BIBLIOTEKA NAUKOWA

wydawana staraniem

C. K. TOWARZYSTWA NAUKOWEGO KRAKOWSKIEGO.

ELEMENTARNY WYKŁAD
MATEMATYKI

przez

JANA KANTEGO STECZKOWSKIEGO

Professora Wszechnicy Jagiellońskiéj.

CZĘŚĆ III.

GEOMETRYJA.

TRYGONOMETRYJA PROSTOKREŚLNA

I SFERYCZNA.

W KRAKOWIE

W DRUKARNI C. K. UNIWERSYTETU.

1859.

SPIS ROZDZIAŁÓW.

Znaczniejsze omyłki,

które przed użyciem téj Trygonometryi poprawić należy.

Str.	wiérsz	zamiast	czytaj
14	4 od dołu	$\frac{MP}{OM'}$	$\frac{M'P'}{OM'}$
18	5 od góry	przeciwległy	przyległy
34	2 „	dost. $(180^0 - 150^0)$	— dost. $(180^0 - 150^0)$
„	4 „	dost. $(180^0 - 175^0)$	— dost. $(180^0 - 175^0)$
37	11 „	$y = a$ dost. α	$y = a$ dost. β
„	19 „	wst. α dost. α	wst. α dost. β
38	16 „	wst. q	dost. q
43	3 od dołu	$\frac{1}{\text{wst. } \alpha}$	$\frac{\text{dost. } \alpha}{\text{wst. } \alpha}$
45	9 „	$3c$	3α
46	7 od góry	$+-1$	$+1$
„	8 „	$4(3-4\,\text{dost.}\alpha^2)\text{dost.}\alpha^3$	$(16\text{dost.}\alpha^4 - 20\text{dost.}\alpha^2+5)\text{dost.}\alpha$
„	13 „	wst. $n\beta$	wst. $n\alpha$
„	14 „	dost. $(n+1)\beta$	dost. $(n+1)\alpha$
47	16 od dołu	dost. 14^0 — wst. 30^0	dost. 14^0 — wst. 16^0
„	15 „	dost. 30^0 — wst. 14^0	dost. 16^0 — wst. 14^0
52	1 od góry	$1 -$ sty. α^2	$1 +$ sty. α^2
53	9 od dołu	dost. α dost. α	dost. α dost. β
54	2 „	$\frac{\sqrt{1+\text{dost.}2\alpha}}{2}$	$\sqrt{\frac{1+\text{dost.}2\alpha}{2}}$
56	8 „	wst. $\alpha 2$	wst. 2α
62	14 od góry	$+0\cdot2$	$+0\cdot5$
64	3 „	§. 248	§. 242
74	4 „	r dost. α	r dost. 2α,
81	4 „	mieliśmy	mielibyśmy
82	12 „	$log. a = 1\cdot6582930$	$log. a = 1\cdot6583930$
„	6 od dołu	$log. h = 1\cdot17553030$	$log. h = 1\cdot7553030$
86	13 „	$log.$ sty. $\alpha = 9\cdot8750610$	$log.$ sty. $\beta = ...$
„	9 „	dost. α	dost. β
„	2 „	dost. α	dost. β
90	11 od góry	$a+b$	$a-b$
91	13 „	$\frac{1}{4}\alpha$	$\frac{1}{2}\alpha$
92	1 „	$h+a$	$h+b$
93	3 „	$2h+(h+a)$	$2h-(h+a)$
100	10 „	$\frac{a+b}{a-b}$	$\frac{a+b}{b}$
103	14 „	b wst. $a = \alpha$ wst. β	b wst. $\alpha = a$ wst. β

Str.	wiérsz		zamiast	czytaj
104	7	od góry	*dpl. log.* $(\alpha+\beta)$	*dpl.log.*wst.$(\alpha+\beta)$
105	7	od dołu	$log.\, b = 1{\cdot}8657735$	$log.\, b = 1{\cdot}8547735$
105	4	„	$log.\, \alpha$	$log.\, a$
106	1	od góry	$a=44{\cdot}789$	$a=44{\cdot}790$
118	3	„	$\frac{a^2-b^2}{c}$	$\frac{a^2-b^2}{2c}$
129	8	„	piérwszy peryod całkiem opuścić	
131	9	od dołu	$g+a$	$g+b$
135	3	„	(43)	(40)
156	6	„	2DE.EF	2DE.DF
157	14	od góry	rycznéj	sferycznéj
159	3	od dołu	1—dost.a^2=wst.a^2	1 — dost. α^2 = wst. α^2
164	1	od góry	dost. α	doty. α
167	5	„	wst. a	wst. α
182	12	„	wst. a	dost. a
185	11	„	dost. α	dost. a
„	12	„	dost. α	dost. a
189	16	„	$\alpha+\beta$	$\alpha-\beta$
199	18	„	jako	jego
209	15	„	wyrażenia	wyrażenie
212	2	„	—dost. $\frac{a+b}{2}$	— dost. $\frac{a-b}{2}$
Tablica II fig. 21			A, B	B, A.

Trygonometryja.

WSTĘP.

Przypomnijmy tu sobie, co powiedzieliśmy we wstępie do Geometryi, mówiąc o pomocach jakich ta umiejętność do wyłożenia swych prawd używa. Tam wspomniałem, iż do dowiedzenia zasadniczych twierdzeń Geometryi, najwłaściwszy, jako najbardziéj na przekonanie działający, jest sposób rysunkowy czyli wykreślenie, jakiego nas nieśmiertelny Euklides nauczył. Jeżeli zaś chcemy, co naturalnie być powinno celem wszystkich naukami zaprzątnionych, posuwać Geometryją na coraz wyższy stopień, należy koniecznie połączyć rachunek z wykreśleniem. Ale że wszelki rachunek wykonywa się na liczbach bąć szczególnych bąć ogólnych, wypada więc ilości geometryczne czyli ciągłe, zamienić wprzód na ilości krotne czyli liczby. Jakim sposobem tę zamianę uskuteczniamy, powiedzieliśmy to już w Geometryi w §§. 1, 2, 3 i innych, a mianowicie w §§. gdzie była mowa o kątach, powierzchniach i objętościach. W §. 15 powiedziano, że trójkąt lubo najprostsza, jest wszelako najważniejszą figurą w Geometryi. W tymże samym §. przekonaliśmy się, że w każdym trójkącie oprócz jego powiérzchni jest sześć rzeczy czyli elementów do uważania, mianowicie zaś trzy jego boki i trzy kąty. Z §. 36 i następnych pokazuje się dostatecznie, w jak ścisłym związku zostają z sobą te sześć elementów. Nareszcie w §§. mówiących o wykreśleniu trójkątów widzieliśmy, że skoro z rzeczonych sześciu elementów trójkąta trzy którekolwiek są dane, z warunkiem, iżby między danemi znajdował się przynajmniéj jeden bok, trójkąt w każdym razie może być wykreślonym. Głębiéj atoli wglądającemu w naturę elementów trójkąta, nasunie się koniecznie na myśl, jakim sposobem tak ścisły związek, między tak różnemi elementami jak boki i kąty trójkąta, zachodzić może? Lubo podobnego związku możnaby przywieść przykłady z zwyczajnego życia, atoli Geometryja o to się nie pyta, ale przekonawszy się niezbitemi dowodami, że taki związek istnieje, stara się jedynie następności z tego związku wyprowadzić. Cóżby bowiem zyskała na téj znajomości kiedy ona nie zatrudnia się jakością ale tylko ilością? Wszakże w każdym razie tenże sam będzie skutek, że naprzeciwko boku większego leży kąt większy, że w trójkącie prostokątnym największa jest przeciwprostokątnia, że w trójkącie równoramiennym kąty leżące przy trzecim boku czyli podstawie są sobie równe i t. d.*). Że między różnorodnemi elementami trójkąta zachodzi wszelako ścisły związek, to nas nie powinno tak bardzo dziwić, kiedy taki sam, a może ścislejszy dostrzegamy związek w nas samych, chociaż go sobie wytłómaczyć nie potrafimy; dwie bowiem najróżniejsze istoty, ciało i dusza, zostają wszelako w najściśléjszym z sobą związku.

---

*) W zupełnie podobnym względzie już nie jeden zapytywał mnie co to jest rzeczywiście siła ciężkości piérwszy raz przez nieśmiertelnego Newtona dostrzeżona i w prawa ujęta? Ponieważ ciężkość nie jest żadną własnością materyi ale jéj konieczną istotą, i dlatego raczéj Metafizyki niż Mechaniki rozwojem być może, nie wdając się zatém w tak delikatne badania, odpowiadałem zwyczajnie pytającym: że Matematyka poznawszy siłę ciężkości z jéj skutków, z których téż wielki Newton napisał prawa, według których działa, o resztę już nie pyta, bo całkiem nie potrzebuje. Gdyby bowiem przez poznanie natury siły ciężkości wspomnione prawa w czémkolwiek zmienić się mogły, wartałoby zaiste zapuścić się w podobne metafizyczne badania. Ale kiedy siłę człowieka, zwierzęcia lub machiny oceniamy jedynie ze skutku, a do rachunku nigdy nie wchodzi wzgląd, czyli taki a taki skutek sprowadzony został przez człowieka, konia lub parę, ale jedynie jego wielkość, nic nam zatém nie przyjdzie i z wiadomości, czyli siła cięż-

Z powodu ścisłego związku między bokami i kątami trójkąta, wypada w Geometryi i rozlicznych jéj zastósowaniach, porównywać jedne z drugiemi dla wydobycia pewnych prawd z tego związku wypływających. Ale jakimże sposobem tego dokazać, kiedy różnorodne ilości w żaden sposób porównywanemi być nie mogą? Tak zaiste pierwsi Geometrowie, będąc w potrzebie wprowadzić do rachunku związek czyli stósunek kątów trójkąta do jego boków, pytali się sami siebie, a moc ich geniuszu wkrótce znalazła środek zaradzenia téj potrzebie. Lecz nie tylko różnorodność elementów trójkąta spowodowała Geometrów uciekać się do rachunku; gdy bowiem wszelkie i w jakikolwiek sposób kreślone figury nie są geometrycznemi, ale fizycznemi i służą jedynie dla zmysłów i wsparcia tak pamięci jako i uwagi naszéj, zatém gdzie chodzi o ścisłość matematyczną, tam rysunek nie wystarcza; jego bowiem dokładność zależy od wielu warunków, którym tylko w przybliżeniu zadosyć uczynić można. I tak: każdy rysunek geometryczny uskutecznia się przy pomocy stósownych do tego narzędzi, które będąc dziełem ludzkiém, bezwzględnie dokładnemi być nie mogą: jeden i tenże sam rysunek temiż samemi narzędziami lecz przez różnych rysowników wykonany, nie ma téjże saméj dokładności, bo ta zależy od większéj lub mniejszéj wprawy lub zręczności rysującego. Przypuściwszy nawet, że tak narzędzia jako i ręka kreślącego są bezwzględnie dokładne, tedy i w tym przypadku otrzyma się przez wykreślenie figurę fizyczną nie geometryczną; pamiętając bowiem definicyją linii prostéj, łatwo pojmiemy, że pomimo największéj, tak o dokładność narzędzi jako téż i sposób wykonania rysunku troskliwości, nie jesteśmy w stanie nakreślić linii, a następnie żadnéj figury geometrycznéj.

Dla zaradzenia wyliczonym tu niedostatkom, piérwszym zaraz Geometrom nasunęło się na myśl wprowadzenie do

kości jest podobna człowiekowi, koniowi lub parze; Matematyce bowiem chodzi tylko o wielkość skutku przez nią sprawionego.

Geometryi rachunku, który aby na ilościach ciągłych i różnorodnych wykonać można, zamieniono piérwsze na liczby, a w miejsce drugich, t. j. kątów, wprowadzono linije proste mające tenże sam stósunek do boków trójkąta jaki mają kąty. Zastanawiając się nad tym ostatnim warunkiem, poznano, że wprowadzić się mające linije powinny być takie, iżby za zmianą kąta, zmieniały się także według pewnego, w prawidła ująć się dającego prawa.

Skoro raz wprowadzono do Geometryi liczby, zaraz dostrzeżono, że według prawideł Arytmetyki lub Algebry, dowieść można wszystkie twierdzenia Geometryi początkowéj, gdzie w rachunek nie wchodziły kąty i odtąd téż zaczęto stósować algebraiczny rachunek do Geometryi. O téj prawdzie warto się przekonać na przykładach.

Zamierzmy sobie znaleść przez rachunek własności trójkątów prostokreślnych, t. j. prostemi linijami ograniczonych, zależące od samych boków trójkąta. Ponieważ trójkąty mogą być prostokątne lub ukośnokątne, zatém zacznijmy od piérwszych. W trójkącie prostokątnym którego stósunki boków do jednostki oznaczywszy przez a, b, h, gdzie h jest przeciwprostokątnią, a i b dwoma bokami kątowi prostemu przyległemi, tudzież stósunki odcinków na przeciwprostokątni przez prostopadłą z wierzchołka kąta prostego spuszczoną, zrobione do téjże jednostki oznaczywszy przez m i n, a nareszcie samę prostopadłą przez p, wiemy już z §. 63, że $a^2=hm$, $b^2=hn$, $h=m+n$. Porównywając potém dwa trójkąty, na które cały trójkąt podzielony został, między sobą, znajdziemy jeszcze czwarte zrównanie $p^2=mn$ które nas uczy, że prostopadła jest średnią geometrycznie proporcyjonalną między odcinkami przeciwprostokątni przez siebie zrobionemi. Cztéry te zrównania są dostateczne do wydobycia wszystkich własności trójkąta prostokątnego, które albo już w powołanym §. znaleźliśmy, albo przez stósowne ich przerobienie jeszcze znaleść możemy. Zamykają one sześć ilości a, b. h, m, n, p, z których skoro dwie którekolwiek są dane cztéry inne znalezione być mogą. I tak: trzy piérwsze zrównania dają $a^2+b^2=h(m+n)=h^2$, zrównanie już znane. Dwa piérwsze rozmnożone przez siebie dają $a^2b^2=h^2mn$; ale ponieważ $mn=p^2$, więc $a^2b^2=h^2p^2$ albo $ab=hp$ t. j. *w trójkącie prostokątnym iloczyn z boków przyległych kątowi prostemu, równa się iloczynowi z przeciwprostokątni przez prostopadłą z wierzchołka kąta prostego na przeciwprostokątnią spuszczoną.* Gdyby nam dane były np. h i p, tedy ponieważ $a^2+b^2=h^2$, zaś $2ab=2hp$, zatém raz dodawszy a drugi raz odjąwszy ostatnie zrównanie od poprzedzającego, znajdziemy

$$(a+b)^2=h^2+2hp, \text{ tudzież } (a-b)^2=h^2-2hp$$

skąd $\quad a+b=\sqrt{h^2+2hp} \qquad a-b=\sqrt{h^2-2hp}$

a następnie $\quad a=\frac{1}{2}\sqrt{h^2+2hp}+\frac{1}{2}\sqrt{h^2-2hp}$

$$b=\frac{1}{2}\sqrt{h^2+2hp}-\frac{1}{2}\sqrt{h^2-2hp}.$$

Znalazłszy tym sposobem a i b, znajdziemy téż odcinki m i n z dwóch piérwszych zrównań. Z ważności na a i b czytamy zaraz tę prawdę, że w przypadku gdy $h^2<2hp$ czyli $h<2p$ albo $p>\frac{1}{2}h$, trójkąt jest niemożebny i że jedynie tylko w przypadku gdy $p<\frac{1}{2}h$, albo przynajmniéj $p=\frac{1}{2}h$, zadanie jest podobném do rozwiązania i znajduje się trójkąt zadość czyniący warunkom w zrównaniach wymaganym.

Zdaje mi się, iż na tym jednym przykładzie trójkątów prostokątnych przestać możemy i przejść do trójkątów ukośnokątnych.

Załóżmy tu sobie wyrazić którykolwiek bok przez dwa inne, przyjmując za wiadome z poprzedzającego, że kwadrat wystawiony na przeciwprostokątni, równa się summie kwadratów wystawionych na bokach przyległych kątowi prostemu.

Oznaczywszy w trójkącie ukośnokątnym stósunki trzech jego boków do jednostki przez a, b, c i spuściwszy prostopadłą p z któregokolwiek wierzchołka np. A na bok przeciwległy a, oznaczmy także i tu odcinki przez nią zrobione przez m i n tak, że $a=m\pm n$ według tego jak prostopadła p pada wewnątrz lub zewnątrz trójkąta, tedy według poprzedzającego łatwo znajdziemy

$b^2=p^2+n^2$ . . . (1), $c^2=p^2+m^2$ . . . (2), $a=m\pm n$ . . . (3)

Odjąwszy (1) od (2), otrzymamy $c^2-b^2=m^2-n^2$ albo $c^2=b^2+m^2-n^2$ . . . . (4). Z (3) mamy $m=a\mp n$, skąd $m^2=(a\mp n)^2=a^2+n^2\mp 2an$; położywszy przeto tę ważność w (4), znajdziemy

$$c^2=a^2+b^2\mp 2an \;.\;.\;.\;.\; (5).$$

To ostatnie zrównanie jest szukaném, wyrażającém związek, któregokolwiek boku z dwoma innemi i zamyka dwa twierdzenia w §§. 130 i 131 dowiedzione. Za pomocą tych pięciu zrównań, w których znajduje się także sześć ilości a, b, c, p, m, n, mając dane trzy którekolwiek, znajdziemy trzy inne. Tak np. mając dane a, b, n, znajdziemy z (1) p, z (3) m, a z (5) c. Mając dane m, n, p, znajdziemy z (1) b, z (2) c, a z (3) a. I tak o innych.

Założmy sobie wyrazić powierzchnią trójkąta przez trzy jego boki. Ponieważ powiérzchnia trójkąta $=\frac{ap}{2}$, więc cała rzecz chodzi o znalezienie p. W zrównaniu (5) położywszy za n ważność z (1), będzie

$$c^2=a^2+b^2\mp 2a\sqrt{b^2-p^2}, \text{ albo } c^2-a^2-b^2=\mp 2a\sqrt{b^2-p^2}.$$

Podniósłszy obie strony ostatniego zrównania do kwadratu, otrzymamy $(c^2-a^2-b^2)^2=4a^2\,(b^2-p^2)$

albo $$p^2=b^2-\frac{(c^2-a^2-b^2)^2}{4a^2}=\frac{4a^2b^2-(c^2-a^2-b^2)^2}{4a^2}.$$

Licznik w tém ostatniém zrównaniu jest różnicą dwóch kwadratow, przeto

$$p^2=\frac{\{2ab-(c^2-a^2-b^2)\}\{2ab+(c^2-a^2-b^2)\}}{4a^2}$$

$$=\frac{(2ab+a^2+b^2-c^2)\,(2ab-a^2-b^2+c^2)}{4a^2}$$

$$=\frac{\{(a+b)^2-c^2\}\{c^2-(a-b)^2\}}{4a^2}$$

$$=\frac{(a+b+c)\,(a+b-c)\,(a+c-b)\,(b+c-a)}{4a^2}$$

zatém $p = \frac{\sqrt{(a+b+c)(b+c-a)(a+c-b)(a+b-c)}}{2a}$,

a następnie powierzchnia trójkąta którą przez P oznaczmy,

będzie $P = \frac{ap}{2} = \frac{1}{4}\sqrt{(a+b+c)(b+c-a)(a+c-b)(a+b-c)}$.

Nie przyłączyłem tu figur bo je każdy bez najmniejszéj trudności wykreślić sobie potrafi.

Na ostatek weźmy jeszcze zadanie o trójkącie prostokreślnym następujące:

Znaleść związek zachodzący między trzema bokami trójkąta prostokreślnego i promieniem koła na nim opisanego.

Aby to zadanie rozwiązać, przypomnieć nam sobie należy, że w antiparallelogramie czyli czworokącie mogącym być wpisanym w koło, według twierdzenia Ptolemeusza §. 113 iloczyn z jego przekątni równa się summie iloczynów z boków przeciwległych, t. j. jeżeli a, b, c, d, wyrażają boki a p i q przekątnie, tedy według tego twierdzenia, jest

$$pq = ac + bd.$$

Niech będzie trójkąt ABC *fig. 1*, w którym chcemy znaleść związek jego boków z promieniem koła opisanego. Opisawszy go rzeczywiście kołem według §. 83 i przez wiérzchołek C poprowadziwszy średnicę CD, tudzież poprowadziwszy proste AD, BD, będzie według wyżéj powołanego twierdzenia $AB . CD = AD . BC + AC . BD.$

Położywszy $AB = c$, $AC = b$, $BC = a$ jako téż promień koła r, przez co $CD = 2r$, będzie $2cr = a . AD + b . BD.$

Ale trójkąty DAC i CBD są prostokątne przy A i B, przeto $\overline{AD}^2 = \overline{CD}^2 - \overline{AC}^2 = 4r^2 - b^2$, $\overline{BD}^2 = \overline{CD}^2 - \overline{BC}^2 = 4r^2 - a^2$; skąd $AD = \sqrt{4r^2 - b^2}$, $BD = \sqrt{4r^2 - a^2}$ a następnie

$$2cr = a\sqrt{4r^2 - b^2} + b\sqrt{4r^2 - a^2}$$

i to jest zrównanie szukane, wyrażające związek boków trójkąta z promieniem koła na nim opisanego.

Ponieważ zamierzyliśmy sobie znaleść tylko własności trójkąta zależące od jego boków, dla tego widzieliśmy, iż takowe przez rachunek algebraiczny bez trudności wykryjemy.

Skoro jednak zmuszeni będziemy wziąść pod uwagę i kąty trójkąta i takowe porównywać z bokami, jakże sobie postąpimy mając do czynienia z ilościami zupełnie od siebie różnemi? Najnaturalniejszy środek do dopięcia tego celu jest zaiste, jak to już wyżéj wspomniałem, wprowadzenie w miejsce kątów linij prostych, któreby jednak zatrzymywały tenże sam stósunek jaki miały kąty.

Miarami kątów przy środku koła znajdujących się, są łuki między ich ramionami zawarte; spróbujmy więc naprzód, czyli biorąc łuki w miejsce kątów, nie dostrzeżemy jakich prostych, któreby nam mogły zastąpić piérwsze. W kole znamy rozmaite proste, atoli jedne tylko cięciwy są zmienne a wszystkie inne stałe; dowiedliśmy nawet w Geometryi, że większemu łukowi odpowiada cięciwa większa a mniejszemu mniéjsza, skoro tylko każdy z nich jest mniejszy od półokręgu. Ta to zmienność cięciw za zmianą łuków, podała piérwszą, jak świadczy PTOLEMEUSZ w swoim *Almagieście*, myśl sławnemu HIPPARCHOWI żyjącemu na 150 lat przed Chr., że zamiast stósunku łuków, a zatém i kątów, użyć można przy obrachowaniu trójkątów stósunku cięciw do tychże łuków należących.

Ale jakże obrachować wielkości cięciw odpowiadających różnéj wielkości łuków a następnie kątów? Sposób ten bardzo łatwo poznamy rozwiązawszy następujące zadania.

1. *Mając dane cięciwy dwóch łuków w kole którego promień znany, znaleść cięciwę odpowiadającą łukowi będącemu summą dwóch piérwszych.*

Niech na *fig.* 1. $AC=b$ i $BC=a$ będą cięciwami danemi, zaś cięciwa $AB=c$ należąca do łuku $ACB=AC+CB$ niech będzie cięciwą szukaną, tudzież $OC=r$ promień koła, tedy z wyżéj otrzymanego zrównania

$$2cr=a\sqrt{4r^2-b^2}+b\sqrt{4r^2-a^2}$$

znajdziemy $$c=\frac{a}{2r}\sqrt{4r^2-b^2}+\frac{b}{2r}\sqrt{4r^2-a^2}$$

i zadanie tym sposobem mamy rozwiązane.

2. *Znaleść cięciwę podwójnego łuku skoro cięciwa pojejedynczego jest dana.*

Dla rozwiązania tego zadania, dosyć uważać w poprzedzającém BC = AC czyli $a = b$, gdyż tym sposobem cięciwa c należeć będzie do dwarazy większego łuku niż jest łuk dany. Wprowadziwszy ten warunek otrzymamy

$$c = \frac{a}{r}\sqrt{4r^2 - a^2}$$

3. Nawzajem: *mając cięciwę należącą do pewnego łuku, znaleźć cięciwę należącą do połowy tegoż łuku.*

Aby to zadanie rozwiązać, potrzeba tylko w poprzedzającém uważać c jako cięciwę podwójnego zaś a pojedynczego, czyli połowy tegoż łuku i z ostatniego zrównania znaleść a. Na ten koniec podniosłszy obie strony ostatniego wyrażenia do kwadratu i zniósłszy mianownika, będzie
$c^2r^2 = a^2(4r^2 - a^2) = 4a^2r^2 - a^4$ albo $a^4 - 4r^2a^2 + c^2r^2 = 0$
skąd $a^2 = 2r^2 \pm \sqrt{4r^4 - c^2r^2} = 2r^2 \pm r\sqrt{4r^2 - c^2}$
a następnie $a = \sqrt{2r^2 \pm r\sqrt{4r^2 - c^2}}$

Wyrażenie to daje nam dwie ważności na cięciwę a z powodu, że każda cięciwa, a zatém i cięciwa c należy do dwóch łuków z których jeden jest mniejszy a drugi większy niż półokręgu; dla tego też algebraiczny wzór jako ogólny daje tak cięciwę połowy łuku mniejszego, jako i cięciwę połowy łuku większego niż pół okręgu. W piérwszym przypadku ważność cięciwy będzie

$$a = \sqrt{2r^2 - r\sqrt{4r^2 - c^2}}$$

w drugim zaś $a = \sqrt{2r^2 + r\sqrt{4r^2 - c^2}}$

co téż i na figurze pokażaćby można.

4. Czwarte nakoniec zadanie jest następujące: *mając dane dwie cięciwy do dwóch różnych łuków należące, znaleść cięciwę należącą do łuku będącego różnicą dwóch piérwszych.*

Niech AB $= c$ i AC $= b$ *fig.* 2 będą dwie cięciwy dane należące do łuków ACB i AC, potrzeba znaleść cięciwę ich różnicy, t. j. cięciwę BC należącą do łuku BC = ACB–AC.

Ponieważ w pierwszém zadaniu jest $BC=a$, $AC=b$, $AB=c$, więc ze zrównania tamże na c otrzymanego, znaleść potrzeba a. Pisząc to zrównanie następnie

$$2cr-a\sqrt{4r^2-b^2}=b\sqrt{4r^2-a^2}$$

i podnosząc obie strony do kwadratu

znajdziemy $4c^2r^2+a^2(4r^2-b^2)-4car\sqrt{4r^2-b^2}=b^2(4r^2-a^2)$.

Porządkując według a będzie

$$a^2-\frac{c}{r}\sqrt{4r^2-b^2}.\,a+(c^2-b^2)=0$$

Rozwiązując jako zrównanie drugiego stopnia względem a

będzie $\quad a=\frac{c}{2r}\sqrt{4r^2-b^2}\pm\sqrt{\frac{c^2}{4r^2}(4r^2-b^2)-(c^2-b^2)}$.

Uprościwszy pod znakiem pierwiastkowym, znajdziemy ostatecznie $\quad a=\frac{c}{2r}\sqrt{4r^2-b^2}\pm\frac{b}{2r}\sqrt{4r^2-c^2}$.

Tak otrzymane wyrażenie na a dowodzi, że dwie a raczéj cztéry ważności zadaniu zadość czynią. Starajmy się wytłumaczyć znaczenie każdego. Wszakże już wiemy, że każda cięciwa należy do dwóch różnych łuków, a dla tego i każda z danych cięciw należy także do dwóch łuków, mianowicie zaś:

cięciwa $AB=c$ należy do łuku ACB i do łuku ADB
cięciwa $AC=b$ . . . . AC . . . ADBC

wyrażenie przeto cięciwy należącéj do łuku, będącego różnicą dwóch danych, jako ogólne, zamykać musi ważność cięciwy należącéj do różnicy nie tylko łuków ACB i AC lub ADB i ADBC, ale téż także i do różnicy łuków ADB i AC, tudzież ACB i ADBC; skąd się pokazuje, że otrzymane wyrażenie dać nam rzeczywiście powinno cztéry ważnośái na a. Przypatrzmy się atoli bliżéj tym mniemanym cztérem różnicom. Wziąwszy na łuku ADB łuk $AC'=AC$, mamy:

różnica $ACB-AC=BC$; temu łukowi odpowiada cięciwa BC
różnica $\quad ADB-AC=ADB-AC'=C'DB$;
temu łukowi odpowiada cięciwa BC'
różnica $\quad ADBC-ACB=ADBC-(CB+AC)$
$\quad =ADBC-(CB+AC')=C'DB$,

a temu łukowi odpowiada cięciwa BC′
różnica ADBC — ADB = BC,
a cięciwa temu łukowi odpowiadająca jest BC.
Tak tedy cztéry napozór różne, sprowadzają się dwóch tylko różnych ważności, bo owe różnice, po dwie są sobie równe, a następnie i cięciwy im odpowiadające muszą być równe. Różnice te na figurze naszéj są BC i C′DB którym odpowiadają cięciwy BC i BC′.

Z tych uwag pokazuje się, iż jeżeli oba łuki do których należą cięciwy dane, są mniejsze od półokręgu, jak są łuki ACB i AC, natenczas odpowiedź na zadanie zamyka zrównanie

$$BC = a = \frac{c}{2r}\sqrt{4r^2 - b^2} - \frac{b}{2r}\sqrt{4r^2 - c^2}.$$

Przeciwnie, jeżeli jeden z łuków jest większy a drugi mniejszy niż półokręgu, jak są łuki ADBC i ACB, wtedy odpowiedź na zadanie daje zrównanie

$$BC' = a = \frac{c}{2r}\sqrt{4r^2 - b^2} + \frac{b}{2r}\sqrt{4r^2 - c^2}.$$

Tę ostatnią ważność porównawszy z wyrażeniem w piérwszém zadaniu na c otrzymaném, łatwo dostrzeżemy między niemi tożsamości, zamieniając tylko a na c i wzajemnie. Jeżeli się zapytamy, skąd to pochodzi? spojrzawszy na figurę łatwo sobie odpowiemy, że cięciwa BC′ uważaną być może jako należąca do sumy dwóch łuków AC′ i ACB i dlatego to jéj ważność wypadła zupełnie zgodna z ważnością w piérwszém zadaniu otrzymaną.

Po rozwiązaniu tych zagadnień łatwo już pojąć, że wychodząc z wiadoméj cięciwy, np. z cięciwy $\frac{1}{6}$ okręgu koła, która jak wiemy równa się promieniowi koła, czyli że

$$\text{cięciwa } \tfrac{1}{6} \text{ okręgu} = \text{cięciwie } 60^0 = r,$$

przy pomocy rozwiązanych zagadnień, znaléść można cięciwy wszystkich łuków wyrażone naturalnie w częściach promienia tegoż koła. Wziąwszy $r = 1$, będzie cięciwa $60^0 = 1$, zatém cięciwa $90^0 = \sqrt{2}$, a następnie cięciwa $120^0 = \sqrt{3}$

$$\text{cięciwa } 30^0 = \sqrt{2 - \sqrt{3}} = \tfrac{1}{2}(\sqrt{6} - \sqrt{2}),$$

$$\text{cięciwa } 15^0 = \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{3}}}$$

$$\text{cięciwa } 150^0 = \tfrac{1}{2}(\sqrt{6} + \sqrt{2}),$$

$$\text{cięciwa } 165^0 = \text{cięciwie } (180^0 - 15^0) = \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{3}}} \text{ i t. d.}$$

Piérwszy, jak już wspomniałem, HIPPARCH, jak historyja świadczy, wprowadził do Geometryi, a mianowicie do nauki o trójkątach, cięciwy, które PTOLEMEUSZ, żyjący około 130 roku po Chr. znacznie rozszérzywszy i w tablice dla wszystkich łuków okręgu koła ułożywszy, w dziele swém *Almagieście* do użytku potomności zostawił. Za pomocą to tych tablic rozwięzywano trójkąty, w których albo między danemi, albo téż między szukanemi elementami znajdowały się kąty.

Tak tedy poznaliśmy nareszcie, jak sobie w starożytności poradzono w zastąpieniu stósunku kątów do boków trójkąta, stósunkiem linij prostych czyli cięciw. Prace późniéjszych Geometrów w wysokim stopniu ułatwiły toż zastąpienie wprowadzeniem innych linij, których rachunek nie jest trudniejszy a porównywanie ich z bokami trójkąta daleko łatwiejsze. Skąd powstała nowa nauka *Trygonometryją* nazwana, która będzie przedmiotem obecnego dziełka. A lubo jéj nazwa od *trigonus* (trójkąt) pochodzi, i zdawałoby się iż jéj zatrudnieniem jest wyłącznie trójkąt, wszelako, ponieważ już wiemy, że każdy wielokąt na trójkąt zamienionym być może, wniesiemy stąd, że zastósowanie Trygonometryi rozciąga się do całéj Geometryi. Mało na tém, gdyż w obecnym stanie przyrodniczych nauk, stała się Trygonometryja niezbędną w zastósowaniach Geometryi do wszelkich gałęzi tak wyższych umiejętności jako téż i przemysłu. Oprócz tego cała wyższa Analiza bez Trygonometryi obejść się nie może i śmiało powiedzieć można, że chociaż wszystkie części Matematyki są równie ważne, uważając wszelako rozliczne zastósowania Trygonometryi tak w naukowém jako i zwyczajném życiu, twierdzić się godzi, że ona jest najwalniejszą bronią do pokononia wszelkich przeszkód i trudności tak w teoryi jako téż i w zastósowaniach Matematyki napotykanych.

W piérwszych dwóch częściach Geometryi poznaliśmy dwojakie trójkąty t. j. *prostokréślne* czyli prostemi linijami i *sferyczne* czyli trójkąty na powiérzchni kuli łukami kół wielkich ograniczone. Stąd wypada, że i Trygonometryja pod tym względem uważana, dwojaką być musi t. j. *prostokréślną* (rectilinea) i *sferyczną* (sphaerica); a chociaż w najnowszych czasach zrodziła się jeszcze *Trygonometryja sferoidyczna* (sphaeroidica), uważająca trójkąty na powiérzchni Ellipsojdy obrotowéj łukami elliptycznemi ograniczone, to wszelako ta część nie zajmie tu całkiem naszéj uwagi. Zacznijmy więc od piérwszéj czyli od *Trygonometryi prostokréślnéj* jako łatwiejszéj i zobaczmy jak i w czém ułatwili i uprościli późniejsi Geometrowie zastąpienie stósunku kątów do boków, stósunkiem linij prostych, czyli w jaki sposób uproszczono, albo raczéj uczyniono niepotrzebném, jako niedogodne, użycie tablic PTOLEMEUSZA?

Trygonometryja Prostokréślna.

ROZDZIAŁ I.

Natura i nazwa linij trygonometrycznych t. j. linij, które w miejsce łuków lub kątów do rachunku wprowadzono.

---

§. 1.

Jeżeli dwie proste AB i CD *fig.* 3 nieograniczonéj długości przecinają się z sobą np. w punkcie O i czynią między sobą jakikolwiek kąt BOD $= \alpha$, tedy obrawszy na jednéj z nich np. na AB różne punkta M, M′, M″, M‴..... i z tych spuszczając prostopadłe MP, M′P′, M″P″, M‴P‴...... do drugiéj, każda z tych prostopadłych z częściami piérwszych prostych zamknie trójkąt prostokątny jakiemi są MOP, M′OP′, M″OP″, M‴OP‴ i t. d. Te trójkąty z powodu równoległości prostopadłych, wszystkie między sobą są podobne, a z ich podobieństwa, stósownie do §. 56 wypada.

$$\frac{MP}{OM}=\frac{M'P'}{OM'}=\frac{M''P''}{OM''}=\frac{M'''P'''}{OM'''}=\text{i t. d.}$$

jako też $$\frac{OP}{OM}=\frac{OP'}{OM'}=\frac{OP''}{OM''}=\frac{OP'''}{OM'''}=\text{i t. d.}$$

Uważając punkt O za *początek*, a kierunek prostych AB i CD w prawą stronę za dodatny, wiemy z §. 1 *Geom.*, że kierunek w lewą stronę uważać musimy za odjemny, że zatém OM^{IV}, OM^{V}, OM^{VI}...... jako też OP^{IV}, OP^{V}, OP^{VI}....... względem piérwszych uważane, będą ódjemnemi. Przyjąwszy oprócz tego, że kierunek prostopadłych w górę t. j. kierunek PM, P'M', P''M''..... jest kierunkiem dodatnym, wprost jemu przeciwny, czyli kierunek na dół, jaki mają prostopadłe $P^{IV}M^{IV}$, $P^{V}M^{V}$, $P^{VI}M^{VI}$....... uważać potrzeba za odjemny. Ponieważ kąty wierzchołkowe przy O są sobie równe i ostatnie prostopadłe tak między sobą jako téż i do piérwszych są równoległe, zatém trójkąty $M^{IV}OP^{IV}$, $M^{V}OP^{V}$, $M^{VI}OP^{VI}$.... tak między sobą, jako téż i piérwszym są podobne,

a dlatego $$\frac{-P^{IV}M^{IV}}{-OM^{IV}}=\frac{-P^{V}M^{V}}{-OM^{V}}=\frac{-P^{VI}M^{VI}}{-OM^{VI}}$$

$$=\frac{P^{IV}M^{IV}}{OM^{IV}}=\frac{P^{V}M^{V}}{OM^{V}}=\frac{P^{VI}M^{VI}}{OM^{VI}}=\text{i t. d.}$$

jak równie $$\frac{-OP^{IV}}{-OM^{IV}}=\frac{-OP^{V}}{-OM^{V}}=\frac{OP^{IV}}{OM^{IV}}=\frac{OP^{V}}{OM^{V}}=\text{i t. d.}$$

a następnie

$$\frac{MP}{OM}=\frac{MP}{OM'}=\frac{M''P''}{OM''}=\frac{M^{IV}P^{IV}}{OM^{IV}}=\frac{M^{V}P^{V}}{OM^{V}}=\frac{M^{VI}P^{VI}}{OM^{VI}}=\text{i t. d.}$$

$$\frac{OP}{OM}=\frac{OP'}{OM'}=\frac{OP''}{OM''}=\frac{OP^{IV}}{OM^{IV}}=\frac{OP^{V}}{OM^{V}}=\frac{OP^{VI}}{OM^{VI}}=\text{i t. d.}$$

Z tego się pokazuje, że obrawszy na kierunku prostéj AB gdziekolwiek punkt, i spuściwszy z niego prostopadłą do

CD, stósunek téj prostopadłéj do odległości obranego punktu od początku O, jak również, stósunek odległości spodka prostopadłéj od początku do téjże odległości obranego punktu, jest stałym i niezmiennym. Gdyby atoli proste AB i CD lub przynajmniéj jedna z nich zmieniła o cokolwiek swój kierunek, przez co naturalnie zmieniłby się kąt α, (wyjąwszy że obie, w tęż samę stronę i o równą ilość zmieniają kierunek) równość powyższych stósunków utrzymaćby się nie mogła; powstałyby bowiem nowe trójkąty podobne między sobą, ale niepodobne piérwszym. Z tego wniesiemy, że stósunek o którym mowa, jest w ścisłym związku z wielkością kąta α, czyli, że ważność jego zależy jedynie od wielkości kąta jaki proste czynią między sobą. W takim razie wyrażamy się w Matematyce krótko, mówiąc: że tak stósunek prostopadłéj, jak równie i odległości jéj spodka od początku, czyli od wiérzchołka kąta, do odległości obranego punktu, jest *funkcyją kąta*, a piszemy zwyczajnie

$$\frac{MP}{OM}=f(\alpha) \text{ i } \frac{OP}{OM}=F(\alpha)$$

gdzie głoski f i F, zastępują miejsce wyrazu *funkcyja*; są zaś dlatego różne, że dwa stósunki $\frac{MP}{OM}$, $\frac{OP}{OM}$ i im równe są między sobą różne. Wyraziwszy proste OM, OM′, OM″...... MP, M′P′..... OP, OP′, OP″...... w liczbach, czyli zastąpiwszy te długości bezwzględne ich stósunkami do jednostki dowolnéj §. 2 i 3 *Geom.* i położywszy ogólnie $OM=h$, $PM=b$, $OP=a$, $OM'=h'$, $P'M'=b'$, $OP'=a'$, i t. d. będzie:

$$\frac{b}{h}=\frac{b'}{h'}=\frac{b''}{h''}=\frac{b'''}{h'''}=\ldots\ldots=\frac{b^{\text{IV}}}{h^{\text{IV}}}=\frac{b^{\text{V}}}{h^{\text{V}}}=\frac{b^{\text{VI}}}{h^{\text{VI}}}=\ldots\ldots$$

$$\frac{a}{h}=\frac{a'}{h'}=\frac{a''}{h''}=\frac{a'''}{h'''}=\ldots\ldots=\frac{a^{\text{IV}}}{h^{\text{IV}}}=\frac{a^{\text{V}}}{h^{\text{V}}}=\frac{a^{\text{VI}}}{h^{\text{VI}}}=\ldots\ldots$$

tudzież $\qquad \frac{b}{h}=f(\alpha) \qquad \frac{a}{h}=F(\alpha).$

Jak stósunki $\frac{b}{h}$ i $\frac{a}{h}$ zależą od kąta α, tak téż nawzajem kąt α zależeć musi od jednego z tych stósunków, bo każdy z nich jest koniecznèm następstwem drugiego; dlatego téż twierdzić także możemy, że kąt α jest funkcyją stósunku $\frac{b}{h}$ lub stósunku $\frac{a}{h}$ i napisać $\alpha = \varphi(\frac{b}{h})$, lub $\alpha = \psi(\frac{a}{h})$, gdzie znowu głoski φ i ψ, zastępują wyraz *funkcyja.*

§. 2.

Z tego co dotąd powiedzieliśmy o stósunkach $\frac{b}{h}$, $\frac{a}{h}$ i o kącie α, jasno się pokazuje, że zamiast kąta α użyć będzie można jednego że stósunków $\frac{b}{h}$, $\frac{a}{h}$. A ponieważ powyższe stósunki piérwsze między sobą, a drugie znowu między sobą są równe, zatém jakkolwiek ilości h, h', h'',..... b, b', b''......., między sobą są różne, można wszelako wszystkie te stósunki wyznaczyć, znając którykolwiek ze stósunków $\frac{b}{h}$, $\frac{b'}{h'}$, $\frac{b''}{h''}$..... Równie wyznaczyć można wszystkie drugie stósunki $\frac{a}{h}$, $\frac{a'}{h'}$, $\frac{a''}{h''}$ i t. d. znając którykolwiek z nich. Lecz nieznając żadnego z tych stósunków, cóż nam pozostaje? Nic innego zaiste, jak wprowadzenie nieznanéj ilości, jak w Algebrze czyniliśmy i założenie warunku, iż powyższy stósunek jest jéj równy, a potém postaranie się o jéj wyznaczenie. Ale stósunki każdego z dwóch powyższych ciągów są między sobą różne, przeto dla każdego z tych ciągów wprowadzić należy osobną ilość nieznaną. Z uwagi, że tak stósunek $\frac{b}{h}$ jako téż i stósunek $\frac{a}{h}$ zależy od kąta α, wniesiemy, że wprowadzić się mające nieznane dla tych dwóch stósunków, zależeć téż będą od kąta α, t. j. że w ich wyrażeniach kąt α znajdować się musi; w jakiéj zaś postaci, tego dotąd zupełnie nie wiemy ale wkrótce poznamy.

Piérwszą nieznaną oznaczmy przez *wst.* α a drugą przez *dost.* α i wymawiajmy *wstawa kąta* α (*Sinus* α) i *dostawa kąta* α (*Cosinus* α). Dwie te nieznane wyrażać będą liczby, bo stósunki którym się mają równać są także liczbami. Ale jako wyrazy stósunków $\frac{b}{h}$ i $\frac{a}{h}$ są liczbami wyrażającemi stósunki długości bezwzględnych do obranéj jednostki, tak téż nieznane *wst. α* i *dost. α* wyrażać będą stósunki do téjże jednostki. Możemy zatém po takich zastrzeżeniach położyć

$$\frac{b}{h} = \text{wst.}\,\alpha, \qquad \frac{a}{h} = \text{dost.}\,\alpha.$$

Niech to bynajmniéj nie zastanawia, że dla oznaczenia nieznanéj liczby wprowadzamy wyrazy *wstawę* i *dostawę* żadnego znaczenia nie mające, albowiem również x, y, z,........ używane na tenże sam cel w Algebrze, nie więcéj znaczenia mają, a wszelako widzieliśmy, ile nam tamże nie tylko rozumowanie ale i rachunek ułatwiły. Nie uderzają już one naszéj uwagi, bo się z niemi oswoiliśmy, dlatego moglibyśmy téż byli położyć w miejsce wst. α i *dost.* α, y i x tak, iżby było $\frac{b}{h} = y$, $\frac{a}{h} = x$, bo tu nie chodzi o oznaczenie, gdyż to jest dla nas obojętném, jak się już dotąd tak w Arytmetyce jako téż i w Algebrze dostatecznie przekonaliśmy, ale raczéj o znalezienie ważności stósunków $\frac{b}{h}$ i $\frac{a}{h}$ i te ważności mogą być dowolnie oznaczone, a wszelako pokażą się w końcu liczbami.

Ale zapewne kto się tu zapyta: i dlaczegóż przecię wprowadzamy nowe oznaczenia nieznanych, mając już gotowe w Algebrze używane? Oto dlatego, że jak w Geometryi proste niczém się co do swéj natury nieróżniące, miały przecięż różne nazwy (prostopadła, ukośna, równoległa i t. d.) dla rozróżnienia ich od siebie w figurze lub figurach, tak i w téj części Geometryi t. j. w Trygonometryi, potrzebne nam jest toż odróżnienie, a zatém nazwa prostych tu używanych, czego dowodem już są dwa powyższe stósunki. Z tego powodu wyżéj wprowadzone oznaczenia, wyrażać zarazem będą nazwy prostych przez stósunki *wst. α* i *dost. α* oznaczonych, a przez to wesprą naszę pamięć i uwagę.

§. 3.

Z założonych dwóch zrównań wypada

$$b = h \,\text{wst.}\, \alpha \quad \text{i} \quad a = h \,\text{dost.}\, \alpha$$

z czego można czytać następujące twierdzenia.

1° *W każdym trójkącie prostokątnym bok przeciwległy kątowi prostemu równa się iloczynowi z przeciwprostokątni przez wstawę kąta przeciwległego.*

2° *W trójkącie prostokątnym bok przyległy kątowi prostemu, równa się iloczynowi z przeciwprostokątni przez dostawę kąta ostrego jemu przyległego.*

Ponieważ punkta M, M', M''..... obiéraliśmy dowolnie, więc też jednę którąkolwiek z odległości OM, OM', OM''..... czyli h, h', h''..... wziąwszy dowolnie, nadając jéj jakąkolwiek wielkość byle znaną i stałą, już tém samém znaleźlibyśmy b i a, gdyby tylko wst.α i dost.α były znane. W wielości dowolnych ważnosci dla h, najprościéjszy jest przypadek, gdy położymy $h=1$ t. j. weźmiemy h za jednostkę z którą b i a porównywamy; w takim razie znajdziemy

$$b = \text{wst.}\alpha, \qquad a = \text{dost.}\alpha.$$

Zastanowiwszy się z uwagą nad ważnościami dwóch wprowadzonych nieznanych co dopiéro otrzymanemi, dostrzeżemy bez trudności, iż one są dwoma kątowi prostemu przyległemi bokami w trójkącie prostokątnym, w którym przeciwprostokątnia wzięta jest za jednostkę; oprócz tego, znaleźliśmy tym sposobem ów stały stósunek jaki mają prostopadłe i odległości ich spodków od początku, do odległości obranych punktów także od początku.

Ponieważ między bokami trójkąta prostokątnego przeciwprostokątnia jest najdłuższa, zatém przyjmując ją za jedność, wst.α i dost.α, czyli b i a, będą ułamkami wyrażonemi w częściach przeciwprostokątni, t. j. jeżeli przeciwprostokątnią przyjęliśmy lub nam była dana$=1$ sążeń, albo$=1$ stopę, albo$=1$ metr i t. d. wst. α i dost. α będą też wyrażone w częściach sążnia, stopy, metru i t. d. Jakąż więc z tego opisania dać możemy definicyją *wstawy* i *dostawy* jakiego kąta? Oto następujące: *W trójkącie prostokątnym, poczy-*

nając od wiérzchołka jednego z kątów ostrych, odciąwszy na przeciwprostokątni długość$=1$ i z końca téj jednostki spuściwszy prostopadłą na bok przyległy temu kątowi, prostopadła ta będzie wstawą, *a odległość jéj spodka od wiérzchołka* dostawą *tegoż kąta.*

Jeżeli z wiérzchołka rzeczonego kąta, tąż samą długością$=1$ zakreślimy łuk między ramionami w mowie będącego kąta, tedy ponieważ tenże łuk jest miarą kąta, z którego wiérzchołka został zakréślony i, jakto skądinąd wiemy, jeden za drugi wziąść można, zamiast *wstawa kąta* α i *dostawa kąta* α, powiedzieć téż możemy, *wstawa* i *dostawa łuku służącego za miarę temuż kątowi.*

Tak tedy w trójkącie OPM *fig. 4* prostokątnym przy P, od wiérzchołka O poczynając, odciąwszy na przeciwprostokątni OM, $Om=1$ i spuściwszy prostopadłą mp na bok OP przyległy kątowi $O=\alpha$, według piérwszéj definicyi

jest $\quad mp=\text{wst. MOP}=\text{wst.}\,\alpha,$

zaś $\quad Op=\text{dost. MOP}=\text{dost.}\,\alpha.$

Zakreśliwszy zaś otwartością cyrkla równą $Om=1$ łuk mA zawarty między ramionami kąta α, piérwszy będzie ostatniego miarą i jeden za drugi wziąść można, dlatego téż wolno jest napisać $mp=$wst. łuku mA, $Op=$dost. łuku mA. Z uwagi, że zamiast kątów wolno jest brać łuki z ich wiérzchołków i między ich ramionami zakréślone, rodzi się nam nowa definicyja *wstawy* i *dostawy* a te następujące: *wstawa łuku jakiego, lecz promieniem$=1$ zakreślonego, jest prostopadła z jednego jego końca na promień przez drugi koniec przechodzący spuszczona,— dostawa zaś tegoż łuku jest część promienia, zawarta między spodkiem wstawy i środkiem koła czyli wiérzchołkiem kąta z którego łuk został zakreślony.*

Każdy tu łatwo dostrzeże, że dwie te definicyje chociaż różnobrzmiące są jednakże równoznaczne; która jednak komu więcéj do przekonania trafia, tę niechaj zatrzyma; chodzi tu bowiem o jak najdokładniejsze pojęcie tych dwóch prostych zajmujących miejsce dawnych cięciw. Piérwsi autorowie którzy ostatnie piérwszemi zastąpili, nazwali je *sinus* i *cosinus* a nasz sławnéj pamięci JAN SNIADECKI nazwał też linije *wstawą i dostawą*. Że zastąpienie cięciw wstawami (sinus) winniśmy Arabom, świadczy o tém KÄSTNER w swéj historyi Matematyki, przywodząc, że ALBATEGNIUS astronom arabski w r. 880 piérwszy miał użyć *sinus* zamiast *chorda*. Ktoby się pytał co za związek ma łaciński wyraz *sinus*, znaczący pospolicie odnogę morską, zakrzywienie, wężykowatość i t. p. jak równie wyraz polski *wstawa*, temu wyznam otwarcie, iż ja sam żadnego związku nie dostrzegam i zdaje się jakoby ten wyraz był dowolny. Zastanowiwszy się atoli nad tém co późniejsi Geometrowie zrobili dla ułatwienia w użyciu tablic cięciw, przyjdziemy może do źródła, z którego wyraz *sinus* wypłynął. Pierwotne tablice cięciw były w użyciu z tego względu niedogodne, iż skoro przyszło w nich szukać cięciwy pewnemu odpowiadającéj kątowi, potrzeba było wprzód kąt ten podwoić, bo całkowity łuk jest miarą środkowego kąta, który, jak wiadomo, dwarazy jest większy od kąta okręgowego na tymże samym stojącego łuku; dlatego późniejsi Geometrowie przerobili rzeczone tablice w ten sposób, iż wzięli połowy obrachowanych a do podwójnych łuków należących cięciw i te w tablice ułożyli. A kiedy przy użyciu całkowitych cięciw potrzeba było takowe rachować i w tablice ułożyć dla półokręgu koła, używając połówek do podwójnych łuków należących, dostateczne były tablice dla ćwiartki okręgu koła; przez to stały się też tablice krótsze i w użyciu wygodniejsze. A że starożytni nazywali cięciwy *inscriptae*, dlatego téż, według zdania GODINA, używając tych ostatnich tablic mówili: *semissis inscriptae* (połowa cięciwy) pisali zaś przez skrócenie *s. ins.*, skąd zapewne poszła nazwa *sin.* czyli *sinus*. Jakie zaś wyobrażenie połączył SNIADECKI z połową cięciwy i wstawą, tego naznaczyć nie mogę. Ale jak w Algebrze nie chodziło nam o źródło, z którego nieznana x wypłynęła, tylko o jéj ważność, tak i tu więcéj się starać powinniśmy o dokładne pojęcie, co rzeczywiście znaczy nieznana *sinus* lub *wstawa*, niż o jéj źródłosłów, bo na téj znajomości nic nie zyskamy. Ja w tém małém wyboczeniu, chciałem tylko wskazać poniekąd źródło gdzie niby zwolennicy wszelkiéj dokładności pojęć, szukać mają objaśnienia wyrazu *sinus*, my zaś przestaniemy na tém, iż dokładnie, jak się spodziéwam, rozumiemy co jest *wstawa* (sinus) i *dostawa* (cosinus).

Dwie znalezione nieznane t. j. *wstawę* i *dostawę*, nazwano *linijami trygonometrycznemi*, a późniéj *funkcyjami trygonometrycznemi* (obie nazwy dotąd są używane) i te od połowy 15go stulecia zastąpiwszy cięciwy, nadały nauce o trójkątach całkiem inną postać, a następnie w wysokim stopniu wpłynęły na udoskonalenie wszystkich części Matematyki, a stały się nieodzownemi w jéj zastósowaniach.

§. 4.

Na figurze 3 poprowadziwszy przez punkt O inną prostą A'B', czyniącą z prostą CD kąt DOB' = DOB = α ale z drugiéj jéj strony i podobnież z dowolnie obranych punktów M_1, M_2, M_3..... spuszczając prostopadłe M_1P, M_2P', M_3P''..... na CD, ponieważ z §. 5 *Geom.* wiemy, że dwa kąty w przeciwnym kierunku względem pewnéj prostéj rachowane, są ilościami przeciwnemi, przeto przyjmując kąt DOB od OD w stronę ku B rachowany za dodatny, kąt DOB' rachowany od téjże prostéj OD lecz w kierunku przeciwnym t. j. w stronę ku B', będzie odjemny. Ale i prostopadłe PM_1, $P'M_2$, $P''M_3$..... idą w kierunku przeciwnym prostopadłych PM, P'M', P''M''....... piérwsze zatém uważane być muszą za odjemne, jeżeli ostatnie wzięte były za dodatne. Nazywając ich stósunki do jednostki podobnie jak tamtych przez b_1, b_2, b_3..... a odległości OM_1, OM_2...... przez h_1, h_2, h_3... będzie również

$$-\frac{b_1}{h_1} = -\frac{b^2}{h_2} = -\frac{b_3}{h_3} = \text{ i t. d. albo ogólnie}$$

$$-\frac{b_1}{h_1} = \text{wst.}\,(-\alpha) \text{ albo } \frac{b_1}{h_1} = -\text{ wst.}\,(-\alpha).$$

Ale $\qquad PM = PM_1,\ P'M' = P'M_2$ i t. d.

tudzież $\qquad OM = OM_1,\ OM' = OM_2 \ldots.$

zatém $\frac{\mathrm{PM}}{\mathrm{OM}}=\frac{\mathrm{PM}_1}{\mathrm{OM}_1}$ t. j. $\frac{b}{h}=\frac{b_1}{h_1}$.

A że $\frac{b}{h}=$ wst. α, zatém $-$ wst. $(-\alpha)=$ wst. α

czyli wst. $(-\alpha)=-$ wst. α.

Proste OP, OP′, OP″ . . . obu kątom są spólne, a dlatego $\frac{\mathrm{OP}}{\mathrm{OM}_1}=\frac{\mathrm{OP}'}{\mathrm{OM}_2}=\frac{\mathrm{OP}''}{\mathrm{OM}_3}=\ldots$ dost. $(-\alpha)$ czyli $\frac{a}{h_1}=$ dost. $(-\alpha)$.

Że zaś $\frac{a}{h_1}=\frac{a}{h}$, a wyżéj znaleźliśmy $\frac{a}{h}=$ dost α

więc dost. $(-\alpha)=$ dost. α;

co wysłowiwszy, czytamy następującą prawdę: że *wstawa kąta lub łuku dodatnego jest dodatną, odjemnego odjemną; dostawa zaś bąć to dodatnego bąć odjemnego kąta, jest dodatną.* Skoro więc kąt swój znak zmienia, zmienia go téż i wstawa a dostawa zostaje niezmienną.

§. 5.

Zamiast stósować proste PM, P′M′, P″M″.. OP, OP′ OP″.. do OM, OM′, OM″.. można je stósować same do siebie. Stósunek prostopadłéj do odległości jéj spodka od początku, t. j. stósunek $\frac{b}{a}$ nazwano *styczną trygonometryczną kąta* α (tangens) i zgodzono się, aby przez skrócenie pisać $\frac{b}{a}=$ sty. α (tang. α lub tg. α). Odwrócony stósunek a do h, t. j. stósunek $\frac{h}{a}$ nazwano *sieczną trygonometryczną* (secans), na skrócenie zaś w pisaniu zgodzono się, aby pisać siecz. α lub sie. α (sec. α) tak że $\frac{h}{a}=$ sie. α (sec. α). Dwa zrównania $\frac{b}{h}=$ wst. α i $\frac{a}{h}=$ dost. α podzieliwszy przez siebie, znajdziemy

$\frac{b}{a}=\frac{\text{wst.}\,\alpha}{\text{dost.}\,\alpha}$, zatém sty. $\alpha=\frac{\text{wst.}\,\alpha}{\text{dost.}\,\alpha}$.

Ponieważ $a=h$ dost. α, zatém $\frac{h}{a}=\frac{h}{h\,\text{dost.}\,\alpha}=\frac{1}{\text{dost.}\,\alpha}$ t. j. sie. $\alpha=\frac{1}{\text{dost.}\,\alpha}$; skąd się pokazuje, że dwie nowe linije t. j.

styczna i sieczna trygonometryczna, są jedynie skróceniami wprowadzonemi dla ułatwienia rachunku. Zobaczmy atoli czyli i tym linijom nie zdołamy dać jakiéj definicyi dla zatrzymania ich w pamięci i znalezienia w razie potrzeby na figurze.

Gdybyśmy w trójkącie prostokątnym nie przeciwprostokątnią ale jeden z boków przyległych kątowi prostemu uważali za jednostkę, np. bok wyrażony w liczbach przez a, tedy ponieważ z owego ciągu trójkątów podobnych jest także

$$\frac{b}{a}=\frac{b'}{a'}=\frac{b''}{a''}= \text{i t. d.}$$

położywszy jak powiedzieliśmy $\frac{b}{a}=\text{sty.}\alpha$ a potém $a=1$, będzie $b=\text{sty.}\alpha$; powiedzieć więc możemy, że *uważając w trójkącie prostokątnym jeden z jego boków kątowi prostemu przyległych jako jednostkę długości, drugi bok będzie styczną kąta jemu przeciwległego.*

Albo: z wierzchołka jednego z kątów ostrych otwartością cyrkla równą bokowi przyległemu kątowi prostemu, który też przyjmujemy za jednostkę, zakreśliwszy łuk między ramionami tegoż kąta ostrego, drugi bok będzie styczną do nakreślonego łuku według §. 85. Tak na *fig.* 4 zamiast Om uważając OA za jednostkę i tą długością zakreśliwszy łuk Am, i z punktu A wyprowadziwszy prostopadłą Am' aż do przecięcia się z przeciwprostokątnią w punkcie m', ta będzie styczną do zakreślonego łuku. Lecz w Geometryi uważaliśmy styczną jako prostą nieograniczonéj długości, tu zaś uważamy ją jako ograniczoną i widzimy, że jest tylko częścią stycznéj zwyczajnéj zawartą między punktami A i m', dla tego też nosi nazwę stycznéj trygonometrycznéj łuku Am' albo kąta m'OA. Z téj uwagi można dać drugą definicyją stycznéj trygonometrycznéj następującą: *styczna trygonometryczna jakiego łuku, a zatém i kąta, jest część stycznéj zwyczajnéj wyprowadzonéj z jednego końca łuku, aż do przecięcia się z promieniem przechodzącym przez drugi koniec tegoż łuku.*

Nareszcie ponieważ trójkąty Omp i $Om'A$ są podobne, zatém $Op : Om = OA : Om'$. A że położyliśmy $OA = 1$ i $Om = OA = 1$ przeto $Op : 1 = 1 : Om'$ skąd $Om' = \frac{1}{Op}$. Ale według powyższego jest $Op = \text{dost.}\,\alpha$, przeto $Om' = \frac{1}{\text{dost.}\,\alpha}$. Wyżéj znalezliśmy $\frac{1}{\text{dost.}\,\alpha} = \text{sie.}\,\alpha$, zatém $Om' = \text{sie.}\,\alpha$. Cóż więc jest sieczna trygonometryczna jakiego łuku lub kąta i jaka jéj definicyja? Oto: *sieczna trygonometryczna jakiego łuku, jest to przedłużony promień przez jeden koniec łuku przechodzący, aż do przecięcia się ze styczną, z drugiego końca tegoż łuku wyprowadzoną.* Albo: uważając w trójkącie prostokątnym jeden z jego boków kątowi prostemu przyległych za jednostkę długości', drugi bok jest styczną kąta sobie przeciwległego, a przeciwprostokątnia sieczną tegoż kąta.

§. 6.

Już się na początku powiedziało, że tak wstawa jak i dostawa kąta są funkcyjami tegoż kąta. Przez wyrażenie *funkcyja* nie co innego powiedzieć chcemy, jak tylko, że za zmianą kąta zmienia się także jego wstawa i dostawa, czyli że wielkość wstawy i dostawy zależy od wielkości kąta.

Przypatrzywszy się z uwagą *figurze* 5 i pomyśliwszy sobie, że jedno ramię kąta t. j. OA jest stałe, a drugie $Om = 1$ obracając się około punktu O, począwszy od położenia OA czyli Op przybiera coraz inne położenia Om, Om', Om'' . ., dostrzeżemy bez trudności następujące prawdy, 1°. że kąt jaki Om czyni z prostą OA, coraz bardziéj rośnie, 2°. że długość prostopadłych mp, $m'p'$, $m''p''$ . . . także rośnie, 3°. że odległość spodków tych prostopadłych od punktu O ciągle się zmniejsza, na co zdaje mi się żadnego dowodu nie potrzeba, bo samo spojrzenie na figurę dostatecznie o tém przekonać nas może. A że piérwsze proste mp, $m'p'$ $m''p''$ . . . są wstawami, drugie zaś Op, Op', Op'' . . . dostawami kątów mOp, $m'Op'$, $m''Op''$ . . ., wniesiemy więc stąd, że za zmianą kąta, zmienia się téż jego wstawa i dostawa, mianowicie zaś że wstawa rośnie gdy kąt rośnie, a dostawa maleje i przeciwnie.

Co do stycznéj i siecznéj dostrzeglibyśmy toż samo prawo, że się zmieniają za zmianą kąta, a mianowicie że obie rosną gdy kąt rośnie, nakreśliwszy tylko te proste każdemu kątowi odpowiadające; słusznie więc i te dwie proste nazwano *funkcyjami trygonometrycznemi*.

Ostatnią prawdę możemy także wprost i łatwiéj ze zrównań $\text{sty}.\alpha = \frac{\text{wst}.\alpha}{\text{dost}.\alpha}$ i $\text{sie}.\alpha = \frac{1}{\text{dost}.\alpha}$ wyczytać. Gdy bowiem kąt α rośnie, przekonaliśmy się, że $\text{wst}.\alpha$ rośnie a $\text{dost}.\alpha$ maleje, zatém iloraz $\frac{\text{wst}.\alpha}{\text{dost}.\alpha}$ czyli $\text{sty}.\alpha$ także rośnie i to bardzo prędko, bo podzielna czyli licznik rośnie, a dzielnik czyli mianownik maleje. Podobnież iloraz $\frac{1}{\text{dost}.\alpha}$ rosnąć musi, bo podzielna jest niezmienną a dzielnik maleje.

To co się dotąd o zmianie cztérech trygonometrycznych linij powiedziało, jest prawdą dopóki kąt $\alpha < 90^\circ$ t. j. począwszy od kąta 0° aż do 90°, czyli do kąta prostego, wstawa, styczna i sieczna rosną skoro kąt rośnie a dostawa maleje. Żeby poznać, co się dzieje z temi linijami dla kątów rozwartych i wypukłych, wyprowadźmy na *fig. 3* z punktu O prostą OE czyli EF prostopadłą do CD, a uważając kąty względem niéj tak jak je względem OD uważaliśmy, t. j. uważając kąt jaki OB czyni z OE czyli kąt BOE, oznaczmy go przez β, tedy widzimy, iż kąt β jest dopełnieniem kąta α wzajemnie α jest dopełnieniem kąta β §. 9 *Geom.* Spuszczając z punktów M, M′, M″ . . . prostopadłe MQ, M′Q′, M″Q″ . . . na OE, widzimy, że te są tém samém względem dwóch prostych AB i EF i kąta β, czém były MP, M′P′, M″P″ . . . względem prostych AB, CD i kąta α; jeżeli zatém $OM = 1$, jest téż $MQ = \text{wst}.\beta$, $OQ = \text{dost}.\beta$. A że $MQ = OP$, $OQ = MP$, zaś $OP = \text{dost}.\alpha$, $MP = \text{wst}.\alpha$, więc $\text{wst}.\beta = \text{dost}.\alpha$, dost.$\beta$=wst.$\alpha$. Ale $\beta=90^\circ-\alpha$, przeto

$$\text{wst.}\alpha=\text{dost.}(90^\circ-\alpha) \qquad \text{dost.}\alpha=\text{wst.}(90^\circ-\alpha),$$

możemy więc powiedzieć, że *dostawa jakiego kąta, jest równa wstawie jego dopełnienia* i zatrzymajmy dobrze w pamięci ostatnie wyrażenia, bo są bardzo częstego w Trygonometryi użycia.

Jak dostawa jakiego kąta jest wstawą jego dopełnienia, tak téż na jéj podobieństwo wprowadzono dla dwóch innych linij t. j. dla stycznéj i siecznéj, styczną i sieczną dopełnienia. Piérwszą nazwano *dostyczną* albo lepiéj *dotyczną* (cotangens) a drugą *dosieczną* (cosecans). Tamtę pisać będziemy przez skrócenie *doty.* (ctang. lub ctg.), tę zaś, *dosie.* (cosec.) tak, że mieć będziemy

$$\text{doty.}\alpha=\text{sty.}(90^\circ-\alpha) \qquad \text{dosie.}\ \alpha=\text{sie.}(90^\circ-\alpha) \text{ i wzajemnie:}$$
$$\text{sty.}\alpha=\text{doty.}(90^\circ-\alpha), \qquad \text{sie.}\alpha=\text{dosie.}(90^\circ-\alpha).$$

W poprzedzającym §. znaleźliśmy, że sty.$\alpha=\dfrac{\text{wst.}\alpha}{\text{dost.}\alpha}$ przeto

$$\text{sty.}(90^\circ-\alpha)=\frac{\text{wst.}(90^\circ-\alpha)}{\text{dost.}(90^\circ-\alpha)}=\frac{\text{dost.}\alpha}{\text{wst.}\alpha} \text{ t. j. doty.}\alpha=\frac{\text{dost.}\ \alpha}{\text{wst.}\ \alpha}$$

Oznaczywszy, jak się to zwyczajnie robi, półokręgu koła czyli 2R czyli 180° przez π, przez co $90^\circ=\frac{1}{2}\pi$, będzie

$$\text{dost.}\alpha=\text{wst.}(\tfrac{1}{2}\pi-\alpha), \quad \text{doty.}\alpha=\text{sty.}(\tfrac{1}{2}\pi-\alpha), \quad \text{dosie.}\alpha=\text{sie.}(\tfrac{1}{2}\pi-\alpha).$$

Ponieważ doty.$\alpha=\dfrac{\text{dost.}\alpha}{\text{wst.}\alpha}=\dfrac{1}{\dfrac{\text{wst.}\alpha}{\text{dost.}\alpha}}=\dfrac{1}{\text{sty.}\alpha}$, zatém

$$\text{sty.}\alpha\ \text{doty.}\alpha=1 \text{ tudzież sty.}\alpha=\frac{1}{\text{doty.}\alpha}.$$

Piérwsze z tych zrównań uczy nas, że *iloczyn ze stycznéj i dotycznéj tegoż samego kąta, zawsze się równa 1;* drugie zaś, że w rachunkach trygonometrycznych jedno jest mnożyć przez styczną lub dzielić przez dotyczną i wzajemnie.

Aby znaleść ważność dosiecznéj, mamy

$$\text{dosie.}\ \alpha=\text{sie.}(\tfrac{1}{2}\pi-\alpha)=\frac{1}{\text{dost.}(\frac{1}{2}\pi-\alpha)}=\frac{1}{\text{wst.}\alpha}.$$

Często jeszcze uważa się w Trygonometryi różnicę między 1 i dostawą, tudzież 1 i wstawą kąta lub łuku; a jeżeli te różnice uważamy w kole, którego promień $=r$, natenczas w miejsce różnic 1—dost.α i 1—wst.α, brać potrzeba różnice r—dost.α i r—wst.α. Różnicę 1—dost.α lub r—dost.α nazwano *wstawą odwrotną kąta* α (sinus versus), różnicę zaś 1—wst.α lub r—wst.α nazwano *dostawą odwrotną kąta* α (cosinus versus) *), tak że

$$\text{wst. odwr.}\alpha = 1 - \text{dost.}\alpha \text{ lub } = r - \text{dost.}\alpha$$
$$\text{dost. odwr.}\alpha = 1 - \text{wst.}\alpha \text{ lub } = r - \text{wst.}\alpha.$$

Piérwsza jak łatwo dostrzedz, jest to część jednostki lub promienia zawarta między łukiem i spodkiem wstawy, druga zaś jest częścią tegoż promienia zawartą między łukiem i spodkiem wstawy łuku dopełniającego. Mamy więc ośm linij albo funkcyj trygonometrycznych t. j.

wstawę, styczną, sieczną, wstawę odwrotną
dostawę, dotyczną, dosieczną, dostawę odwrotną

z których znając jednę tylko i to którąkolwiek, łatwo jest znaleść wszystkie inne, jak to niżéj zobaczymy.

Aby sobie te linije dobrze w pamięć wdrożyć, nie zawadzi zobaczyć je na *fig. 6*. Niech będzie $OA=OB=Om=1$, kąty $AOm=\alpha$ i $BOm=\beta$, są jak widzimy jeden drugiego dopełnieniem bo $\alpha+\beta=90^\circ$. Prostopadła mp jest tu wstawą kąta α; lecz że $mp=Oq$, więc zarazem jest dostawą kąta β. Podobnież Op jest dostawą α, ale ponieważ $Op=mq$, więc zarazem jest wstawą kąta β i wzajemnie. Prostopadła At jest styczną kąta α, zaś Bt' styczną kąta β, zatém At jest zarazem dotyczną kąta β, a Bt' dotyczną kąta α. Prosta Ot jest sieczną kata α, zaś Ot' sieczną kąta β, więc téż Ot jest dosieczną kąta β, a Ot' dosieczną kąta α. Nareszcie

$$pA = OA - Op = 1 - \text{dost.}\alpha = \text{wst. odwr.}\alpha,$$

zaś $$qB = OB - Oq = 1 - \text{dost.}\beta = 1 - \text{wst.}\alpha = \text{dost. odwr.}\alpha.$$

§. 7.

Zastanówmy się teraz co się dzieje z temi funkcyjami, gdy kąt stanie się prostym czyli $90^\circ=R=\frac{1}{2}\pi$, potém gdy

---

*) Muklanowicz nazwał piérwszą *zawstawą* a drugą *zadostawą* „Trójkątowanie drugiego rzędu.“

się stanie $=180^\circ=2R=\pi$; daléj gdy będzie kątem wypukłym równającym się $270^\circ=3R=\frac{3}{2}\pi$, a nareszcie skoro tenże kąt stanie się $360^\circ=4R=2\pi$. Naprzód bardzo naturalną jest rzeczą, iż gdy kąt $=0$, t. j. gdy ramię Om *fig.* 5 ma położenie prostéj OA, wstawa jego jest $=0$, bo niemasz żadnéj prostopadłéj, a dostawa równa się saméj prostéj $Om=1$ przeto wst. $0^\circ=0$, dost. $0^\circ=1$ lub $=r$, jeżeli te proste uważamy w kole którego promień $=r$. Bez najmniejszéj téż trudności każdy dostrzeże, iż wstawa kąta prostego jest $=+1$ lub $=+r$ czyli że wst. $90^\circ=$ wst. $R=$ wst. $\frac{1}{2}\pi=+1$ albo $=+r$, dostawa zaś tegoż kąta $=0$, gdyż prostopadła z punktu m^{IV} na OA spuszczona, pada w punkcie O t. j. spodek wstawy przypada w punkcie O, a dla tego odległość tegoż spodka od punktu O będąca dostawą, jest żadna czyli $=0$; zatém dost. $90^\circ=$ dost. $R=$ dost. $\frac{1}{2}\pi=0$.

Jeżeli prosta Om, w obrocie swoim około punktu O, weźmie położenie prostéj OB czyli przypadnie na przedłużenie prostéj stałéj AO, wtedy taż prosta Om, przebiega w obrocie swoim 180°; prostopadła z punktu m^V na AO albo raczéj na OB spuszczona jest żadna, bo się zamieniła w punkt m^V a odległość jéj spodka t. j. punktu m^V od O, równa się $Om^V=Om=1$ albo $=r$. Ale dwie proste Om i Om^V uważane względem punktu O jako początku, mają kierunki przeciwne, jeżeli więc $Om=+1$ albo $=+r$, będzie $Om^V=-1$ albo $=-r$. Tak więc mamy daléj

$$\text{wst. }180^\circ=\text{wst. }2R=\text{wst. }\pi=0$$
$$\text{dost. }180^\circ=\text{dost. }2R=\text{dost. }\pi=-1 \text{ albo } =-r.$$

Obracając daléj prostą Om czyli ramię kąta AOm aż dopóki nie przyjdzie do położenia OC t. j. dopóki nie padnie na przedłużenie prostéj DO a punkt m nie padnie na m^{VI}, łatwo także dostrzeżemy, że wstawa kąta wypukłego $AOC=270^\circ=3R=\frac{3}{2}\pi$ równa się prostéj Om^{VI}, a dostawa znowu $=0$. Lecz z powodu, że $Om^{VI}=Om=1$ albo $=r$ przypada w kierunku wprost przeciwnym prostéj Om^{IV}, zaś $Om^{IV}=+1$ albo $=+r$, będzie

$$\text{wst.}\,270^\circ = \text{wst.}\,3R = \text{wst.}\,\tfrac{3}{2}\pi = -1 \text{ lub } = -r$$
$$\text{dost.}\,270^\circ = \text{dost.}\,3R = \text{dost.}\,\tfrac{3}{2}\pi = 0.$$

Nareszcie, jeżeli prosta Om w obrocie swoim powróci do położenia OA albo raczéj Om skąd obrót zaczęła, przebieży w tym obrocie około punktu O wszystkie cztéry kąty proste, a wstawa i dostawa będą znowu tak jak na początku obrotu t. j.

$$\text{wst.}\,360^\circ = \text{wst.}\,4R = \text{wst.}\,2\pi = 0$$
$$\text{dost.}\,360^\circ = \text{dost.}\,4R = \text{dost.}\,2\pi = +1 \text{ lub } = +r.$$

Przyjąwszy raz na zawsze $r=1$, mamy dla cztérech głównych położeń prostéj Om

wst. $0^\circ = 0$	dost. $0^\circ = +1$
wst. $\frac{1}{2}\pi = +1$	dost. $\frac{1}{2}\pi = 0$
wst. $\pi = 0$	dost. $\pi = -1$
wst. $\frac{3}{2}\pi = -1$	dost. $\frac{3}{2}\pi = 0$
wst. $2\pi = 0$	dost. $2\pi = +1$.

Zastanowiwszy się nieco nad temi ważnościami wstawy i dostawy, każdemu prawie same z siebie nasuną się następujące uwagi: kiedy kąt począwszy od 0° rośnie do 180°, wstawa jego będąc równa 0, stała się potém $=+1$ a następnie znowu $=0$; więc ta wstawa począwszy od 0 rośnie aż do $+1$ a odtąd maleje także aż do 0. Ponieważ dla kąta $=3R$ jest taż wstawa $=-1$, więc widoczną jest rzeczą, iż gdy kąt daléj rośnie począwszy od 2R, wstawa jego także rośnie ale odjemnie i dla kąta $=3R$ staje się znowu $=1$ ale odjemnéj. A że dla kąta $=4R$ jest drugi raz $=0$ czyli powraca piérwsze położenie, zatém oczywiście wstawa poczynając od kąta $=3R$ aż do 4R maleje, będąc zawsze odjemną, od -1 do 0. Uważając zaś wzrastanie i ubywanie względne, widzimy, że wstawa począwszy od kąta $=0^\circ$ rośnie aż do 90° i tu staje się największą $=+1$; stąd począwszy maleje aż do 270°; gdzie jest najmniéjszą $=-1$, a nareszcie stąd aż do 360° znowu rośnie stając się tu $=0$. Największą wstawę t. j. wst. $90^\circ=1$ nazywano dawniéj *sinus totus*. Co się tyczy dostawy, ta podobnież jak wstawa dwa razy jest największa i $=+1$ lub $=-1$ i dwa razy $=0$ t. j.

poczynając od kąta $=0^\circ$ gdzie się równa $+1$, maleje aż do 90° gdzie jest $=0$; odtąd rośnie lecz odjemnie i to aż do 180°, gdzie jest $=-1$; stąd zaczyna maleć aż do kąta 270°, gdzie się drugi raz staje $=0$ i potém znowu rośnie aż do 360° gdzie ma piérwszą ważność $=+1$. Uważając tu znowu wzrastanie i ubywanie względne, dostrzeżemy, iż od kąta $=0^\circ$ aż do 180°, dostawa ciągle maleje, a stąd aż do 360° rośnie.

Z tych uwag wyprowadzić możemy następujący wniosek: ponieważ wszelkie ważności jakie tylko pomyślić można dla kątów ostrych, zawarte są w granicach 0° i 90°, zatém ważności wstaw kątów ostrych będą wszystkie zawarte między 0 i $+1$, t. j. wszystkie będą większe od 0 a mniéjsze od $+1$; dostawy zaś tych kątów będą mniéjsze od $+1$ a większe od 0. Podobnież wszystkie ważności jakie tylko kąty rozwarte mieć mogą, są zawarte w granicach 90° i 180°, zatém ważności wstaw wszystkich kątów rozwartych będą mniéjsze niż $+1$ a większe niż 0 i t. d.

Jakaż jest styczna i sieczna dla powyższych cztérech punktów i co się z niemi dzieje, gdy się kąt zmienia od 0° aż do 360°? Ponieważ $\text{sty.}\alpha = \frac{\text{wst.}\alpha}{\text{dost.}\alpha}$, a $\text{sie.}\alpha = \frac{1}{\text{dost.}\alpha}$, zatém dosyć jest położyć tylko znalezione poprzednio ważności za wst.α i dost.α, kiedy $\alpha = 0^\circ$, 90°, 180°, 270° i 360°; a tak znajdziemy

$$\text{sty. }0^\circ = \frac{\text{wst. }0^\circ}{\text{dost. }0^\circ} = \frac{0}{+1} = 0 \qquad \text{sie. }0^\circ = \frac{1}{\text{dost. }0^\circ} = \frac{1}{+1} = +1$$

$$\text{sty. }\tfrac{1}{2}\pi = \frac{\text{wst.}\frac{1}{2}\pi}{\text{dost.}\frac{1}{2}\pi} = \frac{+1}{0} = +\infty \qquad \text{sie. }\tfrac{1}{2}\pi = \frac{1}{\text{dost.}\frac{1}{2}\pi} = \frac{1}{0} = \infty$$

$$\text{sty. }\pi = \frac{\text{wst. }\pi}{\text{dost. }\pi} = \frac{0}{-1} = 0 \qquad \text{sie }\pi = \frac{1}{\text{dost. }\pi} = \frac{1}{-1} = -1$$

$$\text{sty. }\tfrac{3}{2}\pi = \frac{\text{wst.}\frac{3}{2}\pi}{\text{dost.}\frac{3}{2}\pi} = \frac{-1}{0} = -\infty \qquad \text{sie.}\tfrac{3}{2}\pi = \frac{1}{\text{dost.}\frac{3}{2}\pi} = \frac{1}{0} = \infty$$

$$\text{sty. }2\pi = \frac{\text{wst. }2\pi}{\text{dost.}2\pi} = \frac{0}{1} = 0 \qquad \text{sie.}2\pi = \frac{1}{\text{dost.}2\pi} = \frac{1}{1} = 1.$$

Z tych ważności czytamy: iż styczna trygonometryczna albo raczéj jéj ważność, począwszy od kąta $=0^\circ$ gdzie taż styczna jest $=0$, rośnie aż do kąta $=90^\circ$, gdzie się staje nieskończenie wielką; ważności więc stycznych wszystkich kątów ostrych zawarte są w granicach 0 i ∞, mogą więc styczne kątów ostrych mieć wszelkie pomyślić się mogące jakkolwiek małe lub jakkolwiek wielkie ważności. Począwszy od kąta $=90^\circ$ aż do kąta $=180^\circ$, ważność stycznéj przebiega od ∞ do 0; ale ponieważ dostawy kątów rozwartych między 90° i 180° zawartych, rosną od 0 do -1 a wstawy maleją od $+1$ do 0, zaś sty. $\alpha = \frac{\text{wst.}\,\alpha}{\text{dost.}\,\alpha}$, więc ważności stycznych do rozwartych kątów należących, będą wszystkie odjemne zawarte między $-\infty$ i 0, maleją zatém lecz odjemnie.

Nie zawadzi tu zwrócić uwagę uczących się, że dwie granice $+\infty$ i $-\infty$ schodzą się w jednymże punkcie i że tu styczna doznaje dwóch nadzwyczaj raptownych skoków; bo naprzód z ilości skończonéj dla kąta o cokolwiek mniéjszego niż kąt prosty, staje się dla tegoż kąta $+\infty$, a potém gdy znowu kąt przewyższy o cokolwiek kąt prosty, ważność stycznéj staje się odjemną i bardzo bliską granicy $-\infty$. Tak w świecie fizycznym początek i koniec wszech rzeczy nie inaczéj pojmować możemy jak tylko dwie przeciwne niezmiernie bliskie siebie granice, jakkolwiek nadzwyczajną przestrzenią czasu od siebie przedzielone; tak téż i w świecie moralnym, świętość czyli nieskażona cnota i zbrodnia są dwiema sobie przeciwnemi a bardzo bliskiemi granicami, bo z jednéj nadzwyczaj nagły bywa przechód do drugiéj, jak tego mamy przykład w piśmie Ś. o pysznych aniołach szatanami nazwanych; tak nareszcie, tuż z wzniosłym geniuszem sąsiaduje obłąkanie. Wracając do naszéj stycznéj, widzimy, iż ta od 0 znowu rośnie aż do ∞, gdy kąt rośnie od 180° do 270° i znowu jest dodatna, bo tak wstawa jako i dostawa kątów większych od 180° a mniéjszych od 270° są odjemne, ich przeto iloraz czyli styczna jest dodatną. Dla kąta 270° czyli dla $\frac{3}{2}\pi$ jest jak widzieliśmy sty. $\frac{3}{2}\pi = -\infty$, tu zatém z dodatnéj i skończonéj ważności przechodzi styczna na ważność odjemną i nieskończenie wielką i podobnie jak przy kącie $=90^\circ$, schodzą się tu także dwie granice $+\infty$ i $-\infty$. Odtąd styczna będąc zawsze odjemną, maleje aż do 0, bo dla kąta $=360^\circ$, wszystko powraca do piérwszego stanu t. j. do stanu gdy kąt był $=0^\circ$.

Co do siecznéj, ta ma także granice ± 1 i $\pm\infty$. Gdy kąt rośnie od 0° do 90°, sieczna jego rośnie od $+1$ do $+\infty$, odtąd aż do 180°, maleje od $-\infty$ do -1, jest zatém ciągle odjemną; od 180° aż do 270° znowu rośnie od -1 do $-\infty$, a nareszcie od 270° do 360°, maleje od $+\infty$ do $+1$. Jéj granice $+\infty$ i $-\infty$ schodzą się w tychże samych punktach jak dla stycznéj.

Znając wyrażenia dotycznéj i dosiecznéj przez wstawę i dostawę albo przez styczną i sieczną, łatwo znajdziemy co się z niemi dzieje, gdy kąt przybiera wszystkie ważności od 0° poczynając aż do 360°.

Wszystko co się dotąd powiedziało o stycznéj, siecznéj, dotycznéj i dosiecznéj, łatwo także każdy dostrzeże na figurze, zmieniając położenie prostéj Om *fig.* 5 od 0° do 360° i pamiętając dobrze definicyją tych linij, iżby stósowne wykreślenie przedsięwziąść można.

§. 8.

Co do znaków jakie przyjmują linije trygonometryczne dla wszystkich między 0° i 360° zawartych kątów, jaśniéj i łatwiéj poznamy je ze zrównań już nam znanych

$$\text{wst.}(\tfrac{1}{2}\pi-\alpha)=\text{dost.}\,\alpha, \qquad \text{dost.}(\tfrac{1}{2}\pi-\alpha)=\text{wst.}\,\alpha$$
$$\text{sty.}(\tfrac{1}{2}\pi-\alpha)=\text{doty.}\,\alpha \qquad \text{doty.}(\tfrac{1}{2}\pi-\alpha)=\text{sty.}\,\alpha$$
$$\text{sie.}(\tfrac{1}{2}\pi-\alpha)=\text{dosie.}\,\alpha \qquad \text{dosie.}(\tfrac{1}{2}\pi-\alpha)=\text{sie.}\,\alpha$$

Położywszy tu bowiem $-\alpha$ za α, znajdziemy

$$\text{wst.}(\tfrac{1}{2}\pi+\alpha)=\text{dost}(-\alpha)=\text{dost}\,\alpha,$$
$$\text{dost.}(\tfrac{1}{2}\pi+\alpha)=\text{wst}(-\alpha)=-\text{wst.}\,\alpha \quad §.\ 4.$$

$$\text{sty}(\tfrac{1}{2}\pi+\alpha)=\text{doty.}(-\alpha)=\frac{\text{dost}(-\alpha)}{\text{wst}(-\alpha)}=\frac{\text{dost}\,\alpha}{-\text{wst.}\,\alpha}=-\text{doty.}\,\alpha$$

$$\text{doty.}(\tfrac{1}{2}\pi+\alpha)=\text{sty}(-\alpha)=\frac{\text{wst}(-\alpha)}{\text{dost}(-\alpha)}=\frac{-\text{wst}\,\alpha}{\text{dost}\,\alpha}=-\text{sty}\,\alpha$$

$$\text{sie.}(\tfrac{1}{2}\pi+\alpha)=\text{dosie.}(-\alpha)=\frac{1}{\text{wst.}(-\alpha)}=\frac{1}{-\text{wst.}\alpha}=-\text{dosie.}\alpha$$

$$\text{dosie.}(\tfrac{1}{2}\pi+\alpha)=\text{sie.}(-\alpha)=\frac{1}{\text{dost.}(-\alpha)}=\frac{1}{\text{dost.}\alpha}=\text{sie.}\,\alpha$$

W tych ostatnich wzorach połóżmy znowu $\frac{1}{2}\pi-\alpha$ za α a znajdziemy

$$\begin{aligned}
\text{wst.}(\pi-\alpha) &= \text{dost.}(\tfrac{1}{2}\pi-\alpha)=\text{wst.}\,\alpha\\
\text{dost.}(\pi-\alpha) &= -\text{wst.}(\tfrac{1}{2}\pi-\alpha)=-\text{dost.}\alpha\\
\text{sty.}(\pi-\alpha) &= -\text{doty.}(\tfrac{1}{2}\pi-\alpha)=-\text{sty.}\,\alpha\\
\text{doty.}(\pi-\alpha) &= -\text{sty.}(\tfrac{1}{2}\pi-\alpha)=-\text{doty.}\alpha\\
\text{sie.}(\pi-\alpha) &= -\text{dosie.}(\tfrac{1}{2}\pi-\alpha)=-\text{sie.}\,\alpha\\
\text{dosie.}(\pi-\alpha) &= \text{sie.}(\tfrac{1}{2}\pi-\alpha)=\text{dosie.}\,\alpha.
\end{aligned}$$

Dwa łuki lub kąty $\pi-\alpha$ i α których summa $=\pi$, zowią się *spełniającemi* a każdy z nich *spełnieniem* (supplementum) drugiego. Z dwóch przeto piérwszych zrównań czytamy tę prawdę: że *dwa łuki lub kąty spełniające się do 180° czyli do dwóch kątów prostych, mają wstawy i dostawy co do wielkości zupełnie równe tylko że dostawy mają znaki przeciwne.* Następne zrównania mówią toż samo o innych linijach, gdzie tylko dosieczna jest dodatna a wszystkie inne są odjemne Każdy zatém kąt rozwarty ma sześć powyższych linij trygonometrycznych co do ich wielkości zupełnie też same jakie należą do kąta ostrego spełniającego tamten do dwóch kątów prostych, ale tylko wstawa i dosieczna są dodatne a inne odjemne. O téj prawdzie można się także przekonać z figury którą sobie każdy łatwo narysuje.

Ponieważ widzimy, jak w każdym razie łatwo jest znaleść tak wielkość jako téż i znak stycznéj i siecznéj, a następnie dotycznéj i dosiecznéj, skoro wstawa i dostawa są znane, zatém w dalszym ciągu szukania wielkości linij trygonometrycznych, zostaniemy tylko przy wstawie i dostawie; a skoro wszystkie ich własności wykryjemy, zastósujemy je dopiéro do innych linij.

Według wzorów wst $(\pi-\alpha)=\text{wst.}\,\alpha$, dost. $(\pi-\alpha)=-\text{dost.}\,\alpha$ znaleść można wstawy i dostawy wszystkich kątów rozwartych: Tak np.

$$\text{wst. } 150^\circ = \text{wst.}(180^\circ - 150^\circ) = \text{wst. } 30^\circ,$$
$$\text{dost. } 150^\circ = \text{dost.}(180^\circ - 150^\circ) = -\text{dost. } 30^\circ$$
$$\text{wst. } 175^\circ = \text{wst.}(180^\circ - 175^\circ) = \text{wst. } 5^\circ,$$
$$\text{dost. } 175^\circ = \text{dost.}(180^\circ - 175^\circ) = -\text{dost. } 5^\circ.$$

W powyższych ogólnych wzorach pisząc $-\alpha$ za α czyli odmieniając znak kąta α, będzie

$$\text{wst. } (\pi + \alpha) = \text{wst. } (-\alpha) = -\text{wst. } \alpha,$$
$$\text{dost. } (\pi + \alpha) = -\text{dost. } (-\alpha) = -\text{dost. } \alpha.$$

Te wzory dadzą nam wstawę i dostawę kątów wypukłych większych niż 180° a mniéjszych niż 270°.

I tak: $\text{wst. } 238^\circ = \text{wst. } (180^\circ + 58^\circ) = -\text{wst. } 58^\circ,$

$$\text{dost. } 238^\circ = \text{dost.}(180^\circ + 58^\circ) = -\text{dost. } 58^\circ$$

Za pomocą tychże samych wzorów można także otrzymać wstawy i dostawy kątów nawet większych niż 270° a mniéjszych niż 360°. Jakoż

$$\text{wst. } 300^\circ = \text{wst.}(180^\circ + 120^\circ) = -\text{wst. } 120^\circ,$$
$$\text{dost. } 300^\circ = \text{dost. } (180^\circ + 120^\circ) = -\text{dost. } 120.$$

Ale $\text{wst. } 120^\circ = \text{wst.}(180^\circ - 120^\circ) = \text{wst. } 60^\circ$

a $\text{dost. } 120^\circ = -\text{dost. } (180^\circ - 120^\circ) = -\text{dost. } 60^\circ$

zatém $\text{wst. } 300^\circ = -\text{wst. } 60^\circ$ $\text{dost. } 300^\circ = \text{dost. } 60^\circ$.

Albo: ponieważ wyżéj pokazaliśmy

że $\text{wst. } (\frac{1}{2}\pi + \alpha) = \text{dost. } \alpha$ a $\text{dost. } (\frac{1}{2}\pi + \alpha) = -\text{wst. } \alpha,$

przeto $\text{wst. } 120^\circ = \text{wst. } (90^\circ + 30^\circ) = \text{dost. } 30^\circ,$

a $\text{dost. } 120^\circ = \text{dost. } (90^\circ + 30^\circ) = -\text{wst. } 30^\circ$, więc następnie $\text{wst. } 300^\circ = -\text{dost. } 30^\circ$ a $\text{dost. } 300^\circ = \text{wst. } 30^\circ$.

Dwie na pozór różne ważności tak na wst. 300^0, jako i dost. 300^0 otrzymane, są sobie zupełnie równe,

gdyż $\text{wst. } 60^0 = \text{dost. } 30^0$ i $\text{dost. } 60^0 = \text{wst. } 30^0,$

bo $60^0 + 30^0 = 90^0 = \frac{1}{2}\pi$

Tak więc począwszy od kąta 180^0 aż do 360^0, tak dla wstawy jako i dostawy będzie toż samo co było od 0^0 do 180^0 wyjąwszy znaki, bo te będą przeciwne.

W ostatnich wzorach połóżmy jeszcze $\pi + \alpha$ za α

a otrzymamy $\text{wst. } (2\pi + \alpha) = -\text{wst. } (\pi + \alpha) = \text{wst. } \alpha,$

$$\text{dost. } (2\pi + \alpha) = -\text{dost. } (\pi + \alpha) = \text{dost. } \alpha.$$

Odmieniwszy tu znak kąta α, będzie

$$\text{wst.}(2\pi-\alpha)=\text{wst.}(-\alpha)=-\text{wst.}\,\alpha,$$
$$\text{dost.}(2\pi-\alpha)=\text{dost.}(-\alpha)=\text{dost.}\,\alpha.$$

W wyższéj Geometryi, szczególniéj zaś jéj do Astronomii i innych zastósowaniach, wypada często potrzeba brać wstawy, dostawy i t. d. kątów większych niż 4, 6, 8,..... kątów prostych; te bardzo łatwo otrzymamy z piérwszego z ostatnich wzorów kładąc tamże następnie $2\pi+\alpha$, $4\pi+\alpha$, $6\pi+\alpha$ i t. d. za α, znajdziemy bowiem

$$\text{wst.}(4\pi+\alpha)=\text{wst.}\ (2\pi+\alpha)=\text{wst.}\,\alpha$$
$$\text{dost.}(4\pi+\alpha)=\text{dost.}(2\pi+\alpha)=\text{dost.}\,\alpha$$
$$\text{wst.}(6\pi+\alpha)=\text{wst.}\ (4\pi+\alpha)=\text{wst.}\,\alpha$$
$$\text{dost.}(6\pi+\alpha)=\text{dost.}(4\pi+\alpha)=\text{dost.}\,\alpha$$
$$\text{wst.}(8\pi+\alpha)=\text{wst.}\ (6\pi+\alpha)=\text{wst.}\,\alpha$$
$$\text{dost.}(8\pi+\alpha)=\text{dost.}(6\pi+\alpha)=\text{dost.}\,\alpha$$

i w ogólności jeżeli n wyraża każdą liczbę całkowitą dodatną lub odjemną

$$\text{wst.}(2n\pi+\alpha)=\text{wst.}\,\alpha \qquad \text{dost.}(2n\pi+\alpha)=\text{dost.}\,\alpha$$

Odmieniwszy znak kąta α będzie

$$\text{wst.}(2n\pi-\alpha)=-\text{wst.}\,\alpha \qquad \text{dost.}(2n\pi-\alpha)=\text{dost.}\,\alpha.$$

W piérwszém z ostatnich z równań położywszy $\pi+\alpha$ za α, będzie $\text{wst.}\{(2n+1)\pi+\alpha\}=\text{wst.}(\pi+\alpha)=-\text{wst.}\,\alpha,$

$$\text{dost.}\{(2n+1)\pi+\alpha\}=\text{dost.}(\pi+\alpha)=-\text{dost.}\,\alpha$$

a odmieniwszy znak kąta α, znajdziemy

$$\text{wst.}\{(2n+1)\pi-\alpha\}=-\text{wst.}\ (-\alpha)=\ \text{wst.}\,\alpha,$$
$$\text{dost.}\{(2n+1)\pi-\alpha\}=-\text{dost.}(-\alpha)=-\text{dost.}\,\alpha.$$

Skąd wniesiemy, że do każdego kąta lub łuku, można dodać lub od niego odjąć ilekolwiek całkowitych okręgów, nie zmieniając w niczém tak jego wstawy jako i dostawy. Dwa piérwsze z ostatnich zrównań uczą nas, że dodając do kąta nieparzystą liczbę półokręgów, zmieniamy tylko znak tak wstawy jako i dostawy jego.

Z tego co dotąd o wstawach i dostawach kątów poznaliśmy, nie trudno wnioskować, że zastępując cięciwy temi linijami, nie potrzeba dla ułożenia ich ważności w tablice, nawet czwartéj części téj pracy, jaką przy ułożeniu cięciw podjęto. Wspomniałem bowiem, że tablice cięciw rachowano wpoczątkach dla półokręgu, gdy tymczasem obrachowanie wstaw i dostaw wszelkich łuków lub kątów, sprowadza się do kątów ostrych t. j. większych od 0°, a mniejszych od 90°. Ale oprócz tego widzieliśmy, że dostawa jakiego kąta jest równa wstawie innego dopełniającego piérwszéj do 90°- t. j. że np.

dost. 80° = wst. 10°, dost. 70° = wst. 20°, dost. 60° = wst. 30° i t. d. i że na téj saméj zasadzie dost. 45° = wst. 45°, przeto łatwo dostrzegamy, że dosyć będzie porachować tylko wstawy i dostawy kątów od 0° do 45°, a dla następnych już wszystko gotowe w tablicy znajdziemy, jak nam to dowodnie poprzednie przykłady wskazują. Ale i ta praca zmniejszy się jeszcze skoro sobie przypomnimy i co następnie będzie okazaném, iż znając jednę którąkolwiek z linij trygonometrycznych, już tém samém wszystkie inne są znane.

§. 9.

Chcąc linije trygonometryczne obrachować dla ułożenia ich w tablice, jak to z cięciwami starożytni zrobili, musimy sobie do tego przygotować wzory, jak to dla cięciw we wstępie pokazaliśmy, ułatwiające toż obrachowanie. W tym celu weźmy trójkąt prostokréślny jakikolwiek ABC *fig.* 7 i oznaczmy jego boki albo raczéj ich stósunki do jednostki przez a, b, c a kąty im przeciwległe przez α, β, γ.

Z wiérzchołka któregokolwiek kąta np. C spuściwszy prostopadłą na bok jemu przeciwległy $AB = c$, ta podzieli rzeczony bok na dwa odcinki $AD = x$ i $BC = y$, a trójkąt na dwa inne prostokątne. Z piérwszego z nich t. j. ACD według §. 3 mamy $\frac{CD}{b} = \text{wst.}\,\alpha$ czyli $CD = b\,\text{wst.}\,\alpha$,

z drugiego . . BCD . . $\frac{CD}{a} = \text{wst.}\,\beta$ czyli $CD = a\,\text{wst.}\,\beta$,

skąd $\quad a\,\text{wst.}\,\beta = b\,\text{wst.}\,\alpha$, albo $a : b = \text{wst.}\,\alpha : \text{wst.}\,\beta$.

Ta proporcyja zamyka twierdzenie, iż *w trójkącie prostokre-*

ślnym wstawy kątów są w stósunku boków tym kątom przeciwległych.

Uwaga. W dowodzeniu tego twierdzenia mogą być dwa przypadki t. j. że prostopadła CD pada wewnątrz trójkąta jak tu, lub téż zewnątrz; ponieważ nam to twierdzenie do innego celu jest potrzebne, dlatego nie zatrzymujemy się nad drugim przypadkiem, albowiem na swojém miejscu dowiedziemy je dla każdego przypadku.

W tychże samych dwóch trójkątach i według tegoż samego §. jest $\frac{x}{b} = \text{dost.}\,\alpha$ i $\frac{y}{a} = \text{dost.}\,\beta$,

skąd $x = b\,\text{dost.}\,\alpha,\ y = a\,\text{dost.}\,\alpha$

a następnie $x + y = c = a\,\text{dost.}\,\beta + b\,\text{dost.}\,\alpha.$

Ale na mocy powyższego twierdzenia jest téż

$$a : c = \text{wst.}\,\alpha : \text{wst}\,\gamma \text{ i } b : c = \text{wst.}\,\beta : \text{wst.}\,\gamma,$$

skąd $a = \frac{c\,\text{wst.}\,\alpha}{\text{wst.}\,\gamma}$ i $b = \frac{c\,\text{wst.}\,\beta}{\text{wst.}\,\gamma}.$

Te ważności położywszy wzrównaniu na c, będzie

$$c = \frac{c\,\text{wst.}\,\alpha\,\text{dost.}\,\beta}{\text{wst.}\,\gamma} + \frac{c\,\text{dost.}\,\alpha\,\text{wst.}\,\beta}{\text{wst.}\,\gamma}$$

albo $1 = \frac{\text{wst.}\,\alpha\,\text{dost.}\,\beta + \text{dost.}\,\alpha\,\text{wst.}\,\beta}{\text{wst.}\,\gamma}$

albo $\text{wst.}\,\gamma = \text{wst.}\,\alpha\,\text{dost.}\,\alpha + \text{dost.}\,\alpha\,\text{wst.}\,\beta.$

Lecz wiadomo z §. 36 *Geom.*, że $\alpha + \beta + \gamma = 180^0 = \pi$, skąd $\gamma = \pi - (\alpha + \beta)$ a następnie $\text{wst.}\,\gamma = \text{wst.}\,(\alpha + \beta)$ §. 8

zatém $\text{wst.}\,(\alpha + \beta) = \text{wst.}\,\alpha\,\text{dost.}\,\beta + \text{dost.}\,\alpha\,\text{wst.}\,\beta \quad . \ . \ . \ . \quad (1)$

jakiekolwiek są kąty α i β, bośmy tu żadnego ograniczenia nie wprowadzili.

Zrównanie to będąc zasadniczém całéj Trygonometryi, można téż w rozmaity sposób z wykreślenia geometrycznego wyprowadzić; my tu następujący wskażemy.

Niech będą dwa kąty $AOB = \alpha$ i $BOC = \beta$ *fig.* 8, z których każdy jest mniejszy niż 90^0, szukajmy wstawy summy tych kątów t. j. $\text{wst.}\,(\alpha + \beta)$. Na ten koniec na ramieniu OC kąta β, obrawszy gdziekolwiek punkt E i uważając prostą OA za ramię nieruchome tak do kąta α jako téż i kąta $\alpha + \beta$ należące, spuśćmy z tego punktu prostopadłą EF na OA, tedy według §. 2 będzie $\frac{EF}{OE}$ = wst. $(\alpha+\beta)$; całe więc nasze usiłowanie zmierzać będzie do znalezienia stósunku $\frac{EF}{OE}$ wyrażonego przez wstawy i dostawy kątów α i β. W tym celu przez punkt E poprowadźmy prostą ED równoległą do ramienia OB, aż do przecięcia się z przedłużoną AO w punkcie D, a z punktu O spuśćmy do niéj prostopadłą OG; nareszcie połóżmy kąt EDO$=p$, DEO$=q$; tedy

$$\frac{EF}{OE}=\frac{EF}{OE}\cdot\frac{DE}{DE}=\frac{EF}{OE}\left(\frac{EG+DG}{DE}\right)=\frac{EF}{OE}\cdot\frac{EG}{DE}+\frac{EF}{OE}\cdot\frac{DG}{DE}$$
$$=\frac{EF}{DE}\cdot\frac{EG}{OE}+\frac{DG}{OE}\cdot\frac{EF}{DE}.$$

Ale trójkąt FDE podobny trójkątowi DGO, skąd wypada $\frac{EF}{DE}=\frac{GO}{DO}$, zatém stósunek $\frac{EF}{DE}$ może być zastąpionym przez stósunek $\frac{GO}{DO}$ przeto

$$\frac{EF}{OE}=\frac{EF}{DE}\cdot\frac{EG}{OE}+\frac{DG}{OE}\cdot\frac{GO}{DO}=\frac{EF}{DE}\cdot\frac{EG}{OE}+\frac{DG}{DO}\cdot\frac{GO}{OE}.$$

Szukajmy teraz tych cztérech stósunków.

W trójkącie FDE prostokątnym przy F jest $\frac{EF}{DE}$ = wst. p

EGO prostokątnym przy G jest $\frac{EG}{OE}$ = wst. q

DGO prostokątnym przy G jest $\frac{DG}{DO}$ = dost. p

EGO prostokątnym przy G jest $\frac{GO}{OE}$ = wst. q

przeto $\frac{EF}{OE}$ = wst. $(\alpha+\beta)$ = wst. p dost. q + dost p wst. q.

Ale z powodu równoległości prostych OB i DE jest też $p=\alpha$, $q=\beta$, więc nareszcie

wst. $(\alpha+\beta)$ = wst. α dost. β + dost. α wst. β

jak wyżéj znaleźliśmy.

Jakkolwiek w obecném dowodzeniu przyjęliśmy, że każdy z kątów α i β jest mniejszy niż 90°, wszelako można te kąty zmieniać dowolnie i czynić jeden z nich większy niż 90^0, albo téż tak, iżby $\alpha+\beta>180^0$, albo $>270^0$; a robiąc w każdym razie podobne poprzedzającemu wykréślenie, t. j. na ramieniu kąta wyrażającego summę $\alpha+\beta$ obierając dowolnie punkt i przez tenże prowadząc równoległą do ramienia kąta α, a ramię OA spólne kątom α i $\alpha+\beta$, uważając jak w powyższém za nieruchome, dowiedziemy zupełnie tymże samym jak wyżéj sposobem, rzetelności znalezionego zrównania (1), t. j. w każdym razie przekonamy się, iż jakiekolwiek są kąty α i β, zrównanie (1) jest prawdziwe.

Bo weźmy jeden z tych przypadków, np. gdy kąt $\alpha>180^0$.

Niech na figurze 9 będzie kąt wypukły AOB $=\alpha$ i BOC $=\beta$. Na ramieniu OC obrawszy punkt E i przez niego poprowadziwszy prostą ED równoległą do OB, tudzież spuściwszy z tegoż punktu E prostopadłą EF na OA, jako téż z punktu O prostopadłą OG na DE, a nareszcie położywszy kąt ODE $=p$, OED $=q$,

mamy według definicyi wstawy, $\frac{-EF}{OE}=\text{wst.}(\alpha+\beta)$.

Ale $$\frac{-EF}{OE}=\frac{-EF}{OE}\cdot\frac{DE}{DE}=\frac{-EF}{OE}\left(\frac{EG+DG}{DE}\right)$$
$$=\frac{-EF}{DE}\cdot\frac{EG}{OE}-\frac{EF}{DE}\cdot\frac{DG}{OE}.$$

Lecz trójkąt FDE jest podobny trójkątowi DGO,

skąd $\frac{EF}{DE}=\frac{GO}{DO}$, a następnie
$$\frac{-EF}{OE}=\frac{-EF}{DE}\cdot\frac{EG}{OE}-\frac{GO}{DO}\cdot\frac{DG}{OE}=\frac{-EF}{DE}\cdot\frac{EG}{OE}-\frac{DG}{DO}\cdot\frac{GO}{OE}.$$

A że tak jak poprzednio $\frac{EF}{DE}=\text{wst.}\,p$, $\frac{EG}{OE}=\text{dost.}\,q$,
$$\frac{DG}{DO}=\text{dost.}\,p,\quad \frac{GO}{OE}=\text{wst.}\,q,$$

zatém $\frac{-EF}{OE}=\text{wst.}\,(\alpha+\beta)=-\text{wst.}\,p\,\text{dost.}\,q-\text{dost.}\,p\,\text{wst.}\,q.$

Ale z powodu równoległości prostych OB i DE jest

$$p + AOB = 180^0, \text{ i } q = \beta, \text{ że zaś } \alpha + AOB = 360^0,$$

$$\text{zatém } p = \alpha - 180^0 = -(180^0 - \alpha)$$

a następnie $\text{wst.}\, p = -\text{wst.}(180^0 - \alpha) = -\text{wst.}\, \alpha,$

zaś $\text{dost.}\, p = \text{dost.}(180^0 - \alpha) = -\text{dost.}\, \alpha$

stósownie do §. 8, więc nareszcie

$$\text{wst.}(\alpha + \beta) = \text{wst.}\, \alpha\, \text{dost.}\, \beta + \text{dost.}\, \alpha\, \text{wst.}\, \beta.$$

Ten sposób dowiedzenia ostatniego zrównania podał A. Arneth w „*System der Geometrie 1840*“.

Ponieważ zrównanie (1) jest jak wspomniałem zasadniczém całéj Trygonometryi, przeto należy się o jego rzetelności wszechstronnie przekonać, dlatego podaję tu jeszcie dowód Burga znajdujący się w jego „*Handbuch der geradlinigen und sphärischen Trigonometrie 1826*“ a który on poczytuje za najnaturalniejszy. Nim ten dowód pokażemy, dowiédzmy wprzód, że *wstawa jakiego kąta albo łuku, równa się połowie cięciwy łuku dwarazy większego.*

Niech będzie trójkąt ABC *fig. 10*, opisawszy go kołem i ze środka S spuściwszy prostopadłe na jego boki i takowe przedłużywszy aż do przecięcia się z okręgiem koła w punktach G, H, I, te prostopadłe podzielą boki trójkąta jako téż i łuki, których są cięciwami każdy na dwie równe części §. 82 *Geom.* Według definicyi §. 3 jest

$$CF = BF = \text{wst.}\, CI$$

jeżeli promień koła opisanego położymy $= 1$. A że łuk CI albo BI jest miarą kąta α, zatém $CF = \text{wst.}\, \alpha$ a następnie $CF = \frac{1}{2} BC = \text{wst.}\, CI = \text{wst.}\, \frac{1}{2} CIB = \text{wst.}\, \alpha$. Zupełnie toż samo mówić można o innych dwóch bokach. Prawdą zatém jest, że wstawa jakiego łuku jest to połowa cięciwy dwarazy większego łuku.

Niech teraz będzie okrąg koła promieniem równym 1 wykreślony *fig. 11.* Przy średnicy jego BC nakreślmy dwa kąty okręgowe $ABC = \alpha$ i $CBD = \beta$; poprowadziwszy proste AD, AC i CD, otrzymamy czworokąt ABDC wkoło wpisany w którym proste BC i AD są przekątniami; przeto według twierdzenia Ptolemeusza §. 113 *Geom.* jest

$$BC.AD = AC.BD + AB.CD.$$

Lecz według poprzedzającego jest $\text{wst.}\,\alpha = \frac{1}{2}AC$

skąd $AC = 2\,\text{wst.}\,\alpha$;

podobnież jest $CD = 2\,\text{wst.}\,\beta$, $AD = 2\,\text{wst.}\,(\alpha + \beta)$,

$AB = 2\,\text{wst.}\,ACB$, a ponieważ $ACB + \alpha = 90^0$

skąd $ACB = 90^0 - \alpha$ a następnie $\text{wst.}\,ACB = \text{dost.}\,\alpha$,

zatém $AB = 2\,\text{dost.}\,\alpha$; daléj $BD = 2\,\text{wst.}\,BCD = 2\,\text{dost.}\,\beta$;

nareszcie $BC = 2$.

Położywszy w powyższém zrównaniu ważności co dopiéro znalezione, otrzymamy

$$4\,\text{wst.}\,(\alpha + \beta) = 4\,\text{wst.}\,\alpha\,\text{dost.}\,\beta + 4\,\text{dost.}\,\alpha\,\text{wst.}\,\beta$$

czyli $$\text{wst.}\,(\alpha + \beta) = \text{wst.}\,\alpha\,\text{dost.}\,\beta + \text{dost.}\,\alpha\,\text{wst.}\,\beta$$

jak poprzednio.

Z powodu ważności zrównania (1), spodziewam się, iż mi nie będzie poczytano za rozwlekłość, iż się cokolwiek więcéj nad potrzebę rozszerzyłem; mając bowiem z doświadczenia, że do różnych pojęć różnemi się drogami trafia, nie wahałem się przywieść tu trzy sposoby, jak mi się zdaje najłatwiejsze a nic na ścisłości nie tracące, dowiedzenia zasadniczego zrównania Trygonometryi.

Tak przekonawszy się o rzetelności zrównania (1) jakiekolwiek są kąty α i β, postąpmy do innych niemniéj ważnych a z (1) wypływających. W zrównaniu (1) połóżmy $-\beta$ za β, a znajdziemy

$$\text{wst.}\,(\alpha - \beta) = \text{wst.}\,\alpha\,\text{dost.}\,\beta - \text{dost.}\,\alpha\,\text{wst.}\,\beta \quad \ldots . (2)$$

pamiętając na §. 4. Ponieważ wzór (1) jest prawdziwym dla każdéj ważności kątów α i β, zatém i ostatni t. j. (2) takimże być musi, bo z prawdziwego i na dowiedzionych poprzednio zasadach wyprowadzonym został. Kiedy tak jest, zatém możemy i w tym ostatnim kłaść za α i β wszelkie dowolne ważności. Połóżmy więc w nim $\frac{1}{2}\pi - \alpha$ za α, tedy otrzymamy

$$\text{wst.}\,(\tfrac{1}{2}\pi - \alpha - \beta) = \text{wst.}\,\{\tfrac{1}{2}\pi - (\alpha + \beta)\}$$

$$= \text{wst.}\,(\tfrac{1}{2}\pi - \alpha)\,\text{dost.}\,\beta - \text{dost.}\,(\tfrac{1}{2}\pi - \alpha)\,\text{wst.}\,\beta$$

albo $$\text{dost.}\,(\alpha + \beta) = \text{dost.}\,\alpha\,\text{dost.}\,\beta - \text{wst.}\,\alpha\,\text{wst.}\,\beta \quad . \; . \; . \quad (3)$$

a odmieniwszy znowu znak kąta β czyli pisząc $-\beta$ za β, co jak wiadomo można,

znajdziemy $\text{dost.}(\alpha-\beta)=\text{dost.}\,\alpha\,\text{dost.}\,\beta+\text{wst.}\,\alpha\,\text{wst.}\,\beta$ . . . (4).
Cztéry wzory (1), (2), (3) i (4), które też w dwóch następnych objąć można

$$\text{wst.}(\alpha\pm\beta)=\text{wst.}\,\alpha\,\text{dost.}\,\beta\pm\text{dost.}\,\alpha\,\text{wst.}\,\beta$$
$$\text{dost.}(\alpha\pm\beta)=\text{dost.}\,\alpha\,\text{dost.}\,\beta\mp\text{wst.}\,\alpha\,\text{wst.}\,\beta$$

należy dobrze zatrzymać w pamięci, gdyż one bardzo częstego są użycia w całéj Trygonometryi i wszelkie jéj wzory z nich wyprowadzić można, jak się następnie o tém przekonamy.

§. 10.

We wzorze (4) połóżmy $\alpha=\beta$, a znajdziemy

$$\text{dost.}\,0=\text{dost.}\,\alpha^2+\text{wst.}\,\alpha^2.$$

Przy tym wzorze zwracam zaraz uwagę uczących się, że wyrażenia $\text{dost.}\,\alpha^2$ i $\text{wst.}\,\alpha^2$, nie znaczą bynajmniéj, iżby łuk lub kąt α należało podnieść do potęgi drugiéj, albowiem łuki wyrażone w stopniach, nigdy i do żadnéj potęgi nie bywają podnoszone, ale ponieważ $\text{dost.}\,\alpha$ i $\text{wst.}\,\alpha$ wyrażają jak wiemy stósunki tych linij do jednostki, a zatém liczby, przeto rzeczone wyrażenia znaczą rzeczywiście podniesienie tychże liczb do potęgi drugiéj i pisać się powinny $(\text{dost.}\,\alpha)^2$ i $(\text{wst.}\,\alpha)^2$ lub $\text{dost.}^2\alpha$ i $\text{wst.}\alpha^2$; lecz gdy się już prawie powszechnie zgodzono na pisanie takie jakiego wyżéj użyliśmy, zatém i my tak znaczyć będziemy w dalszym ciągu potęgi linij trygonometrycznych. Po téj uwadze wróćmy do naszego zrównania. Ponieważ $\text{wst.}(\frac{1}{2}\pi-\alpha)=\text{dost.}\,\alpha$ a w przypadku gdy $\alpha=0$
jest $\text{wst.}\,\frac{1}{2}\pi=\text{wst.}\,90^0=\text{dost.}\,0$,
zatém $\text{dost.}\,0=\text{wst.}\,90^0=\text{dost.}\,0^2+\text{wst.}\,0^2=\text{wst.}\,90^2+\text{wst.}\,0^2$
Lecz $\text{wst.}\,0=0$, więc także $\text{wst.}\,0^2=0$ a następnie

$$\text{wst.}\,90^0=\text{wst.}\,90^2.$$

Dzieląc obie strony przez wst. 90,
znajdziemy $1=\text{wst.}\,90^0=\text{dost.}\,0^0$,
przeto $1=\text{dost.}\,\alpha^2+\text{wst.}\,\alpha^2$ . . . . . (5)
t. j. *summa kwadratów z dostawy i wstawy jakiegokolwiek kąta równa się zawsze 1*, co też wprost z trójkąta prostokątnego, w którym przeciwprostokątnia wzięta jest za 1, według twierdzenia PITAGORESA, wyprowadzić można. Albo też: z po-

wyższego już wiadomo, że dost.$0^0 = 1$ więc i t. d. Przedsięwziąwszy atoli wywód wzorów trygonometrycznych więcéj drogą analityczną t. j. rachunkową, niż geometryczną, użyłem powyższego sposobu.

Z ostatniego wzoru wypada

$$\text{dost.}\,\alpha = \sqrt{1 - \text{wst.}\,\alpha^2} \text{ i wst.}\,\alpha = \sqrt{1 - \text{dost.}\,\alpha^2},$$

mając więc jednę z tych linij, można znaleść drugą. Z tych dwóch wzorów czytamy jeszcze wprost to co się mówiło w §§. 6 i 7 a mianowicie, że największa ważność jaką mieć może tak wstawa jako i dostawa jest$=1$, piérwsza gdy dost.$\alpha = 0$ czyli gdy $\alpha = \frac{1}{2}\pi$, a druga gdy wst.$\alpha = 0$ czyli gdy $\alpha = 0$ i wtedy wypadnie dost.$0 = 1$, wst. $\frac{1}{2}\pi = 1$ jak już wiadomo. Daléj czytamy z tychże samych wzorów, że gdy jedna z tych linij rośnie, druga maleć musi.

§. 11.

Powiedzieliśmy w §. 6, iż znając jednę którąkolwiek z funkcyj trygonometrycznych, łatwo za jéj pomocą znajdziemy wszystkie inne. Zobaczmy jakim sposobem.

W §. 5 dowiedliśmy, że sty.$\alpha = \dfrac{\text{wst.}\,\alpha}{\text{dost.}\,\alpha}$, sie. $\alpha = \dfrac{1}{\text{dost.}\,\alpha}$ a w poprzedzającym §. że dost.$\alpha^2 +$ wst. $\alpha^2 = 1$. Dzieląc tu obie strony przez dost.α^2, znajdziemy

$$1 + \text{sty.}\,\alpha^2 = \frac{1}{\text{dost.}\,\alpha^2} = \text{sie.}\,\alpha^2.$$

Cztery te zrównania są dostateczne do wyrażenia każdéj z linij trygonometrycznych przez jednę którąkolwiek z nich. I tak niech znana będzie wstawa jakiego kąta, a chcemy znaleść inne funkcye wyrażone przez wstawę, tedy będzie:

$$\text{dost}\alpha = \sqrt{1 - \text{wst}\alpha^2},\ \text{sty}\alpha = \frac{\text{wst}\,\alpha}{\sqrt{1 - \text{wst}\alpha^2}},\ \text{sie.}\alpha = \frac{1}{\sqrt{1 - \text{wst}\alpha^2}}$$

$$\text{doty.}\,\alpha = \frac{1}{\text{wst.}\,\alpha} = \frac{\sqrt{1 - \text{wst.}\alpha^2}}{\text{wst}\alpha},\ \text{dosie.}\alpha = \frac{1}{\text{wst.}\alpha},$$

$$\text{wst. odwr. } \alpha = 1 - \sqrt{1 - \text{wst}\alpha^2},\ \text{dost. odwr.}\alpha = 1 - \text{wst}\,\alpha.$$

Niech powtóre dana będzie styczna jakiego kąta, a żądamy otrzymać inne przez tęż styczną wyrażone, tedy z powyższych cztérech zrównań mamy:

$$\text{sie.}\alpha=\sqrt{1+\text{sty.}\alpha^2},\ \text{dost.}\alpha=\frac{1}{\text{sie.}\alpha}=\frac{1}{\sqrt{1+\text{sty.}\alpha^2}}.$$

Ze zrównania $\text{sty.}\alpha=\frac{\text{wst.}\,\alpha}{\text{dost.}\,\alpha}$ wypada

$$\text{wst.}\alpha=\text{sty.}\alpha\text{dost.}\alpha=\frac{\text{sty.}\alpha}{\sqrt{1+\text{sty.}\alpha^2}},\quad \text{doty.}\,\alpha=\frac{1}{\text{sty.}\alpha}$$

$$\text{dosie.}\alpha=\frac{1}{\text{wst}\,\alpha}=\frac{\sqrt{1+\text{sty.}\alpha^2}}{\text{sty.}\alpha}\ \text{ i t. d.}$$

§. 12.

We wzorze (1) połóżmy $\alpha=\beta$, a znajdziemy

$$\text{wst.}2\alpha=2\text{wst.}\alpha\,\text{dost.}\alpha\ \ldots\ldots (6).$$

Dawszy temu wzorowi kształt $\text{wst.}2\alpha=2\text{wst.}\alpha\,\text{wst.}\,(\frac{1}{2}\pi-\alpha)$, bo $\text{dost.}\alpha=\text{wst.}(\frac{1}{2}\pi-\alpha)$ §. 6, możemy z niego znaleść $\text{wst.}\alpha$ w przypadku gdy $\text{wst}2\alpha=\text{wst.}\,(\frac{1}{2}\pi-\alpha)$ czyli w przypadku że $2\alpha=\frac{1}{2}\pi-\alpha$ albo $3\alpha=\frac{1}{2}\pi=90°$, skąd $\alpha=30°$; w takim bowiem razie wzór (6) daje $\text{wst.}60°=2\text{wst.}30°\text{wst.}60°$. Dzieląc obie strony przez $\text{wst.}60°$, będzie $1=2\text{wst.}30°$ skąd

$$\text{wst}\,30°=\tfrac{1}{2}\ \ldots\ldots (7).$$

Ale i wzór (5) da nam także $\text{wst.}\alpha$ w przypadku gdy $\text{wst.}\alpha=\text{dost.}\alpha=\text{wst.}(\frac{1}{2}\pi-\alpha)$, t. j. w przypadku gdy $\alpha=\frac{1}{2}\pi-\alpha$ albo $2\alpha=\frac{1}{2}\pi$ albo $\alpha=\frac{1}{4}\pi=45°$, wtedy bowiem będzie z tegoż wzoru $2\text{wst.}45^2=1$

skąd

$$\text{wst}\,45°=\sqrt{\tfrac{1}{2}}=\tfrac{1}{2}\sqrt{2}\ \ldots\ldots (8).$$

Ponieważ $60°=2.30°$, tudzież $r=1$ jest cięciwą łuku $60°$, zaś $\frac{1}{2}$ jest wstawą łuku $30°$, przeto tu jasno widzimy, że $\text{wst.}\,30°$ jest równa połowie cięciwy do dwa razy większego łuku należącéj.

Ze zrównania (6) wypada $\text{wst.}60°=2\text{wst.}30°.\ \text{dost.}\ 30°$.

A że $\text{wst.}\,30°=\frac{1}{2}$, więc $\text{dost.}\,30°=\sqrt{1-\frac{1}{4}}=\frac{1}{2}\sqrt{3}$

zatém $\text{wst.}\,60°=2.\frac{1}{2}.\frac{1}{2}\sqrt{3}=\frac{1}{2}\sqrt{3}$

jak być rzeczywiście powinno, bo $30°+60°=90°$.

Połóżmy także we wzorze (3) $\alpha=\beta$, a otrzymamy

$$\text{dost.}\,2\alpha=\text{dost.}\alpha^2-\text{wst.}\alpha^2\ \ldots\ldots (9).$$

A że $1 = \text{dost.}\alpha^2 + \text{wst.}\alpha^2$
zatém dodając drugie zrównanie do piérwszego, a potém odejmując piérwsze od drugiego, otrzymamy

$$1 + \text{dost.}\alpha = 2\text{dost.}\tfrac{1}{2}\alpha^2 \qquad 1 - \text{dost.}\alpha = 2\text{wst.}\tfrac{1}{2}\alpha^2$$

skąd

$$\text{dost.}\tfrac{1}{2}\alpha = \sqrt{\frac{1+\text{dost.}\alpha}{2}} \quad \ldots\ldots (10)$$

$$\text{wst.}\tfrac{1}{2}\alpha = \sqrt{\frac{1-\text{dost.}\alpha}{2}} \quad \ldots\ldots (11)$$

Te wzory służą jak widzimy do znalezienia wstawy i dostawy połowy kąta skoro jego dostawa jest znaną.

Wzory (1) i (2) jako też (3) i (4) raz dodajmy a drugi raz odejmijmy od siebie, tedy znajdziemy:

$$\left.\begin{array}{ll} & \text{wst.}(\alpha+\beta) + \text{wst.}(\alpha-\beta) = 2\,\text{wst.}\alpha\ \text{dost.}\beta \\ & \text{wst.}(\alpha+\beta) - \text{wst.}(\alpha-\beta) = 2\,\text{dost.}\alpha\ \text{wst.}\beta \\ & \text{dost.}(\alpha+\beta) + \text{dost.}(\alpha-\beta) = 2\,\text{dost.}\alpha\ \text{dost.}\beta \\ & \text{dost.}(\alpha+\beta) - \text{dost.}(\alpha-\beta) = -\,2\,\text{wst.}\alpha\,\text{wst.}\beta \\ \text{albo} & \text{dost.}(\alpha-\beta) - \text{dost.}(\alpha+\beta) = 2\,\text{wst.}\alpha\ \text{wst.}\beta \end{array}\right\} \ldots\ldots (A).$$

Z piérwszego i trzeciego z tych ostatnich zrównań wypada

$$\left.\begin{array}{l} \text{wst.}(\alpha+\beta) = 2\text{wst.}\alpha\,\text{dost.}\beta - \text{wst.}(\alpha-\beta) \\ \text{dost.}(\alpha+\beta) = 2\text{dost.}\alpha\,\text{dost.}\beta - \text{dost.}(\alpha-\beta) \end{array}\right\} \ldots\ldots (B).$$

Położywszy tu $n\alpha$ za α i $\beta = \alpha$,
skąd $\alpha+\beta = (n+1)\alpha$, $\alpha-\beta = (n-1)\alpha$, będzie

$$\text{wst.}(n+1)\alpha = 2\text{wst.}n\alpha\,\text{dost.}\alpha - \text{wst.}(n-1)\alpha \quad \ldots (12)$$

$$\text{dost.}(n+1)\alpha = 2\text{dost.}n\alpha\,\text{dost.}\alpha - \text{dost.}(n-1)\alpha \quad \ldots (13).$$

Wzory te posłużą nam do obrachowania wstaw i dostaw kątów wielokrotnych postępujących w szeregu arytmetycznym, α, 2α, 3c, 4α, i t. d. skoro wiadome są wstawa i dostawa pojedynczego kąta α. Jakoż położywszy kolejno $n = 1$, 2, 3, 4, 5 . . . . . otrzymamy

$$\text{wst.}2\alpha = 2\text{wst.}\alpha\,\text{dost.}\alpha$$

$$\text{wst.}3\alpha = 2\text{wst.}2\alpha\,\text{dost.}\alpha - \text{wst.}\alpha$$

$$= 2\,.\,2\,\text{wst.}\alpha\,\text{dost.}\alpha^2 - \text{wst.}\alpha = 3\text{wst.}\alpha - 4\text{wst.}\alpha^3$$

$$\text{bo dost.}\alpha^2 = 1 - \text{wst.}\alpha^2$$

$$\text{wst.}4\alpha = 2\text{wst.}3\alpha\,\text{dost}\alpha - \text{wst.}2\alpha = 2(3\text{wst.}\alpha - 4\text{wst.}\alpha^3)\text{dost.}\alpha$$

$$- 2\text{wst.}\alpha\,\text{dost.}\alpha = (4\text{wst.}\alpha - 8\text{wst.}\alpha^3)\text{dost.}\alpha$$

$$\text{wst}\,5\alpha = 2\text{wst}\,4\alpha\,\text{dost}\,\alpha - \text{wst}\,3\alpha$$
$$= 5\text{wst}\alpha - 20\text{wst}\alpha^3 + 16\,\text{wst}\alpha^5$$
. . . .
$$\text{wst}n\alpha = 2\text{wst}\,(n-1)\,\alpha\,\text{dost}\alpha - \text{wst}\,(n-2)\alpha$$

i podobnie

$\text{dost}2\alpha = 2\text{dost.}^2\alpha - 1 = 1 - 2\text{wst}\alpha^2$, kładąc $1 - \text{wst}\alpha^2$ za $\text{dost}\alpha^2$

$\text{dost}3\alpha = 2\text{dost}2\alpha.\text{dost}\alpha - \text{dost}\alpha = (1-4\text{wst}\alpha^2)\text{dost}\alpha = 4\text{dost}\alpha^3 - 3\,\text{dost}\alpha$

$\text{dost}4\alpha = 2\text{dost}3\alpha\,\text{dost}\,\alpha - \text{dost}2\,\alpha = 8\,(\text{dost}\alpha^2 - 1)\,\text{dost}\alpha^2 + -1$

$\text{dost}5\alpha = 2\text{dost}4\alpha\,\text{dost}\,\alpha - \text{dost}\,3\alpha = 4\,(3 - 4\text{dost}\alpha^2)\,\text{dost}\alpha^3$

. . . .

$\text{dost}n\alpha = 2\text{dost}\,(n-1)\alpha\text{dost}\alpha - \text{dost}\,(n-2)\,\alpha.$

Wzorom (12) i (13) można do rachunku nadać następujący wygodniejszy kształt

$\text{wst}\,(n+1)\alpha = \text{wst}n\beta \times 2\text{dost}\,\alpha + \text{wst}\,(n-1)\,\alpha \times -1$ . . . (12')

$\text{dost}\,(n+1)\beta = \text{dost}n\alpha \times 2\text{dost}\,\alpha + \text{dost}(n-1)\,\alpha \times -1$ . . (13')

z którego widzimy, iż aby mieć wstawę i dostawę jakiéjkolwiek wielokrotności $(n+1)\alpha$ kąta α, potrzeba rozmnożyć wstawę i dostawę tuż poprzedzającéj wielokrotności $n\alpha$ przez ilość stałą $2\text{dost}\alpha$, a do tych iloczynów dodać do piérwszego wstawę a do drugiego dostawę przedpoprzedniéj wielokrotności z przeciwnym znakiem.

Jak łatwo jest rachować według tych wzorów wstawy i dostawy wielokrotnych kątów, zobaczmy na przykładzie.

Niech będzie $\alpha = 1^\circ$, położywszy kolejno $n = 1, 2, 3, \ldots$ otrzymamy:

$$\text{wst}\,2^\circ = \text{wst}\,1^\circ \times 2\text{dost}1^\circ - 0$$
$$\text{dost}2^\circ = \text{dost}\,1^\circ \times 2\text{dost}1^\circ + 1 \times -1$$
$$\text{wst}\,3^\circ = \text{wst}\,2^\circ \times 2\text{dost}1^\circ + \text{wst}\,1^\circ \times -1$$
$$\text{dost}3^\circ = \text{dost}2^\circ \times 2\text{dost}1^\circ + \text{dost}1^\circ \times -1$$
$$\text{wst}\,4^\circ = \text{wst}\,3^\circ \times 2\text{dost}1^\circ + \text{wst}\,2^\circ \times -1$$
$$\text{dost}4^\circ = \text{dost}3^\circ \times 2\text{dost}1^\circ + \text{dost}2^\circ \times -1$$
$$\text{wst}\,5^\circ = \text{wst}\,4^\circ \times 2\text{dost}1^\circ + \text{wst}\,3^\circ \times -1$$
$$\text{dost}5^\circ = \text{dost}4^\circ \times 2\text{dost}1^\circ + \text{dost}3^\circ \times -1$$

i t. d. i t. d.

Gdybyśmy więc znali wst. 1°, ze zrównania $\text{dost}1^\circ = \sqrt{1 - \text{wst.}1^2}$ znajdziemy dost. 1°, a z poprzedzających wzorów wstawy i dostawy kątów całkowitych stopni.

W piérwszém i czwartém ze zrównań (A) położywszy $\alpha=30^\circ$, ponieważ $\text{wst}\,30^\circ=\frac{1}{2}$, otrzymamy

$$\text{wst}\,(30^\circ+\beta)+\text{wst}\,(30^\circ-\beta)=\text{dost}\,\beta$$
$$\text{dost}(30-\beta)-\text{dost}(30^\circ+\beta)=\text{wst}\,\beta$$

skąd
$$\text{wst}\,(30^\circ+\beta)=\text{dost}\beta-\text{wst}\,(30^\circ-\beta)\;.\;.\;.\;.\;.\quad(14)$$
$$\text{dost}(30^\circ+\beta)=\text{dost}\,(30^\circ-\beta)-\text{wst}\,\beta\;.\;.\;.\;.\;.\quad(15)$$

Dwa te wzory uczą nas, że mając porachowane wstawy i dostawy wszystkich kątów od 0° do 30°, znajdziemy przy ich pomocy wstawy i dostawy kątów od 30° do 45° (bo jak wiemy nie potrzebujemy daléj rachować §. 8) przez proste odejmowanie. Tak np.

$$\text{wst}\,36^\circ=\text{wst}\,(30^\circ+6)=\text{dost}6^\circ-\text{wst}\,24^\circ,$$
$$\text{dost}36^\circ=\text{dost}(30^\circ+6^\circ)=\text{dost}24^\circ-\text{wst}\,6^\circ$$
$$\text{wst}\,40^\circ=\qquad\text{dost}10^\circ-\text{wst}\,20^\circ,$$
$$\text{dost}40^\circ=\qquad\text{dost}20^\circ-\text{wst}\,10^\circ$$
$$\text{wst}\,44^\circ=\qquad\text{dost}14-\text{wst}\,30^\circ$$
$$\text{dost}44^\circ=\qquad\text{dost}30^\circ-\text{wst}\,14^\circ$$

i t. d   i t. d

§. 13.

Wzory (A) poprzedzającego §, można jeszcze następnie napisać:

$$\text{wst}\,\alpha\,\text{dost}\beta=\tfrac{1}{2}\,\text{wst}\,(\alpha+\beta)+\tfrac{1}{2}\,\text{wst}\,(\alpha-\beta)\;.\;.\;.\;.\;.\;.\quad(16)$$
$$\text{dost}\alpha\,\text{wst}\beta=\tfrac{1}{2}\,\text{wst}\,(\alpha+\beta)-\tfrac{1}{2}\,\text{wst}\,(\alpha-\beta)\;.\;.\;.\;.\;.\;.\quad(17)$$
$$\text{dost}\alpha\,\text{dost}\beta=\tfrac{1}{2}\,\text{dost}(\alpha+\beta)+\tfrac{1}{2}\text{dost}(\alpha-\beta)\;.\;.\;.\;.\;.\;.\quad(18)$$
$$\text{wst}\,\alpha\,\text{wst}\beta=\tfrac{1}{2}\,\text{dost}(\alpha-\beta)-\tfrac{1}{2}\text{dost}(\alpha+\beta)\;.\;.\;.\;.\;.\;.\quad(19)$$

które nam służyć będą w częstych przerobieniach trygonometrycznych wzorów, do zamienienia iloczynu dwóch wstaw lub dostaw, albo téż iloczynu z wstawy i dostawy na summę lub różnicę wstaw lub dostaw tychże kątów.

Położywszy zaś w tychże wzorach (A), $\alpha+\beta=\eta$ i $\alpha-\beta=\vartheta$, skąd $\alpha=\frac{\eta+\vartheta}{2}$, $\beta=\frac{\eta-\vartheta}{2}$, znajdziemy

$$\text{wst}\,\eta + \text{wst}\,\vartheta = 2\text{wst}\frac{\eta+\vartheta}{2}\,\text{dost}\,\frac{\eta-\vartheta}{2} \quad \ldots\ldots \quad (20)$$

$$\text{wst}\,\eta - \text{wst}\,\vartheta = 2\text{dost}\frac{\eta+\vartheta}{2}\;\text{wst}\;\frac{\eta-\vartheta}{2} \quad \ldots\ldots \quad (21)$$

$$\text{dost}\eta + \text{dost}\vartheta = 2\text{dost}\frac{\eta+\vartheta}{2}\;\text{dost}\;\frac{\eta-\vartheta}{2} \quad \ldots\ldots \quad (22)$$

$$\text{dost}\eta - \text{dost}\vartheta = -2\text{wst}\,\frac{\eta+\vartheta}{2}\,\text{wst}\,\frac{\eta-\vartheta}{2} = 2\text{wst}\,\frac{\eta+\vartheta}{2}\text{wst}\,\frac{\vartheta-\eta}{2} \; (23).$$

Te wzory są wzajemnemi poprzedzających i posłużą nam do zamiany summy lub różnicy dwóch wstaw lub dostaw na iloczyn, co w rachunku logarytmicznym, którego się w Trygonometryi prawie wyłącznie używa, wielkiéj jest wagi.

Dzieląc zrównanie (20) przez (21) a (22) przez (23) znajdziemy

$$\frac{\text{wst}\,\eta + \text{wst}\,\vartheta}{\text{wst}\,\eta - \text{wst}\,\vartheta} = \text{sty}\,\frac{\eta+\vartheta}{2}\,\text{doty}\,\frac{\eta-\vartheta}{2} = \frac{\text{sty}\,\frac{\eta+\vartheta}{2}}{\text{sty}\,\frac{\eta-\vartheta}{2}} \;\S.\,6\ldots (24)$$

$$\frac{\text{dost}\,\eta + \text{dost}\,\vartheta}{\text{dost}\,\eta - \text{dost}\,\vartheta} = -\,\text{doty}\,\frac{\eta+\vartheta}{2}\,\text{doty}\,\frac{\eta-\vartheta}{2}$$

$$= -\frac{1}{\text{sty}\frac{\eta+\vartheta}{2}\;\text{sty}\;\frac{\eta-\vartheta}{2}} = \frac{1}{\text{sty}\,\frac{\eta+\vartheta}{2}\,\text{sty}\,\frac{\vartheta-\eta}{2}} \quad \ldots\ldots \quad (25)$$

Dzieląc zaś każde z dwóch piérwszych przez każde. z dwóch drugich, otrzymamy

$$\frac{\text{wst}\,\eta \pm \text{wst}\,\vartheta}{\text{dost}\,\eta + \text{dost}\,\vartheta} = \text{sty}\,\frac{\eta\pm\vartheta}{2}, \qquad \frac{\text{wst}\,\eta \pm \text{wst}\,\vartheta}{\text{dost}\eta - \text{dost}\vartheta} = -\,\text{doty}\,\frac{\eta\mp\vartheta}{2}.$$

W (24) wzorze położywszy $\eta = \frac{1}{2}\pi$ znajdziemy:

$$\frac{1+\text{wst}\vartheta}{1-\text{wst}\vartheta} = \text{sty}\,(\tfrac{1}{4}\pi + \tfrac{1}{2}\vartheta)\;\text{doty}\;(\tfrac{1}{4}\pi - \tfrac{1}{2}\vartheta)$$

$$= \text{sty}(45^\circ + \tfrac{1}{2}\vartheta)\;\text{doty}\;(45^\circ - \tfrac{1}{2}\vartheta) \quad \ldots\ldots \quad (26).$$

A że $\quad \text{doty}\,(45^\circ - \frac{1}{2}\vartheta) = \text{sty}\,(45^\circ + \frac{1}{2}\vartheta)$

bo $\quad (45^\circ - \frac{1}{2}\vartheta) + (45^\circ + \frac{1}{2}\vartheta) = 90^\circ,$

zatém
$$\frac{1+\text{wst}\,\vartheta}{1-\text{wst}\,\vartheta} = \text{sty}\,(45^\circ + \tfrac{1}{2}\vartheta)^2 = \text{doty}\,(45^\circ - \tfrac{1}{2}\vartheta)^2 \quad .\; (27).$$

W (25) kładąc $\eta=0$, otrzymamy

$$\frac{1+\text{dost}\,\vartheta}{1-\text{dost}\,\vartheta}=-\text{doty}\tfrac{1}{2}\vartheta\,\text{doty}(-\tfrac{1}{2}\vartheta)$$

$$=\text{doty}\tfrac{1}{2}\vartheta\,.\,\text{doty}\tfrac{1}{2}\vartheta=\text{doty}\tfrac{1}{2}\vartheta^2 \quad \ldots\ldots \quad (28).$$

Rozmnożywszy wzory (1) przez (2) a (3) przez (4), znajdziemy

$$\text{wst}(\alpha+\beta)\,\text{wst}(\alpha-\beta)=\text{wst}\,\alpha^2\text{dost}\,^2\beta-\text{dost}\alpha^2\,\text{wst}\,\beta^2$$

$$\text{dost}(\alpha+\beta)\,\text{dost}(\alpha-\beta)=\text{dost}\alpha^2\,\text{dost}\beta^2-\text{wst}\,\alpha^2\,\text{wst}\,\beta^2.$$

Lecz ponieważ $\text{dost}\,\beta^2=1-\text{wst}\,\beta^2$ i $\text{dost}\,\alpha^2=1-\text{wst}\,\alpha^2$, tudzież $\text{wst}\alpha^2=1-\text{dost}\alpha^2$ i $\text{wst}\,\beta^2=1-\text{dost}\,\beta^2$, zatém z piérwszego z tych ostatnich zrównań, kładąc naprzód ważności za $\text{dost}\,\beta^2$ i $\text{dost}\,\alpha^2$, a potém za $\text{wst}\,\alpha^2$ i $\text{wst}\,\beta^2$, otrzymamy

$$\text{wst}(\alpha+\beta)\,\text{wst}(\alpha-\beta)=\text{wst}\,\alpha^2-\text{wst}\beta^2=\text{dost}\,\beta^2-\text{dost}\alpha^2 \quad \ldots \quad (29)$$

i podobnież z drugiego

$$\text{dost}(\alpha+\beta)\,\text{dost}(\alpha-\beta)=\text{dost}\,\alpha^2-\text{wst}\beta^2$$

$$=\text{dost}\,\beta^2-\text{wst}\,\alpha^2=1-\text{wst}\,\alpha^2-\text{wst}\,\beta^2 \quad \ldots\ldots \quad (30).$$

Z ostatniego wypada $\text{wst}\alpha^2+\text{wst}\beta^2=1-\text{dost}(\alpha+\beta)\text{dost}(\alpha-\beta)$ (31).

§. 14.

Przejdźmy teraz do innych funkcyj trygonometrycznych, a naprzód zobaczmy takowe dla kątów większych niż 180° i większych lub mniejszych niż 360°. Na ten koniec używając ważności na wstawę i dostawę w §. 8 dowiedzionych, jako też przypomniawszy sobie że $\text{sty.}\,\alpha=\dfrac{\text{wst}\alpha}{\text{dost}\alpha}$,

$\text{doty}\,\alpha=\dfrac{\text{dost}\alpha}{\text{wst}\,\alpha}=\dfrac{1}{\text{sty.}\,\alpha}$, $\text{sie.}\,\alpha=\dfrac{1}{\text{dost}\alpha}$ a $\text{dosie}\,\alpha=\dfrac{1}{\text{wst}\,\alpha}$,

znajdziemy:

$$\text{sty}(2n\pi-\alpha)=\frac{\text{wst}(2n\pi-\alpha)}{\text{dost}(2n\pi-\alpha)}=\frac{-\text{wst}\,\alpha}{\text{dost}\,\alpha}=-\text{sty}\,\alpha,$$

$$\text{doty}(2n\pi-\alpha)=\frac{1}{\text{sty}(2n\pi-\alpha)}=\frac{1}{-\text{sty}\alpha}=-\text{doty}\,\alpha$$

$$\text{sty}(2n\pi+\alpha)=\frac{\text{wst}(2n\pi+\alpha)}{\text{dost}(2n\pi+\alpha)}=\frac{\text{wst}\,\alpha}{\text{dost}\,\alpha}=\text{sty}\,\alpha,$$

$$\text{doty}(2n\pi+\alpha)=\frac{1}{\text{sty}(2n\pi+\alpha)}=\frac{1}{\text{sty}\,\alpha}=\text{doty}\,\alpha$$

$$\text{sty}\{(2n+1)\pi-\alpha\}=\frac{\text{wst}\{(2n+1)\pi-\alpha\}}{\text{dost}\{(2n+1)\pi-\alpha\}}=\frac{\text{wst}\alpha}{-\text{dost}\alpha}=-\text{sty}\alpha,$$

$$\text{doty}\{(2n+1)\pi-\alpha\}=\frac{1}{\text{sty}\{(2n+1)\pi-\alpha\}}=\frac{1}{-\text{sty}\alpha}=-\text{doty}\alpha$$

$$\text{sty}\,\{(2n+1)\pi+\alpha\}=\frac{\text{wst}\,\{(2n+1)\pi+\alpha\}}{\text{dost}\{(2n+1)\pi+\alpha\}}=\frac{-\text{wst}\,\alpha}{-\text{dost}\,\alpha}=\text{sty}\,\alpha,$$

$$\text{doty}\{(2n+1)\pi+\alpha\}=\frac{1}{\text{sty}\,\{(2n+1)\pi+\alpha\}}=\frac{1}{\text{sty}\,\alpha}=\text{doty}\,\alpha$$

$$\text{sie}\,(2n\pi-\alpha)=\frac{1}{\text{dost}\,(2n\pi-\alpha)}=\frac{1}{\text{dost}\alpha}=\text{sie}\,\alpha,$$

$$\text{dosie}\,(2n\pi-\alpha)=\frac{1}{\text{wst}\,(2n\pi-\alpha)}=\frac{1}{-\text{wst}\alpha}=-\text{dosie}\alpha$$

$$\text{sie}\,(2n\pi+\alpha)=\frac{1}{\text{dost}\,(2n\pi+\alpha)}=\frac{1}{\text{dost}\alpha}=\text{sie}.\,\alpha,$$

$$\text{dosie}\,(2n\pi+\alpha)=\frac{1}{\text{wst}\,(2n\pi+\alpha)}=\frac{1}{\text{wst}\alpha}=\text{dosie}\alpha$$

$$\text{sie}\,\{(2n+1)\pi-\alpha\}=\frac{1}{\text{dost}\{(2n+1)\pi-\alpha\}}=\frac{1}{-\text{dost}\alpha}=-\text{sie}\alpha,$$

$$\text{dosie}\{(2n+1)\pi-\alpha\}=\frac{1}{\text{wst}\,\{(2n+1)\pi-\alpha\}}=\frac{1}{\text{wst}\,\alpha}=\text{dosie}\,\alpha$$

$$\text{sie}\,\{(2n+1)\pi+\alpha\}=\frac{1}{\text{dost}\{(2n+1)\pi+\alpha\}}=\frac{1}{-\text{dost}\alpha}=-\text{sie}\alpha,$$

$$\text{dosie}\{(2n+1)\pi+\alpha\}=\frac{1}{\text{wst}\{(2n+1)\pi+\alpha\}}=\frac{1}{-\text{wst}\alpha}=-\text{dosie}\alpha.$$

Ponieważ $\quad \text{wst}\,\tfrac{1}{4}\pi=\text{wst}.\,45^\circ=\text{dost}\,45^\circ,$

zatém $\quad \text{sty}\,\tfrac{1}{4}\pi=\dfrac{\text{wst}\,\tfrac{1}{4}\pi}{\text{dost}\tfrac{1}{4}\pi}=1.$

Wiémy też z §. 11 że $\text{wst}\,\alpha=\dfrac{\text{sty}\,\alpha}{\sqrt{1+\text{sty}\alpha^2}}$ a $\text{dost}\,\alpha=\dfrac{1}{\sqrt{1+\text{sty}\alpha^2}}$, przeto położywszy tu $\tfrac{1}{2}\pi-\alpha$ za α, znajdziemy

$$\text{wst}\,(\tfrac{1}{2}\pi-\alpha)=\text{dost}\,\alpha=\frac{\text{sty}\,(\tfrac{1}{2}\pi-\alpha)}{\sqrt{1+\text{sty}(\tfrac{1}{2}\pi-\alpha)^2}}=\frac{\text{doty}\,\alpha}{\sqrt{1+\text{doty}\alpha^2}}$$

$$\text{dost}\,(\tfrac{1}{2}\pi-\alpha)=\text{wst}\,\alpha=\frac{1}{\sqrt{1+\text{sty}(\tfrac{1}{2}\pi-\alpha)^2}}=\frac{1}{\sqrt{1+\text{doty}\alpha^2}}.$$

§. 15.

Szukajmy teraz stycznéj summy lub różnicy dwóch kątów. Na ten koniec podzieliwszy wzór (1) przez (3) a (2) przez (4) będzie

$$\frac{\text{wst}\,(\alpha+\beta)}{\text{dost}\,(\alpha+\beta)}=\text{sty}\,(\alpha+\beta)=\frac{\text{wst}\,\alpha\,\text{dost}\,\beta+\text{dost}\,\alpha\,\text{wst}\,\beta}{\text{dost}\,\alpha\,\text{dost}\,\beta-\text{wst}\,\alpha\,\text{wst}\,\beta}$$

$$\frac{\text{wst}\,(\alpha-\beta)}{\text{dost}\,(\alpha-\beta)}=\text{sty}\,(\alpha-\beta)=\frac{\text{wst}\,\alpha\,\text{dost}\,\beta-\text{dost}\,\alpha\,\text{wst}\,\beta}{\text{dost}\,\alpha\,\text{dost}\,\beta+\text{wst}\,\alpha\,\text{wst}\,\beta}.$$

W tych ostatnich wyrażeniach dzieląc licznika i mianownika przez $\text{dost}\,\alpha\,\text{dost}\,\beta$ znajdziemy

$$\text{sty}\,(\alpha+\beta)=\frac{\text{sty}\,\alpha+\text{sty}\,\beta}{1-\text{sty}\,\alpha\,\text{sty}\,\beta}\quad\ldots\ldots\ (32)$$

$$\text{sty}\,(\alpha-\beta)=\frac{\text{sty}\,\alpha-\text{sty}\,\beta}{1+\text{sty}\,\alpha\,\text{sty}\,\beta}\quad\ldots\ldots\ (33).$$

Ten ostatni wzór otrzymać téż można z poprzedzającego kładąc tylko $-\alpha$ za α. Ponieważ ogólnie jest $\text{doty}\,x=\frac{1}{\text{sty}\,x}$, zatém

$$\text{doty}\,(\alpha+\beta)=\frac{1}{\text{sty}\,(\alpha+\beta)}=\frac{1-\text{sty}\,\alpha\,\text{sty}\,\beta}{\text{sty}\,\alpha+\text{sty}\,\beta}\quad\ldots\ldots\ (34).$$

$$\text{doty}\,(\alpha-\beta)=\frac{1}{\text{sty}\,(\alpha-\beta)}=\frac{1+\text{sty}\,\alpha\,\text{sty}\,\beta}{\text{sty}\,\alpha-\text{sty}\,\beta}\quad\ldots\ldots\ (35).$$

Ponieważ $\text{sty}\,\alpha=\frac{\text{wst}\,\alpha}{\text{dost}\,\alpha}$ a $\text{doty}\,\alpha=\frac{\text{dost}\,\alpha}{\text{wst}\,\alpha}$, zatém

$$\text{sty}\,\alpha+\text{doty}\,\alpha=\frac{\text{wst}\,\alpha}{\text{dost}\,\alpha}+\frac{\text{dost}\,\alpha}{\text{wst}\,\alpha}=\frac{\text{wst}\,\alpha^2+\text{dost}\,\alpha^2}{\text{wst}\,\alpha\,\text{dost}\,\alpha}$$

$$=\frac{1}{\text{wst}\,\alpha\,\text{dost}\,\alpha}=\frac{2}{2\text{wst}\,\alpha\,\text{dost}\,\alpha}=\frac{2}{\text{wst}\,2\alpha}=2.\frac{1}{\text{wst}\,2\alpha}=2\text{dosie}\,2\alpha\,..(36)$$

tudzież $\quad\text{doty}\,\alpha-\text{sty}\,\alpha=\frac{\text{dost}\,\alpha}{\text{wst}\,\alpha}-\frac{\text{wst}\,\alpha}{\text{dost}\,\alpha}=\frac{\text{dost}\,\alpha^2-\text{wst}\,\alpha^2}{\text{wst}\,\alpha\,\text{dost}\,\alpha}$

$$=\frac{\text{dost}\,2\alpha}{\text{wst}\,\alpha\,\text{dost}\,\alpha}=\frac{2\text{dost}\,2\alpha}{2\text{wst}\,\alpha\,\text{dost}\,\alpha}=2\times\frac{\text{dost}\,2\alpha}{\text{wst}\,2\alpha}=2\text{doty}\,2\alpha\ \ldots\ (37).$$

Z obu ostatnich wzorów wypada $\frac{\text{sty}\,\alpha+\text{doty}\,\alpha}{\text{doty}\,\alpha-\text{sty}\,\alpha}$

$$=\frac{2\text{dosie}\,2\alpha}{2\text{doty}\,2\alpha}=\frac{1}{\text{wst}\,2\alpha}\cdot\frac{\text{wst}\,2\alpha}{\text{dost}\,2\alpha}=\frac{1}{\text{dost}\,2\alpha}=\text{sie}\,2\alpha\quad\ldots\ (38).$$

Te wzory przydatnemi być mogą do obrachowania stycznéj i siecznéj od 0° do 90°.

Według wzorów na wstawy i dostawy kątow wielokrotnych §. 12 jest

$$\text{dost.}\,2\alpha = 2\text{dost.}\alpha^2 - 1;\ \text{lecz dost.}\alpha = \frac{1}{\sqrt{1-\text{sty.}\alpha^2}},$$

więc $$\text{dost.}2\alpha = \frac{2}{1+\text{sty.}\alpha^2} - 1 = \frac{1-\text{sty.}\alpha^2}{1+\text{sty.}\alpha^2}$$

$$\text{wst.}2\,\alpha = 2\text{wst.}\,\alpha\,\text{dost.}\,\alpha = \frac{2\text{wst.}\,\alpha\text{dost.}\alpha^2}{\text{dost.}\,\alpha}$$

$$= 2\,\text{sty.}\alpha\text{dost.}\alpha^2 = \frac{2\,\text{sty.}\alpha}{1+\text{sty.}\alpha^2}.$$

Chcąc teraz nawzajem wyrazić styczną przez wstawę i dostawę, mamy

$$\text{sty.}\alpha = \frac{\text{wst.}\alpha}{\text{dost.}\alpha} = \frac{2\text{wst.}\alpha\text{dost.}\alpha}{2\text{dost.}\,\alpha^2} = \frac{\text{wst.}\,2\alpha}{1+\text{dost.}2\alpha}\quad §.\ 12.$$

albo $$\text{sty.}\alpha = \frac{\text{wst.}\alpha}{\text{dost.}\alpha} = \frac{2\text{wst.}\ \alpha^2}{2\text{wst.}\ \alpha\text{dost.}\alpha} = \frac{1-\text{dost.}\,2\alpha}{\text{wst.}\ 2\alpha}.$$

Napiszmy tu $\frac{1}{2}\alpha$ za α, a znajdziemy

$$\text{sty.}\,\tfrac{1}{2}\alpha = \frac{\text{wst.}\alpha}{1+\text{dost.}\alpha} = \frac{1-\text{dost.}\,\alpha}{\text{wst.}\ \alpha}\quad .\ .\ .\ .\ .\ (39).$$

Te ważności otrzymać także można z wzorów (10) i (11). Jest bowiem

$$\frac{\text{wst}\ \frac{1}{2}\ \alpha}{\text{dost}\frac{1}{2}\,\alpha} = \text{sty.}\tfrac{1}{2}\,\alpha = \sqrt{\frac{1-\text{dost.}\ \alpha}{1+\text{dost.}\ \alpha}} = \sqrt{\frac{(1-\text{dost.}\,\alpha)(1+\text{dost.}\,\alpha)}{(1+\text{dost.}\,\alpha)^2}}$$

$$= \sqrt{\frac{1-\text{dost.}\,\alpha^2}{(1+\text{dost.}\,\alpha)^2}} = \frac{\text{wst.}\ \alpha}{1+\text{dost.}\,\alpha}$$

albo $$\text{sty.}\ \tfrac{1}{2}\alpha = \sqrt{\frac{1-\text{dost.}\ \alpha}{1+\text{dost.}\alpha}} = \sqrt{\frac{(1-\text{dost.}\,\alpha)^2}{(1+\text{dost.}\,\alpha)(1-\text{dost.}\alpha)}}$$

$$= \sqrt{\frac{(1-\text{dost.}\alpha)^2}{1-\text{dost.}\,\alpha^2}} = \frac{1-\text{dost.}\ \alpha}{\text{wst.}\ \alpha}.$$

Ponieważ sty. $45^\circ = 1$, więc według wzorów (32) i (33) jest

$$\text{sty.}\ (45^\circ + \alpha) = \frac{1+\text{sty.}\,\alpha}{1-\text{sty.}\,\alpha}\quad .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ (40)$$

$$\text{sty.}\,(45^\circ - \alpha) = \frac{1-\text{sty.}\,\alpha}{1+\text{sty.}\,\alpha}\quad .\ .\ .\ .\ .\ .\ (41).$$

W pierwszym z tych wzorów kładąc $\frac{1}{2}\alpha$ za α będzie

$$\text{sty.}(45^\circ+\tfrac{1}{2}\alpha)=\frac{1+\text{sty.}\frac{1}{2}\alpha}{1-\text{sty.}\frac{1}{2}\alpha}=\frac{\text{dost.}\frac{1}{2}\alpha+\text{wst.}\frac{1}{2}\alpha}{\text{dost.}\frac{1}{2}\alpha-\text{wst.}\frac{1}{2}\alpha}$$

$$=\frac{(\text{dost.}\frac{1}{2}\alpha+\text{wst.}\frac{1}{2}\alpha)^2}{\text{dost.}\frac{1}{2}\alpha^2-\text{wst.}\frac{1}{2}\alpha^2}=\frac{\text{dost.}\frac{1}{2}\alpha^2+\text{wst.}\frac{1}{2}\alpha^2+2\text{wst.}\frac{1}{2}\alpha\,\text{dost.}\frac{1}{2}\alpha}{\text{dost.}\alpha}$$

$$=\frac{1+\text{wst.}\alpha}{\text{dost.}\alpha} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (42).$$

Wzory (40) i (41) mnożąc przez siebie wypadnie

$$\text{sty.}(45^\circ+\alpha)\ \text{sty.}(45^\circ-\alpha)=1$$

skąd $\text{sty.}(45^\circ+\alpha)=\dfrac{1}{\text{sty.}(45^\circ-\alpha)}=\text{doty.}(45^\circ-\alpha)$. (43).

Z tego ostatniego wzoru czytamy tę prawdę, iż we wzorach trygonometrycznych jedno jest mnożyć przez $\text{sty.}(45^\circ+\alpha)$ lub dzielić przez $\text{sty.}(45^\circ-\alpha)$ albo mnożyć przez $\text{doty.}(45^\circ-\alpha)$..

Ponieważ $\text{sty.}\alpha+\text{sty.}\beta=\dfrac{\text{wst.}\alpha}{\text{dost.}\alpha}+\dfrac{\text{wst.}\beta}{\text{dost.}\beta}$

$$=\frac{\text{wst.}\alpha\ \text{dost.}\beta+\text{dost.}\alpha\ \text{wst.}\beta}{\text{dost}\alpha\ \text{dost.}\alpha}=\frac{\text{wst.}(\alpha+\beta)}{\text{dost.}\alpha\text{dost.}\beta}$$

tudzież $\text{sty.}\alpha-\text{sty.}\beta=\dfrac{\text{wst.}\alpha}{\text{dost.}\alpha}-\dfrac{\text{wst.}\beta}{\text{dost.}\beta}$

$$=\frac{\text{wst.}\alpha\ \text{dost.}\beta-\text{dost.}\alpha\ \text{wst.}\beta}{\text{dost.}\alpha\ \text{dost.}\beta}=\frac{\text{wst.}(\alpha-\beta)}{\text{dost.}\alpha\ \text{dost.}\beta}$$

zatém $\dfrac{\text{sty.}\alpha-\text{sty.}\beta}{\text{sty.}\alpha+\text{sty.}\beta}=\dfrac{\text{wst.}(\alpha-\beta)}{\text{wst.}(\alpha+\beta)}$ . . . . . . (44)

jako też $\text{sty.}\alpha^2-\text{sty.}\beta^2=\dfrac{\text{wst.}(\alpha+\beta)\ \text{wst.}(\alpha-\beta)}{\text{dost.}\alpha^2\ \text{dost.}\beta^2}$.

We wzorze (32) położywszy $\alpha=\beta$, znajdziemy

$$\text{sty.}2\alpha=\frac{\text{sty.}\alpha+\text{sty.}\alpha}{1-\text{sty.}\alpha\ \text{sty.}\alpha}=\frac{2\,\text{sty.}\alpha}{1-\text{sty.}\alpha^2} \quad \ldots\ldots \quad (45).$$

Wzór (39) t. j. $\text{sty.}\frac{1}{2}\alpha=\dfrac{\text{wst.}\alpha}{1+\text{dost.}\alpha}$ daje

$$\text{sty.}\tfrac{1}{2}\alpha=\frac{\dfrac{\text{wst.}\alpha}{\text{dost.}\alpha}}{\dfrac{1}{\text{dost.}\alpha}+1}=\frac{\text{sty.}\alpha}{1+\text{sie.}\alpha}=\frac{\text{sty.}\alpha}{1+\sqrt{1+\text{sty.}\alpha^2}} \quad \ldots \quad (46).$$

§. 16.

Ponieważ w przerobieniach trygonometrycznych wzorów do różnego celu, prawie ciągle zastępować potrzeba jedne funkcyje przez drugie, zatém sądzę, że tu nie od rzeczy będzie przytoczyć różne i najużywańsze wyrażenia przynajmniéj trzech linij t. j. wstawy, dostawy i stycznéj, pomiędzy któremi znajdują się wyrażenia któreśmy albo już w poprzedzającém znaleźli, albo téż bardzo łatwo sprawdzić możemy ich rzetelność według tego co dotąd o tychże funkcyjach wiemy. I tak:

$$\mathrm{wst.}\,\alpha$$

$$= \mathrm{dost.}\,\alpha\,\mathrm{sty.}\,\alpha = \frac{\mathrm{dost.}\,\alpha}{\mathrm{doty.}\,\alpha} = \sqrt{1-\mathrm{dost.}\,\alpha^2} = \frac{1}{\sqrt{1+\mathrm{doty.}\,\alpha^2}}$$

$$= \frac{\mathrm{sty.}\,\alpha}{\sqrt{1+\mathrm{sty.}\,\alpha^2}} = 2\mathrm{wst.}\,\tfrac{1}{2}\alpha\;\mathrm{dost.}\,\tfrac{1}{2}\alpha = \sqrt{\frac{1-\mathrm{dost.}\,2\alpha}{2}}$$

$$= \frac{2\mathrm{sty.}\,\frac{1}{2}\alpha}{1+\mathrm{sty.}\,\frac{1}{2}\alpha^2} = \frac{2}{\mathrm{doty.}\,\frac{1}{2}\alpha+\mathrm{sty.}\,\frac{1}{2}\alpha}$$

$$= \frac{\mathrm{wst.}\,(30^\circ+\alpha)-\mathrm{wst.}\,(30^\circ-\alpha)}{\sqrt{3}} = 2\mathrm{wst.}\,(45^\circ+\tfrac{1}{2}\alpha)^2-1$$

$$= 1-2\,\mathrm{wst.}\,(45^\circ-\tfrac{1}{2}\alpha)^2 = \frac{1-\mathrm{sty}\,(45^\circ-\frac{1}{2}\alpha)^2}{1+\mathrm{sty.}\,(45-\frac{1}{2}\alpha)^2}$$

$$= \frac{\mathrm{sty.}\,(45^\circ+\frac{1}{2}\alpha)-\mathrm{sty.}\,(45^\circ-\frac{1}{2}\alpha)}{\mathrm{sty.}\,(45^\circ+\frac{1}{2}\alpha)+\mathrm{sty.}\,(45^\circ-\frac{1}{2}\alpha)}$$

$$= \mathrm{wst.}\,(60^\circ+\alpha)-\mathrm{wst.}\,(60^\circ-\alpha) = \frac{1}{\mathrm{dosie}\,\alpha}$$

$$= \frac{\mathrm{dost.}(60^\circ-\alpha)-\mathrm{dost.}(60^\circ+\alpha)}{\sqrt{3}} = 2\{\mathrm{wst.}(60^\circ+\alpha)-\tfrac{1}{2}\sqrt{3}\,\mathrm{dost.}\,\alpha\}$$

$$= 2\{\tfrac{1}{2}\sqrt{3}\,\mathrm{dost.}\,\alpha-\mathrm{wst.}\,(60^\circ-\alpha)\}$$

$$\mathrm{dost.}\,\alpha$$

$$= \frac{\mathrm{wst.}\,\alpha}{\mathrm{sty.}\,\alpha} = \mathrm{wst.}\,\alpha\;\mathrm{doty.}\,\alpha = \sqrt{1-\mathrm{wst.}\,\alpha^2} = \frac{1}{\sqrt{1+\mathrm{sty.}\,\alpha^2}}$$

$$= \frac{\mathrm{doty.}\,\alpha}{\sqrt{1+\mathrm{doty.}\,\alpha^2}} = \mathrm{dost.}\,\tfrac{1}{2}\alpha^2-\mathrm{wst.}\,\tfrac{1}{2}\alpha^2$$

$$= 1-2\,\mathrm{wst.}\,\tfrac{1}{2}\alpha^2 = 2\mathrm{dost.}\,\tfrac{1}{2}\alpha^2-1 = \frac{\sqrt{1+\mathrm{dost.}\,2\alpha}}{2}$$

$$= \frac{1-\mathrm{sty.}\,\frac{1}{2}\alpha^2}{1+\mathrm{sty.}\,\frac{1}{2}\alpha^2} = \frac{\mathrm{doty.}\,\frac{1}{2}\alpha-\mathrm{sty.}\,\frac{1}{2}\alpha}{\mathrm{doty.}\,\frac{1}{2}\alpha+\mathrm{sty.}\,\frac{1}{2}\alpha} = \frac{1}{1+\mathrm{sty.}\,\alpha\,\mathrm{sty.}\,\frac{1}{2}\alpha}$$

$$=\frac{2}{\text{sty.}\,(45^{\circ}+\frac{1}{2}\alpha)+\text{doty.}\,(45^{\circ}+\frac{1}{2}\alpha)}$$

$$=2\text{dost.}(45^{\circ}+\tfrac{1}{2}\alpha)\text{dost.}(45^{\circ}-\tfrac{1}{2}\alpha)=\text{dost.}(60^{\circ}+\alpha)+\text{dost.}(60-{}^{\circ}\alpha)$$

$$=\frac{1}{\text{sie.}\,\alpha}=\frac{\text{wst.}\,(60^{\circ}+\alpha)+\text{wst.}\,(60^{\circ}-\alpha)}{\sqrt{3}}$$

$$=2\{\text{dost.}(60^{\circ}+\alpha)+\tfrac{1}{2}\sqrt{3}\,\text{wst.}\,\alpha\}=2\{\text{dost.}\,(60^{0}-\alpha)-\tfrac{1}{2}\sqrt{3}\,\text{wst.}\,\alpha\}$$

$$\text{sty.}\,\alpha$$

$$=\frac{\text{wst.}\,\alpha}{\text{dost.}\,\alpha}=\text{doty.}\,\alpha-2\,\text{doty.}\,2\alpha=\frac{1}{\text{doty.}\,\alpha}=\sqrt{\text{sie.}\,\alpha^{2}-1}$$

$$=\frac{\text{wst.}\,\alpha}{\sqrt{1-\text{wst.}\,\alpha^{2}}}=\frac{\sqrt{1-\text{dost.}\,\alpha^{2}}}{\text{dost.}\,\alpha}=\frac{2\,\text{sty.}\,\frac{1}{2}\alpha}{1-\text{sty.}\,\frac{1}{2}\alpha^{2}}=\frac{2\text{doty.}\,\frac{1}{2}\alpha}{\text{doty.}\,\frac{1}{2}\,\alpha^{2}-1}$$

$$=\frac{2}{\text{doty.}\,\frac{1}{2}\,\alpha-\text{sty.}\,\frac{1}{2}\,\alpha}=\frac{2\,\text{sty.}\,\frac{1}{2}\,\alpha}{2-\text{sie.}\,\frac{1}{2}\alpha^{2}}=\frac{2\,\text{doty.}\,\frac{1}{2}\,\alpha}{\text{dosie.}\,\frac{1}{2}\,\alpha^{2}-2}$$

$$=\frac{1-\text{dost.}\,2\,\alpha}{\text{wst.}\,2\,\alpha}=\frac{\text{wst.}\,2\alpha}{1+\text{dost.}\,2\,\alpha}$$

$$=\sqrt{\frac{1-\text{dost.}\,2\alpha}{1+\text{dost.}\,2\alpha}}=\frac{\sqrt{1+\text{wst.}\,2\alpha}-\sqrt{1-\text{wst.}\,2\alpha}}{\sqrt{1+\text{wst.}\,2\,\alpha}+\sqrt{1-\text{wst.}\,2\alpha}}$$

$$=\frac{\text{sty.}\,(45^{\circ}+\frac{1}{2}\,\alpha)-\text{sty.}\,(45^{\circ}-\frac{1}{2}\,\alpha)}{2}=\frac{2\,\text{wst.}\,\frac{1}{2}\,\alpha\,\text{dost.}\,\frac{1}{2}\,\alpha}{\text{dost.}\,\frac{1}{2}\,\alpha^{2}-\text{wst.}\,\frac{1}{2}\,\alpha^{2}}$$

i t. d.

Oprócz tych wyrażeń są jeszcze wyrażenia algiebraiczne tak nazwane urojone t. j.

$$\text{wst.}\,\alpha=\frac{e^{\alpha\sqrt{-1}}-e^{-\alpha\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}},\quad \text{dost.}\,\alpha=\frac{e^{\alpha\sqrt{-1}}+e^{-\alpha\sqrt{-1}}}{2},$$

$$\text{sty.}\,\alpha=\frac{e^{2\,\alpha\sqrt{-1}}-1}{(e^{2\,\alpha\sqrt{-1}}+1)\sqrt{-1}}$$

które uczący się w nauce o szeregach trygonometrycznych znaleść mogą.

Wszystkie powyższe ważności łatwo jest sprawdzić według tego co się dotąd o funkcyjach trygonometrycznych nauczyliśmy. Tak np. chcąc się przekonać czyli rzeczywiście jest $\text{sty.}\,\alpha = \dfrac{\sqrt{1+\text{wst.}2\alpha}-\sqrt{1-\text{wst.}2\alpha}}{\sqrt{1+\text{wst.}2\alpha}+\sqrt{1-\text{wst.}2\alpha}}$ t. j. chcąc ten wzór wyprowadzić, tak sobie postąpimy. Ponieważ α jest pojedynczym a 2α podwójnym kątem, zatém należy wziąść wzory (10) i (11) dające związek między wstawą i dostawą pojedynczego i podwójnego kąta; mieć więc będziemy:

$$\text{wst.}\,\alpha = \sqrt{\frac{1-\text{dost.}2\alpha}{2}},\qquad \text{dost.}\,\alpha = \sqrt{\frac{1+\text{dost.}2\alpha}{2}}$$

Te wzory napisać jeszcze można następnie:

$$\text{wst.}\,\alpha = \sqrt{\frac{1-\sqrt{1-\text{wst.}\,2\alpha^2}}{2}},\quad \text{dost}\alpha = \sqrt{\frac{1+\sqrt{1-\text{wst.}\,2\alpha^2}}{2}}$$

Wyciągnąwszy tu pierwiastek według §. 77 *Arytm.* jako z ilości kształtu $\sqrt{a\pm\sqrt{b}}$, znajdziemy

$$\text{wst.}\,\alpha = \tfrac{1}{2}\sqrt{1+\text{wst.}\,2\alpha} - \tfrac{1}{2}\sqrt{1-\text{wst.}\,2\alpha},$$
$$\text{dost.}\,\alpha = \tfrac{1}{2}\sqrt{1+\text{wst.}\,2\alpha} + \tfrac{1}{2}\sqrt{1-\text{wst.}\,2\alpha}$$

a następnie $\dfrac{\text{wst.}\,\alpha}{\text{dost.}\,\alpha} = \text{sty.}\,\alpha = \dfrac{\sqrt{1+\text{wst.}\,2\alpha}-\sqrt{1-\text{wst.}\,2\alpha}}{\sqrt{1+\text{wst.}\,2\alpha}+\sqrt{1-\text{wst.}\,2\alpha}}$ jak między wzorami.

Przy téj sposobności nie zawadzi zwrócić uwagę że téż

$$\text{wst.}\,\alpha + \text{dost.}\,\alpha = \sqrt{1+\text{wst.}\,\alpha 2},\quad \text{dost.}\,\alpha - \text{wst.}\,\alpha = \sqrt{1-\text{wst.}\,2\alpha}$$

albo $\text{wst.}\,\tfrac{1}{2}\alpha + \text{dost.}\,\tfrac{1}{2}\alpha = \sqrt{1+\text{wst.}\,\alpha}$ . . . . (47)

$\text{dost.}\,\tfrac{1}{2}\alpha - \text{wst.}\,\tfrac{1}{2}\alpha = \sqrt{1-\text{wst.}\,\alpha}$ . . . . (48).

Mnożąc przez siebie te dwa ostatnie zrównania otrzymamy, $\text{dost.}\,\alpha = \text{dost.}\,\alpha$, na dowód że te dwa wzory są prawdziwe. Dzieląc je zaś przez siebie, znajdziemy

$$\frac{\text{wst.}\,\tfrac{1}{2}\alpha + \text{dost.}\,\tfrac{1}{2}\alpha}{\text{dost.}\,\tfrac{1}{2}\alpha - \text{wst.}\,\tfrac{1}{2}\alpha} = \sqrt{\frac{1+\text{wst.}\,\alpha}{1-\text{wst.}\,\alpha}} = \frac{\text{dost.}\,\alpha}{1-\text{wst.}\,\alpha}$$

$$= \frac{1+\text{wst.}\,\alpha}{\text{dost.}\,\alpha}\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ (49).$$

ROZDZIAŁ II.

Obrachowanie linij trygonometrycznych i układ takowych w tablice do użycia przy rozwiązaniu trójkątów służące.

---

§. 17.

Poznawszy tak funkcyje trygonometryczne jako téż i różne ich wyrażenia, należy nam teraz podać jak być może najłatwiejszy elementarny sposób ich obrachowania dla ułożenia ich w tablicc dla każdéj pomyśleć się mogącéj ważności kąta, skądby potém w razie potrzeby bez poprzedniego rachunku gotowe wziąść można; tym bowiem tylko sposobem ułatwi się obrachowanie elementów trójkąta. Na ten koniec poprzedźmy obrachowanie rzeczonych linij twierdzeniem że *łuk co do wielkości swojéj jest ilością pośrednią między wstawą i styczną*, t. j. oznaczając łuk przez α, że jest wst.$\alpha < \alpha <$ sty.α. Najoczywistszy dowód tego twierdzenia jest geometryczny, dla tego niech będzie łuk AD=BD=α *fig. 12*, poprowadziwszy cięciwę AB i promienie OA, OB, OD, z których OD jest prostopadły do AB, będzie kąt AOD=BOD=α, tudzież AC=BC=wst.α §. 3. Jeżeli z punktów A i B wyprowadzimy prostopadłe do OA i OB, te będą stycznemi do łuku ADB i przetną się na przedłużeniu promienia OD w punkcie T, będą więc AT i BT stycznemi trygonometrycznemi łuków AD i BD §. 5. A kiedy łuki są równe więc i ich styczne są równe, co téż i z §. 89 *Geom.* wiadomo; jest zatém AT = BT = sty.α. W trójkącie ATB jest AT+BT>AB czyli 2AT>2AC albo AT>AC. Ale téż łuk ADB>AB jako linija krzywa między dwoma punktami, albo 2AD>2AC lub nareszcie AD > AC. Tenże sam łuk ADB<AT+BT jako rzecz objęta od obejmującéj, zatém 2AD<2AT czyli AD<AT. Poprzednio okazaliśmy że AC<AD, teraz zaś że AD<AT, zatém AC<AD<AT czyli wst.$\alpha < \alpha <$ sty.α co było do dowiedzenia.

Samo spojrzenie na figurę może nas przekonać, że im łuk będzie mniejszy, tém różnica między styczną i wstawą będzie mniejsza, tudzież że kiedy łuk nieskończenie maleje, dwie te funkcyje zbliżają się nieskończenie do siebie a tém bardziéj do łuku który między niemi środkuje. Tę ostatnią prawdę wyczytać także można ze zrównania $\frac{\text{sty}.\alpha}{\text{wst}.\alpha}=\frac{1}{\text{dost}.\alpha}$; bo skoro łuk α maleje i zbliża się do 0, dostawa jego rośnie jak wiemy i zbliża się do 1, więc i stósunek $\frac{\text{sty}.\alpha}{\text{wst}.\alpha}$ zbliża się ciągle do 1, t. j. gdy łuk α maleje, dwie linije trygonometryczne styczna i wstawa, dążą ciągle do równości tak że gdy $\alpha=0$, jest též $\text{sty}.\alpha=\text{wst}.\alpha=0$. Niechby np. łuk α był tak małym iż jego dostawa $=0{\cdot}999$, tedy stósunek

$$\frac{\text{sty}.\alpha}{\text{wst}.\alpha}=\frac{1}{0{\cdot}999}=\frac{1000}{999}=1+\frac{1}{999}\text{ bo }\frac{\text{sty}.\alpha}{\text{wst}.\alpha}=\frac{1}{\text{dost}.\alpha}.$$

Niech powtóre dostawa kąta α będzie $=0{\cdot}999999$, wtedy powyższy stósunek będzie

$$\frac{\text{sty}.\alpha}{\text{wst}.\alpha}=\frac{1}{0{\cdot}999999}=\frac{1000000}{999999}=1+\frac{1}{999999}.$$

Tu już naocznie widzimy jak za wzrostem dostawy, a zatém za zmniejszeniem się łuku, różnica stósunku $\frac{\text{sty}.\alpha}{\text{wst}.\alpha}$ od 1 maleje i stać się nawet może mniejszą niż wszelka naznaczyć się mogąca jakkolwiek mała ilość.

Zupełnie tož samo rozumić się o stósunkach $\frac{\text{sty}.\alpha}{\alpha}$ i $\frac{\alpha}{\text{wst}.\alpha}$ z powodu, jak widzieliśmy, że łuk α zawarty jest ciągle między wst.α i sty.α.

Z tego rozumowania ustanowić możemy jako matematyczną prawdę, że *trzy stósunki* $\frac{\text{sty}.\alpha}{\text{wst}.\alpha}$, $\frac{\text{sty}.\alpha}{\alpha}$ i $\frac{\alpha}{\text{wst}.\alpha}$ *są ilościami nieskończenie zbliżającemi się do 1 w miarę jak się łuk α zmniejsza i zbliża do 0*; tudzież że *gdy łuk stanie się mniejszym niż wszelka jakkolwiek mała wielkość dana, każdy z tych stósunków różnić się będzie od 1 mniéj niż wszelka* *ilość dana jakkolwiek mała.* W wyższéj analizie wyrażamy się krócéj, że *każdy z tych stósunków ma za granicę 1.*

Kiedy w przypadku że łuk α jest bardzo mały, stósunek $\frac{\alpha}{\text{wst.}\,\alpha}$ bardzo mało się różni od 1, wypada stąd że i łuk α bardzo mało różnić się musi od wst. α.

Można téż w każdym razie naznaczyć ilość od któréj różnica między łukiem i wstawą nie jest większa, albo jak zwyczajnie mówimy, *naznaczyć błąd jaki popełniamy*, biorąc łuk za wstawę lub wzajemnie. Gdy bowiem sty. $\alpha > \alpha$ czyli $\frac{\text{wst.}\,\alpha}{\text{dost.}\,\alpha} > \alpha$ albo wst. $\alpha > \alpha\,$dost. α, więc tém bardziéj wst. $\alpha > \alpha\,\text{dost.}\,\alpha^2$, bo $\alpha\,$dost. α zostało rozmnożone przez dost. $\alpha < 1$ a dla tego iloczyn $\alpha\,\text{dost.}\,\alpha^2 < \alpha\,$dost. α. Położywszy $1 - \text{wst.}\,\alpha^2$ za dost. α^2, będzie wst. $\alpha > \alpha\,(1 - \text{wst.}\,\alpha^2)$ albo wst. $\alpha > \alpha - \alpha\,\text{wst.}\,\alpha^2$.

Biorąc tu z drugiéj strony nierówności α za wst. α t. j. ilość rzeczywiście większą, będzie tém bardziéj wst. $\alpha > \alpha - \alpha^3$ skąd $\alpha - \text{wst.}\,\alpha < \alpha^3$ t. j. różnica między łukiem i wstawą jest mniejsza niż sześcian z ważności łuku wyrażonéj w częściach promienia. Tak np. gdyby długość łuku, rozumié się w linii prostéj, była $= 0{\cdot}0001$ (promień $= 1$), mielibyśmy $\alpha - \text{wst.}\,\alpha < 0{\cdot}000000000001$.

§. 18.

To poprzedziwszy, przystąpmy teraz do obrachowania ważności linij trygonometrycznych.

Ponieważ dost. $\frac{1}{2}\pi = \text{dost.}\,90° = 0$,

zaś dost. $\frac{1}{4}\pi = \text{dost.}\,45° = \sqrt{\frac{1}{2}}$ §. 12 (8) t. j.

$$\text{dost.}\frac{\pi}{4} = 0{\cdot}707106781187\ \ldots\,.$$

zatém według wzoru (10) znajdziemy daléj

$$\text{dost.}\ \frac{\pi}{8} = \sqrt{\frac{1+\text{dost.}\ \frac{\pi}{4}}{2}} = 0{\cdot}923879532511\ \ \ldots$$

$$\text{dost.}\ \frac{\pi}{16} = \sqrt{\frac{1+\text{dost.}\ \frac{\pi}{8}}{2}} = 0{\cdot}980785280403\ \ \ldots\,.$$

$$\text{dost.}\ \frac{\pi}{32} = \sqrt{\frac{1+\text{dost.}\ \frac{\pi}{16}}{2}} = 0^{\cdot}995184726673\ \ldots\ .$$

$$\text{dost.}\ \frac{\pi}{64} = \sqrt{\frac{1+\text{dost.}\ \frac{\pi}{32}}{2}} = 0^{\cdot}999200862358\ \ldots\ .$$

$$\text{dost.}\ \frac{\pi}{128} = \sqrt{\frac{1+\text{dost.}\ \frac{\pi}{64}}{2}} = 0^{\cdot}999800195629\ \ldots\ .$$

$$\text{dost.}\ \frac{\pi}{256} = \sqrt{\frac{1+\text{dost.}\ \frac{\pi}{128}}{2}} = 0^{\cdot}999950047661\ \ldots\ .$$

i t. d.

Ten prosty i łatwy rachunek wykonywając coraz daléj, oraz rachując dostawy w więcéj jeszcze cyfrach dziesiętnych dla tém większéj dokładności, za siedmnastém działaniem znajdziemy:

$$\text{dost.}\ \frac{\pi}{524288} = \sqrt{\frac{1+\text{dost.}\frac{\pi}{262144}}{2}} = 0^{\cdot}99999999999820472941$$

Potém z wzoru $\text{wst.}\,\alpha = \sqrt{1-\text{dost.}\,\alpha^2}$ otrzymamy:

$$\text{wst.}\ \frac{\pi}{524288} = 0^{\cdot}0000059921124526\ \ldots$$

a następnie $$\text{sty.}\ \frac{\pi}{524288} = 0^{\cdot}0000059921124527\ \ldots$$

Ponieważ według poprzedzającego §. łuk co do wielkości swojéj przypada między wstawą i styczną, a dwie te funkcyje dla łuku $\frac{\pi}{524288}$ zgadzają się zupełnie z sobą aż do 15stéj cyfry dziesiętnéj włącznie, zatém przynajmniéj te 15 zgodnych cyfer można wziąść za długość łuczku wyrównywającego $\frac{1}{524288}$ części półokręgu, wyrażoną w częściach promienia wziętego za 1, albo mówiąc wyraźniéj, można położyć łuk $\frac{\pi}{524288} = 0{\cdot}000005992112452 \ldots.$

skąd $\pi = 3{\cdot}1415926535 \ldots\ldots\ldots\ldots$

t. j. jak nam już z Geometryi wiadomo, długość okręgu koła którego średnica $=1$, albo jak tu w naszym przypadku długość półokręgu koła którego promień $=1$. Znając dostatecznie z Geometryi ważność π, można poprzedzający rachunek całkiem opuścić, zamiarem bowiem jego było znalezienie długości półokręgu wyrażonéj w linii prostéj; lubo przy tém skorzystaliśmy na tém, że przez ten rachunek przekonaliśmy się, jak rozumiem, najdokładniéj, iż stósunek $\frac{\text{sty.}\,\alpha}{\text{wst.}\,\alpha}$ w miarę zmniejszania się łuku α, dąży do 1, t. j. styczna i wstawa dążą do równości.

Tak mając przez poprzedni rachunek lub téż z Geometryi długość półokręgu koła czyli 180^0 w linii prostéj wyrażoną, jeżeli ją podzielimy przez $180 \times 60 \times 60$ t. j. przez liczbę sekund w półokręgu zawartych, iloraz pokaże nam jaka długość z tego półokręgu przypada na 1 sekundę, czyli znajdziemy długość cięciwy należącéj do łuczku $1''$ odpowiadającego, a mianowicie znajdziemy

$$\text{łuk } 1'' = 0{\cdot}000004848136811 \ldots.$$

Lecz łuk $1'' < \frac{\pi}{524288}$, zgadzać się więc będzie z wstawą i styczną w więcéj niż w 15stu cyfrach dziesiętnych, można zatém z wszelką pewnością wziąść

$$\text{wst. } 1'' = 0{\cdot}000004848136811$$

skąd $$\text{dost. } 1'' = 0{\cdot}99999999998824$$

Tak mając obrachowane wstawę i dostawę $1''$, z wzorów (12) i (13) albo lepiéj (12') i (13'), łatwo obrachujemy

$$\text{wst. } 2'',\ \text{wst. } 3'',\ \text{wst. } 4'' \ldots\ldots\ \text{wst. } 60'' = \text{wst. } 1'$$

$$\text{i dost. } 2'',\ \text{dost. } 3'',\ \text{dost. } 4'' \ldots\ldots\ \text{dost. } 60'' = \text{dost. } 1'$$

Potém według tychże samych wzorów obrachujemy następnie

$$\text{wst. } 2',\ \text{wst. } 3',\ \text{wst. } 4' \ldots\ldots\ \text{wst. } 60' = \text{wst. } 1^0$$

$$\text{dost. } 2',\ \text{dost. } 3',\ \text{dost. } 4' \ldots\ldots\ \text{dost. } 60' = \text{dost. } 1^0$$

daléj wst. 2^0, wst. 3^0, wst. 4^0......... wst. 30^0
dost. 2^0, dost. 3^0, dost. 4^0......... dost. 30^0

Nareszcie od 30^0 do 45^0 rachują się wstawy i dostawy z wzorów (14) i (15).

§. 19.

Podany w poprzedzającym §. sposób obrachowania wstaw i dostaw wszystkich kątów od 0^0 do 45^0 jest jednym z najelementarniejszych, atoli można było użyć nieco krótszego ale za to cokolwiek trudniejszego; ten zaś jest następujący: W zrównaniu wst. $3\alpha = 3$wst. $\alpha - 4$wst. α^3 §. 12 połóżmy $3\alpha = 90^0$ stąd $\alpha = 30^0$ a wst. $3\alpha = 1$; kładąc prócz tego wst. $30^0 = x$, będzie $1 = 3x - 4x^3$ czyli $4x^3 - 3x + 1 = 0$. Rozwiązawszy to zrównanie według prawideł Algebry, znajdziemy trzy jego pierwiastki $+0{\cdot}2$, $+0{\cdot}5$ i -1. A że wst. 30^0 nie może przewyższać 1, zatém wst. $30^0 = 0{\cdot}5$ co już wiemy z §. 12 wzór (7). Z wzoru dost. $\alpha = \sqrt{1 - \text{wst.}\alpha^2}$, znajdziemy

$$\text{dost. } 30^0 = \sqrt{1 - 0{\cdot}25} = 0{\cdot}866 \ldots\ldots\ldots\ldots$$

Teraz w zrównaniu wst. $5\alpha = 5$ wst. $\alpha - 20$ wst. $\alpha^3 + 16$ wst. α^5 §. 12 położywszy $5\alpha = 30^0$, skąd $\alpha = 6^0$, a potém wst. $6^0 = x$, ponieważ wst. $5\alpha =$ wst. $30^0 = 0{\cdot}5 = \frac{1}{2}$, będzie

$$\tfrac{1}{2} = 5x - 20x^3 + 16x^5 \quad \text{albo} \quad 32x^5 - 40x^3 + 10x - 1 = 0$$

Rozwiązawszy znowu to zrównanie piątego stopnia, znajdziemy jego pierwiastki

$$+0{\cdot}5, \; +0{\cdot}1045285\ldots\ldots, \; +0{\cdot}9781476\ldots\ldots,$$
$$-0{\cdot}6691306\ldots\ldots, \; -0{\cdot}9135454\ldots\ldots$$

Ponieważ wst. $6^0 <$ wst. 30^0 i dodatną być musi, zatém z pomiędzy tych pięciu pierwiastków, tylko drugi t. j. $0{\cdot}1045285$.... może być ważnością odpowiadającą wst. 6^0, tym więc sposobem będzie wst. $6^0 = 0{\cdot}1045285$......... Z wstawy znajdziemy dostawę jak wyżéj.

Położywszy daléj $3\alpha = 6^0$ skąd $\alpha = 2^0$ i potém kładąc wst. $2^0 = x$, otrzymamy tym samym co wyżéj sposobem zrównanie $4x^3 - 3x + 0{\cdot}1045285 = 0$,
którego trzy pierwiastki znajdziemy

$$+0{\cdot}0348995\ldots\ldots, \; +0{\cdot}8480481\ldots\ldots, \; -0{\cdot}8829476\ldots\ldots$$

a przez podobne powyższemu rozumowanie wniesiemy że tylko $x=\text{wst.}\,2^0=0{\cdot}0348995........$ być może. Z wst. 2^0 znajdziemy dost. $2^0=0{\cdot}9993908.....$ a nareszcie przy pomocy wzorów (10) i (11) znajdziemy

$$\text{wst.}\,1^0=\sqrt{\frac{1-\text{dost.}\,2^0}{2}}=0{\cdot}0174524.......$$

$$\text{dost.}\,1^0=\sqrt{\frac{1+\text{dost.}\,2^0}{2}}=0{\cdot}9998477.......$$

Odbywając zupełnie ten sam rachunek dla znalezienia wst. $1'$ i dost. $1'$, a potém wst. $1''$ i dost. $1''$, znaleźlibyśmy, rachując wszystko dla większéj dokładności w 12stu cyfrach dziesiętnych

$$\begin{aligned} \text{wst.}\,1' &= 0{\cdot}000290888204 \\ \text{dost.}\,1' &= 0{\cdot}999999957692 \\ \text{wst.}\,1'' &= 0{\cdot}000004848137 \\ \text{dost.}\,1'' &= 0{\cdot}999999999988 \end{aligned}$$

Reszta rachunku jak w sposobie poprzedzającym.

W wyższéj analizie są daleko łatwiejszè i prędzéj do celu prowadzące sposoby za pomocą szeregów dających rozwinięcie wstawy i dostawy przez łuk, dla nas dosyć tu będzie powziąść przynajmniéj wyobrażenie w jaki sposób obrachowaćby można funkcyje trygonometryczne, a potém w tablice ułożyć.

§. 20.

Nie jeden z uczących się pomyśli i słusznie, ile w podanym sposobie rachowania wstaw i dostaw wśliznąć się musi omyłek z powodu licznych i z tylo-cyfrowemi liczbami działań, a następnie że tablice linij trygonometrycznych pełne mogą być błędów niedostrzeżonych. Zaiste prawdą jest piérwsze mniemanie, ale drugie jest fałszywe; albowiem pomimo nadzwyczajnych starań, cierpliwości i wytrwałości w rachunkach, pomyślano jeszcze i o tém, jakby bez wielkiego zachodu przekonać się o dokładności otrzymanych liczb, t. j. pomyślano o wynalezieniu tak nazwanéj kontrolli rachunku. Na ten cel podał sławny Euler następujące zrównanie

$$\begin{aligned} &\text{wst.}\,\varphi+\text{wst.}(36^0-\varphi)+\text{wst.}(72^0+\varphi) \\ &=\text{wst.}(36^0+\varphi)+\text{wst.}(72^0-\varphi) \end{aligned}$$

które następującym sposobem wyprowadzić można: poszukajmy naprzód dost. 36^0 i dost. 72^0. Z wiadomości nabytych w Geometryi a mianowicie w §. 248, mamy bok dziesięciokąta foremnego w koło wpisanego $=\frac{r(-1+\sqrt{5})}{2}$ albo położywszy $r=1$, będzie bok tegoż dziesięciokąta albo raczéj cięciwa łuku $36^0=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$. Z §. 9 wiemy, że wstawa jakiego łuku równa się połowie cięciwy dwarazy większego łuku, więc wst. $18^0=\frac{-1+\sqrt{5}}{4}$, zatém dost. $18^0=\sqrt{\frac{10+2\sqrt{5}}{16}}$. Ale

$$\text{dost.}\,2.18^0=\text{dost.}\,36^0=\text{dost.}\,18^2-\text{wst.}\,18^2$$
$$=\frac{10+2\sqrt{5}}{16}-\frac{(-1+\sqrt{5})^2}{16}=\frac{4+4\sqrt{5}}{16}=\frac{1+\sqrt{5}}{4}$$

Podobnież według §. 12 dost. $2.36^0=$dost. 72^0

$$=2\left(\frac{1+\sqrt{5}}{4}\right)^2-1=\frac{-4+4\sqrt{5}}{16}=\frac{-1+\sqrt{5}}{4}.$$

W drugiém zrównaniu (A) §. 12 położywszy $\alpha=36^0$ a potém $\alpha=72^0$ i oprócz tego $\beta=\varphi$, znajdziemy

$$\text{wst.}\,(36^0+\varphi)-\text{wst.}\,(36^0-\varphi)=2\,\text{dost.}\,36^0\,\text{wst.}\,\varphi=\frac{1+\sqrt{5}}{2}\,\text{wst.}\,\varphi,$$

tudzież

$$\text{wst.}(72^0+\varphi)-\text{wst.}(72^0-\varphi)=2\text{dost.}\,72\text{wst.}\varphi=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\,\text{wst.}\,\varphi.$$

Ostatnie zrównanie odjąwszy od poprzedzającego, znajdziemy

$$\text{wst.}(36^0+\varphi)-\text{wst.}(36^0-\varphi)-\text{wst.}(72^0+\varphi)+\text{wst.}(72^0-\varphi)=\text{wst.}\varphi$$

skąd

$$\text{wst.}\varphi+\text{wst.}(36^0-\varphi)+\text{wst.}(72^0+\varphi)=\text{wst.}(36^0+\varphi)+\text{wst.}(72^0-\varphi)$$

a to jest zrównanie przez Eulera podane.

Położywszy w eulerowskiém zrównaniu $90^0-\varphi$ za φ, otrzymamy

$$\text{wst.}(90^0-\varphi)+\text{wst.}(\varphi-54^0)+\text{wst.}(18^0+\varphi)$$
$$=\text{wst.}(54^0+\varphi)+\text{wst.}(\varphi-18^0)$$

albo

$$\text{wst.}(90^0-\varphi)=\text{wst.}(54^0+\varphi)+\text{wst.}(54^0-\varphi)$$
$$-\text{wst.}(18^0+\varphi)-\text{wst.}(18^0-\varphi)$$

a to znowu zrównanie podał na tenże sam cel Leżandr (Legendre).

Dajmy téj kontrolli przykład. Niech np. będzie $\varphi = 5^0$, tedy według zrównania Eulera będzie:

wst. $5^0 =$ 0'087156	
wst. $31^0 =$ 0'515038	wst. $41^0 =$ 0'656059
wst. $77^0 =$ 0'974370	wst. $67^0 =$ 0'920505
summa = 1'576564	summa = 1'576564

Można więc z pewnością wnioskować, że podane ważności wstaw kątów 5^0, 31^0, 41^0, 67^0 i 77^0 są dokładne. Tym samym sposobem doświadczyć można innych wstaw przyjmując za φ różne a stósowne ważności. Rachując przeto linije trygonometryczne, a szczególniéj wstawy, należy od czasu do czasu doświadczyć, czyli się gdzie błąd nie wśliznął; popełniwszy bowiem, choćby mały, w jednéj wstawie błąd, ten w następstwie nagromadza się często do znacznéj wielkości.

§. 21.

Poznawszy bliżéj funkcyje trygonometryczne, uważano zaraz, iż do praktycznego ich użycia daleko korzystniéj jest, zamiast samychże linij, które nazwano *naturalnemi*, mieć raczéj pod ręką ich logarytmy, które *sztucznemi linijami trygonometrycznemi* nazwano; te téż ostatnie zamiast piérwszych ułożono w tablice (lubo i piérwsze układano dawniéj także w tablice). Przystępując atoli do rachowania logarytmów funkcyj trygonometrycznych, napotkano jednę niedogodność tych logarytmów, któréj starano się zaraz zaradzić. Ta niedogodność była następująca: wszystkie dotąd wyprowadzone wzory trygonometryczne odnoszone były do 1, albo do promienia koła, w którém były uważane, za 1 wziętego, albo wyraźniéj mówiąc, w którém położono $r = 1$, skąd naturalnie wynikło, iż ponieważ wstawa < 1 i dostawa < 1 albo wstawa $< r$ i dostawa $< r$, tudzież styczne kątów mniejszych od 45^0 a dotyczne kątów większych od 45^0 są także < 1, że mówię tak wstawy jako i dostawy wszystkich kątów a styczne kątów $< 45^0$ dotyczne zaś kątów $> 45^0$ są mniejsze od 1, t. j. są ułamkami i że następnie ich logarytmy są odjemne; wypadało więc zaradzić temu, iżby nie mieć do czynienia z odjemnemi logarytmami. Téj niedogodności zaradzono rzeczywiście w sposób w §. 89 *Arytm.* wyłożony, używając dziesiętnego dopełnienia logarytmów, co następnie tłómaczę.

Zamiast odnosić linije trygonometryczne do jednostki albo $r=1$, wzięto inną t. j. $r=10000000000=10^{10}$ i tę nazwano *jednostką* albo *promieniem tablic*, co znaczy, że wszystkie linije trygonometryczne do téj jednostki są odniesione. Jednostka ta jak wiadomo jest także jednostką czyli zasadą logarytmów zwyczajnych czyli logarytmów liczb, zdaje się więc najstósowniejszą do zajęcia miejsca dowolnéj jednostki. Dwie proste podobnie w dwóch kołach różnych promieni prowadzone, mają się do siebie w stósunku promieni tychże kół; z wierzchołka przeto jakiegokolwiek kąta O *fig. 13* dwoma różnemi promieniami r i r', zakreśliwszy dwa łuki $mn=a$ i $m'n'=a'$ między ramionami kąta $O=\alpha$, tudzież z punktów m i m' spuściwszy prostopadłe mp i $m'p'$ do On', będzie

$$mp:m'p'=Om:Om'=r:r'.$$

A że $mp=\text{wst.}\,a$, $m'p'=\text{wst.}\,a'$, zatém $\text{wst.}\,a:\text{wst.}\,a'=r:r'$ Ale łuki a i a' mierzą tenże sam kąt α, zatém wniesiemy że *wstawy tegoż samego kąta ale do dwóch różnych jednostek odniesione, mają się do siebie jak też jednostki.* Tęż samę prawdę znajdziemy i dla innych linij trygonometrycznych.

Położywszy $r=1$ a $r'=10^{10}$, będzie $\text{wst.}\,a:\text{wst.}\,a'=1:10^{10}$ skąd

$$\text{wst.}\,a'=\text{wst.}\,a\times 10^{10}.$$

Zupełnie podobnie i z tychże samych trójkątów otrzymamy

$$\text{dost.}\,a'=\text{dost.}\,a\times 10^{10}.$$

W ogólności oznaczając którąkolwiek funkcyją trygonometryczną do jednostki $r'=10^{10}$ odniesioną, przez $F(\alpha)$, odniesioną zaś do $r=1$ przez $f(\alpha)$, mamy

$$F(\alpha)=r'f(\alpha)=10^{10}f(\alpha).$$

Biorąc tak w szczególnych dwóch powyższych, jako też i w ostatniém ogólném zrównaniu logarytmy z obu stron, będzie

$$log.\,\text{wst.}\,a'=log.\,\text{wst.}\,a+log.\,10^{10}=log.\,\text{wst.}\,a+10$$

$$log.\,\text{dost.}\,a'=log.\,\text{dost.}\,a+log.\,10^{10}=log.\,\text{dost.}\,a+10$$

a w ogólności $log.\,F(\alpha)=log.\,f(\alpha)+log.\,r'=log.\,f(\alpha)+10$

Skąd się pokazuje, że mając funkcyje trygonometryczne obrachowane dla $r=1$, jeżeli takowe chcemy otrzymać dla $r=10^{10}$, potrzeba je wszystkie mnożyć przez 10^{10}, albo ponieważ za r można wziąść każdą inną liczbę, mnożyć w ogólności przez r. Chcąc zaś mieć ich logarytmy w systemacie mającym za zasadę liczbę 10, dosyć do logarytmów piérwszych dodać 10, a w ogólności log. r.

Przeciwnie, chcąc z funkcyj trygonometrycznych obrachowanych do $r=10^{10}$ lub ogólnie dla r, otrzymać też funkcyje dla $r=1$, potrzeba piérwsze dzielić przez 10^{10} lub przez r; logarytmy zaś ich znajdzie się, odejmując od logarytmów piérwszych 10 lub ogólnie log. r. Tak np. wyżéj znaleźliśmy dla $r=1$, wst. $1'=0{\cdot}0002908882$, wziąwszy zaś $r=10^{10}$ znajdziemy wst. $1'=2908882$ $log. 0{\cdot}0002908882=log. \frac{2908882}{10^{10}}$

$$=log. 2908882-log. 10^{10}=6{\cdot}4637262-10= \text{ dla } r=1.$$

Lecz $log. 2908882=6{\cdot}4637262$, dla $r=10^{10}$ a ten logarytm otrzymamy z poprzedzającego dodając tylko do niego 10 t. j. znajdziemy $log.$ wst. $1'+10=6{\cdot}4637262$. Dwa te logarytmy tém się tylko od siebie różnią, że piérwszy jest uważany jako dopełnienie dziesiętne i należy do ułamku, którego piérwsza znacząca cyfra leży na miejscu czwartém po krésce, gdy tym czasem drugi należy do liczby całkowitéj siedmiocyfrowéj.

Z tego wszystkiego pokazuje się, że jedno jest zupełnie uważać logarytmy wstaw i dostaw, tudzież stycznych kątów $<45^0$, a dotycznych kątów $>45^0$, albo jako dopełnienia dziesiętne, albo téż jako odniesione do jednostki $r=10^{10}$; albowiem co do mantyssy ta będzie w obu razach taż sama, a cechy lubo też same, wszelako w piéwszym razie będzie cecha oznaczała dopełnienie do 10, w drugim zaś prawdziwą cechę logarytmu całkowitéj liczbie odpowiadającego; ale téż za to we wszystkich wzorach trygonometrycznych musi się znaj dować stósowna potęga jednostki r. Kiedy tak jest, zatém sądzę iż aby się nie obłąkać w używaniu logarytmów linij trygonometrycznych i w rachunek nie wprowadzić błędów, najlepiéj raz na zawsze uważać jednostkę tablic $r=1$ a linije trygonometryczne jako części téj jednostki, logarytmy zaś wstaw i dostaw tudzież stycznych dla kątów mniejszych niż 45^0 a dotycznych dla kątów większych niż 45^0 jako dopełnienia dziesiętne. Tym sposobem najłatwiéj i najjaśniéj pojmiemy że, ponieważ w §. 12 znaleźliśmy wst. $30^0=\frac{1}{2}$ a

$$log.\,\text{wst.}\,30^0=-log.\,2=-0{\cdot}3010300,$$

dla uczynienia tego logarytmu dodatnym w miejsce jego wziąść należy

$$10-0{\cdot}3010300-10=9{\cdot}6989700$$

t. j. że $log.\,\text{wst.}\,30^0=9{\cdot}6989700-10$ i podobnie

że $log.\,\text{wst.}\,65^0=9{\cdot}9572757-10$

bo wst. $65^0=0{\cdot}9063076$.......

a $log.\,0{\cdot}9063076=0{\cdot}9572757-1=9{\cdot}9572757-10.$

Toż samo rozumié się o dostawie.

W trygonometrycznych tablicach nie znajdują się ani sieczne ani dosieczne, łatwo je bowiem otrzymać z dostawy i wstawy, gdyż jak wiemy sie. $\alpha=\frac{1}{\text{dost. }\alpha}$, dosie. $\alpha=\frac{1}{\text{wst. }\alpha}$ a następnie

$$log.\,\text{sie.}\,\alpha=-log.\,\text{dost.}\,\alpha=10-log.\,\text{dost.}\,\alpha$$

$$log.\,\text{dosie.}\,\alpha=-log.\,\text{wst.}\,\alpha=10-log.\,\text{wst.}\,\alpha.$$

Jeżeli więc $r=1$, ostatnie ważności siecznéj i dosiecznéj będą ich logarytmami a liczby im odpowiadające, będą sieczną i dosieczną wyrażonemi w częściach 1. Jeżeli zaś $r=10^{10}$, natenczas cechy ich powiększone być muszą o 10, bo same linije być powinny mnożone przez 10^{10}, co w następnym §. jeszcze dokładniéj zrozumiemy.

Tak uważając logarytmy linij trygonometrycznych, pamiętać potrzeba, iż ponieważ wstawy i dostawy wszystkich kątów, jako téż styczne kątów mniejszych a dotyczne większych niż 45^0 są mniejsze od 1, logarytmy ich będąc dopełnieniami, mają wszystkie domyślną cechę -10, którą z tego powodu w tablicach opuszczono. Biorąc przeto logarytmy tych linij, cechy téj pomijać nie należy. Tak np. znajdziemy w tablicach

$log.$ wst $42^{\circ}=9{\cdot}8255109$ który logarytm jest rzeczywiście
$=9{\cdot}8255109-10$

$log.$ dost. $73^{\circ}=9{\cdot}4659353$ . . . . $=9{\cdot}4659353-10$

$log.$ sty. $27^{\circ}=9{\cdot}7071659$ . . . . $=9{\cdot}7071659-10$

$log.$ doty. $55^{0}=9{\cdot}8452268$ . . . . $=9{\cdot}8452268-10$

i t. d.

Jedynie tylko logarytmy stycznych kątów większych i logarytmy dotycznych kątów mniejszych niż 45^{0}, brać należy z tablic tak jak się tam znajdują; chyba że jak w niektórych tablicach opuszczono także cechę $+10$, a zatém wyraźnie uważano $r=1$. Tak np. szukając $log.$ sty. 64^{0} znajdziemy go w jednych tablicach $=10{\cdot}3118182$, w innych zaś $=0{\cdot}3118182$. Podobnież $log.$ sty. $87^{\circ}=11{\cdot}2806042$ albo $=1{\cdot}2806042$ i tak o innych. W piérwszych tablicach uważano jednostkę tablic $r=10^{10}$, w drugich zaś $r=1$. Z drugich logarytmów łatwo przechodzimy do piérwszych, powiększając tylko cechę logarytmu o 10 jak wyżéj powiedziałem. Toż samo zupełnie rozumié się o dotycznéj. Pamiętajmy więc tę prawdę, że jeżeli logarytmy linij trygonometrycznych uważamy tak jak się w piérwszych tablicach znajdują, gdzie logarytmy stycznych kątów $>45^{\circ}$ i logarytmy dotycznych kątów $<45^{\circ}$ mają cechy 10, 11, 12....... natenczas uważano za jednostkę tablic $r=10^{10}$, jeżeli zaś cechy logarytmów rzeczonych linij i dla wspomnianych kątów, znajdujemy 0, 1, 2,...... wtedy wnieśmy, że za jednostkę tablic uważano $r=1$. Zresztą spodziewam się, że dość dobitnie wyżéj wyłożyłem, iż to jest jedno i toż samo. W używaniu przeto tablic trygonometrycznych najlepiéj jest przyzwyczaić się do używania ich w rozumieniu $r=1$, tym sposobem wszystkie linije trygonometryczne będą wyrażone w częściach 1, a logarytmy linij mniejszych od 1, będą dopełnieniami dziesiętnemi.

Jeszcze na jednę okoliczność wypada tu zwrócić uwagę. Często się wydarza potrzeba znaleść liczbę odpowiadającą logarytmowi któréjkolwiek linii trygonometrycznéj, jakże sobie w powyższych dwóch przypadkach postąpić? Pokażmy to na przykładzie. Znalazłszy np. że

$$log.\ \text{wst.}\ 5^{\circ}30' = 8{\cdot}9815729$$

potrzebna nam jest liczba temu logarytmowi odpowiadająca. Logarytm ten uważany tak jak jest, odpowiada liczbie dziewięciocyfrowéj, szukając go więc w tablicy logarytmów liczb naturalnych, znajdziemy że mu odpowiada liczba 958457300, w któréj dwa ostatnie miejsca zerami zastąpiono, albowiem zwyczajne siedmiocyfrowe logarytmy nie mogą dać dokładnie dwóch tych cyfer. Uważając zaś powyższy logarytm jako dopełnienie dziesiętne, widzimy iż mu odpowiada ułamek dziesiętny którego piérwsza znacząca cyfra jest na drugiém miejscu po krésce t. j. odpowiada temuż logarytmowi ułamek 0·09584573. Jakże teraz tłómaczyć dwie tak różne od siebie otrzymane liczby? oto piérwsza liczba jest odniesiona do jednostki $r = 10^{10} = 10000000000$, druga zaś do $r = 1$. Rozmnożywszy drugą przez 10^{10}, otrzymamy piérwszą, jak rzeczywiście być powinno. Co się tu powiedziało o wstawie, rozumieć należy o każdéj innéj funkcyi.

§. 22.

Często wypada potrzeba jakikolwiek wzór trygonometryczny, otrzymany w rozumieniu $r = 1$, przerobić na wzór w którymby r było jakąkolwiek liczbą. Zachodzi więc pytanie jakim sposobem to przerobienie uskutecznić? Na to pytanie już rzeczywiście w poprzedzającym §. odpowiedzieliśmy i przekonaliśmy się, iż w takim razie dosyć jest trygonometryczną funkcyją otrzymaną w rozumieniu $r = 1$, rozmnożyć przez r, jeżeli toż r ma inną ważność. Tam téż znaleźliśmy ogólnie

$$F(\alpha) = r f(\alpha) \quad \text{i wzajemnie} \quad f(\alpha) = \frac{F(\alpha)}{r}$$

zobaczmy tylko zastósowanie téj prawdy.

Wiadomo że sty. $\alpha = \dfrac{\text{wst. } \alpha}{\text{dost. } \alpha}$ gdy $r = 1$, jeżeli zaś r nie jest $= 1$, tedy oznaczywszy w tym razie też linije przez

Sty. α, Wst. α i Dost. α, według powyższego zrównania mamy

$$\text{sty.}\,\alpha = \frac{\text{Sty.}\,\alpha}{r},\ \text{wst.}\,\alpha = \frac{\text{Wst.}\,\alpha}{r},\ \text{dost.}\,\alpha = \frac{\text{Dost.}\,\alpha}{r}$$

zatém $$\frac{\text{Sty.}\,\alpha}{r} = \frac{\frac{\text{Wst.}\,\alpha}{r}}{\frac{\text{Dost.}\,\alpha}{r}} = \frac{\text{Wst.}\,\alpha}{\text{Dost.}\,\alpha}$$

a następnie $$\text{Sty.}\,\alpha = \frac{r\,\text{Wst.}\,\alpha}{\text{Dost.}\,\alpha}.$$

Podobnież $$\frac{\text{Sie.}\,\alpha}{r} = \frac{1}{\frac{\text{Dost.}\,\alpha}{r}}\ \text{skąd Sie.}\,\alpha = \frac{r^2}{\text{Dost.}\,\alpha}$$

$$\frac{\text{Wst.}\,(\alpha \pm \beta)}{r} = \frac{\text{Wst.}\,\alpha}{r} \cdot \frac{\text{Dost.}\,\beta}{r} \pm \frac{\text{Dost.}\,\alpha}{r} \cdot \frac{\text{Wst.}\,\beta}{r}$$

skąd $$\text{Wst.}\,(\alpha \pm \beta) = \frac{\text{Wst.}\,\alpha\ \text{Dost.}\,\beta \pm \text{Dost.}\,\alpha\ \text{Wst.}\,\beta}{r}$$

$$\frac{\text{Wst.}\,2\alpha}{r} = 2.\frac{\text{Wst.}\,\alpha}{r} \cdot \frac{\text{Dost.}\,\alpha}{r}\ \text{czyli Wst.}\,2\alpha = \frac{2\text{Wst.}\,\alpha\,\text{Dost.}\,\alpha}{r}$$

$$\frac{\text{Dost.}\,\alpha}{r} = \sqrt{\frac{1 + \frac{\text{Dost.}\,2\alpha}{r}}{2}} = \sqrt{\frac{r + \text{Dost.}\,2\alpha}{2r}}$$

skąd $$\text{Dost.}\,\alpha = \sqrt{\frac{r^2(r + \text{Dost.}\,2\alpha)}{2r}} = \sqrt{\frac{r^2 + r\text{Dost.}\,2\alpha}{2}}$$

i t. d.

Przypatrzywszy się z uwagą wyrażeniom linij trygonometrycznych gdy r nie jest $= 1$, dostrzeżemy że te najłatwiéj się otrzymują, jeżeli wyrażenia w rozumieniu $r = 1$ otrzymane, rozmnożymy przez stósowne potęgi r. Mówię tu przez stósowne, albowiem wzór mający dwa lub więcéj wyrazów tak należy przez r rozmnożyć, iżby naprzód wszystkie wyrazy tak licznika jako i mianownika miały jednakowy *wymiar* (dimensio) t. j. jednakową liczbę czynników, nie rachując w to czynników liczbowych jeżeli się takowe znajdują; powtóre, w przypadku że wzór jest ułomkowy, mianownik powinien mieć o jeden wymiar mniéj niż licznik.

Ponieważ wyraz *wymiar* (dimensio) wzięty jest z Geometryi, w téj zaś wiemy iż linia prosta ma jeden, powierzchnia dwa a objętość trzy wymiary, tak że oznaczając długość, szerokość i wysokość, wyrażone w liczbach, przez a, b, c, długość czyli jeden wymiar wyrażamy w rachunku przez a lub b lub c; powierzchnię czyli dwa wymiary, wyrażamy przez ab, lub ac lub bc; trzy zaś nareszcie wymiary czyli objętość, przez abc, zatém każda funkcyja trygonometryczna będąc liniją, mieć téż musi jeden tylko wymiar w swém wyrażeniu, jeżeli tož jest pod kształtem liczby całkowitéj. Jeżeli zaś rzeczone wyrażenie będzie pod kształtem ułomkowym, żeby wiedzieć jak go zmienić, przypatrzmy się wyrażeniu $x = \frac{ab}{c}$, w którém a, b, c, są stósunkami długości bezwzględnych do jednostki. To wyrażenie tłómaczone geometrycznie, znaczy czwartą geometrycznie proporcyjonalną liniją do trzech innych, których długości są wyrażone przez liczby a, b, c, mieć zatém powinno jeden tylko wymiar. Rozbierając to ostatnie wyrażenie, dostrzegamy że jego licznik ab ma rzeczywiście dwa wymiary, ale za to mianownik c ma jeden, a różnica ich daje także jeden wymiar. Gdyby zatém w miejsce powyższego dane było wyrażenie $x = ab$ i wiedzieliśmy skądinąd iż ma wyrażać liniją, musielibyśmy je do wykreślenia geometrycznego uzupełnić pisząc $x = \frac{ab}{r}$ gdzie r wyrażałoby jednostkę. Mając zaś wyrażenie $x = abc$ i wiedząc że ma znaczyć liniją, uzupełniając takowe, musielibyśmy napisać $x = \frac{abc}{r^2}$; bo gdy licznik ma trzy czynniki (wymiary), mianownik jego powinien ich mieć dwa, iżby różnica wymiaru licznika i mianownika była 1, skoro x ma znaczyć liniją. W ogólności wymiarem funkcyi całkowitéj nazywamy summę wykładników tego wyrazu, w którym taž summa jest największą; wymiarem zaś funkcyi ułamkowéj, nazywamy różnicę wymiarów licznika i mianownika; nareszcie funkcyi piérwiastkowéj wymiarem jest iloraz wymiaru funkcyi pod pierwiastkiem, przez wykładnika piérwiastka.

Tak objaśniwszy co rozumiemy przez wymiar funkcyi, wróćmy do linij trygonometrycznych.— Aby wyrażenie trygonometryczne oznaczało liniją, potrzeba naprzód, jak się wyżéj powiedziało, aby wszystkie jego wyrazy miały jednakowy wymiar, albo jak się krótko wyrażamy, żeby wszystkie były *jednorodne;* w którym przypadku sama funkcyja nazywa się *jednorodną* (homogenea). *Powtóre* różnica wymiarów licznika i mianownika powinna być $=1$ iżby funkcyja liniją wyrażała; dla tego wzór sty. $\alpha = \frac{\text{wst. } \alpha}{\text{dost. } \alpha}$ w którym tak licznik jako i mianownik mają jeden tylko wymiar, dla czego ich różnica $1-1=0$, przerobimy na inny odnoszony do jednostki r, mnożąc tylko licznika przez r; tym bowiem sposobem licznik mieć będzie dwa a mianownik jeden wymiar, przeto $2-1=1$.

Wzór sie. $\alpha = \frac{1}{\text{dost. } \alpha}$ w liczniku nie ma żadnego, a w mianowniku jeden wymiar, aby więc wyrażał liniją mieć powinien w liczniku dwa wymiary, a dla tego

będzie $$\text{sie. } \alpha = \frac{r^2}{\text{dost. } \alpha}.$$

Wzór wst. $(\alpha \pm \beta) =$ wst. α dost. $\beta \pm$ dost. α wst. β składa się z dwóch wyrazów jednorodnych, bo każdy ma dwa wymiary, skoro więc ma wyrażać liniją, bo wst. $(\alpha \pm \beta)$ jest rzeczywiście liniją, musi mieć mianownika o jednym wymiarze, a następnie przerobiony

będzie $$\text{wst. } (\alpha \pm \beta) = \frac{\text{wst. } \alpha \text{ dost. } \beta \pm \text{dost. } \alpha \text{ wst. } \beta}{r}$$

Aby wzór wst. $\alpha = \sqrt{\frac{1 - \text{dost. } 2\alpha}{2}}$ zamienić na wzór odniesiony do jednostki r, uważyć naprzód potrzeba, że wyrażenie $1 - \text{dost. } 2\alpha$ nie jest jednorodne, czyniąc je takiém, będzie $r - \text{dost. } 2\alpha$. Wymiar téj funkcyi jest 1 bo oba jéj wyrazy zamykają bo jednym czynniku i w piérwszéj potędze, podzielony przeto przez wykładnik pierwiastka byłoby $\frac{1}{2}$ zamiast 1; aby więc wypadek był 1, musi rzeczona funkcyja być drugiego wymiaru nie tracąc wszelako swéj jednorodności, będzie zaś taką, jeżeli oba jéj wyrazy rozmnożymy przez r; przerobiony przeto wzór będzie wst. $\alpha = \sqrt{\frac{r^2 - r \text{ dost. } \alpha}{2}}$ jak to wyżéj na dostawie widzieliśmy.

Za ostatni przykład weźmy wzór

$$\text{sty.} (\alpha \pm \beta) = \frac{\text{sty. } \alpha \mp \text{sty. } \beta}{1 \mp \text{sty.} \alpha \text{ sty.} \beta}.$$

Przywodząc mianownika do jednorodności

będzie $\qquad = r^2 \pm \text{sty. } \alpha \text{ sty } \beta$;

ponieważ teraz mianownik jest drugiego wymiaru albo lepiéj stopnia, a sty. $(\alpha \pm \beta)$ jest liniją, licznik zatém być powinien trzeciego stopnia; gdy zaś jest jednorodny i piérwszego stopnia, potrzeba go więc mnożyć przez r^2. Tym sposobem otrzymamy

$$\text{sty} (\alpha \pm \beta) = \frac{r^2 (\text{sty. } \alpha \pm \text{sty. } \beta)}{r^2 \mp \text{sty. } \alpha \text{ sty. } \beta}.$$

Rozumiem iż te przykłady dostatecznie pokazują jak postąpić należy chcąc przerobić trygonometryczne wzory otrzymane w rozumieniu $r = 1$ na wzory gdy r ma inną ważność.

Ponieważ układ trygonometrycznych tablic prawie każdemu autorowi jest właściwy, i każdy téż zazwyczaj daje na początku objaśnienie swego układu wskazując na przykładach użycie swoich tablic, dla tego tak piérwszy jak i drugie zostawiam nauczycielom. Ci bowiem wziąwszy tablice do ręki i okazawszy takowe uczniom, zwracając uwagę na ich układ, potém na kilku zręcznie dobranych przykładach pokazawszy użycie tych tylko tablic które mają przed oczami, w pół godziny więcéj niż ja, nawet najobszerniejszym wykładem, nauczyć mogą swych uczniów.

Najużywańsze tablice są Lalanda, jeżeli nie potrzebujemy wielkiéj dokładności, Calleta i Vegi t. j. tych samych autorów których także i w Arytmetyce przytoczyłem, bo też tablice logarytmów liczb naturalnych są prawie nieodłącznemi, a nawet koniecznie przy tablicach trygonometrycznych potrzebne *).

Usprawiedliwiwszy dla czego tu nie mówię o układzie tablic trygonometrycznych, przechodzę nareszcie do zastósowania poznanych funkcyj trygonometrycznych do Geometryi, a w szczególności do nauki o trójkątach.

ROZDZIAŁ III.

Zastósowanie nabytych w dwóch poprzednich rozdziałach wiadomości do rozwiązywania trójkątów prostokreślnych.

§. 23.

Już we wstępie powiedzieliśmy, że skoro z sześciu elementów trójkąta prostokreślnego trzy którekolwiek są dane, byle pomiędzy ostatniemi znajdował się przynajmniéj jeden bok, trójkąt może być wystawiony. Daléj podaliśmy przyczynę dla czego z wykreśleniem geometryczném, koniecznie połączyć należy rachunek. A poznawszy nareszcie ilości pomocnicze czyli funkcyje trygonometryczne na ten cel wprowadzone, zachodzi teraz pytanie o co nam rzeczywiście chodzić będzie, gdy zechcemy zastósować własności poznanych linij, i jak się do tego wziąść mamy?

Na piérwsze pytanie odpowiadamy krótko, że w Trygonometryi chodzić nam będzie o to, jakim sposobem *mając wspomniane trzy elementa trójkąta w liczbach, wynaleść trzy inne także w liczbach i to z taką dokładnością do jakiéj tylko rachunek doprowadzić może.*

---

*) W r. 1849 Shortrede Robert wydał w Edynburgu i Londynie tablice logarytmiczne, zamykające logarytmy liczb naturalnych od 1 do 120000, tudzież tablice logarytmów wstaw i stycznych dla każdéj sekundy łuku.

Te same logarytmy wyszły w wydaniu niemieckiém przez prof. Kulika w Pradze o wiele tańsze, ale za to do użycia nie wygodniejsze, bo farba nie tak czarna jak angielska i papier nie tak biały.

Co się tyczy odpowiedzi na drugie pytanie, łatwo pojąć, iż mając ciąg trójkątów takich w którychby wszystkie sześć elementów były znane, mianowicie zaś, boki wyrażone w liczbach a kąty żeby miały wszelkie ważności jakie tylko kąty ostre lub rozwarte mieć mogą, do każdego trójkąta z trzema danemi elementami, znaleźlibyśmy w takim ciągu trójkąt z nim równokątny a zatém jemu podobny §. 56 *Geom.*; przy pomocy tego ostatniego, bylibyśmy w stanie znaleść trzy pozostałe elementa piérwszego. Znalezienie trzech elementów trójkąta w liczbach z danych trzech także w liczbach, nazywamy w Trygonometryi *rozwiązaniem trójkąta* (resolutio). Ale jakże taki ciąg trójkątów, o jakim co dopiéro wspomnieliśmy, który naturalnie byłby ciągiem nieskończonym, otrzymać możemy? Małe zastanowienie się daje nam na to pytanie odpowiedź, iż linije trygonometryczne ułożone w tablice są takim ciągiem trójkątów, w których wszystkie trzy boki są znane a kąty mają wszelkie ważności jakie tylko kąty mieć mogą; widzieliśmy bowiem, że jakkolwiek się kąt zmieni, zawsze jego stósunek do innego znanego kąta, zastąpić można stósunkiem linij znanych (trygonometrycznych). Najlepiéj to poznamy na trójkątach prostokątnych.

W trójkącie prostokątnym dwa kąty ostre dopełniają się wzajemnie do 90^0 i o ile jeden z nich rośnie lub maleje, o tyle drugi maleje lub rośnie; skoro więc jeden jest znany, tém samém i drugi jest znany. W tablicach trygonometrycznych mamy obrachowane wstawy i dostawy kątów od 0^0 do 90^0; a że wstawa i dostawa są to dwa boki przyległe kątowi prostemu gdy przeciwprostokątnia jest 1, zatém mamy tym sposobem ciąg trójkątów prostokątnych w których przeciwprostokątnia $=1$ a dwa inne boki są już w tablicach dane jako wstawy i dostawy kątów od 0^0 do 90^0. Inny ciąg trójkątów tęż samę co piérwszy własność mający, może być taki, że jeden z boków przyległych kątowi prostemu jest $=1$ a drugi i przeciwprostokątnia jako styczna i sieczna kąta przeciwległego piérwszemu są także w tablicach dane dla każdego kąta począwszy od 0^0 do 90^0. Mając zatém dany do rozwiązania trójkąt prostokątny, pomyślić sobie można inny jemu podobny i który się rzeczywiście znajduje, jak co dopiéro wspomnieliśmy, w którym wszystkie sześć elementów są znane; oba bowiem kąty ostre są znane a boki jako 1, wstawa i dostawa, albo jako 1, styczna i sieczna także znane. Podobieństwo tych trójkątów doprowadzi nas do proporcyi w któréj jeden tylko wyraz będzie nieznany i dla tego łatwo z niéj wynaleziony być może, a następnie i trójkąt rozwiązany.

Każdy trójkąt ukośnokątny rozebrany być może na dwa prostokątne przez spuszczenie prostopadłéj z wiérzchołka jednego z jego kątów na bok jemu przeciwległy, i tu przeto mieć możemy do czynienia z trójkątami prostokątnemi; naturalną więc jest rzeczą zacząć zastósowanie poznanych linij od trójkątów prostokątnych.

§. 24.

Ponieważ w takich trójkątach jeden kąt jako prosty jest znanym, zatém dosyć mieć dwa z pięciu innych elementów a między temi koniecznie przynajmniéj jeden z boków, aby trójkąt rozwiązać można. Oznaczywszy przeciwprostokątnię przez h, dwa boki przyległe kątowi prostemu przez a i b wyrażone w liczbach, tudzież α i β kąty tym bokom przeciwległe, mamy tym sposobem 5 elementów h, a, b, α, β z których dwa powinny być znane aby trzy inne wyznaczyć; lecz między danemi znajdować się koniecznie musi jeden z boków h, a, b. Łącząc rzeczone pięć elementów po dwa czyli szukając liczby dwójek, znajdziemy ją

$$\frac{5\,(5-1)}{1\,.\,2} = 10 \text{ §. 49. } \textit{Arytm.} \text{ a te są:}$$

$$h\alpha,\ hb,\ h\alpha,\ h\beta,\ a\alpha,\ a\beta,\ b\alpha,\ b\beta,\ ab,\ \alpha\beta$$

zdawałoby się przeto iż téż dziesięć przypadków mamy w rozwięzywaniu trójkątów prostokątnych. Zastanowiwszy się atoli że zamienić można a na b byle téż zamienić α na β i wzajemnie, przekonamy się że połączenia $h\,a$ i $h\,b$, $h\,\alpha$ i $h\,\beta$, $a\,\alpha$ $b\,\beta$ jako téż $a\,\beta$ i $b\,\alpha$ są też same, a nareszcie że połączenie $\alpha\beta$ miejsca tu mieć nie może z powodu wyżéj uczynionego zastrzeżenia. Tym sposobem otrzymamy cztéry tylko następujące przypadki:

1. Dane są h, a lub h, b
2. Dane są a, b
3. Dane są h, α lub h, β
4. Dane są a, α lub a, β albo a, β lub b, β.

Roztrząśnijmy te przypadki szczegółowo.

Przypadek 1. W trójkącie prostokątnym dana jest przeciwprostokątna i jeden z boków przyległych kątowi prostemu, szukamy reszty.

Ten przypadek rozwięzujemy łatwo według §. 2, gdzie widzieliśmy że

$$\frac{a}{h} = \text{wst. } \alpha \quad \text{i} \quad \frac{b}{h} = \text{dost. } \alpha$$

Jeżeli więc dane są h i a, z piérwszego zrównania znajdziemy $log.$ wst. $\alpha = log.\ a - log.\ h$, jeżeli zaś dane są h i b, z drugiego mamy $log.$ dost. $\alpha = log.\ b - log.\ h$, a szukając w tablicach trygonometrycznych odpowiadającego znalezionym logarytmom kąta, znajdziemy tym sposobem kąt α a następnie $\beta = 90^0 - \alpha$.

Powyższe dwa zrównania wyczytaliśmy w §. 3 w kształcie twierdzenia napisawszy je tak

$$a = h \text{ wst. } \alpha \qquad b = h \text{ dost. } \alpha$$

te twierdzenia jeszcze tu raz powtórzymy, bo przekonani jesteśmy iż w téj postaci mocniéj w pamięci uczących się utkwią. Ponieważ $\alpha = 90^0 - \beta$, zatém powyższe zrównania następnie napisane

$$a = h \text{ wst. } \alpha = h \text{ dost. } \beta, \quad b = h \text{ dost. } \alpha = h \text{ wst. } \beta$$

zamykają jednę i tęż samę prawdę, że, *w każdym trójkącie prostokątnym bok przyległy kątowi prostemu równa się iloczynowi z przeciwprostokątni przez wstawę kąta przeciwległego, lub przez dostawę kąta przyległego temuż bokowi.* Tak wysłowione twierdzenie, uważa $r = 1$ t. j. trójkąt danemu podobny, ma przeciwprostokątnię $= 1$, a bok odpowiadający bokowi a danego trójkąta, jest wstawą kąta α a dostawą kąta

β; przeciwnie bok odpowiadający w danym trójkącie bokowi b, jest dostawą kąta α a wstawą kata β.

Jeżeli r nie jest $= 1$, wtedy powyższe zrównania przechodzą na

$$\frac{a}{h} = \frac{\text{wst.}\,\alpha}{r} = \frac{\text{dost.}\,\beta}{r} \quad \text{i} \quad \frac{b}{h} = \frac{\text{dost.}\,\alpha}{r} = \frac{\text{wst.}\,\beta}{r}$$

§. 22, a rozkładając je na proporcyje będzie

$$r : \text{wst.}\,\alpha = h : a \quad . \quad . \quad . \quad r : \text{dost.}\,\alpha = h : b$$

$$r : \text{dost.}\,\beta = h : a \quad . \quad . \quad . \quad r : \text{wst.}\,\beta = h : b$$

Cztéry te proporcyje stanowią rzeczywiście tylko dwie

$$r : \text{wst.}\,\alpha = h : a \text{ i } r : \text{dost.}\,\alpha = h : b,$$

bo inne dwie przez przemianę a na b i α na β i wzajemnie przechodzą w te ostatnie. Dwie te proporcyje wysłowione, zamykają powyższe twierdzenie nieco pod innym kształtem, t. j. *w każdym trójkącie prostokątnym tak się ma jednostka tablic (promień tablic) do wstawy lub dostawy jednego z kątów ostrych, jak się ma przeciwprostokątnia do boku przeciwległego lub przyległego temuż kątowi.*

Pragnąc uczącym się dać jak najlepsze pojęcie zastósowania poznanych linij trygonometrycznych, sądzę za dostateczne pokazać na tym piérwszym przypadku trójkątów prostokątnych, jak się ma rozumieć to co w poprzedzającym §. o ciągu trójkątów powiedzieliśmy.

W obecnym przypadku niech będzie do rozwiązania trójkąt ABC *fig. 14*, w którym dana jest przeciwprostokątnia $AB = h$ i bok przyległy kątowi prostemu $BC = a$, szukamy zaś kątów $A = \alpha$, $B = \beta$ i boku $AC = b$. Zrysowawszy trójkąt $A'B'C'$ podobny piérwszemu t. j. taki że $A' = A = \alpha$, $B' = B = \beta$ i w którym przeciwprostokątnia $A'B' = h' = 1$, a następnie według §. 3 $B'C' = a' = \text{wst.}\,\alpha$, $A'C' = b' = \text{dost.}\,\alpha$, z podobieństwa tych trójkątów wypada

$$\frac{h}{h'} = \frac{a}{a'} \text{ i } \frac{h}{h'} = \frac{b}{b'} \text{ albo } \frac{h}{1} = \frac{a}{\text{wst.}\,\alpha} \text{ i } \frac{h}{1} = \frac{b}{\text{dost.}\,\alpha}$$

skąd $\quad \text{wst.}\,\alpha = \frac{a}{h}, \quad \text{dost.}\,\alpha = \frac{b}{h} \quad$ albo $\quad a = h\,\text{wst.}\,\alpha, \quad b = h\,\text{dost.}\,\alpha,$

Każdy tu łatwo dostrzeże, że trójkąt A'B'C' jest jednym z owego wyżéj wspomnionego ciągu i że wszystkie jego elementa znajdują się gotowe w tablicach.

Rozumiem że z tego jednego przykładu każdy powinien koniecznie pojąć i przekonać się dostatecznie, iż tablice trygonometryczne niczém innem nie są, jak tylko ciągiem trójkątów prostokątnych w których wszystkie pięć elementów są znane, bo naprzód obrachowane i w tablicach zamieszczone, mianowicie zaś boki przyległe kątowi prostemu pod nazwą wstawy i dostawy jeżeli przeciwprostokątnia czyli jednostka tablic jest $=1$, albo jeden z rzeczonych boków pod nazwiskiem stycznéj, a przeciwprostokątnia siecznéj, jeżeli drugi z boków przyległych kątowi prostemu jest $=1$.

Co się tu powiedziało o ciągu trójkątów prostokątnych gdy jednostka tablic $r=1$, ma się téż rozumieć gdy $r=10^{10}$ lub gdy r jest inną jakąkolwiek liczbą.

Z poprzedzającego rozumowania jasno się pokazuje, że każdy dany do rozwiązania trójkąt, porównywamy tylko z trójkątem w tablicach się znajdującym i przy pomocy tego, tamten rozwiązujemy.

W przypadku który nas zatrudnia, pozostaje nam jeszcze do znalezienia bok b, jeżeli a było dane, lub a jeżeli bok b był dany. Szukając boku b, ponieważ według twierdzenia Pitagoresa jest $h^2=a^2+b^2$ zatém

$$b=\sqrt{h^2-a^2}=\sqrt{(h+a)(h-a)}$$

czyli $$log.\, b=\frac{log.(h+a)+log.(h-a)}{2}$$

W ważności na b rozłożyliśmy różnicę kwadratów pod pierwiastkiem naczynniki dlatego, iżbyśmy logarytmów użyć mogli; już to bowiem wspomniałem, że w Trygonometryi używa się do rachunku wyłącznie logarytmów i z tego powodu wszystkie jéj wzory, a szczególniéj służące do rozwiązania trójkątów, staramy się zawsze, skoro tylko można, przerobić na takie, gdzieby logarytmy użytemi być mogły, mianowicie iżby się w nich nie znajdowały ani summy ani różnice, lecz tylko iloczyny lub ilorazy i to tak w wyrażeniach wymiernych, jako téż i niewymiernych.

Ważność na bok b można téż było znaleść po znalezieniu kąta α, mieliśmy bowiem $log.\text{dost.}\alpha = log.\,b - log.\,h$, skąd $log.\,b = log.\text{dost.}\alpha + log.\,h$. Atoli w rozwiązywaniu trójkątów przekładamy zawsze, owszem staramy się, jeżeli można, wyrazić szukane przez dane elementa, nie używając już znalezionych z powodu, że linije trygonometryczne a zatém i ich logarytmy będąc same tylko przybliżonemi (chociaż to przybliżenie do najwyższego stopnia posunąć można) dają téż wypadki nieco błędne; a jakkolwiek taki błąd prawie za nic uważać można, to przecięż może on mieć znaczniejszy wpływ na inny element, który z powodu błędu poprzedzającego znaleźlibyśmy mniéj dokładny niż wyrażając go przez elementa znane.

Weźmy nareszcie przykład liczbowy, na którym pojmiemy sposób użycia trygonometrycznych tablic. Niech będzie, $h = 56{\cdot}925$ sążni, zaś $a = 45{\cdot}540$ sążni, tedy znajdziemy

$$log.\text{wst.}\alpha = log.\,45{\cdot}540 - log.\,56{\cdot}925 = 1{\cdot}6583930 - 1{\cdot}7553030$$
$$= -0{\cdot}0969100 = 9{\cdot}9030900 - 10$$

albo $log.\text{wst.}\alpha = 11{\cdot}6583930 - 1{\cdot}7553030 = 9{\cdot}9030900$

t. j. powiększywszy zaraz mniejszy logarytm, od którego większy odjąć mamy o 10 i wykonawszy zwyczajnym sposobem odejmowanie, otrzymamy zaraz $9{\cdot}9030900$. To ostatnie postępowanie odpowiada wzorowi $log.\text{wst.}\alpha = \frac{ar}{h}$ w którym $r = 10^{10}$ i daje nam na wypadek logarytm należący do liczby dziesięciocyfrowéj, czyli wstawa kąta α będzie dziesięciocyfrową liczbą całkowitą t. j. odniesioną do jednostki $10^{10} = 10000000000$.

Piérwszy wypadek $log.\text{ wst.}\alpha = 9{\cdot}9030900 - 10$ jest tenże sam wyjąwszy cechę, która nam wskazuje, że $log.\text{wst.}\alpha$ jest dopełnieniem dziesiętném i odpowiada ułamkowi dziesiętnemu, w którym piérwsza znacząca cyfra jest na piérwszém po krésce miejscu, a zatém, że wstawa kąta α jest ułamkiem dziesiętnym będącym częścią 1, czyli że tu wstawa jest odniesioną do jednostki $r=1$. Z téj ostatniéj ważności wstawy znajdzie się piérwszą mnożąc tę tu przez $10,^{10}$ jako téż z piérwszéj znajdzie się ostatnią dzieląc tamtę przez 10^{10}, oba przeto postępowania na jedno i tož samo wychodzą. Powiększywszy więc mniejszy logarytm, od którego się większy ma odejmować, ale tylko w myśli o 10 resztę uważać potrzeba jako dopełnienie dziesiętne logarytmu wstawy, i że zatém ma domyślną na końcu cechę -10, którą się opuszcza wiedząc, że logarytmy wstaw i dostaw są dopełnieniami dziesiętnemi, czyli że przyjmujemy jednostkę tablic $r=1$. Działanie to urządza się w następujący sposób

$$\begin{aligned} log.\, a &= 1{\cdot}6582930 \\ log.\, h &= 1{\cdot}7553030 \\ \hline log.\, \text{wst.}\, \alpha &= 9{\cdot}9030900 \end{aligned}$$

Szukając tego logarytmu w tablicach między wstawami znajdziemy, że mu odpowiada kąt $\alpha = 53^0\, 7'\, 48''{\cdot}4$, przeto $\beta = 90^0 - 53^0\, 7'\, 48''{\cdot}4 = 36^0\, 52'\, 11''{\cdot}6$

Dla znalezienia boku b mamy podobnież

$$log.\ b. = \frac{log.\ (h+a) + log.\ (h-a)}{2}$$

A że $h+a = 102{\cdot}465$, $h-a = 11{\cdot}385$ zatém

$$\begin{aligned} log.\, 102{\cdot}465 &= 2{\cdot}0105756 \\ log.\ \ 11{\cdot}385 &= 1{\cdot}0563330 \\ \hline 2)\quad & 3{\cdot}0669086 \\ log.\, b &= 1{\cdot}5334543 \end{aligned}$$

zatém $b = 34{\cdot}155$

Albo z wzoru $log.\, b = log.\, \text{dost.}\, \alpha + log.\, h$

$$\begin{aligned} log.\, \text{dost.}\, 53^0 7' 48''{\cdot}4 &= 9{\cdot}7781511 \\ log.\, h \qquad &= 1{\cdot}17553030 \\ \hline log.\, b \qquad &= 1{\cdot}5334541 \end{aligned}$$

Widzimy tu w $log.\, b$ różnicę w ostatniéj cyfrze, a chociaż ona tu jest nic nie znaczącą, wszelako ważność na b bez pomocy kąta α otrzymaną, za dokładniejszą mieć powinniśmy, gdyż ta różnica nie skąd inąd pochodzi tylko z nie-dokładności kąta α, lubo ta niedokładność tylko w setnych częściach sekundy zachodzi.

Uważać tu jeszcze należy, iż w zrównaniu

$$log. b = log. \text{dost.}\, \alpha + log. h,$$

opuściliśmy $-log. r$, czyli -10, z powodu iż $log.$ dost. α jest dopełnieniem dziesiętném t. j. 9·7781511 − 10, że zatém summa jest rzeczywiście 11·5334541 − 10 = 1·5334541.

Można téż było kąt β znaleść ze zrównania $\frac{a}{h} = \text{dost.}\,\beta$ skąd $log.\text{dost.}\,\beta = log. a - log. h$, gdyż będzie

$$log. 45·540 = 1·6583930$$
$$log. 56·925 = 1·7553030$$

$$log.\text{dost.}\,\beta = 9·9030900$$

a $$\beta = 36^{0}52'11''·6$$

Szukanie obu kątów α i β z danych elementów jest sprawdzeniem rachunku, być bowiem powinno $\alpha + \beta = 90^0$, jak też jest rzeczywiście w naszym przypadku.

Jeżeli ilości dane h i a są takie, iż h nie wiele jest różne od a, natenczas powyższym sposobem nie można wyznaczyć kąta α z wszelką ścisłością jakiéj tu żądamy, będzie on bowiem bliskim 90^0 a tu wstawy bardzo się mało zmieniają, chociaż się kąt znacznie zmieni. W takim razie najlepiéj jest z wzoru $\text{wst.}\,\alpha = \frac{a}{h}$ wyprowadzić dost. α, bo te linije w bliskości 90^0 prędko się zmieniają. Jakoż

$$\text{dost.}\,\alpha = \sqrt{1 - \text{wst.}\,\alpha^2} = \sqrt{1 - \frac{a^2}{h^2}}$$

$$= \sqrt{\frac{h^2 - a^2}{h^2}} = \frac{\sqrt{(h+a)(h-a)}}{h}.$$

Albo, mając wstawę i dostawę, szukać sty. α; jest bowiem

$$\text{sty.}\,\alpha = \frac{\text{wst.}\,\alpha}{\text{dost.}\,\alpha} = \frac{a}{\sqrt{(h+a)(h-a)}}$$

Za pomocą któregokolwiek z tych wzorów znajdziemy dokładniéj kąt α.

Niech np. będzie $h=35{\cdot}786$, $a=35{\cdot}724$, tedy z trzech wzorów znajdziemy

$$log.\,\text{wst.}\,\alpha=9{\cdot}9992469,\quad log.\text{dost.}\,\alpha=8{\cdot}7696660,$$

skąd $\alpha=86°37'36''{\cdot}7$ $\alpha=86°37'36''{\cdot}55$

$$log.\,\text{sty.}\,\alpha=1{\cdot}2295809$$

skąd $\alpha=86°37'36''{\cdot}55$

Lubo tu różnica dwóch ostatnich wypadków z piérwszym jest bardzo mała, wszelako gdyby różnica między h i a była jeszcze mniejsza, rzeczona różnica pokazałaby się znaczniejszą. Dwa drugie wypadki zgadzają się zupełnie, bo wzory z których otrzymane zostały są jak wyżéj powiedziałem dokładniejsze.

Uważam iż nieco zawiele rozszerzyłem się nad tym piérwszym przypadkiem, ale mi się zdawało, iż zrozumiawszy i pojąwszy dobrze ducha jednego przypadku, nie będę miał potrzeby tak obszernie objaśniać innych.

Przypadek 2. W trójkącie prostokątnym dane są dwa jego boki przyległe kątowi prostemu, a szukamy przeciwprostokątni i dwóch jego kątów.

Przeciwprostokątnię znajdziemy wprost ze zrównania

$$h=\sqrt{a^2+b^2}.$$

Szukając kątów α i β, mamy $\dfrac{a}{b}=\text{sty.}\,\alpha$

skąd $log.\,\text{sty.}\,\alpha=log.\,a-log.\,b.$

Znalazłszy kąt α, mamy téż $\beta=90^0-\alpha$ i trójkąt jest zupełnie w tym przypadku rozwiązany.

Gdyby wyciąganie pierwiastka kwadratowego z a^2+b^2 zdawało się niewygodném, tedy po znalezieniu kątów α i β, można znaleść przeciwprostokątnię ze zrównań

$$\frac{a}{h}=\text{wst.}\,\alpha \text{ lub } \frac{b}{h}=\text{wst.}\,\beta,\text{ skąd } h=\frac{a}{\text{wst.}\,\alpha}=\frac{b}{\text{wst.}\,\beta}$$

albo $log.\,h=log.\,a-log.\,\text{wst.}\,\alpha=log.\,b-log.\,\text{wst.}\,\beta.$

Za liczbowy przykład można tu wziąść z poprzedzającego przypadku $a=45{\cdot}540$, $b=34{\cdot}155$ a znalezione h, α, β, porównać z otrzymanemi tamże i daném h.

Przypadek 3. W trójkącie prostokątnym dane są h, α lub h, β i z nich potrzeba rozwiązać trójkąt, czyli znaleść a, b i β lub α.

Jeżeli dany jest kąt α, znajdziemy $\beta = 90^\circ - \alpha$ i nawzajem skoro danym kątem będzie β, będzie téż $\alpha = 90^\circ - \beta$, Chodzi więc tylko o znalezienie a i b.

Według §. 3 jest $\quad a = h\,\text{wst.}\,\alpha,\ b = h\,\text{dost.}\,\alpha,$

albo $\quad a = h\,\text{dost.}\,\beta,\ b = h\,\text{wst.}\,\beta.$

Działając logarytmami będzie

$$log.\,a = log.\,h + log.\,\text{wst.}\,\alpha = log.\,h + log.\,\text{dost.}\,\beta$$

$$log.\,b = log.\,h + log.\,\text{dost.}\,\alpha = log.\,h + log.\,\text{wst.}\,\beta$$

Niech znowu będzie $h = 56{\cdot}925$; $\alpha = 53^\circ 7' 48''{\cdot}4$

lub $\quad \beta = 36^\circ 52' 11''{\cdot}6.$

Wykonawszy wskazane na logarytmach działania powyższym podobne, znajdziemy $log.\,a = 1{\cdot}6583930$, $log.\,b = 1{\cdot}5334541$ a następnie $a = 45{\cdot}540$, $b = 34{\cdot}155$.

Przypadek 4. W trójkącie prostokątnym dane są a, α, lub a, β, albo a, β lub b, β, znaléść potrzeba h i b lub a tudzież kąt β lub α.

Co się tyczy kąta, ten przez kąt dany już tém samém jest znany z powodu, że $\alpha + \beta = 90^\circ$. Dla znalezienia h mamy znane z §. 3 zrównania

$$h = \frac{a}{\text{wst.}\,\alpha} = \frac{a}{\text{dost.}\,\beta}$$

czyli $\quad log.\,h = log.\,a - log.\,\text{wst.}\,\alpha = log.\,a - log.\,\text{dost.}\,\beta.$

Aby znaleść drugi bok przyległy kątowi prostemu mamy zrównanie z §. 5

$$\frac{a}{b} = \text{sty.}\,\alpha \quad \text{lub} \quad \frac{b}{a} = \text{sty.}\,\beta \quad \text{skąd} \quad b = \frac{a}{\text{sty.}\,\alpha} = a\,\text{sty.}\,\beta,$$

$$a = b\,\text{sty.}\,\alpha = \frac{b}{\text{sty.}\,\beta}.$$

Chcąc zaś jednostkę tablic wyraźnie położyć, będzie

$$h = \frac{ar}{\text{wst.}\,\alpha} = \frac{ar}{\text{dost.}\,\beta}, \qquad b = \frac{ar}{\text{sty.}\,\alpha} = \frac{a\,\text{sty.}\,\beta}{r},$$

$$a = \frac{b\,\text{sty.}\,\alpha}{r} = \frac{br}{\text{sty.}\,\beta}.$$

Zrównania $\frac{a}{b} = \text{sty}.\alpha$ i $\frac{b}{a} = \text{sty}.\beta$ zamykają następujące twierdzenie: *w trójkącie prostokątnym dzieląc jeden z przyległych boków kątowi prostemu przez drugi, otrzymujemy zawsze na iloraz styczną kąta przeciwległego dzielnéj.*

Zrównanie zaś $b = \frac{ar}{\text{sty}.\alpha}$ lub $b = \frac{a\,\text{sty}.\beta}{r}$, rozkładając na proporcyje, znajdziemy

$$\text{sty}.\alpha : r = a : b \quad \text{lub} \quad \text{sty}.\beta : r = b : a.$$

Te proporcyje zamykają toż samo powyższe twierdzenie nieco w odmiennym kształcie, a które brzmi następnie: *w każdym trójkącie prostokątnym styczna jednego z kątów ostrych tak się ma do jednostki tablic, jak bok przeciwległy temu kątowi do boku przyległego.*

Wziąwszy tu za liczbowy przykład z piérwszego przypadku $a = 45{\cdot}540$, $\alpha = 53^\circ 7' 48''{\cdot}4$

będzie

$$\begin{array}{rr} \log. a = 1{\cdot}6583930 & \log. a = 1{\cdot}6583930 \\ \log. \text{wst}. \alpha = 9{\cdot}9030900 & \log. \text{dost}. \beta = 9{\cdot}9030900 \\ \hline \log. h = 1{\cdot}7553030 & \log. h = 1{\cdot}7553030 \end{array}$$

$$h = 56{\cdot}925$$

$$\begin{array}{rr} \log. a = 1{\cdot}6583930 & \log. a = 1{\cdot}6583930 \\ \log. \text{sty}. \alpha = 0{\cdot}1249389 & \log. \text{sty}. \alpha = 9{\cdot}8750610 \\ \hline \log. b = 1{\cdot}5334541 & \log. b = 1{\cdot}5334540 \end{array}$$

$$b = 34{\cdot}155$$

Według drugich zrównań będzie

$$\log. h = \log. a + \log. r - \log. \text{wst}. \alpha = \log. a + \log. r - \log. \text{dost}. \alpha$$

$$\log. b = \log. a + \log. r - \log. \text{sty}. \alpha = \log. a + \log. \text{sty}. \beta - \log. r$$

pamiętając że dla zwyczajnych tablic, r jest albo $= 1$ albo $= 10^{10}$ skąd $\log. r = 10$.

$$\begin{array}{rr} \log.\ a = 1{\cdot}6583930 & \log.\ a = 1{\cdot}6583930 \\ \log.\ r = 10 \quad & \log.\ r = 10 \quad \\ \hline 11{\cdot}6583930 & 11{\cdot}6583930 \\ \log.\ \text{wst}.\ \alpha = 9{\cdot}9030900 & \log.\ \text{dost}.\ \alpha = 9{\cdot}9030900 \\ \hline \log.\ h = 1{\cdot}7553030 & \log.\ h = 1{\cdot}7553030 \end{array}$$

$$\begin{array}{rlcrl}
log.\ a = & 1{\cdot}6583930 & \quad & log.\ a = & 1{\cdot}6583930 \\
log.\ r = & 10 & & log.\ \mathrm{sty.}\,\beta = & 9{\cdot}8750610 \\
\hline
 & 11{\cdot}6583930 & & & 11{\cdot}5334540 \\
log.\ \mathrm{sty.}\,\alpha = & 10{\cdot}1249389 & & log.\ r = & 10 \\
\hline
log.\ b = & 1{\cdot}5334541 & & log.\ b = & 1{\cdot}5334540
\end{array}$$

Naocznie się więc przekonywamy, iż wypadki są zupełnie też same bąć to że $r = 1$, bąć też $r = 10^{10}$ rozumiemy.

Jeszcze tu jednę zrobię uwagę, mogącą być w wielu przypadkach przydatną a szczególniéj w dalszym ciągu.

Ze zrównania $b = \frac{a}{\mathrm{sty.}\,\alpha}$ mamy $log.\ b = log.\ a - log.\ \mathrm{sty.}\,\alpha$: atoli według §. 89. *Arytm.* mamy téż

$$log.\ b = log.\ a + (10 - log.\ \mathrm{sty.}\,\alpha) - 10$$

t. j. zamiast odejmować $log.\ \mathrm{sty.}\,\alpha$, możemy dodać jego dopełnienie dziesiętne, odejmując potém od summy, a mianowicie od cechy logarytmu, 10. I tak:

$$\begin{array}{rl}
log.\ a = & 1{\cdot}6583930 \\
dpł.\ log.\ \mathrm{sty.}\ \alpha = & 9{\cdot}8750611 \\
\hline
log.\ b = & 1{\cdot}5334541
\end{array}$$

Ale i w zrównaniach

$$log.\ h = log.\ a + log.\ r - log.\ \mathrm{wst.}\ \alpha = log.\ a + log.\ r - log.\ \mathrm{dost.}\ \beta,$$

$$log.\ b = log.\ a + log.\ r - log.\ \mathrm{sty.}\ \alpha$$

kładąc 10^{10} za r i pisząc je następnie

$$log.\ h = log.\ a + (10 - log.\ \mathrm{wst.}\ \alpha) = log.\ a + (10 - log.\ \mathrm{dost.}\,\beta)$$

$$log.\ b = log.\ a + (10 - log.\ \mathrm{sty.}\ \alpha)$$

widzimy że wyrazy $10 - log.\ \mathrm{wst.}\ \alpha$, $10 - log.\ \mathrm{dost.}\ \beta$,

$$10 - log.\ \mathrm{sty.}\ \alpha$$

niczém inném nie są jak tylko dopełnieniami dziesiętnemi, zatém zamiast dodawać wprzód 10 a potém odejmować

$$log.\ \mathrm{wst.}\ \alpha \text{ lub } log.\ \mathrm{dost.}\ \beta \text{ lub } log.\ \mathrm{sty.}\ \alpha,$$

dodajemy raczéj zaraz toż dopełnienie dziesiętne.

Ten sposób rachowania dopełnieniami, chroni nas często od omyłek, bo dopełnienie dziesiętne bierze się prawie mechanicznie, a dodawanie mniéj jest podległe omyłkom niż odejmowanie. W dalszym ciągu mieć będziemy sposobność pokazać to na różnych przykładach.

W końcu roztrząsania przypadków rozwiązania trójkątów prostokątnych, zwracam jeszcze uwagę uczących się, że rzuciwszy okiem na użyte na ten cel wzory, przekonają się, iż wzory

$$\alpha + \beta = 90^0, \quad a = h \text{ wst. } \alpha, \quad b = h \text{ dost. } \alpha \text{ i } \frac{a}{b} = \text{sty } \alpha$$

lub w miejscu trzech ostatnich

$$a = \frac{h \text{ wst. } \alpha}{r}, \quad b = \frac{h \text{ dost. } \alpha}{r}, \quad \frac{a}{b} = \frac{\text{sty. } \alpha}{r}$$

przydając do nich $h^2 = a^2 + b^2$, są wystarczającemi na wszystkie przypadki, a zatém i do zatrzymania w pamięci łatwe, szczególniéj też w kształcie twierdzeń wysłowione.

§. 25.

W rozwiązywaniu trójkątów prostokątnych zdarzają się jeszcze przypadki, że zamiast samych elementów, dana jest ich summa lub różnica; sądzę przeto, że dla zupełności rozwiązania takich trójkątów, należy jeszcze podać wzory i na te szczególne przypadki, jakkolwiek takowe z ogólnych wypływają. Tych szczególnych przypadków może być ośm, a mianowicie, zatrzymując znaczenie głosek h, a, b, α, β, następujące:

1. Mogą być dane h i $a + b$ lub $a - b$
2. . . . . . . α lub β i $a - b$ lub $a + b$
3. . . . . . . $a + b$ i $a - b$
4. . . . . . . α lub β i $h - a$ lub $h + a$
5. . . . . . . a i $h - b$ lub $h + b$
6. . . . . . . $h + a$ i $h - a$
7. . . . . . . h i $h - a$ lub h i $h + a$
8. . . . . . . b i $\alpha - \beta$.

Co do 1. Niech dane będą h i $a + b$ lub $a - b$, znaleść potrzeba a, b i kąty α, β.

Szukając naprzód a i b połóżmy $a + b = s$, tedy $$a^2 + b^2 + 2ab = s^2.$$
A że $a^2 + b^2 = h^2$ zatém $s^2 = h^2 + 2ab$ stąd $2ab = s^2 - h^2$. Jeżeli teraz od zrównania

$$a^2 + b^2 + 2ab = s^2$$

odejmiemy podwójne ostatnie $4ab = 2s^2 - 2h^2$

otrzymamy $(a-b)^2 = 2h^2 - s^2$

skąd $a - b = \sqrt{2h^2 - s^2}$. A że $a + b = s$

zatém $a = \dfrac{s + \sqrt{2h^2 - s^2}}{2}$, $b = \dfrac{s - \sqrt{2h^2 - s^2}}{2}$

Gdyby dane były h i $a - b$, tedy położywszy $a - b = d$, mielibyśmy

$$a^2 + b^2 - 2ab = d^2 \text{ skąd } 2ab = h^2 - d^2.$$

Podwójne to zrównanie dodawszy do poprzedzającego, znajdziemy $(a+b)^2 = 2h^2 - d^2$ skąd $a + b = \sqrt{2h^2 - d^2}$

a następnie $a = \dfrac{\sqrt{2h^2 - d^2} + d}{2}$, $b = \dfrac{\sqrt{2h^2 - d^2} - d}{2}$

Aby teraz znaleść kąty α i β w obu przypadkach, uważmy naprzód że wst. $45^\circ =$ dost. $45^\circ = \frac{1}{2}\sqrt{2} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ §. 12, potém że

wst. $\alpha = \dfrac{a}{h}$, dost. $\alpha = \dfrac{b}{h}$, wst. $\beta = \dfrac{b}{h}$, dost. $\beta = \dfrac{a}{h}$, tudzież we wzorach (2) i (4) położywszy następnie $\beta = 45^0$, $\alpha = 45$, znajdziemy

$$\text{wst. } (\alpha - 45^\circ) = \frac{\text{wst. } \alpha - \text{dost. } \alpha}{\sqrt{2}}$$

$$\text{dost. } (\alpha - 45^\circ) = \frac{\text{dost. } \alpha + \text{wst. } \alpha}{\sqrt{2}}$$

$$\text{wst. } (45^\circ - \beta) = \frac{\text{dost. } \beta - \text{wst. } \beta}{\sqrt{2}}$$

$$\text{dost. } (45^\circ - \beta) = \frac{\text{dost. } \beta + \text{wst. } \beta}{\sqrt{2}}$$

A że wst. $\alpha -$ dost. $\alpha = \dfrac{a-b}{h}$, dost. $\alpha +$ wst. $\alpha = \dfrac{a+b}{h}$,

dost. $\beta -$ wst. $\beta = \dfrac{a-b}{h}$, dost. $\beta +$ wst. $\beta = \dfrac{a+b}{h}$,

zatém wst. $(\alpha - 45^0) = \dfrac{a-b}{h\sqrt{2}}$, wst. $(45^\circ - \beta) = \dfrac{a-b}{h\sqrt{2}}$,

dost. $(\alpha - 45^\circ) = \dfrac{a+b}{h\sqrt{2}}$, dost. $(45^0 - \beta) = \dfrac{a+b}{h\sqrt{2}}$

a następnie wst. $(\alpha - 45^0) = $ wst. $(45^0 - \beta) = \frac{a-b}{h\sqrt{2}}$

$$= \sqrt{\frac{(a-b)^2}{2h^2}} = \sqrt{\frac{h^2 - 2ab}{2h^2}} = \sqrt{\frac{2h^2 - (a+b)^2}{2h^2}}$$

albo dost. $(\alpha - 45^0) = $ dost. $(45^0 - \beta) = \frac{a+b}{h\sqrt{2}}$

$$= \sqrt{\frac{(a+b)^2}{2h^2}} = \sqrt{\frac{h^2 + 2ab}{2h^2}} = \sqrt{\frac{2h^2 - (a-b)^2}{2h^2}}$$

bo $2ab = (a+b)^2 - h^2 = h^2 - (a-b)^2$.

Po otrzymaniu tym sposobem kątów α i β, boki a i b znaleść téż można według przypadku 3go poprzedzającego §.

Co do 2. Dane są α lub β i $a - b$, lub $a + b$; znaleść resztę.

Według poprzedzającego przypadku mamy

$$h = \frac{a-b}{\sqrt{2}\,\text{wst.}\,(a - 45^0)} = \frac{a+b}{\sqrt{2}\,\text{wst.}\,(45^0 - \beta)}$$

albo $$h = \frac{a+b}{\sqrt{2}\,\text{dost.}\,(\alpha - 45^0)}\quad \frac{a+b}{\sqrt{2}\,\text{dost.}\,(45^0 - \beta)}$$

Kładąc potém $a - b = d$ i $a + b = s$,

ponieważ $2ab = h^2 - d^2$, tudzież $2ab = s^2 - h^2$,

będzie więc $a + b = \sqrt{2h^2 - d^2}$, $a - b = \sqrt{2h^2 - s^2}$

a następnie $a = \frac{\sqrt{2h^2 - d^2} + d}{2}$, $b = \frac{\sqrt{2h^2 - d^2} - d}{2}$

albo też $a = \frac{s + \sqrt{2h^2 - s^2}}{2}$, $b = \frac{s - \sqrt{2h^2 - s^2}}{2}$

Co do 3. Z wiadomych $a - b$ i $a + b$ znaleść wszystkie pięć elementów.

Boki a i b znajdują się łatwo z wiadoméj ich summy i różnicy, α i β, znajdziemy ze zrównań piérwszego przypadku

wst. $(\alpha - 45^0) = \frac{a-b}{h\sqrt{2}}$, dost. $(\alpha - 45^0) = \frac{a+b}{h\sqrt{2}}$

tudzież wst. $(45^0 - \beta) = \frac{a-b}{h\sqrt{2}}$, dost. $(45^0 - \beta) = \frac{a+b}{h\sqrt{2}}$,

otrzymamy bowiem: sty. $(\alpha - 45^0) = \frac{a-b}{a+b}$ i sty. $(45^0 - \beta) = \frac{a-b}{a+b}$

Przeciwprostskątnię h znajdziemy algebraicznie lub trygonometrycznie. Gdy bowiem $h^2=a^2+b^2=(a+b)^2-2ab$,

tudzież $h^2=a^2+b^2=(a-b)^2+2ab$,

zatém $2h^2=(a+b)^2+(a-b)^2$

skąd $h=\sqrt{\frac{(a+b)^2+(a-b)^2}{2}}$

Można téż znaleść h, po wyznaczeniu kąta α lub β.

Co do 4. W trójkącie prostokątnym dane są α lub β i $h-a$ lub $h+a$, rozwiązać ten trójkąt.

Ponieważ dost. $\beta=\frac{a}{h}$, skąd według wzorów (10) i (11) jest

$$\text{wst.}\,\tfrac{1}{2}\beta=\sqrt{\frac{h-a}{2h}},\quad \text{dost.}\,\tfrac{1}{2}\beta=\sqrt{\frac{h+a}{2h}}$$

$$\text{zaś } \alpha+\beta=90^0, \text{ skąd } \tfrac{1}{2}\beta=45^0-\tfrac{1}{2}\alpha$$

a następnie wst. $\frac{1}{2}\beta=$wst.$(45^0-\frac{1}{2}\alpha)$, dost.$\frac{1}{2}\beta=$dost.$(45^0-\frac{1}{2}\alpha)$,

zatém
$$\text{wst.}\,\tfrac{1}{2}\beta=\text{wst.}\,(45^0-\tfrac{1}{4}\alpha)=\sqrt{\frac{h-a}{2h}},$$

$$\text{dost.}\,\tfrac{1}{2}\beta=\text{dost.}\,(45^0-\tfrac{1}{2}\alpha)=\sqrt{\frac{h+a}{2h}},$$

a stąd
$$h=\frac{h-a}{2\,\text{wst.}\,\frac{1}{2}\beta^2}=\frac{h-a}{2\,\text{wst.}\,(45^0-\frac{1}{2}\alpha)^2}$$

tudzież
$$h=\frac{h+a}{2\,\text{dost.}\,\frac{1}{2}\beta^2}=\frac{h+a}{2\,\text{dost.}\,(45^0-\frac{1}{2}\alpha)^2}$$

Bok b znajdziemy następującym sposobem: z powyższych zrównań wypada

$$\text{sty.}\,\tfrac{1}{2}\beta=\text{sty.}\,(45^0-\tfrac{1}{2}\alpha)=\sqrt{\frac{h-a}{h+a}}=\frac{\sqrt{h^2-a^2}}{h+a}$$

$$=\frac{h-a}{\sqrt{h^2-a^2}}=\frac{b}{h+a}=\frac{h-a}{b}$$

skąd
$$b=\frac{h-a}{\text{sty.}\,\frac{1}{2}\beta}=\frac{h-a}{\text{sty.}\,(45^0-\frac{1}{2}\alpha)}$$

$$=(h+a)\,\text{sty.}\,\tfrac{1}{2}\beta=(h+a)\,\text{sty.}\,(45^0-\tfrac{1}{2}\alpha)$$

Nakoniec mając już h i b, mamy tém samém a i trójkąt tym sposobem rozwiązany.

Co do 5. Mając dane a i $h-b$ lub $h+a$, znaleść h, b, α, β.

Ponieważ $a^2 = h^2 - b^2 = (h+b)(h-b)$

skąd $h+b = \dfrac{a^2}{h-b}$ zaś $h-b = \dfrac{a^2}{h+b}$,

zatém jeżeli jest daném $h-b$ znajdziemy,

$$h = \frac{a^2}{2(h-b)} + \frac{h-b}{2} = \frac{a^2+(h-b)^2}{2(h-b)},$$

$$b = \frac{a^2}{2(h-b)} - \frac{h-b}{2} = \frac{a^2-(h-b)^2}{2(h-b)}$$

W przypadku zaś że jest daném $h+b$, mamy

$$h = \frac{h+b}{2} + \frac{a^2}{2(h+b)} = \frac{(h+b)^2+a^2}{2(h+b)},$$

$$b = \frac{h+b}{2} - \frac{a^2}{2(h+b)} = \frac{(h+b)^2-a^2}{2(h+b)}$$

Kąty α i β znajdziemy ze zrównań poprzedzającego przypadku; jest bowiem

$$\text{sty.}\, \tfrac{1}{2}\alpha = \text{sty.}\,(45^0 - \tfrac{1}{2}\beta) = \frac{h-b}{a} = \frac{a}{h+b}.$$

Co do 6. Dane są $h+a$ i $h-a$ znaleść wszystkie pięć elementów.

Ważności h i a znajdują się wprost z danéj ich summy i różnicy, a potém

$$b = \sqrt{h^2-a^2} = \sqrt{(h+a)(h-a)}$$

Kąty nareszcie α i β ze zrównań 4go przypadku; jest bowiem

$$\text{sty.}\, \tfrac{1}{2}\beta = \text{sty.}\,(45^0 - \tfrac{1}{2}\alpha) = \sqrt{\frac{h-a}{h+a}}.$$

Co do 7. Mając dane h i $h-a$, albo h i $h+a$, rozwiązać trójkąt.

Chcąc naprzód znaleść b, bo a jest tak dobrze jak dane, szukajmy w piérwszym przypadku summy $h+a$ a w drugim różnicy $h-a$, tedy

$$h+a = \frac{b^2}{h-a}\quad,\quad h-a = \frac{b^2}{h+a}$$

a następnie $h = \dfrac{b^2}{2(h-a)} + \dfrac{h-a}{2} = \dfrac{b^2+(h-a)^2}{2(h-a)}$

skąd $b = \sqrt{(h-a)\,[2h-(h-a)]}$

jako też $h = \dfrac{b^2}{2(h+a)} + \dfrac{h+a}{2} = \dfrac{b^2+(h+a)^2}{2(h+a)}$

skąd $b = \sqrt{(h+a)\,[2h+(h+a)]}$

Kąty α i β są znalezione w przypadku 4tym; tam bowiem znaleźliśmy

$$\text{wst.}\,\tfrac{1}{2}\beta = \text{wst.}\,(45^\circ - \tfrac{1}{2}\alpha) = \sqrt{\frac{h-a}{2h}},$$

tudzież $$\text{dost.}\,\tfrac{1}{2}\beta = \text{dost.}\,(45^0 - \tfrac{1}{2}\alpha) = \sqrt{\frac{h+a}{2h}}.$$

Nakoniec co do 8. Mając dane b i $\alpha - \beta$ znaleść resztę. Szukając naprzód kątów α i β,

ponieważ $\alpha = 45^0 + \frac{1}{2}(\alpha - \beta)$ a $\beta = 45^0 - \frac{1}{2}(\alpha - \beta)$,

zaś $\dfrac{a}{b} = \dfrac{\text{wst.}\,\alpha}{\text{wst.}\,\beta}$ więc $a = \dfrac{b\,\text{wst.}\,\{45^0 + \frac{1}{2}(\alpha-\beta)\}}{\text{wst.}\{45^0 - \frac{1}{2}(\alpha-\beta)\}}$

Podobnież, ponieważ $\dfrac{b}{h} = \text{wst.}\,\beta$,

zatém $h = \dfrac{b}{\text{wst.}\,\beta} = \dfrac{b}{\text{wst.}\,\{45^0 - \frac{1}{2}(\alpha-\beta)\}}$

Tym sposobem skończyliśmy szczególne w rozwiązywaniu trójkątów prostokątnych wydarzyć się mogące przypadki. Niech atoli uczący się nie myślą, że tylko te są jedyne sposoby i wzory na rozwiązanie tych przypadków, te bowiem można zmieniać w różny sposób. Ja podałem je według tablicy I. w Trygonometryi Burga z r. 1826 zamieszczonéj i z umysłu wszystkie wzory wyprowadziłem, iżby uczącym się wskazać jakiéj drogi trzymać się mają w innych podobnych przypadkach jako téż i w trójkątach ukośnokątnych, gdzie podobne szczególne przypadki opuszczę.

§. 26.

Zrozumiawszy dokładnie rozwiązanie prostokątnych, bardzo łatwo pojmiemy rozwiązanie trójkątów ukośnokątnych. Zobaczmy naprzód ile przypadków być może w rozwięzywaniu takich trójkątów. Oznaczywszy boki trójkąta ukośnokątnego przez a, b, c, kąty zaś im przeciwległe przez α, β, γ, które też i na przyszłość tak znaczyć będziemy, ponieważ z nauki o połączeniach §. 49 *Arytm.* wiadomo, iż z sześciu elementów a, b, c, α, β, γ mamy trojek $\frac{6\,.\,5\,.\,4}{1\,.\,2\,.\,3} = 20$ (bo trzy elementa muszą być dane aby trójkąt rozwiązać), zdawałoby się zatém na piérwszy rzut oka, iż 20 różnych przypadków w rozwiązywaniu ukośnokątnych trójkątów przytrafić się może. Atoli napisawszy te 20 połączeń jak następuje

a, α, β	b, α, β	c, α, β	a, b, α	a, c, α	b, c, β	a, b, γ	a, b, c	α, β, γ
a, α, γ	b, α, γ	c, α, γ	a, b, β	a, c, γ	b, c, γ	a, c, β		
a, β, γ	b, β, γ	c, β, γ				b, c, α		

i przypatrzywszy się im bliżéj, przekonamy się, iż piérwsze dziewięć stanowią jeden tylko przypadek, bo przez prostą przemianę elementów między sobą, jedno połączenie w drugie przechodzi. Zupełnie toż samo rozumié się o sześciu następnych, iż te stanowią także jeden tylko przypadek. Dalsze trzy zamieniają się także jedno w drugie przez przemianę elementów, stanowią więc również jeden przypadek. Połączenie a, b, c jest tylko jedno, więc téż jest osobnym przypadkiem. Ostatnie nareszcie połączenie α, β, γ odrzucić należy według warunku, że pomiędzy danemi elementami przynajmniéj jeden bok znajdować się powinien. W istocie bowiem trzy elementa α, β, γ, stanowią tylko dwa, bo jeden z trzech kątów przez dwa inne jest dany, na mocy zrównania $\alpha + \beta + \gamma = 180^0$. Tak tedy owe 20, sprowadzają się znowu tylko do cztérech przypadków, a mianowicie:

1. Może być dany którykolwiek bok i dwa jemu przyległe kąty.

2. Mogą być dane dwa boki i kąt jednemu z nich przeciwległy.

3. Mogą być dane dwa boki z kątem między niemi zawartym.

4. Nakoniec mogą być dane trzy boki trójkąta.

Nim przystąpimy do rozwiązania każdego w szczególności przypadku, przygotujmy sobie jeszcze wzory które nam tu potrzebne będą.

Twierdzenie w §. 9 dowiedzione, wyprowadziliśmy właśnie z trójkąta ukośnokątnego, wszelako nie uważaliśmy go w całéj ogólności, bośmy tylko wzięli przypadek gdy prostopadła z wiérzchołka kąta na bok jemu przeciwległy spuszczona, pada wewnątrz trójkąta; dla tego sądzę tu za potrzebne powtórzyć toż twierdzenie, bo z tegoż samego trójkąta wypływają nader ważne związki między jego elementami, które nam w wysokim stopniu ułatwią rozwiązanie trójkątów ukośnokątnych.

Niechże więc będzie trójkąt ABC lub A′B′C′ *fig. 15*, w którym oznaczając boki, jak to wyżéj ogólnie przyjęliśmy, przez a, b, c a kąty przez α, β, γ, tedy z powołanego §. już wiemy że $\frac{a}{b} = \frac{\text{wst.}\,\alpha}{\text{wst.}\,\beta}$. To zrównanie znaleźliśmy spuszczając z wiérzchołka C prostopadłą CD do AB i uważając dwa trójkąty prostokątne ACD i BCD. Gdybyśmy z wiérzchołka A spuścili prostopadłą AE na BC, mielibyśmy także z trójkąta ACE, $\frac{\text{AE}}{b} = \text{wst.}\,\gamma$, a z trójkąta ABE, $\frac{\text{AE}}{c} = \text{wst.}\,\beta$. Dzieląc drugie przez piérwsze, wypadnie

$$\frac{b}{c} = \frac{\text{wst.}\,\beta}{\text{wst.}\,\gamma} \text{ albo } \frac{b}{\text{wst.}\,\beta} = \frac{c}{\text{wst.}\,\gamma}.$$

A że z powyższego jest téż $\frac{a}{\text{wst.}\,\alpha} = \frac{b}{\text{wst.}\,\beta}$,

zatém
$$\frac{a}{\text{wst.}\,\alpha} = \frac{b}{\text{wst.}\,\beta} = \frac{c}{\text{wst.}\,\gamma}$$

Uważmy teraz trójkąt A′ B′ C′ w którym prostopadła C′ D′ pada zewnątrz trójkąta. Wszakże w trójkącie prostokątnym C′ D′ B′ jest $\frac{\text{C}'\text{D}'}{a} = \text{wst.}\,\beta$, zaś w takim że trójkącie A′C′D′ jest $\frac{\text{C}'\text{D}'}{b} = \text{wst. C}'\text{A}'\text{D}' = \text{wst.}\,(\pi - \alpha) = \text{wst.}\,\alpha$ §. 8. Dzieląc podobnie jak wyżéj zrównanie drugie przez piérwsze, znajdziemy $\frac{a}{b} = \frac{\text{wst.}\,\alpha}{\text{wst.}\,\beta}$ skąd wniesiemy że i w tym przypadku jest

$$\frac{a}{\text{wst.}\,\alpha} = \frac{b}{\text{wst.}\,\beta} = \frac{c}{\text{wst.}\,\gamma}$$

i że ogólnie *w trójkącie prostokreślnym boki jego mają się do siebie jak wstawy kątów tym bokom przeciwległych*, tudzież że powyższe stósunki i następnie

$$a : b : c = \text{wst.}\,\alpha : \text{wst.}\,\beta : \text{wst.}\,\gamma$$

napisać można; skąd mamy trzy proporcyje

$$a : b = \text{wst.}\,\alpha : \text{wst.}\,\beta \quad \text{lub} \quad \frac{a}{b} = \frac{\text{wst.}\,\alpha}{\text{wst.}\,\beta}$$

$$a : c = \text{wst.}\,\alpha : \text{wst}\,\gamma \quad . \; . \quad \frac{a}{c} = \frac{\text{wst.}\,\alpha}{\text{wst.}\,\gamma}$$

$$b : c = \text{wst.}\,\beta : \text{wst}\,\gamma \quad . \; . \quad \frac{b}{c} = \frac{\text{wst.}\,\beta}{\text{wst.}\,\gamma}$$

stanowiące tylko jednę do każdych dwóch boków i kątów im przeciwległych zastósowaną.

§. 27.

Wracając jeszcze do trójkątów ABC i A′B′C′, oznaczmy w piérwszym odcinki przez prostopadłą CD zrobione przez m i n t. j. połóżmy $AD = m$, $BD = n$, tedy z tychże samych trójkątów prostokątnych jest téż $\frac{m}{b} = \text{dost.}\,\alpha$, $\frac{n}{a} = \text{dost.}\,\beta$

czyli $\qquad m = b\,\text{dost.}\,\alpha, \quad n = a\,\text{dost.}\,\beta.$

A że $\quad m + n = c, \quad$ zatém $\quad c = b\,\text{dost.}\,\alpha + a\,\text{dost.}\,\beta$

Podobnież w trójkątach ACE i ABE kładąc $CE = m'$, $BE = n'$, mamy $m' = b\,\text{dost.}\,\gamma$, $n' = c\,\text{dost.}\,\beta$.

A że znowu $m' + n' = a \quad$ więc $\quad a = b\,\text{dost.}\,\gamma + c\,\text{dost.}\,\beta$

Gdybyśmy z wierzchołka B spuścili prostopadłą na AC czyli na b, znaleźlibyśmy podobnież

$$b = a\,\text{dost.}\,\gamma + c\,\text{dost.}\,\alpha.$$

Przejdźmy teraz do trójkąta A′B′C′ w którym prostopadła C′D′ pada zewnątrz trójkąta, a oznaczając jak w poprzedzającym odcinek A′D′ przez m'', odcinek zaś B′D′ przez n'' mamy:

w trójkącie $\quad$ A′C′D′ . . . $A'D' = m'' = b\,\text{dost. } C'A'D'$

$= b\,\text{dost.}(\pi - \alpha) \quad = -b\,\text{dost.}\,\alpha$ §. 8.

w trójkącie zaś B′C′D′ . . . $B'D' = n'' = a\,\text{dost.}\,\beta$.

A że $\quad B'D' - A'D' = n'' - m'' = A'B' = c$,

zatém $\quad c = a\,\text{dost.}\,\beta - (-b\,\text{dost.}\,\alpha) = b\,\text{dost.}\,\alpha + a\,\text{dost.}\,\beta$

t. j. zupełnie toż samo jak w piérwszym trójkącie; skąd wniesiemy że i na dwa inne boki a i b, znajdziemy ważności jak wyżéj.

Przypatrzywszy się z uwagą trzem zrównaniom na a, b, c, możemy ustanowić następujące twierdzenie: *w każdym trójkącie prostokreślnym którykolwiek bok równa się summie iloczynów z dwóch innych boków przez dostawę kąta między piérwszym i niemi zawartego.* Albo ogólniéj: *którykolwiek bok trójkąta, równa się summie rzutów dwóch innych na tenże trzeci bok zrobionych;* bo rzeczywiście np. b dost. α nic innego nie jest, jak długość rzutu boku b na c, gdyż się równa AD, zaś AD jak z §. 202 *Geom.* wiadomo, jest rzutem prostéj AC na AB.

Trzy co dopiéro otrzymane zrównania, a mianowicie

$$a = b \text{ dost. } \gamma + c \text{ dost. } \beta$$
$$b = a \text{ dost. } \gamma + c \text{ dost. } \alpha$$
$$c = b \text{ dost. } \alpha + a \text{ dost. } \beta$$

prowadzą nas do bardzo ważnego twierdzenia, mogącego być podstawą całéj Trygonometryi, gdyż z niego wszystkie do rozwiązania trójkątów służące wzory wyprowadzić można. Rozmnożywszy bowiem piérwsze przez a, drugie przez b a trzecie przez c, otrzymamy

$$a^2 = ab \text{ dost. } \gamma + ac \text{ dost. } \beta$$
$$b^2 = ab \text{ dost. } \gamma + bc \text{ dost. } \alpha$$
$$c^2 = bc \text{ dost. } \alpha + ac \text{ dost. } \beta.$$

Od piérwszego z tych ostatnich zrównań odjąwszy summę dwóch drugich, potém od drugiego odjąwszy summę piérwszego i trzeciego, a nareszcie od trzeciego summę piérwszego i drugiego znajdziemy

$$a^2 - b^2 - c^2 = -2bc \text{ dost. } \alpha \quad \text{albo} \quad a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \text{ dost. } \alpha$$
$$b^2 - a^2 - c^2 = -2ac \text{ dost. } \beta \quad \ldots\ldots \quad b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \text{ dost. } \beta$$
$$c^2 - a^2 - b^2 = -2ab \text{ dost. } \gamma \quad \ldots\ldots \quad c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \text{ dost. } \gamma.$$

Trzy tym sposobem otrzymane zrównania zamykają jedno i toż samo twierdzenie do każdego z trzech boków zastósowane, a które brzmi jak następuje: *w każdym trójkącie prostokreślnym, kwadrat z któregokolwiek boku, równa się sum-*

mie kwadratów z dwóch innych boków, zmniejszonéj podwójnym iloczynem z tychże boków przez dostawę kąta między niemi zawartego.

Oprócz wysłowionego twierdzenia dostrzegamy jeszcze w tych zrównaniach uogólnienie twierdzenia PITAGORESA; albowiem jeżeli $\alpha=90^{\circ}$, tedy dost. $\alpha=0$ a następnie $a^2=b^2+c^2$ Podobnież dwa inne zrównania prowadzą do rzeczonego twierdzenia gdy położymy $\beta=90^{\circ}$ i $\gamma=90^{\circ}$.

Napisawszy zaś powyższe zrównania następnie

$$\text{dost.}\,\alpha=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$$

$$\text{dost.}\,\beta=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$$

$$\text{dost.}\,\gamma=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$$

otrzymamy toż samo twierdzenie nieco w odmiennéj formie, mianowicie zaś, że *w każdym trójkącie prostokreślnym, dostawa jednego z kątów, równa się summie kwadratów z boków kąt ten obejmujących, zmniejszonéj kwadratem z boku przeciwległego, a podzielonéj przez podwójny iloczyn dwóch piérwszych boków.*

Czyniąc jednostkę r wyraźną, można jeszcze też same zrównania następnie napisać:

$$\frac{\text{dost.}\,\alpha}{r}=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$$

$$\frac{\text{dost.}\,\beta}{r}=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$$

$$\frac{\text{dost.}\,\gamma}{r}=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$$

i toż samo twierdzenie wysłowić pod innym następującym kształtem: *w każdym trójkącie prostokreślnym, tak się ma dostawa jednego z kątów do jednostki tablic (do promienia tablic) jak się ma summa kwadratów z boków kąt ten obejmujących, zmniejszona kwadratem z boku trzeciego, do podwójnego iloczynu dwóch piérwszych boków.*

Ponieważ to ważne twierdzenie w téj troistéj formie napotyka się w autorach, dla tego sądziłem za potrzebne zwrócić na nie uwagę uczących się, iżby ich nie brali za twierdzenia różne.

Ostatnie twierdzenie wyprowadziliśmy z figury, atoli można się bez niéj zupełnie obejść i przez rachunek przyjść do powyższych zrównań, jak to wkrótce zobaczymy.

§. 28.

W §. 26 widzieliśmy, że rozwiązanie trójkątów prostokreślnych ukośnokątnych sprowadza się do cztérech przypadków tamże wyliczonych; aby więc w każdym z tych przypadków rozwiązać trójkąt, należy znaleść na każdy potrzebne wzory.

Na rozwiązanie trójkąta w piérwszym przypadku, mamy wzór w powołanym §. znaleziony t. j.

$$\frac{a}{\text{wst.}\,\alpha}=\frac{b}{\text{wst.}\,\beta}=\frac{c}{\text{wst.}\,\gamma}$$

do którego dodać należy $\alpha+\beta+\gamma=180^\circ$.
Te zrównania zamykają jak widzimy związek między dwoma bokami i dwoma kątami im przeciwległemi; wystarczają więc do rozwiązania trójkąta, skoro z pomiędzy elementów a, b, α, β, a, c, α, γ; b, c, β, γ, trzy którekolwiek są dane t. j. wystarczają zupełnie do rozwiązania piérwszego przypadku.

Ponieważ w drugim przypadku dane są dwa boki i kąt jednemu z nich przeciwległy, postarać nam się zatém potrzeba o zrównanie między cztérema elementami t. j. dwoma bokami i dwoma kątami jednym przyległym a drugim przeciwległym jednemu z boków danych. Szukajmy więc zrównania np. między b, c, α, β.

Z poprzedzającego mamy $b\,\text{wst.}\,\gamma=c\,\text{wst.}\,\beta$, w którém są tylko trzy z żądanych elementów t. j. b, c, β a w miejscu czwartego α, znajduje się γ. Ale tego elementu łatwo się pozbyć, bo $\gamma=180^\circ-(\alpha+\beta)$ a następnie $\text{wst.}\,\gamma=\text{wst}(\alpha+\beta)$. Położywszy tę ważność za $\text{wst.}\,\gamma$, otrzymamy
$b\,\text{wst.}(\alpha+\beta)=c\,\text{wst.}\,\beta$ albo $b\,\text{wst.}\,\alpha\,\text{dost.}\,\beta+b\,\text{dost.}\,\alpha\,\text{wst.}\,\beta=c\,\text{wst.}\,\beta$.

Dzieląc obie strony przez dost. β, będzie

$$b\,\text{wst.}\,\alpha + b\,\text{dost.}\,\alpha\,\text{sty.}\,\beta = c\,\text{sty.}\,\beta$$

albo $$(c - b\,\text{dost.}\,\alpha)\,\text{sty.}\,\beta = b\,\text{wst.}\,\alpha$$

skąd $$\text{sty.}\,\beta = \frac{b\,\text{wst.}\,\alpha}{c - b\,\text{dost.}\,\alpha}$$

które zrównanie jest szukaném pod najprostszą formą wyrażoném.

Na trzeci przypadek mamy już wzór prawie gotowy. Gdy bowiem $\frac{a}{b} = \frac{\text{wst.}\,\alpha}{\text{wst.}\,\beta}$, przeto raz dodawszy a drugi raz odjąwszy od obu stron tego zrównania 1, będzie

$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{\text{wst.}\,\alpha + \text{wst.}\,\beta}{\text{wst.}\,\beta}, \qquad \frac{a-b}{b} = \frac{\text{wst.}\,\alpha - \text{wst.}\,\beta}{\text{wst.}\,\beta}$$

Dzieląc piérwsze przez drugie, znajdziemy

$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{\text{wst.}\,\alpha + \text{wst.}\,\beta}{\text{wst.}\,\alpha - \text{wst.}\,\beta} = \frac{\text{sty.}\,\frac{\alpha+\beta}{2}}{\text{sty.}\,\frac{\alpha-\beta}{2}} \quad \text{§. 13 wzór (24).}$$

Ten wzór wysłowiony, zamyka znowu następujące twierdzenie: *w każdym trójkącie prostokreślnym tak się ma summa dwóch którychkolwiek jego boków do różnicy tychże boków, jak się ma styczna połowy summy kątów tym bokom przeciwległych do stycznéj połowy różnicy tychże kątów.*

To twierdzenie dowodzi się jeszcze łatwiéj następującym sposobem: Niech będzie bok $a > b$, tedy i $\alpha > \beta$; położywszy $\frac{\alpha+\beta}{2} = x$, $\frac{\alpha-\beta}{2} = z$, znajdziemy $\alpha = x + z$, $\beta = x - z$.

Ponieważ według piérwszego przypadku jest $a\,\text{wst.}\,\beta = b\,\text{wst.}\,\alpha$, zatém położywszy ważności za α i β będzie

$$b\,\text{wst.}\,(x+z) = a\,\text{wst.}\,(x-z)$$

albo $$b\,\text{wst.}\,x\,\text{dost.}\,z + b\,\text{dost.}\,x\,\text{wst.}\,z$$
$$= a\,\text{wst.}\,x\,\text{dost.}\,z - a\,\text{dost.}\,x\,\text{wst.}\,z$$

skąd $$(a+b)\,\text{dost.}\,x\,\text{wst.}\,z = (a-b)\,\text{wst.}\,x\,\text{dost.}\,z.$$

Dzieląc obie strony tego zrównania przez $(a-b)$ dost. x wst. z, otrzymamy

$$\frac{a+b}{a-b}=\text{sty.}\,x\,\text{doty.}\,z=\frac{\text{sty.}\,x}{\text{sty.}\,z}=\frac{\text{sty.}\,\frac{\alpha+\beta}{2}}{\text{sty.}\,\frac{\alpha-\beta}{2}}\ \text{jak wyżéj.}$$

Można téż to twierdzenie jak każde inne dowieść geometrycznie jak następuje:

Niech będzie trójkąt ABC *fig. 16* w którym BC$=a$, AC$=b$ jak zwyczajnie i kąty tym bokom przeciwległe α i β, tudzież $a>b$; na większym boku BC odetnijmy CD$=$CA i poprowadźmy prostą AD, tedy kąt CAD$=x=$CDA$=z$. A że kąt C jest spólny tak trójkątowi ABC jako téż i ACD, a tak w piérwszym jako i drugim summa trzech kątów waży 2R, zatém $x+z=A+B=\alpha+\beta$, czyli $2x=\alpha+\beta$ t. j. $x=\frac{\alpha+\beta}{2}$. Lecz $A=\alpha=x+BAD=x+y=\frac{\alpha+\beta}{2}+y$,

przeto $$y=\alpha-\frac{\alpha+\beta}{2}=\frac{\alpha-\beta}{2}.$$

Z punktu C spuśćmy prostopadłą CE do AD i tę przedłużmy aż do przecięcia się z bokiem AB w punkcie F, przez punkt E poprowadźmy EG równoległą do AB, tedy będzie

$$DE:AD=DG:BD.$$

Ponieważ DE$=\frac{1}{2}$AD, zatém téż DG$=\frac{1}{2}$BD czyli DG$=$BG. Ale BD$=$BC$-$CD$=$BC$-$AC$=a-b$, więc

$$BG=\tfrac{1}{2}BD=\frac{a-b}{2}.$$

Podobnież $$CG=BC-BG=a-\frac{a-b}{2}=\frac{a+b}{2}.$$

Z trójkąta FCB, mamy téż, CG : BG $=$ CE : EF czyli

$\frac{a+b}{2}:\frac{a-b}{2}=$CE:EF albo $a+b:a-b=$CE:EF

Z punktu A jako ze środka promieniem $=$AE zakreśliwszy łuk przecinający ramiona kąta A lub cały okrąg, naocznie dostrzeżemy że EF jest styczną kąta y a CE styczną kąta x; zatém nareszcie będzie

$$a+b:a-b=\text{sty.}\,x:\text{sty.}\,y=\text{sty.}\,\frac{\alpha+\beta}{2}:\text{sty.}\,\frac{\alpha-\beta}{2}$$

t. j. zupełnie tož samo jak dwoma analitycznemi sposobami otrzymaliśmy.

Ten ostatni dowód podał sławny L'HUILLER matematyk genewski.

Ponieważ $\alpha+\beta+\gamma=\pi$ skąd $\frac{\alpha+\beta}{2}=(\frac{1}{2}\pi-\frac{1}{2}\gamma)$ a następnie sty. $\frac{\alpha+\beta}{2}=$doty. $\frac{1}{2}\gamma$, zatém trzema sposobami otrzymany wzór można i tak napisać:

$$\frac{a+b}{a-b}=\frac{\text{doty.}\frac{1}{2}\gamma}{\text{sty.}\frac{\alpha-\beta}{2}}$$

skąd
$$\text{sty.}\frac{\alpha-\beta}{2}=\frac{a-b}{a+b}\text{doty.}\tfrac{1}{2}\gamma$$

Z tego zrównania znajdziemy $\frac{\alpha-\beta}{2}$ t. j. połowę różnicy dwóch kątów; a że summa ich a zatém i połowa jéj także znaną (bo w tym przypadku dane są dwa boki a, b, i kąt między niemi zawarty γ), przeto znajdziemy téż same kąty α i β.

W czwartym nareszcie przypadku, gdzie dane są trzy boki a szukamy kątów, postarać się musimy o zrównanie dające związek między trzema bokami i jednym kątem. Takie zrównanie już otrzymaliśmy w §. poprzedzającym, atoli wspomniałem tamże, iż to zrównanie otrzymać można drogą zupełnie rachunkową, teraz przeto chcę pokazać jakim sposobem.

Dla drugiego przypadku znalezione zrównanie

sty. $\beta=\frac{b\,\text{wst.}\,\alpha}{c-b\,\text{dost}\,\alpha}$ podniesione do kwadratu daje

$$\text{sty.}\beta^2=\frac{b^2\,\text{wst.}\,\alpha^2}{c^2+b^2\,\text{dost.}\,\alpha^2--2bc\,\text{dost.}\,\alpha}.$$

Ale z §. 11 lub 16 wiadomo że wst. $\beta=\frac{\text{sty.}\beta}{\sqrt{1+\text{sty.}\beta^2}}$

$$\text{albo}\quad \text{wst.}\beta^2=\frac{\text{sty.}\beta^2}{1+\text{sty.}\beta^2}.$$

Położywszy tu za sty. β^2 powyższą ważność znajdziemy

$$\text{wst.}\,\beta^2 = \frac{\dfrac{b^2\,\text{wst.}\,\alpha^2}{c^2+b^2\,\text{dost.}\alpha^2-2bc\,\text{dost.}\,\alpha}}{1+\dfrac{b^2\,\text{wst.}\,\alpha^2}{c^2+b^2\,\text{dost.}\alpha^2-2bc\,\text{dost.}\,\alpha}} = \frac{b^2\,\text{wst.}\,\alpha^2}{c^2+b^2-2bc\,\text{dost.}\,\alpha}$$

albo $$a^2\,\text{wst.}\,\beta^2 = \frac{a^2 b^2\,\text{wst.}\,\alpha^2}{c^2+b^2-2bc\,\text{dost.}\,\alpha}.$$

A że $a\,\text{wst.}\,\beta = b\,\text{wst.}\,\alpha$ a następnie $a^2\,\text{wst.}\,\beta^2 = b^2\,\text{wst.}\,\alpha^2$

zatém $$b^2\,\text{wst.}\,\alpha^2 = \frac{a^2 b^2\,\text{wst.}\,\alpha^2}{b^2+c^2-2bc\,\text{dost.}\,\alpha}$$

albo $$1 = \frac{a^2}{b^2+c^2-2bc\,\text{dost.}\,\alpha}$$

skąd $$a^2 = b^2+c^2-2bc\,\text{dost.}\,\alpha$$

i to jest zrównaniem poprzedzającego §. o którém już wspomniałem.

Rzuciwszy okiem na zrównania jakieśmy na rozwiązanie trójkątów ukośnokątnych w każdym z cztérech przypadków wyprowadzili, przekonamy się jak przy trójkątach prostokątnych, że zrównania

$\alpha+\beta+\gamma=\pi$, $b\,\text{wst.}\,\alpha = a\,\text{wst.}\,\beta$ lub $b\,\text{wst.}\,\gamma = c\,\text{wst.}\,\beta$,

$$\text{sty.}\,\beta = \frac{b\,\text{wst.}\,\alpha}{c-b\text{dost.}} \quad a^2 = b^2+c^2-2bc\,\text{dost.}\,\alpha$$

są wystarczającemi na rozwiązanie trójkąta prostokreślnego w każdym przypadku, nie obciążą więc pamięci żeby je uczący się zatrzymał.

§. 29.

Roztrząśnijmy teraz każdy w szczególności przypadek, podając przy tém liczbowe przykłady dla tém lepszego zrozumienia i zastósowania.

Przypadek 1. Niech w trójkącie danym będzie bok c i dwa jemu przyległe kąty α i β, a znaleść potrzeba dwa inne boki i kąt γ.

Kąt γ znajduje się z piérwszego zrównania, bo $\gamma = \pi - (\alpha+\beta)$. Boki a i b znajdą się ze zrównań

$$\frac{a}{\text{wst.}\,\alpha} = \frac{c}{\text{wst.}\,\gamma} \quad \text{i} \quad \frac{b}{\text{wst.}\,\beta} = \frac{c}{\text{wst.}\,\gamma} \text{ jest bowiem}$$

$$a = \frac{c \text{ wst.} \alpha}{\text{wst.} \gamma} = \frac{c \text{ wst.} \alpha}{\text{wst.}(\alpha+\beta)}, \qquad b = \frac{c \text{ wst.} \beta}{\text{wst.} \gamma} = \frac{c \text{ wst.} \beta}{\text{wst.}(\alpha+\beta)},$$

Przykład. Niech będzie $c = 87\text{˙}811$ sążni,

$\alpha = 40^\circ 56' 0''\text{˙}00$, $\beta = 54^\circ 16' 8''\text{˙}48$ tedy

$\gamma = 180^\circ - (\alpha+\beta) = 180^\circ - 95^\circ 12' 8''\text{˙}48 = 84^\circ 47' 51''\text{˙}52$, potém

$log. c$	$= 1\text{˙}9435489$	albo	$log. c$	$= 1\text{˙}9435489$
$log.$ wst. α	$= 9\text{˙}8163609$		$log.$ wst. α	$= 9\text{˙}8163609$
	$1\text{˙}7599098$		$dpł.log.(\alpha+\beta)$	$= 0\text{˙}0017927$
$log.$wst.$(\alpha+\beta)$	$= 9\text{˙}9982073$		$log. a$	$= 1\text{˙}7617025$
$log. a$	$= 1\text{˙}7617025$			

zatém $a = 57\text{˙}770$,

$log. c$	$= 1\text{˙}9435489$	albo	$log. c$	$= 1\text{˙}9435489$
$log.$ wst. β	$= 9\text{˙}9094319$		$log.$ wst. β	$= 9\text{˙}9094319$
	$1\text{˙}8529808$		$dpł.log.(\alpha+\beta)$	$= 0\text{˙}0017927$
$log.$wst.$(\alpha+\beta)$	$= 9\text{˙}9982073$		$log. b$	$= 1\text{˙}8547735$
$log. b$	$= 1\text{˙}8547735$			

zatém $b = 71\text{˙}577$

Przypadek 2. Dane są dwa boki b, c i kąt β jednemu z nich przeciwległy; znaleść a, α, γ. Kąt γ znajdziemy ze zrównania wst.$\gamma = \frac{c \text{ wst.} \beta}{b}$; a mając tym sposobem już i trzeci kąt α, według piérwszego przypadku znaleść można a. Atoli znalazłszy $log.$ wst.γ i szukając w tablicach odpowiadającego mu kąta, pozostaje jeszcze wątpliwość, czyli ten kąt jest ostry lub rozwarty; kąty bowiem γ i $180 - \gamma$ mają jak wiadomo tak co do wielkości jako i znaku tęż samę wstawę. Wątpliwość ta znika, jeżeli $b > c$ t. j. jeżeli bok któremu przeciwległy kąt dany, jest większy niż drugi bok dany; w tym bowiem przypadku musi téż być $\beta > \gamma$. Jeżeli przeto kąt β jest rozwarty lub prosty, kąt γ nie może być inny tylko ostry; jeżeli zaś kąt β jest ostry, tém więcéj kąt γ ostrym być musi jako od niego mniejszy. Ale jeżeli $b < c$ i β powinno być $< \gamma$, gdy tym czasem ze zrównania wst.$\gamma = \frac{c \text{ wst.} \beta}{b}$ w przypadku gdy $\beta < 90^\circ$, czyli gdy kąt β jest ostry, wziąwszy za kąt γ raz kąt ostry a drugi raz rozwarty, otrzymamy dwa trójkąty różne z tychże samych elementów wystawione, jeden ostrokątny a drugi rozwartokątny, o jakich mówiliśmy w Geometryi §. 44 *Uwaga.* Lecz i w tym przypadku wątpliwość ustaje, jeżeli $\frac{c \,\text{wst.}\, \beta}{b} = 1$, gdyż wtedy wst.$\gamma = 1$ a $\gamma = 90^\circ$. Gdyby zaś było $\frac{c \,\text{wst.}\, \beta}{b} > 1$, wypadłaby też wst.$\gamma > 1$, co jak wiemy być nie może i z elementów danych prowadzących do takiego wypadku, trójkąt jest niemożebny. Ten przeto drugi przypadek jest w ogólności wątpliwym.

Przykład. Niech trójkąt w piérwszym przypadku rozwiązany będzie dla nas kontrolą; dla każdego przeto przypadku brać będziemy elementa dane z tegoż trójkąta. Tak w obecnym razie niech dane będą $b = 71{\cdot}577$ sążni, $c = 87{\cdot}811$ sążni, tudzież $\beta = 54^\circ 16' 8''{\cdot}48$, tedy szukając naprzód kątów α i γ mamy:

$$\log.\,\text{wst.}\,\gamma = \log c + \log.\,\text{wst.}\,\beta - \log.\, b \quad \text{t. j.}$$

$$\begin{array}{rl}
\log.c = 1{\cdot}9435489 & \text{lub} \quad \log.c = 1{\cdot}9435489 \\
\log.\text{wst.}\,\beta = 9{\cdot}9094319 & \quad \log.\,\text{wst.}\,\beta = 9{\cdot}9094319 \\
\hline
1{\cdot}8529808 & \quad dpl.\,\log.\, b = 8{\cdot}1452265 \\
\log.b = 1{\cdot}8547735 & \quad \log.\,\text{wst.}\,\gamma = 9{\cdot}9982073 \\
\hline
\log.\,\text{wst.}\,\gamma = 9{\cdot}9982073 &
\end{array}$$

zatém $\gamma = 84^\circ 47' 51''{\cdot}58$, a następnie $\alpha = 40^\circ 55' 59''{\cdot}94$. Ale ponieważ także być może $\gamma = 180^\circ - 84^\circ 47' 51''{\cdot}58 = 95^\circ 12' 8''{\cdot}42$, przez co też będzie $\alpha = 30^\circ 31' 43''{\cdot}10$ przeto dla znalezienia boku a mamy $a = \frac{b \,\text{wst.}\, \alpha}{\text{wst.}\, \beta}$ t. j.

$$\begin{array}{rl}
\log.\, b = 1{\cdot}8657735 & \text{albo} \quad \log.\, b = 1{\cdot}8657735 \\
\log.\,\text{wst.}\,\alpha = 9{\cdot}8163608 & \quad \log.\,\text{wst.}\,\alpha = 9{\cdot}7058372 \\
dpl.\log.\,\text{wst.}\,\beta = 0{\cdot}0905681 & \quad dpl.\,\log.\,\text{wst.}\,\beta = 0{\cdot}0905681 \\
\hline
\log.\,\alpha = 1{\cdot}7617024 & \quad \log.\, a = 1{\cdot}6511788
\end{array}$$

przeto $a = 57{\cdot}770$ sążni $\qquad a = 44{\cdot}790$ sążni.

Tym sposobem z danych elementów mielibyśmy dwa trójkąty t. j.

$a=57\cdot770$	$\alpha=40^{\circ}55'59''\cdot94$		$a=44\cdot789$	$\alpha=30^{\circ}31'43''\cdot10$
$b=71\cdot577$	$\beta=54\ 16\ \ 8\cdot48$	i	$b=71\cdot577$	$\beta=54\ 16\ \ 8\cdot48$
$c=87\cdot811$	$\gamma=84\ 47\ 51\cdot58$		$c=87\cdot811$	$\gamma=95\ 12\ \ 8\cdot42$

piérwszy jak widzimy jest ostrokątny, drugi rozwartokątny. A że dany kąt β leży naprzeciwko boku mniejszego z danych, więc tu rzeczywiście zachodzi wątpliwość, który z tych trójkątów wziąść należy za żądany; chyba że skądinąd jest wiadomo, że ten trójkąt ma być ostrokątny lub też rozwartokątny, bo wtedy wątpliwość ustaje.

Przypadek 3. Dane są dwa boki z kątem między niemi zawartym np. a, b, γ, znaleść resztę. Ten przypadek rozwiązują nam z równania w poprzedzającym §. znalezione. Przemieniwszy bowiem tamże α na γ tudzież a na c i nawzajem znajdziemy

$$\text{sty.}\,\beta=\frac{b\,\text{wst.}\,\gamma}{a-b\,\text{dost.}\,\gamma}.$$

A jeżeli w tém tu zrównaniu przemienimy znowu β na α, b na a i nawzajem, znajdziemy

$$\text{sty.}\,\alpha=\frac{a\,\text{wst.}\,\gamma}{b-a\,\text{dost.}\,\gamma}$$

i tym sposobem kąty α i β znalezione. Trzeci bok c znajdzie się ze zrównania w tymże samym §. wyprowadzonego; jest bowiem $c=\sqrt{a^2+b^2-2ab\,\text{dost.}\,\gamma}$.

Te atoli wzory tak na kąty α i β jako też i bok c, lubo używane w ogólnych wzorach, do rachunku są nie wygodne z powodu, iż w nich logarytmów użyć nie można; wypada przeto zastąpić je innemi wzorami, które albo już wyżéj przygotowaliśmy, albo też następnie wyprowadzimy. Jakoż z poprzedzającego §. mamy

$$\text{sty.}\,\frac{\alpha-\beta}{2}=\frac{a-b}{a+b}\,\text{sty.}\,\frac{\alpha+\beta}{2}=\frac{a-b}{a+b}\,\text{doty.}\,\tfrac{1}{2}\,\gamma.$$

Z tego zrównania znajdzie się jak już wspomnieliśmy $\frac{\alpha-\beta}{2}$ t. j. połowa różnicy dwóch kątów szukanych; a że summa kątów α i β a zatem i jéj połowa jest także znana, bo

$\alpha+\beta=180^{\circ}-\gamma$, t. j. $\frac{\alpha+\beta}{2}=90-\frac{1}{2}\gamma$, zatém znajdziemy i same kąty, α i β. Położywszy bowiem

$$\frac{\alpha+\beta}{2}=p,\ \frac{\alpha-\beta}{2}=q,\ \text{będzie}\ \alpha=p+q,\ \beta=p-q.$$

Przy pomocy jednego ze znalezionych kątów, znajdziemy według piérwszego przypadku c. Ale ponieważ już dawniéj wspomniałem, iż się zawsze staramy wyrażać, gdzie tylko można, nieznane przez dane ilości, przeto może nam się i tu uda powyższe zrównanie, dające ważność boku c przez dane elementa, ale do rachunku niewygodne, przerobić na inne. Jakoż kiedy w ogólności $\text{dost.}x=1-2\,\text{wst.}\frac{1}{2}x^2$, zatém $c=\sqrt{a^2+b^2-2ab\,\text{dost.}\gamma}=\sqrt{a^2+b^2-2ab(1-2\,\text{wst.}\frac{1}{2}\gamma^2)}$

$$=\sqrt{(a-b)^2+4ab\,\text{wst.}\tfrac{1}{2}\gamma^2}=\sqrt{(a-b)^2\left\{1+\frac{4ab\,\text{wst.}\frac{1}{2}\gamma^2}{(a-b)^2}\right\}}$$

$$=(a-b)\sqrt{1+\frac{4ab\,\text{wst.}\frac{1}{2}\gamma^2}{(a-b)^2}}$$

Położywszy jeszcze $\frac{4ab\,\text{wst.}\frac{1}{2}\gamma^2}{(a-b)^2}=\text{sty.}\varphi^2$,

skąd $$\text{sty.}\varphi=\frac{2\,\text{wst.}\frac{1}{2}\gamma}{a-b}\sqrt{ab},$$

otrzymamy $$c=(a-b)\sqrt{1+\text{sty.}\varphi^2}=(a-b)\,\text{sie.}\varphi=\frac{a-b}{\text{dost.}\varphi}.$$

Tak w obrachowaniu kąta φ jako téż potém i boku c, wszędzie logarytmów użyć można. Wprowadzony tu kąt φ i jemu podobne, jak w dalszym ciągu zobaczymy; nazywa się *kątem posiłkowym* (angulus auxiliaris). Że nie inną liniją trygonometryczną tylko styczną wprowadziliśmy, przyczyna tego zdaje mi się bardzo jest widoczną. Ponieważ ilość pod znakiem pierwiastkowym $1+\frac{4ab\,\text{wst.}\frac{1}{2}\gamma^2}{(a-b)^2}$ jest zawsze większą od 1, przeto w miejsce wyrazu $\frac{4ab\,\text{wst.}\frac{1}{2}\gamma^2}{(a-b)^2}$ należało wprowadzić taką liniją, któraby wszystkie ważności począwszy od 0 do ∞ przybiérać mogła. A że taką liniją poznaliśmy być styczną, dlatego téż ją a nie inną wprowadziliśmy. Dla znalezienia więc c mamy

$$log.\,\text{sty.}\,\varphi = log.\,2 + log.\,\text{wst.}\,\tfrac{1}{2}\gamma + \frac{log.\,a + log.\,b}{2} - log.(a-b)$$

$$log.\,c = log.(a-b) - log.\,\text{dost}\,\varphi = log.(a-b) + dpł.\,log.\,\text{dost.}\,\varphi.$$

Przerobienie zrównania $c=\sqrt{a^2+b^2-2ab\,\text{dost.}\,\gamma}$ można jeszcze w następujący sposób uskutecznić:

ponieważ $\text{dost.}\,\gamma = \text{dost.}\,\tfrac{1}{2}\gamma^2 - \text{wst.}\,\tfrac{1}{2}\gamma^2$

więc położywszy tę ważność za dost. γ, tudzież rozmnożywszy tak a^2 jako i b^2 przez $\text{dost.}\,\tfrac{1}{2}\gamma^2 + \text{wst.}\,\tfrac{1}{2}\gamma^2 = 1$, będzie

$$c = \sqrt{}(a^2\,\text{dost.}\,\tfrac{1}{2}\gamma^2 + a^2\,\text{wst.}\,\tfrac{1}{2}\gamma^2 + b^2\text{dost.}\,\tfrac{1}{2}\gamma^2 + b^2\,\text{wst.}\,\tfrac{1}{2}\gamma^2$$
$$- 2ab\,\text{dost.}\,\tfrac{1}{2}\gamma^2 + 2ab\,\text{wst.}\,\tfrac{1}{2}\gamma^2)$$
$$= \sqrt{}\{a^2+b^2-2ab)\,\text{dost.}\,\tfrac{1}{2}\gamma^2 + (a^2+b^2+2\,ab)\,\text{wst.}\,\tfrac{1}{2}\gamma^2\}$$
$$= \sqrt{(a-b)^2\,\text{dost.}\,\tfrac{1}{2}\gamma^2 + (a+b)^2\,\text{wst.}\,\tfrac{1}{2}\gamma^2}$$
$$= (a-b)\,\text{dost.}\,\tfrac{1}{2}\gamma\,\sqrt{1+\left(\frac{a+b}{a-b}\right)^2\text{sty.}\,\tfrac{1}{2}\gamma^2}$$

albo $$= (a+b)\,\text{wst.}\,\tfrac{1}{2}\gamma\,\sqrt{1+\left(\frac{a-b}{a+b}\right)^2\text{doty.}\,\tfrac{1}{2}\gamma^2}.$$

Wprowadziwszy tu nakoniec kąt posiłkowy, kładąc

$\frac{a+b}{a-b}\,\text{sty.}\,\tfrac{1}{2}\gamma = \text{sty}\,\varphi'$., lub $\frac{a-b}{a+b}\,\text{doty.}\,\tfrac{1}{2}\gamma = \text{doty.}\,\psi$. znajdziemy

$$c = (a-b)\,\text{dost.}\,\tfrac{1}{2}\gamma\sqrt{1+\text{sty.}\,\varphi'^2} = (a-b)\text{dost.}\,\tfrac{1}{2}\gamma\text{sie.}\,\varphi'$$
$$= \frac{(a-b)\,\text{dost.}\,\tfrac{1}{2}\gamma}{\text{dost.}\,\varphi'}$$

albo $$c = (a+b)\,\text{wst.}\,\tfrac{1}{2}\gamma\sqrt{1+\text{doty.}\,\psi^2} = (a+b)\,\text{wst.}\,\tfrac{1}{2}\gamma\,\text{dosie.}\,\psi$$
$$= \frac{(a+b)\,\text{wst.}\,\tfrac{1}{2}\gamma}{\text{wst.}\,\psi}$$

Obu przeto sposobami otrzymaliśmy do rachunku logarytmami, bardzo proste wzory na bok c. Użycie tych wzorów objaśnijmy liczbowym przykładem.

Niech będzie $a = 57\cdot770$ sążni, $b = 71\cdot577$ sążni,

$$\gamma = 84^\circ 47' 51''\cdot 58.$$

Szukając naprzód kątów α i β, mamy,

$$\alpha + \beta = 180^\circ - \gamma = 95^\circ 12' 8''\cdot 42$$

przeto $\frac{\alpha+\beta}{2}=47^{\circ}36'4''\cdot21.$

Ponieważ tu $b>a$, będzie też równie $\beta>\alpha$ a następnie

$$\text{sty.}\frac{\beta-\alpha}{2}=\frac{b-a}{b+a}\text{doty.}\tfrac{1}{2}\gamma$$

$$log.(b-a)=1\cdot1400993$$
$$log.\text{ doty.}\tfrac{1}{2}\gamma=0\cdot0394874$$
$$dpł.log.(a+b)=7\cdot8882436$$

$$log.\text{ sty.}\frac{\beta-\alpha}{2}=9\cdot0678303$$

zatém $\frac{\beta-\alpha}{2}=\ 6^{\circ}\ 40'\ \ 4''\cdot28$

a że $\frac{\beta+\alpha}{2}=\ 47\ \ 36\ \ 4\cdot\ 21$

przeto $\alpha=\ 40\ \ 55\ \ 59\cdot\ 93$

$\beta=\ 54\ \ 16\ \ 8\cdot\ 49$ $\quad\alpha+\beta+\gamma=180^{0}.$

Szukajmy teraz boku c według każdego z powyższych wzorów, a naprzód porachujmy wprowadzone kąty posiłkowe

$$log.2=0\cdot3010300$$
$$log.\text{ wst.}\tfrac{1}{2}\gamma=9\cdot8288450$$
$$\tfrac{1}{2}log.\ a=0\cdot8808512$$
$$\tfrac{1}{2}log.\ b=0\cdot9273867$$
$$dpł.log.(b-a)=8\cdot8599007$$

$$log.\text{ sty.}\varphi=0\cdot7980136$$
$$\varphi=80^{\circ}57'12''\cdot706$$

$log.(a+b)=2\cdot1117564$	$log.(b-a)=1\cdot1400993$
$log.\text{ sty.}\tfrac{1}{2}\gamma=9\cdot9605126$	$log.\text{ doty.}\tfrac{1}{2}\gamma=0\cdot0394873$
$dpł.log.(b-a)=8\cdot8599007$	$dpł.log.(a+b)=7\cdot8882436$
$log.\text{ sty.}\varphi'=0\cdot9321697$	$log.\text{ doty.}\psi=9\cdot0678302$
$\varphi'=83^{\circ}19'55''\cdot72$	$\psi=83^{\circ}19'55''\cdot72$

Tak mając kąty posiłkowe, przystąpmy do obrachowania *log. c*

$$log.(b-a)=1\cdot1400993$$
$$dpł.log.\text{dost.}\varphi=0\cdot8034495$$

$$log.c=1\cdot9435488$$

$$log.(b-a)=1\text{·}1400993 \qquad log.(a+b)=2\text{·}1117564$$
$$log.\,\text{dost.}\,\tfrac{1}{2}\gamma=9\text{·}8683323 \qquad log.\,\text{wst.}\,\tfrac{1}{2}\gamma=9\text{·}8288450$$
$$dpł.\,log.\,\text{dost.}\,\varphi'=0\text{·}9351173 \qquad dpł.\,log.\,\text{wst.}\,\psi'=0\text{·}0029476$$
$$log.\,c=1\text{·}9435489 \qquad log.\,c=1\text{·}9435490$$

Przeto ze wszystkich trzech wzorów wypada *log. c* prawie ten sam. Liczba odpowiadająca temu logarytmowi jest

$$c=87\text{·}811.$$

Uważmy tu, iż nam wypadło $\varphi'=\psi$, bo téż tak jest w istocie, gdyż

$$\frac{1}{\text{doty.}\,\psi}=\frac{b+a}{(b-a)\,\text{doty.}\,\frac{1}{2}\gamma}=\frac{b+a}{b-a}\,\text{sty.}\,\tfrac{1}{2}\gamma=\text{sty.}\,\varphi'$$

t. j. $\quad \text{sty.}\,\psi=\text{sty.}\,\varphi' \quad$ a zatém $\quad \psi=\varphi'$.

Trzy tym sposobem otrzymane ważności na c, służyć nam mogą za kontrollę rachunku.

Przypadek 4. Z danych trzech boków trójkąta, znaleść jego kąty. Na rozwiązanie w tym przypadku trójkąta mamy z §. 27 wzór $\text{dost.}\,\alpha=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$ i podobnież na inne kąty. Gdy atoli ten wzór znowu do rachunku niewygodny, z powodu iż logarytmów użyć nie można, lub używając ich, zamiast ułatwić, utrudniamy sobie robotę, dlatego starać się będziemy przerobić go na inny sposobny do logarytmicznego rachunku.

Strony zrównania $\text{dost.}\,\alpha=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$ raz odejmijmy a drugi raz dodajmy do 1, tedy otrzymamy

$$1-\text{dost.}\,\alpha=\frac{2bc-b^2-c^2+a^2}{2bc}=\frac{a^2-(b-c)^2}{2bc}=\frac{(a+b-c)(a+c-b)}{2bc}$$

$$1+\text{dost.}\,\alpha=\frac{2bc+b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{(b+c)^2-a^2}{2bc}=\frac{(a+b+c)(b+c-a)}{2bc}$$

Obie strony każdego z tych zrównań podzieliwszy przez 2, a potém wyciągnąwszy pierwiastek kwadratowy, ponieważ

$$\sqrt{\frac{1-\text{dost.}\,\alpha}{2}}=\text{wst.}\,\tfrac{1}{2}\alpha, \text{ a } \sqrt{\frac{1+\text{dost.}\,\alpha}{2}}=\text{dost.}\,\tfrac{1}{2}\alpha$$

wzór (10) i (11), znajdziemy

$$\text{wst.}\,\tfrac{1}{2}\alpha=\tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{(a+c-b)(a+b-c)}{bc}}$$

$$\text{dost.}\,\tfrac{1}{2}\alpha=\tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{(a+b+c)(b+c-a)}{bc}}$$

Oznaczywszy połowę obwodu trójkąta przez s, czyli położywszy $\frac{a+b+c}{2}=s$, znajdziemy

$$\text{wst.}\,\tfrac{1}{2}\alpha=\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}} \qquad \text{dost.}\,\tfrac{1}{2}\alpha=\sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}}$$

i podobnie $\text{wst.}\,\tfrac{1}{2}\beta=\sqrt{\frac{(s-a)(s-c)}{ac}} \qquad \text{dost.}\,\tfrac{1}{2}\beta=\sqrt{\frac{s(s-b)}{ac}}$

$$\text{wst.}\,\tfrac{1}{2}\gamma=\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{ab}} \qquad \text{dost.}\,\tfrac{1}{2}\gamma=\sqrt{\frac{s(s-c)}{ab}}$$

skąd też $\text{sty.}\,\tfrac{1}{2}\alpha=\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}$

$$\text{sty.}\,\tfrac{1}{2}\beta=\sqrt{\frac{(s-a)(s-c)}{s(s-b)}}$$

$$\text{sty.}\,\tfrac{1}{2}\gamma=\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{s(s-c)}}$$

Ponieważ wst. $\tfrac{1}{2}\alpha$ dost. $\tfrac{1}{2}\alpha=\tfrac{1}{2}$wst. α,

zatém $\text{wst.}\,\alpha=\frac{2\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}{bc}$

Położywszy zupełnie symmetryczne wyrażenie

$$\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}=\mathrm{P},$$

będzie $\text{wst.}\,\alpha=\frac{2\mathrm{P}}{bc}$

a następnie $\frac{\text{wst.}\,\alpha}{a}=\frac{2\mathrm{P}}{abc}$

Ponieważ w tém wyrażeniu i mianownik jest symmetryczny względem a, b, c, zatém

$$\frac{\text{wst.}\,\beta}{b}=\frac{2\mathrm{P}}{abc}$$

$$\frac{\text{wst.}\,\gamma}{c}=\frac{2\mathrm{P}}{abc}$$

skąd $$\frac{\text{wst.}\,\alpha}{a}=\frac{\text{wst.}\,\beta}{b}=\frac{\text{wst.}\,\gamma}{c}$$

a to jest zrównanie w §. 26 otrzymane.

§. 30.

Starając się przerobić wzór $\text{dost.}\,\alpha=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$ na inny do logarytmicznego rachunku sposobny, przyszliśmy w poprzedzającém do trzech na ten cel wzorów, t. j.

$$\text{wst.}\,\tfrac{1}{2}\alpha=\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}},\quad \text{dost.}\,\tfrac{1}{2}\alpha=\sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}}$$

i $$\text{wst.}\,\alpha=\frac{2\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}{bc}$$

(dla dwóch innych kątów β i γ są podobneż wzory) zachodzi teraz pytanie, który z tych wzorów jest dokładniejszy i korzystniejszy do praktycznego użycia? Na to odpowiadamy, iż oprócz korzyści jaką na czasie osiągamy używając piérwszego lub drugiego wzoru jako prostszych, mają jeszcze te wzory tę nieposlednią wyższość nad trzecim, iż ten ostatni dając nam wstawę kąta, zostawia nas w niepewności czyli ta wstawa należy do ostrego czyli téż rozwartego kąta; gdyż wiadomo, iż wstawy spełniających się kątów są tak co do wielkości jako i znaku też same; gdy tym czasem wzór piérwszy dając nam wstawę połowy kąta, już tém samém wskazuje i jego gatunek. Gdy bowiem w każdym trójkącie summa trzech jego kątów waży 180°, przeto każdy z nich jest mniejszy niż 180° a następnie połowa, mniejsza niż 90°. Tym sposobem otrzymana wstawa połowy kąta z piérwszego i jemu podobnych zrównań, należy pewnie do kąta ostrego.

Używając trzeciego wzoru, czyli wzoru na wstawę całkowitego kąta, można wprawdzie za pomocą wzoru

$$a^2=b^2+c^2-2bc\,\text{dost.}\,\alpha$$

rozstrzygnąć wątpliwość względem kąta; jeżeli bowiem $\alpha<90°$ t. j. jeżeli α jest kątem ostrym, natenczas $\text{dost.}\,\alpha$ jest dodatna, a następnie $a^2<b^2+c^2$; jeżeli $\alpha=90°$, t. j. jeżeli kąt α jest prosty, $\text{dost.}\,\alpha=0$, a w tym przypadku $a^2=b^2+c^2$; nareszcie jeżeli $\alpha>90°$ t. j. jeżeli kąt α jest rozwarty, z §. 8

wiadomo, że jego dostawa jest odjemna, będzie więc

$$a^2 = b^2 + c^2 + 2bc \,\text{dost.}\, \alpha,$$

co pokazuje, że w tym przypadku $a^2 > b^2 + c^2$. Wnioskując teraz na odwrót, powiemy: jeżeli w jakim trójkącie, którego trzy boki a, b, c, są dane, jest $a^2 < b^2 + c^2$, kąt α jemu przeciwległy pewno jest ostrym; gdy zaś $a^2 = b^2 + c^2$, kąt α jest prostym, a nareszcie jeżeli $a^2 > b^2 + c^2$, kąt przeciwległy bokowi a jest rozwartym. Tak tedy, ponieważ w tym czwartym przypadku wszystkie trzy boki są nam dane, widzimy, iż sobie potrafimy zaradzić, gdyby tego wypadła potrzeba; używając atoli wzorów na wstawy połowy kątów, wolni jesteśmy od tego roztrząsania.

Co się tyczy wzorów piérwszego i drugiego, który z nich jest dokładniejszy, poznamy to łatwo gdy się zastanowimy, że dokładność kąta wyznaczonego raz przez wstawę, a drugi raz przez dostawę nie jest zawsze taż sama, a to z następującego powodu. Wiadomo że

$$\text{wst.}\, 45^\circ = \sqrt{\tfrac{1}{2}} \quad \text{i} \quad \text{dost.}\, 45^\circ = \sqrt{\tfrac{1}{2}},$$

tudzież $\text{wst.}\, 0^\circ = 0$ a $\text{dost.}\, 0^\circ = 1$;

kiedy więc kąt rośnie od 0° do 45°, wstawa jego rośnie od 0 do $\sqrt{\frac{1}{2}}$ a jéj logarytm

od $-\infty = log.\,\text{wst.}\, 0^\circ$ do $-0{\cdot}1505150 = log.\sqrt{\frac{1}{2}}$.

Przeciwnie dostawa kąta w tych granicach maleje od 1 do $\sqrt{\frac{1}{2}}$ a jéj logarytm od $0 = log.\, 1$ do $-0{\cdot}1505150 = log.\sqrt{\frac{1}{2}}$. Wzrastanie więc logarytmów wstaw dla kątów $< 45^\circ$ jest daleko prędsze, niż zmniejszanie się logarytmów dostaw kątów w tychże samych granicach zawartych; albo mówiąc innemi słowy: dla kątów $< 45^\circ$, zmiana kąta daleko większy ma wpływ na zmianę logarytmu wstawy, niż logarytmu dostawy i w tych ostatnich mają rzeczone zmiany wpływ dopiéro na cyfry nie znajdujące się w tablicach. Dla kątów $> 45^\circ$ a $< 90^\circ$ jest przeciwnie, z powodu, że wstawy kątów w tych granicach zawartych rosną od $\sqrt{\frac{1}{2}}$ do 1, a dostawy maleją od $\sqrt{\frac{1}{2}}$ do 0. Jeżeli więc dany jest logarytm tak wstawy jako i dostawy jakiego kąta, tedy w przypadku, że ten kąt jest $< 45^\circ$ dokładniéj go znajdziemy przez logarytm wstawy niż dostawy, a przeciwnie, gdy mający się wyznaczyć kąt jest $>45^0$, dokładniéj go otrzymamy z logarytmu dostawy niż wstawy; w obu razach tém więcéj na tę okoliczność baczyć należy, im się kąt więcéj oddala od 45^0. Objaśnijmy to wszystko przykładem. Niech dane będą trzy boki trójkąta

$a = 57{\cdot}770$ sążni, $b = 71{\cdot}577$ sążni, $c = 87{\cdot}811$,

a szukajmy jego kątów, a najprzód według wzorów na połowy kątów. Przygotujmy sobie naprzód wszystkie do rachunku potrzebne logarytmy. Ponieważ

$$s = \frac{a+b+c}{2} = 108{\cdot}579, \quad s-a = 50{\cdot}809,$$

$$s-b = 37{\cdot}002, \quad s-c = 20{\cdot}768$$

zatém

$$\log. s = 2{\cdot}0357458$$
$$\log.(s-a) = 1{\cdot}7059406$$
$$\log.(s-b) = 1{\cdot}5682252$$
$$\log.(s-c) = 1{\cdot}3173947$$

$\log. a = 1{\cdot}7617024$	$\log. ab = 3{\cdot}6164759$
$\log. b = 1{\cdot}8547735$	$\log. ac = 3{\cdot}7052513$
$\log. c = 1{\cdot}9435489$	$\log. bc = 3{\cdot}7983224$

dla kąta α

$\log.(s-b) = 1{\cdot}5682252$	$\log. s = 2{\cdot}0357458$
$\log.(s-c) = 1{\cdot}3173947$	$\log.(s-a) = 1{\cdot}7059406$
$dpł. \log. bc = 6{\cdot}2016776$	$dpł. \log. bc = 6{\cdot}2016776$
2) $9{\cdot}0872975$	2) $9{\cdot}9433640$
$\log.$ wst. $\frac{1}{2}\alpha = 9{\cdot}5436487$	$\log.$ dost. $\frac{1}{2}\alpha = 9{\cdot}9716820$
$\frac{1}{2}\alpha = 20^0 27' 59''{\cdot}96$	$\frac{1}{2}\alpha = 20^0 28' \; 0''{\cdot}00$

dla kąta β

$\log.(s-a) = 1{\cdot}7059406$	$\log. s = 2{\cdot}0357458$
$\log.(s-c) = 1{\cdot}3173947$	$\log.(s-b) = 1{\cdot}5682252$
$dpł. \log. ac = 6{\cdot}2947487$	$dpł. \log. ac = 6{\cdot}2947487$
2) $9{\cdot}3180840$	2) $9{\cdot}8987197$
$\log.$ wst. $\frac{1}{2}\beta = 9{\cdot}6590420$	$\log.$ dost. $\frac{1}{2}\beta = 9{\cdot}9493598$
$\frac{1}{2}\beta = 27^0 \, 8' \, 4''{\cdot}24$	$\frac{1}{2}\beta = 27^0 \, 8' \, 4''{\cdot}36$

$$\underbrace{\text{dla kąta } \gamma}$$

$log.(s-a)=1\cdot7059406$		$log.s=2\cdot0357458$	
$log.(s-b)=1\cdot5682252$		$log.(s-c)=1\cdot3173947$	
$dpł.log.ab=6\cdot3835241$		$dpł.log.ab=6\cdot3835241$	
2)	$9\cdot6576899$	2)	$9\cdot7366646$
$log.\text{wst}.\frac{1}{2}\gamma=9\cdot8288449$		$log.\text{dost}.\frac{1}{2}\gamma=9\cdot8683323$	
$\frac{1}{2}\gamma=42^0 23' 55''\cdot74$		$\frac{1}{2}\gamma=42^0 23' 55''\cdot78$	

przeto

przez wstawy	przez dostawy
$\alpha=40^0\ 55'\ 59''\cdot92$	$\alpha=40^0\ 56'\ 0''\cdot00$
$\beta=54\ 16\ 8\cdot48$	$\beta=54\ 16\ 8\cdot72$
$\gamma=84\ 47\ 51\cdot48$	$\gamma=84\ 47\ 51\cdot56$
$179\ 59\ 59\cdot88$	$180\ 0\ 0\cdot28$

Biorąc według poprzedzającéj uwagi piérwsze dwa kąty, jako znacznie oddalające się od 45^0 wyznaczone przez wstawę za dokładniejsze, trzeci zaś średnią z wstawy i dostawy, bo jest bliskim 45^0, otrzymalibyśmy

$$\alpha+\beta+\gamma=179^0\,59'\,59''\cdot92$$

a zatém dokładniéj niż przez same wstawy lub same dostawy. Ponieważ tu użyliśmy siedmiocyfrowych logarytmów, dlatego kąty tak przez wstawy jako i dostawy z jednaką dokładnością wyznaczone, gdyż widzimy, że w piérwszém summa trzech kątów jest mniejsza od 180^0 tylko o 0·12 sekundy a w drugiém większa o 0·28.

Chcąc w téj różności kątów znaléść ważności najbliższe prawdziwych, tak postąpić należy, szczególniéj z dwoma piérwszemi kątami. Różnica w tablicach przy wst. $\frac{1}{2}\alpha$ jest 56 a przy dost. $\frac{1}{2}\alpha$, 8; piérwsza przeto jest 7razy większa niż druga, wziąwszy więc

$$\frac{1\times 60\cdot00+7\times 59\cdot96}{7+1}=59\cdot965$$

będzie kąt $\frac{1}{2}\alpha$ razem przez wstawę i dostawę wyznaczony

$\frac{1}{2}\alpha=20^0\,27'\,59''\cdot965$ zatém $\alpha=40^0\,55'\,59''\cdot93$

Podobnież dla kąta β, przy wst. $\frac{1}{2}\beta$ jest różnica 41 a przy dost. $\frac{1}{2}\beta$, 11, przeto tamta 4 razy prawie większa,

zatém $\frac{1 \times 4''\cdot 36 + 4 \times 4''\cdot 24}{4+1} = 4''\cdot 26$, a $\frac{1}{2}\beta = 27^\circ\ 8'\ 4''\cdot 26$

zaś $\beta = 54^\circ\ 16'\ 8''\cdot 52$.

Ponieważ $\frac{1}{2}\gamma$ nie wiele różne od 45°, biorąc zatém średnią z wstawy i dostawy, znajdziemy $\frac{1}{2}\gamma = 42^\circ\ 23'\ 55''\cdot 76$

a następnie $\gamma = 84^\circ\ 47' 51''\cdot 52$.

Tym sposobem wyznaczone kąty są:

$$\begin{array}{rrrr} \alpha = & 40^\circ & 55' & 59''\cdot 93 \\ \beta = & 54 & 16 & 8\cdot 52 \\ \gamma = & 84 & 47 & 51\cdot 52 \\ \hline \text{których summa} = & 179 & 59 & 59\cdot 97 \end{array}$$

a zatém te kąty są dokładniejsze.

Zobaczmy teraz rachunek wstawami całych kątów, a naprzód obrachujmy logarytm

ilości $2\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ spólnéj wszystkim

$$\begin{array}{rl} log.\ s = & 2\cdot 0357458 \\ log.\ (s-a) = & 1\cdot 7059406 \\ log.\ (s-b) = & 1\cdot 5682252 \\ log.\ (s-c) = & 1\cdot 3173947 \\ \hline 2) & 6\cdot 6273063 \\ \hline & 3\cdot 3136531 \\ log.\ 2 = & 0\cdot 3010300 \\ \hline & 3\cdot 6146831 \end{array}$$

$$\begin{array}{llll} log.\ 2\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} = & 3\cdot 6146831 & 3\cdot 6146831 & 3\cdot 6146831 \\ log.\ \quad bc,\ ac,\ ab = & 3\cdot 7983224 & 3\cdot 7052513 & 3\cdot 6164759 \\ \hline log.\ \text{wst.}\ \alpha,\ \text{wst.}\ \beta,\ \text{wst.}\ \gamma = & 9\cdot 8163607 & 9\cdot 9094318 & 9\cdot 9982072 \end{array}$$

zatém $\alpha = 40^\circ 55' 59''\cdot 92$, $\beta = 54^\circ 16' 8''\cdot 45$, $\gamma = 84^\circ 47' 51''\cdot 05$

tu $\alpha + \beta + \gamma = 179^\circ 59' 59''\cdot 42$ t. j. kąty są niedokładniejsze niż wprzód otrzymane; szczególniéj zaś widzimy że kąt γ najwięcéj się różni, co potwierdza naszę wyżéj zrobioną uwagę, że im się więcéj kąt oddala od 45°, będąc większym niż 45°, tém wyznaczenie jego przez wstawę jest niepewniejsze.

Gdybyśmy jednego tylko kąta *np.* α potrzebowali, tedy znalazłszy *log.* wst. $\alpha = 9{\cdot}8163607$ jak wyżéj, zostajemy w wątpliwości czyli ta wstawa należy do ostrego lub rozwartego kąta t. j. czyli do kąta $40^\circ\, 55'\, 59''{\cdot}92$ jak go wyżéj znaleźliśmy, czyli téż do kąta

$$= 180^\circ - 40^\circ 55' 59''{\cdot}92 = 139^\circ\ 4'\ 0''{\cdot}08.$$

Aby się zapewnić który tu z tych kątów wziąść należy, potrzeba postąpić jak wyżéj wskazaliśmy.

A ponieważ $(57{\cdot}770)^2 < (71{\cdot}577)^2 + (87{\cdot}811)^2$, przeto kąt α jest rzeczywiście ostrym.

§. 31.

Z trzech danych boków trójkąta można téż znaleść jego kąty następującym sposobem: z wiérzchołka kąta *np.* γ spuściwszy prostopadłą do boku jemu przeciwległego c i oznaczywszy odcinki przez tęż prostopadłą na nim zrobione przez x i y tak że odcinek x jest przyległy bokowi a a y bokowi b, mamy $x + y = c$. Rzeczona prostopadła, którą oznaczmy przez p, podzieliła trójkąt na dwa prostokątne w których

$p^2 = a^2 - x^2$ i $p^2 = b^2 - y^2$ a następnie $a^2 - x^2 = b^2 - y^2$

skąd $x^2 - y^2 = a^2 - b^2$ albo $(x+y)(x-y)(a+b)(a-b)$

albo $c(x-y) = (a+b)(a-b)$.

Rozłożywszy to zrównanie na proporcyję będzie

$$c : a+b = a-b : x-y.$$

Tę proporcyją wysłowiwszy w kształcie twierdzenia, uczymy się, że *w każdym trójkącie prostokreślnym spuściwszy z jego wiérzchołka prostopadłą na podstawę, ma się bok na który prostopadła pada do summy dwóch innych boków, jak różnica tychże boków do różnicy odcinków przez prostopadłą zrobionych.*

Gdyby prostopadła padała zewnątrz trójkąta, natenczas, ponieważ $c = x - y$, powyższa proporcyja zamieniłaby się na $c : a+b = a-b : x+y$ a w twierdzeniu odmienić tylko potrzeba *różnicę odcinków* na *summę* reszta zaś zostaje toż samo.

Z powyższego zrównania lub z proporcyi wypada

$$x - y = \frac{(a+b)(a-b)}{c} = \frac{a^2-b^2}{c} = x+y \text{ dla drugiego przypadku}$$

A że $x+y=c$ albo $=x-y$

zatém $x=\frac{1}{2}c+\frac{a^2-b^2}{2c}=\frac{a^2+c^2-b^2}{2c}$ w obu przypadkach

$$y=\frac{1}{2}c-\frac{a^2-b^2}{c}=\frac{b^2+c^2-a^2}{2c} \quad \text{zaś } y=\frac{a^2-b^2-c^2}{2c}$$

w drugim przypadku.

Tak znalazłszy x i y, znajdzie się kąty α i β ze zrównań

$$\text{dost.}\,\alpha=\frac{y}{b},\quad \text{dost.}\,\beta=\frac{x}{a}$$

a nareszcie $\gamma=180-(\alpha+\beta)$.

§. 32.

Jak w trójkątach prostokątnych tak i tu w rozwiązywaniu ukośnokątnych zdarzają się przypadki, gdzie zamiast elementów dane są ich summy lub różnice albo jedne i drugie, a z nich znaleść potrzeba same elementa. Jak sobie znowu tu postąpić, dosyć pokazać na jednym przykładzie

Niechby w trójkącie prostokréślnym dany był bok $a=57{\cdot}770$ sążni i kąt jemu przeciwległy $\alpha=40°56'\ 0''{\cdot}00$, w miejsce zaś trzeciego elementu, dana jest summa kwadratów z dwóch innych boków $b^2+c^2=12834{\cdot}03865$, potrzeba rozwiązać trójkąt t. j. znaleść b, c, β, γ.

Mając znany kąt α, mamy téż wiadomą summę szukanych $\beta+\gamma=180^0-\alpha$; gdybyśmy jeszcze mieli ich różnicę, znaleźlibyśmy tém samém każdy z nich. Szukajmy przeto rzeczonéj różnicy.

Ponieważ $\quad \frac{b}{a}=\frac{\text{wst.}\,\beta}{\text{wst.}\,\alpha}$ i $\frac{c}{a}=\frac{\text{wst.}\,\gamma}{\text{wst.}\,\alpha}$,

zatém $\quad \frac{b^2+c^2}{a^2}=\frac{\text{wst.}\,\beta^2+\text{wst.}\,\gamma^2}{\text{wst.}\,\alpha^2}$

$$=\frac{1-\text{dost.}\,(\beta+\gamma)\,\text{dost}\,(\beta-\gamma)}{\text{wst.}\,\alpha^2} \quad \text{§. 13 (31).}$$

A że $\text{dost.}\,(\beta+\gamma)=-\text{dost.}\,\alpha$,

zatém $\quad \frac{b^2+c^2}{a^2}=\frac{1+\text{dost.}\,\alpha\,\text{dost.}\,(\beta-\gamma)}{\text{wst.}\,\alpha^2}$

skąd $\quad \text{dost.}(\beta-\gamma)=\dfrac{(b^2+c^2)\,\text{wst.}\,\alpha^2-a^2}{a^2\,\text{dost.}\,\alpha}$

albo $\quad \text{dost.}(\beta-\gamma)=\dfrac{(\text{wst.}\,\alpha\sqrt{b^2+c^2}+a)\,(\text{wst.}\,\alpha\sqrt{b^2+c^2}-a)}{a^2\,\text{dost.}\,\alpha}$

W naszym przypadku jest $\sqrt{b^2+c^2}=113{\cdot}2874$, przeto

$$
\begin{aligned}
log.\,\text{wst.}\,\alpha &= 9{\cdot}8163609\\
log.\sqrt{b^2+c^2} &= 2{\cdot}0541816\\
\hline
log.\,\text{wst.}\,\alpha\sqrt{b^2+c^2} &= 1{\cdot}8705425
\end{aligned}
$$

Liczba temu logarytmowi odpowiadająca

jest

$$
\begin{aligned}
\text{wst.}\,\alpha\sqrt{b^2+c^2} &= 74{\cdot}2237\\
\pm a &= 57{\cdot}770\\
\hline
\text{wst.}\,\alpha\sqrt{b^2+c^2}+a &= 131{\cdot}9937\\
\text{wst.}\,\alpha\sqrt{b^2+c^2}-a &= 16{\cdot}4537
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
log.(\text{wst.}\,\alpha\sqrt{b^2+c^2}+a) &= 2{\cdot}1205532\\
log.(\text{wst.}\,\alpha\sqrt{b^2+c^2}-a) &= 1{\cdot}2162636\\
dpł.\,log.\,a^2 &= 6{\cdot}4765952\\
dpł.\,log.\,\text{dost.}\,\alpha &= 0{\cdot}1217814\\
\hline
log.\,\text{dost.}(\beta-\gamma) &= 9{\cdot}9351934
\end{aligned}
$$

zatém $\quad \beta-\gamma=30^0\,31'\,42''{\cdot}27$

lub $\quad \gamma-\beta=30\;\;31'\,42''{\cdot}27$

bo zamienić można β na γ i b na c i nawzajem.

Mając teraz summę i różnicę tychże samych kątów, znajdziemy

$$\beta=\frac{\gamma+\beta}{2}-\frac{\gamma-\beta}{2}=54^0\,16'\,8''{\cdot}77$$

$$\gamma=\frac{\gamma+\beta}{2}+\frac{\gamma-\beta}{2}=84\;\;47\;\;51{\cdot}23$$

Skoro kąty β i γ są wiadome, znajdziemy b i c według piérwszego przypadku §. 29 i trójkąt będzie tym sposobem rozwiązany.

Rozumiem że ten jeden przykład wystarczy do wskazania jak sobie w każdym innym przypadku postąpić należy.

§. 33.

Do elementów trójkąta prostokreślnego policzyć także można jego powiérzchnię, z tego powodu sądzę, iż tu będzie na właściwém miejscu pokazać, jak przy pomocy Trygonometryi z tych samych elementów które wyznaczają trójkąt, znaleść jego powiérzchnię, a zatém w cztérech poprzednio roztrząśnionych przypadkach.

Niech będzie trójkąt ABC *fig. 15*, w którym wiadome mamy boki b, c i kąt między niemi zawarty α, i chcemy znaleść jego powierzchnię. Z wiérzchołka kąta C spuściwszy prostopadłą CD $= p$ do boku przeciwległego c mamy

$$\text{powierzchnię trójkąta ABC} = \triangle = \frac{cp}{2}$$

Ale ponieważ w trójkącie prostokątnym ACD jest $\frac{p}{b} = \text{wst}\,\alpha$,

skąd $$p = b \text{ wst. } \alpha,$$

zatém $$\triangle = \frac{bc \text{ wst. } \alpha}{2}$$

Spuszczając z dwóch innych wiérzchołków prostopadłe na boki im przeciwległe, znaleźlibyśmy tymże samym sposobem

że taż powierzchnia $= \frac{ac \text{ wst. } \beta}{2} = \frac{ab \text{ wst. } \gamma}{2}$,

przeto $$\triangle = \frac{bc \text{ wst. } \alpha}{2} = \frac{ac \text{ wst. } \beta}{2} = \frac{ab \text{ wst. } \gamma}{2}$$

a stąd twierdzenie że *powiérzchnia trójkąta prostokreślnego równa się połowie iloczynu z dwóch jego boków rozmnożonéj przez wstawę kąta zawartego między temiż bokami.*

Z §. 29 wiadomo, że wst. $\alpha = \frac{2\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}{bc}$,

położywszy tę ważność w powyższém wyrażeniu powierzchni trójkąta za wst. α, znajdziemy

$$\triangle = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

które wyrażenie powierzchni trójkąta przez trzy jego boki, już we wstępie inną drogą znaleźliśmy. Kładąc ważności za wst. β i wst. γ, otrzymamy na powiérzchnią trójkąta toż samo wyrażenie.

Jeżeli trójkąt jest równoramienny w którym $a = b$, wyrażenie jego powiérzchni będzie $\qquad \triangle = (s-a)\sqrt{s(s-c)}$

Przywracając ważność $s = \frac{a+b+c}{2} = \frac{2a+c}{2}$,

będzie powiérzchnia trójkąta równoramiennego

$$= \frac{c}{4}\sqrt{4a^2 - c^2} = \frac{c}{4}\sqrt{(2a+c)(2a-c)}$$

A gdy trójkąt jest równoboczny t. j. że $a = b = c$,

jego powiérzchnia będzie $= \frac{c^2}{4}\sqrt{3}$.

Gdybyśmy w trójkącie mieli dane dwa kąty α i β tudzież bok im przyległy c a szukali jego powiérzchni, tedy, ponieważ $\gamma = 180^0 - (\alpha + \beta)$ a następnie wst. $\gamma =$ wst. $(\alpha+\beta)$,

będzie $\frac{a}{c} = \frac{\text{wst. } \alpha}{\text{wst. } \gamma} = \frac{\text{wst. } \alpha}{\text{wst. } (\alpha+\beta)}$ skąd $a = \frac{c \text{ wst. } \alpha}{\text{wst. } (\alpha+\beta)}$.

Z wiérzchołka kąta α spuściwszy prostopadłą p do boku jemu przeciwległego a, będzie $p = c$ wst. β, a powiérzchnia trójkąta $= \frac{ap}{2}$. Włożywszy tu znalezione ważności a i p, otrzymamy

$$\triangle = \frac{c^2 \text{wst. } \alpha \text{ wst.} \beta)}{2 \text{ wst. } (\alpha+\beta)}.$$

Nareszcie, jeżeli w trójkącie dane są dwa boki b i c i kąt jednemu z nich przeciwległy *np.* β, tedy będzie:

$$\frac{b}{c} = \frac{\text{wst. } \beta}{\text{wst. } \gamma} \quad \text{skąd wst. } \gamma = \frac{c \text{ wst. } \beta}{b};$$

potém $$\frac{a}{c} = \frac{\text{wst. } \alpha}{\text{wst. } \gamma} = \frac{b \text{ wst. } \alpha}{c \text{ wst. } \beta}$$

skąd $$a = \frac{b \text{ wst. } \alpha}{\text{wst. } \beta} = \frac{b \text{ wst. } (\beta+\gamma)}{\text{wst. } \beta}$$

gdzie kąt γ z poprzedzającego znany.

Ale powiérzchnia trójkąta według piérwszego przypadku $= \frac{ac \text{ wst. } \beta}{2}$, położywszy przeto ważność poprzednio znalezioną a będzie

$$\triangle = \frac{bc \text{ wst. } (\beta+\gamma)}{2}$$

W przypadku że $b < c$, znaleziona wst. γ mogąc należeć do dwóch różnych kątów t. j. ostrego i rozwartego, daje nam téż dwa trójkąty różne, a dla tego ostatnia ważność na powiérzchnią trójkąta w tym przypadku będzie wątpliwą do którego z tych trójkątów należy, czy do ostrokątnego czyli téż do rozwartokątnego.

ROZDZIAŁ IV.

Zastósowanie poprzednich wiadomości do Geometryi w ogólności a w szczególności do Geometryi praktycznéj.

§. 34.

Zastósowanie Trygonometryi tak jest w dziedzinie matematycznych umiejętności rozliczne, że potrzebuje osobnego, a nawet brdzo obszernego dzieła, aby pokazać jak zbawiennie wpływa na wszystkie gałęzie nauki, którą ogólnie i zwyczajnie *Matematyką* nazywamy, a która rozpada się na wiele części, stanowiących pod różnemi nazwami, w obecnym stanie przyrodniczych nauk, zupełnie osobne umiejętności. Z tego to zapewne ostatniego powodu, nie mają Francuzi w swym języku nazwy dla téj nauki, którą my Matematyką nazywamy. My pod wyrazem Matematyka, rozumiemy zwyczajnie Arytmetykę, Algebrę i Geometryją, każdą z jéj częściami; Francuzi zaś chcąc ogarnąć wszystko, gdzie tylko rachunek algebraiczny lub dowód geometryczny przekonaniu za podstawę służy, użyli wyrazu w liczbie mnogiéj, który my w pojedynczéj kładziemy. A tak Francuzi nie mają *la Mathematique* ale *les Mathematiques* t. j. *les sciences mathematiques* i pod tą nazwą zamieszczają cały obszar zastósowań téj nauki, którą my Matematyką nazywamy. Dla tego nie będzie tu naszą rzeczą rozwijać rozliczne zastósowania Trygonometryi, ale raczéj krótko wskażemy, jak *np.* w Geometryi praktycznéj czyli w zwyczajnych pomiarach gruntów lub większéj jakiéj części powiérzchni ziemi, dla zrobienia jéj mappy, tudzież w różnych zagadnieniach Geometryi elementarnéj, Trygonometryja stósowaną być może.

W Geometryi praktycznéj używa się rozmaitych, szczególniéj téż w naszych czasach, narzędzi, których opisanie i użycie nie może także być przedmiotem niniejszego dziełka, dla tego téż napomknę tylko, że do wytknięcia na gruncie czyli na ziemi linii prostéj, używa się pospolicie *tyczek* zwyczajnie *chorągiewkami* zwanych. Do mierzenia prostéj na gruncie, używa się na ten cel sporządzonego łańcucha. Długość jego zależy od różnicy miar w każdym kraju. W Polsce *np.* łańcuch zamykał 75 łokci koronnych i nazywał się *sznurem*. Dzielił on się na 10 prętów, pręt na 10 pręcików czyli stóp a pręcik na 10 ławek. Nie trzeba tu atoli mieszać stopy geometrycznéj czyli pręcika ze zwyczajną stopą; piérwsza bowiem zamyka $\frac{3}{4}$ łokcia, kiedy druga $= \frac{1}{2} = \frac{2}{4}$ łokcia; dlatego téz tamtéj należy zawsze przydać przymiotnik *geometryczna*, albo téż co lepiéj, zgodzić się raz na zawsze używać wyrazu pręcik zamiast stopa geometryczna. Wspomniony łańcuch tak jest urządzony, że pręciki robione z grubego drutu i połączone z sobą żelaznemi kółkami, stanowią jego ogniwa, pręty zaś znaczone są mosiężnemi pierścieniami nieco większemi niż piérwsze dla ich wydatności. Jakie zalety być powinny dokładnego łańcucha i jak doświadczyć téj jego dokładności, uczy każda Trygonometryja praktyczna. W wielkich a ścisłą dokładność mających na celu pomiarach ziemi, jakie Francuzi w przeszłém, a za ich przykładem w obecném stuleciu wykonano w wielu innych narodach, używa się do mierzenia długości linii prostéj na gruncie *łat drewnianych* z wielką przezornością i dokładnością do tego przyrządzonych. O takich łatach jak równie przy ich pomocy wykonanych pomiarach prostéj od Barellony aż do Dunkierki, czytać można w dziele „*Base du systéme metrique par Mechain et Delambre*“.

Do mierzenia kątów używa się *kątomiar* (astrolabium) składający się z półkola mosiężnego, którego brzeg (limbus) zwyczajnie na stopnie i mniejsze części jest podzielony, a *prawidło* około środka koła obracające się i noszące na sobie *przezierniki* (dioptra) lub *lunetę,* w którym razie toż prawidło *alhidadą* zowią, opatrzone jest tak nazwanym *noniuszem* służącym do odczytywania drobniejszych części niż są na brzegu oznaczone. Całe to narzędzie dla tém większéj wygody umieszczone bywa na nodze lub nogach wbijających się w ziemię w czasie mierzenia kątów. Nogi te utrzymują kątomiar w pewnéj nad ziemią wysokości i ułatwiają tym sposobem tak celowanie do przedmiotów, jako téż i odczytywanie wymierzonych kątów. Takie urządzenie kątomiaru służy do mierzenia kątów na płaszczyznie pozioméj; dla zmierzenia zaś kąta na płaszczyznie pionowéj do poziomu, musi albo tenże sam kątomierz tak być urządzony, iżby jego płaszczyzna z pozioméj na pionową zamienioną być mogła, lub téż inny li na ten cel przyrządzony kątomierz jest potrzebny. W teraźniejszych czasach narzędzie *teodolitem* zwane zastąpiło prawie powszechnie wszystkie gatunki kątomiarów. To narzędzie oszczędza nam często wiele i nudnych rachunków. Gdy bowiem wszelkie kątomiary dawały kąty mierzone na płaszczyznach pochyłych nie w prawdziwéj wielkości i potrzeba je było dopiéro sprowadzać za pomocą rachunku do poziomu, na którym wszystkie przedmioty zrysowanéj karty są umieszczone, teodolit daje kąty już poprawione t. j. sprowadzone do tegoż poziomu.

Resztę narzędzi pomijam nie chcąc być rozwlekłym; bo i powyższe tylko pokrótce wspomniałem, aby w przykładach zrozumieć można, jak się proste i kąty na gruncie mierzą.

Każda dobrze zrobiona karta wymierzonego gruntu lub okolicy, powinna być wiernym jéj obrazem a zatém zupełnie podobną i że tak powiem jéj miniaturą t. j. stósunki wzajemnych odległości różnych przedmiotów, ściśle na karcie zachowane być powinny. Dla dopięcia tego celu, nieodzowną rzeczą każdéj karty jest *podziałka* (scala). A że o niéj już w §. 71 *Geom.* obszernie mówiliśmy, dla tego tu nic już więcéj o niéj nie powiem.

§. 35.

Zagadnienie 1. Zmierzyć wysokość wieży, budynku, góry lub innego jakiego przedmiotu.

Niech do zmierzenia będzie wysokość wieży PQ *fig. 17*. Przystępując do jéj wymierzenia, możemy dwa główne napotkać przypadki, t. j. albo dojść można do punktu Q, spodka pionowéj spuszczonéj myślą z wiérzchołka mającego się mierzyć przedmiotu, i wyciągnąć na zewnątrz prostą QA, lub téż punkt Q jest nieodstępny, np. przy mierzeniu wysokości góry; albo chociaż dostępny, nie można, z powodu przyległych przeszkód, wyciągnąć linii QA. Dwa te ostatnie przypadki stanowią jeden, gdyż jedno jest postępowanie w obu razach.

Co do piérwszego. Jeżeli można wyciągnąć prostą QA, tedy ją rzeczywiście tyczkami wytykamy na równym ile być może gruncie. Po wytknięciu prostéj QA jeszcze nieograniczonéj długości, wymierzamy jak najdokładniéj pewną jéj część mierniczym łańcuchem lub łatami, o których w poprzedzającym §. wspomniałem; można nawet i inną miarą jaka się pod ręką znajduje, np. sążniem, byle tylko dołożyć starania, iżby to wymierzenie było jak najdokładniejsze. Aby tę dokładność osiągnąć, nie przestaje się na jednorazowém zmierzeniu, ale, szczególniéj gdy chodzi o ścisłą znajomość wysokości PQ, powtarza się mierzenie dwa i trzy razy, a potém bierze się średnia arytmetyczna z otrzymanych wypadków, która z pomiędzy wszystkich będzie najbliższa prawdziwéj. Tak wymierzona prosta QA, nazywa się *podstawą* (basis). Co do jéj długości, ta jest dowolną, uważać wszelako należy, iżby nie była ani zbyt krótką ani zbyt długą w porównaniu z wysokością. W piérwszym bowiem przypadku położenie célującego do wiérzchołka miernika, nie koniecznie jest wygodném, a w drugim otrzymuje się kąt bardzo ostry; w obu razach wypadki będą nieco błędne. Jaka długość podstawy dla dokładnego wypadku jest najkorzystniejsza, zaraz powiemy.

Stanąwszy z kątomiarem AB do mierzenia kątów na płaszczyznach pionowych urządzonym na punkcie A, t. j. na końcu wymierzonéj podstawy i ustawiwszy go tak, aby jego płaszczyzna była dokładnie do poziomu pionowa, co się uskutecznia za pomocą *libelli* lub *pionu*, a środek jego odpowiadał dokładnie punktowi na ziemi A, co się znowu robi za pomocą tak nazwanych *szczypczyków*, ustawia się potém prawidło lub luneta tak, iżby zero prawidła z zerem na brzegu znajdującego się podziału, zupełnie się zgadzało i w tém położeniu przyciska się prawidło do tego służącą śrubką. Potém zwraca się płaszczyzna kątomiaru w kierunku AQ na przedmiot i tu przyciska się cały kątomiar na nogach zapomocą znajdującéj się tam na ten cel śruby; daléj otwiera się piérwsza śrubka i céluje do wiérzchołka przedmiotu i prowadzi myślą promień oczny BP, zamykając w tém położeniu prawidła, célownicy, bąć lunety śrubkę wprzód otwartą. Tym sposobem mieć będziemy zmierzony kąt PBR między promieniem ocznym BP i prostą BR naturalnie równoległą i równą AQ. Odczytawszy stopnie na kole pomiędzy zerem na brzegu i zerem na prawidle, mieć będziemy wielkość rzeczonego kąta PBR $=\alpha$. To zrozumiawszy, łatwo teraz pojmiemy. iż najkorzystniéj jest nadać taką długość podstawie QA, iżby kąt α nie wiele się różnił od kąta 45^0, t. j. nadać potrzeba podstawie długość prawie równą mającéj się zmierzyć wysokości. Tak zmierzywszy kąt α, resztę już przez rachunek znajdziemy. Mamy bowiem w trójkącie BPR prostokątnym przy R, według §. 24 *przypadek* 2

$$\frac{PR}{BR}=\text{sty}.\alpha \quad \text{skąd } PR=BR\,\text{sty}.\alpha=AQ\,\text{sty}.\alpha.$$

Do znalezionéj ważności PR dodać jeszcze potrzeba, jak widzimy, wysokość narzędzia żeby mieć prawdziwą wysokość PQ.

Przykład. Niech będzie QA $=68{\cdot}74$ sążni, a kąt $\alpha=46^{\circ}32'56''$, tudzież wysokość narzędzia AB$=0{\cdot}75$ sążni, tedy

log. 68·74	$=1{\cdot}8372095$	PR	$=72{\cdot}5607$
log. sty. α	$=0{\cdot}0234922$	AB	$=\ \ 0{\cdot}75$
log. PR	$=1{\cdot}8607017$	wysokość wieży	$=73{\cdot}3107$ sążni.

W przypadku drugim gdzie nie można wyciągnąć podstawy od spodka Q prostopadłéj PQ, mogą znowu być trzy przypadki, a mianowicie: albo przedmiot którego wysokość zmierzyć chcemy leży na tymże samym poziomie z którego pomiar uskutecznić mamy, albo wyżéj, albo nareszcie niżéj niż rzeczony poziom. W każdym z tych trzech przypadków jest jedno i toż samo rozwiązanie z bardzo małemi odmianami i uważać je można za ogólne, zamykające w sobie nawet zagadnienie poprzednie. Rozwiążmy je naprzód tylko dla podanego przypadku, a wprowadziwszy potém do otrzymanego wypadku stósowne zmiany, otrzymamy rozwiązania w każdym innym.

Przypuśćmy iż potrzeba zmierzyć wysokość wieży lub baszty PQ *fig. 18* na znacznéj górze leżącego kościoła lub zamku. Na poziomie na którym góra stoi wyciągnijmy i wymierzmy podstawę $AB = a$, w takiém położeniu i w takiéj długości, iżby z jéj końców A i B wygodnie widzieć można tak wiérzchołek jako téż i spód mającego się mierzyć przedmiotu. Niech płaszczyzna poziomu na którym wymierzyliśmy podstawę, będzie ABR. Stanąwszy z kątomiarem na punkcie B, zmierzmy z tego stanowiska jak w poprzedzającém kąt $PBA = \beta$, Przeniósłszy potém narzędzie na drugi koniec podstawy A i ustawiwszy je jak należy, zmierzmy naprzód kąt $PAB = \alpha$, potém kąt $PAR = \varepsilon$ a nareszcie kąt $QAR = \vartheta$ (można téż osobno zmierzyć kąt PAQ). To mając, resztę dokonywamy ruchunkiem. *A najprzód* z trójkąta ABP w którym $AB = a$, α i β, znane, według §. 29 *przypadek 1* znajdziemy

$$AP = \frac{a \text{ wst. } \beta}{\text{wst. } (\alpha + \beta)}.$$

Potém w trójkącie APQ wiadomy jest z poprzedzającego rachunku bok AP i kąt $PAQ = \varepsilon - \vartheta$, tudzież kąt

$$AQP = 180^0 - AQR = 180^0 - (90^0 - \vartheta) = 90^0 + \vartheta;$$

zatém

$$\frac{PQ}{AP} = \frac{\text{wst. } (\varepsilon - \vartheta)}{\text{wst. } AQP} = \frac{\text{wst. } (\varepsilon - \vartheta)}{\text{dost. } \vartheta}$$

skąd $$PQ = \frac{AP \text{ wst. } (\varepsilon - \vartheta)}{\text{dost. } \vartheta}$$

albo $$PQ = \frac{a \text{ wst. } \beta \text{ wst. } (\varepsilon - \vartheta)}{\text{dost. } \vartheta \text{ wst. } (\alpha + \beta)} \quad \ldots \textit{fig. 18 (A)}.$$

Żądana przeto wysokość jest tym sposobem wyrażona przez same ilości znane a następnie łatwo za pomocą logarytmów obrachowana być może.

Jeżeli przedmiot którego wysokość ma być mierzona, zamiast na górze leży w dolinie; a podstawa wyciągnioną została na wzgórzu, tak że spodek téj wysokości Q leży pod poziomem podstawy, natenczas kąt ϑ wyrażać będzie kąt zagłębienia i wziąść go potrzeba z tego powodu ze znakiem odjemnym, reszta zaś zostaje jak wyżéj.
W tym przypadku będzie

$$PQ = \frac{a \text{ wst. } \beta \text{ wst. } (\varepsilon + \vartheta)}{\text{dost. } \vartheta \text{ wst. } (\alpha + \beta)} \quad . \quad . \quad \textit{fig. 18 (A)}.$$

Jeżeli rzeczony spodek leży na poziomie podstawy, kąt $\vartheta = 0$

a wysokość $$PQ = \frac{a \text{ wst. } \beta \text{ wst. } \varepsilon}{\text{wst. } (\alpha + \beta)} \quad . \quad . \quad . \quad \textit{fig. 18 (B)}.$$

Jeżeli oprócz znajdowania się spodku mierzącéj się wysokości na poziomie podstawy, grunt tak jest wolnym i równym że podstawę wyciągnąć można w kierunku AQ t. j. prostopadle do szukanéj wysokości, wtedy kąt α przechodzi na ε a wysokość szukana będzie

$$PQ = \frac{a \text{ wst. } \beta \text{ wst. } \varepsilon}{\text{wst. } (\beta + \varepsilon)} \quad . \quad \textit{fig. 18 (C)}.$$

Nareszcie jeżeli jeszcze można zmierzyć podstawę od A do Q jak w poprzedzającém zagadnieniu, wtedy kąt $\beta = 90^0$ a szukana wysokość

$$PQ = \frac{a \text{ wst. } \varepsilon}{\text{dost. } \varepsilon} = a \text{ sty. } \varepsilon \quad . \quad \textit{fig. 18 (D)}.$$

a to jest zrównanie poprzedzającego zagadnienia.

Niech np. wymierzona podstawa będzie $a = 77{\cdot}965$ sążni kąt $\vartheta = 25^0 50' 38''{\cdot}29$, $\varepsilon = 50^0 3' 58''$ $\alpha = 84^0 32' 4''{\cdot}5$ a nareszcie $\beta = 68^0 37' 38''{\cdot}44$ tedy będzie

$$
\begin{aligned}
log.\, a &= 1{\cdot}8918997 \\
log.\,\text{wst.}\,\beta &= 9{\cdot}9690569 \\
log.\,\text{wst.}\,(\varepsilon-\vartheta) &= 9{\cdot}6130755 \\
dpł.\,log.\,\text{dost.}\,\vartheta &= 0{\cdot}0457650 \\
dpł.\,log.\,\text{wst.}\,(\alpha+\beta) &= 0{\cdot}3453706 \\
\hline
log.\,\text{PQ} &= 1{\cdot}8651677 \\
\text{PQ} &= 73{\cdot}3108
\end{aligned}
$$

Do tak znalezionéj wysokości pamiętać potrzeba dodać jeszcze wysokość narzędzia. Zresztą co się tyczy praktycznego postępowania tak w ustawieniu narzędzia jako téż i mierzenia kątów, trzeba to koniecznie przynajmniéj widzieć, chcąc mieć jasne pojęcie tego co się tu w krótkości w tym przedmiocie powiedziało.

§. 36.

Zagadnienie 2. *Zmierzyć odległość dwóch dla jakichkolwiek przeszkód niedostępnych przedmiotów.*

Niech na *fig. 19* temi dwoma niedostępnemi punktami będą P i Q, potrzeba wymierzyć ich odległość czyli długość prostéj PQ. Na ten koniec w jakiéjkolwiek od tych przedmiotów odległości, byle tylko dobrze mogły być widziane wyciąga się na gruncie równym i mierzy podstawę AB $= a$ w kierunku ile być może szukanéj odległości. Za pomocą kątomiaru lub teodolitu, z końców téj podstawy t. j. z punktów A i B, mierzą się kąty PAB, QAB, QBA i PBA a reszta uskutecznia się rachunkiem. I tak: dwa trójkąty PAB i QAB, tudzież drugie dwa ABQ i ABP, w których w każdym znany jest bok AB i po dwa kąty jemu przyległe z mierzenia także wiadome, rozwiążemy według §. 29 *przyp. 1* i znajdziemy AP, AQ, BQ, BP. Szukana odległość PQ znajduje się w dwóch trójkątach, mianowicie w APQ i BPQ, a w każdym z nich znane są z poprzedzającego rachunku dwa boki z kątem zawartym bo PAQ = BAP — BAQ PBQ = ABQ — ABP, zatém według tegoż §. *przyp. 3* znajdziemy naprzód kąty APQ i AQP tudzież BQP i BPQ, a potém PQ tak z jednego jako i drugiego trójkąta. Zgodność tak otrzymanych ważności posłuży za kontrolę rachunku. Pokażmy to na liczbach.

Niech będzie AB $= a = 2500\cdot87$ sążni

BAP $= \alpha = 99^0 15' 52''\cdot8$, BAQ $= \beta = 51^0 55' 43''\cdot3$

ABQ $= \gamma = 81^0 10' 36''\cdot5$, ABP $= \delta = 32^0 10' 25''\cdot3$,

tedy według tego co poprzedziło mamy

$$\text{AP} = b = \frac{a\,\text{wst.}\,\delta}{\text{wst.}\,\varepsilon}, \qquad \text{BP} = c = \frac{a\,\text{wst.}\,\alpha}{\text{wst.}\,\varepsilon}$$

$$\text{BQ} = d = \frac{a\,\text{wst.}\,\beta}{\text{wst.}\,\eta}, \qquad \text{AQ} = g = \frac{a\,\text{wst.}\,\gamma}{\text{wst.}\,\eta}$$

gdzie $\varepsilon = 180^\circ - (\alpha + \delta)$, $\eta = 180^\circ - (\beta + \gamma)$;

zatém

$log.\, a = 3\cdot3980912$	$log.\, a = 3\cdot3980912$
$log.$ wst $\delta = 9\cdot7263096$	$log.$ wst. $\alpha = 9\cdot9942975$
$dpł.\, log.$ wst. $\varepsilon = 0\cdot1251309$	$dpł.\, log.$ wst. $\varepsilon = 0\cdot1251309$
$log.\, b = 3\cdot2495317$	$log.\, c = 3\cdot5175196$
$b = 1776\cdot363$	$c = 3292\cdot453$
$log.\, a = 3\cdot3980912$	$log.\, a = 3\cdot3980912$
$log.$ wst. $\beta = 9\cdot8961093$	$log.$ wst. $\gamma = 9\cdot9948300$
$dpł.\, log.$ wst. $\eta = 0\cdot1366197$	$dpł.\, log.$ wst. $\eta = 0\cdot1366197$
$log.\, d = 3\cdot4308202$	$log.\, g = 3\cdot5295409$
$d = 2696\cdot623$	$g = 3384\cdot862.$

Ponieważ, jak wyżéj wspomniałem, szukana odległość znajduje się w dwóch trójkątach, przeto dla kontroli rachujmy ją z obu. W trójkącie APQ jest kąt PAQ $= \vartheta = \alpha - \beta = 47^0 20' 9''\cdot5$, a w trójkącie BPQ, kąt PBQ $= \varkappa = 49^0 0' 11''\cdot2$; położywszy przeto APQ $= \lambda$, AQP $= \mu$, BQP $= \nu$ a BPQ $= \varrho$ mamy naprzód

$$\lambda + \mu = 180^0 - \vartheta = 132^\circ 39' 50''\cdot5,$$

$$\nu + \varrho = 180^\circ - \varkappa = 130^0 59' 48''\cdot8$$

a następnie $\dfrac{\lambda+\mu}{2} = 66^\circ 19' 55''\cdot25$, $\dfrac{\nu+\varrho}{2} = 65^\circ 29' 54''\cdot40$.

W trójkącie APQ jest

$$\text{sty.}\,\frac{\lambda-\mu}{2} = \frac{g-b}{g+b}\,\text{sty.}\,\frac{\lambda+\mu}{2} = \frac{g-b}{g+b}\,\text{doty.}\,\tfrac{1}{2}\,\vartheta$$

a w trójkącie BPQ

$$\text{sty.}\,\frac{\nu-\varrho}{2}=\frac{c-d}{c+d}\,\text{sty.}\,\frac{\nu+\varrho}{2}=\frac{c-d}{c+d}\,\text{doty.}\,\tfrac{1}{2}\varkappa.$$

Lecz $g-b=1608{\cdot}499,\quad g+b=5161{\cdot}225;$

$c-d=595{\cdot}830,\quad c+d=5989{\cdot}076$

przeto $\log.(g-b)=3{\cdot}2064208 \qquad \log.(c-d)=2{\cdot}7751224$

$\log.\,\text{doty.}\,\tfrac{1}{2}\vartheta=0{\cdot}3582255 \qquad \log.\,\text{doty.}\,\tfrac{1}{2}\varkappa=0{\cdot}3412647$

$\text{dpł.}\log.(g+b)=6{\cdot}2872472 \qquad \text{dpł.}\log.(c+d)=6{\cdot}2226403$

$\log.\text{sty.}\,\frac{\lambda-\mu}{2}=9{\cdot}8518935 \qquad \log.\,\frac{\nu-\varrho}{2}=9{\cdot}3390274$

$\frac{\lambda-\mu}{2}=35^{0}24'51''{\cdot}54 \qquad \frac{\nu-\varrho}{2}=12^{0}18'49''{\cdot}52$

Lecz $\frac{\lambda+\mu}{2}=66\;19\;55{\cdot}25 \qquad \frac{\nu+\varrho}{2}=65\;29\;54{\cdot}40$

więc $\lambda=101\;44\;46{\cdot}79 \qquad \nu=77\;48\;43{\cdot}92$

$\mu=30\;55\;\;3{\cdot}71 \qquad \varrho=53\;11\;\;4{\cdot}48.$

Znalazłszy kąty λ, μ, ν, ϱ, których nawet nie potrzebowaliśmy i jedynie tylko dla ćwiczenia cały ten rachunek odbyliśmy, połóżmy teraz

$$\frac{g-b}{g+a}\,\text{doty.}\,\tfrac{1}{2}\vartheta=\text{sty.}\,\psi \quad \text{a} \quad \frac{c-d}{c+d}\,\text{doty.}\,\tfrac{1}{2}\varkappa=\text{sty.}\,\varphi$$

tedy znajdziemy też same ważności jakie znaleźliśmy na $\frac{\lambda-\mu}{2}$ i $\frac{\nu-\varrho}{2}$ t. j. $\psi=35^{0}24'51''{\cdot}54$, $\quad\varphi=12^{0}18'49''{\cdot}52$

Nareszcie z trójkąta APQ mamy $\qquad PQ=\frac{(g+b)\,\text{wst.}\,\frac{1}{2}\vartheta}{\text{dost.}\,\psi}$

a z trójkąta BPQ . . . . $PQ=\frac{(c+d)\,\text{wst.}\,\frac{1}{2}\varkappa}{\text{dost.}\,\varphi}$

przeto $\log.(g+b)=3{\cdot}7127528 \qquad \log.(c+d)=3{\cdot}7773597$

$\log.\,\text{wst.}\,\tfrac{1}{2}\vartheta=9{\cdot}6036164 \qquad \log.\,\text{wst.}\,\tfrac{1}{2}\varkappa=9{\cdot}6177529$

$\text{dpł.}\log.\,\text{dost.}\,\psi=0{\cdot}0888514 \qquad \text{dpł.}\log.\,\text{dost.}\,\varphi=0{\cdot}0101079$

$\log.PQ=3{\cdot}4052206 \qquad \log.PQ=3{\cdot}4052205$

Dwa na odległość PQ znalezione logarytmy zgadzając się z sobą zupełnie, dowodzą dokładności całego rachunku. Szukana zatém odległość przedmiotów P i Q jest 2542·26 sążni.

§. 37.

Zagadnienie 3. *Jest do wymierzenia podstawa idąca w części przez nieprzebytą przeszkodę, np. staw, bagno, budynek i t. p. jakże znaleść część téj podstawy, któréj nie można zmierzyć?*

Niech na *fig. 20* będzie do wymierzenia podstawa w kierunku PQ, który przechodzi np. przez staw tak, iż z jednéj strony tylko do punktu B, a z drugiéj do C mierzyć można, część zaś BC jest niedostępna mierzeniu. Jeżeli to jest staw lub budynek i oprócz tego przyległy grunt wolny, tedy można z punktów B i C wyprowadzić prostopadłe BB′ i CC′ do PQ, a wziąwszy na nich długości równe tak żeby BB′ = CC′ przeszkodę omijały, zmierzyć potém BC′, a tym sposobem będzie także i BC wiadome. Ale jeżeli tego sposobu użyć z jakiegokolwiek powodu nie można, natenczas obiera się za podstawą taki punkt O, iżby z niego widzieć można punkta A, B, C, D i do nich célować. Stanąwszy na tym punkcie z kątomiarem lub teodolitem, mierzy się z tego stanowiska kąty AOB $=\alpha$, AOC $=\beta$ i AOD $=\gamma$. Z tych trzech kątów, jako téż i z wiadomych odcinków AB $= a$ i CD $= b$, znajdziemy przez rachunek BC $= x$ następującym sposobem:

Oznaczywszy kąt OAD przez δ, mamy:

w trójkącie AOB, $\dfrac{BO}{a} = \dfrac{\text{wst.}\,\delta}{\text{wst.}\,\alpha}$ skąd $BO = \dfrac{a\,\text{wst.}\,\delta}{\text{wst.}\,\alpha}$

w trójkącie AOC, $\dfrac{CO}{a+x} = \dfrac{\text{wst.}\,\delta}{\text{wst.}\,\beta}$ . . . $CO = \dfrac{(a+x)\,\text{wst.}\,\delta}{\text{wst.}\,\beta}$

przeto
$$\frac{BO}{CO} = \frac{a\,\text{wst.}\,\beta}{(a+x)\,\text{wst.}\,\alpha}.$$

Kąt zewnętrzny OBC $=\alpha+\delta$, jak równie OCD $=\beta+\delta$, ODQ $=\gamma+\delta$ zatém

w trójk. BOD, $\dfrac{BO}{b+x} = \dfrac{\text{wst.}\,(\gamma+\delta)}{\text{wst.}\,(\gamma-\alpha)}$, skąd $BO = \dfrac{(b+x)\,\text{wst.}\,(\gamma+\delta)}{\text{wst.}\,(\gamma-\alpha)}$

w trójk. COD, $\frac{\text{CO}}{b} = \frac{\text{wst.}(\gamma+\delta)}{\text{wst.}(\gamma-\beta)}$, skąd $\text{CO} = \frac{b\,\text{wst.}(\gamma+\delta)}{\text{wst.}(\gamma-\beta)}$

przeto $$\frac{\text{BO}}{\text{CO}} = \frac{(b+x)\,\text{wst.}(\gamma-\beta)}{b\,\text{wst.}(\gamma-\alpha)}$$

a następnie $$\frac{(b+x)\,\text{wst.}(\gamma-\beta)}{b\,\text{wst.}(\gamma-\alpha)} = \frac{a\,\text{wst.}\beta}{(a+x)\,\text{wst.}\alpha}$$

albo $$\{x^2+(a+b)x\}\,\text{wst.}\alpha\,\text{wst.}(\gamma-\beta)$$
$$+ab\,\{\text{wst.}\alpha\,\text{wst.}(\gamma-\beta)-\text{wst.}\beta\,\text{wst.}(\gamma-\alpha)\} = 0$$

lub nareszcie
$$x^2+(a+b)x+ab\left\{\frac{\text{wst.}\alpha\,\text{wst.}(\gamma-\beta)-\text{wst.}\beta\,\text{wst.}(\gamma-\alpha)}{\text{wst.}\alpha\,\text{wst.}(\gamma-\beta)}\right\} = 0.$$

Zrównanie to drugiego stopnia względem nieznanéj x rozwiązawszy, znajdziemy
$$x = -\frac{a+b}{2} \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{(a+b)^2-4ab\left\{\frac{\text{wst.}\alpha\,\text{wst.}(\gamma-\beta)-\text{wst.}\beta\,\text{wst.}(\gamma-\alpha)}{\text{wst.}\alpha\,\text{wst.}(\gamma-\beta)}\right\}}$$
$$= -\frac{a+b}{2} \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{\{(a+b)^2-4ab\}\,\text{wst.}\alpha\,\text{wst.}(\gamma-\beta)+4ab\,\text{wst.}\beta\,\text{wst.}(\gamma-\alpha)}{\text{wst.}\alpha\,\text{wst.}(\gamma-\beta)}}$$
$$= -\frac{a+b}{2} \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{(a-b)^2\,\text{wst.}\alpha\,\text{wst.}(\gamma-\beta)+4ab\,\text{wst.}\beta\,\text{wst.}(\gamma-\alpha)}{\text{wst.}\alpha\,\text{wst.}(\gamma-\beta)}}$$
$$= -\frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{2}\sqrt{1+\frac{4ab}{(a-b)^2}\cdot\frac{\text{wst.}\beta\,\text{wst.}(\gamma-\alpha)}{\text{wst.}\alpha\,\text{wst.}(\gamma-\beta)}}.$$

Wprowadziwszy kąt posiłkowy φ tak iżby było
$$\text{sty.}\varphi^2 = \frac{4ab}{(a-b)^2}\cdot\frac{\text{wst.}\beta\,\text{wst.}(\gamma-\alpha)}{\text{wst.}\alpha\,\text{wst.}(\gamma-\beta)}$$

skąd $$\text{sty.}\varphi = \frac{2}{a-b}\sqrt{\frac{ab\,\text{wst.}\beta\,\text{wst.}(\gamma-\alpha)}{\text{wst.}\alpha\,\text{wst.}(\gamma-\beta)}}$$

i kąt φ łatwo zapomocą logarytmów obrachować, będzie
$$x = -\frac{a+b}{2} \pm \frac{a-b}{2}\sqrt{1+\text{sty.}\varphi^2}$$
$$= -\frac{a+b}{2} \pm \frac{a-b}{2}\,\text{sie.}\varphi = -\frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{2\,\text{dost.}\varphi}$$

zatrzymując tylko znak wyższy, bo x musi być dodatne, albowiem nie szukamy tu kierunku części BC ale jéj bezwzględnéj wielkości.

Ponieważ dwa znalezione wzory są do obrachowania bardzo łatwe i na żaden szczegół nie prowadzą, a mierzenie kątów α, β, γ, żadnéj także nie stawia trudności, przeto może dokładniéj znajdzie się tym sposobem szukany odcinek nawet wtenczas, gdyby w mierzeniu podstawy ominąć można przeszkodę między B i C leżącą. Nie sądzę także za potrzebne dołączać tu liczbowy przykład, gdyż rachunek powyższych dwóch wzorów sam z siebie jest nader prosty.

§. 38.

Zagadnienie 4. *Mając na mappie oznaczone trzy punkta a zatém i wzajemną ich od siebie odległość, lub ogólniéj, wszystkie elementa trójkąta którego owe trzy punkta są wierzchołkami, oznaczyć na téjże mappie położenie czwartego punktu z którego tamte widzieć i do nich célować można.*

Kilka jest sposobów, szczególniéj zapomocą geometrycznego wykreślenia, rozwiązania tego zagadnienia. My tu rozwiążemy go naprzód analitycznie t. j. przez rachunek, a potém wspomnimy tylko praktyczne sposoby.

Niech dane będą na mappie trzy punkta A, B, C, *fig. 21* odpowiadające trzem na gruncie punktom **A**, **B**, **C**, tudzież czwarty punkt na gruncie **P**, którego położenie P na mappie znaleść chcemy. Stanąwszy z kątomiarem na punkcie **P**, zmierzmy kąty **APB**$=\gamma$, **APC**$=\beta$, tedy na figurze naszéj znane nam są kąty APB$=\gamma$ i APC$=\beta$. Punkt P znajduje się na wspólném przecięciu się linij BP i CP których kierunki zależą od kątow ABP i ACP, przeto i położenie punktu P od tychże kątów zależeć będzie; te zatém kąty znaleść nam potrzeba a już tém samém i punkt P wyznaczonym będzie. Położywszy ABP $= x$, ACP $= y$, tudzież AB$=c$, AC$=b$, BC$=a$, będzie:

W trójkącie ABP, $\frac{\text{AP}}{c} = \frac{\text{wst.}\,x}{\text{wst.}\,\gamma}$ skąd $\text{AP} = \frac{c\,\text{wst.}\,x}{\text{wst.}\,\gamma}$

w trókącie ACP, $\frac{\text{AP}}{b} = \frac{\text{wst.}\,y}{\text{wst}\,\beta}$ . . $\text{AP} = \frac{b\,\text{wst.}\,y}{\text{wst.}\,\beta}$

zatém $\frac{b\,\text{wst.}\,y}{\text{wst.}\,\beta} = \frac{c\,\text{wst.}\,x}{\text{wst.}\,\gamma}$ albo $\frac{\text{wst}\,y}{\text{wst.}\,x} = \frac{c\,\text{wst.}\,\beta}{b\,\text{wst.}\,\gamma}$.

W tém zrównaniu boki b i c są dane z mappy, bo je tam cyrklem wymierzyć można, lub też w dzienniku pomiarów są zapisane. Wprowadziwszy kąt posiłkowy φ tak iżby było $\text{sty.}\,\varphi = \frac{c\,\text{wst.}\,\beta}{b\,\text{wst.}\,\gamma}$, tedy mieć będziemy

$$\text{sty.}\,\varphi = \frac{\text{wst.}\,y}{\text{wst.}\,x}.$$

Strony tego zrównania dodając i odejmując od 1 będzie

$$1 + \text{sty.}\,\varphi = \frac{\text{wst.}\,x + \text{wst.}\,y}{\text{wst.}\,x}$$

$$1 - \text{sty.}\,\varphi = \frac{\text{wst.}\,x - \text{wst.}\,y}{\text{wst.}\,x}$$

a następnie

$$\frac{1 + \text{sty.}\,\varphi}{1 - \text{sty.}\,\varphi} = \frac{\text{wst.}\,x + \text{wst.}\,y}{\text{wst.}\,x - \text{wst.}\,y} = \frac{\text{sty.}\,\frac{x+y}{2}}{\text{sty.}\,\frac{x-y}{2}} \quad \text{§. 13 (24).}$$

Lecz według wzoru (43) §. 16 jest $\frac{1 + \text{sty.}\,\varphi}{1 - \text{sty.}\,\varphi} = \text{sty.}\,(45^\circ + \varphi)$

zatém $$\text{sty.}\,(45^\circ + \varphi) = \frac{\text{sty.}\,\frac{x+y}{2}}{\text{sty.}\,\frac{x-y}{2}}$$

skąd $$\text{sty.}\,\frac{x-y}{2} = \frac{\text{sty.}\,\frac{x+y}{2}}{\text{sty.}\,(45^\circ + \varphi)}.$$

Z tego zrównania znajdziemy $\frac{x-y}{2}$ t. j. połowę różnicy szukanych kątów. W czworokącie ABPC summa czterech jego kątów waży cztéry kąty proste, t. j. $x+y+\beta+\gamma+A=360°$ skąd $\frac{x+y}{2}=180°-\frac{1}{2}(A+\beta+\gamma)$; a ponieważ kąt A z pomiarów, kąty β i γ z ostatniego mierzenia są znane, zatém z ostatniego zrównania znajdziemy $\frac{x+y}{2}$ t. j. połowę summy dwóch szukanych kątów. A że wyżéj znaleźliśmy połowę ich różnicy, zatém i same kąty x i y będą tym sposobem znane a następnie i położenie punktu P wyznaczone. Gdyby potrzeba było, można téż obrachować odległość tegoż punktu od trzech danych A, B, C, przez co nasze zadanie będzie całkiem rozwiązane.

Praktycznie rozwiązujemy to zagadnienie następującym sposobem:

Ponieważ punkt szukany P znajduje się tak na łuku odcinka koła wykreślonego na boku AB *fig.* 22 jako téż i na łuku odcinka wykreślonego na boku AC jako na cięciwach, bo w tych odcinkach mieszczą się rzeczywiście mierzone kąty β i γ, zatém kreśląc dwa takie odcinki, przecięcie się ich łuków będzie punktem szukanym. Dla tego na prostéj AB jako na cięciwie wykreśliwszy według §. 96 *Geom.* odcinek koła w którymby się mieścił kąt γ, a na AC odcinek koła mieszczący kąt β, oba okręgi przecinać się naturalnie będą w punkcie A, przetną się atoli drugi raz w szukanym punkcie P *).

---

*) Professor Grunert w piśmie przez siebie wydawaném Archiv der Mathematik und Physik VIII. Th. 4 Heft." podał trzy praktyczne sposoby znalezienia przez wykreślenie rzeczonego punktu. Ponieważ te praktyczne sposoby nie należą do Trygonometryi ale do Geometryi praktycznéj, zatém odsyłając ciekawych do powołanego pisma, zwracam na nie uwagę szczególniéj nauczycieli jako na bogaty skład bardzo ważnych przedmiotów tak z dziedziny nauk matematycznych jako i fizycznych.

§. 39.

W większych pomiarach np. kraju jakiego używa się znaków trygonometrycznych. Te mogą być naturalne, jak wieże, baszty, figury i t. p. lub téż sztuczne to jest umyślnie na ten cel wystawione piramidy. W czasie pomiarów, a mianowicie *trójkątowania* (triangulatio) czyli robienia tak nazwanéj *siatki trygonometrycznéj* t. j. okrycia mającego się mierzyć kraju trójkątami, wykonywający tož trójkątowanie inženijer, przenosi się z swojém narzędziem od jednego do drugiego znaku i na každém stanowisku celuje do wszystkich innych widzianych znaków mierząc tym sposobem kąty z każdego stanowiska widzianych znaków, a przecięcie się promieni ocznych zamyka żądane trójkąty. Otóż wśród tego trójkątowania rzadki jest przypadek, że można narzędzie ustawić nad środkiem tego znaku, z którego stanowiska zamierza się mierzyć kąty, o których wspomniałem. W takim razie zmuszony jest inženijer ustawić swoje narzędzie obok znaku i to w różnéj od niego odległości i z tego obranego stanowiska mierzyć kąty między innemi znakami zawarte. Ale każdy łatwo pojmie, że z tego nowego stanowiska mierzone kąty, będą różne od tych jakieby się otrzymało, gdyby narzędzie stało nad środkiem znaku trygonometrycznego, skąd rzeczywiście wspomniane kąty mierzone być winny. Jakże więc z mierzonych a zatém nieprawdziwych, znaléść prawdziwe i jakby z właściwego stanowiska mierzone kąty? Stąd rodzi się następujące

Zagadnienie 5. *Kąt mierzony nie z właściwego stanowiska, sprowadzić do tegoż.*

Niech będą dwa znaki lub przedmioty służące za znaki trygonometryczne A i B *fig. 23,* z których już celowaliśmy do trzeciego znaku C; teraz wypada celować z punktu C i zmierzyć kąt ACB. Nie mogąc atoli ustawić narzędzia w punkcie C, obieramy nowe stanowisko w O i stąd mierzymy kąt AOB zamiast kąta ACB. Cała więc rzecz chodzi teraz o to, jak z wiadomego kąta AOB znaleść kąt ACB, co się w Geodezyi nazywa *sprowadzeniem kąta do środka* (reductio anguli ad centrum). Niech odległość nowego stanowiska O od prawdziwego C będzie OC$=d$ kąt prawdziwy ACB$=$C, mierzony AOB$=$O, kąt CBO$=x$, CAO$=z$. Te dwa ostatnie kąty są w każdym przypadku bardzo małe. Połóżmy jeszcze kąt BOC$=y$, który nazywać będziemy *kierunkowym* i który zawsze zmierzony być może; połóżmy nareszcie bok BC$=g$, AC$=h$, które niekoniecznie znać dokładnie; wystarczy bowiem gdy je znać będziemy w dziesiątkach metrów lub sążni. Kąt zewnętrzny ADB$=\mathrm{C}+x=\mathrm{O}+z$ skąd $\mathrm{C}-\mathrm{O}=z-x$. Lecz w trójkącie CBO jest

$$\frac{d}{g}=\frac{\text{wst.}\,x}{\text{wst.}\,y},\ \text{w trójkącie zaś ACO....}\ \frac{d}{h}=\frac{\text{wst.}\,z}{\text{wst.}(\mathrm{O}+y)},$$

skąd
$$\text{wst.}\,x=\frac{d\,\text{wst.}\,y}{g},\quad \text{wst.}\,z=\frac{d\,\text{wst.}(\mathrm{O}+y)}{h}$$

A że, jak to na początku ostrzegliśmy, x i z są zawsze bardzo małe, zatém bez wielkiego błędu położyć można

$$x=\frac{d\,\text{wst.}\,y}{g},\ z=\frac{d\,\text{wst.}\,(\mathrm{O}+y)}{h},$$

a dla tego $$\mathrm{C}-\mathrm{O}=z-x=p=\frac{d\,\text{wst.}\,(\mathrm{O}+y)}{h}-\frac{d\,\text{wst.}\,y}{g}$$

Wyrażenie to jest jak widzimy poprawką mierzonego kąta dla otrzymania prawdziwego. Aby tę poprawkę wyrazić w sekundach jak zwyczajnie bywa, należy drugą stronę rozmnożyć przez $\frac{180.60.60}{\pi}$ czyli co na jedno wychodzi podzielić przez wst. 1″, a tym sposobem poprawka w sekundach będzie

$$p''=\frac{d}{\text{wst.}\,1''}\left(\frac{g\,\text{wst.}\,(\mathrm{O}+y)-h\,\text{wst.}\,y}{gh}\right)$$

Stosując ten wzór, uważać potrzeba, że gdyby jeden z kątów x i z przypadł z drugiéj strony linii BC lub AC, natenczas ten kąt będzie odjemny. Oba przeto wyrazy powyższéj poprawki w tenczas tylko są dodatne, kiedy nowe stanowisko O przypada między przedłużeniami ramion kąta ACB; t. j. wewnątrz kąta mCn, *fig. 24;* jeżeli zaś punkt O pada wewnątrz kąta ACB, oba rzeczone wyrazy będą odjemne; nareszcie jeżeli obrane stanowisko wypadnie w kącie BC m albo w kącie

ACn, oba owe wyrazy mają przeciwne znaki, w którym przypadku znajduje się poprzedzająca figura. Ponieważ w tym ostatnim przypadku poprawka wypada najmniéjsza, przeto obierając nowe stanowisko O, starać się powinniśmy, jeżeli być może, zachować ten ostatni warunek, bo i trzy punkta A, B, C łatwiéj i wygodniéj z niego widzieć, i zdarzyć się może przypadek, że dwa wyrazy poprawki jako z przeciwnemi znakami, nawzajem się zniosą, a poprawka stanie się $= 0$.

Rozwiążmy tu jeszcze nieco różnym od poprzedzającego sposobem założone zagadnienie.

Szukajmy naprzód kąta A'CB *fig. 24* ze stanowiska O przypadającego na przedłużeniu jednego z boków trójkąta A'CB t. j. na przedłużeniu boku A'C. Ze stanowiska O mierzemy kąt $A'OB = \alpha$, a oznaczywszy kąt CBO jak w poprzedzającém przez x, widzimy że szukany kąt $A'CB = \alpha + x$. Połóżmy téż jak poprzednio $BC = g$, $CO = d$, tedy w trójkącie BCO jest $\frac{d}{g} = \frac{\text{wst.}\, x}{\text{wst.}\, \alpha}$ skąd $\text{wst.}\, x = \frac{d\, \text{wst.}\, \alpha}{g}$, albo, dla małości x, $x = \frac{d\, \text{wst.}\, \alpha}{g}$, a to jest poprawką mierzonego kąta α, dla otrzymania kąta $A'CB = C$. Wyraziwszy ją w sekundach łuku będzie $x'' = \frac{d\, \text{wst.}\, \alpha}{g\, \text{wst.}\, 1''}$, a następnie kąt prawdziwy

$$A'CB = \alpha + \frac{d\, \text{wst.}\, \alpha}{g\, \text{wst.}\, 1''}.$$

Chcąc teraz ze stanowiska O otrzymać kąt $ACB = C$, widzimy iż tu mamy dwa poprzedzającemu podobne przypadki; bo oznaczywszy kąt AOC przez α', kąt CAO przez z a bok AC przez h, zupełnie jak poprzednio, znajdziemy kąt $A'CA = \alpha' + z$, a poprawkę w sekundach

$$z'' = \frac{d\, \text{wst.}\, \alpha'}{h\, \text{wst.}\, 1''},\ \text{kąt zaś}\ A'CA = \alpha' + \frac{d\, \text{wst.}\, \alpha'}{h\, \text{wst.}\, 1''};$$

więc nareszcie kąt

$$ACB = C = \alpha + \alpha' + x + z = \alpha + \alpha' + \frac{d}{\text{wst.}\, 1''}\left(\frac{h\, \text{wst.}\, \alpha + g\, \text{wst.}\, \alpha'}{gh}\right).$$

Tu wyraźnie widzimy, że oba wyrazy poprawki h wst. α i g wst. α' są dodatne. Gdyby nowe stanowisko O obraném było w kącie ACB, wtedy kąty x i z są odjemne a poprawka byłaby $-\frac{d}{\text{wst. }1''}\left(\frac{h \text{ wst. } \alpha + g \text{ wst. } \alpha'}{gh}\right)$. Te przeto dwa stanowiska są najniekorzystniéjsze, bo poprawka wypada największą; dla tego téż, skoro można, należy unikać obierania stanowiska O tak w kącie który chcemy mierzyć, jako téż i w kącie jemu wierzchołkowym. W każdym innym razie wyrazy rzeczonéj poprawki mieć będą znaki przeciwne i otrzymamy

$$\text{kąt ACB} = \text{C} = \alpha - \alpha' + \frac{d}{\text{wst. }1''}\left(\frac{h \text{ wst. } \alpha - g \text{ wst. } \alpha'}{gh}\right)$$

W tym ostatnim przypadku zdarzyć się może, że h wst.$\alpha = g$wst.α', a wtedy poprawka wypadnie $= 0$.

Zobaczmy warunek tak korzystnego przypadku.

W trójkącie ACB jest $\frac{\text{BC}}{\text{AC}} = \frac{\text{wst. CAB}}{\text{wst. ABC}}$ czyli $\frac{g}{h} = \frac{\text{wst. BAC}}{\text{wst. ABC}}$.

Ale żeby poprawka była $= 0$, być powinno h wst. $\alpha = g$ wst. α', skąd $\frac{g}{h} = \frac{\text{wst. } \alpha}{\text{wst.} \alpha'}$, przeto $\frac{\text{wst. BAC}}{\text{wst. ABC}} = \frac{\text{wst. } \alpha}{\text{wst. } \alpha'}$.

Oznaczywszy kąt ABC przez B, będzie kąt BAC$=180-(\text{B}+\text{C})$, a $\quad$ wst. BAC $=$ wst. $(\text{B} + \text{C})$

tudzież, ponieważ w każdym razie poprawka jest małą, i bez znacznego błędu położyć można

$$\text{ACB} = \text{C} = \alpha - \alpha' \quad \text{skąd} \quad \alpha = \text{C} + \alpha',$$

zatém,
$$\frac{\text{wst. } (\text{B} + \text{C})}{\text{wst. B}} = \frac{\text{wst. } (\text{C} + \alpha')}{\text{wst. } \alpha'}$$

albo
$$\frac{\text{wst. B dost. C} + \text{dost. B wst. C}}{\text{wst. B}}$$
$$= \frac{\text{wst. C dost. } \alpha' + \text{dost. C wst. } \alpha'}{\text{wst. } \alpha'}$$

t. j. dost. C $+$ doty. B wst. C $=$ wst. C doty. α' $+$ dost. C skąd doty. B$=$doty α'; przeto kąt $\alpha' = $B albo $\alpha' = 180° + $B. Odnosząc ten warunek do *fig.* 23, ponieważ $\alpha' = $BOC, a B $=$ BAC, znajdziemy że poprawka jest $= 0$, skoro kąt

BOC = BAC. Ale w przypadku gdy w czworokącie ABCO kąt BOC = BAC, czworokąt ten jest antiparallelogramem t. j. czworokątem mogącym być wpisanym w koło, bo kąty α' i B czyli BOC i BAC będę w jednym odcinku, przeto ile razy tego warunku nie można dopełnić w wyborze stanowiska O, starać się przynajmniéj należy zbliżyć się do niego ile można, bo od tego dokładność kąta C zależy.

Ponieważ przypadki w których kąt mierzony O wypadnie równy kątowi szukanemu są dość rzadkie i daleko częściéj zmuszeni jesteśmy powyższą poprawkę

$$\frac{d}{\text{wst. } 1''}\left(\frac{h \text{ wst. } \alpha + g \text{ wst. } \alpha'}{gh}\right)$$

rachować, wyrażenie zaś jéj jak widzimy do logarytmicznego rachunku jest niewygodne, starajmy się zatém otrzymać tęż poprawkę pod innym kształtem.

Ponieważ na ostatniéj figurze jest jak widzieliśmy $\frac{g}{h} = \frac{\text{wst. BAC}}{\text{wst. ABC}} = \frac{\text{wst. (B + C)}}{\text{wst. B}}$, tudzież $O = \alpha + \alpha'$, a dla małości poprawki, $C = O = \alpha + \alpha'$, skąd $\alpha = C - \alpha'$, tedy napisawszy poprawkę następnie $\frac{d}{g \text{ wst. } 1''}\left(\text{wst. } \alpha + \frac{g}{h} \text{ wst. } \alpha'\right)$ i wprowadziwszy ostatnie ważności, znajdziemy

$$C = O + \frac{d}{g \text{ wst. } 1''}\left\{\text{wst. } (C - \alpha') + \frac{\text{wst. (B + C) wst. } \alpha'}{\text{wst. B}}\right\}$$

$$= O + \frac{d}{g \text{ wst. } 1''}\left(\text{dost. } \alpha' + \text{doty. B wst. } \alpha'\right) \text{ wst. C}$$

$$= O + \frac{d \text{ wst. C wst. } (B + \alpha')}{g \text{ wst. B wst. } 1''}.$$

Przy sprowadzaniu kąta do środka, pominąć nie można przypadku w którym odległości OC = d zmierzyć nie można z powodu, iż znakiem trygonometrycznym jest wieża lub baszta walcowa do któréj środka a raczéj do jéj osi celować nie można bo się jéj nie widzi. Aby w tym przypadku znaleść długość prostéj d, tak postąpić należy. Niech będzie C *fig.* 25, środek wieży lub baszty do którego dostąpić nie można dla zmierzenia odległości OC, tudzież dla celowania do punktu C w czasie mierzenia kątowych odległości punktów A i B od C (jak w powyższém kąty α i α'). Ze stanowiska O poprowadziwszy do wieży dwie styczne Om On a ich kąt mOn podzieliwszy na dwie części równe, prosta dzieląca da nam kierunek OC. Wyznaczywszy teraz na tym kierunku punkt k, mierzy się kąty AOm i AOn. Z tych dwóch kątów znajdziemy zaraz kąt $AOC = \alpha$ którego potrzebujemy, albowiem $AOC = AOm + mOC$, $AOC = AOn - nOC = AOn - mOC$, przeto dodając obie równości będzie

$$AOC = \frac{AOm + AOn}{2} = \alpha\,,$$

a tak kierunek prostéj OC względem OA jest znany w liczbach. Aby zmierzyć odległość OC, ponieważ Ok zawsze zmierzyć można, jeżeliby jeszcze i promien $Cm = r$ można bezpośrednio zmierzyć, rzeczona odległość byłaby zupełnie wyznaczona. Jeżeli zaś r mierzyć się nie da, natenczas zmierzywszy $Ok = OC - Ck = d - r = \delta$ i styczną *np.* $Om = t$, ponieważ w trójkącie mOC

jest $\quad t^2 = d^2 - r^2 = (d+r)(d+r) = (d+r)\,\delta$

będzie téż $\quad d + r = \dfrac{t^2}{\delta}.$

A że $d - r = \delta$, więc $\quad 2d = \dfrac{t^2}{\delta} + \delta = \delta + \dfrac{t^2}{\delta}$

a nareszcie $\quad d = \frac{1}{2}\delta + \dfrac{t^2}{2\delta}\,.$

Z tą odległością można już rachować wyżéj otrzymany wzór na poprawkę.

§. 40.

Mówiąc w Geometryi o znajdowaniu powierzchni odcinka kołowego, nie moglibyśmy tamże w zupełności rozwiązać zagadnienia §. 177, *z danéj cięciwy i strzałki znaleść powierzchnię odcinka* i dokończenie jego zostawiliśmy do Trygonometryi; tu więc będzie miejsce takowe rozwiązać. W powołanym §. oznaczywszy cięciwę przez b a strzałkę przez s, znaleźliśmy wyrażenie promienia koła $r = \frac{b^2 + 4s^2}{8s}$ a powierzchnię trójkąta między dwoma promieniami i cięciwą zawartego $= \frac{1}{2} b \left(\frac{b^2 - 4s^2}{8s}\right)$. Nie umieliśmy tamże znaleść z danych rzeczy powierzchni wycinka kołowego między temiż promieniami i łukiem zawartego, albowiem nie umieliśmy znaleść liczby stopni łuku do danéj cięciwy należącego, albo co na jedno wychodzi, nie umieliśmy znaleść kąta przy środku koła przez rzeczony łuk mierzonego. Dla tego tu przystępujemy do znalezienia powierzchni wycinka, szukając naprzód wspomnionego kąta.

W trójkącie ASD prostokątnym przy D, *fig. 26,* dane są AD i AS, t. j. $AD = \frac{1}{2} b$, zaś $AS = r$ poprzednio znalezione, przeto $AD = AS$ wst. ASC skąd wst. $ASC = \frac{AD}{AS}$ czyli wst. $ASC = \frac{b}{2r}$. Położywszy tu ważność za r, znajdziemy

$$\text{wst. ASC} = \frac{4bs}{b^2 + 4s^2}$$

więc kąt ASC = łukowi AC = łukowi którego wstawa $= \frac{4bs}{b^2 + 4s^2}$

A że ASB = 2 kąt ASC, więc ACB = 2 kąt. wst. $\frac{4bs}{b^2 + 4s^2}$

przeto powierzchnia wycinka

$$\text{ASB} = \frac{\pi}{360}\left(\frac{b^2 + 4s^2}{8s}\right)^2 \times 2 \text{ kąt wst. } \frac{4bs}{b^2 + 4s^2}$$

a nareszcie powierzchnia odcinka ACBA = powierzchni wycinka ASB – △ ASB $= \frac{\pi}{180}\left(\frac{b^2 + 4s^2}{8s}\right)^2 \times$ kąt. wst. $\frac{4bs}{b^2 + 4s^2}$

$$-\frac{b(b^2 - 4s^2)}{16s} = \frac{b^2 + 4s^2}{16s} \cdot 2 \text{ łuk wst. } \frac{4bs}{b^2 + 4s^2} - \frac{b(b^2 - 4s^2)}{16s}$$

bo kąt wst. $\frac{4bs}{b^2 + 4s^2} = \frac{180}{2\pi r} \cdot 2$ łuk. wst. $\frac{4bs}{b^2 + 4s^2}$ §. 172 *Geom.* *).

---

*) W powołanym §. znaleźliśmy wzór służący na wyprostowanie łuku jakiegokolwiek $a = \frac{m\pi r}{2}$ gdzie $m = \frac{\alpha^0}{90}$, zatém $a = \frac{\pi r \alpha^0}{180}$

Skoro więc strzałka, albo nawet jéj stósunek do promienia jest znany, znajdziemy z ostatniego wyrażenia powierzchnię odcinka.

Przykład 1. Niech będzie $b = 50$ stop. $s = 10$ stop.

tak że $\frac{s}{b} = 0{\cdot}2$ czyli $s = 0{\cdot}2b$

skąd $4bs = 0{\cdot}8b^2$, $4s^2 = 0{\cdot}16b^2$, $b^2 + 4s^2 = 1{\cdot}16b^2$

przeto $\frac{4bs}{b^2 + 4s^2} = \frac{0{\cdot}8\,b^2}{1{\cdot}16b^2} = 0{\cdot}68965517$

t. j. wst. ASC $= 0{\cdot}68965517$

$log.\ 0{\cdot}68965517 = 9{\cdot}8386319 = log.$ wst. ASC.

Szukając temu logarytmowi odpowiadającego kąta, znajdziemy go $= 43^0\,36'10''1 = 43^{0}{\cdot}603$,

zatém kąt wst. $\frac{4bs}{b^2 + 4s^2} = 43^{0}{\cdot}\,603 \qquad r = \frac{b^2 + 4s^2}{8s} = 0{\cdot}725b.$

Powierzchnia przeto wycinka

$$\text{ASB} = \frac{3{\cdot}14159}{180}.(0{\cdot}725b)^2.\ 43^0.603 = 0{\cdot}4000023b^2$$

powierzchnia trójkąta

$$\text{ASB} = \frac{b^2 - 4s^2}{16s}.\ b = \frac{0{\cdot}84b^2}{3{\cdot}2} \qquad = 0{\cdot}2625\,b^2$$

a nareszcie powierzchnia odcinka $\overline{\text{ACBA} = 0{\cdot}1375023b^2}$ lub téż $= 343{\cdot}7558$ stóp kwadratowych, gdy za b^2 położymy ważność.

Przykład 2. Niech dana będzie cięciwa $b = 10$ sążni a strzałka $s = 1$ sążeń, potrzeba znaleść powierzchnię odcinka. Według poprzedzającego jest $s = 0{\cdot}1b$, $4bs = 0{\cdot}4b^2$,

$$4s^2 = 0{\cdot}04b^2,\ b^2 + 4s^2 = 1{\cdot}04b^2,$$

---

skąd $\alpha = \frac{180}{\pi r}.a$. Lecz w naszym tu przypadku jest

$$a = 2 \text{ łuk wst. } \frac{4bs}{b^2 + 4s^2},\ \text{zatém } \alpha = \frac{180}{\pi r}.\ 2 \text{ łuk wst. } \frac{4bs}{b^2+4s^2}.$$

$$\text{Ale kąt wst. } \frac{4bs}{b^2 + 4s^2} = \tfrac{1}{2}\,\alpha = \frac{180}{2\pi r}.\ 2 \text{ łuk wst. } \frac{4bs}{b^2 + 4s^2},$$

położywszy przeto tę ważność w poprzedzającém wyrażeniu, jako téż ważność $r = \frac{b^2 + 4s^2}{8s}$ i uprościwszy, otrzymamy ostatnie wyrażenie.

zatém $\frac{4bs}{b^2+4s^2}=\frac{0\text{·}4b^2}{1\text{·}04b^2}=0\text{·}3846154,$

$$log. 0\text{·}3846154=9\text{·}5850267,$$

kąt temu logarytmowi odpowiadający

$$=22^0.37'11''\text{·}52=22\text{·}61987,\ r=\frac{b^2+4s^2}{8s}=1\text{·}3b=13.$$

Według §. 172 *Geom.* jest łuk

$$22^0\text{·}61987=\frac{22\text{·}61987}{90}\cdot\frac{\pi r}{2}=0\text{·}125666.\ 3\text{·}1415926.13$$

$$=5\text{·}132288$$

przeto powierzchnia wycinka $=2$ łuk $22^0\text{·}61987\times\frac{1}{2}r$

$=66\text{·}71974$ stóp kwadr.

Powierzchnia trójkąta $=\frac{b(b^2-4s^2)}{16s}=\frac{960}{16}=60$

zatém powierzchnia odcinka $=6\text{·}71974$ stóp. kwadr.

Inne przypadki tegoż zagadnienia, łatwo się rozwięzują.

§. 41.

Zagadnienie 6. *Znaleść wyrażenie powierzchni trapezu przez cztéry jego boki.*

Niech będzie trapez ABCD *fig.* 27, którego powierzchnię wyrazić chcemy przez cztéry jego boki, albo co jest toż samo, niech w trapezie ABCD dane będą wszystkie cztéry jego boki, potrzeba znaleść jego powierzchnię. Położywszy AB $=a$, BC $=b$, CD $=c$ i AD $=d$, tedy z §. 123 *Geom.* wiadomo, że powierzchnia trapezu, którą przez T oznaczmy, jest

$$T=\frac{b+d}{2}.CE$$

chodzi więc tylko o znalezienie CE. Na ten koniec z punktu C poprowadziwszy CF równoległą do AB, będzie CF $=$ AB $=a$. W trójkącie CDE jest $\frac{CE}{CD}=$ wst. D, przeto CE $=c$ wst. D bo CD $=c$. Chcąc przeto mieć CE wysokość trapezu, potrzeba znaleść wst. D. W trójkącie FCD, w którym FC $=a$ CD $=c$, położywszy jeszcze FD $=$ AD $-$ BC $=d-b=h$, tudzież $s=\frac{a+c+h}{2}$, według §. 29 mamy

$$\text{wst.}\, D = \frac{2\sqrt{s(s-a)(s-c)(s-h)}}{ch}$$

zatém $CE = c\,\text{wst.}\, D = \frac{2\sqrt{s(s-a)(s-c)(s-h)}}{h}$

a nareszcie powierzchnia trapezu

$$T = \frac{b+d}{h}\sqrt{s(s-a)(s-c)(s-h)}.$$

A przywracając ważności s i h, będzie nareszcie

$$T = \frac{b+d}{4(d-b)}\sqrt{(a+c+d-b)(c+d-a-b)(a+d-b-c)(a+b+c-d)}$$

a to jest wyrażenie powierzchni trapezu przez cztéry jego boki.

Jeżeli jeden z boków np. $b=0$, przechodzi trapez na trójkąt, którego trzy boki są a, c, d; ostatnie téż wyrażenie w tym przypadku staje się

$$= \tfrac{1}{4}\sqrt{(a+c+d)(c+d-a)(a+d-c)(a+c-d)}$$

zupełnie zgodnie z wyrażeniem we wstępie otrzymaném.

§. 42.

Ostatnie zastósowanie Trygonometryi zrobimy do Stereometryi. W §. 246 znaleźliśmy wprawdzie przy pomocy wykreślenia, wzajemne pochyłości każdych dwóch ścian w wielościanach foremnych, atoli w §. 242 zrobiliśmy uwagę, iż całkowite i dokładne obrachowanie tych wielościanów, bez Trygonometryi obejść się nie może. Tu jeszcze dodaję, iż chociażby wykreślenie jakiego tam użyliśmy, dało nam kąty nawet dokładne, wszelako bez zmierzenia ich tak nazwanym *przenośnikiem*, wielkość ich względna całkiem nie będzie nam znana, gdy tymczasem Trygonometryja dając takowe w stopniach, pokaże nam ich wielkość względną. Dlatego jako ostatnie zastósowanie, rozwiążemy tu następujące

Zagadnienie 7. *Znaleść pochyłości ścian w pięciu wielościanach foremnych.*

Ponieważ w wyżéj powołanym §. przekonaliśmy się, że przez prowadzenie płaszczyzn przekątnych można w każdym z pięciu wielościanów rozłożyć gdzie potrzeba kąt bryłowy wielościenny na dwa inne, z których jeden będzie trójściennym, mającym dwa kąty płaskie należące do ścian wielościanu, przeto uproszczając sobie to zagadnienie, dosyć będzie znaleść w kącie bryłowym trójściennym pochyłości dwóch którychkolwiek ścian. Na ten koniec niech będzie kąt bryłowy trójścienny O *fig.* 28 którego trzy kąty płaskie są $AOB = \alpha$, $BOC = \beta$, $AOC = \gamma$. Zamierzmy sobie znaleść kąt pochyłości ściany AOB do BOC; tedy na wspólnéj obu tym ścianom krawędzi OB obrawszy gdziekolwiek punkt D i z niego na ścianie AOB wyprowadziwszy prostopadłą DE do OB aż do przecięcia się jéj z krawędzią OA w punkcie E, tudzież na ścianie BOC z tegoż samego punktu prostopadłą DF do téjże krawędzi, kąt $EDF = \varepsilon$ będzie kątem pochyłości szukanym według §. 196. *Stereom.* Połączywszy potém punkta E i F prostą EF, otrzymamy trójkąt prostokreślny DEF, w którym według

§. 27 $\overline{EF}^2 = \overline{DE}^2 + \overline{DF}^2 - 2DE . DF \text{ dost.} \varepsilon.$

Podobnież w trójkącie prostokreślnym EOF jest

$$\overline{EF}^2 = \overline{EO}^2 + \overline{FO}^2 - 2EO . FO \text{ dost.} \gamma.$$

przeto

$$\overline{EO}^2 + \overline{FO}^2 - 2EO . FO \text{ dost.} \gamma = \overline{DE}^2 + \overline{DF}^2 - 2DE . DF \text{dost.} \varepsilon$$

W trójkącie DEO prostokątnym przy D

jest $\overline{EO}^2 = \overline{DE}^2 + \overline{DO}^2$

w trójkącie DFO prostokątnym przy D

jest $\overline{FO}^2 = \overline{DF}^2 + \overline{DO}^2$

przeto $\overline{EO}^2 + \overline{FO}^2 = \overline{DE}^2 + \overline{DF}^2 + 2\overline{DO}^2$

W tychże samych dwóch trójkątach mamy

w piérwszym $DE = EO \text{ wst.} \alpha$ . . $DO = EO \text{ dost.} \alpha$

w drugim $DF = FO \text{ wst.} \beta$ . . $DO = FO \text{ dost.} \beta$

zatém $DE . DF = EO . FO \text{wst} \alpha \text{wst} \beta$ $\overline{DO}^2 = EO . FO \text{dost} \alpha \text{dost} \beta$

a następnie $\overline{EO}^2 + \overline{FO}^2 = \overline{DE}^2 + \overline{DF}^2 + 2EO . FO \text{dost.} \alpha \text{dost.} \beta.$

Włożywszy te ważności w powyższe zrównanie, tudzież upraszczając i dzieląc przez 2EO . FO, otrzymamy

$$\text{dost.}\,\alpha\,\text{dost.}\,\beta - \text{dost.}\,\gamma = - \text{wst.}\,\alpha\,\text{wst.}\,\beta\,\text{dost.}\,\varepsilon$$

skąd $\text{dost.}\,\varepsilon = \dfrac{\text{dost.}\,\gamma - \text{dost.}\,\alpha\,\text{dost.}\,\beta}{\text{wst.}\,\alpha\,\text{wst.}\,\beta}.$

Za pomocą tego zrównania mając w kącie bryłowym trójściennym składające go kąty płaskie znane, znajdziemy kąt pochyłości każdych dwóch ścian.

W przypadku że trzy kąty płaskie są między sobą równe, t. j. $\alpha = \beta = \gamma$, mieć będziemy

$$\text{dost.}\,\varepsilon = \frac{\text{dost.}\,\alpha - \text{dost.}\,\alpha^2}{\text{wst.}\,\alpha^2} = \frac{\text{dost.}\,\alpha\,(1 - \text{dost.}\,\alpha)}{1 - \text{dost.}\,\alpha^2} = \frac{\text{dost.}\,\alpha}{1 + \text{dost.}\,\alpha}$$

W przypadku zaś że dwa kąty płaskie są między sobą równe, np. $\alpha = \beta$, będzie

$$\text{dost.}\,\varepsilon = \frac{\text{dost.}\,\gamma - \text{dost.}\,\alpha^2}{\text{wst.}\,\alpha^2} = \frac{\text{dost.}\,\gamma - \text{dost.}\,\alpha^2}{1 - \text{dost.}\,\alpha^2}.$$

§. 43.

Tak znalezione wyrażenia kąta pochyłości dwóch ścian, zastósujmy do pięciu ciał foremnych.

W czworościanie każdy kąt bryłowy jest złożony z trzech płaskich między sobą równych bo do trójkąta równobocznego należących. Tu przeto jest $\alpha = \beta = \gamma = 60^0$ zatém

$$\text{dost.}\,\varepsilon = \frac{\text{dost.}\,60^0}{1 + \text{dost.}\,60^0} = \frac{\text{wst.}\,30^0}{1 + \text{wst.}\,30^0} = \frac{\frac{1}{2}}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{1}{3} \quad \text{§. 12.}$$

$$log.\,\text{dost.}\,\varepsilon = -0{\cdot}4771213 = 9{\cdot}5228787.$$

Szukając tego logarytmu w tablicach między dostawami, znajdziemy $\varepsilon = 70^0\,31'\,43''\cdot 60$

W ośmiościanie jak z §. 245 wiadomo przez prowadzenie płaszczyzny przekątnéj, można otrzymać kąt bryłowy trójścienny, w którym dwa kąty płaskie są między sobą równe, każdy $= 60^0$ a trzeci należy do kwadratu, zatém $\alpha = \beta = 60^0$ $\gamma = 90^0$ a następnie

$$\text{dost.}\,\varepsilon = \frac{0 - (\text{dost.}\,60^0)^2}{1 - (\text{dost.}\,60^0)^2} = \frac{-\frac{1}{4}}{1 - \frac{1}{4}} = -\frac{1}{3}.$$

Ponieważ dost. ε wypadła odjemna, wniesiemy stąd, iż kąt ε jest rozwarty t. j. *log.* dost. $\varepsilon = 9\text{·}522787-$ a kąt jemu odpowiadający $= -70^\circ\, 31'\, 43''\text{·}60$ zatém

$$\varepsilon = 180^\circ - 70^\circ\, 31'\, 43''\text{·}60 = 109^\circ\, 28'\, 16''\text{·}40.$$

W dwudziestościanie według powyższego §. można także z jego kąta bryłowego otrzymać trójścienny, w którym dwa kąty płaskie będą sobie równe a każdy $=60^\circ$, trzeci zaś należy do pięciokąta foremnego i dlatego $=108^\circ$, zatém

$$\text{dost. } \varepsilon = \frac{\text{dost. } 108^\circ - (\text{dost. } 60^\circ)^2}{(\text{wst. } 60^\circ)^2} = \frac{-\text{wst. } 18^\circ - \frac{1}{4}}{1 - \frac{1}{4}}$$

$$= -\frac{1 + 4\text{wst. } 18^\circ}{3}$$

log. wst. $18^\circ = 9\text{·}4899824$, liczba temu logarytmowi odpowiadająca $=0\text{·}3090171$, zatém $\dfrac{1+4 \text{ wst. } 18}{3} = 0\text{·}745356$ . . .

a następnie dost. $\varepsilon = -0\text{·}745356$,

log. dost. $\varepsilon = 9\text{·}8723638 -$, przeto $\varepsilon = -41^\circ\, 48'\, 37''\text{·}12$, zatém kąt pochyłości ścian w dwudziestościanie

$$= 180^\circ - 41^\circ\, 48'\, 37''\text{·}12 = 138^\circ\, 11'\, 22''\text{·}88.$$

W sześcianie każdy kąt bryłowy jest trójścienny a składające go kąty płaskie między sobą równe i każdy $=90^\circ$, będzie więc dost. $\varepsilon = \dfrac{\text{dost. } \alpha}{1 + \text{dost. } \alpha} = \dfrac{0}{1} = 0$

zatém $\varepsilon = 90^\circ$ jak już wiemy.

W dwunastościanie nareszcie każdy kąt bryłowy złożony jest także z trzech płaskich między sobą równych a każdy $=108^\circ$, przeto

$$\text{dost. } \varepsilon = \frac{\text{dost. } \alpha}{1 + \text{dost. } \alpha} = \frac{\text{dost. } 108^\circ}{1 + \text{dost. } 108^\circ} = \frac{-\text{wst. } 18^\circ}{1 - \text{wst. } 18^\circ}$$

więc według poprzedzającego będzie

$$\text{dost. } \varepsilon = -\frac{0\text{·}3090171}{1 - 0\text{·}3090171} = -\frac{0\text{·}3090171}{0\text{·}6909829} = -0\text{·}4472138$$

log. dost. $\varepsilon = 9\text{·}6505152 -$, przeto $\varepsilon = -63^\circ\, 26'\, 5''\text{·}77$ a następnie kąt pochyłości ścian w dwunastościanie

$$= 180^\circ - 63^\circ\, 26'\, 5''\text{·}77 = 116^\circ\, 33'\, 54''\text{·}23.$$

§. 44.

Do zupełnego obrachowania wielościanów foremnych, potrzebny jest jeszcze promień kuli wpisanéj w każdy. Ten promień znaleźliśmy w §. 247 także za pomocą geometrycznego wykreślenia, t. j. znaleźliśmy jego długość bezwzględną, nie mogąc nic powiedzieć o liczbowéj jego długości. Za pomocą Trygonometryi jesteśmy teraz w stanie znaleść też długość promienia wyrażoną w liczbach, jakiéj rzeczywiście do rachunku potrzebujemy. Na ten koniec weźmy tu *fig.* 247 z tą różnicą, że okryjemy wielościan pięciokątami foremnemi zamiast trójkątami, co jest jedno i toż samo.

Niechże będzie wielościan okryty pięciokątami foremnemi, których środki O, P, Q i t. d. *fig.* 29, niech S będzie środkiem tak wpisanéj jako i opisanéj kuli stósownie do powołanego §., tedy OS będzie promieniem wpisanéj, zaś SE promieniem opisanéj kuli. Chociaż bowiem nie potrzebujemy tu ostatniego promienia, wszelako przy téj sposobności znajdziemy wyrażenie i tego. Z punktów O i P t. j. ze środków wielokątów foremnych spuściwszy prostopadłe OM, PM, na spólną krawędź AE, wiemy że te prostopadłe padną na środek AE w punkcie M i będą do téj krawędzi prostopadłe; kąt przeto PMO będzie kątem pochyłości dwóch ścian P i O, który z poprzedzającego jest nam znany. Kąt AOE przy środku pięciokąta lub trójkąta ramionami swemi obejmujący bok pięciokąta lub trójkąta, jest także znany, bo w pięciokącie $= \frac{360^0}{5} = 72^0$, a w trójkącie $\frac{360^0}{3} = 120^0$, przeto i kąt AOM jest także znany. Jeżeli przez SO i OM poprowadzimy płaszczyznę, ta będąc prostopadłą do ściany O, będzie téż prostopadłą i do AE oraz przecinać będzie tę krawędź w punkcie M. Na téj płaszczyznie złączywszy punkta S i M prostą SM, ta podzieli kąt PMO na dwie części równe; w trójkącie więc prostokątnym MSO jest

$$\frac{OS}{MO} = \text{sty.}\,OMS = \text{sty.}\,\tfrac{1}{2}\varepsilon \qquad \text{skąd} \qquad OS = MO\,\text{sty.}\,\tfrac{1}{2}\varepsilon.$$

Ale w trójkącie AOM prostokątnym przy M, jest $\frac{MO}{MA}$ = doty. MOA, skąd MO = MA doty. MOA. A że MA równa się połowie krawędzi wielościanu, którą na swém miejscu przez a oznaczyliśmy, zatém MO $= \frac{1}{2}a$ doty. MOA $= \frac{1}{2}a$ doty. ψ, jeżeli położymy kąt MOA $= \psi$, a następnie

$$OS = \tfrac{1}{2}a \text{ doty.}\,\psi \text{ sty.}\,\tfrac{1}{2}\varepsilon.$$

Poznawszy tym sposobem promień kuli wpisanéj, łatwo znajdziemy promień kuli opisanéj na wielościanie; jest bowiem $\overline{SE}^2 = \overline{SO}^2 + \overline{OE}^2$. A że w trójkącie MOE jest $\frac{EM}{EO}$ = wst. EOM, zaś EM $= \frac{1}{2}a$, EOM $= \psi$, zatém $OE = \frac{a}{2 \text{ wst.}\,\psi}$

a następnie $$\overline{SE}^2 = \tfrac{1}{4}a^2 \text{ doty.}\,\psi^2 \text{sty.}\,\tfrac{1}{2}\varepsilon^2 + \frac{a^2}{4 \text{ wst.}\,\psi^2}$$

$$= \tfrac{1}{4}a^2 \left(\frac{1 + \text{dost.}\,\psi^2 \text{ sty.}\,\tfrac{1}{2}\varepsilon^2}{\text{wst.}\,\psi^2}\right)$$

skąd $$SE = \frac{a}{2 \text{ wst.}\,\psi}\sqrt{1 + \text{dost.}\,\psi^2 \text{ sty.}\,\tfrac{1}{2}\varepsilon^2}.$$

Położywszy dost. ψ sty. $\frac{1}{2}\varepsilon$ = sty. φ, będzie

$$SE = \frac{a \text{ sie.}\,\varphi}{2 \text{ wst.}\,\psi} = \frac{a}{2 \text{ wst.}\,\psi \text{ dost.}\,\varphi}.$$

Zastósujmy teraz wzór znaleziony na promień kuli wpisanéj, do pięciu wielościanów foremnych.

Dla czworościanu, ośmiościanu i dwudziestościanu jest $\psi = 60^\circ$, zaś dla dwunastościanu . . . . $\psi = 36^\circ$.

Dla obrachowania sześcianu nie potrzebujemy Trygonometryi, z tego téż powodu pomijamy tu i rachunek promienia kuli wpisanéj. Gdybyśmy zaś potrzebowali, tedy $\psi = 45^0$ a $\frac{1}{2}\varepsilon = 45^0$.

Ponieważ dla czworościanu znaleźliśmy wyżéj

	$\varepsilon = 70^0\,31'\,43''\cdot6$	więc	$\frac{1}{2}\varepsilon = 35^0\,15'\,51''\cdot8$
ośmiościanu	109 28 16·4	. . .	54 44 8·2
dwudziestościanu . .	138 11 22·88	. . .	69 5 41·44
dwunastościanu . . .	116 33 54·23	. . .	58 16 57·11

Oznaczywszy SO t. j. promień kuli wpisanéj przez ϱ, będzie

dla czworościanu	dla ośmiościanu
$log.\,doty.\,\psi = 9{\cdot}7614394$	$log.\,doty.\,\psi = 9{\cdot}7614394$
$log.\,sty.\,\frac{1}{2}\varepsilon = 9{\cdot}8494850$	$log.\,sty.\,\frac{1}{2}\varepsilon = 0{\cdot}1505150$
$dpł.\,log.\,2 = 9{\cdot}6989700$	$dpł.\,log.\,2 = 9{\cdot}6989700$
$9{\cdot}3098944$	$9{\cdot}6109244$

Liczby tym logarytmom odpowiadające są:

	$0{\cdot}2041241....$	$0{\cdot}4082483....$
przeto	$\varrho = 0{\cdot}2041241...\,a$	$\varrho = 0{\cdot}4082483...\,a$

dla dwudziestościanu	dla dwunastościanu
$log.\,doty.\,\psi = 9{\cdot}7614394$	$log.\,doty.\,\psi = 0{\cdot}1387390$
$log.\,sty.\,\frac{1}{2}\varepsilon = 0{\cdot}4179659$	$log.\,sty.\,\frac{1}{2}\varepsilon = 0{\cdot}2089877$
$dpł.\,log.\,2 = 9{\cdot}6989700$	$dpł.\,log.\,2. = 9{\cdot}6989700$
$9{\cdot}8783853$	$0{\cdot}0466967$

liczby	$0{\cdot}7557623....$	$1{\cdot}113517....$
zaś	$\varrho = 0{\cdot}7557623....\,a$	$\varrho = 1{\cdot}113517....\,a$

Obrachowawszy w §. 242 powiérzchnie wielościanów, które nas tu zatrudniają, a teraz promienie kuli wpisanéj w każdy, możemy już znaléść objętość każdego, bo wiemy z tegoż §. iż ta równa się iloczynowi z powiérzchni wielościanu przez $\frac{1}{3}$ promienia kuli wpisanéj. Tym sposobem mieć będziemy

objętość czworościanu	$= a^2\sqrt{3}.\frac{1}{3}\varrho$	$= 0{\cdot}117851\,a^3$
sześcianu	$= \ldots\ldots\ldots$	a^3
ośmiościanu	$= 2a^2\sqrt{3}.\frac{1}{3}\varrho$	$= 0{\cdot}235702\,a^3$
dwunastościanu	$= 15a^2\sqrt{\frac{2+\sqrt{5}}{\sqrt{5}}}.\frac{1}{3}\varrho$	$= 7{\cdot}663122\,a^3$
dwudziestościanu	$= 5a^2\sqrt{3}.\frac{1}{3}\varrho$	$= 0{\cdot}436336\,a^3$

ROZDZIAŁ V.

Trygonometryja sferyczna.

Wzory na rozwiązanie trójkątów sferycznych.

§. 45.

W Stereometryi, a mianowicie w §. 206 *uwaga* wspomniano, że cała nauka o trójścianie, stanowi tak nazwaną *Trygonometryją w przestrzeni* czyli *sferyczną*. Żeby się o téj prawdzie przekonać, dosyć z wierzchołka trójścianu jako ze środka, pomyślić jakimkolwiek promieniem zakreśloną kulę, gdyż jéj powierzchnia przetnie każdą ścianę trójścianu w łuku koła wielkiego. Te łuki przetną się po dwa na krawędziach trójścianu i zamkną tym sposobem miejsce na powierzchni kuli trzema rzeczonemi łukami ograniczone, a zatém trójkąt sferyczny stósownie do definicyi §. 271. Łuki wypadające z przecięcia się powierzchni kuli ze ścianami trójścianu, jako mające swój środek w jego wierzchołku, są oczywiście miarami kątów płaskich tenże trójścian składających. Z punktów w których się łuki przecinają, wyprowadziwszy na ścianach na których się też łuki znajdują, prostopadłe do spólnéj krawędzi, kąt między temi prostopadłemi jest kątem pochyłości w mowie będących ścian według §. 196. A że kąta, jakie dwa łuki między sobą czynią, inaczéj sobie wyobrazić nie można, jak tylko jako kąt między stycznemi z punktu przecięcia się łuków do każdego z nich wyprowadzonemi, a powyższe prostopadłe są rzeczywiście stycznemi do boków trójkąta sferycznego, zatém naturalny wniosek, że kąty tegoż trójkąta wyrażają pochyłości ścian trójścianu trójkątowi sferycznemu odpowiadającego.

Z tego objaśnienia trójkąta sferycznego wypada, że w nim mieć będziemy do czynienia z dwojakiemi kątami, mianowicie zaś z kątami płaskiemi, tu przez boki (łuki), i kątami pochyłości, tu przez kąty trójkąta sferycznego wyrażonemi. Z tego następnie łatwo przewidzieć, że w Trygonometryi sferycznéj też same funkcyje trygonometryczne, jakie w prostokreślnéj poznaliśmy, zatrudniać nas będą. A jak w trójkącie prostokreślnym dostrzegliśmy związek między jego bokami i funkcyjami trygonometrycznemi, tak tu, ponieważ miejsce boków linijowych zastąpią łuki kół wielkich, zamiast piérwszego związku, otrzymać musimy związek funkcyj trygonometrycznych należących do boków, z takiemiż funkcyjami należącemi do kątów trójkąta sferycznego.

Co się tyczy własności trójkątów sferycznych, rozumiem, że dosyć będzie odesłać w tym względzie do Stereometryi, a w szczególności do rozdziału o kątach trójściennych, tudzież do §. 272 i następnych.

Każdy przystępujący do Trygonometryi sferycznéj, powinien koniecznie przypomnieć sobie naprzód wszystko, co było dowiedzioném lub powiedzianém o kuli, a mianowicie począwszy od §. 267 aż do §. 278 włącznie. Takie zrobiwszy ostrzeżenie, możemy wprost przystąpić do znalezienia związku między bokami a kątami trójkąta sferycznego. Przedewszystkiém atoli zastanowić nam się wypada, jakich to związków potrzebować będziemy, abyśmy wiedzieli czego szukać mamy?

§. 46.

Jak w prostokreślnym tak równie i w sferycznym trójkącie sześć jest elementów, t. j. trzy boki i trzy kąty. Piérwsze w dalszym ciągu znaczyć będziemy przez a, b, c, drugie zaś, czyli kąty im przeciwległe, przez α, β, γ. Z sześciu tych elementów, skoro trzy którekolwiek są dane, znaleść możemy w każdym razie trzy inne czyli *rozwiązać trójkąt*. Żeby więc w każdym przypadku można rozwiązać sferyczny trójkąt, należy wynaleść tyle związków pomiędzy każdemi czterema elementami, ile z sześciu elementów zrobić można różnych czwórek. Według §. 49 *Arytm.* z sześciu elementów jest czwórek $\frac{6.5.4.3}{1.2.3.4} = 15$, a dla tego zdawałoby się, iżby należało znaleść 15 różnych związków czyli zrównań, aby na każdy zdarzyć się mogący przypadek odpowiedzieć. Te atoli 15 związków sprowadzają się, jak to już także przy trójkątach prostokreślnych widzieliśmy, do cztérech głównych zrównań. Bo w rzeczy saméj skoro znajdziemy zrównanie:

1. Między a, b, c, α, już tém samém przez prostą przemianę elementów mamy zrównania między a, b, c, β, i a, b, c, γ.

2. Znalazłszy zrównanie między a, b, α, β, mamy też między a, c, α, γ i b, c, β, γ.

3. Mając zrównanie między a, b, α, γ, mamy też między a, b, β, γ; a, c, α, β; a, c, β, γ; b, c, α, β; i b, c, α, γ.

4. Ze zrównania między a, α, β, γ, wyprowadzimy zrównania między b, α, β, γ i c, α, β, γ.

Tym sposobem widzimy, że owe 15 połączeń sprowadzają się do czterech tylko różnych; całe przeto nasze usiłowanie do tego zwróconém będzie, aby znaléść cztéry co dopiéro wskazane związki, albo mówiąc wyraźniéj: starać się będziemy znaleść zrównanie

1° między trzema bokami i jednym kątem trójkąta sferycznego;

2° między dwoma bokami i dwoma im przeciwległemi kątami;

3° między dwoma bokami i dwoma kątami jednym przyległym a drugim przeciwległym dwom piérwszym bokom, albo jak się zwykle wyrażamy, zrównanie między czterema po sobie na figurze następującemi elementami;

4° między trzema kątami i jednym bokiem.

Tak mając cel wytknięty zaczynajmy.

§. 47.

Dla znalezienia zrównania między trzema bokami i jednym kątem trójkąta sferycznego, kilka jest sposobów, które wszelako wszystkie na jedno wychodzą; bo mają za zasadę trójkąt prostokréślny, którego boki są pewnemi funkcyjami trygonometrycznemi względem boków trójkąta sferycznego. Z tego powodu sądzę, iż najłatwiéj otrzymamy żądane zrównanie, jeżeli w trójścianie §. 42, gdzie właśnie znaleźliśmy związek kąta pochyłości z trzema kątami płaskiemi, weźmiemy jego wiérzchołek O *fig. 28*, za środek kuli i pomyślimy promieniem $=1$ zakréśloną kulę, któréj powiérzchnia przetnie trzy ściany trójścianu w łukach kół wielkich przecinających się po dwa na krawędziach trójścianu. Tym sposobem otrzymamy w miejsce *fig. 28*, *fig. 30*, gdzie kąt $\varepsilon =$ EDF jest zarazem kątem trójkąta sferycznego DGH. W powołanym §. znaleźliśmy zrównanie

$$\text{dost.}\gamma = \text{dost.}\alpha\,\text{dost.}\beta + \text{wst.}\,\alpha\,\text{wst.}\beta\,\text{dost.}\,\varepsilon$$

które chcąc przenieść do trójkąta sferycznego, dosyć jest uważyć, że za kąt α można wziąść bok trójkąta sferycznego DG, w miejsce kąta β, położyć można bok DH, zamiast kąta γ bok GH, bo te łuki jako z wspólnego wiérzchołka O między ich ramionami zakreślone, są miarami rzeczonych kątów; nareszcie za kąt ε weźmiemy jak powiedziano kąt GDH. A że boki trójkąta sferycznego oznaczyliśmy raz na zawsze przez a, b, c a przeciwległe im kąty przez α, β, γ, zatém jeżeli położymy $\text{GH} = a$, $\text{GD} = b$, $\text{DH} = c$, a nastepnie $\text{GDH} = \alpha$ $\text{DHG} = \beta$, $\text{GDH} = \gamma$, w powyższém zrównaniu dosyć jest położyć $\text{dost.}\gamma = \text{dost.}\,a$, $\text{dost.}\,\alpha = \text{dost.}\,b$, $\text{dost.}\,\beta = \text{dost.}\,c$,

$$\text{dost.}\,\varepsilon = \text{dost.}\,\alpha,\ \text{wst.}\,\alpha = \text{wst.}\,b,\ \text{wst.}\,\beta = \text{wst.}\,c$$

aby otrzymać żądane zrównanie wyrażające związek między trzema bokami i jednym kątem trójkąta sferycznego. Tak tedy będzie

$$\text{dost.}\,a = \text{dost.}\,b\,\text{dost.}\,c + \text{wst.}\,b\,\text{wst.}\,c\,\text{dost.}\,\alpha \quad . \ . \ . \ . \ (1)$$

Do tego zrównania możemy téż przyjść następującym sposobem:

W prostokréślnym trójkącie EDF jest jak wiadomo

$$\overline{\text{EF}}^2 = \overline{\text{DE}}^2 + \overline{\text{DF}}^2 - 2\text{DE.EF}\,\text{dost.}\,\text{EDF}.$$

Ale $\quad \text{DE} = \text{sty.}\,\text{DG} = \text{sty.}\,b$, $\text{DF} = \text{sty.}\,\text{DH} = \text{sty.}\,c$,

kąt $\text{EDF} = \alpha$, zatém

$$\overline{\text{EF}}^2 = \text{sty.}\,b^2 + \text{sty.}\,c^2 - 2\text{sty.}\,b\,\text{sty.}\,c\,\text{dost.}\,\alpha$$

Podobnież w trójkącie EOF jest

$$\overline{\text{EF}}^2 = \overline{\text{EO}}^2 + \overline{\text{FO}}^2 - 2\text{EO.FO.}\,\text{dost.}\,\text{EOF}$$

Ale znowu EO$=$sie. DG$=$sie. b, FO$=$sie. DH$=$sie. c a kąt EOF$=a$, jako mierzony łukiem GH$=a$; przeto

$$\overline{\text{EF}}^2 = \text{sie.}\,b^2 + \text{sie.}\,c^2 - 2\,\text{sie.}\,b\,\text{sie.}\,c\,\text{dost.}\,a$$

a następnie

$$\text{sty.}\,b^2 + \text{sty.}\,c^2 - 2\text{sty.}\,b\,\text{sty.}\,c\,\text{dost.}\,a$$
$$= \text{sie.}\,b^2 + \text{sie.}\,c^2 - 2\text{sie.}\,b\,\text{sie.}\,c\,\text{dost.}\,a$$

albo

$$\text{sty.}b^2 - \text{sie.}b^2 + \text{sty.}c^2 - \text{sie.}c^2 - 2\frac{\text{wst.}\,b\,\text{wst.}\,c}{\text{dost.}b\,\text{dost.}c}\,\text{dost.}\,a$$
$$= -\frac{2}{\text{dost.}\,b\,\text{dost.}\,c}\,\text{dost.}\,a.$$

Ale

$$\text{sty.}\,b^2 - \text{sie}\;b^2 = \frac{\text{wst.}\,b^2 - 1}{\text{dost.}\,b^2} = -1,$$
$$\text{sty.}\,c^2 - \text{sie.}\,c^2 = \frac{\text{wst.}\,c^2 - 1}{\text{dost.}\,c^2} = -1$$

zatém

$$-2 - \frac{2\,\text{wst.}\,b\,\text{wst.}\,c\,\text{dost.}\,\alpha}{\text{dost.}\,b\,\text{dost.}\,c} = -\frac{2\,\text{dost.}\,a}{\text{dost.}\,b\,\text{dost.}\,c'}$$

albo

$$-\text{dost.}\,b\,\text{dost.}\,c - \text{wst.}\,b\,\text{wst.}\,c\,\text{dost.}\,\alpha = -\text{dost.}\,a$$

lub nareszcie $\text{dost.}\alpha = \text{dost.}b\text{dost.}c + \text{wst.}b\text{wst.}c\text{dost.}\alpha$ jak wyżéj.

Ponieważ ten wzór jest zasadniczym całéj Trygonometryi rycznéj, z którego wszystkie inne wypływają, nie od rzeczy przeto będzie wyprowadzić go jeszcze raz nieco odmiennym sposobem. Pokażę tu sposób jakim go wyprowadził Prof. Anger. *).

Niech będzie sferyczny trójkąt ABC *fig. 31,* tudzież punkt O środek kuli na któréj powierzchni ten trójkąt zrysowany; poprowadziwszy promień kuli OA, a potém przez środek kuli O płaszczyznę prostopadłą do tegoż promienia, z punktów B i C spuśćmy prostopadłe do téj płaszczyzny, którą niech spotykają w punktach B′ i C′. Punkta B′ i C′ tak między sobą, jako téż i ze środkiem kuli O połączmy prostemi OB′, OC′ i B′C′. Na płaszczyznie boku AB t. j. na płaszczyznie AOB′B z punktu B poprowadźmy prostą BD równoległą do OB′ aż do przecięcia się z promieniem OA w punkcie D; potém na płaszczyznie boku AC poprowadźmy prostą CE równoległą do OC′, a nareszcie na płaszczyznie boku

*) Archiv der Mathematik und Physik von Grunert. V. Theil 1844.

BC prostą CF równoległą do B'C' i oprócz tego poprowadźmy cięciwę BC. Położywszy bok BC$=a$, AC$=b$, AB$=c$ a następnie kąt BAC$=\alpha$, ABC$=\beta$, ACB$=\gamma$, tedy z tego co wiemy z Trygonometryi prostokréślnéj, jest CE$=$wst.AC$=$wst.b jako prostopadła z jednego końca łuku, na promień przez drugi jego koniec przechodzący spuszczona, zaś OE$=$dost.b. Dla téjże saméj przyczyny BD$=$wst.AB$=$wst.c, OD$=$dost.c. B'F jest wyniesieniem punktu C nad płaszczyznę OB'C', ale i OE jest także wyniesieniem tegoż punktu i nad tęż samę płaszczyznę, więc B'F $=$OE. Dla téjże saméj przyczyny BB' $=$ OD a następnie BB' — B'F $=$ OD — OE czyli BF$=$DE, zatém BF$=$dost.c — dost.b, BC$=$cięciwie boku BC$=$cięciwie boku a. W trójkącie BCF mamy $\overline{CF}^2 = \overline{B'C'}^2 = \overline{BC}^2 - \overline{BF}^2$; ale według §. 9 cięciwa BC$=$2wst. $\frac{1}{2}$ łuku BC$=$2 wst. $\frac{1}{2}a$, przeto $\overline{CF}^2 = (2\,\text{wst.}\,\tfrac{1}{2}a)^2 - (\text{dost.}\,c - \text{dost.}\,b)^2$. W trójkącie B'OC' jest też $\overline{B'C'}^2 = \overline{B'O}^2 + \overline{C'O}^2 - 2\,B'O.C'O\,\text{dost.}\,B'OC'$; lecz według §. 43 B'O $=$ BD $=$ wst. c, C'O $=$ CE $=$ wst. b i kąt B'OC'$=\alpha$ zatém

$$\overline{B'C'}^2 = \text{wst.}\,c^2 + \text{wst.}\,b^2 - 2\text{wst.}\,c\,\text{wst.}\,b\,\text{dost.}\,\alpha$$

a następnie $2.2\text{wst.}\tfrac{1}{2}a^2 - \text{dost.}c^2 - \text{dost.}b^2 + 2\text{dost.}b\text{dost.}c$

$$= \text{wst.}\,c^2 + \text{wst.}\,b^2 - 2\text{wst.}\,b\,\text{wst.}\,c\,\text{dost.}\,\alpha.$$

Ale $2\,\text{wst.}\,\tfrac{1}{2}a^2 = 1 - \text{dost.}\,a$ §. 12. tudzież $\text{wst.}\,b^2 + \text{dost.}\,b^2 = 1$ i $\text{wst.}\,c^2 + \text{dost.}\,c^2 = 1$

zatém $\quad 2 - 2\text{dost.}\,a + 2\text{dost.}\,b\,\text{dost.}\,c = 2 - 2\text{wst.}\,b\,\text{wst.}\,c\,\text{dost.}\,\alpha$

czyli $\quad \text{dost.}\,a = \text{dost.}\,b\,\text{dost.}\,c + \text{wst.}\,b\,\text{wst.}\,c\,\text{dost.}\,\alpha$

jak dwoma powyższemi sposobami.

Według tego co w §. 45 powiedzieliśmy, znajdziemy przez prostą przemianę elementów trzy zrównania jeden i tenże sam związek wyrażające do każdego z trzech boków zastósowane

$$\text{dost.}\,a = \text{dost.}\,b\,\text{dost.}\,c + \text{wst.}\,b\,\text{wst.}\,c\,\text{dost.}\,\alpha$$

$$\text{dost.}\,b = \text{dost.}\,a\,\text{dost.}\,c + \text{wst.}\,a\,\text{wst.}\,c\,\text{dost.}\,\beta$$

$$\text{dost.}\,c = \text{dost.}\,a\,\text{dost.}\,b + \text{wst.}\,a\,\text{wst.}\,b\,\text{dost.}\,\gamma$$

Zrównanie (1) nazwałem wyżéj zasadniczém całéj Trygonometryi sferycznéj, jak zrównanie $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\,\text{dost.}\,\alpha$ §.

27 zasadniczém Trygonometryi prostokreślnéj; mają téż te dwa zrównania niejakie do siebie podobieństwo, chociaż takowego na piérwszy rzut oka nie dostrzegamy; zastanowiwszy się jednak z nieco większą nad niemi uwagą, poznamy iż to ostatnie otrzymać można i powinniśmy z piérwszego, w przypadku gdy boki trójkąta sferycznego są bardzo małe, gdyż w takim razie sferyczny zamienia się na trójkąt prostokreślny. Spróbujmy przekonać się o téj prawdzie. Skoro boki a, b, c, trójkąta sferycznego są bardzo małe, natenczas, jak z §. 17 wiadomo, wst.$a=a$, wst.$b=b$, wst.$c=c$ a następnie dost.$a=\sqrt{1-a^2}=(1-a^2)^{\frac{1}{2}}$, dost.$b=(1-b^2)^{\frac{1}{2}}$, dost.$c=(1-c^2)^{\frac{1}{2}}$, czyli dost.$a=1-\frac{1}{2}a^2$, dost.$b=1-\frac{1}{2}b^2$, dost.$c=1-\frac{1}{2}c^2$ opuszczając wyższe potęgi łuków a, b, c jako ilości nieskończenie małe. Poprzedzające ważności położywszy w zrównaniu (1) znajdziemy

$$1-\tfrac{1}{2}a^2=(1-\tfrac{1}{2}b^2)(1-\tfrac{1}{2}c^2)+bc\,\text{dost.}\,\alpha$$
$$=1-\tfrac{1}{2}b^2-\tfrac{1}{2}c^2+\tfrac{1}{4}b^2c^2+bc\,\text{dost.}\,\alpha.$$

Opuściwszy tu jeszcze $\frac{1}{4}b^2c^2$ jako ilość bardzo małą, skracając potém i mnożąc całe zrównanie przez 2 otrzymamy

$$a^2=b^2+c^2-2bc\,\text{dost.}\,\alpha$$

jak twierdziliśmy.

§. 48.

Szukajmy teraz związku między dwoma bokami i dwoma im przeciwległemi kątami t. j. szukajmy zrównania np. między elementami a, b. α, β. Kiedy zrównanie (1) nazwaliśmy zasadniczém, z niego zatém przez stósowne przerobienia otrzymać powinniśmy zrównanie żądane. Jakoż z rzeczonego zrównania mamy

$$\text{dost.}\,\alpha=\frac{\text{dost.}\,a-\text{dost.}\,b\,\text{dost.}\,c}{\text{wst.}\,b\,\text{wst.}\,c}.$$

Podniósłszy obie strony tego zrównania do kwadratu i odjąwszy od 1, znajdziemy $1-\text{dost.}\,\alpha^2=\text{wst.}\,\alpha^2$

$$=\frac{\text{wst.}b^2\text{wst.}c^2-\text{dost.}a^2-\text{dost.}b^2\text{dost.}c^2+2\text{dost.}\,a\text{dost.}b\text{dost.}c}{\text{wst.}\,b^2\,\text{wst.}\,c^2}$$

W drugiéj stronie położywszy 1—dost.b^2 za wst.b^2 i 1—dost.c^2

za $\text{wst.}\,c^2$, ponieważ $\text{wst.}\,b^2\,\text{wst.}\,c^2 = (1-\text{dost.}\,b^2)(1-\text{dost.}\,c^2)$

$$= 1-\text{dost.}\,b^2-\text{dost.}\,c^2+\text{dost.}\,b^2\,\text{dost.}\,c^2$$

otrzymamy

$$\text{wst.}\,\alpha^2 = \frac{1-\text{dost.}\,a^2-\text{dost.}\,b^2-\text{dost.}\,c^2+2\text{dost.}\,a\,\text{dost.}\,b\,\text{dost.}\,c}{\text{wst.}\,b^2\,\text{wst.}\,c^2}$$

skąd $\text{wst.}\,\alpha = \dfrac{\sqrt{(1-\text{dost.}\,a^2-\text{dost.}\,b^2-\text{dost.}\,c^2+2\text{dost.}\,a\,\text{dost.}\,b\,\text{dost.}\,c)}}{\text{wst.}\,b\,\text{wst.}\,c}$

Ponieważ licznik tego wyrażenia jest symmetrycznym względem trzech boków a, b, c, zatém położywszy dla krótkości

$$\sqrt{(1-\text{dost.}\,a^2-\text{dost.}\,b^2-\text{dost.}\,c^2+2\text{dost.}\,a\,\text{dost.}\,b\,\text{dost.}\,c)} = \text{P}$$

będzie $\text{wst.}\,\alpha = \dfrac{\text{P}}{\text{wst.}\,b\,\text{wst.}\,c}$

a następnie $\dfrac{\text{wst.}\,\alpha}{\text{wst.}\,a} = \dfrac{\text{P}}{\text{wst.}\,a\,\text{wst.}\,b\,\text{wst.}\,c}$.

W tém ostatniém zrównaniu zamieniając α na β i a na b, potém α na γ i a na c i nawzajem znajdziemy

$$\frac{\text{wst.}\,\beta}{\text{wst.}\,b} = \frac{\text{P}}{\text{wst.}\,a\,\text{wst.}\,b\,\text{wst.}\,c}$$

$$\frac{\text{wst.}\,\gamma}{\text{wst.}\,c} = \frac{\text{P}}{\text{wst.}\,a\,\text{wst.}\,b\,\text{wst.}\,c}$$

skąd nareszcie wniesiemy, że

$$\frac{\text{wst.}\,\alpha}{\text{wst.}\,a} = \frac{\text{wst.}\,\beta}{\text{wst.}\,b} = \frac{\text{wst.}\,\gamma}{\text{wst.}\,c} \quad \ldots\ldots \quad (2)$$

a to jest zrównanie szukane między dwoma bokami i dwoma im przeciwległemi kątami trójkąta sferycznego, rozkładające się na trzy inne

$$\frac{\text{wst.}\,\alpha}{\text{wst.}\,a} = \frac{\text{wst.}\,\beta}{\text{wst.}\,b},\quad \frac{\text{wst.}\,\alpha}{\text{wst.}\,a} = \frac{\text{wst.}\,\gamma}{\text{wst.}\,c},\ \text{i}\ \frac{\text{wst.}\,\beta}{\text{wst.}\,b} = \frac{\text{wst.}\,\gamma}{\text{wst.}\,c}.$$

Samo spojrzenie na zrównanie (2) nasuwa jego podobieństwo do zrównania Trygonometryi prostokréślnéj

$$\frac{\text{wst.}\,\alpha}{a} = \frac{\text{wst.}\,\beta}{b} = \frac{\text{wst.}\,\gamma}{c}$$

a nawet sposób wyprowadzenia tak jednego jako i drugiego jest prawie ten sam (porównaj §. 29 w końcu).

§. 49.

Przystępując do znalezienia trzeciego związku czyli zrównania między czterema po sobie następującemi elementami trójkąta sferycznego, załóżmy sobie znaleść zrównanie między elementami a, β, c, α. W tym celu z piérwszego z ostatnich zrównań §. poprzedzającego ważność $\text{wst.}b = \frac{\text{wst.}a\,\text{wst.}\beta}{\text{wst.}\alpha}$ połóżmy w zrównaniu (1)

a otrzymamy $\text{dost.}a = \text{dost.}b\,\text{dost.}c + \frac{\text{wst.}a\,\text{wst.}\beta\,\text{wst.}c\,\text{dost.}\alpha}{\text{wst.}\alpha}$

A że $\quad \text{dost.}b = \text{dost.}a\,\text{dost.}c + \text{wst.}a\,\text{wst.}c\,\text{dost.}\beta$ §. 46

zatém $\quad \text{dost.}a = \text{dost.}a\,\text{dost.}c^2 + \text{wst.}a\,\text{wst.}c\,\text{dost.}c\,\text{dost.}\beta$

$$+ \frac{\text{wst.}a\,\text{wst.}\beta\,\text{wst.}c\,\text{dost.}\alpha}{\text{wst.}\alpha}$$

albo $\quad \text{dost.}a\,(1 - \text{dost.}c^2) = \text{dost.}a\,\text{wst.}c^2$

$$= \text{wst.}a\,\text{wst.}c\,\text{dost.}c\,\text{dost.}\beta + \text{wst.}a\,\text{wst.}\beta\,\text{wst.}c\,\text{doty.}\alpha.$$

Obie strony zrównania podzieliwszy przez $\text{wst.}a\,\text{wst.}c$, znajdziemy

$$\text{wst.}c\,\text{doty.}a = \text{dost.}c\,\text{dost.}\beta + \text{wst.}\beta\,\text{doty.}\alpha \quad . \; . \; . \; . \quad (3)$$

które jest zrównaniem szukaném zawierającém związek między cztérema po sobie następującemi elementami trójkąta sferycznego. Zastósowawszy to ostatnie zrównanie do każdych cztérech podobnych elementów, przez prostą przemianę elementów jednych na drugie i wzajemnie, otrzymamy sześć zrównań zamykających tenże sam związek ale coraz do innych elementów stósowany. Te zrównania są:

$$\text{wst.}c\,\text{doty.}a = \text{dost.}c\,\text{dost.}\beta + \text{wst.}\beta\,\text{doty.}\alpha$$
$$\text{wst.}c\,\text{doty.}b = \text{dost.}c\,\text{dost.}\alpha + \text{wst.}\alpha\,\text{doty.}\beta$$
$$\text{wst.}b\,\text{doty.}a = \text{dost.}b\,\text{dost.}\gamma + \text{wst.}\gamma\,\text{doty.}\alpha$$
$$\text{wst.}b\,\text{doty.}c = \text{dost.}b\,\text{dost.}\alpha + \text{wst.}\alpha\,\text{doty.}\gamma$$
$$\text{wst.}a\,\text{doty.}b = \text{dost.}a\,\text{dost.}\gamma + \text{wst.}\gamma\,\text{doty.}\beta$$
$$\text{wst.}a\,\text{doty.}c = \text{dost.}c\,\text{dost.}\beta + \text{wst.}\beta\,\text{doty.}\gamma$$

§. 50.

Pozostaje nam nareszcie znaleść czwarty związek czyli zrównanie między jednym bokiem i trzema kątami trójkąta sferycznego. Ponieważ $\text{wst.}b\,\text{doty.}a = \text{dost.}a\,\frac{\text{wst.}b}{\text{wst.}a}$,

zaś z (2) $\qquad \frac{\text{wst.}b}{\text{wst.}a} = \frac{\text{wst.}\beta}{\text{wst.}\alpha}$

więc $\qquad \text{wst.}\, b \,\text{doty.}\, a = \text{dost.}\, a \dfrac{\text{wst.}\, \beta}{\text{wst.}\, \alpha}.$

Podobnież $\qquad \text{wst.}\, a \,\text{doty.}\, b = \text{dost.}\, b \dfrac{\text{wst.}\, \alpha}{\text{wst.}\, \beta}$

z ostatnich więc zrównań poprzedzającego §. otrzymamy

$$\text{dost.}\, a \frac{\text{wst.}\, \beta}{\text{wst.}\, \alpha} = \text{dost.}\, b \,\text{dost.}\, \gamma + \text{wst.}\, \gamma \,\text{doty.}\, a$$

$$\text{dost.}\, b \frac{\text{wst.}\, \alpha}{\text{wst.}\, \beta} = \text{dost.}\, a \,\text{dost.}\, \gamma + \text{wst.}\, \gamma \,\text{doty.}\, \beta$$

albo $\qquad \text{dost.}\, a \,\text{wst.}\, \beta = \text{dost.}\, b \,\text{dost.}\, \gamma \,\text{wst.}\, \alpha + \text{wst.}\, \gamma \,\text{dost.}\, \alpha$

$\qquad \text{dost.}\, b \,\text{wst.}\, \alpha = \text{dost.}\, a \,\text{dost.}\, \gamma \,\text{wst.}\, \beta + \text{wst.}\, \gamma \,\text{dost.}\, \beta$

W piérwszém z tych dwóch zrównań położywszy z drugiego ważność $\text{dost.}\, b \,\text{wst.}\, \alpha$, będzie

$\text{dost.}a\text{wst.}\beta = \text{dost.}a\text{wst.}\beta\text{dost.}\gamma^2 + \text{wst.}\gamma\text{dost.}\gamma\text{dost.}\beta + \text{wst.}\gamma\text{dost.}\alpha$

albo $\text{dost.}a\text{wst.}\beta(1-\text{dost.}\gamma^2) = \text{wst.}\gamma\text{dost.}\gamma\text{dost.}\beta + \text{wst.}\gamma\text{dost.}\alpha$

albo $\quad \text{dost.}a\text{wst.}\beta\text{wst.}\gamma^2 = \text{wst.}\gamma\text{dost.}\gamma\text{dost.}\beta + \text{wst.}\gamma\text{dost.}\alpha$

albo $\qquad \text{dost.}a\text{wst.}\beta\text{wst.}\gamma = \text{dost.}\beta\text{dost.}\gamma + \text{dost.}\alpha$

skąd $\quad \text{dost.}\alpha = -\text{dost.}\beta\text{dost.}\gamma + \text{wst.}\beta\text{wst.}\gamma\text{dost.}a \;.\;.\;.\; (4)$

które jest zrównaniem szukaném.

Do tego zrównania dojść można prędzéj i łatwiéj stósując własności trójkąta biegunowego do zrównania (1). Gdy bowiem $a = 180^\circ - \alpha$, $b = 180^\circ - \beta$, $c = 180^\circ - \gamma$, $\alpha = 180^\circ - a$, przeto kładąc w rzeczoném zrównaniu te ważności, znajdziemy

$$-\text{dost.}\alpha = -\text{dost.}\beta \times -\text{dost.}\gamma + \text{wst.}\beta\text{wst.}\gamma \times -\text{dost.}a$$

czyli $\qquad \text{dost.}\alpha = -\text{dost.}\beta\text{dost.}\gamma + \text{wst.}\beta\text{wst.}\gamma\text{dost.}a$ jak wyżéj.

Przez przemianę elementów znajdziemy dla dwóch innych kątów

$$\text{dost.}\, \beta = -\text{dost.}\, \alpha \,\text{dost.}\, \gamma + \text{wst.}\, \alpha \,\text{wst.}\, \gamma \,\text{dost.}\, b$$

$$\text{dost.}\, \gamma = -\text{dost.}\, \alpha \,\text{dost.}\, \beta + \text{wst.}\, \alpha \,\text{wst.}\, \beta \,\text{dost.}\, c$$

Jak ze zrównania (1) wyprowadziliśmy (4) za pomocą trójkąta biegunowego, tak nawzajem z tego ostatniego przy pomocy tegoż trójkąta, wyprowadzić można zrównanie (1); nie z innego téż powodu są te zrównania bardzo sobie podobne, tylko że za pośrednictwem trójkąta biegunowego, ściśle z sobą są związane i różnią się jedynie tém, że wyrażając jednę i tęż samę prawdę, (1) wyraża ją względem boków, gdy (4) względem kątów.

§. 51.

Lubo cztéry poprzednio wyprowadzone wzory są dostateczne na wszelkie w rozwiązywaniu trójkątów sferycznych zdarzyć się mogące przypadki, wszelako dość często używanym jeszcze bywa wzór

$$\text{wst.}\,a\,\text{dost.}\,b = \text{dost.}\,a\,\text{wst.}\,b\,\text{dost.}\,\gamma + \text{wst.}\,c\,\text{dost.}\,\beta \quad . \; . \; . \; (5)$$

Ten wyprowadzi się łatwo, jeżeli ze zrównania

$$\text{dost.}\,b = \text{dost.}\,a\,\text{dost.}\,c + \text{wst.}\,a\,\text{wst.}\,c\,\text{dost.}\,\beta$$

wyrugujemy dost. c zapomocą zrównania

$$\text{dost.}\,c = \text{dost.}\,a\,\text{dost.}\,b + \text{wst.}\,a\,\text{wst.}\,b\,\text{dost.}\,\gamma;$$

otrzymamy bowiem

$$\text{dost.}b = \text{dost.}a^2\text{dost.}b + \text{wst.}a\,\text{wst.}b\,\text{dost.}a\,\text{dost.}\gamma + \text{wst.}a\,\text{wst.}c\,\text{dost.}\beta$$

albo $\text{dost.}b\,\text{wst.}a^2 = \text{wst.}a\,\text{wst.}b\,\text{dost.}a\,\text{dost.}\gamma + \text{wst.}a\,\text{wst.}c\,\text{dost.}\beta$

lub nareszcie

$$\text{wst.}\,a\,\text{dost.}\,b = \text{dost.}\,a\,\text{wst.}\,b\,\text{dost.}\,\gamma + \text{wst.}\,c\,\text{dost.}\,\beta$$

jak wyżéj.

Cztéry więc zasadnicze wzory Trygonometryi sferycznéj na których rozwiązanie wszelkich zdarzyć się mogących przypadków spoczywa, są:

$$\text{dost.}\,a = \text{dost.}\,b\,\text{dost.}\,c + \text{wst.}\,b\,\text{wst.}\,c\,\text{dost.}\,\alpha \quad . \; . \; . \; . \; (1)$$

$$\frac{\text{wst.}\,\alpha}{\text{wst.}\,a} = \frac{\text{wst.}\,\beta}{\text{wst.}\,b} = \frac{\text{wst.}\,\gamma}{\text{wst.}\,c} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (2)$$

$$\text{wst.}\,c\,\text{doty.}\,a = \text{dost.}\,c\,\text{dost.}\,\beta + \text{wst.}\,\beta\,\text{doty.}\,\alpha \quad . \; . \; . \; . \; (3)$$

$$\text{dost.}\,\alpha = -\,\text{dost.}\,\beta\,\text{dost.}\,\gamma + \text{wst.}\,\beta\,\text{wst.}\,\gamma\,\text{dost.}\,a \quad . \; . \; . \; (4)$$

§. 52.

Położywszy w tych wzorach $\alpha = 90^0$, otrzymamy wzory na rozwiązanie trójkątów sferycznych prostokątnych. Oznaczmy w takim trójkącie przeciwprostokątnią przez h a dwa prostemu kątowi przyległe boki przez a i b, kąty zaś im przeciwległe przez α i β, tedy otrzymamy:

z (1) . . . . $\text{dost.}\,h = \text{dost.}\,a\,\text{dost.}\,b$ . . . . . (m)

z (2) . . . . $\text{wst.}\,b = \text{wst.}\,h\,\text{wst.}\,\beta$ . . . . . . (n)

z (3) . . . . . . $\text{dost.}\,\alpha = \dfrac{\text{sty.}\,b}{\text{sty.}\,h}$ . . . . (p)

z (4) . . $\text{dost.}\, h = \text{dost.}\, \alpha\ \text{doty.}\, \beta = \frac{1}{\text{sty}\, \alpha\, \text{sty.}\, \beta}$ i . . . . (q)

W zrównaniu (3) zamieniwszy a na b, α na β i przeciwnie, a potém stosując tak otrzymany wzór do trójkąta prostokątnego, w którym $\alpha = 90^0$, znajdziemy

$$\text{doty.}\, \alpha = \text{doty.}\, a\, \text{wst.}\, b \quad . \; . \; . \quad (r)$$

W zrównaniu (4) zamieniwszy α na γ i a na c a potém wprowadzając warunek $\alpha = 90^0$ i stosując do trójkąta w którym przeciwprostokątnia h, zaś a i b dwa kątowi prostemu przyległe boki, a nareszcie α i β kąty tym bokom przeciwległe, otrzymamy:

$$\text{dost.}\, \beta = \text{wst}\, \alpha\, \text{dost.}\, b \quad . \; . \; . \quad (s)$$

Sześć tym sposobem otrzymanych zrównań są wystarczającemi w każdym przypadku do rozwiązania trójkąta sferycznego prostokątnego; są zaś w tém dogodne, iż w każdém z nich użyć można logarytmów. Skoro więc z pięciu elementów (nie rachując kąta prostego), trójkąta sferycznego prostokątnego dwa którekolwiek są dane, za pomocą sześciu rzeczonych wzorów znajdziemy zawsze trzy pozostałe.

I tak: jeżeli dana jest przeciwprostokątnia h i jeden z boków a lub b, dla znalezienia drugiego boku użyje się wzoru (m).

Jeżeli dana jest przeciwprostokątnia h i jeden z kątów α lub β, dla znalezienia drugiego kąta użyje się wzoru (q). Żeby w piérwszym przypadku znaleść dwa kąty α i β, dosyć jest użyć wzoru (p). W drugim zaś przypadku dla otrzymania boków a i b użyć potrzeba wzoru (n).

Jeżeli dane są a i α, znajdzie się b z wzoru (r), a jeżeli b i β, znajdzie się a z wzoru (s).

Jeżeli są dane a i b a szuka się h, α, β, tedy h znajdzie się z wzoru (m), potém α z wzoru (r), a nareszcie β z wzoru (n) albo z wzoru (q) lub nareszcie z wzoru (s). Zgoła ponieważ każdy z sześciu powyższych wzorów zamyka związek między trzema elementami, z których dwa muszą być znane, zatém w każdym przypadku wybierzemy ten w którym się znajdują dwa dane lub znane elementa a trzeci szukany.

§. 53.

Lubo powyższe sześć wzorów rozwiązują w każdym przypadku trójkąt sferyczny prostokątny, nie zawsze wszelako dają dokładne wypadki; mianowicie zaś, jeżeli boki lub kąty których szukamy są bardzo małe a wyrażone przez dostawę, albo bliskie 90° a wyrażone przez wstawę. Na taki przypadek przerobić musimy te wzory w których się znajdują dostawy lub wstawy elementów trójkąta na inne, któreby nam dokładność wypadków zaręczyły. Przy téj sposobności roztrząśniemy każdy w szczególności z sześciu w rozwiązywaniu trójkątów sferycznych prostokątnych wydarzyć się mogących przypadków.

1. Mając daną przeciwprostokątnią h i bok b, rozwiązać trójkąt.

W tym przypadku mamy z wzoru (m) $\text{dost.}\, a = \dfrac{\text{dost.}\, h}{\text{dost.}\, b}$.

Ze zrównania (p) znajdziemy α a z (n) β i trójkąt będzie rozwiązany. W przypadku atoli, że bok a jest bardzo mały, wypadek ze zrównania (m) otrzymany będzie nie dokładny, a dla tego starajmy się przerobić zrównanie $\text{dost.}\, a = \dfrac{\text{dost.}\, h}{\text{dost.}\, b}$ na inne zaręczające nam większą dokładność wypadku.

Ponieważ ogólnie

$$\frac{1 - \text{dost.}\, x}{1 + \text{dost.}\, x} = (\text{sty.}\ \tfrac{1}{2}\, x)^2 \quad \text{§. 12. wzór (10) i (11)},$$

zatém z ostatniego zrównania znajdziemy

$$\frac{1 - \text{dost.}\, a}{1 + \text{dost.}\, a} = (\text{sty.}\ \tfrac{1}{2}\, a)^2 = \frac{\text{dost.}\, b - \text{dost.}\, h}{\text{dost.}\, b + \text{dost.}\, h}$$

$$= \text{sty.}\ \frac{h+b}{2}\ \text{sty.}\ \frac{h-b}{2} \qquad \text{§. 13 (25)}$$

dokładniéjszy przeto wypadek na bok a da nam wzór

$$\text{sty.}\ \tfrac{1}{2}\, a = \sqrt{\text{sty.}\ \frac{h+b}{2}\ \text{sty.}\ \frac{h-b}{2}}.$$

2. Z wiadoméj przeciwprostokątni h i kąta β szukając boku b przeciwległego temuż kątowi, mamy na ten przypadek wzór (n) t. j. wst. $b =$ wst. h wst. β, a dla znalezienia a tenże sam wzór wst. $a =$ wst. h wst. α. Znalazłszy więc naprzód kąt α z wzoru (q), będzie tym sposobém trójkąt rozwiązany. W przypadku atoli gdy b bliskie jest 90^0, wypadek z powyższego zrównania otrzymany, nie ma potrzebnéj jaką rachunek dać może dokładności; należy zatém przerobić toż zrównanie na inne dające b zwiększą dokładnością. To przerobienie uskutecznimy następującym sposobem:

Położywszy $b = 90^0 - 2x$, tudzież wst. h wst. $\beta =$ sty. z,

mamy naprzód $\qquad$ dost. $2x =$ sty. z,

$$\text{potém} \quad \frac{1 - \text{dost. } 2x}{1 + \text{dost. } 2x} = \text{sty.}\, x^2 = \frac{1 - \text{sty. } z}{1 + \text{sty. } z}$$

$$= \text{sty. } (45^\circ - z) \quad \text{§. 15 (41).}$$

A że $\qquad x = 45^0 - \frac{1}{2} b$

więc $\qquad$ sty. $(45^\circ - \frac{1}{2} b) = \sqrt{\text{sty. } (45^\circ - z)}$.

Za pomocą tego i powyższego zrównania sty. $z =$ wst. h wst. β, znajdziemy $\frac{1}{2} b$ a następnie i b.

3. Z danych elementów h i b szukając kąta α, mamy

ze zrównania (p) $\qquad$ dost. $\alpha = \dfrac{\text{sty. } b}{\text{sty. } h}$.

Wszelako jeżeli kąt α jest bardzo mały, wypadek z tego zrównania otrzymany nie będzie dokładny. Przerobimy zatém to zrównanie na inne następującym sposobem:

$$\frac{1 - \text{dost. } \alpha}{1 + \text{dost. } \alpha} = (\text{sty. } \tfrac{1}{2} \alpha)^2 = \frac{\text{sty. } h - \text{sty. } b}{\text{sty. } h + \text{sty. } b}$$

$$= \frac{\text{wst. } h \text{ dost. } b - \text{dost. } h \text{ wst. } b}{\text{wst. } h \text{ dost. } b + \text{dost. } h \text{ wst. } b} = \frac{\text{wst. } (h - b)}{\text{wst. } (h + b)}$$

skąd $\qquad$ sty. $\frac{1}{2} \alpha = \sqrt{\dfrac{\text{wst. } (h - b)}{\text{wst. } (h + b)}}$

4. Z wiadomych elementów α i β szukając h, mamy ze zrównania (q) dost. $h =$ doty. α doty. β, które na przypadek że h jest bardzo małe, następnie przerobimy,

$$\frac{1-\text{dost.}\,h}{1+\text{dost.}\,h}=(\text{sty.}\,\tfrac{1}{2}\,h)^2=\frac{1-\text{doty}\;\alpha\;\text{doty.}\,\beta}{1+\text{doty.}\,\alpha\;\text{doty.}\,\beta}$$

$$=\frac{\text{wst.}\,\alpha\;\text{wst.}\,\beta-\text{dost.}\,\alpha\;\text{dost.}\,\beta}{\text{wst.}\,\alpha\;\text{wst.}\,\beta+\text{dost.}\,\alpha\;\text{dost.}\,\beta}=-\frac{\text{dost.}\,(\alpha+\beta)}{\text{dost.}\,(\alpha-\beta)}$$

skąd $$\text{sty.}\,\tfrac{1}{2}\,h=\sqrt{-\frac{\text{dost.}\,(\alpha+\beta)}{\text{dost.}\,(\alpha-\beta)}}$$

5. Nareszcie z danych dwóch kątów α i β szukając boku b, mamy z wzoru (s) $\text{dost.}\;b=\frac{\text{dost.}\,\beta}{\text{wst.}\,\alpha}$;

który wzór dla przypadku iż b jest bardzo małe, następnie przerobimy:

Położywszy $x=90^0-\beta$, mieć będziemy $\text{dost.}\,b=\frac{\text{wst.}\,x}{\text{wst.}\,\alpha}$

a potém $$\frac{1-\text{dost.}\,b}{1+\text{dost.}\,b}=(\text{sty.}\,\tfrac{1}{2}\,b)^2=\frac{\text{wst.}\,\alpha-\text{wst.}\,x}{\text{wst.}\,\alpha+\text{wst.}\,x}$$

$$=\frac{\text{sty.}\,\frac{\alpha-x}{2}}{\text{sty.}\,\frac{\alpha+x}{2}}\quad §.\ 13\ (24)$$

skąd $$\text{sty.}\,\tfrac{1}{2}\,b=\sqrt{\frac{\text{sty.}\,\frac{\alpha-x}{2}}{\text{sty.}\,\frac{\alpha+x}{2}}}$$

Przywróciwszy nareszcie ważność za x, otrzymamy

$$\text{sty.}\,\tfrac{1}{2}\,b=\sqrt{\frac{\text{sty.}\,\left(\frac{\alpha+\beta}{2}-45^0\right)}{\text{sty.}\,\left(\frac{\alpha-\beta}{2}+45^0\right)}}$$

$$=\sqrt{\text{sty.}\,\left(\frac{\alpha+\beta}{2}-45^0\right)\,\text{doty.}\,\left(\frac{\alpha-\beta}{2}+45^0\right)}.$$

§. 54.

Sześć już tyle razy wspomnianych wzorów na rozwiązanie trójkątów sferycznych prostokątnych, ciągłego są użycia w zastósowaniu; z tego powodu wypada je mieć zawsze przytomne w pamięci. Gdy atoli trudną a może i niepodobną jest rzeczą sześć tak różnych wzorów, obok innych zasadniczych, tudzież wzorów Trygonometryi prostokreślnéj, zatrzymać nawet w najszczęśliwszéj pamięci, piérwszy przeto NEPER przychodząc jéj w pomoc, owe sześć wzorów zamknął we dwa które każdy z pewnością spamiętać może. Aby dwa te wzory tak jak je NEPER podał, otrzymać, przywiedźmy naprzód sześć wzorów o które chodzi do jednorodności, wprowadzając do nich wyraźną jednostkę r §. 22, wszystkie bowiem, jak sobie przypomnimy, wyprowadzone zostały w rozumieniu $r = 1$. Sprowadzone do jednorodności wzory będą

$$r \text{ dost. } h = \text{dost. } a \,.\, \text{dost. } b$$
$$r \text{ wst. } b = \text{wst. } h \text{ wst. } \beta$$
$$\frac{\text{dost. } \alpha}{r} = \frac{\text{sty. } b}{\text{sty. } h}$$
$$r \text{ dost. } h = \text{doty. } \alpha \text{ doty. } \beta$$
$$r \text{ doty. } \alpha = \text{doty. } a \text{ wst. } b$$
$$r \text{ dost. } \beta = \text{wst. } \alpha \text{ dost. } b$$

Jeżeli teraz w trójkącie prostokątnym zamiast elementów h, α, β weźmiemy ich dopełnienia $90^\circ - h$, $90^\circ - \alpha$, $90^\circ - \beta$, tedy w miejsce pięciu elementów trójkąta sferycznego prostokątnego h, a, b, α, β mieć będziemy elementa

$$90^\circ - h, \quad a, \quad b, \quad 90^\circ - \alpha, \quad 90^\circ - \beta.$$

Którykolwiek z tych elementów nazwawszy *średnim*, dwa jemu przyległe, jeden z prawéj drugi z lewéj strony leżące, (kąt prosty uważając za żaden) nazwiemy *przyległemi*, dwa zaś inne *przeciwległemi elementami*; co że tak jest w istocie, samo spojrzenie na figurę, dostatecznie przekonywa. Tak *np.* wziąwszy b za średni, a i $90^\circ - \alpha$ są przyległemi, zaś $90^\circ - \beta$ i $90^\circ - h$ przeciwległemi elementami. Wziąwszy powtóre $90^\circ - h$ za element średni, $90^\circ - \alpha$ i $90^\circ - \beta$ są przyległemi, zaś a i b przeciwległemi; i tak o innych. To zrozumiawszy, prawidło NEPERA na znalezienie któregokolwiek z sześciu powyższych zrównań brzmi następnie:

1. *Iloczyn z promienia czyli jednostki i wstawy elementu średniego, równa się iloczynowi ze stycznych elementów przyległych.*

2. *Tenże sam iloczyn, równa się iloczynowi z dostaw elementów przeciwległych.*

Oznaczywszy średni element przez s, przyległe przez p i p', a przeciwległe przez q i q', według tego prawidła mamy r wst. $s =$ sty. p sty. $p' =$ dost. q dost. q'

Aby to prawidło do zrównań §. 51 zastósować, dosyć jest położyć $r = 1$, przez co poprzedzające prawidło zamieni się na

wst. $s =$ sty. p sty. $p' =$ dost. q dost. q'

Francuzki geometra Mauduit, zamienił to prawidło na następujące

dost. $s =$ doty. p doty. $p' =$ wst. q wst. q'

w którém tylko zamiast dwóch elementów a i b, brać potrzeba ich dopełnienia czyli $90^0 - a$ i $90^0 - b$; zresztą tak piérwsze jako i drugie jest łatwe do zatrzymania w pamięci; drugie może w tém łatwiejsze, że tylko o dwóch dopełnieniach pamiętać potrzeba. Zobaczmy zastósowanie tych prawideł.

Chcąc z danych h i b znaleść kąt α, według Nepera mamy szukać zrównania między elentami $90^\circ - h$, b i $90^\circ - \alpha$. Biorąc $90^0 - \alpha$ za element średni, mamy

dost. $\alpha =$ doty. h sty. $b = \dfrac{\text{sty. } b}{\text{sty. } h}$ a to jest zrównanie (p)

albo dost. $\alpha =$ dost. a wst. β, gdyby a i β były dane, a to jest zrównanie (s) dla kąta α. Według zaś prawidła przez Mauduit podanego, mamy znaleść zrówanie między elementami h, $90^\circ - b$ i α, wziąwszy przeto α za element średni,

będzie dost. $\alpha =$ doty. h sty. $b = \dfrac{\text{sty. } b}{\text{sty. } h}$

albo dost. $\alpha =$ dost. a wst. β

t. j. zupełnie jak wyżéj.

Z danych elementów α i β szukając h, mamy znaleść zrównanie między elementami α, β i h; według drugiego prawidła. Biorąc h za element średni, będzie

dost. $h =$ doty. α doty. β t. j. zrównanie (q)

Szukajmy jeszcze h z danych elementów a i α; tu mamy znaleść zrównanie między elementami $90^0 - a$, α i h. Wziąwszy $90^0 - a$ za średni, dwa inne α i h są przeciwległemi, a dla tego będzie

$$\text{wst.}\, a = \text{wst.}\, h \;\text{wst.}\, \alpha, \text{ a to jest zrównanie } (n)$$

skąd
$$\text{wst.}\, h = \frac{\text{wst.}\, a}{\text{wst.}\, \alpha}$$

i tak o innych. Szukając według tych prawideł stósownych zrównań, należy zawsze uważać, aby z pomiędzy trzech elementów, pomiędzy któremi szukamy zrównania, dwa którekolwiek były przyległemi albo przeciwległemi trzeciemu. Że powyższe prawidła nie żadną drogą geometryczną ale czysto empiryczną wyprowadzone zostały, każdy łatwo dostrzeże, gdyż żadnego ich dowodu nie podaliśmy.

§. 55.

Podajmy teraz chociaż parę liczbowych przykładów dla objaśnienia sposobu obejścia się z rachunkiem.

Przykład 1. Niech w trójkącie sferycznym prostokątnym dane będą $a = 140^\circ\, 52'40''$, $\beta = 105^0\, 52'39''$, znaleść h, b, α czyli rozwiązać trójkąt.

Szukając naprzód h, weźmy β za średni element, tedy h i a będą przyległe, a następnie

$$\text{dost.}\, \beta = \text{doty.}\, h \;\text{sty.}\, a = \frac{\text{sty.}\, a}{\text{sty.}\, h}$$

skąd
$$\text{sty.}\, h = \frac{\text{sty.}\, a}{\text{dost.}\, \beta} \quad \text{t. j. zrównanie } (p)$$

Dla znalezienia b, weźmy a czyli $90^0 - a$ za średni, tedy b i β są przyległemi elementami

a przeto
$$\text{wst.}\, a = \text{sty.}\, b \;\text{doty.}\, \beta = \frac{\text{sty.}\, b}{\text{sty.}\, \beta}$$

skąd
$$\text{sty.}\, b = \text{wst.}\, a \;\text{sty.}\, \beta \qquad \text{zrównanie } (r).$$

Aby otrzymać α, dosyć toż α wziąść za średni, a wtedy a i β będą przeciwległemi elementami,

przeto
$$\text{dost.}\, \alpha = \text{dost.}\, a \;\text{wst.}\, \beta \qquad \text{zrównanie } (s).$$

Mając już wzory na wszystkie szukane elementa, przystąpmy do samego rachunku

rachunek h	rachunek b
$log.\ \text{sty.}\ a = 9{\cdot}9102627-$	$log.\ \text{wst.}\ a = 9{\cdot}8000134$
$log.\ \text{dost.}\ \beta = 9{\cdot}4370868-$	$log.\ \text{sty.}\ \beta = 0{\cdot}5460201-$
$log.\ \text{sty.}\ h = 0{\cdot}4731759$	$log.\ \text{sty.}\ b = 0{\cdot}3460335-$
$h = 71^0\, 24'\, 30''{\cdot}00$	$b = -65^0\, 44'\, 6''{\cdot}03$
	t. j. $b = 114^0\, 15\, 53{\cdot}97$

rachunek α

$$log.\ \text{dost.}\ a = 9{\cdot}8897507-$$
$$log.\ \text{wst.}\ \beta = 9{\cdot}9831068$$
$$log.\ \text{dost.}\ \alpha = 9{\cdot}8728575-$$
$$\alpha = -41^0\, 44'\, 14''{\cdot}64$$
$$\text{t. j. } \alpha = 138\ 15\ 45{\cdot}36$$

Elementami zatém trójkąta który rozwiązaliśmy są:

$h = 71^0\, 24'\, 30''{\cdot}00$

$a = 140\, 52\, 40{\cdot}00$ . . . . $\alpha = 138^0\, 15'\, 45''{\cdot}36$

$b = 114\, 15\, 53{\cdot}97$ . . . . $\beta = 105\ \ 52\ \ 39{\cdot}00.$

Przykład 2. Niech powtóre dana będzie przeciwprostokątnia $h = 71^0\, 24'\, 30''{\cdot}00$ i kąt $\alpha = 138^0\, 15'\, 45''{\cdot}36$ rozwiązać trójkąt, czyli znaleść a, b i β.

Biorąc a albo raczéj $90^0 - a$ za średni, h i α są przeciwległemi elementami, a zatém $\text{wst.}\, a = \text{wst.}\, h\ \text{wst.}\, \alpha$.
Aby znaleść b, weźmy α za średni, tedy h i b są przyległemi elementami, przeto

$\text{dost.}\, \alpha = \text{doty.}\, h\ \text{sty.}\, b = \dfrac{\text{sty.}\, b}{\text{sty.}\, h}$ skąd $\text{sty.}\, b = \text{sty.}\, h\ \text{dost.}\, \alpha$.

Nareszcie dla znalezienia β, weźmy h za średni, przez co α i β będą przyległemi elementami, a z tego powodu będzie $\text{dost.}\, h = \text{doty.}\, \alpha\ \text{doty.}\, \beta$ skąd $\text{doty.}\, \beta = \text{dost.}\, h\ \text{sty.}\, \alpha$

rachunek a	rachunek b
$log.\ \text{wst.}\ h = 9{\cdot}9767235$	$log.\ \text{sty.}\ h = 0{\cdot}4731759$
$log.\ \text{wst.}\ \alpha = 9{\cdot}8232909$	$log.\ \text{dost.}\ \alpha = 9{\cdot}8728574-$
$log.\ \text{wst.}\ a = 9{\cdot}8000144$	$log.\ \text{sty.}\ b = 0{\cdot}3460333-$
$a = 39^0\, 7'\, 20''{\cdot}4$	$b = -65^0\, 44'\, 6''{\cdot}00$
	t. j. $b = 114\ \ 15\ \ 54{\cdot}00$

$$\underbrace{\text{rachunek } \beta}$$

$$\begin{aligned} log.\,\text{dost.}\ h &= 9{\cdot}5035475 \\ log.\,\text{sty.}\ \alpha &= 9{\cdot}9504341- \\ \hline log.\,\text{doty.}\ \beta &= 9{\cdot}4539816- \\ \beta &= -\ 74^\circ\ 7'\ 20''{\cdot}78 \\ \text{t. j.}\ \beta &= \ 105\ 52\ 39{\cdot}22 \end{aligned}$$

Ponieważ kąt α przeciwległy bokowi a jest rozwarty, zatém i bok a będzie większy niż 90°, a z tego powodu w miejsce znalezionego, potrzeba wziąść jego spełnienie; będzie zatém

$$a = 140^\circ\ 52'\ 39''{\cdot}69.$$

Sądzę, że te dwa przykłady wystarczą na powzięcie jasnego wyobrażenia użycia prawidła przez Nepera podanego, a nieco przez Mauduit uproszczonego, dla prędkiego znalezienia stósownego wzoru w każdym przypadku rozwiązywania trójkątów sferycznych prostokątnych, tudzież sposobu postępowania w rachunku, szczególniéj zaś na ostrzeżenie rozwiązujących też trójkąty, jak wielką uwagę dawać potrzeba na znaki linij trygonometrycznych. W drugim przykładzie mogliśmy a rachować z wzoru (r), a bylibyśmy zaraz otrzymali i gatunek kąta; atoli potrzeba było naprzód obrachować b, gdy w naszym rachunku tego nie potrzebowaliśmy, a gatunek jego podał się nam łatwo z kąta jemu przeciwległego.

Dajmy także parę przykładów zastósowania wzorów w §. 52 wyprowadzonych, szukając boku a z danych h i α.

Przykład 3. Niech dane będą

$$h = 71^\circ\ 24'\ 30''{\cdot}00, \quad \alpha = 138^\circ\ 15'\ 45''.$$

Dla znalezienia a otrzymaliśmy w powołanym §. wzór

$$\text{sty.}\,(45^\circ - \tfrac{1}{2}\,a) = \sqrt{\text{sty.}\ 45^\circ - z)} \text{ w którym sty. } z = \text{wst. } h \text{ wst. } \alpha.$$

Rachunek więc będzie następujący:

$$\begin{aligned} log.\,\text{wst.}\ h &= 9{\cdot}9767235 \\ log.\,\text{wst.}\ \alpha &= 9{\cdot}8232909 \\ \hline log.\,\text{sty.}\ z &= 9{\cdot}8000144 \\ z &= 32^\circ\ 15'\ 3''{\cdot}75 \\ 45^\circ - z &= 12\ \ 44\ \ 56{\cdot}25 \end{aligned}$$

$$log.\,\text{sty.}\,(45^0 - z) = 9{\cdot}3546035$$

$$log.\sqrt{\text{sty.}\,(45^0 - z)} = 9{\cdot}6773017 = log.\,\text{sty.}\,(45^0 - \tfrac{1}{2}a)$$

$$\begin{aligned} 45^\circ - \tfrac{1}{2}a &= 25^\circ 26,19''{\cdot}77 \\ \tfrac{1}{2}a &= 19\ \ 33\ \ 40{\cdot}23 \\ a &= 39\ \ \ 7\ \ 20{\cdot}46 \end{aligned}$$

a zpowodu, że $\alpha > 90^\circ$

będzie $a = 180^0 - 39^\circ\, 7'\, 20''{\cdot}46 = 140^\circ\, 52'\, 39''{\cdot}54$

jak wyżéj.

Przykład 4. Szukajmy jeszcze a i b z danych α i β, według tychże wzorów §. 52.

Niech $\alpha = 138^\circ\, 15,4''{\cdot}5$, $\beta = 105^0 52' 39''$.

Dla b znaleźliśmy w powołanym §. wzór

$$\text{sty.}\,\tfrac{1}{2}b = \sqrt{\text{sty.}\left(\frac{\alpha+\beta}{2} - 45^\circ\right)\text{doty.}\left(\frac{\alpha-\beta}{2} + 45^\circ\right)}$$

więc dla a tenże wzór będzie

$$\text{sty.}\,\tfrac{1}{2}a = \sqrt{\text{sty.}\left(\frac{\alpha+\beta}{2} - 45^\circ\right)\text{doty.}\left(\frac{\beta-\alpha}{2} + 45^\circ\right)}$$

$$\begin{array}{llll}
\text{zatém} \quad \alpha = & 138^\circ 15' 45'' & \dfrac{\alpha+\beta}{2} = & 122^\circ 4'\, 12, \\
\beta = & 105\ \ 52\ \ 39 & -45^\circ = & -45 \\
\hline
\alpha+\beta = & 244\ \ \ 8\ 24 & \dfrac{\alpha+\beta}{2} - 45^\circ = & 77\ \ 4\ \ 12, \\
\alpha-\beta = & 32\ 23\ \ 6 & & \\
\beta-\alpha = & -32\ 23\ \ 6 & & \\
\dfrac{\alpha-\beta}{2} = & 16^0\, 11'\, 33'' & \dfrac{\beta-\alpha}{2} = & -16^\circ\, 11'\, 33'' \\
+45 = & +45 & +45 = & +45 \\
\hline
\dfrac{\alpha-\beta}{2} + 45^0 = & 61\ \ 11\ \ 33 & \dfrac{\beta-\alpha}{2} + 45^\circ = & 28\ \ 48\ \ 27
\end{array}$$

przeto
$$log.\,\text{sty.}\left(\frac{\alpha+\beta}{2} - 45^\circ\right) = 0{\cdot}6390628$$

$$log.\,\text{doty.}\left(\frac{\alpha-\beta}{2} + 45^0\right) = 9{\cdot}7403035$$

$$\begin{aligned} 2)\quad & 0{\cdot}3793663 \\ log.\,\text{sty.}\,\tfrac{1}{2}b &= 0{\cdot}1896831 \\ \tfrac{1}{2}b &= \ 57^\circ\ 7'\, 56''{\cdot}88 \end{aligned}$$

zatém
$$b = 114\ 15\ \ 53{\cdot}\ 76$$

$$log.\ \text{sty.}\left(\frac{\alpha+\beta}{2}-45^\circ\right)=0{\cdot}6390628$$

$$log.\ \text{doty.}=\left(\frac{\beta-\alpha}{2}+45\right)=0{\cdot}2596965$$

$$2)\quad 0{\cdot}8987593$$

$$log.\ \text{sty.}\tfrac{1}{2}a=0{\cdot}4493796$$

$$\tfrac{1}{2}a=70^\circ\,26'\,19''{\cdot}76$$

zatém $a=140\ 52\ 39{\cdot}52$

jak wyżéj.

§. 56.

Do trójkątów sferycznych prostokątnych liczą się także takie, które chociaż kąta prostego nie mają, ale za to mają jeden bok równający się ćwiartce okręgu koła czyli 90°, a które z tego powodu nazwać można *trójkątami ćwiartkowemi*. Ten gatunek trójkątów nie potrzebuje osobnych wzorów, ale owe sześć, dla trójkątów prostokątnych wyprowadzone, są tu wystarczającemi. Pomyśliwszy bowiem dla takiego trójkąta odpowiedni mu biegunowy czyli spełniający, tedy kąt tego ostatniego przeciwległy bokowi 90° w trójkącie ćwiartkowym, będzie także $=90^0$ t. j. prosty. Skoro więc rozwiąże się trójkąt biegunowy jako prostokątny z jego elementów, znanych z elementów ćwiartkowego, z wiadomego związku między ich bokami i kątami znajdziemy zaraz szukane elementa tego ostatniego.

Przykład. W ćwiartkowym trójkącie sferycznym dane są $h=90^0$, $a=32^\circ\,57'\,6''$, $b=66^\circ\,32'\,0''$ znaleść kąt β i kąt przeciwległy bokowi h który oznaczmy przez γ.

Oznaczywszy kąty trójkąta biegunowego przez α', β', γ', z własności tegoż trójkąta wiemy, że $\gamma'=180^\circ-h=90^0$, $\alpha'=180^0-a=147^\circ\,2'\,54''$, $\beta'=180^\circ-b=113^\circ\,28'\,0''$; rozwiązawszy przeto ten biegunowy prostokątny trójkąt, w którym α' i β' są dane a kąt γ' jest prosty, jeżeli jego boki oznaczymy przez a' b' h', znajdziemy

dla boku b' $\text{dost.}\,b'=\dfrac{\text{dost.}\,\beta'}{\text{wst.}\,\alpha'}$ z wzoru (s),

dla h', $\text{dost.}\,h'=\text{doty.}\,\alpha'\ \text{doty.}\,\beta'$ z wzoru (q)

$$\begin{array}{ll}
\text{t. j.}\ \ \log.\text{dost.}\beta' = 9{\cdot}6001181- & \log.\text{doty.}\alpha' = 0{\cdot}1882850- \\
\underline{\log.\text{wst.}\alpha' = 9{\cdot}7355441} & \underline{\log.\text{doty.}\beta' = 9{\cdot}6376106-} \\
\log.\text{dost.}b' = 9{\cdot}8645740- & \log.\text{dost.}h' = 9{\cdot}8258956 \\
b' = -42^\circ 56' 12''{\cdot}3 & h' = 47^\circ 57' 15''{\cdot}33 \\
\text{czyli}\ \ b' = 137\ \ 3\ \ 47{\cdot}7 &
\end{array}$$

Znalazłszy dwa boki b' i h' trójkąta biegunowego i przechodząc do trójkąta ćwiartkowego danego, znajdziemy.

$$\beta = 180^\circ - b' = 42^\circ 56' 12''{\cdot}3,\quad \gamma = 180^\circ - h' = 132^\circ 2' 44''{\cdot}67$$

i tym sposobem dany trojkąt ćwiartkowy jest rozwiązany,

§. 57.

Na rozwiązanie wszystkich zdarzyć się mogących przypadków w trójkątach sferycznych ukośnokątnych, znaleźliśmy wprawdzie cztéry zasadnicze wzory w końcu §. 51 razem zestawione; te atoli wzory nie są wygodne do rachunku logarytmami, przystępując więc do rozwiązania tych trójkątów, przedewszystkiém postarać nam się potrzeba o przerobienie rzeczonych wzorów tak, iżby wygodnie logarytmów użyć można. I tak: szukając z trzech boków trójkąta sferycznego jego kątów, mamy na ten cel wzór (1)

$$\text{dost.}\,a = \text{dost.}\,b\,\text{dost.}\,c + \text{wst.}\,b\,\text{wst.}\,c\,\text{dost.}\,\alpha$$

z którego
$$\text{dost.}\,\alpha = \frac{\text{dost.}\,a - \text{dost.}\,b\,\text{dost.}\,c}{\text{wst.}\,b\,\text{wst.}\,c}$$

gdzie atoli dla obrachowania kąta α logarytmów użyć nie można; starajmy się więc to ostatnie zrównanie przerobić na inne.

W tym celu odejmijmy i dodajmy obie strony ostatniego zrównania do 1, a znajdziemy

$$\left.\begin{aligned}
1 - \text{dost.}\,\alpha &= \frac{\text{wst.}b\,\text{wst.}c + \text{dost.}b\,\text{dost.}c - \text{dost.}a}{\text{wst.}\,b\,\text{wst.}\,c} \\
&= \frac{\text{dost.}(b-c) - \text{dost.}a}{\text{wst.}\,b\,\text{wst.}\,c} = \frac{2\,\text{wst.}\frac{a+b-c}{2}\,\text{wst.}\frac{a-b+c}{2}}{\text{wst.}\,b\,\text{wst.}\,c} \\
1 + \text{dost.}\,\alpha &= \frac{\text{wst.}b\,\text{wst.}c - \text{dost.}b\,\text{dost.}c + \text{dost.}a}{\text{wst.}\,b\,\text{wst.}\,c} \\
&= \frac{\text{dost.}\,a - \text{dost.}(b+c)}{\text{wst.}b\,\text{wst.}c} = \frac{2\text{wst.}\frac{a+b+c}{2}\,\text{wst.}\frac{b+c-a}{2}}{\text{wst.}\,b\,\text{wst.}\,c}
\end{aligned}\right\}\ \text{§. 13 (23)}$$

Dzieląc obie strony każdego z tych zrównań przez 2 i wyciągając kwadratowy pierwiastek otrzymany

$$\sqrt{\frac{1-\text{dost.}\alpha}{2}}=\text{wst.}\tfrac{1}{2}\alpha=\sqrt{\frac{\text{wst.}\frac{a+c-b}{2}\,\text{wst.}\frac{a+b-c}{2}}{\text{wst.}\,b\,\text{wst.}\,c}}$$

$$\sqrt{\frac{1+\text{dost.}\alpha}{2}}=\text{dost.}\tfrac{1}{2}\alpha=\sqrt{\frac{\text{wst.}\frac{a+b+c}{2}\,\text{wst.}\frac{b+c-a}{2}}{\text{wst.}\,b\,\text{wst.}\,c}}$$

skąd $$\text{sty.}\tfrac{1}{2}\alpha=\sqrt{\frac{\text{wst.}\frac{a+c-b}{2}\,\text{wst.}\frac{a+b-c}{2}}{\text{wst.}\frac{a+b+c}{2}\,\text{wst.}\frac{b+c-a}{2}}}$$

Zupełnie tym samym sposobem, lub też przez prostą przemianę elementów znajdziemy

$$\text{wst.}\tfrac{1}{2}\beta=\sqrt{\frac{\text{wst.}\frac{b+c-a}{2}\,\text{wst.}\frac{a+b-c}{2}}{\text{wst.}\,a\,\text{wst.}\,c}}$$

$$\text{dost.}\tfrac{1}{2}\beta=\sqrt{\frac{\text{wst.}\frac{a+b+c}{2}\,\text{wst.}\frac{a+c-b}{2}}{\text{wst.}\,a\,\text{wst.}\,c}}$$

skąd $$\text{sty.}\tfrac{1}{2}\beta=\sqrt{\frac{\text{wst.}\frac{b+c-a}{2}\,\text{wst.}\frac{a+b-c}{2}}{\text{wst.}\frac{a+b+c}{2}\,\text{wst.}\frac{a+c-b}{2}}}$$

$$\text{wst.}\tfrac{1}{2}\gamma=\sqrt{\frac{\text{wst.}\frac{b+c-a}{2}\,\text{wst.}\frac{a+c-b}{2}}{\text{wst.}\,a\,\text{wst.}\,b}}$$

$$\text{dost.}\tfrac{1}{2}\gamma=\sqrt{\frac{\text{wst.}\frac{a+b+c}{2}\,\text{wst.}\frac{a+b-c}{2}}{\text{wst.}\,a\,\text{wst.}\,b}}$$

skąd $$\text{sty.}\tfrac{1}{2}\gamma=\sqrt{\frac{\text{wst.}\frac{b+c-a}{2}\,\text{wst.}\frac{a+c-b}{2}}{\text{wst.}\frac{a+b+c}{2}\,\text{wst.}\frac{a+b-c}{2}}}$$

Położywszy w tych wzorach $a+b+c=2s$, znajdziemy

$$\text{wst.}\tfrac{1}{2}\alpha = \sqrt{\frac{\text{wst.}(s-b)\,\text{wst.}(s-c)}{\text{wst.}\,b\,\text{wst.}\,c}}$$

$$\text{dost.}\tfrac{1}{2}\alpha = \sqrt{\frac{\text{wst.}\,s\,\text{wst.}\,(s-a)}{\text{wst.}\,b\,\text{wst.}\,c}}$$

$$\text{sty.}\tfrac{1}{2}\alpha = \sqrt{\frac{\text{wst.}\,(s-b)\,\text{wst.}\,(s-c)}{\text{wst.}\,s\,\text{wst.}\,(s-a)}}$$

$$\text{wst.}\tfrac{1}{2}\beta = \sqrt{\frac{\text{wst.}\,(s-a)\,\text{wst.}(s-c)}{\text{wst.}\,a\,\text{wst.}\,c}}$$

$$\text{dost.}\tfrac{1}{2}\beta = \sqrt{\frac{\text{wst.}\,s\,\text{wst.}\,(s-b)}{\text{wst.}\,a\,\text{wst.}\,c}}$$

$$\text{sty.}\tfrac{1}{2}\beta = \sqrt{\frac{\text{wst.}\,(s-a)\,\text{wst.}\,(s-c)}{\text{wst.}\,s\,\text{wst.}\,(s-b)}}$$

$$\text{wst.}\tfrac{1}{2}\gamma = \sqrt{\frac{\text{wst.}\,(s-a)\,\text{wst.}\,(s-b)}{\text{wst.}\,a\,\text{wst.}\,b}}$$

$$\text{dost.}\tfrac{1}{2}\gamma = \sqrt{\frac{\text{wst.}\,s\,\text{wst.}\,(s-c)}{\text{wst.}\,a\,\text{wst.}\,b}}$$

$$\text{sty.}\tfrac{1}{2}\gamma = \sqrt{\frac{\text{wst.}\,(s-a)\,\text{wst.}\,(s-b)}{\text{wst.}\,s\,\text{wst.}\,(s-c)}}$$

Gdybyśmy potrzebowali wstawy całkowitego kąta, tedy tę łatwo otrzymamy; jest bowiem

$$2\text{wst.}\tfrac{1}{2}\alpha\,\text{dost.}\tfrac{1}{2}\alpha = \text{wst.}\alpha = \frac{2\sqrt{\text{wst.}\,s\,\text{wst.}\,(s-a)\,\text{wst.}\,(s-b)\,\text{wst.}\,(s-c)}}{\text{wst.}\,b\,\text{wst.}\,c}$$

Tak tedy dla rozwiązania tego przypadku, otrzymaliśmy wzory bardzo proste i wygodne do logarytmicznego rachunku.

§. 58.

Jeżeli z dwóch danych boków b i c i kąta między niemi α chcemy znaléść trzeci bok a, tedy tenże sam wzór (1) daje nam ważność na dost. a. Ale ponieważ tu znowu rachując tęż ważność nie można użyć logarytmów, zatém jakże to zrównanie przerobić na inne czyniące zadość wymaganiom? Oto wprowadzić tu musimy kąt posiłkowy o jakim już w Trygonometryi prostokréślnéj mówiliśmy, i tu w §. 53. 2⁰ użyliśmy; sądzę atoli, iż tu będzie stósowne miejsce powiedzieć nieco obszérniéj o kącie posiłkowym a mianowicie jak się wprowadza i co on jest rzeczywiście.

12

Niech ogólnie będzie zrównanie trygonometryczne

$$\text{wst.}\,x = \text{A}\,\text{wst.}\,\alpha + \text{B}\,\text{dost.}\,\alpha$$

mówię że dwumian z drugiéj strony tego zrównania zawsze zamienić można na jednomian t. j. na iloczyn lub iloraz, a to następującym sposobem:

Ponieważ $\text{wst.}\,x = \text{A}\left(\text{wst.}\,\alpha + \frac{\text{B}}{\text{A}}\text{dost.}\,\alpha\right) = \text{B}\left(\frac{\text{A}}{\text{B}}\text{wst.}\,\alpha + \text{dost.}\,\alpha\right)$

tedy jeżeli A i B są znane, zawsze będzie można obrachować iloraz $\frac{\text{B}}{\text{A}}$ lub $\frac{\text{A}}{\text{B}}$. A że ten iloraz może mieć wszelkie ważności począwszy od 0 do ∞, zatém położywszy

$$\text{sty.}\,\varphi = \frac{\text{B}}{\text{A}} \text{ albo } \text{sty.}\,\psi = \frac{\text{A}}{\text{B}},$$

z czego się pokazuje, że $\text{sty.}\,\varphi = \text{doty.}\,\psi$, i te ważności włożywszy w ostatnie zrównanie, otrzymamy

$$\text{wst.}\,x = \text{A}\,(\text{wst.}\,\alpha + \text{sty.}\,\varphi\,\text{dost.}\,\alpha)$$

$$= \text{A}\left(\frac{\text{wst.}\,\alpha\,\text{dost.}\,\varphi + \text{dost.}\,\alpha\,\text{wst.}\,\varphi}{\text{dost.}\,\varphi}\right) = \text{A}\,\frac{\text{wst.}\,(\alpha+\varphi)}{\text{dost.}\,\varphi}$$

albo

$$\text{wst.}\,x = \text{B}\,(\text{sty.}\,\psi\,\text{wst.}\,\alpha + \text{dost.}\,\alpha)$$

$$= \text{B}\left(\frac{\text{wst.}\,\alpha\,\text{wst.}\,\psi + \text{dost.}\,\alpha\,\text{dost.}\,\psi}{\text{dost.}\,\psi}\right) = \text{B}\,\frac{\text{dost.}\,(\alpha-\psi)}{\text{dost.}\,\psi}.$$

Wprowadzony tu kąt φ albo ψ nazywa się *kątem posiłkowym* i widzimy, że przy jego pomocy łatwo nam było zamienić dwumian pierwiastkowego zrównania na jednomian zupełnie wygodny do logarytmicznego rachunku przezco twierdzenie nasze w całéj ogólności dowiedliśmy.

Ilości A i B mogą być jakiekolwiek, bądź to liczby bądź téż funkcyje trygonometryczne; mogą nawet być ilościami ogólnemi, którym w razie potrzeby nadać można ważności liczbowe. Zamiast wprowadzać styczną kąta posiłkowego, można téż było wprowadzić dotyczną; w niektórych przypadkach wprowadza się téż wstawę lub dostawę, co wszystko od okoliczności zależy, na które przy sposobności zwrócić uwagę uczących się należy. Gdybyśmy byli wprowadzili dotyczne kątów φ i ψ, znaleźlibyśmy byli $\text{wst.}\,x = \text{A}\,\frac{\text{dost.}\,(\alpha-\varphi)}{\text{wst.}\,\varphi}$ i

$$\text{wst.}\,x = \text{B}\,\frac{\text{wst.}\,(\alpha+\psi)}{\text{wst.}\,\psi}$$

które ważności są z powyższemi równoważne i przechodzą na tamte, skoro w nich położymy $90°-\varphi$ zą φ i $90-\psi$ za ψ.

Co rzeczywiście znaczy kąt posiłkowy, powiemy zaraz stósując podane tu prawidło wprowadzania posiłkowego kąta w zamiarze przerobienia różnych wzórów na inne. Powracając teraz do zadania na początku tego §. założonego, t. j. z danych dwóch boków b i c tudzież kąta między niemi zawartego α znaleść trzeci bok a, mamy tenże bok dany przez zrównanie (1) t. j.

$$\text{dost.}\,a = \text{dost.}\,b\,\text{dost.}\,c + \text{wst.}\,b\,\text{wst.}\,c\,\text{dost.}\,\alpha$$

które porównawszy z powyższém ogólném, znajdziemy

$$\text{B} = \text{dost.}\,b,\ \text{A} = \text{wst.}\,b\,\text{dost.}\,\alpha$$

i napisać je można następnie

$$\text{dost.}\,a = \text{dost.}\,b\,(\text{dost.}\,c + \text{sty.}\,b\,\text{dost.}\,\alpha\,\text{wst.}\,c)$$

gdzie $\frac{\text{A}}{\text{B}} = \text{sty.}\,b\,\text{dost.}\,\alpha$; położywszy zatém $\text{sty.}\,x = \text{sty.}\,b\,\text{dost.}\,\alpha$,

będzie $\text{dost.}\,a = \text{dost.}\,b\,(\text{dost.}\,c + \text{sty.}\,x\,\text{wst.}\,c)$

$$= \frac{\text{dost.}\,b\,(\text{dost.}\,c\,\text{dost.}\,x + \text{wst.}\,c\,\text{wst.}\,x)}{\text{dost.}\,x} = \frac{\text{dost.}\,b\,\text{dost.}\,(c-x)}{\text{dost.}\,x}$$

Gdybyśmy położyli $\text{doty.}\,x' = \text{sty.}\,b\,\text{dost.}\,\alpha$, otrzymalibyśmy

$$\text{dost.}\,a = \text{dost.}\,b\,(\text{dost.}\,c + \text{doty.}\,x'\,\text{wst.}\,c)$$

$$= \text{dost.}\,b\,\frac{\text{dost.}\,c\,\text{wst.}\,x' + \text{dost.}\,x'\,\text{wst.}\,c}{\text{wst.}\,x'} = \frac{\text{dost.}\,b\,\text{wst.}\,(c+x')}{\text{wst.}\,x'}$$

Ta ważność na $\text{dost.}\,a$ zamienia się w poprzedzającą, skoro położymy $x' = 90° - x$, przeto są zupełnie równoważne i pokazują tę prawdę, iż tu otrzymamy zawsze tenże sam wypadek bądź to że wprowadzimy styczną bądź dotyczną kąta posiłkowego. Zobaczmy teraz co znaczy kąt posiłkowy x? Niech będzie trójkąt sferyczny ABC *fig. 32*, połóżmy bok $\text{BC} = a$, $\text{AC} = b$, $\text{AB} = c$, kąt $\text{A} = \alpha$, $\text{B} = \beta$, $\text{C} = \gamma$. Z wierzchołka kąta C spuśćmy łuk CD prostopadły do AB, albo lepiéj, przez punkt C i środek kuli poprowadźmy płaszczyznę prostopadłą do płaszczyzny łuku AB, tedy ta przetnie powiérzchnię kuli w łuku CD prostopadłym do AB. Ten pro-

12.

stopadły łuk podzieli trójkąt ABC na dwa prostokątne ACD i BCD. Oznaczywszy odcinek AD przez x, łuk zaś CD przez p, w trójkącie ACD prostokątnym przy D według wzoru (p) §. 52 jest $\text{dost.}\,\alpha = \frac{\text{sty.}\,x}{\text{sty.}\,b}$ skąd $\text{sty.}\,x = \text{sty.}\,b\,\text{dost.}\,\alpha$

a według wzoru (m) tegoż §. jest $\text{dost.}\,p = \frac{\text{dost.}\,b}{\text{dost.}\,x}$.

W trójkącie BCD prostokątnym przy D, według ostatniego wzoru, jest $\text{dost.}\,a = \text{dost.}\,p\,\text{dost.}\,\mathrm{BD} = \text{dost.}\,p\,\text{dost.}\,(c - x)$, gdyż $\mathrm{BD} = \mathrm{AB} - \mathrm{AD} = c - x$. W tém ostatniém zrównaniu położywszy ważność za $\text{dost.}\,p$, otrzymamy

$$\text{dost.}\,a = \frac{\text{dost.}\,b\,\text{dost.}\,(c - x)}{\text{dost.}\,x}.$$

Z tego widzimy, że wprowadzenie kąta posiłkowego x, nie co innego znaczy jak rozebranie trójkąta ukośnokątnego na dwa prostokątne, dla rozwiązania których mamy sposobne do logarytmicznego rachunku wzory.

§. 59.

Gdy z danych dwóch boków i kąta jednemu z nich przeciwległego trójkąta sferycznego mamy znaléść kąt drugiemu przeciwległy, to na ten przypadek mamy wzór (2) t. j.

$$\frac{\text{wst}\,\alpha}{\text{wst.}\,a} = \frac{\text{wst.}\,\beta}{\text{wst.}\,b} = \frac{\text{wst.}\,\gamma}{\text{wst.}\,c}$$

nie potrzebujący żadnego przerobienia, jako całkiem stósowny do logarytmicznego rachunku, przystępujemy przeto z kolei do przerobienia zrównania (3).

Niechby potrzeba np. z danych dwóch boków b, c i kąta między niemi zawartego α, znaléść kąt β lub γ, tedy używając jednego z wzorów (3) §. 48, a mianowicie tego w którym się cztéry elementa b, c, α i β lub γ znajdują, mamy

$$\text{doty.}\,\beta = \frac{\text{doty.}\,b}{\text{wst.}\,\alpha}\,\text{wst.}\,c - \frac{\text{dost.}\,\alpha}{\text{wst.}\,\alpha}\,\text{dost.}\,c$$

który wzór porównany z ogólnym poprzedzającego §. daje $\mathrm{A} = \frac{\text{doty.}\,b}{\text{wst.}\,\alpha}$, $\mathrm{B} = \frac{\text{dost.}\,\alpha}{\text{wst.}\,\alpha}$ skąd $\frac{\mathrm{B}}{\mathrm{A}} = \frac{\text{dost.}\,\alpha}{\text{doty.}\,b} = \text{dost.}\,\alpha\,\text{sty.}\,b$. Położywszy zatém sty. x = dost. α sty. b, ponieważ

$$\text{doty.}\,\beta = \frac{\text{doty.}\,b}{\text{wst.}\,\alpha}\,(\text{wst.}\,c - \text{dost.}\,\alpha\,\text{sty.}\,b\,\text{dost.}\,c)$$

będzie $\text{doty.}\,\beta = \frac{\text{doty.}\,b}{\text{wst.}\,\alpha}(\text{wst.}c - \text{sty.}x\,\text{dost.}c) = \frac{\text{doty.}b}{\text{wst.}\,\alpha} \cdot \frac{\text{wst.}\,(c-x)}{\text{dost.}\,x}$

albo $\text{sty.}\,\beta = \frac{\text{wst.}\,\alpha\,\text{dost.}\,x}{\text{doty.}b\,\text{wst.}(c-x)} = \frac{\text{wst.}\,\alpha\,\text{sty.}\,b\,\text{dost.}x}{\text{wst.}\,(c-x)}$

a to jest wzór na rozwiązanie założonego przypadku, wygodny do logarytmicznego rachunku. Chcąc wiedzieć co tu znaczy kąt posiłkowy x, zróbmy toż samo jak w poprzedzającym §. wykréślenie, tedy w trójkącie prostokątnym ACD *fig. 32* zatrzymując znaczenie ilości p i x, jest

$$\text{dost.}\,\alpha = \frac{\text{sty.}\,x}{\text{sty.}\,b}\,[\text{zrów.}(p)] \text{ skąd sty.}\,x = \text{dost.}\,\alpha\,\text{sty.}\,b$$

jest więc kąt posiłkowy x równy odcinkowi AD jak w poprzedzającym §.

Z trójkąta BCD według (r) §. 52 mamy

$$\text{doty.}\,\beta = \text{doty.}\,p\,\text{wst.}\,(c-x) \text{ czyli sty.}\,\beta = \frac{\text{sty.}\,p}{\text{wst.}\,(c-x)}.$$

Lecz z piérwszego trójkąta ACD mamy jeszcze według (n) i (m) $\text{wst.}\,p = \text{wst.}\,b\,\text{wst.}\,\alpha$, $\text{dost.}\,p = \frac{\text{dost.}\,b}{\text{dost.}\,x}$

skąd $\text{sty.}\,p = \text{sty.}\,b\,\text{wst.}\,\alpha\,\text{dost.}\,x$ a następnie

$$\text{sty.}\,\beta = \frac{\text{wst.}\,\alpha\,\text{sty.}\,b\,\text{dost.}\,x}{\text{wst.}\,(c-x)}$$

jak wyżéj przez przerobienie znaleźliśmy. Z czego się pokazuje, że i tu wprowadzenie kąta posiłkowego, odpowiada rozebraniu trójkąta ukośnokątnego na dwa prostokątne.

Jeżeli w trójkącie sferycznym mamy dane dwa kąty β i γ, tudzież im przyległy bok a a szukamy boku b, użyć także musimy zrównania (3) z którego mamy

$$\text{doty.}\,b = \frac{\text{dost.}\,a}{\text{wst.}\,a}\,\text{dost.}\,\gamma + \frac{\text{doty.}\,\beta}{\text{wst.}\,a}\,\text{wst.}\,\gamma.$$

Dla przerobienia tego zrównania mamy

$$A = \frac{\text{doty.}\,\beta}{\text{wst.}\,a},\ B = \frac{\text{dost.}\,a}{\text{wst.}\,a}$$

przeto $$\frac{\mathrm{B}}{\mathrm{A}}=\frac{\text{dost.}\,a}{\text{doty.}\,\beta}=\text{dost.}\,a\,\text{sty.}\,\beta.$$

Pisząc ostatnie zrównanie następnie

$$\text{doty.}\,b=\frac{\text{doty.}\beta}{\text{wst.}\,a}\,(\text{wst.}\,\gamma+\text{dost.}\,a\,\text{sty.}\,\beta\,\text{dost.}\,\gamma)$$

i wprowadzając kąt posiłkowy x tak, że $\text{sty.}\,x=\text{dost.}\,a\,\text{sty.}\,\beta$

będzie $$\text{doty.}b=\frac{\text{doty.}\beta}{\text{wst.}\,a}(\text{wst.}\gamma+\text{sty.}x\text{dost.}\gamma)=\frac{\text{doty.}\beta}{\text{wst.}\,a}\cdot\frac{\text{wst.}\,(\gamma+x)}{\text{dost.}\,x}$$

albo $$\text{sty.}\,b=\frac{\text{wst.}\,a\,\text{sty.}\,\beta\,\text{dost.}\,x}{\text{wst.}\,(\gamma+x)}.$$

Gdybyśmy byli w miejsce $\text{sty.}\,x$ wprowadzili $\text{doty.}\,x$, otrzymalibyśmy

$$\text{sty.}\,b=\frac{\text{wst.}\,a\,\text{sty.}\,\beta\,\text{wst.}\,x}{\text{dost.}\,(\gamma-x)}$$

które zrównanie przejdzie w poprzedzające skoro tu położymy $90°-x$ za x jak być powinno. Pisząc zaś pierwiastkowe zrównanie następnie

$$\text{doty.}\,b=\text{doty.}\,a\,(\text{dost.}\,\gamma+\frac{\text{doty.}\,\beta}{\text{wst.}\,a}\,\text{wst.}\,\gamma)$$

i wprowadzając kąt posiłkowy tak, żeby $\text{sty.}\,x'=\frac{\text{doty.}\,\beta}{\text{dost.}\,a}$

znajdziemy

$$\text{doty.}b=\text{doty.}a\,(\text{dost.}\gamma+\text{sty.}x'\,\text{wst.}\gamma)=\text{doty.}a\,.\,\frac{\text{dost.}\,(\gamma-x')}{\text{dost.}\,x'}$$

albo $$\text{sty.}\,b=\frac{\text{sty.}a\,\text{dost.}\,x'}{\text{dost.}\,(\gamma-x')}$$

a ten wzór jest prościejszy od poprzedzających i dlatego w miejsce tamtych raczéj użytym być powinien, dla obrachowania bowiem b mamy wzory

$$\text{sty.}\,x'=\frac{\text{doty.}\,\beta}{\text{dost.}\,a}\qquad\text{a potém}\quad\text{sty.}\;b=\frac{\text{sty.}\,a\,\text{dost.}\,x'}{\text{dost.}\,(\gamma-x')}$$

w których mniéj o jeden logarytm szukać potrzeba.

Teraz zobaczmy co tu kąt posiłkowy x' znaczy? Zrobiwszy wykreślenie jak poprzednio i zatrzymując znaczenie ilości p, w trójkącie BCD prostokątnym przy D, według zrównania (q) §. 52 jest $\text{dost.}\,a=\text{doty.}\,\beta\,\text{doty.}\,\text{BCD}$

skąd $\text{doty.BCD} = \frac{\text{dost.}\,a}{\text{doty.}\beta}$

albo $\text{sty.BCD} = \frac{\text{doty.}\beta}{\text{dost.}\,a}$ t. j. $= \text{sty.}\,x'$.

Tu więc kąt posiłkowy jest kątem BCD a wprowadzenie jego odpowiada także rozebraniu trójkąta ukośnokątnego na dwa prostokątne, których rozwiązanie da nam powyższą ważność na b. Jakoż, z trójkąta BCD mamy

$\text{dost.}\,x' = \text{sty.}\,p\,\text{doty.}\,a$, skąd $\text{sty.}\,p = \frac{\text{dost.}\,x'}{\text{doty.}\,a} = \text{sty.}\,a\,\text{dost.}\,x'$

Z trójkąta zaś ACD jest

$$\text{dost.ACD} = \text{dost.}\,(\gamma - x') = \text{doty.}\,b\,\text{sty.}\,p = \frac{\text{sty.}\,p}{\text{sty.}\,b}$$

skąd $\text{sty.}\,b = \frac{\text{sty.}\,p}{\text{dost.}\,(\gamma - x')} = \frac{\text{sty.}\,a\,\text{dost.}\,x'}{\text{dost.}\,(\gamma - x')}$ jak wyżéj.

§. 60.

Że przerobienie zrównania (1) w §. 57 użyte, jako téż, że wprowadzenie kąta posiłkowego tym sposobem jak go w poprzedzających §§. wprowadzaliśmy nie jest jedyne, już to zapewne każdy bez mego zwrócenia uwagi dostrzegł, chociaż jeszcze nie przyszedł na myśl, jakby to w inny sposób uskutecznić. Ja tu wskażę jeden tylko sposób przerobienia zrównania (1) różny od tamtych, w przypadku gdy z trzech boków danych szukamy kątów, aby tym sposobem pokazać rozmaitość postępowania w wprowadzaniu posiłkowego kąta. To przerobienie prowadzi do bardzo prostych wypadków, jeżeli z (1) wzoru szukamy kątów lub z (4) szukamy boków.

W zrównaniu $\text{dost.}\,\alpha = \frac{\text{dost.}\,a - \text{dost.}\,b\,\text{dost.}\,c}{\text{wst.}\,b\,\text{wst.}\,c}$

rozmnożywszy na drugiéj stronie licznika i mianownika

przez $\frac{\text{dost.}\,b}{\text{wst.}\,b}$, otrzymamy

$$\text{dost.}\,\alpha = \text{doty.}\,b\left(\frac{\text{dost.}\,a - \text{dost.}\,b\,\text{dost.}\,c}{\text{dost.}\,b\,\text{wst.}\,c}\right)$$

Położywszy tu $\text{dost.}\,c = \text{dost.}\,\tfrac{1}{2}c^2 - \text{wst.}\,\tfrac{1}{2}c^2$,

tudzież $\text{wst.}\,c = 2\,\text{wst.}\,\tfrac{1}{2}c\,\text{dost.}\,\tfrac{1}{2}c$

będzie $\text{dost.}\alpha = \text{doty.}b\left(\frac{\text{dost.}a - \text{dost.}b\,\text{dost.}\frac{1}{2}c^2 + \text{dost.}b\,\text{wst.}\frac{1}{2}c^2}{2\,\text{wst.}\frac{1}{2}c\,\text{dost.}\frac{1}{2}c\,\text{dost.}b}\right)$

$$= \text{doty.}\,b\left\{\frac{\text{dost.}\,a - \text{dost}\,b\,(1 - \text{wst.}\frac{1}{2}c^2) + \text{dost.}\,b\,\text{wst.}\frac{1}{2}c^2}{2\,\text{wst.}\frac{1}{2}c\,\text{dost.}\frac{1}{2}c\,\text{dost.}\,b}\right\}$$

$$= \text{doty.}\,b\left(\frac{\text{dost.}\,a - \text{dost.}\,b + 2\,\text{dost.}\,b\,\text{wst.}\,\frac{1}{2}c^2}{2\,\text{wst.}\,\frac{1}{2}\,c\,\text{dost.}\,\frac{1}{2}\,c\,\text{dost.}\,b}\right)$$

Lecz $\text{dost.}\,a - \text{dost.}\,b = 2\,\text{wst.}\,\frac{b+a}{2}\,\text{wst.}\,\frac{b-a}{2}$ §. 13 (23),

tudzież ponieważ $\quad b = \frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{2}$

skąd $\quad \text{dost.}\,b = \text{dost.}\,\frac{b+a}{2}\text{dost.}\frac{b-a}{2} - \text{wst.}\,\frac{b+a}{2}\text{wst.}\,\frac{b-a}{2}$

zatém położywszy te ważności w ostatniém zrównaniu, otrzymamy

$$\text{dost.}\,\alpha = \text{doty.}b\left\{\frac{2\text{wst.}\frac{b+a}{2}\,\text{wst.}\frac{b-a}{2} + 2\text{wst.}\frac{1}{2}c^2\left(\text{dost.}\frac{b+a}{2}\,\text{dost.}\frac{b-a}{2} - \text{wst.}\frac{b+a}{2}\,\text{wst.}\frac{b-a}{2}\right)}{2\text{wst.}\frac{1}{2}c\,\text{dost.}\frac{1}{2}c\left(\text{dost.}\frac{b+a}{2}\,\text{dost.}\frac{b-a}{2} - \text{wst.}\frac{b+a}{2}\,\text{wst.}\frac{b-a}{2}\right)}\right\}$$

$$= \text{doty.}\,b.\left\{\frac{\text{wst.}\frac{1}{2}c^2\text{dost.}\,\frac{b+a}{2}\text{dost.}\frac{b-a}{2} + \text{wst.}\frac{b+a}{2}\text{wst.}\frac{b-a}{2}\text{dost.}\frac{1}{2}c^2}{\text{wst.}\frac{1}{2}c\,\text{dost.}\frac{1}{2}c\left(\text{dost.}\frac{b+a}{2}\text{dost.}\frac{b-a}{2} - \text{wst.}\frac{b+a}{2}\text{wst.}\frac{b-a}{2}\right)}\right\}$$

Dzieląc tu licznika i mianownika przez

$\text{wst.}\,\frac{1}{2}\,c\,\text{dost.}\frac{1}{2}\,c\,\text{dost.}\frac{b+a}{2}\text{dost.}\frac{b-a}{2}$, znajdziemy

$$\text{dost.}\,\alpha = \text{doty.}\,b\left(\frac{\text{sty.}\,\frac{1}{2}\,c + \text{sty.}\frac{b+a}{2}\text{sty.}\frac{b-a}{2}\text{doty.}\frac{1}{2}c}{1 - \text{sty.}\,\frac{b+a}{2}\text{sty.}\frac{b-a}{2}}\right)$$

$$= \text{doty.}\,b\left(\frac{\text{sty.}\frac{1}{2}c + \text{sty.}\,\frac{b+a}{2}\text{sty.}\,\frac{b-a}{2}\text{doty}\frac{1}{2}c}{1 - \text{sty.}\frac{1}{2}c\,\text{sty.}\frac{b+a}{2}\text{sty.}\,\frac{b-a}{2}\text{doty.}\frac{1}{2}c}\right)$$

Wprowadziwszy nareszcie kąt posiłkowy x tak że

$\text{sty.}\,\frac{1}{2}\,x = \text{sty.}\,\frac{b+a}{2}\,\text{sty.}\frac{b-a}{2}\text{doty.}\frac{1}{2}c$, znajdziemy

$$\text{dost.}\alpha = \text{doty.}b\left(\frac{\text{sty.}\frac{1}{2}c + \text{sty.}\frac{1}{2}x}{1 - \text{sty.}\frac{1}{2}c\,\text{sty}\frac{1}{2}x}\right) = \text{doty.}b\,\text{sty.}\frac{c+x}{2} \quad \text{§. 15. (32)}$$

Chcąc z danych trzech kątów trójkąta sferycznego znaléść boki, mamy zrównanie (4)

$$\text{dost.}a = \frac{\text{dost.}\,\alpha + \text{dost.}\,\beta\,\text{dost.}\,\gamma}{\text{wst.}\,\beta\,\text{wst.}\,\gamma}$$

gdzie robiąc zupełnie poprzedzającym podobne przerobienia i kładąc $\text{sty.}\frac{1}{2}x' = \text{sty.}\frac{\beta+\alpha}{2}\,\text{sty.}\frac{\beta-\alpha}{2}\,\text{sty.}\frac{1}{2}\gamma$,

znajdziemy $$\text{dost.}\,\alpha = \text{doty.}\,\beta\;\text{doty.}\frac{\gamma-x'}{2}.$$

Dwa otrzymane tu wzory t. j. wzory na dost. α i dost. a są daleko prościejsze niż w §. 57 otrzymane.

Ostatnie zrównanie t. j. (4) w przypadku, że chcemy znaleść dost. α z danych dwóch innych kątów β, γ i im przyległego boku a, zwyczajnie przerabia się następującym sposobem:

Napisawszy zrównanie (4) następnie

$$\text{dost.}\,\alpha = \text{dost.}\,\beta\left(\frac{\text{wst.}\,\beta\;\text{dost.}\,a}{\text{dost.}\,\beta}\,\text{wst.}\,\gamma - \text{dost.}\,\gamma\right)$$

połóżmy $$\text{doty.}\,x = \frac{\text{wst.}\,\beta\;\text{dost.}\,a}{\text{dost.}\,\beta} = \text{sty.}\,\beta\;\text{dost.}\,a,$$

tedy znajdziemy

$$\text{dost.}\,\alpha = \text{dost.}\,\beta\,(\text{doty.}\,x\,\text{wst.}\,\gamma - \text{dost.}\,\gamma) = \text{dost.}\,\beta\frac{\text{wst.}\,(\gamma - x)}{\text{wst.}\,x}$$

a te wzory są do rachunku logarytmicznego zupełnie stósowne.

§. 61.

Oprócz przerobień zasadniczych wzorów do logarytmicznego rachunku przez wprowadzenie posiłkowego kąta, jak to w poprzedzających §§. uczyniliśmy, można je także przerobić w inny sposób jak już tego na zrównaniu (1) doświadczyliśmy. Teraz zobaczymy, że przez różne od wszystkich poprzedzających przerobień, można otrzymać wzory zastąpić mogące cztéry zasadnicze a do rachunku bardzo wygodne. Z przerobienia w §. 57, znaleźliśmy

$$\text{wst.}\tfrac{1}{2}\alpha = \sqrt{\frac{\text{wst.}(s-b)\,\text{wst.}(s-c)}{\text{wst.}\,b\;\text{wst.}\,c}} \qquad \text{dost.}\tfrac{1}{2}\alpha = \sqrt{\frac{\text{wst.}\,s\;\text{wst.}\,(s-a)}{\text{wst.}\,b\;\text{wst.}\,c}}$$

$$\text{wst.}\tfrac{1}{2}\beta = \sqrt{\frac{\text{wst.}(s-a)\,\text{wst.}(s-c)}{\text{wst.}\,a\;\text{wst.}\,c}} \qquad \text{dost.}\tfrac{1}{2}\beta = \sqrt{\frac{\text{wst.}\,s\;\text{wst.}\,(s-b)}{\text{wst.}\,a\;\text{wst.}\,c}}$$

$$\text{wst.}\tfrac{1}{2}\gamma = \sqrt{\frac{\text{wst.}(s-a)\,\text{wst.}(s-b)}{\text{wst.}\,a\;\text{wst.}\,b}} \qquad \text{dost.}\tfrac{1}{2}\gamma = \sqrt{\frac{\text{wst.}\,s\;\text{wst.}\,(s-c)}{\text{wst.}\,a\;\text{wst.}\,b}}$$

skąd wypada

$$\text{dost.}\tfrac{1}{2}\alpha\,\text{dost.}\tfrac{1}{2}\beta=\frac{\text{wst.}\,s}{\text{wst.}\,c}\sqrt{\frac{\text{wst.}(s-a)\text{wst.}(s-b)}{\text{wst.}\,a\,\text{wst.}\,b}}=\frac{\text{wst.}\,s}{\text{wst.}\,c}\text{wst.}\tfrac{1}{2}\gamma$$

$$\text{wst.}\tfrac{1}{2}\alpha\text{wst.}\tfrac{1}{2}\beta=\frac{\text{wst.}(s-c)}{\text{wst.}\,c}\sqrt{\frac{\text{wst.}(s-a)\text{wst.}(s-b)}{\text{wst.}\,a\,\text{wst.}\,b}}=\frac{\text{wst.}(s-c)}{\text{wst.}c}\text{wst.}\tfrac{1}{2}\gamma$$

$$\text{wst.}\tfrac{1}{2}\alpha\text{dost.}\tfrac{1}{2}\beta=\frac{\text{wst.}(s-b)}{\text{wst.}\,c}\sqrt{\frac{\text{wst.}s\text{wst.}(s-c)}{\text{wst.}\,a\,\text{wst.}\,b}}=\frac{\text{wst.}(s-b)}{\text{wst.}\,c}\text{dost.}\tfrac{1}{2}\gamma$$

$$\text{dost.}\tfrac{1}{2}\alpha\text{wst.}\tfrac{1}{2}\beta=\frac{\text{wst.}(s-a)}{\text{wst.}\,c}\sqrt{\frac{\text{wst.}\,s\,\text{wst.}\,(s-c)}{\text{wst.}\,a\,\text{wst.}\,b}}=\frac{\text{wst.}\,(s-a)}{\text{wst.}\,c}\text{dost.}\tfrac{1}{2}\gamma$$

Tak dwa piérwsze jako téż i dwa drugie z tych ostatnich zrównań raz dodając a drugi raz odejmując od siebie, otrzymamy

$$\text{dost.}\frac{\alpha+\beta}{2}=\frac{\text{wst.}\,\tfrac{1}{2}\gamma}{\text{wst.}\,c}\Big\{\text{wst.}\,s-\text{wst.}\,(s-c)\Big\}$$

$$=\frac{\text{wst.}\,\tfrac{1}{2}\gamma}{\text{wst.}\,c}\,.\,2\,\text{wst.}\,\tfrac{1}{2}\,c\,\text{dost.}\,(s-\tfrac{1}{2}\,c)$$

$$\text{dost.}\frac{\alpha-\beta}{2}=\frac{\text{wst.}\,\tfrac{1}{2}\gamma}{\text{wst.}\,c}\Big\{\text{wst.}\,s+\text{wst.}\,(s-c)\Big\}$$

$$=\frac{\text{wst.}\,\tfrac{1}{2}\gamma}{\text{wst.}\,c}\,.\,2\,\text{wst.}\,(s-\tfrac{1}{2}\,c)\,\text{dost.}\,\tfrac{1}{2}\,c$$

$$\text{wst.}\,\frac{\alpha+\beta}{2}=\frac{\text{dost.}\,\tfrac{1}{2}\gamma}{\text{wst.}\,c}\Big\{\text{wst.}\,(s-b)+\text{wst.}\,(s-a)\Big\}$$

$$=\frac{\text{dost.}\,\tfrac{1}{2}\gamma}{\text{wst.}\,c}\,.\,2\,\text{wst.}\left(s-\frac{a+b}{2}\right)\text{dost.}\,\frac{a-b}{2}$$

$$\text{wst.}\,\frac{\alpha-\beta}{2}=\frac{\text{dost.}\,\tfrac{1}{2}\gamma}{\text{wst.}\,c}\Big\{\text{wst.}\,(s-b)-\text{wst.}\,(s-a)\Big\}$$

$$=\frac{\text{dost.}\,\tfrac{1}{2}\gamma}{\text{wst.}\,c}\,.\,2\,\text{wst.}\,\frac{a-b}{2}\,\text{dost.}\left(s-\frac{a+b}{2}\right)$$

§. 13 (20) i (21).

Przywróciwszy ważność $s=\dfrac{a+b+c}{2}$

i kładąc $\text{wst.}\,c=2\,\text{wst.}\,\tfrac{1}{2}\,c\,\text{dost.}\,\tfrac{1}{2}\,c,$

znajdziemy $\text{dost.}\,\dfrac{\alpha+\beta}{2}=\dfrac{\text{dost.}\,\frac{a+b}{2}\,\text{wst.}\,\frac{1}{2}\,\gamma}{\text{dost.}\,\frac{1}{2}\,c}$

$$\text{dost.}\,\frac{\alpha-\beta}{2}=\frac{\text{wst.}\,\frac{a+b}{2}\;\text{wst.}\,\tfrac{1}{2}\gamma}{\text{wst.}\,\tfrac{1}{2}c}$$

$$\text{wst.}\,\frac{\alpha+\beta}{2}=\frac{\text{dost.}\,\frac{a-b}{2}\;\text{dost.}\,\tfrac{1}{2}\gamma}{\text{dost.}\,\tfrac{1}{2}c}$$

$$\text{wst.}\,\frac{\alpha-\beta}{2}=\frac{\text{wst.}\,\frac{a-b}{2}\;\text{dost.}\,\tfrac{1}{2}\gamma}{\text{wst.}\,\tfrac{1}{2}c}$$

lub nareszcie $\text{dost.}\,\frac{\alpha+\beta}{2}\,\text{dost.}\,\tfrac{1}{2}c=\text{dost.}\,\frac{a+b}{2}\,\text{wst.}\,\tfrac{1}{2}\gamma$

$$\text{dost.}\,\frac{\alpha-\beta}{2}\,\text{wst.}\,\tfrac{1}{2}c=\text{wst.}\,\frac{a+b}{2}\,\text{wst.}\,\tfrac{1}{2}\gamma$$

$$\text{wst.}\,\frac{\alpha+\beta}{2}\,\text{dost.}\,\tfrac{1}{2}c=\text{dost.}\,\frac{a-b}{2}\,\text{dost.}\,\tfrac{1}{2}\gamma$$

$$\text{wst.}\,\frac{\alpha-\beta}{2}\,\text{wst.}\,\tfrac{1}{2}c=\text{wst.}\,\frac{a-b}{2}\,\text{dost.}\,\tfrac{1}{2}\gamma$$

Cztéry te wzory piérwszy raz podane były przez sławnego astronoma Delambra (Delembre) w *Connaissance des tems* w r. 1807 lecz bez dowodu, późniéj t. j. w r. 1809 przez sławnego Gaussa w jego wzorowém dziele „*Theoria motus corporum coelestium*“ także bez dowodu a wszelako jego nazwę dotąd noszą. Każdy z nich, jak widzimy, zamyka wszystkie sześć elementów trójkąta sferycznego; zastępują one przeto zasadnicze wzory i z wielką korzyścią użytemi być mogą, zwłaszcza wtedy, gdy dwóch kątów lub dwóch boków razem szukamy; przy ich bowiem pomocy znajdziemy połowę summy i połowę różnicy żądanych elementów a następnie i każdy z nich.

§. 62.

Ze zrównań Gaussa wypadają bardzo prostym sposobem tak dawniéj sławne *Analogije* Nepera. Dzieląc bowiem trzecie z rzeczonych zrównań przez piérwsze, potém czwarte przez drugie, daléj drugie przez piérwsze a nareszcie czwarte przez trzecie, otrzymamy

$$\text{sty.}\,\frac{\alpha+\beta}{2}=\frac{\text{dost.}\,\frac{a-b}{2}}{\text{dost.}\,\frac{a+b}{2}}\,\text{doty.}\,\tfrac{1}{2}\gamma$$

$$\text{sty.}\,\frac{\alpha-\beta}{2}=\frac{\text{wst.}\,\frac{a-b}{2}}{\text{wst.}\,\frac{a+b}{2}}\,\text{doty.}\,\tfrac{1}{2}\gamma$$

$$\text{sty.}\,\frac{a+b}{2}=\frac{\text{dost.}\,\frac{\alpha-\beta}{2}}{\text{dost.}\,\frac{\alpha+\beta}{2}}\,\text{sty.}\,\tfrac{1}{2}c$$

$$\text{sty.}\,\frac{a-b}{2}=\frac{\text{wst.}\,\frac{\alpha-\beta}{2}}{\text{wst.}\,\frac{\alpha+\beta}{2}}\,\text{sty.}\,\tfrac{1}{2}c$$

Cztéry te Analogije Nepera w tych samych przypadkach jak wzory Gaussa użytemi być mogą i również zastępują miejsce zasadniczych wzorów jako do logarytmicznego rachunku wygodne. Ponieważ sty. $\frac{1}{2}c$ i dost. $\frac{\alpha-\beta}{2}$ są zawsze dodatne, zatém z trzeciéj Analogii czytamy tę prawdę, że téż sty. $\frac{a+b}{2}$ i dost. $\frac{\alpha+\beta}{2}$ mieć muszą jednakowe znaki, z czego naturalny wypływa wniosek, że połowa summy dwóch kątów w trójkącie sferycznym zawsze jest tegoż samego gatunku jak połowa summy dwóch boków tym kątom przeciwległych. Z (4) zaś wzoru Gaussa czytamy wprost prawdę, że w każdym trójkącie sferycznym każdy kąt i bok jemu przeciwległy są zawsze tegoż samego gatunku. Gdy bowiem żaden kąt nie może być większym niż 180°, zatém napisawszy ten wzór następnie

$$\frac{\text{dost.}\,\frac{1}{2}\gamma}{\text{wst.}\,\frac{1}{2}c}=\frac{\text{wst.}\,\frac{\alpha-\beta}{2}}{\text{wst.}\,\frac{a-b}{2}}$$

ponieważ piérwsza strona tego zrównania jest zawsze dodatna, i druga takąż być musi t. j. wst. $\frac{\alpha-\beta}{2}$ i wst. $\frac{a-b}{2}$ mieć muszą jednakowe znaki czyli, że $\alpha-\beta$ i $a-b$ są tegoż samego gatunku t. j. albo oba dodatne, albo odjemne; więc jeżeli $\alpha > \beta$, jest też $a > b$, a jeżeli $\alpha < \beta$ to i $a < b$ t. j. w każdym trójkącie sferycznym bok większy leży na przeciwko kąta większego a mniejszy naprzeciwko mniéjszego.

§. 63.

Z wzorów Gaussa wyprowadzić jeszcze możemy bardzo ważną następność dla Trygonometryi prostokreślnéj. Zapytajmy się bowiem, co się znim stanie w przypadku, gdy boki trójkąta sferycznego będą bardzo małe, czyli co na jedno wychodzi, gdy trójkąt sferyczny przejdzie na prostokreślny? Wszakże w takim przypadku dost. $\frac{a-b}{2} = 1$, dost. $\frac{a-b}{2} = 1$,

wst. $\frac{a+b}{2} = \frac{a+b}{2}$, wst. $\frac{a-b}{2} = \frac{a-b}{2}$, dost. $\frac{1}{2} c = 1$, wst. $\frac{1}{2} c = \frac{1}{2} c$

jak to z §. 17 i skądinąd wiemy, a dla tego wzory Gaussa przechodzą w podobnym przypadku na następujące:

$$\text{wst: } \tfrac{1}{2}\gamma = \text{dost. } \frac{\alpha+\beta}{2} \quad \text{czyli} \quad \text{wst. } \tfrac{1}{2}\gamma = \text{dost. } \frac{\alpha+\beta}{2}$$

$$\frac{a+b}{2} \text{ wst. } \tfrac{1}{2}\gamma = \text{dost. } \frac{\alpha-\beta}{2} \cdot \tfrac{1}{2} c \quad \text{„} \quad (a+b) \text{ wst. } \tfrac{1}{2}\gamma = c \text{ dost. } \frac{\alpha+\beta}{2}$$

$$\text{dost. } \tfrac{1}{2}\gamma = \text{wst. } \frac{\alpha+\beta}{2} \quad \text{„} \quad \text{dost. } \tfrac{1}{2}\gamma = \text{wst. } \frac{\alpha+\beta}{2}$$

$$\frac{a-b}{2} \text{ dost. } \tfrac{1}{2}\gamma = \text{wst. } \frac{\alpha-\beta}{2} \cdot \tfrac{1}{2} c \quad \text{„} \quad (a-b) \text{ dost. } \tfrac{1}{2}\gamma = c \text{ wst. } \frac{\alpha-\beta}{2}$$

Piérwsze i trzecie z tych ostatnich zrównań zamykają znaną nam prawdę trójkąta prostokreślnego, iż summa trzech jego kątów czyni dwa kąty proste czyli że $\alpha + \beta + \gamma = 180^0$, dwa zaś inne rozebrane na proporcyje dają

$$a+b : c = \text{dost. } \frac{\alpha-\beta}{2} : \text{wst. } \tfrac{1}{2}\gamma \quad \text{i} \quad a-b : c = \text{wst. } \frac{\alpha-\beta}{2} : \text{dost. } \tfrac{1}{2}\gamma$$

i zamykają dwa twierdzenia Trygonometryi prostokreślnéj dotąd nam nieznane, te zaś są następujące:

1. *W każdym trójkącie prostokreślnym summa dwóch którychkolwiek jego boków tak się ma do trzeciego, jak do-*

stawa połowy różnicy kątów tym bokom przeciwległych do wstawy połowy trzeciego kąta.

2. *W każdym trójkącie prostokreślnym różnica dwóch którychkolwiek jego boków tak się ma do boku trzeciego, jak się ma wstawa połowy różnicy kątów tym bokom przeciwległych do dostawy połowy trzeciego kąta.*

Wyrazy proporcyi drugiéj podzieliwszy przez odpowiadające piérwszéj, znajdziemy

$$\frac{a-b}{a+b} : 1 = \text{sty.}\,\frac{\alpha-\beta}{2} : \text{doty.}\,\tfrac{1}{2}\gamma$$

albo $a+b : a-b = \text{sty.}\,\frac{\alpha+\beta}{2} : \text{sty.}\,\frac{\alpha-\beta}{2}$ bo $\frac{1}{2}\gamma = 90^0 - \frac{\alpha+\beta}{2}$

a to jest proporcyja w §. 28 inną drogą znaleziona.

Każda z powyższych dwóch proporcyj zamyka wszystkie sześć élementów trójkąta prostokreślnego, dla tego dwa powyższe twierdzenia są tém samém dla prostokreślnéj, czém wzory Gaussa dla Trygonometryi sferycznéj. Tę własność trójkąta prostokreślnego podał Anger w „*Archiv der Mathematik und Physik von* Grunert.

§. 64.

W §. 59 przerobiliśmy już zrównanie (4) do rachunku logarytmicznego w przypadku, gdy z danych trzech kątów trójkąta sferycznego szukamy boków. Przerobienie to uskutecznić téż można sposobem w §. 57 użytym, albo jeszcze łatwiéj pamiętając, że zrównanie (4) otrzymaliśmy z (1) za użyciem własności trójkąta biegunowego i stósując takowe do wzorów otrzymanych w §. 57. Gdy bowiem $\alpha = 180^0 - a$, $\beta = 180^0 - b$, $\gamma = 180^0 - c$, $a = 180^0 - \alpha$, $b = 180^0 - \beta$, $c = 180^0 - \gamma$, znajdziemy

z $\quad \text{wst.}\,\tfrac{1}{2}\alpha = \sqrt{\dfrac{\text{wst.}\,\frac{a+c-b}{2}\,\text{wst.}\,\frac{a+b-c}{2}}{\text{wst.}\,b\,\text{wst.}\,c}}$

i $\quad \text{dost.}\,\tfrac{1}{2}\alpha = \sqrt{\dfrac{\text{wst.}\,\frac{a+b+c}{2}\,\text{wst.}\,\frac{b+c-a}{2}}{\text{wst.}\,b\,\text{wst.}\,c}}$

$$\text{dost.}\, \tfrac{1}{2}\, a = \sqrt{\frac{\text{dost.}\, \frac{\alpha+\gamma-\beta}{2}\, \text{dost.}\, \frac{\alpha+\beta-\gamma}{2}}{\text{wst.}\, \beta\, \text{wst.}\, \gamma}}$$

i
$$\text{wst.}\, \tfrac{1}{2}\, a = \sqrt{\frac{-\text{dost.}\, \frac{\alpha+\beta+\gamma}{2}\, \text{dost.}\, \frac{\beta+\gamma-\alpha}{2}}{\text{wst.}\, \beta\, \text{wst.}\, \gamma}}$$

i podobnież

$$\text{dost.}\, \tfrac{1}{2}\, b = \sqrt{\frac{\text{dost.}\, \frac{\beta+\gamma-\alpha}{2}\, \text{dost.}\, \frac{\alpha+\beta-\gamma}{2}}{\text{wst.}\, \alpha\, \text{wst.}\, \gamma}}$$

$$\text{wst.}\, \tfrac{1}{2}\, b = \sqrt{\frac{-\text{dost.}\, \frac{\alpha+\beta+\gamma}{2}\, \text{dost.}\, \frac{\alpha+\gamma-\beta}{2}}{\text{wst.}\, \alpha\, \text{wst.}\, \gamma}}$$

$$\text{dost.}\, \tfrac{1}{2}\, c = \sqrt{\frac{\text{dost.}\, \frac{\beta+\gamma-\alpha}{2}\, \text{dost.}\, \frac{\alpha+\gamma-\beta}{2}}{\text{wst.}\, \alpha\, \text{wst.}\, \beta}}$$

$$\text{wst.}\, \tfrac{1}{2}\, c = \sqrt{\frac{-\text{dost.}\, \frac{\alpha+\beta+\gamma}{2}\, \text{dost.}\, \frac{\alpha+\beta-\gamma}{2}}{\text{wst.}\, \alpha\, \text{wst.}\, \beta}}$$

Tak tedy mamy już wszystkie wzory przerobione do logarytmicznego rachunku a to na każdy w rozwiązywaniu trójkątów sferycznych zdarzyć się mogący przypadek.

§. 65.

Jakkolwiek co dopiero wspomnione przerobione wzory nic w rachunku do życzenia nie pozostawiają, dla praktyków jednak zdają się wymagać więcéj nad potrzebę roboty. Z tego powodu sprowadzają praktycy rozwiązanie trójkąta sferycznego ukośnokątnego, do rozwiązania dwóch prostokątnych, na które piérwszy przez poprowadzenie z jednego z wiérzchołków prostopadłego łuku, jak to już w §§. 57 i 58 widzieliśmy, rozbierają, a tym sposobem otrzymują nader proste wzory, przy których pomocy rozwiązują każdy ukośnokątny trójkąt. Zobaczmy jakim sposobem i do jakich przychodzą wzorów?

Na *fig. 32* oznaczmy odcinek AD przez x' a odcinek BD przez x tak, że $\text{AD} = x'$, $\text{BD} = x$. Przez poprowadzenie prostopadłege łuku CD kąt $C=\gamma$ podzielonym także został na dwa inne ACD i BCD; połóżmy też $ACD=\xi'$, $BCD=\xi$; pamiętajmy oprócz tego że łuk CD padać też może zewnątrz trójkąta ABC i że w tym przypadku odcinek x' a następnie i kąt ξ' będą odjemne. Z dwóch tych prostokątnych trójkątów, według wzorów §. 52 łatwo otrzymamy ośm następujących zrównań

$$\text{sty.}\,x'=\text{sty.}\,b\,\text{dost.}\,\alpha \quad . \quad (1) \qquad \text{doty.}\,\xi'=\text{sty.}\,\alpha\,\text{dost.}\,b \quad . \quad (2)$$

$$c=x+x' \quad . \; . \; . \quad (3) \qquad \gamma=\xi+\xi' \quad . \; . \; . \quad (4)$$

$$\frac{\text{dost.}\,a}{\text{dost.}\,b}=\frac{\text{dost.}\,x}{\text{dost.}\,x'} \quad . \; . \; . \quad (5) \qquad \frac{\text{dost.}\,\alpha}{\text{dost.}\,\beta}=\frac{\text{wst.}\,\xi'}{\text{wst.}\,\xi} \quad . \; . \quad (6)$$

$$\frac{\text{sty.}\,\alpha}{\text{sty.}\,\beta}=\frac{\text{wst.}\,x}{\text{wst.}\,x'} \quad . \; . \; . \quad (7) \qquad \frac{\text{sty.}\,a}{\text{sty.}\,b}=\frac{\text{dost.}\,\xi'}{\text{dost.}\,\xi} \quad . \; . \quad (8)$$

do których przydawszy wzór

$$\frac{\text{wst.}\,\alpha}{\text{wst.}\,a}\;\frac{\text{wst.}\,\beta}{\text{wst.}\,b}\;\frac{\text{wst.}\,\gamma}{\text{wst.}\,c} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (9)$$

przy pomocy tych dziewięciu wzorów uskuteczniają praktycy wszystkie rachunki z trójkątami sferycznemi jak to zaraz zobaczymy, zwracając tu jeszcze raz uwagę uczących się, aby na znaki dostaw i stycznych tak kątów jako i boków mieli pilne baczenie. Dwie te funkcyje trygonometryczne mają, jak już skądinąd wiadomo znaki dodatne, jeżeli należą do kątów lub boków mniéjszych niż 90°, a odjemne jeżeli też kąty lub boki są większe niż 90°.

§. 66.

Dla pokazania użycia ostatnich wzorów, przyjmijmy dwa elementa trójkąta sferycznego t. j. α i b za stale dane i przybierajmy do nich trzeci którykolwiek, tedy mamy następujące przypadki już poprzednio rozwiązane.

1. Niech będą dane α, b, c; jest to przypadek w §. 58 przez wprowadzenie posiłkowego kąta rozwiązany.

Z (1) z rzeczonych zrównań znajdziemy x', a z (3) x; potém z (5) a, z (7) β, a nareszcie z (9) γ i trójkąt będzie rozwiązany.

2. Dane są, α, γ, b t. j. przypadek w §§. 58 i 59 rozwiązany.

Ze zrównania (2) znajdzie się ξ' a z (4) ξ; potém z (6) β, z (8) a, a z (9) c.

3. Z danych elementów a, b, α rozwiązać trójkąt, przypadek §. 59.

Z (1) znajdziémy x', z (5) x, z (3) c, (7) β a z (9) γ. Albo téż z (2) ξ', z (8) ξ, z (4) γ, z (6) β, z (9) c.

Uwaga. Ponieważ w tym przypadku otrzymujemy x lub ξ przez dostawę, a wiadomo, że dost. $(\pm x) = +$ dost. x, dla tego tu dwa będą w ogólności rozwiązania, a znalezione ważności tak na c jako i γ będą podwójne, jedna ze znakiem $+$ a druga ze znakiem $-$; chyba że zadanie nie przypuszcza ważności odjemnéj, jak to często bywa, lub téż te ważności wypadną większe niż 180°, bo je wtenczas jako niemożebne, odrzucamy. W zrównaniach (6) i (7) dane są ξ i x przez wstawy, a zatém wypadną ważności na β, γ i c także podwójne.

4. Dane są α, β, b i znich mamy rozwiązać trójkąt.

Ze zrównania (2) znajdzie się ξ', z (6) ξ, z (4) γ, z (8) a, a z (9) c. Albo z (1) x', z (7) x, z (3) c, z (5) a, a z (9) γ.

Uwaga. Tu także dwa są rozwiązania, albowiem x i ξ dane są przez wstawy, a do téj funkcyi należą dwa spełniające się kąty lub łuki; z tego powodu c z (3) i a z (8) dwie ważności mieć będą, jako téż a z (5) i γ z (4).

§. 67.

Z ośmiu wzorów §. 65 wyprowadzić jeszcze można inne nie mniéj proste i w różnych przypadkach przydatne wzory. I tak strony zrównania (5) odejmując i dodając do 1, a wypadki dzieląc przez siebie, otrzymamy:

$$\frac{\text{dost.}\,x - \text{dost.}\,x'}{\text{dost.}\,x + \text{dost.}\,x'} = \frac{\text{dost.}\,a - \text{dost.}\,b}{\text{dost.}\,a + \text{dost.}\,b}$$

czyli $$-\,\text{sty.}\,\frac{x+x'}{2}\,\text{sty.}\,\frac{x-x'}{2} = -\,\text{sty.}\,\frac{a+b}{2}\,\text{sty.}\,\frac{a-b}{2}$$

§. 13 (25); a ponieważ $\frac{x+x'}{2} = \frac{1}{2}c$

zatém $\text{sty.}\frac{x-x'}{2}=\text{sty.}\frac{a+b}{2}\text{sty.}\frac{a-b}{2}\text{doty.}\tfrac{1}{2}c$ . . . . . (10)

Jeżeli ten wzór porównamy z kątem posiłkowym x w §. 60 wprowadzonym, dostrzeżemy, iż ten ostatni nic innego nie znaczy jak tylko różnicę odcinków przez łuk CD na boku AB zrobionych.

Za pomocą tego wzoru, skoro są dane trzy boki trójkąta, znajdziemy połowę różnicy odcinków x i x'; a ponieważ połowa ich summy$=\frac{1}{2}c$, więc znajdziemy i same odcinki. Po ich znalezieniu rozwiązując trójkąty prostokątne ACD i BCD *fig. 32*, znajdziemy kąty α i β, a mianowicie

$$\text{dost.}\alpha=\text{sty.}x'\,\text{doty.}b\ \ldots\ \text{dost.}\beta=\text{sty.}x\,\text{doty.}a\ \ldots\ldots\ (11)$$

Strony zrównania (7) odejmując także i dodając do 1, a wypadki dzieląc przez siebie, znajdziemy:

$$\frac{\text{sty.}\alpha-\text{sty.}\beta}{\text{sty.}\alpha+\text{sty.}\beta}=\frac{\text{wst.}x-\text{wst.}x'}{\text{wst.}x+\text{wst.}x'}=\frac{\text{sty.}\frac{x-x'}{2}}{\text{sty.}\frac{x+x'}{2}}\quad §.\ 13\ (24)$$

A że $$\frac{\text{sty.}\alpha-\text{sty.}\beta}{\text{sty.}\alpha+\text{sty.}\beta}=\frac{\text{wst.}(\alpha-\beta)}{\text{wst.}(\alpha+\beta)}\quad §.\ 15\ (44),$$

zaś $$\text{sty.}\frac{x+x'}{2}=\text{sty.}\tfrac{1}{2}c,$$

zatém $$\text{sty.}\frac{x-x'}{2}=\frac{\text{wst.}(\alpha-\beta)}{\text{wst.}(\alpha+\beta)}\text{sty.}\tfrac{1}{2}c\ \ldots\ldots\ (12)$$

t. j. znając, albo téż mając dane kąty α i β, tudzież bok im przyległy c, znajdzie się z tego wzoru $\frac{x-x'}{2}$ a zatém x i x', następnie zaś z wzorów (11) otrzymamy a i b.

Postąpiwszy zupełnie podobnym poprzedzającemu sposobem ze zrównaniem (6), otrzymamy

$$\text{sty.}\frac{\xi-\xi'}{2}=\text{sty.}\frac{\alpha+\beta}{2}\text{sty.}\frac{\alpha-\beta}{2}\text{sty.}\tfrac{1}{2}\gamma\ \ldots\ (13)$$

To zrównanie, jak łatwo dostrzédz możemy, jest znowu kątem posiłkowym x' §. 60. Mając w trójkącie sferycznym dane trzy kąty, z ostatniego wzoru znajdziemy $\frac{\xi-\xi'}{2}$; a że $\frac{\xi+\xi'}{2}=\frac{1}{2}\gamma$, więc znajdziemy ξ i ξ'. Rozwiązawszy potém trójkąty prostokątne ACD i BCD, w których mamy po dwa kąty t. j. α, ξ' i β, ξ znane, znajdziemy

$$\text{dost.}\,b=\text{doty.}\xi'\,\text{doty.}\alpha\ \ldots\ \text{dost.}\,a=\text{doty.}\xi\,\text{doty.}\beta\ \ldots (14)$$

i trójkąt tym sposobem rozwiążemy.

Jak ze zrównania (7) przyszliśmy do (12), tak ze zrównania (8) przez też same przerobienia otrzymamy

$$\text{sty.}\frac{\xi-\xi'}{2}=\frac{\text{wst.}(a-b)}{\text{wst.}(a+b)}\,\text{doty.}\tfrac{1}{2}\gamma\ \ldots\ldots (15)$$

z którego znajdziemy $\frac{\xi-\xi'}{2}$, a następnie ξ i ξ', jeżeli w trójkącie sferycznym dane są dwa boki z kątem między niemi zawartym; poczém ze zrównania (14) znajdziemy α i β a trzeci bok c z (9).

Dwie ważności na $\text{sty.}\frac{x-x'}{2}$ z (10) i (12) porównane z sobą dają

$$\text{sty.}\frac{a+b}{2}\,\text{sty.}\frac{a-b}{2}=\frac{\text{wst.}(\alpha-\beta)}{\text{wst.}(\alpha+\beta)}\,\text{sty.}\tfrac{1}{2}c^2$$

$$=\frac{2\,\text{wst.}\frac{\alpha-\beta}{2}\,\text{dost.}\frac{\alpha-\beta}{2}}{2\,\text{wst.}\frac{\alpha+\beta}{2}\,\text{dost.}\frac{\alpha+\beta}{2}}\,\text{sty.}\tfrac{1}{2}c^2=\frac{\text{wst.}\frac{\alpha-\beta}{2}\,\text{dost.}\frac{\alpha-\beta}{2}}{\text{wst.}\frac{\alpha+\beta}{2}\,\text{dost.}\frac{\alpha+\beta}{2}}\,\text{sty.}\tfrac{1}{2}c^2\ \ldots (16)$$

Ze zrównania (9) mamy $\frac{\text{wst.}\,a}{\text{wst.}\,b}=\frac{\text{wst.}\,\alpha}{\text{wst.}\,\beta}$, skąd jak wyżéj,

$$\frac{\text{wst.}\,a-\text{wst.}\,b}{\text{wst.}\,a+\text{wst.}\,b}=\frac{\text{wst.}\,\alpha-\text{wst.}\,\beta}{\text{wst.}\,\alpha+\text{wst.}\,\beta}$$

albo, stósownie do §. 13 (24), . . $\dfrac{\text{sty.}\frac{a-b}{2}}{\text{sty.}\frac{a+b}{2}}=\dfrac{\text{sty.}\frac{\alpha-\beta}{2}}{\text{sty.}\frac{\alpha+\beta}{2}}$

Przez to ostatnie zrównanie pomnożywszy (16) a potém podzieliwszy i z wypadków wyciągając pierwiastek kwadratowy, otrzymamy

$$\text{sty.}\frac{a-b}{2}=\frac{\text{wst.}\frac{\alpha-\beta}{2}}{\text{wst.}\frac{\alpha+\beta}{2}}\text{sty.}\tfrac{1}{2}c \quad \text{tudzież st.}\frac{a+b}{2}=\frac{\text{dost.}\frac{\alpha-\beta}{2}}{\text{dost.}\frac{\alpha+\beta}{2}}\text{sty.}\tfrac{1}{2}c$$

t. j. otrzymaliśmy tu zupełnie inną drogą dwie Anologije Nepera §. 61 z wzorów Gaussa wyprowadzone. Dla otrzymania dwóch drugich, dosyć jest połączyć w sposób jak poprzednio z równania (13) i (15), lub téż do dwóch znalezionych stósując własności trójkąta biegunowego.

§. 68.

Jeżeli trójkąt sferyczny jest równoramienny, w którym kąty β i γ są równe a następnie $b=c$, kąt zaś α jest kątem w wiérzchołku trójkąta, a bok a podstawą, wtedy łuk z wierzchołka kąta α prostopadły do podstawy, dzieli ten trójkąt na dwa prostokątne symmetryczne §. 274 *uwaga* 2, z których biorąc po trzy elementa z cztérech α, β, a, b, otrzymane poprzednio zrównania dają nam jeden z boków, gdy dwa inne są dane. A tak, jeżeli z cztérech elementów α, a, b lub c i β lub γ dwa którekolwiek są dane, znajdą się inne ze zrównań

$$\text{wst.}\tfrac{1}{2}a=\text{wst.}\tfrac{1}{2}\alpha\,\text{wst.}b \;\ldots\ldots\; \text{dost.}b=\text{doty.}\beta\,\text{doty.}\tfrac{1}{2}\alpha$$

$$\text{sty.}\tfrac{1}{2}a=\text{sty.}b\,\text{dost}\,\beta \;\ldots\ldots\; \text{dost.}\tfrac{1}{2}\alpha=\text{dost.}\tfrac{1}{2}a\,\text{wst.}\beta$$

które łatwo otrzymać z wzorów §. 52 stósując takowe do obecnego przypadku.

Uwagi nad rozwiązaniem trójkątów sferycznych ukośnokątnych w każdym przypadku.

§. 69.

Podawszy w poprzedzających §§. różne wzory na rozwiązanie trójkątów sferycznych ukośnokątnych, zostaje nam jeszcze poczynić niektóre uwagi chroniące nas od popełnienia błędów tu tak łatwo wydarzyć się mogących. W tym celu powtórzymy tu jeszcze wszystkie przypadki, czyniąc nad każdym stósowne postrzeżenia.

I. Dla znalezienia kątów z trzech danych boków, mamy wzory w §. 57 otrzymane, rozwiązujące trójkąt bez żadnéj wątpliwości. Jeżeli w tym przypadku wszystkich trzech kątów potrzebujemy, dogodniejszy jest wtedy nieco wzór na wstawę całkowitego kąta w tymże samym §. podany. W tym atoli razie pozostaje zawsze do rozstrzygnienia czyli znaleziony kąt jest ostrym lub rozwartym. Tę wątpliwość dostatecznie rozstrzyga zrównanie (1). Znalazłszy bowiem np. wst. α i chcąc wiedzieć do jakiego kąta należy, bierzemy pod uwagę zrównanie

$$\text{dost.}\,\alpha = \frac{\text{dost.}\,a - \text{dost.}\,b\,\text{dost.}\,c}{\text{wst.}\,b\,\text{wst.}\,c}$$

i mówimy: jeżeli dost. $a >$ dost. b dost. c, dost. α jest *dodatna* a kąt $\alpha < 90^\circ$ czyli ostry; przeciwnie, jeżeli

$$\text{dost.}\,a < \text{dost.}\,b\,\text{dost.}\,c,$$

dost. α jest *odjemna* a kąt $\alpha > 90^\circ$ czyli rozwarty. Rachując kąty według wzorów na wstawę połowy kąta, wolni jesteśmy od tego roztrząsania.

II. Z danych trzech kątów α, β, γ szukając boków, mamy na ten cel wzory w §. 64 podane, rozwiązujące dokładnie trójkąt. Jednę tu tylko należy zrobić uwagę a tę następującą. W zrównaniu

$$\text{wst.}\,\tfrac{1}{2}a = \sqrt{\frac{-\text{dost.}\,\frac{\alpha+\beta+\gamma}{2}\,\text{dost.}\,\frac{\beta+\gamma-\alpha}{2}}{\text{wst.}\,\beta\,\text{wst.}\,\gamma}}$$

zdaje się na piérwszy rzut oka, że wst. $\frac{1}{2}a$ jest urojona, zastanowiwszy się atoli bliżéj i przypomniawszy sobie to co w §. 273 *Stereom.* powiedziano, że w trójkącie sferycznym summa trzech jego kątów jest zawsze większa niż 2.90° a mniejsza niż 6.90° t. j.

że $\quad \alpha+\beta+\gamma > 2.90^\circ \quad$ a $\quad \alpha+\beta+\gamma < 6.90^\circ$

skąd $\quad \dfrac{\alpha+\beta+\gamma}{2} > 90^\circ \quad$ a $\quad \dfrac{\alpha+\beta+\gamma}{2} < 3.90^\circ$

dostrzeżemy zaraz, że w obu przypadkach dost. $\frac{\alpha+\beta+\gamma}{2}$ jest odjemna. Potém z §. 272 *Stereom.* wiadomo, że $b+c>a$, albo używając trójkąta biegunowego,

że $$180^\circ - \beta + 180^\circ - \gamma > 180^\circ - \alpha$$

czyli $\beta + \gamma - \alpha < 180^\circ$, a następnie, że $\frac{\beta+\gamma-\alpha}{2} < 90^\circ$, wniesiemy, że iloczyn w liczniku pod znakiem pierwiastkowym jest dodatny, a wst. $\frac{1}{2}a$ jest rzetelną.

III. Mając dane w trójkącie sferycznym dwa boki b, c z kątem między niemi zawartym α, na rozwiązanie trójkąta mamy wzory w §. 58 znalezione t. j. wzory

$$\text{sty.}\, x = \text{sty.}\, b\, \text{dost.}\, \alpha \quad \text{i} \quad \text{dost.}\, a = \frac{\text{dost.}\, b\, \text{dost.}\, (c-x)}{\text{dost.}\, x}$$

albo wzory §. 65 przez rozebranie trójkąta na dwa prostokątne, albo nareszcie najwygodniéj Analogije Nepera, z których dwa szukane kąty β i γ na raz znajdziemy z wzorów

$$\text{sty.}\, \frac{\beta+\gamma}{2} = \frac{\text{dost.}\, \frac{b-c}{2}}{\text{dost.}\, \frac{b+c}{2}} \text{doty.}\, \tfrac{1}{2}\alpha \quad \text{i} \quad \text{sty.}\frac{\beta-\gamma}{2} = \frac{\text{wst.}\, \frac{b-c}{2}}{\text{wst.}\, \frac{b+c}{2}} \text{doty.}\, \tfrac{1}{2}\alpha$$

a potém $$\text{wst.}\, a = \frac{\text{wst.}\, b\, \text{wst.}\, \alpha}{\text{wst.}\, \beta}$$

Dla znalezienia boku a, używają niektórzy autorowie wzoru przez nieśmiertelnego Laplasa (Laplace) podanego t. j.

$$\text{wst.}\, x^2 = \text{wst.}\, b\, \text{wst.}\, c\, \text{dost.}\, \tfrac{1}{2}\alpha^2$$

a potém $$\text{wst.}\, \tfrac{1}{2}a^2 = \text{wst.}\left(\frac{b+c}{2} + x\right) \text{wst.}\left(\frac{b+c}{2} - x\right)$$

Ten wzór otrzymuje się z (1) kładąc dost. $a = 1 - 2\text{wst.}\, \frac{1}{2}a^2$ i dost. $\alpha = 2\,\text{dost.}\, \frac{1}{2}\alpha^2 - 1$. Położywszy bowiem te ważności w rzeczoném zrównaniu, znajdziemy

$$2\text{wst.}\, \tfrac{1}{2}a^2 = \{1 - \text{dost.}\, (b+c)\} - 2\text{wst.}\, b\, \text{wst.}\, c\, \text{dost.}\, \tfrac{1}{2}\alpha^2$$

$$= 2\left(\text{wst.}\, \frac{b+c}{2}\right)^2 - 2\text{wst.}\, b\, \text{wst.}\, c\, \text{dost.}\, \tfrac{1}{2}\alpha^2$$

albo $$\text{wst.}\, \tfrac{1}{2}a^2 = \left(\text{wst.}\, \frac{b+c}{2}\right)^2 - \text{wst.}\, b\, \text{wst.}\, c\, \text{dost.}\, \tfrac{1}{2}\alpha^2.$$

Położywszy wst. b wst. c dost. $\frac{1}{2}\alpha^2 = \text{wst.}\, x^2$ będzie

$$\text{wst}\, \tfrac{1}{2}a^2 = \left(\text{wst.}\, \frac{b+c}{2}\right)^2 - \text{wst.}\, x^2 = \text{wst.}\left(\frac{b+c}{2} + x\right) \text{wst.}\left(\frac{b+c}{2} - x\right)$$

a to jest wzór Laplasa.

W tém przerobieniu zrównania (1) widzimy wprowadzoną wstawę kąta posiłkowego x dlatego, iż iloczyn

$$\text{wst.}\, b\, \text{wst.}\, c\, \text{dost.}\, \tfrac{1}{2}\alpha^2,$$

jedności przewyższać nie może, gdyż każdy z czynników jest mniejszy od jedności.

IV. Z danych dwóch kątów, α, β i przyległego im boku c, znaléść resztę elementów.

Dwa boki a i b znajdzie się najłatwiéj z Analogij Nepera, kąt zaś γ ze zrównania

$$\text{wst.}\gamma = \frac{\text{wst.}\, c\, \text{wst.}\, \alpha}{\text{wst.}\, a} = \frac{\text{wst.}\, c\, \text{wst.}\, \beta}{\text{wst.}\, b};$$

albo z wzorów §. 58

$$\text{sty.}\, x = \text{sty.}\, \beta\, \text{dost.}\, c \quad \text{i} \quad \text{sty.}\, b = \frac{\text{sty.}\, c\, \text{dost.}\, x}{\text{dost.}\, (\alpha - x)}$$

a nareszcie bok a z wzoru $\text{wst.}\, a = \dfrac{\text{wst.}\, \alpha\ \text{wst.}\, b}{\text{wst.}\, \beta}$.

Znalazłszy wst.γ i chcąc się przekonać do jakiego kąta należy, potrzeba się poradzić zrównania

$$\text{dost.}\gamma = \frac{\text{dost.}\, c - \text{dost.}\, a\, \text{dost.}\, b}{\text{wst.}\, a\, \text{wst.}\, b}$$

w sposób pod I. wskazany. Toż samo rozumié się o boku a, gdy otrzymamy jako wstawę.

Można téż a, b, γ znaléść przez rozebranie trójkąta na dwa prostokątne, spuszczając z wiérzchołka kąta α lub β łuk prostopadły do boku przeciwległego.

V. Z dwóch danych boków a, b i kąta α jednemu z nich przeciwległego, rozwiązać trójkąt.

Kąt β znajdzie się ze zrównania $\text{wst.}\, \beta = \dfrac{\text{wst.}\, b\, \text{wst.}\, \alpha}{\text{wst.}\, a}$.

Kąt γ ze zrównania $\text{sty.}\, x = \text{sty.}\, \alpha\, \text{dost.}\, b$

$$\text{i} \quad \text{wst.}\, (\gamma + x) = \frac{\text{sty.}\, b\, \text{wst.}\, x}{\text{sty.}\, a} \quad \text{§. 59.}$$

Bok c z wzorów §. 64 albo też z wzorów

$$\text{sty.}\, x = \text{sty.}\, b\, \text{dost.}\, \alpha \quad \text{i} \quad \text{dost.}\, (c - x) = \frac{\text{dost.}\, a\, \text{dost.}\, x}{\text{dost.}\, b} \quad \text{§. 58.}$$

Ten przypadek odpowiada podobnemu w Trygonometryi prostokréślnéj §. 29 *przyp.* 2, dający rozwiązanie wątpliwe z tą różnicą, że ta wątpliwość jest tu więcéj niż tam uwikłaną. Dane elementa a, b, α mogą rzeczywiście być takie, że im dwa różne trójkąty zadość czynią, a dlatego ważną jest rzeczą zastanowić się nieco dłużéj nad tym przypadkiem.

Ponieważ ze zrównania $\text{wst.}\,\beta = \dfrac{\text{wst.}\,b\;\text{wst.}\,\alpha}{\text{wst.}\,a}$ dwie ważności być mogą na β t. j. albo $\beta < 90^\circ$, albo też $\beta > 90^\circ$, przeto w takim razie z tychże samych elementów dwa różne trójkąty wystawić można, bo i z Analogii Nepera mamy

$$\text{sty.}\,\tfrac{1}{2}c = \frac{\text{dost.}\,\frac{\alpha+\beta}{2}}{\text{dost.}\,\frac{\alpha-\beta}{2}}\,\text{sty.}\,\frac{a+b}{2}$$

t. j. także dwie ważności na c, gdy β ma także dwie. Pamiętając atoli, że w trójkącie sferycznym bok większy leży naprzeciwko większego kąta, będziemy mogli z pewnością rozstrzygnąć czyli kąt β jest ostry lub rozwarty. A tak

1°. Jeżeli $\alpha < 90^0$ tudzież $a > b$ a następnie $\alpha > \beta$, musi téż być $\beta < 90^0$, a w tym razie trójkąt będzie zupełnie *oznaczonym*.

2°. Jeżeli $\alpha > 90^\circ$, a $a < b$, przezco $\alpha < \beta$, tém téż bardziéj będzie $\beta > 90^\circ$ a zatém kąt β *oznaczony*.

3°. Jeżeli $\alpha < 90^\circ$ i $a < b$, a następnie $\alpha < \beta$, będzie téż $\beta \gtreqless 90^0$ t. j. kąt β *nieoznaczony*.

4°. Jeżeli $\alpha > 90^\circ$ i $a > b$, dlaczego téż $\alpha > \beta$, będzie téż $\beta \gtreqless 90^0$, czyli kąt β *nieoznaczony*.

Tym sposobem rozróżnić możemy przypadki pewne od wątpliwych.

§. 70.

W §. 271 *Stereom.* dowiedliśmy, że żaden bok trójkąta sferycznego nie może być większy od 180°, z przytoczonéj przeto w poprzedzającym §. Analogii Nepera

$$\text{sty.}\,\tfrac{1}{2}c = \frac{\text{dost.}\,\frac{\alpha+\beta}{2}}{\text{dost.}\,\frac{\alpha-\beta}{2}}\,\text{sty.}\,\frac{a+b}{2}$$

sty. $\frac{1}{2}c$ wypadnie zawsze dodatna. A ponieważ $\frac{\alpha-\beta}{2}<90^\circ$, zatém $\alpha+\beta$ i $a+b$ muszą być jednegoż gatunku, bo

$$\text{dost.}\ \frac{\alpha+\beta}{2}\quad \text{i}\quad \text{sty.}\ \frac{a+b}{2}$$

mieć muszą jednakowe znaki, zatém jeżeli $\frac{\alpha+\beta}{2}>180^\circ$, równie też $\frac{a+b}{2}>180^\circ$ i przeciwnie. Z tego powodu w dwóch piérwszych przypadkach poprzedzającego §., można jeszcze oznaczyć czyli b jest większe lub mniejsze od 90°.

Bo kiedy $\alpha<90^\circ$ i $\beta<90^\circ$, z pewnością wiemy, że $\alpha+\beta<180^\circ$, tudzież, że $a+b<180^\circ$. A ponieważ w tymże samym przypadku przypuszczamy, że $a>b$, przeto $b<180^\circ-b$ czyli $b<90^\circ$.

W drugim przypadku, gdzie $a<b$, kładziemy $\alpha>90^\circ$ i otrzymujemy $\beta>90^\circ$, przeto $\alpha+\beta>180^\circ$ a dlatego $a+b>180^\circ$, więc następnie $b>180^\circ-b$ czyli $b>90^\circ$.

Oprócz tego znaléść możemy warunki pod któremi dwa drugie przypadki mogą być oznaczone.

Jeżeli bowiem w 3° $a+b>180^\circ$ a następnie $\alpha+\beta>180^\circ$, ponieważ w tym przypadku przypuszczaliśmy $a<b$, będzie też $b>180^\circ-b$ czyli $b>90^\circ$. Podobnie ponieważ $\alpha<90^\circ$, będzie też $\beta>90^\circ$ t. j. kąt β będzie *oznaczony*.

Jeżeli zaś $a+b<180^\circ$, a z tego powodu i $\alpha+\beta<180^\circ$, ponieważ $a<b$ a $\alpha<90^\circ$, będzie też $b \gtrless 90^\circ$ i $\beta \gtrless 90^\circ$ t. j. kąt β *nieoznaczony*.

Tym sposobem postępuje się także w wątpliwym przypadku pod IV. przywiedzionym, skoro chcemy stósownie do danych elementów i innych okoliczności rozwiązać trójkąt.

Zbiérając wszystkie w tym względzie uwagi pod jeden widok, znajdziemy ogólnie, że

$$\left.\begin{array}{ll} 1^\circ \text{ jeżeli} & \alpha<90^\circ,\ b<90^\circ \text{ i } a>b \\ 2^\circ \ \ldots & \alpha>90^\circ,\ b>90^\circ \text{ i } a<b \\ 3^\circ \ \ldots & \alpha<90^\circ,\ b>90^\circ \text{ i } a+b>180^\circ \\ 4^\circ \ \ldots & \alpha>90^\circ,\ b<90^\circ \text{ i } a+b<180^\circ \end{array}\right\}$$ zawsze otrzymujemy jedno tylko rozwiązanie, czyli wszystkie te przypadki są *oznaczone*.

Jeżeli zaś

$$\left.\begin{array}{l} 1^\circ\ \alpha<90^\circ,\ b<90^\circ \text{ i } a<b \\ 2^\circ\ \alpha>90^\circ,\ b>90^\circ \text{ i } a<b \\ 3^\circ\ \alpha<90^\circ,\ b>90^\circ \text{ i } a+b<180^\circ \\ 4^\circ\ \alpha>90^\circ,\ b<90^\circ \text{ i } a+b>180^\circ \end{array}\right\} \begin{array}{c}\text{otrzymamy zawsze dwa roz-} \\ \text{wiązania czyli przypadki} \\ \textit{nieoznaczone.}\end{array}$$

Do przypadków oznaczonych policzyć także potrzeba, gdy $\alpha=90^\circ$, albo $a=b$, albo $a+b=180^\circ$. Lecz jeżeli $b=90^\circ$, natenczas będzie znowu przypadek nieoznaczony.

Pozostaje nam jeszcze jeden przypadek do roztrząśnienia, a mianowicie

VI. Z danych dwóch kątów α, β i boku a przeciwległego jednemu z nich rozwiązać trójkąt. Tu napotykamy zupełnie też same niepewności rozwiązania jak w poprzedzającym przypadku z tą różnicą, iż co tam mówiliśmy o kątach, tu stósować należy do boków. Dla otrzymania zaś pewnych skazówek kiedy jest jedno, a kiedy dwa rozwiązania tego zadania, tudzież warunków poprzedzającym podobnych, dosyć będzie do przypadku poprzedzającego zastósować własności trójkąta biegunowego. Na téj drodze znajdziemy, że

$$\left.\begin{array}{l} 1^0 \text{ jeżeli } a>90^0,\ \beta>90^\circ \text{ i } \alpha<\beta \\ 2^\circ\ \ldots\ a>90^0,\ \beta<90^0 \text{ i } \alpha+\beta<180^\circ \\ 3^0\ \ldots\ a<90^0,\ \beta>90^0 \text{ i } \alpha+\beta>180^0 \\ 4^0\ \ldots\ a<90^\circ,\ \beta<90^0 \text{ i } \alpha>\beta \end{array}\right\} \begin{array}{c}\text{zawsze będzie jedno tyl-} \\ \text{ko rozwiązanie, t. j.} \\ \text{wszystkie te przypadki} \\ \text{są } \textit{oznaczone.}\end{array}$$

Jeżeli zaś

$$\left.\begin{array}{l} 1^0\ \ldots\ a>90^0,\ \beta>90^\circ \text{ i } \alpha>\beta \\ 2^\circ\ \ldots\ a>90^0,\ \beta<90^\circ \text{ i } \alpha+\beta>180^0 \\ 3^\circ\ \ldots\ a<90^\circ,\ \beta>90^0 \text{ i } \alpha+\beta<180^\circ \\ 4^\circ\ \ldots\ a<90^0,\ \beta<90^0 \text{ i } \alpha<\beta \end{array}\right\} \begin{array}{c}\text{w każdym z tych przy-} \\ \text{padków dwa będą roz-} \\ \text{wiązania a te przypadki} \\ \text{są } \textit{nieoznaczone.}\end{array}$$

Oprócz tego, podobnie jak w poprzedzającym, jeżeli $a=90^0$, lub $\alpha=\beta$ lub $\alpha+\beta=180$, otrzymamy jedno, zaś dla $\beta=90^0$ dwa rozwiązania.

Ogólna uwaga. Pamiętając tylko na dwie prawdy, 1^0 że *w trójkącie sferycznym summa trzech kątów zawsze jest większa niż 180^0 a mniejsza niż 3.180^0*, tudzież 2°, że *naprzeciwko boku większego leży kąt większy i przeciwnie*, oględny rachmistrz dostrzeże, bez względu na powyższe warunki, czyli podane zadanie ma dwa lub jedno tylko rozwiązanie. Używając wzorów §. 65 i następnych, największą dawać potrzeba baczność na znaki kątów x' i ξ'.

W następującéj tablicy zamieszczam wszystkie elementa dwóch trójkątów sferycznych mających służyć uczącym się za kontrollę rachunku; biorąc albowiem trzy którekolwiek i z nich rozwiązując trójkąt, na wypadek otrzymać powinniśmy inne tak jak w tablicy są dane.

Elementa trójkąta sferycznego ukośnokątnego i logarytmy linij trygonometrycznych potrzebnych przy jego rozwiązaniu.

Elementa	*log.* wst.	*log.* dost.	*log.* sty.
$a =$ 63°39′57″·8	9·9524165	9·6469939	0·3054227
$b =$ 75 0 51·3	9·9849727	9·4125929	0·5723798
$c =$ 41 9 46·0	9·8183582	9·8767042	9·9416540
$\alpha =$ 66 57 3·6	9·9638682	9·5927520	0·3711162
$\beta =$ 97 20 31·4	9·9964244	9·1065091−	0·8899183−
$\gamma =$ 42 30 55·0	9·8298098	9·8675247	9·9622849
$x =$ −14 28 35·9	9·3979142−	9·9859873	9·4119270−
$x' =$ 55 38 21·9	9·9167182	9·7515863	0·1651317
$\xi =$ −16 11 47·5	9·4454990−	9·9824117	9·4630873−
$\xi' =$ 58 42 42·4	9·9317454	9·7154547	0·2162908

Elementa innego trójkąta także ukośnokątnego.

Elementa	*log.* wst.	*log.* dost.	*log.* sty.
$a =$ 76°35′36″·00	9·9880008	9·3652279	0·6227729
$b =$ 50 10 30·00	9·8853636	9·8064817	0·0788819
$c =$ 40 0 10·00	9·8080926	9·8842363	9·9238563
$\alpha =$ 121 36 19·81	9·9302747	9·7193874−	0·2108873−
$\beta =$ 42 15 13·66	9·8276379	9·8693336	9·9583043
$\gamma =$ 34 15 2·76	9·7503664	9·9172860	9·8330804
$x =$ 72 9 0·00	9·9785741	9·4864674	0·4921067
$x' =$ −32 8 50·00	9·7259905−	9·9277212	9·7982693−
$\xi =$ 78 6 19·00	9·9905733	9·3141076	0·6764657
$\xi' =$ −43 51 16·20	9·8406263−	9·2579964	9·9826249−

Lubo w podanych wzorach na rozwiązanie trójkątów sferycznych ukośnokątnych bardzo często wypada brać logarytm dotycznéj kąta lub boku, wszelako téj funkcyi nie podaliśmy w obecnéj tablicy z tego powodu, że ponieważ

$$\text{doty.}\, x = \frac{1}{\text{sty.}\, x},$$

zatém wziąwszy tylko dopełnienie dziesiętne logarytmu stycznéj, mieć będziemy logarytm dotycznéj skoro go potrzebować będziemy.

Przykład 1. Niech będą dane $\alpha = 66^\circ 57' 3''\cdot 6$, $b = 75^\circ 0' 51''\cdot 3$, $c = 41^\circ 9' 46''\cdot 0$ rozwiązać trójkąt

$log.\,\text{sty.}\, b = 0\cdot 5723798$	$log.\,\text{dost.}\, b = 9\cdot 4125929$
$log.\,\text{dost.}\, \alpha = 9\cdot 5927520$	$log.\,\text{dost.}\, x = 9\cdot 7515863$
$log.\,\text{sty.}\, x' = 0\cdot 1651317$	$dpł.log.\,\text{dost.}\, x' = 0\cdot 0140127$
$x' = 55^\circ 38' 21''\cdot 9$	$log.\,\text{dost.}\, a = 9\cdot 6469939$
$c = 41 \quad 9 \; 46\cdot 0$	$a = 63^\circ 39' 57''\cdot 8$
$x = -14 \; 28 \; 35\cdot 9$	
$log.\,\text{sty.}\, \alpha = 0\cdot 3711162$	$log.\,\text{wst.}\, c = 9\cdot 8183582$
$log.\,\text{wst.}\, x' = 9\cdot 9167182$	$log.\,\text{wst.}\, \alpha = 9\cdot 9638682$
$dpł.log.\,\text{wst.}\, x = 0\cdot 6020858-$	$dpł.log.\,\text{wst.}\, a = 0\cdot 0475835$
$log.\,\text{sty.}\, \beta = 0\cdot 8899202-$	$log.\,\text{wst.}\, \gamma = 9\cdot 8298098$
$\beta = -82^\circ 39' 28''\cdot 6$	$\gamma = 42^\circ 30' 55''\cdot 0$
czyli $\beta = 97 \; 20 \; 31\cdot 4$	

Albo szukajmy naprzód kątów β i γ za pomocą Analogij Nepera, a mieć będziemy

$log.\text{dost.}\frac{b-c}{2} = 9\cdot 9807680$	$log.\text{wst.}\frac{b-c}{2} = 9\cdot 4640897$
$log.\text{doty.}\,\frac{1}{2}\alpha = 0\cdot 1796207$	$0\cdot 1796207$
$dpł.log.\,\text{dost.}\frac{b+c}{2} = 0\cdot 2768659$ . .	$dpł.log.\text{wst.}\frac{b+c}{2} = 0\cdot 0711611$
$log.\,\text{sty.}\frac{\beta+\gamma}{2} = 0\cdot 4372546$	$log.\text{sty.}\frac{\beta-\gamma}{2} = 9\cdot 7148715$
$\frac{\beta+\gamma}{2} = 69^\circ 55' 43''\cdot 2$	$\frac{\beta-\gamma}{2} = 27^\circ 24' 48''\cdot 1$
zatém $\beta = 97 \; 20 \; 31\cdot 3$	$\gamma = 42 \; 30 \; 55\cdot 1$

Szukajmy nareszcie a za pomocą wzoru Laplasa §. 69 III. tedy mamy

$$\begin{array}{rr} log.\text{wst.}b = 9{\cdot}9849727 & \frac{b+c}{2} = 58^0\ 5'\ 18''{\cdot}6 \\ log.\text{wst.}c = 9{\cdot}8183582 & x = 41\ 41\ 27\ {\cdot}\ 4 \\ log.\text{dost.}\tfrac{1}{2}a^2 = 9{\cdot}8424588 & \\ \hline 2)\quad 9{\cdot}6457897 & \frac{b+c}{2}+x = 99\ 46\ 46\ {\cdot}\ 0 \\ log.\text{wst.}x = 9{\cdot}8228949 & \\ x = 41^0 41' 27''{\cdot}4 & \frac{b+c}{2}-x = 16\ 23\ 51\ {\cdot}\ 2 \end{array}$$

$$log.\ \text{wst.}\left(\frac{b+c}{2}+x\right) = 9{\cdot}9936429$$

$$log.\ \text{wst.}\left(\frac{b+c}{2}-x\right) = 9{\cdot}4507124$$

$$2)\quad 9{\cdot}4443553$$

$$log.\ \text{wst.}\ \tfrac{1}{2}a = 9{\cdot}7221776$$

$$\tfrac{1}{2}a = 31^0 49' 58''{\cdot}9$$

więc $a = 63\ 39\ 57\ {\cdot}\ 8$

Przykład 2. Dane są: $\alpha = 121^0 36' 19''{\cdot}81$,

$\beta = 42^0 15' 13''{\cdot}66$, $c = 40^0 0' 10''{\cdot}00$

rozwiązać trójkąt czyli znaléść resztę jego elementów.

Szukajmy naprzód boków a i b zapomocą Analogij Nepera, tedy

$$\begin{array}{rr} log.\text{dost.}\frac{\alpha-\beta}{2} = 9{\cdot}8863038 \ \ldots\ldots & log.\text{wst.}\frac{\alpha-\beta}{2} = 9{\cdot}8051224 \\ log.\text{sty.}\tfrac{1}{2}c = 9{\cdot}5610986 \ \ldots\ldots & 9{\cdot}5610986 \\ dpł.log.\ \text{dost.}\frac{\alpha+\beta}{2} = 0{\cdot}8526657 \ \ldots & dpł.log.\text{wst.}\frac{\alpha+\beta}{2} = 0{\cdot}0043225 \\ \hline log.\text{sty.}\frac{a+b}{2} = 0{\cdot}3000681 & log.\text{sty.}\frac{a-b}{2} = 9{\cdot}3705435 \\ \frac{a+b}{2} = 63^0 23' 2''{\cdot}95 & \frac{a-b}{2} = 13^0 12' 32''{\cdot}94 \end{array}$$

zatém $a = 76\ 35\ 35\ {\cdot}\ 89$ $\qquad b = 50\ 10\ 30\ {\cdot}\ 01$

Kąt γ znajdzie się potém ze zrównania

$$\text{wst.}\gamma = \frac{\text{wst.}\ c\ \text{wst.}\ \alpha}{\text{wst.}\ a} = \frac{\text{wst.}\ c\ \text{wst.}\ \beta}{\text{wst.}\ b}.$$

Albo z wzorów (12) i (11) §. 67

$$\begin{array}{rl} log.\text{wst.}(\alpha-\beta) & = 9{\cdot}9924563 \\ dpl.log.\text{wst.}(\alpha+\beta) & = 0{\cdot}5559598 \\ log.\text{sty.}\tfrac{1}{2}c & = 9{\cdot}5610986 \\ \hline log.\text{sty.}\dfrac{x-x'}{2} & = 0{\cdot}1095147 \end{array} \qquad \begin{array}{rl} \dfrac{x-x'}{2} & = 52^{\circ}8'55''{\cdot}26 \\ \tfrac{1}{2}c & = 20\ \ 0\ \ 5{\cdot}00 \\ \hline x & = 72\ \ 9\ \ 0{\cdot}26 \\ x' & = -32\ \ 8\ \ 50{\cdot}26 \end{array}$$

Po znalezieniu odcinków x i x' mamy według wzorów (11) §. 67

$$\begin{array}{rl} log.\text{dost.}\beta & = 9{\cdot}8693336 \\ dpl.log.\text{sty.}x & = 9{\cdot}5078914 \\ \hline log.\text{doty.}a & = 9{\cdot}3772250 \\ a & = 13^{\circ}24'23''{\cdot}77 \end{array} \qquad \begin{array}{rl} log.\text{dost.}\alpha & = 9{\cdot}7193874- \\ dpl.log.\text{sty.}x' & = 0{\cdot}2017295- \\ \hline log.\text{doty.}b & = 9{\cdot}9211169 \\ b & = 50^{\circ}10'30''{\cdot}30 \end{array}$$

Ale ponieważ $\alpha > \beta$, więc też być powinno $a > b$. A kiedy doty. a jest dodatna, więc wst. a i dost. a mają jednakowe znaki; to nam pokazuje, że zamiast znalezionéj ważności boku a wziąść należy jego dopełnienie, będzie zatém

$$a = 90^{\circ} - 13^{\circ}24'23''{\cdot}77 = 76^{\circ}35'36''{\cdot}23$$

Kąt γ znajdzie się znowu ze zrównania jak wyżéj.

Albo: z wiérzchołka kąta α poprowadziwszy łuk do a prostopadły, będzie

$$\text{doty.}\,\xi' = \text{sty.}\,\beta\,\text{dost.}\,c,\quad \alpha = \xi + \xi',$$

$$\text{dost.}\,\gamma = \frac{\text{dost.}\,\beta\ \text{wst.}\,\xi}{\text{wst.}\,\xi'},\quad \text{sty.}\,b = \frac{\text{sty.}\,c\ \text{dost.}\,\xi'}{\text{dost.}\,\xi}$$

a nareszcie $\quad \text{wst.}\,a = \dfrac{\text{wst.}\,b\ \text{wst.}\,\alpha}{\text{wst.}\,\beta}$, przeto

$$\begin{array}{rl} log.\text{sty.}\beta & = 9{\cdot}9583043 \\ log.\text{dost.}c & = 9{\cdot}8842363 \\ \hline log.\text{doty.}\xi' & = 9{\cdot}8425406 \\ \xi' & = 55^{\circ}\ 9'58''{\cdot}78 \\ \alpha & = 121\ \ 36\ \ 19{\cdot}81 \\ \hline \xi & = 66\ \ 26\ \ 21{\cdot}03 \end{array} \qquad \begin{array}{rl} log.\text{dost.}\beta & = 9{\cdot}8693336 \\ log.\text{wst.}\xi & = 9{\cdot}9621970 \\ dpl.log.\text{wst.}\xi' & = 0{\cdot}0857554 \\ \hline log.\text{dost.}\gamma & = 9{\cdot}9172860 \\ \gamma & = 34^{\circ}15'2''{\cdot}79 \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} log.\text{sty.}c & = 9{\cdot}7567852 \\ log.\text{dost.}\xi' & = 9{\cdot}9238563 \\ dpl.log.\text{dost.}\xi & = 0{\cdot}3982416 \\ \hline log.\text{sty.}b & = 0{\cdot}0788831 \\ b & = 50^{\circ}10'30''{\cdot}30 \end{array} \qquad \begin{array}{rl} log.\text{wst.}b & = 9{\cdot}8853641 \\ log.\text{wst}\alpha & = 9{\cdot}9302747 \\ dpl.log.\text{wst.}\beta & = 0{\cdot}1723621 \\ \hline log.\text{wst.}a & = 9{\cdot}9880009 \\ a & = 76^{\circ}35'36''{\cdot}30 \end{array}$$

Przykład 3. Niech w trójkącie sferycznym dane będą

$a = 76°35'36''·00$, $b = 50°10'30''·00$

$\alpha = 121°36'19''·81$ rozwiązać trójkąt.

Kąt β znajdzie się ze zrównania

$$\text{wst.}\,\beta = \frac{\text{wst.}\,b\ \text{wst.}\,\alpha}{\text{wst.}\,a}$$

t. j.

$$\begin{aligned} log.\,\text{wst.}\,b &= 9·8853641 \\ log.\,\text{wst.}\,\alpha &= 9·9302747 \\ dpl.\,log.\,\text{wst.}\,a &= 0·0119992 \\ \hline log.\,\text{wst.}\,\beta &= 9·8276380 \\ \beta &= 42°15'13''·66 \end{aligned}$$

albo $\beta = 137\ 44\ 46·34$

Jakże więc rozstrzygnąć, który z tych kątów należy do naszego zadania? Że bowiem nasze zadanie znajduje się w przypadku oznaczonym, dowodzi to warunek, że $\alpha > 90°$, $b < 90°$ a $a + b < 180°$. Ponieważ $a > b$, być téż musi $\alpha > \beta$; ale druga ważność β jest większa niż α, zatém piérwsza odpowiada naszemu zadaniu i z pewnością powiedzieć możemy, że $\beta = 42°15'13''66$. Tak ustaliwszy ważność β, znajdziemy kąt γ ze zrównań

$$\text{sty.}\,x = \text{sty.}\,\alpha\ \text{dost.}\,b \quad \text{i} \quad \text{wst.}(\gamma + x) = \frac{\text{sty.}\,b\ \text{wst.}\,x}{\text{sty.}\,a}$$

Jakoż

$$\begin{aligned} log.\text{sty.}\,\alpha &= 0·2108873- \\ log.\text{dost.}\,b &= 9·8064817 \\ \hline log.\text{sty.}\,x &= 0·0173690- \\ x &= -46°8'43''·53 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} log.\text{sty.}\,b &= 0·0788819 \\ log.\text{wst.}\,x &= 9·8579959- \\ dpl.log.\text{sty.}\,a &= 9·3772271 \\ \hline log.\text{wst.}(\gamma + x) &= 9·3141049- \\ \gamma + x &= -11°53'40''·74 \\ x &= -46\ \ 8\ 43·53 \\ \hline \gamma &= 34\ 15\ \ 2·79 \end{aligned}$$

Nareszcie bok c znajdziemy z wzorów

$$\text{sty.}\,x = \text{sty.}\,b\ \text{dost.}\,\alpha \quad \text{i} \quad \text{dost.}(c - x) = \frac{\text{dost.}\,a\ \text{dost.}\,x}{\text{dost.}\,b}$$

t. j. $log.\text{sty}.b = 0\cdot0788819$ $log.\text{dost}.a = 9\cdot3652279$
$log.\text{dost}.a = 9\cdot7193874-$ $log.\text{dost}.x = 9\cdot9277211$
$log.\text{sty}.x = 9\cdot7982693-$ $dpl.log.\text{dost}.b = 0\cdot1935183$
$x = -32°8'50''\cdot01$ $log.\text{dost}.(c-x) = 9\cdot4864673$
$c-x = 72°9'\ 0''\cdot00$
$x = 32\ 8\ 50\cdot01$
$c = 40\ 0\ 9\cdot99$

§. 71.

Jak powiérzchnię trójkąta prostokréślego policzyliśmy między jego elementami, tak samo z powiérzchnią trójkąta sferycznego zrobić możemy. Lubo w §. 278 *Stereom.* znaleźliśmy wyrażenie pewiérzchni tego ostatniego trójkąta, z trzech jego kątów i prawdziwe znaczenie tego wyrażenia wytłómaczyliśmy, zdaje mi się wszelako, iż tu nie zawadzi powtórzyć jeszcze raz to tłómaczenie, bo pragnę aby uczący się dokładnie takowe pojęli, gdyż tym sposobem nie znajdą potém trudności w żadnym zdarzyć im się mogącym przypadku.

W powołanym wyżéj §. znaleźliśmy, że *powiérzchnia trójkąta sferycznego równa się przepełnieniu trzech jego kątów nad dwa kąty proste,* t. j. oznaczając przez α, β, γ kąty, zaś przez S powiérzchnię trójkąta sferycznego, mamy według tego $S = \alpha + \beta + \gamma - 180°$.
Aby to wyrażenie dobrze zrozumieć, potrzeba sobie przypomnieć, że za jednostkę do mierzenia powiérzchni trójkątów sferycznych, wzięliśmy takiż trójkąt mający trzy kąty proste a każdy z boków $= 90°$. W tymże §. powiedziano, że to wyrażenie nic innego nie znaczy, jak tylko, że powiérzchnia danego trójkąta taką jest częścią względem trójkąta jednostkowego, jaką częścią jest przepełnienie sferyczne, t. j. $\alpha + \beta + \gamma - 180°$, względem kąta prostego czyli $90°$. A że powiérzchnia trójkąta jednostkowego jest $\frac{1}{8}$ częścią powiérzchni kuli, ta zaś, jeżeli promień kuli oznaczymy przez r, jest $= 4\pi r^2$, więc powiérzchnia tego ostatniego trójkąta jest tym sposobem $= \frac{4\pi r^2}{8} = \frac{\pi r^2}{2}$. Przepełnienie trzech kątów

trójkąta danego t. j. $\alpha+\beta+\gamma-180^{\circ}$ jest $\frac{\alpha+\beta+\gamma-180^{\circ}}{90}$ częścią względem kąta prostego, przeto téż jego powiérzchnia będzie takąż częścią względem powiérzchni trójkąta jednostkowego czyli względem $\frac{\pi r^2}{2}$. Prawdziwe przeto i zupełne wyrażenie powiérzchni trójkąta sferycznego, którego trzy kąty są α, β, γ, jest

$$S=\frac{\pi r^2}{2}\left(\frac{\alpha+\beta+\gamma-180^{\circ}}{90^{\circ}}\right)=\frac{\pi r^2}{180}(\alpha+\beta+\gamma-180^{\circ})$$

$$=\frac{\pi r^2}{180}(\alpha+\beta+\gamma)-\pi r^2$$

i w tém téż a nie innném rozumieniu brać potrzeba powyższe krótkie i zwięzłe wyrażenie się, że *powiérzchnia trójkąta sferycznego równa się jego przepełnieniu.*

Używając tego wzoru do rachowania powiérzchni trójkątów sferycznych, uważać potrzeba czyli przepełnienie dane jest w stopniach, minutach lub sekundach, gdyż według tego wyrażenia téj powiérzchni będzie nieco różne, a mianowicie

$S=\frac{\pi r^2}{180}(\alpha+\beta+\gamma-180^{\circ})$ jeżeli przepełnienie jest w stopniach

$S=\frac{\pi r^2}{180.60}(\alpha+\beta+\gamma-180^{\circ})$ . . . . w minutach

$S=\frac{\pi r^2}{180.60.60}(\alpha+\beta+\gamma-180^{\circ})$ . . . . w sekundach

Tak np. gdyby przepełnienie było

$$1^{\circ}24'54''=1^{\circ}{\cdot}415=84'{\cdot}9=5094'',$$

tedy powiérzchnia takiego trójkąta byłaby

$$S=\frac{\pi r^2}{180}.1{\cdot}415 \qquad =0{\cdot}00768217\pi r^2$$

$$S=\frac{\pi r^2}{180.60}.84{\cdot}9 \qquad =0{\cdot}00768217\pi r^2$$

$$S=\frac{\pi r^2}{180.60.60}.5094 \qquad =0{\cdot}00768217\pi r^2$$

Położywszy przepełnienie $\alpha+\beta+\gamma-180=\varepsilon$, będzie powiérzchnia trójkąta

$$S = \frac{\pi r^2}{180} \varepsilon$$

skąd
$$\varepsilon = S . \frac{180}{\pi r^2} = \frac{S}{r^2} . \frac{180}{\pi}.$$

Znając powiérzchnię trójkąta sferycznego, znajdziemy z tego zrównania przepełnienie sferyczne wyrażone w stopniach; wyrażone zaś w minutach

będzie
$$\varepsilon' = \frac{S}{r^2} . \frac{180.60}{\pi}$$

a w sekundach
$$\varepsilon'' = \frac{S}{r^2} . \frac{180.60.60}{\pi}.$$

A że $\frac{180.60.60}{\pi} = R''$ t. j. równa się promieniowi wyrażonemu w sekundach §. 172 *Geom.*

zatém
$$\varepsilon'' = R'' . \frac{S}{r^2} = \frac{S}{r^2 \, \text{wst.}1''}$$

bo $R' = \frac{1}{\text{wst.}1''}$ §. 18. Pamiętać tu tylko należy wziąść r w takich samych jednostkach, w jakich wzięte lub dane były boki trójkąta dla znalezienia jego powiérzchni.

Powyżéj otrzymanego wzoru na powiérzchnię trójkąta sferycznego, używa się najczęściéj w wielkich pomiarach ziemi. Ale największe na powiérzchni ziemi mierzone trójkąty tak mało się rożnią od trójkątów prostokréślnych, że przepełnienie ich kątów zaledwo w sekundach wypada; z tego powodu raz na zawsze możemy przyjąć wyrażenie powiérzchni trójkąta sferycznego, oznaczając przepełnienie, w sekundach wyrażone, przez ε,

$$S = \frac{\varepsilon}{648000} . \pi r^2 = \frac{3{\cdot}1415926}{648000} r^2 \varepsilon$$

Według poszukiwań i rachunków sławnego astronoma królewieckiego Bessela w „*Astronomische Nachrichten von Schumacher Nr. 438*“ średni promień ziemi wynosi

$r = 3266608{\cdot}235$ sązni francuz. (toise), przeto

$$log. S = log. 3{\cdot}1415926 + 2 log. r + log. \varepsilon - log. 648000$$
$$= 7{\cdot}7137691 + log. \varepsilon$$

a powiérzchnia trójkąta wyrażona będzie w kwadratowych sążniach francuzkich. Dosyć więc będzie do stałego logarytmu 7·7137691 dodać logarytm przepełnienia, aby znaléść logarytm powiérzchni trójkąta.

Przykład. Przypuśćmy, że się znalazło przepełnienie 3″, tedy znajdziemy logarytm powiérzchni takiego trójkąta

$$=8{\cdot}1908904,$$

który odpowiada liczbie mającéj 9 cyfer całkowitych, i któréj piérwsze trzy cyfry są 155, t. j. trójkąt, o którym tu mowa, zamykałby przeszło 155 milijonów kwadratowych sążni francuzkich. Pomyśliwszy sobie prostokréślny trójkąt równy, co do powiérzchni temu tu sferycznemu, a któregoby podstawa równała się 25000 sązni francuzkich t. j. przeszło 6·5 mil geograficznych, z wiadomego wzoru znaleźlibyśmy jego wysokość =12416 prawie sążni, czyli przeszło 3 mile; z tego łatwo powziąść wyobrażenie, jak wielkiego to trójkąta prostokréślnego powiérzchnia, odpowiada powiérzchni sferycznego do przykładu wziętego, którego przepełnienie wynosi 3″, tudzież jak wielkie to potrzeba mierzyć na ziemi trójkąty, iżby przepełnienie trzech kątów przynajmniéj w kilku sekundach otrzymać.

§. 72.

Tym samym trybem jak w Trygonometryi prostokréślnéj, poszukajmy wyrażenia powiérzchni trójkąta sferycznego z innych jego elementów wyznaczających dokładnie trójkąt.

Zatrzymując oznaczenia poprzedzającego §. mamy

$$S=\alpha+\beta+\gamma-180^\circ$$

skąd
$$\frac{\alpha+\beta+\gamma}{2}=90+\tfrac{1}{2}S$$

przeto
$$\text{sty.}\frac{\alpha+\beta+\gamma}{2}=-\text{doty.}\tfrac{1}{2}S=\frac{\text{sty.}\frac{\alpha+\beta}{2}+\text{sty.}\frac{1}{2}\gamma}{1-\text{sty.}\frac{\alpha+\beta}{2}\text{sty.}\frac{1}{2}\gamma}$$

Według Analogij Nepera jest

$$\text{sty.}\frac{\alpha+\beta}{2}=\frac{\text{dost.}\frac{a-b}{2}}{\text{dost.}\frac{a+b}{2}}\text{doty.}\tfrac{1}{2}\gamma$$

zatém $-\text{doty}.\tfrac{1}{2}S = \dfrac{\text{dost}.\frac{a-b}{2}\,\text{doty}.\frac{1}{2}\gamma + \text{dost}.\frac{a+b}{2}\text{sty}.\frac{1}{2}\gamma}{\text{dost}.\frac{a+b}{2} - \text{dost}.\frac{a-b}{2}}$

$$= \frac{\text{dost}.\frac{a-b}{2} + \text{dost}.\frac{a+b}{2}\,\text{sty}.\frac{1}{2}\gamma^2}{\left(\text{dost}.\frac{a+b}{2} - \text{dost}.\frac{a+b}{2}\right)\text{sty}.\frac{1}{2}\gamma}$$

$$= \frac{\text{dost}.\frac{1}{2}a\,\text{dost}.\frac{1}{2}b(1+\text{sty}.\frac{1}{2}\gamma^2) + \text{wst}.\frac{1}{2}a\,\text{wst}.\frac{1}{2}b(1-\text{sty}.\frac{1}{2}\gamma^2)}{-2\,\text{wst}.\frac{1}{2}a\,\text{wst}.\frac{1}{2}b\,\dfrac{\text{wst}.\frac{1}{2}\gamma}{\text{dost}.\frac{1}{2}\gamma}}$$

$$= \frac{\text{dost}.\frac{1}{2}a\,\text{dost}.\frac{1}{2}b + \text{wst}.\frac{1}{2}a\,\text{wst}.\frac{1}{2}b\,\text{dost}.\gamma}{-2\text{wst}.\frac{1}{2}a\,\text{wst}.\frac{1}{2}b\,\text{wst}.\frac{1}{2}\gamma\,\text{dost}.\frac{1}{2}\gamma}$$

bo $\dfrac{1-\text{sty}.\frac{1}{2}\gamma^2}{1+\text{sty}.\frac{1}{2}\gamma^2} = \text{dost}.\gamma$ §. 15.

Dzieląc nareszcie licznika i mianownika ostatniego wyrażenia przez $\text{wst}.\frac{1}{2}a\,\text{wst}.\frac{1}{2}b$, znajdziemy

$$\text{doty}.\tfrac{1}{2}S = \frac{\text{doty}.\frac{1}{2}a\,\text{doty}.\frac{1}{2}b + \text{dost}.\gamma}{\text{wst}.\gamma} \quad \ldots\ldots\ldots \text{(A)}$$

Mając więc w trójkącie sferycznym dwa jego boki i kąt między niemi zawarty dane, z ostatniego zrównania znajdziemy jego powiérzchnię.

Ze zrównania (A) łatwo znajdziemy

$$1 + \text{doty}.\tfrac{1}{2}S^2 = \frac{1}{\text{wst}.\frac{1}{2}S^2}$$

$$= \frac{\text{doty}.\frac{1}{2}a^2\,\text{doty}.\frac{1}{2}b^2 + 2\,\text{doty}.\frac{1}{2}a\,\text{doty}.\frac{1}{2}b\,\text{dost}.\gamma + 1}{\text{wst}.\gamma^2}$$

W znaném zrównaniu $\text{dost}.\gamma = \dfrac{\text{dost}.c - \text{dost}.a\,\text{dost}.b}{\text{wst}.a\,\text{wst}.b}$

położywszy $\text{dost}.c = 1 - 2\,\text{wst}.\frac{1}{2}c^2$, $\text{dost}.a = 1 - 2\text{wst}.\frac{1}{2}a^2$,
$\text{dost}.b = 1 - 2\,\text{wst}.\frac{1}{2}b^2$,

tudzież $\text{wst}.a = 2\text{wst}.\frac{1}{2}a\,\text{dost}.\frac{1}{2}a$, $\text{wst}.b = 2\,\text{wst}.\frac{1}{2}b\,\text{dost}.\frac{1}{2}b$,

znajdziemy $\text{dost}.\gamma = \dfrac{\text{wst}.\frac{1}{2}a^2 + \text{wst}.\frac{1}{2}b^2 - \text{wst}.\frac{1}{2}c^2}{2\text{wst}.\frac{1}{2}a\,\text{dost}.\frac{1}{2}a\,\text{wst}.\frac{1}{2}b\,\text{dost}.\frac{1}{2}b} - \text{sty}.\frac{1}{2}a\,\text{sty}.\frac{1}{2}b$

skąd $2\text{doty}.\frac{1}{2}a\,\text{doty}.\frac{1}{2}b\,\text{dost}.\gamma = \dfrac{\text{wst}.\frac{1}{2}a^2 + \text{wst}.\frac{1}{2}b^2 - \text{wst}.\frac{1}{2}c^2}{\text{wst}.\frac{1}{2}a^2\,\text{wst}.\frac{1}{2}b^2} - 2$

Ale $\text{doty.}\tfrac{1}{2}a^2\,\text{doty.}\tfrac{1}{2}b^2 = \dfrac{1-\text{wst.}\tfrac{1}{2}a^2}{\text{wst.}\tfrac{1}{2}a^2}\cdot\dfrac{1-\text{wst.}\tfrac{1}{2}b^2}{\text{wst.}\tfrac{1}{2}b^2}$

$$= \frac{1-\text{wst.}\tfrac{1}{2}a^2-\text{wst.}\tfrac{1}{2}b^2}{\text{wst.}\tfrac{1}{2}a^2\,\text{wst.}\tfrac{1}{2}b^2}+1,$$

jeżeli przeto dwie te ostatnie ważności położymy w powyższém na $\dfrac{1}{\text{wst.}\tfrac{1}{2}S^2}$ wyrażeniu, łatwo otrzymamy

$$\text{wst.}\tfrac{1}{2}S = \frac{\text{wst.}\tfrac{1}{2}a\,\text{wst.}\tfrac{1}{2}b\,\text{wst.}\gamma}{\text{dost.}\tfrac{1}{2}c}.$$

A kładąc jeszcze ważność za wst.γ wyrażoną przez trzy boki trójkąta §. 57, znajdziemy

$$\text{wst.}\tfrac{1}{2}S = \frac{\sqrt{\text{wst.}s\,\text{wst.}(s-a)\,\text{wst.}(s-b)\,\text{wst.}(s-c)}}{2\,\text{dost.}\tfrac{1}{2}a\,\text{dost.}\tfrac{1}{2}b\,\text{dost.}\tfrac{1}{2}c}\quad\ldots\ldots(\text{B})$$

pamiętając, że $s=\dfrac{a+b+c}{2}$. Mając przeto w trójkącie sferycznym trzy jego boki dane, z ostatniego zrównania obrachować można jego powiérzchnię.

Zrównania (A) i (B) mnożąc przez siebie, otrzymamy

$$\text{dost.}\tfrac{1}{2}S = (\text{doty.}\tfrac{1}{2}a\,\text{doty.}\tfrac{1}{2}b+\text{dost.}\gamma)\frac{\text{wst.}\tfrac{1}{2}a\,\text{wst.}\tfrac{1}{2}b}{\text{dost.}\tfrac{1}{2}c}$$

Lecz $\text{dost.}\gamma = \dfrac{\text{dost.}c-\text{dost.}a\,\text{dost.}b}{\text{wst.}a\,\text{wst.}b}$, $\text{doty.}\tfrac{1}{2}a = \dfrac{1+\text{dost.}a}{\text{wst.}a}$,

$$\text{doty.}\tfrac{1}{2}b = \frac{1+\text{dost.}b}{\text{wst.}b}\ \text{a następnie}$$

$$\text{doty.}\tfrac{1}{2}a\,\text{doty.}\tfrac{1}{2}b+\text{dost.}\gamma = \frac{1+\text{dost.}a+\text{dost.}b+\text{dost.}c}{4\,\text{wst.}\tfrac{1}{2}a\,\text{dost.}\tfrac{1}{2}a\,\text{wst.}\tfrac{1}{2}b\,\text{dost.}\tfrac{1}{2}b},$$

zatém $$\text{dost.}\tfrac{1}{2}S = \frac{1+\text{dost.}a+\text{dost.}b+\text{dost.}c}{4\,\text{dost.}\tfrac{1}{2}a\,\text{dost.}\tfrac{1}{2}b\,\text{dost.}\tfrac{1}{2}c}$$

$$= \frac{\text{dost.}\tfrac{1}{2}a^2+\text{dost.}\tfrac{1}{2}b^2+\text{dost.}\tfrac{1}{2}c^2-1}{2\,\text{dost.}\tfrac{1}{2}a\,\text{dost.}\tfrac{1}{2}b\,\text{dost.}\tfrac{1}{2}c}.$$

Łącząc to zrównanie z (B) i przywracając w tak otrzymaném zrównaniu ważność s, ponieważ

$$\frac{1-\text{dost.}\tfrac{1}{2}S}{\text{wst.}\tfrac{1}{2}S} = \text{sty.}\tfrac{1}{4}S,\ \text{znajdziemy:}$$

$$\text{sty.}\tfrac{1}{4}S = \frac{1-\text{dost.}\tfrac{1}{2}a^2-\text{dost.}\tfrac{1}{2}b^2-\text{dost.}\tfrac{1}{2}c^2+2\text{dost.}\tfrac{1}{2}a\,\text{dost.}\tfrac{1}{2}b\,\text{dost.}\tfrac{1}{2}c}{\sqrt{\left(\text{wst.}\frac{a+b+c}{2}\text{wst.}\frac{b+c-a}{2}\text{wst.}\frac{a+c-b}{2}\text{wst.}\frac{a+b-c}{2}\right)}}$$

Licznik tego wyrażenia może być wystawiony jako iloczyn z dwóch czynników a to następującym sposobem:

ponieważ $1-\text{dost.}\tfrac{1}{2}a^2-\text{dost.}\tfrac{1}{2}c^2$

$$=\text{wst.}\tfrac{1}{2}a^2\,\text{wst.}\tfrac{1}{2}c^2-\text{dost.}\tfrac{1}{2}a^2\,\text{dost.}\tfrac{1}{2}c^2,$$

zatém $1-\text{dost.}\tfrac{1}{2}a^2-\text{dost.}\tfrac{1}{2}b^2-\text{dost.}\tfrac{1}{2}c^2+2\text{dost.}\tfrac{1}{2}a\,\text{dost.}\tfrac{1}{2}b\,\text{dost.}\tfrac{1}{2}c$

$$=\text{wst.}\tfrac{1}{2}a^2\,\text{wst.}\tfrac{1}{2}c^2-\text{dost.}\tfrac{1}{2}b^2-\text{dost.}\tfrac{1}{2}a^2\,\text{dost.}\tfrac{1}{2}c^2$$
$$+\text{dost.}\tfrac{1}{2}a\,\text{dost.}\tfrac{1}{2}b\,\text{dost.}\tfrac{1}{2}c+\text{dost.}\tfrac{1}{2}a\,\text{dost.}\tfrac{1}{2}b\,\text{dost.}\tfrac{1}{2}c$$

Dodawszy i odjąwszy od drugiéj strony

$$\text{wst.}\tfrac{1}{2}a\,\text{wst.}\tfrac{1}{2}c\,\text{dost.}\tfrac{1}{2}b \quad \text{i} \quad \text{wst.}\tfrac{1}{2}a\,\text{wst.}\tfrac{1}{2}c\,\text{dost.}\tfrac{1}{2}a\,\text{dost.}\tfrac{1}{2}c$$

będzie $1-\text{dost.}\tfrac{1}{2}a^2-\text{dost.}\tfrac{1}{2}b^2-\text{dost.}\tfrac{1}{2}c^2+2\text{dost.}\tfrac{1}{2}a\,\text{dost.}\tfrac{1}{2}b\,\text{dost.}\tfrac{1}{2}c$

$$=\text{wst.}\tfrac{1}{2}a^2\,\text{wst.}\tfrac{1}{2}c^2+\text{wst.}\tfrac{1}{2}a\,\text{wst.}\tfrac{1}{2}c\,\text{dost.}\tfrac{1}{2}b$$
$$-\text{wst.}\tfrac{1}{2}a\,\text{wst.}\tfrac{1}{2}c\,\text{dost.}\tfrac{1}{2}a\,\text{dost.}\tfrac{1}{2}c$$
$$-\text{dost.}\tfrac{1}{2}b^2-\text{wst.}\tfrac{1}{2}a\,\text{wst.}\tfrac{1}{2}c\,\text{dost.}\tfrac{1}{2}b+\text{dost.}\tfrac{1}{2}a\,\text{dost.}\tfrac{1}{2}b\,\text{dost.}\tfrac{1}{2}c$$
$$+\text{dost.}\tfrac{1}{2}a\,\text{dost.}\tfrac{1}{2}c\,\text{wst.}\tfrac{1}{2}a\,\text{wst.}\tfrac{1}{2}c$$
$$+\text{dost.}\tfrac{1}{2}a\,\text{dost.}\tfrac{1}{2}b\,\text{dost.}\tfrac{1}{2}c-\text{dost.}\tfrac{1}{2}a^2\,\text{dost.}\tfrac{1}{2}c^2$$
$$=\text{wst.}\tfrac{1}{2}a\,\text{wst.}\tfrac{1}{2}c\,(\text{wst.}\tfrac{1}{2}a\,\text{wst.}\tfrac{1}{2}c+\text{dost.}\tfrac{1}{2}b-\text{dost.}\tfrac{1}{2}a\,\text{dost.}\tfrac{1}{2}c)$$
$$-\text{dost.}\tfrac{1}{2}b\,(\text{wst.}\tfrac{1}{2}a\,\text{wst.}\tfrac{1}{2}c+\text{dost.}\tfrac{1}{2}b-\text{dost.}\tfrac{1}{2}a\,\text{dost.}\tfrac{1}{2}c)$$
$$+\text{dost.}\tfrac{1}{2}a\,\text{dost.}\tfrac{1}{2}c\,(\text{wst.}\tfrac{1}{2}a\,\text{wst.}\tfrac{1}{2}c+\text{dost.}\tfrac{1}{2}b-\text{dost.}\tfrac{1}{2}a\,\text{dost.}\tfrac{1}{2}c)$$
$$=(\text{wst.}\tfrac{1}{2}a\,\text{wst.}\tfrac{1}{2}c+\text{dost.}\tfrac{1}{2}b-\text{dost.}\tfrac{1}{2}a\,\text{dost.}\tfrac{1}{2}c)\times$$
$$(\text{wst.}\tfrac{1}{2}a\,\text{wst.}\tfrac{1}{2}c-\text{dost.}\tfrac{1}{2}b+\text{dost.}\tfrac{1}{2}a\,\text{dost.}\tfrac{1}{2}c)$$
$$=\left(\text{dost.}\tfrac{1}{2}b-\text{dost.}\frac{a+c}{2}\right)\left(\text{dost.}\frac{a-c}{2}-\text{dost.}\tfrac{1}{2}b\right)$$
$$=2\,\text{wst.}\frac{a+b+c}{4}\,\text{wst.}\frac{a+c-b}{4}\,.\,2\,\text{wst.}\frac{b+c-a}{4}\,\text{wst.}\frac{a+b-c}{4}\ \text{§. 13 (23)}$$

zatém
$$\text{sty.}\tfrac{1}{4}S=\frac{4\,\text{wst.}\frac{a+b+c}{4}\text{wst.}\frac{b+c-a}{4}\text{wst.}\frac{a+c-b}{4}\text{wst.}\frac{a+b-c}{4}}{\sqrt{\left(\text{wst.}\frac{a+b+c}{2}\text{wst.}\frac{b+c-a}{2}\text{wst.}\frac{a+c-b}{2}\text{wst.}\frac{a+b-c}{2}\right)}}$$

Ale ponieważ w ogólności mamy

$$\frac{\text{wst.}\tfrac{1}{4}z}{\sqrt{\text{wst.}\tfrac{1}{2}z}}=\sqrt{\frac{\text{wst.}\tfrac{1}{4}z^2}{2\text{wst.}\tfrac{1}{4}z\,\text{dost.}\tfrac{1}{4}z}}=\sqrt{\tfrac{1}{2}\,\text{sty.}\tfrac{1}{4}z}$$

zaś
$$\text{sty.}\tfrac{1}{4}S=4\frac{\text{wst.}\frac{a+b+c}{4}}{\sqrt{\text{wst.}\frac{a+b+c}{2}}}\cdot\frac{\text{wst.}\frac{b+c-a}{4}}{\sqrt{\text{wst.}\frac{b+c-a}{2}}}\cdot\frac{\text{wst.}\frac{a+c-b}{4}}{\sqrt{\text{wst.}\frac{a+c-b}{2}}}\cdot\frac{\text{wst.}\frac{a+b-c}{4}}{\sqrt{\text{wst.}\frac{a+b-c}{2}}}$$

przeto

$$\text{sty}.\tfrac{1}{4}S=4\sqrt{\tfrac{1}{2}\text{sty}.\frac{a+b+c}{4}}.\sqrt{\tfrac{1}{2}\text{sty}.\frac{b+c-a}{4}}.\sqrt{\tfrac{1}{2}\text{sty}.\frac{a+c-b}{4}}.\sqrt{\tfrac{1}{2}\text{sty}.\frac{a+b-c}{4}}$$

lub nareszcie

$$\text{sty}.\tfrac{1}{4}S=\sqrt{\text{sty}.\frac{a+b+c}{4}\text{sty}.\frac{b+c-a}{4}\text{sty}.\frac{a+c-b}{4}\text{sty}.\frac{a+b-c}{4}}$$

Ten wzór służący do znalezienia powiérzchni trójkąta sferycznego z danych trzech jego boków, był podanym przez Lhuilera genewskiego matematyka.

§. 73.

Zobaczmy teraz postępowanie dla znalezienia przepełnienia sferycznego, a potém powiérzchni trójkąta. Niech z geodetycznych wymiarów otrzymane i już do poziomu sprowadzone kąty będą $\alpha=42^\circ 2' 32''$, $\beta=67^\circ 55' 39''$, $\gamma=70^\circ 1' 48''$ tudziez dwa boki $b=3863{\cdot}68$ i $c=6015{\cdot}14$ sążni francuzkich (toise). Uważajmy naprzód ten trójkąt jako prostokreślny i szukajmy jego powiérzchni. Jéj wyrażenie według §. 33 jest

$$\triangle=\frac{bc\,\text{wst}.\alpha}{2}$$

w obecnym przeto przypadku

$$\begin{array}{r} log.b=3{\cdot}5870012 \\ log.c=3{\cdot}7792458 \\ log.\,\text{wst}.\alpha=9{\cdot}7258661 \\ dpł.\,log.2=9{\cdot}6989700 \\ \hline log.\triangle=6{\cdot}7910831 \end{array}$$

Ale w §. 71 znaleźliśmy $log.S=7{\cdot}7137691+log.\varepsilon$; jeżeli tu więc położymy $log.S=log.\triangle$, znajdziemy

$$log.\varepsilon=6{\cdot}7910831-7{\cdot}7137691=9{\cdot}0773140$$

więc $\varepsilon=0''{\cdot}1194=0''{\cdot}12$

t. j. summa trzech kątów tego trójkąta powinna być większa o $0''{\cdot}12$ od dwóch kątów prostych czyli od 180°. Ale ponieważ $\alpha+\beta+\gamma=179^\circ 59' 59''$, z czego się pokazuje, że albo w mierzeniu, albo téż w rachunku kątów zaszła mała niedokładność, zatém i tę małą, bo tylko $1''$ wynoszącą różnicę, policzyć potrzeba do przepełnienia, tak że summa znalezionych kątów mniejsza jest o $1''\cdot12$ od 180^0. Jeżeli przekonani jesteśmy, że wszystkie kąty z równą troskliwością i pod równie przyjaznemi okolicznościami mierzone były, należy ten niedostatek $1''\cdot12$ wynoszący, równo pomiędzy wszystkie trzy kąty rozdzielić, a mianowicie każdemu z nich dodać $\frac{1''\cdot12}{3}=0''\cdot37$; przeciwnie, poprawka $1''$ dodałaby się temu, o którego dokładności powątpiwamy, a potém przepełnienie $0\cdot12$ rozdzieliłoby się równo między wszystkie. W naszym trójkącie mieć będziemy

$$\alpha=42^0\,2'\,32''\cdot37,\quad \beta=67^0\,55'\,39''\cdot37,\quad \gamma=70^0\,1'\,48''\cdot37.$$

Z tak poprawionemi kątami, rachujemy powiérzchnię trójkąta S według wzoru §. 71, którą znajdziemy prawie 5690653 sążni kwadratowych francuzkich.

Z tego widzimy, iż aby znaléść przepełnienie, trzeba wprzód obrachować powiérzchnię trójkąta sferycznego; gdy zaś ta powiérzchnia zależy od przepełnienia, zatém wprzód potrzeba znaléść powiérzchnię trójkąta. Ale jakże ją znaléść nie znając przepełnienia? Oto, uważa się naprzód trójkąt sferyczny jako prostokreślny i jako takiego, szuka się powiérzchni z elementów danych; tę podzieliwszy przez kwadrat z promienia ziemi (bo tu mówimy zawsze o trójkątach na powiérzchni ziemi mierzonych) rozmnożony przez wst.$1''$, otrzymamy przepełnienie. Trzecią część tego przepełnienia odjąwszy od każdego z kątów trójkąta sferycznego, trójkąt z temi ostatniemi kątami a bokami równemi w sferycznym, uważać można jako prostokreślny i jako taki z danych elementów rozwiązać. To postępowanie wypływa z bardzo pięknego twierdzenia przez Leżandra (Legendre) podanego, a którego tu przytoczyć nie możemy, gdyż jego dowód zasadza się na rozwinięciu wstawy i dostawy łuku na szeregi nieskończone, których dotąd nieznamy.

Dajmy tu liczbowy przykład rozwiązania na téj zasadzie trójkątą sferycznego.

Przykład. Z pomiarów geodetycznych znaleziono w trójkącie sferycznym $c=38607$ sążni francuzkich $=10$ mil. niem.

$\alpha = 102^\circ 43' 22''\cdot6$, $\beta = 62^\circ 11' 42''\cdot5$ z tych trzech elementów potrzeba rozwiązać trójkąt czyli znaléść a, b, γ.

Naprzód powiérzchnia tego trójkąta uważanego jako prostokreślny, jest

$$\triangle = \frac{c^2 \,\text{wst.}\, \alpha \,\text{wst.}\, \beta}{2 \text{wst.} (\alpha + \beta)} \quad \S.\ 33.$$

t. j.

$$\begin{aligned} log.\, c^2 &= 9\cdot1733322 \\ log.\, \text{wst.}\, \alpha &= 9\cdot9892131 \\ log.\, \text{wst.}\, \beta &= 9\cdot9467182 \\ dpl.\, log.\, 2 &= 9\cdot6989700 \\ dpl.\, log.\, \text{wst.} (\alpha + \beta) &= 0\cdot5846931 \\ \hline log.\, \triangle &= 9\cdot3929266 \\ log.\, \text{stały} \ldots &\ \ 7\cdot7137691 \\ \hline log.\, \varepsilon &= 1\cdot6791575 \\ \varepsilon &= 47''\cdot77 \ .\ .\ \tfrac{1}{3}\varepsilon = 15''\cdot92 \end{aligned}$$

Albo według powyższego, ponieważ $r = 3266608\cdot235$

a $\text{wst.}\, 1'' = 0\cdot000004849$,

zatém

$$\begin{aligned} log.\, r^2 &= 13\cdot0281942 \\ log.\, \text{wst.}\, 1'' &= 4\cdot6855749 \\ \hline log.\, r^2 \,\text{wst.}\, 1'' &= 7\cdot7137691 \\ log.\, \triangle &= 9\cdot3929266 \\ \hline log.\, \varepsilon &= 1\cdot6791575 \end{aligned}$$

przeto oznaczywszy kąty trojkąta prostokreślnego odpowiadającego sferycznemu przez α', β', γ',

będzie

$$\begin{aligned} \alpha' &= \alpha - \tfrac{1}{3}\varepsilon = 102^\circ\, 43'\ \ 6''\cdot68 \\ \beta' &= \beta - \tfrac{1}{3}\varepsilon = \ \ 62\ \ 11\ \ 26\cdot58 \\ \gamma' &= 180^\circ - (\alpha' + \beta') = \ \ 15\ \ \ 5\ \ 26\cdot74 \end{aligned}$$

Po takiém poprawieniu kątów za pomocą przepełnienia, już uważać można sferyczny za prostokreślny trójkąt, mający boki a, b, c, a kąty α', β', γ'; znajdziemy przeto jego boki a i b ze zrównań $a = \frac{c \,\text{wst.}\, \alpha'}{\text{wst.}\, \gamma'}$, $b = \frac{c \,\text{wst.}\, \beta'}{\text{wst.}\, \gamma'}$

$$\begin{array}{rcr}
log.\, c = 4{\cdot}5866661 & \ldots\ldots\ldots & 4{\cdot}5866661 \\
log.\, \text{wst.}\, \alpha' = 9{\cdot}9892110 & \ldots & log.\, \text{wst.}\, \beta' = 9{\cdot}9467005 \\
dpł.\, log.\, \text{wst.}\, \gamma' = 0{\cdot}5844444 & \ldots & dpł.\, log.\, \text{wst.}\, \gamma' = 0{\cdot}5844444 \\
\hline
log.\, a = 5{\cdot}1603215 & \ldots & log.\, b = 5{\cdot}1178110 \\
a = 144651{\cdot}0 \text{ sąż.} & \ldots & b = 131162{\cdot}9 \text{ sąż.}
\end{array}$$

kąt zaś $\gamma = \gamma' + \frac{1}{3}\varepsilon = 15^\circ 5' 42''{\cdot}66$ i tym sposobem rozwiązaliśmy trójkąt z podanych elementów.

§. 74.

Zastósujmy nareszcie poprzedzające wiadomości do Geometryi i geodetycznych wymiarów; najczęstsze bowiem i najzwyczajniejsze zastósowania Trygonometryi sferycznéj w Astronomii i Mechanice niebieskiéj tu pominąć musimy, gdyż do tego potrzebne są przynajmniéj piérwsze wiadomości o sferze i płaszczyznach w Astronomii używanych. Ciekawi jednak i z wspomnionemi początkami obeznani, znajdą obszerne zastósowanie Trygonometryi sferycznéj do Astronomii w dziełku „*Trygonometryja kulista analitycznie wyłożona przez* Jana Śniadeckiego *wydanie drugie w Wilnie i Warszawie 1820*“ My tu podamy niektóre tylko zastósowania w pomiarach ziemi używane, poczynając zagadnieniem z Geometryi.

Mówiąc w Solidometryi o objętości ostrosłupów i graniastosłupów, nauczyliśmy się tylko z wiadoméj podstawy i wysokości bądźto ostrosłupa, bądź graniastosłupa obrachować ich objętości; często atoli znane nam lub dane być mogą inne elementa w tych ciałach, z których rzeczone objętości obrachować nam przychodzi. W takim razie otrzymujemy najprościejsze wyrażenia przy pomocy Trygonometryi sferycznéj, a dlatego rozwiążemy tu następujące:

Zagadnienie 1. *W jakimkolwiek ostrosłupie trójściennym,* albo ogólniéj, *w jakimkolwiek czworościanie mając dane trzy jego w jednym punkcie schodzące się krawędzie i kąty płaskie w tymże punkcie kąt trójścienny składające, znaléść objętość tego czworościanu.*

Niech danym czworościanem będzie SABC *fig. 33*, i niech długość każdéj z trzech krawędzi schodzących się w punkcie S będzie znana, jako téż trzy kąty płaskie trójścian S składające, mianowicie niech będzie AS$=a$, BS$=b$, CS$=c$, kąt ASB$=\gamma$, ASC$=\beta$, BSC$=\alpha$, potrzeba z tych danych elementów znaléść objętość tego czworościanu. Powiérzchnia każdéj ze ścian ASB, ASC i BSC może być obrachowana według §. 33 *Trygon.*, bo każda jest trójkątem mającym dwa boki z kątem zawartym znane; wziąwszy więc którąkolwiek z nich za podstawę trójściennego ostrosłupa, np. ASC, wiérzchołek jego będzie w punkcie B; spuściwszy więc z tego punktu BO prostopadłą do płaszczyzny podstawy ASC, i oznaczywszy objętość tego czworościanu przez P a rzeczoną wysokość przez h, według §. 235 *Geom.* mieć będziemy

$$P=\frac{ac\,\text{wst.}\,\beta}{2}\cdot\tfrac{1}{3}h=\frac{ac\text{wst.}\,\beta}{6}\cdot h$$

Cała więc rzecz chodzi o znalezienie wysokości h. Przez prostopadłą BO i wiérzchołek S poprowadziwszy płaszczyznę BSO, ta będzie prostopadłą do ściany ASC i przetnie ją w prostéj SO. W trójkącie prostokątnym BSO jest

$$\text{BO}=h=\text{SB wst.BSO}=b\,\text{wst.BSO};$$

chcąc więc znaléść h, potrzeba znaléść wst. BSO. Jeżeli z punktu S, jako ze środka promieniem $=1$ wystawimy sobie zakreśloną kulę, jéj powiérzchnia przetnie ściany trójścianu S w łukach kół wielkich, które będą miarami kątów płaskich trójścian S składających, i zamkną trójkąt sferyczny A'B'C' tak, że A'B'$=\gamma$, A'C'$=\beta$, B'C'$=\alpha$; wszystkie więc trzy boki tego trójkąta są znane. Jeżeli tymże samym promieniem$=1$ na płaszczyznie prostopadłéj BSO zakreślimy łuk B'O', ten będzie prostopadły do boku A'C' i podzieli trójkąt A'B'C' na dwa prostokątne, a oraz będzie miarą szukanego kąta BSO; zamiast więc szukać kąta BSO, szukajmy jego miary t. j. łuku B'O'$=\delta$.

W trójkącie sferycznym A'B'C', w którym wszystkie trzy boki są znane, znaléść możemy jego kąty. Nam tu potrzebny tylko kąt A' a dlatego według §. 46

$$\text{dost.}\,\alpha=\text{dost.}\,\beta\,\text{dost.}\,\gamma+\text{wst.}\,\beta\,\text{wst.}\,\gamma\,\text{dost. A}'$$

skąd

$$\text{dost. A}'=\frac{\text{dost.}\,\alpha-\text{dost.}\,\beta\,\text{dost.}\,\gamma}{\text{wst.}\,\beta\,\text{wst.}\,\gamma}.$$

Po znalezieniu kąta A′ rozwiązać możemy trójkąt A′B′O′ prostokątny przy O′, w którym według prawidła przez Mauduit podanego, biorąc element B′O′ $=\delta$ za średni, elementa A′B′ i A′ będą przeciwległe i znajdziemy wst. $\delta =$ wst. γ wst. A′. Szukana zatém wysokość czworościanu będzie

$$h = b \,\text{wst.}\,\gamma \,\text{wst.}\,A'.$$

Ale według §. 57 jest

$$\text{wst.}\,A' = \frac{2\sqrt{\text{wst.}\frac{\alpha+\beta+\gamma}{2}\text{wst.}\frac{\beta+\gamma-\alpha}{2}\text{wst.}\frac{\alpha+\gamma-\beta}{2}\text{wst.}\frac{\alpha+\beta-\gamma}{2}}}{\text{wst.}\,\beta\,\text{wst.}\,\gamma}$$

$$\text{zatém } h = \frac{2b\sqrt{\text{wst.}\frac{\alpha+\beta+\gamma}{2}\text{wst.}\frac{\beta+\gamma-\alpha}{2}\text{wst.}\frac{\alpha+\gamma-\beta}{2}\text{wst.}\frac{\alpha+\beta-\gamma}{2}}}{\text{wst.}\,\beta}$$

Tak znalezioną ważność na wysokość czworościanu położywszy w powyższém wyrażeniu jego objętości, znajdziemy nakoniec:

$$P = \tfrac{1}{3}abc\sqrt{\text{wst.}\frac{\alpha+\beta+\gamma}{2}\text{wst.}\frac{\beta+\gamma-\alpha}{2}\text{wst.}\frac{\alpha+\gamma-\beta}{2}\text{wst.}\frac{\alpha+\beta-\gamma}{2}}$$

Wziąwszy trzy krawędzie a, b, c za krawędzie równoległościanu ukośnego *fig. 33*, dwarazy większą podstawę, niż ABC mającego a wysokość tęż samę, ponieważ z §. 235 *wnios. 3 Geom.* wiemy, że takiego równoległościanu objętość jest sześć razy większa niż czworościanu, zatém oznaczywszy objętość równoległościanu ukośnego, którego trzy krawędzie w jednym punkcie schodzące się są a, b, c, a kąty płaskie w tym punkcie, kąt bryłowy składające α, β, γ, przez R, będzie

$$R = 2abc\sqrt{\text{wst.}\frac{\alpha+\beta+\gamma}{2}\text{wst.}\frac{\beta+\gamma-\alpha}{2}\text{wst.}\frac{\alpha+\gamma-\beta}{2}\text{wst.}\frac{\alpha+\beta-\gamma}{2}}$$

który wzór można też było otrzymać zupełnie tym samym jak wyżéj sposobem, nie przechodząc przez ostrosłup, jak to znaléść można w Geometryi Leżandra na stronicy 299, wydanie 11te, 1817.

§. 75.

Zagadnienie 2. W §. 42 rozwiązane zagadnienie za pomocą Trygonometryi prostokreślnéj, rozwiążmy tu za pomocą sferycznéj dla pokazania, jak ta ostatnia upraszcza niektóre rachunki.

Niech na *fig. 34*, AB, AC i AD wyrażają trzy w jednym punkcie schodzące się krawędzie w jedném z pięciu ciał foremnych, przezco będzie $AB = AC = AD$. Kąty BAC i CAD są kątami płaskiemi do składu kąta bryłowego A wchodzącemi i między sobą równe. Jeżeli przez n oznaczymy liczbę boków każdéj ściany, będzie kąt

$$BAC = CAD = \frac{(n-2)\pi}{n} = \pi - \frac{2\pi}{n}.$$

Poprowadziwszy proste BC i CD, będzie kąt

$$ABC = ACB = ACD = ADC,$$

więc $$2ACB = 180^0 - \left(\pi - \frac{2\pi}{n}\right) = \pi - \pi + \frac{2\pi}{n} = \frac{2\pi}{n}$$

a następnie kąt $$ACB = ACD = \frac{\pi}{n}.$$

Wziąwszy którekolwiek z rzeczonych pięciu ciał foremnych w rękę i przypatrzywszy się z uwagą, łatwo dostrzeżemy, że proste CB i CD są między sobą rzeczywiście równe, co już z przystania trójkątów jest oczywistém, i że są bokami wielokąta foremnego, a mianowicie bokami trójkąta, czworokąta lub pięciokąta. Oznaczywszy przeto liczbę boków tego ostatniego wielokąta przez m będzie jak wyżéj kąt

$$BCD = \frac{(m-2)\pi}{m} = \pi - \frac{2\pi}{m}.$$

Z punktu C jako ze środka promieniem $= 1$ wystawiwszy sobie zakreśloną kulę, jéj powiérzchnia przetnie trzy ściany trójścianu C w łukach kół wielkich $A'B'$, $A'C'$, $B'C'$. Połóżmy $B'C' = a$, $A'C' = b$, $A'B' = c$ a kąt $A'C'B' = \gamma$, który jest szukanym kątem pochyłości dwóch ścian, tedy ponieważ w trójkącie sferycznym $A'B'C'$ wszystkie trzy boki są znane, według wzorów §. 57 znajdziemy kąty. Nam tu jedynie chodzi o kąt $C' = \gamma$, bo ten jest kątem pochyłości dwóch przyległych w krawędzi AC przecinających się ścian, zatém

$$\text{wst.}\tfrac{1}{2}C' = \text{wst.}\tfrac{1}{2}\gamma = \sqrt{\frac{\text{wst.}\frac{b+c-a}{2}\,\text{wst.}\frac{a+c-b}{2}}{\text{wst.}\,a\ \text{wst.}\,b}}$$

A że w obecnym przypadku jest $a=b$ zatém

$$\text{wst.}\tfrac{1}{2}\gamma = \frac{\text{wst.}\frac{1}{2}c}{\text{wst.}\,a}$$

Ale według powyższego, $a=\frac{\pi}{n}$, $c=\pi-\frac{2\pi}{m}$, przeto

$$\text{wst.}\tfrac{1}{2}\gamma = \frac{\text{dost.}\frac{\pi}{m}}{\text{wst.}\frac{\pi}{n}}.$$

Stosując ten wzór do pięciu ciał foremnych, mamy:

w czworościanie

$$n=3,\ m=3\ \ldots\ \text{wst.}\tfrac{1}{2}\gamma = \frac{\text{dost.}\frac{\pi}{3}}{\text{wst.}\frac{\pi}{3}} = \frac{\text{dost.}\,60^\circ}{\text{wst.}\,60^\circ} = \frac{\text{wst.}\,30^\circ}{\text{dost.}\,30^\circ} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

w sześcianie

$$n=4,\ m=3\ \ldots\ \text{wst.}\tfrac{1}{2}\gamma = \frac{\text{dost.}\frac{\pi}{3}}{\text{wst.}\frac{\pi}{4}} = \frac{\text{dost.}\,60^\circ}{\text{wst.}\,45^\circ} = \frac{\text{wst.}\,30^\circ}{\text{wst.}\,45^\circ} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

w ośmiościanie

$$n=3,\ m=4\ \ldots\ \text{wst.}\tfrac{1}{2}\gamma = \frac{\text{dost.}\frac{1}{4}\pi}{\text{wst.}\frac{1}{3}\pi} = \frac{\text{dost.}\,45^\circ}{\text{wst.}\,60^\circ} = \frac{\text{dost.}\,45^\circ}{\text{dost.}\,30^\circ} = \sqrt{\tfrac{2}{3}}$$

w dwunastościanie

$$n=5,\ m=3\ \ldots\ \text{wst.}\tfrac{1}{2}\gamma = \frac{\text{dost.}\frac{1}{3}\pi}{\text{wst.}\frac{1}{5}\pi} = \frac{\text{dost.}\,60^0}{\text{wst.}\,36^\circ} = \frac{\text{wst.}\,30^\circ}{\text{wst.}\,36^0}$$

Lecz w §. 20 znaleźliśmy $\text{dost.}\,36^\circ = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$,

zatém $\quad \text{wst.}\,36^\circ = \sqrt{1-\frac{(1+\sqrt{5})^2}{16}} = \sqrt{\frac{10-2\sqrt{5}}{16}}$

a następnie w dwunastościanie będzie $\text{wst.}\,\frac{1}{2}\gamma = \frac{2}{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}$

W dwudziestościanie $n=3$,

$$m=5\ \ldots\ \text{wst.}\tfrac{1}{2}\gamma = \frac{\text{dost.}\frac{1}{5}\pi}{\text{wst.}\frac{1}{3}\pi} = \frac{\text{dost.}\,36^\circ}{\text{wst.}\,60} = \frac{\text{dost.}\,36^\circ}{\text{dost.}\,30} = \frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{3}}$$

Teraz z wzoru $\text{dost.}\,\gamma = 1 - 2\text{wst.}\,\frac{1}{2}\gamma^2$ §. 12 znajdziemy

w czworościanie dost.$\gamma = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$
sześcianie dost.$\gamma = 1 - \frac{2}{2} = 0$ skąd wnosimy, że $\gamma = 90^0$
ośmiościanie dost.$\gamma = 1 - \frac{4}{3} = -\frac{1}{3}$
dwunastościanie dost. $\gamma = 1 - \frac{8}{10 - 2\sqrt{5}}$

$$= \frac{2-2\sqrt{5}}{10-2\sqrt{5}} = \frac{1-\sqrt{5}}{5-\sqrt{5}} = \frac{(1-\sqrt{5})(5+\sqrt{5})}{20} = -\frac{\sqrt{5}}{5} = -\frac{1}{\sqrt{5}}$$

Szukając tu wst.γ, znajdziemy wst.$\gamma = \frac{2}{\sqrt{5}}$, zatém sty.$\gamma = -2$.

W dwudziestościanie

$$\text{dost.}\gamma = 1 - \frac{2(1+\sqrt{5})^2}{12} = \frac{6-(1+\sqrt{5})^2}{6} = \frac{-2\sqrt{5}}{6} = -\frac{\sqrt{5}}{3}$$

$$\text{wst.}\gamma = \sqrt{1 - \frac{5}{9}} = \frac{2}{3}.$$

Porównawszy otrzymane tu ważności na dostawy kątów pochyłości dwóch przyległych ścian w pięciu ciałach foremnych z ważnościami w §. 42 znalezionemi, znajdziemy je zupełnie z tamtemi zgodne.

§. 76.

Już w §. 34 mówiłem, iż każda karta wykonanego pomiaru na ziemi, mieści wszystkie przedmioty na jednéj płaszczyznie, t. j. na płaszczyznie poziomu, dlaczego wszystkie odległości i kąty na jakichkolwiek płaszczyznach mierzone, przez stósowny rachunek sprowadzone być winny do płaszczyzny poziomu. Szczególniéj téż w Geodezyi czyli pomiarach ziemi, rzadkie są przypadki gdzieby trzy punkta, lub trzy trygonometryczne znaki wyznaczające położenie trójkąta, znajdowały się na płaszczyznie poziomu lub na płaszczyznie do niego równoległéj; z tego powodu wymiary kątów między prostemi lub łukami też punkta łączącemi, dadzą nam takowe w przestrzeni i na płaszczyznach różnie do poziomu pochylonych. Chcąc je na kartę przenieść, rysujemy je na jednéj płaszczyznie a przeto ich wielkości muszą być różne od wymierzonych, będą to bowiem rzuty piérwszych na jednę i téż samę płaszczyznę. Jakże więc kąt na płaszczyznie pochyłéj mierzony, sprowadzić do poziomu? albo mówiąc językiem Geometryi praktycznéj, jak znaleść rzuty kątów mierzonych w przestrzeni na płaszczyznie poziomu? (za płaszczyznę poziomu bierze się zwyczajnie powiérzchnia morza). Sposób znalezienia rzeczonego rzutu, wskaże nam następujące

Zagadnienie 3. *Kąt mierzony na płaszczyznie pochyłéj sprowadzić do poziomu.*

Niech będą dwa punkta A i B *fig. 35*, w różnych wysokościach nad poziomem znajdujące się, tudzież niech

$$AOB = \varphi$$

będzie kątem między temi punktami ze stanowiska O mierzonym. Z punktów A i B spuściwszy prostopadłe do poziomu, niech te spotykają płaszczyznę przez O równolegle do poziomu poprowadzoną, w punktach A′ i B′; te ostatnie punkta łącząc z O prostemi OA′ i OB′ będzie kąt $A'OB' = \varphi'$ rzutem kąta φ na płaszczyznę poziomu, którego rzeczywiście szukamy. Jakże więc z wiadomego kąta φ znajdziemy kąt φ'? Tak przez trzy punkta A, A′, O, jako téż i przez trzy drugie B, B′, O wystawiwszy sobie przesunięte płaszczyzny, te będąc prostopadłe do poziomu, przetną się w prostéj także do poziomu prostopadłéj. Tę prostopadłą nazywamy w Astronomii *liniją wiérzchołkową* dla miejsca na którém stoimy, jak tu dla stanowiska O. Niechże tą prostopadłą będzie prosta OZ, która myślą aż do sklepienia niebios przedłużona, spotyka pozorne sklepienie w punkcie Z nazywającym się dla miejsca O *zenitem*. Dwie rzeczone pionowe do poziomu płaszczyzny z płaszczyzną AOB tworzą przez wzajemne przecięcie się trójścian, a zatém i trójkąt sferyczny $\alpha\beta\gamma$ skoro z punktu O pomyślimy promieniem $= 1$ zakreśloną kulę, bo jéj powiérzchnia przetnie ściany trójścianu w łukach kół wielkich a, b, c §. 46. Trzy boki tego trójkata są nam z pomiarów znane; bo ze stanowiska O, można kątomiarem mierzyć kąty $ZOA = a$, $ZOB = b$ nazwane *odległościami punktów A i B od zenitu*, kąt zaś $AOB = c = \varphi =$ kątowi między punktami A i B. Niech zenitalne odległości punktów A i B będą $a = z$, $b = z'$. Kąt pochyłości do siebie prostopadłych płaszczyzn jest$=OZ=\gamma=\varphi'$, który mamy znaleść. Ponieważ w trójkącie sferycznym $\alpha\beta\gamma$ wszystkie trzy boki są znane, zatém według §. 56 będzie

$$\text{wst.}\tfrac{1}{2}\gamma=\text{wst.}\tfrac{1}{2}\varphi'=\sqrt{\frac{\text{wst.}\frac{b+c-a}{2}\,\text{wst.}\frac{a+c-b}{2}}{\text{wst.}\,a\,\text{wst.}\,b}}=\sqrt{\frac{\text{wst.}(s-z)\,\text{wst.}(s-z')}{\text{wst.}\,z\,\text{wst.}\,z'}}$$

jeżeli położymy $s=\frac{z+z'+\varphi}{2}$. Z tego wzoru już bardzo łatwo obrachować można kąt φ'. Gdy atoli, jeżeli nie zawsze to jednak najczęściéj, wydarzają się przypadki, gdzie stanowiska, jak tu O, A, B, są znacznie od siebie odległe, a z tego powodu różnica wyniesień punktów A i B nad poziom jest bardzo mała, a następnie tak z, jako i z' są bliskie 90°, przezco mianownik powyższego wyrażenia jest blizkim 1, przeto z powyższego wzoru nie znajdziemy φ' z taką dokładnością, jakiéj w tym przypadku żądamy. Chcąc otrzymać φ' z dokładnością, jaką tylko rachunek dać może, postąpić należy następującym sposobem.

Połóżmy $z=90^0-h$, $z'=90^\circ-h'$, przezco h i h' wyrażać będą wyniesienia, czyli raczéj wysokości punktów A i B nad poziom, ze stanowiska O obserwowanych, t. j. będzie $BOB'=h$, $AOA'=h'$, a tym sposobem ze zrównania (1) §. 47 znajdziemy

$$\text{dost.}\,\varphi=\text{wst.}\,h\,\text{wst.}\,h'+\text{dost.}\,h\,\text{dost.}\,h'\,\text{dost.}\,\varphi'.$$

A że h i h' są bardzo małe, zatém zamiast wst.h i wst.h', można wziąść same łuki h i h'. A kiedy wst.$h=h$, to

$$\text{dost.}\,h=\sqrt{1-h^2}=(1-h^2)^{\frac{1}{2}}=1-\tfrac{1}{2}h^2,$$

opuszczając wyższe potęgi jako ilości bardzo małe i prawie żadnego wpływu na wypadek nie mające. Dla téj saméj przyczyny będzie dost.$h'=1-\frac{1}{2}h'^2$

a następnie $\text{dost.}\,h\,\text{dost.}\,h'=(1-\frac{1}{2}h^2)(1-\frac{1}{2}h^2)=1-\frac{h^2+h'^2}{2}$,

opuszczając i tu wyraz $\frac{h^2h'^2}{4}$ jako ilość bardzo małą. Te ważności położywszy w powyższém zrównaniu, znajdziemy

$$\text{dost.}\,\varphi = hh' + \left(1 - \frac{h^2+h'^2}{2}\right)\text{dost.}\,\varphi'$$

$$\text{skąd}\ \left(1 - \frac{h^2+h'^2}{2}\right)\text{dost.}\,\varphi' = \text{dost.}\,\varphi - hh'.$$

Mnożąc obie strony przez $1 + \frac{h^2+h'^2}{2}$, ponieważ na piérwszéj stronie otrzymamy spółczynnik mnożący dost. φ' równy $1 - \frac{(h^2+h'^2)^2}{4}$, który zamienia się w 1, jeżeli znowu opuścimy $\frac{(h^2+h'^2)^2}{4}$ jako ilość jeszcze mniejszą, niż te, któreśmy już opuścili, tudzież na drugiéj stronie opuściwszy téż wyraz $hh'\left(\frac{h^2+h'^2}{2}\right)$, bo przez to opuszczenie nie wprowadzimy znacznego błędu, znajdziemy

$$\text{dost.}\,\varphi' = \text{dost.}\,\varphi - hh' + \tfrac{1}{2}(h^2+h'^2)\,\text{dost.}\,\varphi.$$

Różnica kątów φ i φ' jest zawsze bardzo mała, położywszy przeto $\varphi' = \varphi + \delta$ i zamiast kąta φ' szukając téj małéj różnicy δ, tedy, ponieważ

$$\text{dost.}\,\varphi' = \text{dost.}\,\varphi\,\text{dost.}\,\delta - \text{wst.}\,\varphi\,\text{wst.}\,\delta$$

a dla małości δ jest wst. $\delta = \delta$, dost. $\delta = 1$, będzie

$$\text{dost.}\,\varphi' = \text{dost.}\,\varphi - \delta\,\text{wst.}\,\varphi.$$

Porównawszy to zrównanie z powyższém na dost. φ', widzimy że

$$\delta\,\text{wst.}\,\varphi = hh' - \tfrac{1}{2}(h^2 + h_{\frac{1}{2}})\,\text{dost.}\,\varphi.$$

Kładąc tu nareszcie ważności za wst. φ i dost. φ w połowie kąta φ, t. j. kładąc

$$\text{wst.}\,\varphi = 2\text{wst.}\,\tfrac{1}{2}\varphi\,\text{dost.}\,\tfrac{1}{2}\varphi \ \text{ i }\ \text{dost.}\,\varphi = \text{dost.}\,\tfrac{1}{2}\varphi^2 - \text{wst.}\,\tfrac{1}{2}\varphi^2$$

i znosząc mianownika 2 otrzymamy

$$4\delta\,\text{wst.}\,\tfrac{1}{2}\varphi\,\text{dost.}\,\tfrac{1}{2}\varphi = (h+h')^2\,\text{wst.}\,\tfrac{1}{2}\varphi^2 - (h-h')^2\,\text{dost.}\,\tfrac{1}{2}\varphi^2$$

$$\text{skąd}\ \delta = \left(\frac{h+h'}{2}\right)^2 \text{sty.}\,\tfrac{1}{2}\varphi - \left(\frac{h-h'}{2}\right)^2 \text{doty.}\,\tfrac{1}{2}\varphi.$$

Aby tę poprawkę δ otrzymać w łuku i to w sekundach wyrażoną, należy jéj ważność pomnożyć przez wst. 1″, a nazywając w tym przypadku poprawkę δ'', będzie

$$\delta'' = \left(\frac{h+h'}{2}\right)^2 \text{wst.}\,1''\text{sty.}\,\tfrac{1}{2}\varphi - \left(\frac{h-h'}{2}\right)^2 \text{wst.}\,1''\text{doty.}\,\tfrac{1}{2}\varphi.$$

Obrachowawszy z tego ostatniego wzoru δ'', mieć będziemy

$$\varphi' = \varphi + \delta''.$$

Jeżeli się kąty mierzą teodolitem, poprawka ta niepotrzebna, albowiem na kole teodolitu odczytuje się kąty już do poziomu sprowadzone.

Dajmy przykład rachunku sprowadzenia kąta do poziomu.

Niech kąt między dwoma stanowiskami A i B mierzony ze stanowiska O będzie $\varphi = 51^{\circ}9'29'''744$, tudzież kąty wysokości tych punktów nad poziom

$$h = -1^{\circ}32'45'', \quad h' = -1^{\circ}7'10''$$

t. j. oba punkta A i B były pod płaszczyzną poziomu; tedy

$$\tfrac{1}{2}(h+h') = -1^{\circ}19'57'''5 = -4797'''5,$$
$$\tfrac{1}{2}(h-h') = -0^{\circ}12'47'''5 = -\ \ 767'''5,$$

przeto	$2 log. 4797'5 = 7{\cdot}3620300$	$2 log. 767'5 = 5{\cdot}7701568$	
	$log.$ wst. $1'' = 4{\cdot}6855749$	$= 4{\cdot}6855749$	
	$log.$ sty. $\frac{1}{2}\varphi = 9{\cdot}6800379$	$log.$ doty. $\frac{1}{2}\varphi = 0{\cdot}3199621$	
	$1{\cdot}7276428$	$0{\cdot}7756938$	

odpowiadająca liczba $53'''413$ .... $5'''966$

jest tedy poprawka $\delta'' = 53'''413 - 5'''966 = 47'''447$

a następnie kąt $\varphi' = 51^{\circ}9'29'''744 + 47'''447 = 51^{\circ}10'17'''191$.

Ponieważ takie sprowadzanie kąta do poziomu jest prawie ciągłego w większych pomiarach użycia, ułatwiono zatém obrachowanie poprawki δ'', układając w tablicę $log. \frac{1}{4}a^2$ wst. $1''$, nadając ilości a różne ważności, poczynając np. od $100''$ i dla każdéj 6téj lub 5téj sekundy, t. j. dla $a = 100''$, $106''$, $112''$..... lub $a = 100''$, $105''$, $110''$..... rachując $log. \frac{1}{4}a^2$ wst. $1''$ i układając tak otrzymane logarytmy w tablicę obok ważności a. Z téj tablicy, w któréj a przedstawia nam tak $h+h'$, jako téż i $h-h'$, znajdziemy z ważnościami $h+h'$ i $h-h'$ gotowe $log. \left(\frac{h+h'}{2}\right)^2$ wst. $1''$ i $log. \left(\frac{h-h'}{2}\right)^2$ wst. $1''$. Do tak znalezionych logarytmów dodając do piérwszego $log.$ sty. $\frac{1}{2}\varphi$, a do drugiego $log.$ doty. $\frac{1}{2}\varphi = log. \frac{1}{\text{sty.} \frac{1}{2}\varphi}$ t. j. dziesiętne dopełnienie *log.* sty. $\frac{1}{2}\varphi$, otrzymamy bardzo prędko poprawkę δ''. Takie tablice znajdują się już obrachowane w dziełach Geodezyi poświęconych jak „*Traité de Topographie par Puissant*“ „*Geodesie par Francoeur*“ i wielu innych.

§. 77.

W geodetycznych pomiarach często także zachodzi potrzeba mieć długość łuku 1″ na powiérzchni ziemi, tudzież znalezioną odległość dwóch jakichkolwiek miejsc w łuku, wyrazić w linii prostéj, albo raczéj w milach; jakimże sposobem przyjść do tego? Francuzkie pomiary czwartéj części okręgu południka przez Paryż przechodzącego, po świéżém przejrzeniu i porównaniu takowych przez sławnego Enckego astronoma berlińskiego z podobnemi pomiarami w różnych stronach dotąd wykonanemi okazały, że czwarta część wspomnionego południka wynosi 5130949·5 sążni francuzkich (toise), skąd byłby $1^{\text{metr}} = 0{\cdot}51309495$, gdy dotąd we wszystkich dziełach przyjęto Metr $= 0{\cdot}513074$ lub $= 0{\cdot}513060$ sążni (toise). Z tego też powodu przyjęto dla Francyi długość 1 stopnia 57020 sążni lub 111134 metrów, skąd wypadła długość łuku

$$1'' = \frac{57020}{3600} = 15{\cdot}83889 \text{ sążni} = 30{\cdot}87057 \text{ metrów.}$$

Według zaś wyżéj powołanych poszukiwań Enckego „*Berliner Jahrbuch für 1851*“ wypada

długość $1^\circ = 57010{\cdot}55$ sążni $= 111120{\cdot}6195$ metrów

a stąd długość łuku $1'' = 15{\cdot}83626$ sążni $= 30{\cdot}866838$ metrów. Ale ponieważ ziemia nie jest doskonałą kulą, przeto i łuki nietylko w różnych stronach, ale też i w różnym kierunku mierzone, nie są jednakowéj długości. Sławny astronom Bessel w „*Astronomische Nachrichten Nr. 438*“ podał wzory na rachowanie długości łuków, tak w kierunku południka, jako i w kierunku równoleżnika z wiadoméj szerokości geograficznéj miejsca. Oznaczywszy długość łuku 1^0 południka miejsca, którego szérokość geograficzna $= \varphi$ przez P, długość łuku 1^0 równoleżnika tegoż miejsca przez R, wzory Bessela są następujące:

$$P = 57013{\cdot}109 - 286{\cdot}337 \,\text{dost.}\, 2\varphi + 0{\cdot}611 \,\text{dost.}\, 4\varphi + 0{\cdot}001 \,\text{dost.}\, 6\varphi$$

$R = 57156{\cdot}285\, dost.\, \varphi - 47{\cdot}825\, dost.\, 3\varphi + 0{\cdot}060\, dost.\, 5\varphi.$

Długości łuków z tych wzorów otrzymane, wyrażone będą w sążniach francuzkich (toise). Położywszy za dost. 3φ i dost. 5φ ważności w pojedynczych łukach, a potém

$$\text{wst.}\, \psi = e\, \text{wst.}\, \varphi,$$

gdzie $log.\, e = 8{\cdot}9110835$, ostatni wzór następnie krócéj napisać będzie można

$$log.\, R = 4{\cdot}7567009 + log.\, \text{dost.}\, \varphi - log.\, \text{dost.}\, \psi.$$

Dla Krakowa np. gdzie $\varphi = 50^0 3' 50''$ mamy

$$\begin{array}{rr} log.\, 286{\cdot}337 = 2{\cdot}4568775 & log.\, 0{\cdot}611 = 9{\cdot}7860412 \\ log.\, \text{dost.}\, 2\varphi = 9{\cdot}2451305- & log.\, \text{dost.}\, 4\varphi = 9{\cdot}9722759- \\ \hline 1{\cdot}7020080- & 9{\cdot}7583171- \\ \text{odpowiadające liczby } -50{\cdot}3510 & -0{\cdot}5732 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} log.\, 0{\cdot}001 = 7{\cdot}0000000 \\ log.\, \text{dost.}\, 6\varphi = 9{\cdot}7039641 \\ \hline 6{\cdot}7039641 \\ +0{\cdot}0005 \end{array}$$

przeto

$$P = 57013{\cdot}109 + 50{\cdot}3510 - 0{\cdot}5732 + 0{\cdot}0005 = 57062{\cdot}887 \text{ sążni}$$

$$\begin{array}{rr} log.\, e = 8{\cdot}9110835 & 4{\cdot}7567009 \\ log.\, \text{wst.}\, \varphi = 9{\cdot}8846599 & log.\, \text{dost.}\, \varphi = 9{\cdot}8074898 \\ \hline log.\, \text{wst.}\, \psi = 8{\cdot}7957434 & dpł.\, log.\, \text{dost.}\, \psi = 0{\cdot}0008494 \\ \psi = 3^0 34' 55''{\cdot}9 & log.\, R = 4{\cdot}5650401 \\ & R = 36731{\cdot}6 \end{array}$$

Znając długość łuku 1^0 południka, znaléść możemy promień ziemi czyli odległość jéj środka od Krakowa. Gdy bowiem

$$2\pi r = 57062{\cdot}887 \,.\, 360,$$

zatém $r = \dfrac{57062{\cdot}887 \,.\, 180}{\pi} = 3269463{\cdot}\ldots$ sążni francuzkich

Na łuk 1^0 wielkiego koła, jak jest koło południka, rachuje się 15 mil geograficznych, więc

1 mila geograf. $= 3804{\cdot}192$ sążni francuz.

Środek więc ziemi odległy jest od Krakowa $859{\cdot}435$ mil geograficznych.

§. 78.

Po tém przygotowaniu, weźmy następujące

Zagadnienie 4. Wziąwszy za piérwszy południk ten, który przez wyspę Fero przechodzi, wiadomo z obserwacyj astronomicznych, że geograficzna długość Paryża $=1^{\text{godz.}}\ 20^{\text{min.}}$ w czasie $=20^{\circ}$ w łuku, rachując na 1 godzinę 15 stopni; długość zaś geograficzna Krakowa $=2^{\text{god.}}\ 30' 29''\!\cdot\!6 = 37^{\circ} 37' 24''$; oprócz tego obserwacyje astronomiczne wykazały, że szerokość geograficzna Paryża $=48^{\circ} 50' 14'' = \varphi$, Krakowa zaś jak wyżéj $50^{\circ} 3' 50'' = \varphi'$. Jakaż jest najkrótsza odległość Krakowa od Paryża?

Niech na *fig. 36* B będzie północnym biegunem na ziemi, BRB' południk przez wyspę Fero przechodzący, RO równik ziemski, P i K, niech oznaczają miejsca Paryża i Krakowa na kuli ziemskiéj, tedy przez każde dwa z tych trzech punktów i przez środek ziemi poprowadziwszy płaszczyzny, te przetną nam powiérzchnię ziemi w kołach wielkich BPB', BKB' i PK, a łuki między rzeczonemi punktami zawarte, zamkną sferyczny trójkąt PBK, w którym PB jest dopełnieniem szerokości geograficznéj Paryża, czyli $90^{\circ} - \varphi$, KB dopełnieniem szerokości geograficznéj Krakowa czyli $90^{\circ} - \varphi'$, łuk nakoniec PK jest szukaną najkrótszą odległością Krakowa od Paryża. W tym trójkącie oprócz boków PB i KB wiadomym jeszcze jest kąt PBK, bo on się równa różnicy odległości południków krakowskiego i paryzkiego od południka przez Fero idącego, jest przeto tenże kąt równy różnicy długości geograficznych Krakowa i Paryża. Oznaczywszy długość geograficzną Paryża przez λ, a Krakowa przez λ' i kładąc $\lambda - \lambda' = l$, mamy w rzeczonym trójkącie

$$\mathrm{PB} = 90^{\circ} - \varphi = 41^{\circ} 9' 46'',\quad \mathrm{KB} = 90^{\circ} - \varphi' = 39^{\circ} 56' 10'',$$
$$\text{kąt } \mathrm{PBK} = l = 17^{\circ} 37' 24''$$

zatém położywszy szukaną odległość $\mathrm{PK} = d$, według piérwszego zasadniczego wzoru Trygonometryi sferycznéj mamy

$$\text{dost.}\, d = \text{dost.}\,(90^{\circ} - \varphi)\ \text{dost.}\,(90^{\circ} - \varphi') + \text{wst.}\,(90^{\circ} - \varphi)\ \text{wst.}\,(90^{\circ} - \varphi')\ \text{dost.}\, l$$

czyli $\quad \text{dost.}\, d = \text{wst.}\,\varphi\, \text{wst.}\,\varphi' + \text{dost.}\,\varphi\, \text{dost.}\,\varphi'\, \text{dost.}\, l.$

Wprowadziwszy tu kąt posiłkowy tak, iżby było

$$\text{doty.}\, x = \text{doty.}\, \varphi\, \text{dost.}\, l,$$

znajdziemy
$$\text{dost.}\, d = \frac{\text{dost.}\, (\varphi' - x)\, \text{wst.}\, \varphi}{\text{wst.}\, x}$$

t. j.

$$\begin{array}{rlrl}
log.\,\text{doty.}\,\varphi = & 9\text{·}9416540 & x = & 50^\circ 11' 49''\text{·}56 \\
log.\,\text{dost.}\,l = & 9\text{·}9791236 & \varphi' = & 50 \quad 3\ 50 \\
\hline
log.\,\text{doty.}\,x = & 9\text{·}9207776 & \varphi' - x = & - \quad 7' 59''\text{·}56
\end{array}$$

$$\begin{array}{rl}
log.\,\text{dost.}\,(\varphi' - x) = & 9\text{·}9999988 \\
log.\,\text{wst.}\,\varphi = & 9\text{·}8767043 \\
dpl.\,log.\,\text{wst.}\,x = & 0\text{·}1144968 \\
\hline
log.\,\text{dost.}\,d = & 9\text{·}9911999 \\
d = & 11^\circ 30' 16''\text{·}8
\end{array}$$

Najkrótsza zatém odległość Krakowa od Paryża

$= 11^\circ 30' 16''\text{·}8 = 172\text{·}57$ mil geograficznych.

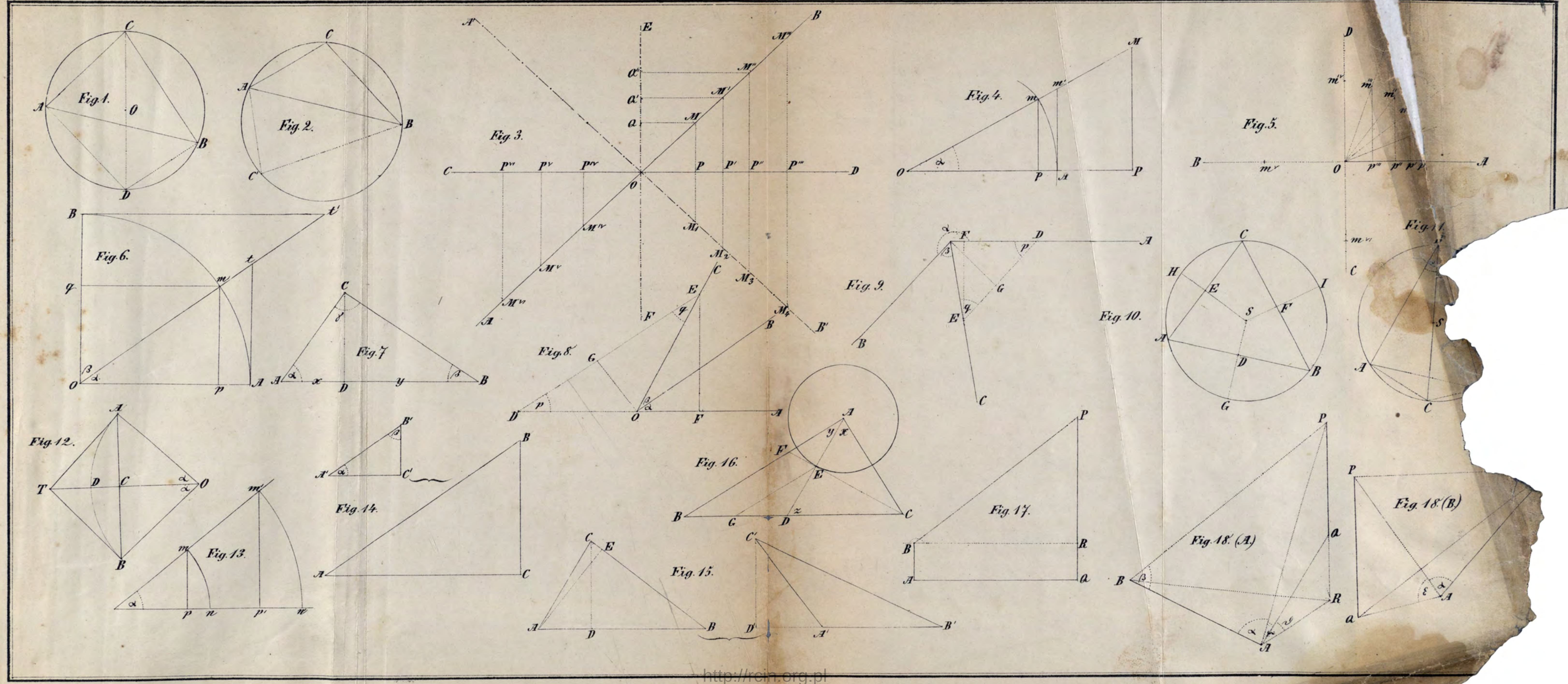
Fig. 1.
Fig. 2.
Fig. 3.
Fig. 4.
Fig. 5.
Fig. 6.
Fig. 7
Fig. 8.
Fig. 9.
Fig. 10.
Fig. 11.
Fig. 12.
Fig. 13.
Fig. 14.
Fig. 15.
Fig. 16.
Fig. 17.
Fig. 18. (A)
Fig. 18. (B)

Tablica I.

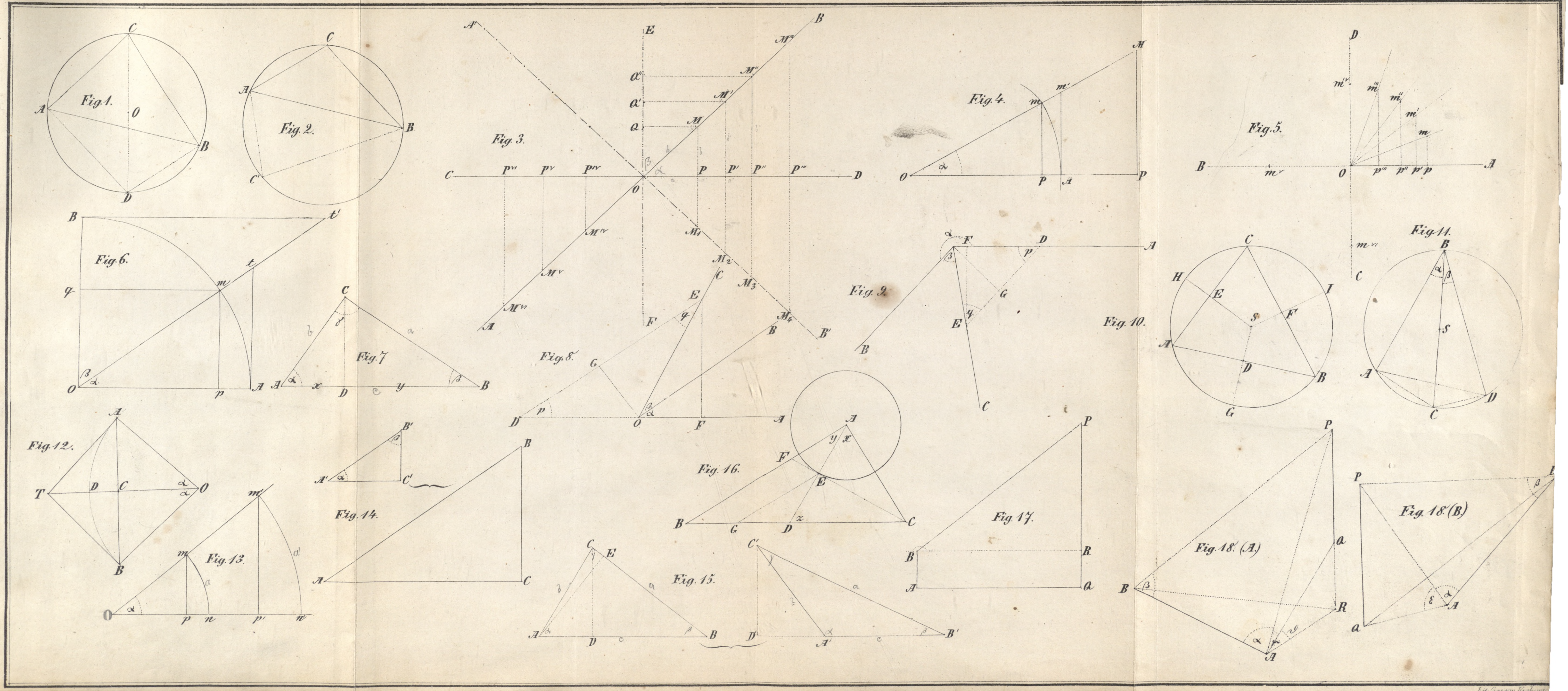

Fig. 1.
Fig. 2.
Fig. 3.
Fig. 4.
Fig. 5.
Fig. 6.
Fig. 7.
Fig. 8.
Fig. 9.
Fig. 10.
Fig. 11.
Fig. 12.
Fig. 13.
Fig. 14.
Fig. 15.
Fig. 16.
Fig. 17.
Fig. 18. (A.)
Fig. 18. (B)

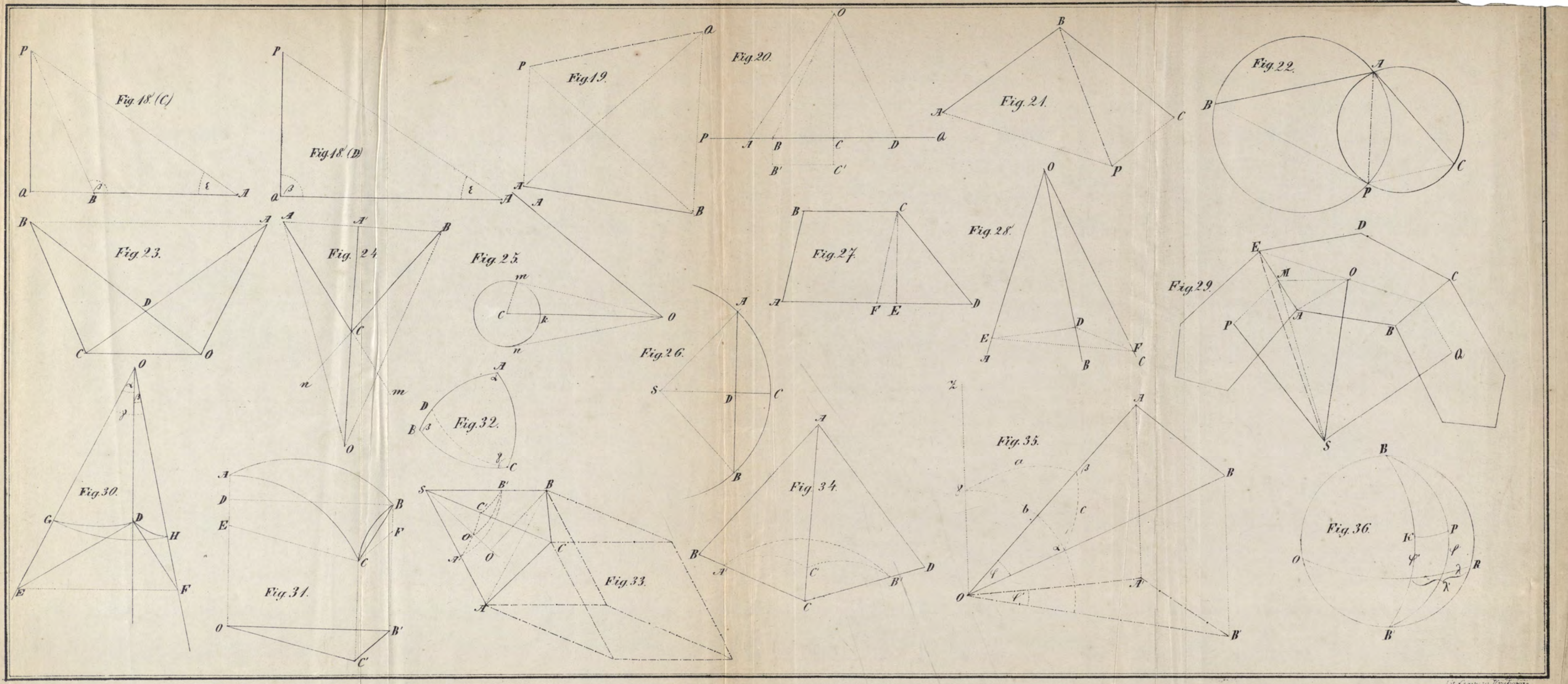
Fig. 18. (C)
Fig. 18. (D)
Fig. 19.
Fig. 20.
Fig. 21.
Fig. 22.
Fig. 23.
Fig. 24.
Fig. 25.
Fig. 26.
Fig. 27.
Fig. 28.
Fig. 29.
Fig. 30.
Fig. 31.
Fig. 32.
Fig. 33.
Fig. 34.
Fig. 35.
Fig. 36.

Tablica II.

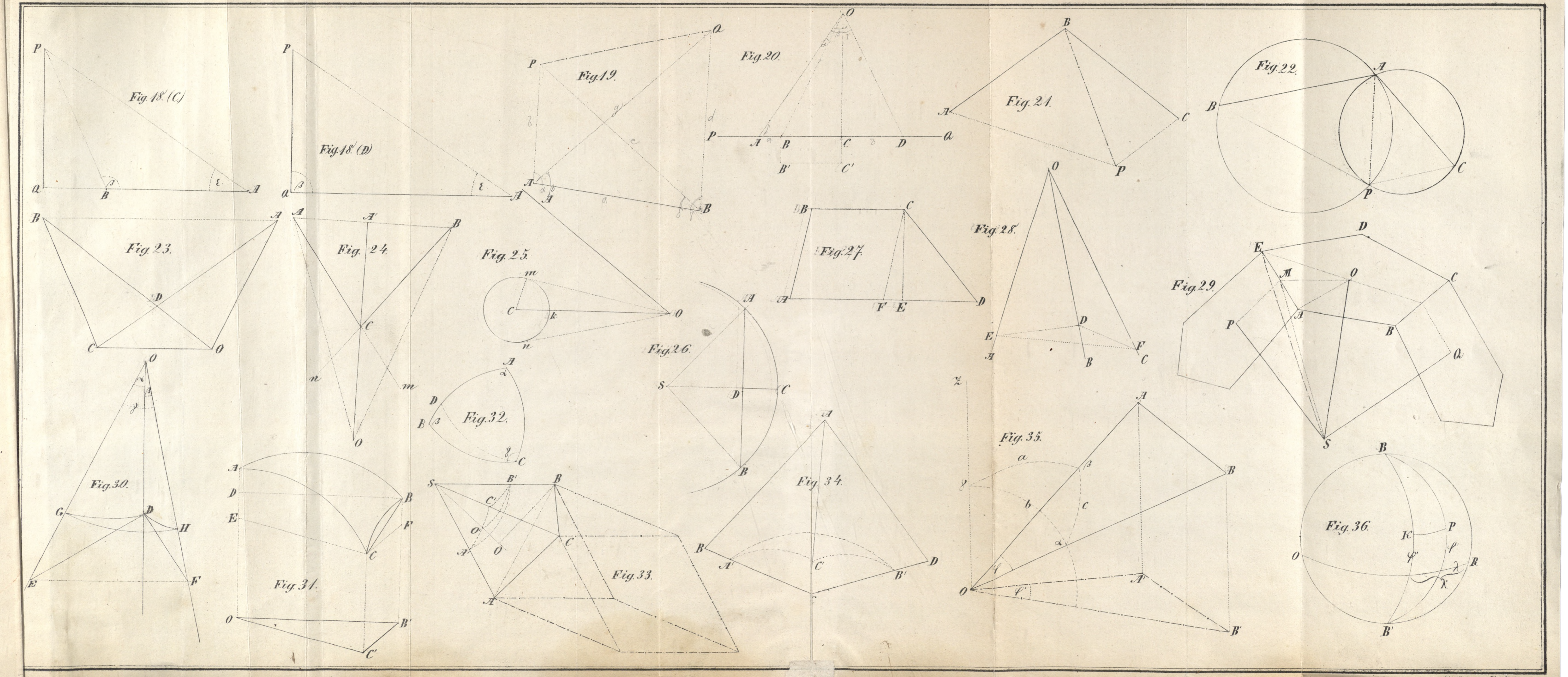
Fig. 18. (C)
Fig. 18. (D)
Fig. 19.
Fig. 20.
Fig. 21.
Fig. 22.
Fig. 23.
Fig. 24.
Fig. 25.
Fig. 26.
Fig. 27.
Fig. 28.
Fig. 29.
Fig. 30.
Fig. 31.
Fig. 32.
Fig. 33.
Fig. 34.
Fig. 35.
Fig. 36.