MISCELLANEA.

Okólnik Board of Education o nauczaniu gieometrji i algiebry.

Jak wiadomo, sprawa nauczania matematyki elementarnej znajduje się obecnie w Anglji w fazie przejściowej. Przed kilkoma laty coraz liczniejszych zwolenników zaczęła zyskiwać metoda „doświadczalna“ Perry'ego; jakkolwiek wiele szkół, zwłaszcza średnich, trzymało się zdala od tego ruchu, można jednak powiedzieć, że „perryzm“ stał się modnym w Anglji. Obecnie daje się zauważyć coraz wyraźniejsza reakcja przeciw skrajnie „doświadczalnemu“ kierunkowi; wybitni nauczyciele poszukują jakiejś drogi pośredniej, na której dałoby się przeprowadzić reformę nauczania, z zachowaniem jednak tego, co w dawnym systemie, szczególnie w tradycyjnym Euklidesie, było dobrego. Jedną z prób w tym kierunku jest okólnik Board of Education o wykładzie gieometrji i algiebry, który tu obszernie streszczamy.

W nauczaniu gieometrji okólnik rozróżnia trzy stopnie, z których pierwsze dwa odpowiadają, mniej więcej, temu, co my nazywamy propedeutyką gieometrji. Na pierwszym stopniu trzeba zapoznać ucznia z podstawowemi pojęciami (bryły, powierzchni, kąta i t. p.) i wdrożyć go do posługiwania się przyrządami matematycznemi. Chodzi tu oczywiście nie o definjowanie pojęć, lecz o wyrobienie jasnych, dokładnych wyobrażeń; jedyną więc wskazaną metodą jest obserwacja i doświadczenie. Okólnik radzi nawet unikać z początku wszelkich definicji i przestrzegać tylko poprawnego używania nazw. Ćwiczenia mają polegać na budowaniu brył z kartonu i na wykreślaniu ich w najprostszych położeniach. Jaką metodę stosować przy wykreślaniu — okólnik przemilcza, widocznie pozostawiając to do uznania nauczyciela, natomiast zaznacza, że zatrzymywanie się nad konstrukcją figur płaskich, objętych budową bryły, jest zbyteczne, że należy pozostawić tu jaknajszersze pole inicjatywie i pomysłowości ucznia.

Po tych wstępnych wykładach, gdy uczeń oswoił się już z wyobrażeniem bryły, powierzchni i linji, należy, zdaniem okólnika, przejść do pojęcia kierunku. „Dzieci wytwarzają sobie pojęcia barw przez spostrzeganie ich i nazywanie; tak samo zdobędą jasne pojęcie kierunku przez spostrzeganie i nazywanie kierunków zasadniczych. Z początku należy unikać kreślenia; lepiej jest zadawać uczniom takie np. pytania: wskaż mi linję pionową; jak sprawdzisz, czy jest rzeczywiście pionowa? wskaż poziomą; jak sprawdzisz, czy jest pozioma? To drugie sprawdzenie musi być niezależne od pojęcia pionowej;

w ten sposób uczeń pozna użycie pionu i libeli. Pytamy dalej, czy można nakreślić pionową lub poziomą na ścianie, na podłodze; ile przez dany punkt można poprowadzić pionowych lub poziomych i t. p.... Następnie nauczyciel może zapytać, czy wszystkie pionowe lub poziome mają ten sam kierunek; w ten sposób wprowadzi pojęcie równoległych, jako prostych o tym samym kierunku. Dalej przechodzimy do kąta, który powinien być ściśle związany z pojęciem obrotu, i to nie tylko obrotu prostej, ale i ciał (chodzi więc o intuicyjne pojęcie kąta dwuściennego); pytanie: „o jaki kąt obracasz się na komendę: na lewo zwrot?“ może więcej przyczynić się do jasnego pojęcia kąta, niż niezliczone ćwiczenia z przenośnikiem. Z mierzeniem kątów można i należy połączyć konstrukcje najprostszych figur płaskich. O ile czas pozwala, można już na tym poziomie rozpocząć kreślenie planów, elewacji, przekrojów prostych brył i t. p. Co się tyczy strony metodycznej, to okólnik, jak zaznaczyliśmy, radzi unikać definicji, wygłaszanie zaś postulatów czy pewników stanowczo potępia, gdyż dziecko nie może odczuwać potrzeby ani rozumieć doniosłości wyraźnego ich formułowania, a przytym, jak wskazuje doświadczenie, powoływanie się na te czy inne pewniki nic a nic nie ułatwia dziecku poprawnego wnioskowania.

Na drugim stopniu nauczania mamy już zasadnicze twierdzenia o kątach i trójkątach. Rozumowanie zaczyna odgrywać coraz większą rolę, intuicja jednak ma wciąż jeszcze przewagę nad ścisłą dedukcją. Co się tyczy poszczególnych wskazówek dydaktycznych, to okólnik radzi dowodzić równości trójkątów przez konstrukcję, twierdzenia zaś o sumie kątów zewnętrznych przez obrót.

Dopiero na trzecim stopniu przechodzimy do systematycznego kursu gieometrji „rozumowej“, jak ją Włosi nazywają. Wybór materjału i układ pozostają naogół dawne, a więc odpowiadają pierwszym sześciu księgom Euklidesa, ponieważ stereometrja, jak wiadomo, nie jest objęta programem szkół średnich angielskich. Zmiany mają dotyczeć tylko sposobu przerabiania materjału. A więc przedewszystkim twierdzenia nie powinny ukazywać się jak deus ex machina, lecz mają być odgadnięte, niejako odkryte przez ucznia. Rozwiązywanie zadań, którego szkoła Perry'ego często nadużywa, powinno być zredukowane: zadanie ma mieć rolę pomocniczą — wyjaśniania pojęć, szczególnie nowych i trudnych, głównie zaś uwagę zwrócić należy na powiązanie logiczne twierdzeń. Wielki nacisk kładą autorowie okólnika na rozważanie zmian ciągłych figur w zależności od zmiany pewnych ich części; przy każdej sposobności należy do badania wprowadzać pojęcie zmiany i ruchu i w ten właśnie sposób traktować miejsca gieometryczne i obwiednie.

Tyle o gieometrji. O wiele dla nas ciekawsza jest część druga, poświęcona specjalnie wykresom w początkowym kursie algiebry. Podajemy ją tu w przekładzie ze względu na doniosłość kwestji poruszonych i na brak w tej mierze doświadczenia w naszych szkołach.

„Do kursu algiebry dodają dziś zwykle mniejszą lub większą porcję kreślenia. W ten sposób do przedmiotu nieraz bardzo oderwanego i nierealnego wprowadza się pierwiastek realności, co może dać dobre wyniki. Rzadko jednak spotyka się człowieka, mającego dokładne pojęcie o tym, jakie miejsce powinno zajmować kreślenie i czego można od niego oczekiwać. Nazbyt często uważają wykresy za dodatkowy ciężar, nieomal za balast, dla którego trzeba poświęcić inne zagadnienia. Pochodzi to przeważnie z niewłaściwego sposobu traktowania tej sprawy w podręcznikach, które dla nauczyciela niespecjalisty są prawie jedynemi przewodnikami. Zwykle zaczynają od wyznaczania poszczególnych punktów, obliczania pól trójkątów i wielokątów, utworzonych przez te punkty; następnie przedstawia się graficznie równanie pierwszego stopnia po sprowadzeniu go do prostej postaci i wreszcie rozwiązuje się układ dwuch równań stopnia pierwszego. Niema w tym nic prawie takiego, co mogłoby wywrzeć gruntowny wpływ na poznanie zasad algiebry. Rozwiązywanie graficzne prostych równań wywołuje nieraz u uczniów zarzut, że niema powodu posługiwać się metodą względnie złożoną tam, gdzie na zwykłej drodze można znaleźć rozwiązanie o wiele prędzej. Do równań drugiego stopnia stosuje się metodę graficzną dopiero przy ogólnym badaniu tych równań. I tu zbyt wiele zajmują się rozwiązywaniem równań, które łatwiej i prędzej dadzą się rozwiązać algiebraicznie, natomiast bardzo rzadko wskazują uczniom, że metodę graficzną można stosować do równań stopnia 3-go lub wyższych i nawet wogóle do równań, których algiebraicznie rozwiązać nie umiemy. Czasem nauczyciel stawia sobie za cel przedstawienie równania stopnia drugiego w formie kanonicznej oraz poszukiwanie środka, osi i asymptot. Takie badanie wkracza już w dziedzinę gieometrji analitycznej i w tej formie, w jakiej bywa przeprowadzane w podręcznikach, jest przedwcześnie podanym rozdziałem gieometrji. Przy takim traktowaniu sprawy wykresy stają się rzeczywiście dodatkiem do zwykłego wykładu algiebry, a przytym dodatkiem, który wcale się nie przyczynia do ułatwienia lub wyjaśnienia tego wykładu, lepiej więc byłoby nie zajmować się niemi wcale. Istnieje natomiast inna metoda, o ile się zdaje, mało znana śród nauczycieli. Całkowity jej wykład wymagałby nie uzupełnienia istniejących podręczników, lecz stworzenia zupełnie nowego kursu algiebry. Przekraczałoby to ramy okólnika; musimy więc poprzestać na podkreśleniu kilku najważniejszych punktów.

Metodę graficzną można wprowadzić bardzo wcześnie, już przy przejściu od arytmetyki do algiebry. Należy wtedy wyjaśnić wykreślanie danych statystycznych i oprzeć na tym kilka ćwiczeń, poprzestając na takich danych, które mają związek z faktycznemi wiadomościami ucznia. Na podstawie doświadczenia powinno się uświadomić uczniom różnicę między obrazem szeregu wartości nieciągłych a wykresem ciągłym, przy którym możliwą staje się interpolacja. Od danych statystycznych przechodzimy do takich np. pytań: „odległość między Londynem a Bristolem wynosi 120 mil; jakie są średnie prędkości pociągów, które przebiegają tę przestrzeń w 2, 3, 4.... godziny? Przedstaw wyniki graficznie". W dalszym ciągu zmieniamy czas przebiegu i, oddalając się coraz bardziej od rzeczywistej prędkości pociągu, możemy wykreślić łuk krzywej, przyjmując w jednym jego końcu za spółrzędną np. prędkość głosu, w drugim zaś prędkość cyklisty lub piechura. W ten sposób można naocznie pokazać użyteczność wyrażenia algiebraicznego $\frac{120}{x}$, a zarazem w sposób jasny i pouczający wprowadzić nowe pojęcia zera i nieskończoności. Innych przykładów dostarczyć mogą zwykłe zadania arytmetyczne, szczególnie z działu proporcji. Do zagadnień tych należą, oczywiście, zadania na procenty zwyczajne, w których mamy do czynienia z przyrostem proporcjonalnym, i na procenty składane, gdzie proporcjonalności już niema.

Metoda ta ma wielką wartość dla arytmetyki, gdyż wyjaśnia znaczenie proporcjonalności zwyczajnej i odwrotnej, a zarazem pozwala unaocznić fakt, że taka proporcjonalność nie zawsze zachodzi. Uczeń nabiera wprawy w rachunku pamięciowym i przekonywa się, że dokładnemu rachunkowi odpowiada wykres racjonalny, a zarazem stopniowo oswaja się z pojęciem ciągłości.

Po zbadaniu wyrażenia algiebraicznego w rodzaju $\frac{120}{x}$, można dawać uczniom jakiekolwiek wyrażenia i kazać je wykreślać. Dobrym przykładem na początek byłoby wyrażenie $(x-2)(x-4)$, które odrazu pociąga za sobą kilka uwag, jako to: o użyciu nawiasu, o regule znaków przy mnożeniu, o przedstawieniu graficznym wartości ujemnych, o rozpowszechnieniu symbolu „x“ na wartości ujemne i t. p. Z początku lepiej nie wprowadzać litery y jako nazwy dla funkcji x.

Uczniowie będą popełniali wiele błędów bądź w rachunku, bądź w interpretacji, lecz te trudności dadzą się prędko pokonać; z chwilą gdy uczeń przekona się z własnego doświadczenia, że przy dokładnej robocie otrzymuje się krzywa ciągła, sprawa została wygrana.

Trzeba, naturalnie, urozmaicać pracę. Słaby uczeń może poprzestać na prostych funkcjach, lepszym można dawać wyrażenia bardziej złożone, jak $(x-2)(x-4)(x-6)$ albo $\frac{(x-2)(x-6)}{x-4}$. W ten sposób uczniowie przekonają się, że mogą wykreślić każdą funkcję algiebraiczną wyraźną. Lepiej jest dawać wielomiany rozłożone na czynniki; przez to mniej czasu traci się na rachunki, uczeń może bardziej skupić uwagę na właściwym zagadnieniu—na kreśleniu krzywej i prędzej osiągnie cel, którym jest poznanie ciągłości i stwierdzenie, że prawa arytmetyki i algiebry są racjonalne i wiążą się z sobą. Taka robota może bardzo dobrze zastąpić nudne wyznaczanie wartości liczebnych wyrażeń algiebraicznych, na które zwykłe podręczniki algiebry poświęcają pierwszy rozdział.

Skoro uczniowie nauczą się robienia wykresów, można im dać funkcję linjową. Lepiej jest nie zaczynać wprost od tych funkcji, jak się to zwykle dzieje, gdyż jest rzeczą ważną, żeby uczeń odrazu przywykł uważać wszelkie funkcje za dostępne dla siebie. Zresztą fakt, że obrazem funkcji linjowej jest prosta, uczyni głębsze wrażenie na uczniu, który już poznał przykłady innych funkcji i ich obrazy.

Z początku obliczamy wartości funkcji dla wartości całkowitych na x, co w prostych przypadkach wystarcza do uwidocznienia kształtu krzywej. Żeby jednak utrwalić w umyśle ucznia pojęcie ciągłości, należy wprowadzać wartości ułamkowe na x. Można np. postawić pytanie, jaką wartość przybiera funkcja dla $x=3{,}5$; uczeń powinien znaleźć ją na wykresie, a potym sprawdzić za pomocą rachunku.

Gdy uczniowie wykreślili krzywą, np. $(x-2)(x-4)$, trzeba im dać do rozwiązania odpowiednie równanie, np. $(x-2)(x-4)=5$. To rzuca nowe światło na ważne pojęcie równania. Rozwiązanie otrzymają przybliżone; trzeba je sprawdzić arytmetycznie i przez porównanie wyników rachunku z krzywą określić, w jakim kierunku popełniono błąd. Może nawet zajść potrzeba wykreślenia na nowo krzywej — np. w innej skali; lepsi uczniowie mogą otrzymać wynik z dokładnością do 0,01. Taka robota przyczynia się do poznania działań na ułamkach, a zarazem przyzwyczaja do dokładności w rysunku i pomiarach. Lepszym uczniom można dać też kilka równań stopnia 3-go lub wyższego, przez co przekonają się o potędze metody.

Wszystko to da się wprowadzić odrazu w początkach nauczania algiebry, niezależnie od normalnego jej kursu. Ułatwi to uczniowi opanowanie zasadniczych pojęć algiebry, szczególnie znaczenia równań.

Na tym można poprzestać (na razie), gdyż wykreślanie nie jest celem, lecz środkiem. Metody specjalne, jak również zgłębianie szczególnych przypadków należy odłożyć na później. Zaznaczamy też, że z początku lepiej jest nie robić wykresów na papierze kratkowanym. Niech uczeń wyznacza odcinki „na oko" lub za pomocą linjału z podziałką; dopiero gdy przewodnią myśl uchwyci, można mu pokazać, jak użycie papieru kratkowanego znakomicie ułatwia robotę.

Gdy metoda graficzna została opanowana, trzeba ją od czasu do czasu przypominać, dając odpowiednie zadanie, najlepiej równanie do rozwiązania. Zresztą ma ona ważne zastosowanie w kursie teoretycznym algiebry.

Możemy na przykładzie pokazać, jak należy traktować kwestję, uchodzącą za trudną, np. wykładniki ułamkowe i ujemne... Przypuśćmy, że chodzi o zapoznanie klasy z uogólnieniem pojęcia wykładnika. Jeżeli nauczyciel każe wykreślić krzywą 2^x, uczeń znajdzie oczywiście wartości funkcji, odpowiadające $x=2$, 4, 8, 16... i połączy te punkty krzywą. Tu odrazu nasuwa się pytanie, jakim prawem kreślimy krzywą, co oznacza np. $y=2^{1,5}$? Wyrażenie to niema dla ucznia sensu, ale krzywa daje mu wartość $y=2,8$. Wobec tego pytamy, skąd mogłoby powstać wyrażenie $2^{3/2}$, czy nie przez wyciąganie pierwiastka kwadratowego z 2^3? Wynik odpowiada wartości, wskazanej przez krzywą. Bierzemy kilka innych przypadków, jak $2^{5/2}$, $2^{4/3}$ i t. p. Następnie zwracamy uwagę na to, że krzywa raptownie urywa się przy $x=1$. Dotąd nie mieliśmy krzywych, któreby się urywały. Dokądże krzywa zmierza? Oczywista rzecz, że nie do początku spółrzędnych. To prowadzi nas do badania wyrażeń takich, jak 2^0, 2^{-1} i t. d.

Taka metoda wyrobi w uczniach jasne pojęcie i przekonanie o potrzebie i racjonalności uogólniania definicji, czego trudno osiągnąć przy zwykłej metodzie, a zarazem pozwoli nam na razie nie dowodzić jeszcze, że przy nowych definicjach zachowują się prawa wykładników; dowody takie są na tym poziomie jeszcze zbyt trudne, a więc dla ucznia mało przekonywujące i psychologicznie mylne.

Skoro ustaliliśmy znaczenie wykładników ułamkowych i ujemnych, uczeń może wykreślić krzywą 10^x i odszukać wartości na x, przy których funkcja przybiera wartości całkowite. Mamy w ten sposób szkic tablic logarytmicznych; z łatwością można otrzymać logarytmy z dwoma znakami. Wprowadzenie tablic czterocyfrowych okaże się potym zupełnie łatwym.

Tak samo przy badaniu funkcji stopnia drugiego trzeba podać ich wykresy. Równanie $xy=c^2$ powinno już być znane, wypadnie natomiast zbadać $x^2+y^2=c^2$. Nie należy zapuszczać się bardzo daleko, trzeba jednak rozpatrzeć przypadek równości pierwiastków i wogóle przecięcie w punktach rzeczywistych i urojonych, gdyż przy dawnej metodzie cały rozdział o pierwiastkach funkcji drugiego stopnia jest nudny i nie posiada żadnego zgoła związku z doświadczeniem". *w. w.*