku część badań innych autorów, co może wskazywać, że badane przez nich materiały charakteryzowały się wyraźnym odstępstwem warunku zniszczenia od prawa Coulomba - Mohra. Dla pełnej weryfikacji uzyskanych rozwiązań konieczne są dalsze obszerne badania doświadczalne.
W przypadku potwierdzenia przez badania doświadczalne rozwiązań opartych o teorię plastyczności istnieje możliwość wykorzystania ich w prostej metodzie doświadczalnej wyznaczania parametrów wytrzymałościowych materiałów kruchych. Metoda ta, polegająca na jednokierunkowym ściskaniu walców o różnej geometrii, może w wielu przypadkach zastąpić bardziej złożone badania trójosiowe.

Literatura

1. D.D. Cox, G. Eason and H.G. Hopkins, Axially symmetric plastic deformation in soils, Phil. Trans. Roy. Soc., Ser.A, Vol. 254 /1962/, 1-45
2. В.Г. Березанцев, Осесимметричная задача теории предельного равновесия сыпучей среды, Москва /1962/
3. B. Paul, A modification of the Coulomb - Mohr theory of fracture, J. Appl. Mech., Vol 28, No 2, /1961/.
4. K. Kwaszczyńska, Z. Mróz, A theoretical analysis of plastic compression of short circular cylinders, Arch.Mech.Stos., Tom 19, Z.5 /1967/.
5. Z. Mróz, K. Kwaszczyńska, Axially symmetric plastic flow of soils treated by the graphical method, Arch. Inż. Ląd., Tom XIV, Z. 1 /1968 /.
6. R. Hill, The Mathematical Theory of Plasticity, Oxford University Press. /1950/.
7. W.W. Sokołowski, Teoria plastyczności /tłum/, Warszawa
8. J.M. Alexander, The effect of Coulomb friction in the plane strain compression of a plastic-rigid material, J. Mech.Phys.Sol., Vol.3 /1955/,233-245.
9. J.W. Murdock and C.E. Kesler, Effect of length to diameter ratio of specimen on the apparent compressive strength of concrete, ASTM Bulletin,/1957/, 68-73.
10. M.Livneh and E. Shklarsky, Topics in Applied Mechanics, ed.by B. Abir, F. Ollendorf and M. Reiner, Elsevier Publ.Co., /1965/, p.245
11. W. Schroeder, D.A. Webster, Press forging thin sections effect of friction, area and thickness on pressures required, J. Appl.Mech.,Vol. 16, /1949/, 289-294.
12. Teoria Plastyczności, wyd. PWN,/1965/.