

Marek JANAS

KINEMATYCZNA METODA OKREŚLANIA
UDŹWIGU KONSTRUKCJI ZBROJONYCH

Praca habilitacyjna

Instytut Podstawowych Problemów Techniki PAN
Warszawa 1975

SPIS TREŚCI

I Kinematyczna metoda określania nośności konstrukcji zbrojonych - Wprowadzenie

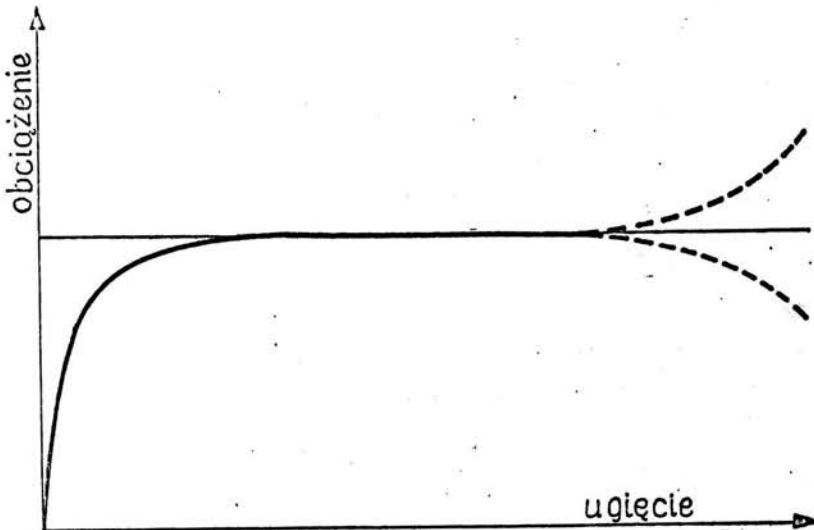
1. Kinematical compatibility problems in yield-line theory
2. Large plastic deformations of reinforced concrete slabs
3. Arching action in elastic-plastic plates

Uzupełnienia:

- Przeskok w zginanych elementach żelbetowych
- Zagadnienie maksymalnego udźwigu żelbetowych powłok walcowych

KINEMATYCZNA METODA OKRESLANIA UDZWIGU KONSTRUKCJI ZBROJONYCH

W dziedzinie inżynierskiej teorii plastyczności najszersze zastosowanie zdobyła sobie teoria nośności granicznej, której podstawy przedstawione zostały w usystematyzowanej formie przez D.C.DRUCKERA, W.PRAGERA i J.H.GREENBERGA [1]. Opierając się na modelu ciała idealnie plastycznego pozwala ona określić intensywność obciążenia, przy której konstrukcja traci cechy geometrycznej niezmienności. Oznacza to, że odkształcenia konstrukcji narastać mogą wówczas bez przyrostu obciążania. Podstawowe twierdzenia teorii nośności granicznej opierają się na założeniu geometrycznej liniowości konstrukcji; odkształcenia uznawane są za dostatecznie małe aby ich wpływ na równania równowagi był pomijalny. Zachowanie się konstrukcji idealnie plastycznej przy spełnieniu tego założenia przedstawione jest schematycznie na rys.1 /linia ciągła/.



RYS. 1

W rzeczywistych konstrukcjach po, początkowej fazie plastycznego płynięcia, w której układ rzeczywiście może zachowywać się jak mechanizm, konfiguracja odkształcona zaczyna się na tyle różnić od wyjściowej, że nie można już zakładać geometrycznej liniowości konstrukcji. Mamy wówczas do czynienia z geometrycznym wzmocnieniem lub osłabieniem konstrukcji; efekt ten zaznaczono na rys.1 liniami przerywanymi.

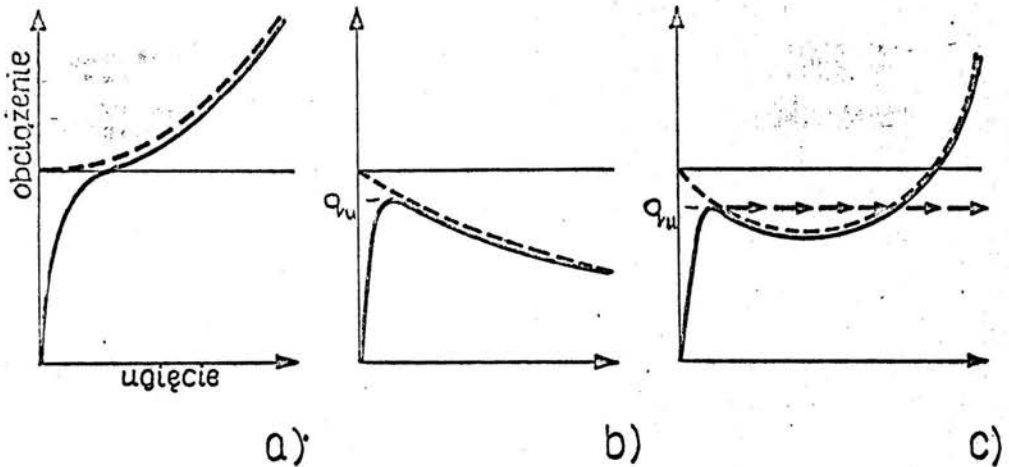
W szeregu przypadków /np. przesuwnie podparte układy belkowe/ "platforma plastyczna" z rys.1 jest dostatecznie długa aby teoria nośności granicznej mogła dawać zadowalające rezultaty; jednakże w bardzo wielu kategoriach konstrukcji wpływ geometrycznej nieliniowości uwidacznia się bardzo wyraźnie nawet już w pierwszej fazie procesu deformacji. Dla tych przypadków nieliniowość określana zwykle jako efekt "drugiego rzędu" może mieć pierwszorzędną znaczenie. Na problem ten zwrócił pierwszy uwagę E.T.ONAT [2].

Wpływ nieliniowości geometrycznej w plastycznej fazie odkształcenia może objawiać się jako jeden z trzech efektów:

- a. wzmocnienie geometryczne,
- b. niestateczność,
- c. przeskok.

Odpowiednie krzywe charakterystyczne dla tych efektów pokazane są liniami ciągłymi na rys.2.

Efekt wzmocnienia geometrycznego /rys.2a/ występuje np. bardzo wyraźnie w cienkich płytach metalowych, dla których /por.np. [3]/ trudno jest w ogóle określić obciążenia odpowiadające nośności granicznej. Klasycznymi przypadkami osłabienia geometrycznego /rys.2b/ i niestateczności są np: pręty ściskane mimośrodowo, lub rury obciążone ciśnieniem wewnętrznym. Zjawisko przeskoku /rys.2c/ występuje, gdy w pierwszej fazie odkształcenia plastycznego mamy efekt geometrycznego osłabienia, a przy bardziej zaawansowanym procesie przeważać zaczyna wzmocnienie. Mamy z nim do czynienia np. w przypadku metalowych powłok o bardzo małej wyniosłości oraz dla nieprzesuwnie podpartych płyt i belek z materiałów o różnych cechach plastycznych przy ściskaniu lub rozciąganiu /z tzw.



RYS. 2.

materiałów "znakoczułych"/.

Analiza zagadnień nieliniowych fizycznie /materiał sprężysto-plastyczny/ i geometrycznie natrafia na znaczne trudności. Rozwiązania uzyskać można na drodze numerycznej, stosując na ogół pewne uproszczenia, jak np. wykorzystywanie teorii deformacyjnej zamiast teorii plastycznego płynięcia /np. Z.WASZCZYSZYN [4]/. Procedury obliczeniowe wymagają znacznego nakładu pracy i kosztów /czas pracy maszyny/, zaś osiągnięte rezultaty bywają mało przydatne dla wyciągania wniosków jakościowych.

Znacznie wygodniejsze jest operowanie modelem konstrukcji sztywno-plastycznej. Dla takiego modelu uzyskano szereg rozwiązań, także analitycznych, dla kołowo symetrycznych płyt /U.LEPIK [5]/ i powłok walcowych /M.DUSZEK i A.SAWCZUK [6]/. W przypadku konstrukcji metalowych, szczególnie charakteryzujących się geometrycznym wzmocnieniem, podejście takie daje na ogół zadowalające rezultaty.

Dla bardziej złożonych konstrukcji konieczne jest poszukiwanie metod przybliżonych w rodzaju tych, które znalazły zastosowanie w klasycznej teorii nośności granicznej. Szczególnie wygodnym okazało się zaproponowane przez E.T.ONATA i R.M.HAYTHORNTHWAITE'a [7] podejście stanowiące t.zw. analizę "stanów pozagranicznych". Zakładając niezmienność ogólnego charakteru mechanizmu plastycznego płynięcia /np. rozmieszczenie przegubów plastycznych w belkach/ określamy chwilową nośność graniczną dla kolejnych etapów procesu odkształcenia; w ten sposób otrzymujemy poszukiwaną zależność między obciążeniem i ugięciem. Tego rodzaju postępowanie stosowane było np. dla powłok stalowych przez M.DUSZEK [8], zaś dla płyt żelbetowych przez A.R.RŻANICYNA [9] oraz A.SAWCZUKA i L.WINNICKIEGO [10].

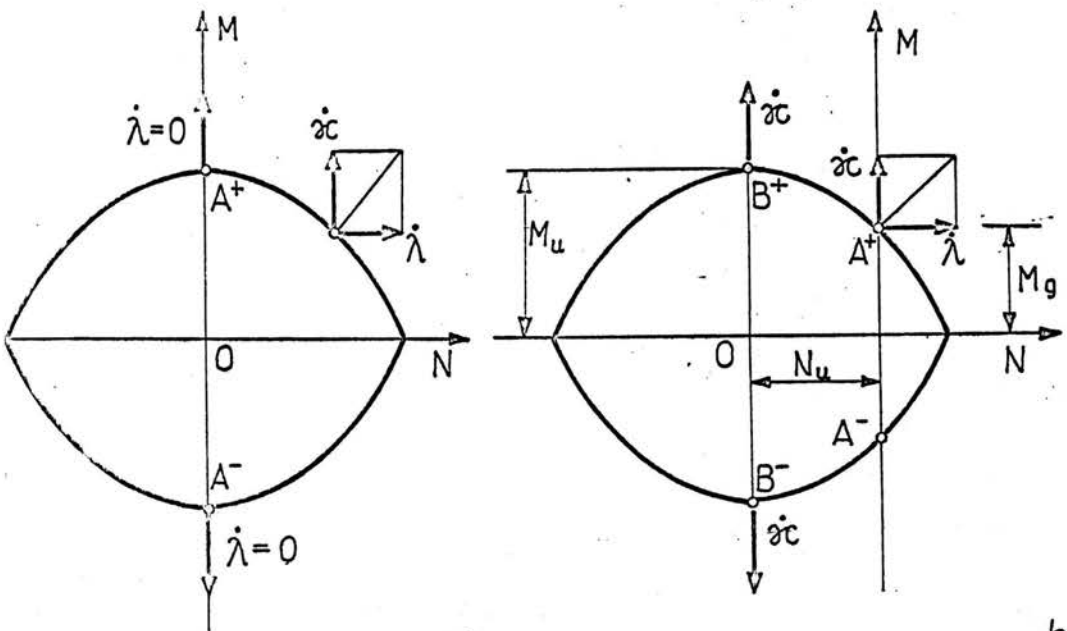
Podejście metodą "stanów pozagranicznych" jest szczególnie wygodne do stosowania dla konstrukcji, których materiał podlega warunkowi plastyczności największych naprężeń głównych /warunek Galileusza/. Do tej kategorii należą np. konstrukcje żelbetowe; w ich przypadku znaleźć może zastosowanie znana metoda linii załamów K.W.JOHANSENSA [11], którą dają się stosować także /por. [12]/ w przypadkach bardziej złożonych niż proste zginanie.

Efekty geometrycznej nieliniowości występują szczególnie silnie w przypadku zginanych elementów z materiałów "znaczących", do których w pierwszym rzędzie zaliczyć należy żelbet. Zginaniu tego rodzaju konstrukcji towarzyszą odkształcenia ich powierzchni środkowych; jeśli więzy zewnętrzne lub wewnętrzne przeciwstawiają się swobodnym przemieszczeniom w płaszczyźnie środkowej, już we wczesnej fazie deformacji występują znaczne siły ściskające. Jest to t.zw. "efekt tarczowy", którego istotę omówimy nieco później, zaś rezultatem jego oddziaływania jest niestateczne zachowanie się konstrukcji w pierwszej fazie procesu deformacji. Wynikiem tego jest obserwowany w doświadczeniach gwałtowny charakter zniszczenia żelbetowych płyt zamocowanych /por.np. R.H.WOOD [13]/.

W przypadku konstrukcji charakteryzujących się wyraźnym początkowym osłabieniem geometrycznym, dla prawidłowej oceny jej rzeczywistego udźwigu /obciążenie Q_{ν} na rys.2b,c/ niezbędne jest uwzględnienie nie tylko zmian geometrii układu, ale także wpływu na nie odkształceń sprężystych. Zbiór publikacji do którego wstęp stanowi niniejszy tekst, poświęcony jest opracowaniu przybliżonej metody pozwalającej określać w możliwie prosty sposób rzeczywisty udźwig konstrukcji "znakoczujących" /żelbet, beton, mur, zbrojone tworzywa/. Metoda ta polega na zastosowaniu uogólnionej metody linii załomów [12] do analizy zagadnień nieliniowych.

W dalszym ciągu opracowania omówione zostaną założenia, podstawowe wyniki i zakres zastosowania metody na tle ogólnego stanu badań w dziedzinie określania udźwigu zginanych elementów konstrukcji.

W teorii konstrukcji inżynierskich wygodnie jest na ogół posługiwać się wielkościami wypadkowymi: siłami i momentami; takimi też wielkościami operuje klasyczna mechanika budowli. W teorii konstrukcji plastycznych stosuje się wprowadzone przez W.PRAGERA [14] uogólnione naprężenia Q_i i odkształcenia Q_j , przy czym uogólnionymi naprężeniami są te z sił wypadkowych, dla których odpowiednie odkształcenia nie są tożsamościowo równe zero. W teorii nośności granicznej wystarczy zwykle posługiwać się jedynie uogólnionymi naprężeniami, należy jednak pamiętać, że rzeczywista przestrzeń sił wewnętrznych ma więcej wymiarów, a redukcja ich liczby jest wynikiem operowania rzutami lub przecięciami ogólnej powierzchni granicznej; analizowali to dla konstrukcji powierzchniowych A.SAWCZUK i J.RYCHLEWSKI [15]. Szczególnie w przypadku zginanych konstrukcji z materiałów o różnych cechach wytrzymałościowych przy ściskaniu i rozciąganiu /znakoczących/automatyczne redukowanie liczby wymiarów przestrzeni sił wewnętrznych prowadzić może do nieporozumień i błędnych rezultatów.



a) RYS. 3.

b)

I tak np. jednoczesne przyjęcie czysto zgięciowego stanu "w siłach" ($N_{ij}=0$) i "w odkształceniach powierzchni środkowej" ($\lambda_{ij}=0$) jest uzasadnione w przypadku materiałów klasycznych /metalopodobnych/, lecz często okazuje się niedopuszczalne dla konstrukcji z materiałów znakoczujących. Można to przedstawić na najprostszym przykładzie stanu granicznego zginanej belki o przekroju prostokątnym. Krzywa graniczna w przestrzeni momentu zginającego M i siły osiowej N dla materiału klasycznego /rys.2a/ jest symetryczna względem osi i w przypadku stanu czysto zgięciowego równowaga graniczna odpowiada jednemu z punktów na osi momentów: A^+ lub A^- . Zgodnie ze stowarzyszonym prawem płynięcia plastycznego zachodzi wówczas jednocześnie $N=0$ i $\lambda=0$. W przypadku materiału znakoczującego analogiczna krzywa /por. [16]/ jest niesymetryczna /rys.3b/; warunek znikania sił osiowych $N=0$ /przekrój/ i warunek znikania odkształceń osi środkowej $\lambda=0$ /rzut/ dają więc różne rzędne, odpowiednio: A^+ i A^- oraz B^+ i B^- . Dla każdego z tych dwóch stanów zgięciowych powinniśmy operować teraz inną wielkością momentu granicznego M_g lub M_u na rys.1b/. W wyniku tego np. przy nieprzesuwności podpór w obciążonej tylko poprzecznie belce muszą się pojawić siły osiowe N_u .

Dla konstrukcji o wyższej wytrzymałości przy ściskaniu niż przy rozciąganiu /beton, żelbet/ pojawiają się siły ściskające dające t.zw. "efekt tarczowy" w płytach lub "efekt łukowy" w belkach. Na istnienie tego efektu zwracał już dawno uwagę A.A.GWOZDEW [17], a później D.C.DRUCKER [18] i R.H.WOOD [13], jednakże próby praktycznego wykorzystania w obliczeniach wynikającego stąd wzmocnienia konstrukcji były dość rzadkie /np. S.M.KRYŻOW [14] dla belek żelbetowych, K.THOMAS [20] - dla konstrukcji mурowych/. Omawiany efekt zależy w bardzo dużym stopniu od warunków podparcia w kierunkach równoległych do płaszczyzny środkowej konstrukcji. Warunkom tym, choć - jak wykazano to w pracy [21] - mogą one mieć poważny wpływ na nośność konstrukcji, poświęca się na ogół mało uwagi przy

obliczaniu i konstruowaniu płyt i belek; dotyczy to także efektu tarcia [21] występującego na nieidealnych podporach przesuwnych. Oddziaływaniem efektu tarczowego tłumaczy się także obserwowany doświadczalnie /por. R. TAYLOR [22]/ znaczny wzrost /do 60%/ nośności płyt żelbetowych na przebiecie w przypadku zapewnienia nieprzesuwności ich podpór.

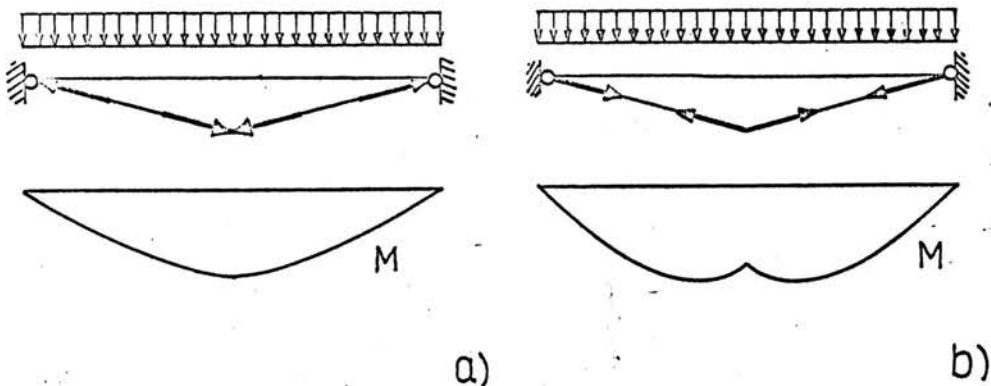
Dla konsekwentnego uwzględnienia efektu tarczowego konieczne jest, jak zaznaczono na wstępie, rozpatrzenie pełnego zestawu sił wewnętrznych występujących w konstrukcji i odpowiadających im uogólnionych odkształceń. Wychodząc z kompletu 8 sił wewnętrznych dla płyt przeprowadzono w pracy 23 analizę skutków przyjmowania upraszczających założeń ograniczających klasę dopuszczalnych mechanizmów plastycznej deformacji. Z takimi ograniczeniami związana bywa konieczność spełnienia dodatkowych warunków kinematycznej dopuszczalności pól przenieszeń, chodzi w pierwszym rzędzie o zapewnienie "wewnętrznej zgodności" deformacji w uplastycznionych przekrojach poprzecznych. I tak, jeśli przestrzeń uogólnionych naprężeń dla płyt żelbetowych ograniczymy a priori do momentów zginających, mechanizmy dopuszczające odkształcenia jedynie w przegubach plastycznych nie mogą zawierać układu przegubów różniamiennych. Wyjaśnia to znany, niepokojący fakt, że wyniki badań nośności płyt żelbetowych często znacznie przewyższają rezultaty otrzymane z metody linii załomów, choć te powinny być górnym oszacowaniem nośności.

Jak widać opierając się na analizie czysto zgięciowej oszacowujemy nośność zbyt nisko. Z kolei jednak uwzględnienie efektu tarczowego w ramach procedury zgodnej z klasyczną teorią stanów granicznych prowadzi do przecenienia nośności. Wynika to z faktu, że efekt tarczowy ma niestateczny charakter i maleje wraz z deformacją konstrukcji. W odróżnieniu od klasycznej teorii nośności granicznej zagadnienie należy więc rozpatrywać z uwzględnieniem zmian geometrii układu wywołanych odkształceniami. Jak już zaznaczono, obliczanie skończonych deformacji konstrukcji plastycznych jest zadaniem dość

kłopotliwym i wymagającym znacznego nakładu pracy. Dlatego szczególną uwagę zwrócono na zastosowanie analizy stanów poza-granicznych. Efekt tarczowy analizowali tą metodą R.H.WOOD [13] /płyty kołowe/ i A.SAWCZUK [24] /płyty prostokątne/. W pracach tych operowano deformacyjną teorią plastyczności mającą ograniczone zastosowanie w przypadku procesów związanych ze znacznymi redystrybucjami naprężeń.

W pracy 16 zaproponowano analogiczną metodę postępowania opierając się na teorii plastycznego płynięcia. Jest to ekstrapolacja metody linii załomów z zastosowaniem podejścia energetycznego. Analogiczne podejście zastosowali C.T.MORLEY [26] i C.A.CALLADINE [27].

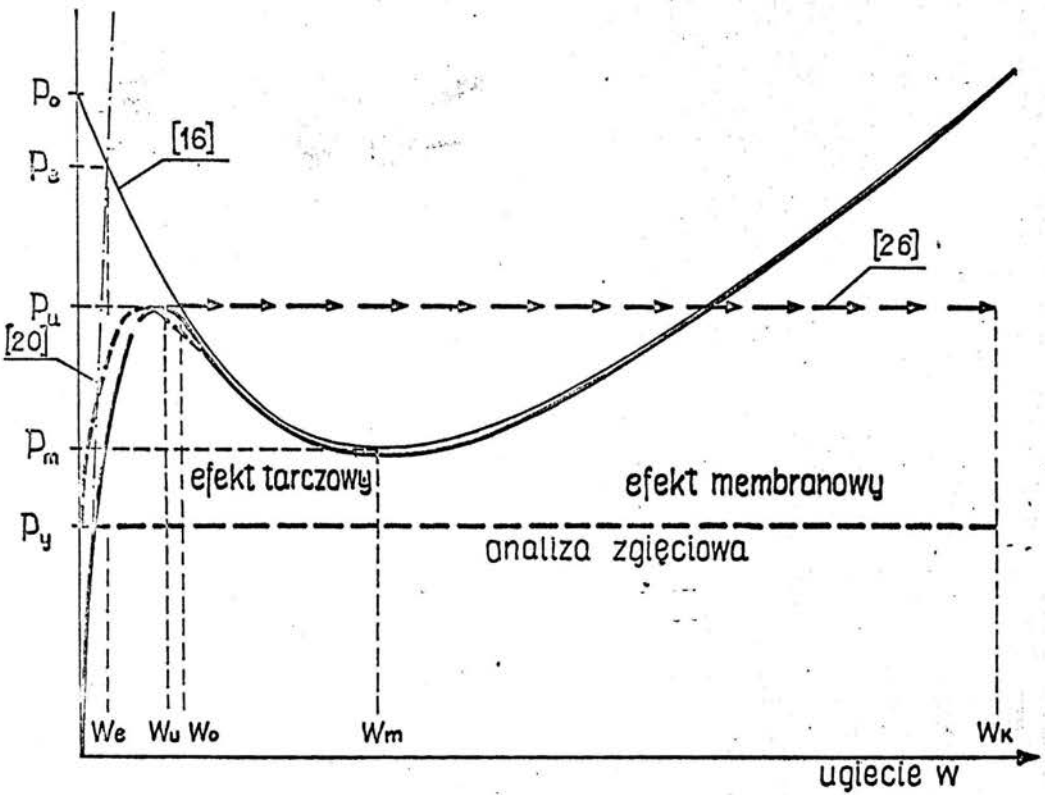
Warto zaznaczyć, że założenie o niezmienności schematu zniszczenia jest szczególnie uzasadnione w przypadku wykazujących efekt tarczowy konstrukcji żelbetowych, dla których mechanizm początkowy składa się z przegubów plastycznych. Jak ilustruje to przykład nieprzesuwnie podpartej belki, w przypadku żelbetu /rys.4a - siła ściskająca/ przegub plastyczny pozostaje w



RYS. 4

pierwotnym położeniu, podczas gdy w przypadku belki stalowej /rys.4b - siła rozciągająca/ wraz ze wzrostem ugięć maksimum momentu zmienia swe położenie.

Wyniki korzystającej z modelu ciała sztywno plastycznego analizy pozagranicznej /cienka linia ciągła na rys.5/ pozwa-



RYC. 5

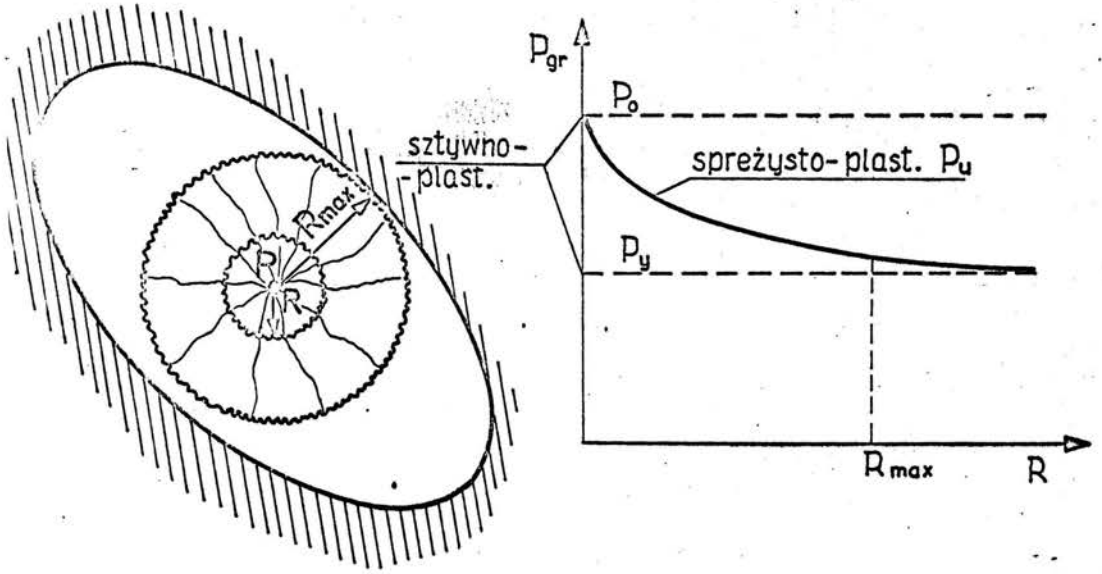
lają na zorientowanie się co do charakteru zachowania się konstrukcji i na określenie najniższej nośności p_m dla konstrukcji odkształconej; nie pozwalają jednak na bezpośrednią ocenę jej rzeczywistego udźwigu wyznaczanego przez maksimum zależności między obciążeniem i ugięciem. Określona na tej drodze nośność dla konstrukcji nieodkształconej p_0 nie będzie mogła być osiągnięta ze względu na deformacje sprężysto-plastyczne pojawiające się przed wystąpieniem początkowego nieskrępowanego płynięcia plastycznego. Aby uwzględnić odpowiadającą tym deformacjom redukcję bieżącej nośności należałoby przyjmować wstępne ugięcia konstrukcji np. równe ugięciom sprężystym w_e lub odpowiednio powiększonym umownym

wielkościom w_0 /por. np. 28 , rozdz.7/.

Ponieważ główny wpływ na rozbieżność pomiędzy rzeczywistym zachowaniem się konstrukcji /gruba linia ciągła na rys.5/ i idealizacją sztywno-plastyczną mają szybkie zmiany wielkości sił osiowych w początkowej fazie deformacji, w pracy [29] zaproponowano przybliżoną metodę analizy uwzględniającą sprężyste odkształcenia tarczowe, a pomijającą giętne odkształcenia sprężyste. Podobne podejście uwzględniające sprężystą podatliwość podpor proponowano w pracach A.JACOBSONA [30] i E.H.ROBERTSA [31], jednakże nie spełniając wymagań teorii plastycznego płynięcia.

Wyniki metody [29] /linia przerywana na rys.5/ opisują dobrze zachowanie się konstrukcji w strefie jej największej nośności i pozwalają względnie łatwo ocenić jej udźwig. Rozwiązanie dla konstrukcji żelbetowych okazuje się być identyczne jak dla konstrukcji o jednorodnym przekroju z odpowiedniego zastępczego materiału znakoczułego. W zależności od przyjętej wielkości współczynnika odkształcalności sprężystej otrzymać możemy całą gamę rozwiązań od modelu sztywno-plastycznego aż po nie wykazujący efektu tarczowego model konstrukcji przesuwnej. Badania doświadczalne A.JACOBSONA [30] dla płyt kwadratowych oraz przeprowadzone specjalnie pod kątem weryfikacji metody [29] badania C.T.MORLEYA [32] /płyty kołowe/ dają dobrą zgodność z podejściem analitycznym.

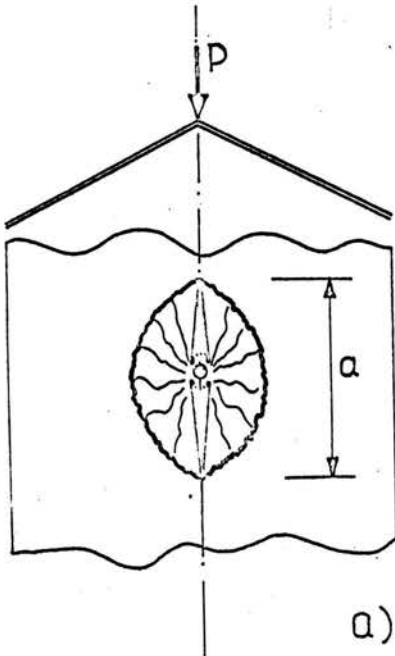
Uwzględnienie wpływu odkształceń sprężystych na nośność pozwala także wyjaśnić /por.[33]/ przyczyny jakościowych sprzeczności z doświadczeniem niektórych wyników nośności granicznej płyt. I tak np. przy obciążeniu płyty zamocowanej siłą skupioną /rys.6a/ analiza sztywno-plastyczna daje nośność niezależną od rozmiarów R strefy uplastycznionej. Natomiast z analizy wg [29] wynika, że maksymalny udźwig P_y będzie tym mniejszy im większe będą te rozmiary /rys.6b/. Tak więc miarodajny mechanizm zniszczenia odpowiadać powinien największemu możliwemu zasięgowi strefy uplastycznionej R_{max} , co zgodne jest z obserwacjami rzeczywistych konstrukcji. W przypadku konstrukcji tarczownicowej obciążonej w kalenicy



a)

b)

RYS. 6



a)

b)

RYS. 7

/rys.7a/ analiza sztywno-plastyczna podaje jako miarodajny /dający najniższą ocenę nośności/ schemat zniszczenia o nie-skończenie małym zasięgu strefy uplastycznionej /rys.7b/. Analiza uwzględniająca odkształcalność sprężystą daje, zgodnie z doświadczeniem, skończoną wielkość strefy α .

Pokazane na rys.3 krzywe dotyczą zmieniającego się w procesie deformacji obciążenia, dla którego możliwa jest równowaga quasistatyczna układu. W rzeczywistości mamy zwykle do czynienia z obciążeniami narastającymi monotonicznie i z chwilą osiągnięcia wartości odpowiadającej udźwigowi konstrukcji p_u równowaga statyczna nie jest możliwa; musi więc nastąpić dynamiczny przeskok do nowego położenia równowagi /strzałki na rys.3/ o ile takie w ogóle istnieje. Tego typu zachowanie konstrukcji żelbetowych obserwuje się w rzeczywistości /np. doświadczenia R.H.WOODA [13]/. Z punktu widzenia skutków wyczerpania nośności konstrukcji istotnym jest określenie jej ugięć w_k po wystąpieniu zjawiska przeskoku. Do tego celu wykorzystać można stosowaną w przypadku obciążeń impulsowych metodę energetyczną /np. N.JONES [34]/ będącą uogólnieniem na zagadnienia dynamiczne kinematycznego podejścia w teorii nośności granicznej. W pracy [35] podano uzyskane na tej drodze proste wzory do określania końcowych ugięć belek oraz elementarną procedurę oszacowywania ugięć płyt.

Ze względu na formalną analogię równań dla plastycznych powłok walcowych i dla belek /por. np. P.G.HODGE [36]/ zaproponowaną w [29] metodę określania udźwigu zastosować można także i w przypadku powłok kołowo-symetrycznych. Podane w pracy [37] rozwiązanie pozwala łatwo uwzględnić znaczną nieraz nadwyżkę nośności krótkich, zamocowanych powłok w stosunku do normalnie stosowanej analizy pomijającej ścisłanie wzdłuż tworzących.

Wyniki analizy sprężysto-plastycznej pozwalają już obecnie na uwzględnienie efektu tarczowego w praktyce obliczeniowej w niektórych prostszych przypadkach. Należy jednak zwrócić uwagę na fakt, że miarodajny udźwig konstrukcji zależy w bardzo dużym stopniu od wielkości współczynnika tarczowej, sprę-

żystej odkształcalności płyty. Przyjmujemy go jako umowną wielkość stałą, podczas gdy w rzeczywistości zależy on m.in. od rozkładu momentów zginających. Do wiarygodnego określenia tego współczynnika potrzebne są dalsze wyniki analizy sprężysto-plastycznych konstrukcji z materiałów znakoczułych oraz - w pierwszym rzędzie - bogatsze materiały doświadczalne. Dla poprawniejszego określenia warunków początkowych potrzebne jest także doprowadzenie do stadium bezpośredniej stosowalności metod analizy zgięciowej dla sprężystych materiałów znakoczułych. Zagadnienia te stanowią temat aktualnie prowadzonych badań.

Z punktu widzenia praktycznych zastosowań ważnymi zagadnieniami wymagającymi także poświęcenia szczególnej uwagi jest wpływ luzów montażowych na udźwieg konstrukcji prefabrykowanych oraz wpływ zmian temperatury.

Literatura

1. D.C.DRUCKER, W.PRAGER, J.H.GREENBERG, Extended limit design theorems for continuous media, *Quat.Appl.Math.*, 9, 1952, 381.
2. E.T.ONAT, The influence of geometry changes on the load deformation behavior of plastic solids, "Plasticity", *Proc. 2nd Symp.Naval Struct.Mech.*, 225, Pergamon Press, NYork 1960.
3. Ch.MASSONET, M.SAVE, "Calcul Plastique des Costructions" 2, CBLIA, Bruxelles 1963.
4. Z.WASZCZYSZYN, Skończone sprężysto-plastyczne ugięcia płyt kołowo-symetrycznych, *Rozpr.Inżyn.*, 15, 1967, 123.
5. U.R.LEPIK, Plastiknoie teczenie tonkich żostko-plastycznych krągłych płastinok, *Izv.AN.ZSRR - Mech.Maszinostr.*, 78, 1960, Nr 2.
6. M.DUSZEK, A.SAWCZUK, Load-deflexion relations for rigid-plastic cylindrical shells beyond the incipient collapse load, *Int.J.Mech.Sci.*, 12, 1970, 893.
7. E.T.ONAT, R.M.HAYTHORNTHWAITE, The load-carrying capacity of circular plates at large deflection, *J.Appl.Mech.*, 23, 1956, 49.
8. M.K.DUSZEK, Plastic analysis of cylindrical shells subjected to large deflections, *Arch.Mech.*, 18, 1966, 599.
9. A.R.RŻANICYN, The design of plates and shells by the kinematical method of limit equilibrium, *IX Congr.Int.Méc.Appl.*, 6, 331, Ed.Univ.de Bruxelles, Bruxelles 1957.
10. A.SAWCZUK, L.WINNICKI, Plastic behavior of simply supported concrete plates at moderately large deflections, *Int.J. Solids Struct.*, 1, 1967, 97.
11. K.W.JOHANSEN, "Brudlinienteorier", København 1943; "Yield-Line Theory", Cement and Concrete Assoc., London 1962.
12. M.JANAS, Limit analysis of non-symmetric plastic shells by a generalized yield-line method, "Non-Classical Shell Problems", 997, North-Holland - PWN, Amsterdam-Warszawa 1964.
13. R.H.WOOD, Plastic and Elastic Design of Slabs and Plates, Thames and Hudson, London 1961.
14. W.PRAGER, General theory of limit design, *Proc. 8th Congr. Appl.Mech.*, Instambul 1952, 2, 65, Istambul 1956.
15. A.SAWCZUK, J.RYCHLEWSKI, On yield surfaces for plastic shells, *AMS*, 12, 1960, 29-.
16. M.JANAS, "Nośność Graniczna Żuków i Sklepień", Arkady, Warszawa 1967.

17. A.A.GWOZDEW, Obosnowanie §33 normy projektowania żelazo-betonnych konstrukcji, *Stroit.Promyslennost*, 17, 1939, 51.
18. D.C.DRUCKER, On structural concrete and the theorems of limit analysis, *Publ.IABSE*, 21, 1961, 49.
19. S.M.KRYZOW, "Piereraspredelenije Usilij w Staticheski Nieopredelinyh Żelezobetonnyh Konstrukcjach", *Izd.Lit.Stroj.*, Moskwa 1964.
20. K.THOMAS, Structural brickwork - materials and performances, *Structural Engineer*, Nr 10, 1971.
21. M.JANAS, A.SAWCZUK, Influence of position of lateral restraints on carrying capacities of plates, *AIL*, 12, 1966, 231-244.
22. R.TAYLOR, some tests on the effect of edge restraints on punching shear in reinforced concrete slabs, *Mag.Conc.Res.*, 17, 1965, 39-.
23. M.JANAS, Kinematical compatibility problems in yield-line theory, *Mag.Conc.Res.*, 19, 1967, 33-.
24. A.SAWCZUK, Membrane action in flexure of rectangular plates with restrained edges, "Flexural Mechanics of Reinforced Concrete" - *Proc.Int.Symp.Miami*, 347, ASCE, New York 1965.
25. M.JANAS, Large plastic deformations of reinforced concrete slabs, *Int.J.Solids Struct.*, 4, 1968, 61.
26. C.T.MORLEY, Yield-line theory for reinforced concrete slabs at moderately large deflexions, *Mag.Conc.Res.*, 19, 1967, 221.
27. C.R.CALLADINE, Simple ideas in the large-deflection plastic theory of plates and slabs, "Engineering Plasticity", 93, Cambridge Univ.Press, London 1968.
28. M.JANAS, J.A.KONIG, "Nośność Graniczna Powłok - Przekrycia i Zbiorniki", Arkady, Warszawa 1968.
29. M.JANAS, Arching action in elastic-plastic plates, *J.Struct. Mech.*, 1, 1973, 277-293.
30. A.JACOBSON, Membrane-flexural failure modes of restrained slabs, *Proc.ASCE J.Struct.Div.*, 93, 1967, 85-112.
31. E.H.ROBERTS, Load-carrying capacity of slabs-strips restrained against longitudinal expansion, *Concrete*, 3, 1967, 369.
32. C.T.MORLEY, Some experiments on circular concrete slabs with lateral restraint, *Finite deformations in plasticity - Euromech 54 /w przygotowaniu/*.
33. M.JANAS, Elastic-plastic analysis of plates and folded structures, "Folded and Prismatic Structures" /*Proc.Symp. IASS Wiedeń 1970*/, 2, Ost.Betonverein, Wien 1972.
34. N.JONES, A theoretical study of the dynamic plastic behavior of beams and plates with finite deflections, *Int.J.Solids Struct.*, 7, 1971, 1007.

35. M.JANAS, Przeskok w żelbetowych belkach i płytach, Prace IPPT /w druku/.
36. P.G.HODGE, "Limit Analysis of Rotationally Symmetric Plates and Shells", Prentice-Hall, Englewood Cliffs N.J. 1963.
37. M.JANAS, Zagadnienia maksymalnego ^{udziału} żelbetowych powłok walcowych, Prace IPPT /w druku/.

Kinematical compatibility problems in yield-line theory

by M. Janas*

FACULTE POLYTECHNIQUE DE MONS, BELGIUM

SUMMARY

An attempt is made to classify assumptions made in yield-line theory in connexion with the upper-bound theorem of limit analysis. Both classical theory and theory taking into consideration membrane forces are examined for reinforced concrete slabs. The complete set of generalized stresses and strain rates is considered, and compatibility conditions imposed by the associated flow law are discussed, including those for the configuration of yield lines and for internal compatibility of the cross-section. In the case of Johansen's yield-line theory, the general type of fan pattern generated from the envelope line is considered, and some statical restrictions applied in the upper-bound technique are discussed. Considerations are limited to the case of isotropy, unless otherwise specified, but conclusions can be more or less directly extended to the case of orthotropic slabs.

Generalized stresses and strain rates

The upper-bound theorem of limit analysis⁽¹⁾ classically relates the rate of work of external forces to the dissipation of energy in the collapse mechanism considered. The fact that, in some techniques (e.g. the equilibrium method), direct use of energy considerations can be avoided does not change this fundamental fact.

A given yield criterion being assumed, stress resultants can be associated (not necessarily uniquely) with each kinematically admissible velocity field (collapse mechanism) and a uniquely defined value of dissipated energy can be computed. Hence, the work equation furnishes, for each mechanism, the corresponding upper bound for collapse load. The work equation, when applied to the real collapse mode, must yield the exact value of the collapse load, this latter being uniquely defined, whereas different mechanisms and even

different stress patterns can possibly be associated with it.

As a starting point, a yield criterion must be adopted; this will define admissibility conditions for the kinematically configurations. A kinematically compatible velocity pattern must thus satisfy two essential conditions:

- (1) fulfilment of geometrical bounds imposed on the structure;
- (2) the possibility of satisfying the associated flow law for the yield criterion adopted.

Whereas the first condition needs no comment, the second has to be explained in more detail. For this purpose, generalized stresses and strain rates must be considered. In the general case, we have eight stress resultants within the cross-section of the slab:

$$M_{\alpha\beta}, N_{\alpha\beta}, T_{\alpha} \dots \dots \dots (1)$$

i.e. moments, membrane and transverse shearing forces, respectively, α, β being orthogonal co-ordinates in the reference plane of the slab. In the most general case, all the eight stress resultants can influence the yield criterion, constituting therefore the set of generalized stresses Q_k . For the isotropic slab, the yield criterion can be presented in the following symbolic form:

$$\Phi(M_{\alpha\beta}, N_{\alpha\beta}, T_{\alpha}) = 0 \dots \dots \dots (2)$$

defining the closed, non-concave surface in the space of stresses Q_k . The velocity field must allow the association of the plastic flow vector (the components of which are the generalized strain rates q_k) with the surface defined by equation 2, by means of the normality law:

$$\dot{q}_k = v_i \frac{\partial \Phi_i}{\partial Q_k} \dots \dots \dots (3)$$

The strain rates q_k are related to the respective stresses Q_k by the dissipation formula

$$dD = Q_k \dot{q}_k ds \dots \dots \dots (4)$$

*On leave from the Polish Academy of Sciences.

with ds denoting the area of an element of the reference plane, and with summation convention used.

Condition (2) imposes, in general, no limitation upon the strain rates, since each free vector can be found orthogonal to the closed surface. However, the situation changes if the influence of some stress resultants Q_i upon the yielding of a cross-section is to be neglected. It is equivalent to the operation of projection of the general yield surface on the planes $Q_i = 0$, and we now have to deal with the cylindrical surface with generatrices parallel to axes Q_i . It is obvious that no plastic flow vector can be orthogonal to such a surface if it has components $\dot{q}_i \neq 0$. It must be pointed out that an essential difference exists between dealing with the projection of the surface and with its cross-section $Q_i = 0$, since in the latter case strain rates $\dot{q}_i \neq 0$ can be admitted. The practical significance of this observation will be demonstrated on pages 42 and 43.

Now, condition (2) can be expressed as: "no generalized strain rates are admitted that correspond to the stress resultants that are not generalized stresses", and conversely: "no stress resultants corresponding to zero strain rates can influence the yield criterion".

Rigid-body motion patterns

Since the general analysis of velocity fields for slabs is extremely difficult, we shall have to confine our considerations to some special classes of collapse mechanism. The yield-line theory considers only the displacement rate distributions governed by the rigid-body motion rule. These distributions can be defined by the pattern of rotation vectors (possibly completed by the vector couples, i.e. translations).

Plastic deformations can now be developed only in the yield lines separating rigid panels of the structure. In the yield lines, new generalized strain rates ('conventional strains') have to be introduced, namely integral values of the foregoing ones, defined by

$$\bar{q}_k = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \int_{\Delta} g_k dn \dots \dots \dots (5)$$

where integration is performed in the direction normal to the yield line (n), and Δ denotes infinitesimal width of the plastic zone. Referring all the strain rates to a co-ordinate system with axes coinciding with local directions normal (n) and tangential (t) to the yield line, we obtain the complete set of generalized strain rates \bar{q}_k :

$$\bar{x}_{nn}, \bar{x}_{nt}, \bar{y}_{nn}, \bar{y}_{nt}, \bar{y}_n \dots \dots \dots (6)$$

The first two are equal to the slope discontinuity (normal and tangential to the yield line, respectively). The second two are the differences of displacements in the reference plane of the rigid parts adjacent to the yield line. The last is the vertical deflexion discontinuity.

Geometrical continuity conditions imposed by the

adjacent rigid panels make the other strain rates equal to zero ($\bar{x}_{nt} = \bar{y}_{nt} = \bar{y}_t = 0$). The normality law and energy formula (equations 3 and 4) are now valid for the newly adopted strain components.

If transverse forces T_α are assumed not to influence the yield criterion, projection procedure yields:

$$\bar{y}_n = \bar{x}_{nt} = 0 \dots \dots \dots (7)$$

and vertical deflexions must be continuous at the yield line, which must thus be straight.

Geometrically, this is equivalent to the assumption that yield lines must coincide with projections of the differences of rotation vectors on the reference plane. Moreover, to satisfy simultaneously equation 7 and the boundary conditions, projections of the rotation vectors for the panels adjacent to the supports must coincide with the support lines.

The classical (Johansen) yield-line theory

If yielding is assumed to be due only to the moment action:

$$\Phi(M_{\alpha\beta}) = 0 \dots \dots \dots (8)$$

all the other stress resultants must be considered as internal reactions and, consequently, kinematically admissible velocity fields must secure, in addition to the kinematic conditions just above, the condition of inextensibility of the slab reference plane. For a rigid-body motion pattern, this is equivalent to the assumption that all rotation vectors lie in the reference plane i.e. that rotation plane and reference plane coincide).

Now the form of the criterion (equation 8) must be given. For an isotropic body this is commonly assumed to be that of maximum principal moments, and can be written as:

$$\begin{aligned} (M_{\alpha\alpha} - M_p)(M_{\beta\beta} - M_p) - M_{\alpha\beta}^2 &= 0 \\ (M_{\alpha\alpha} + M_p')(M_{\beta\beta} + M_p') - M_{\alpha\beta}^2 &= 0 \dots \dots (9) \end{aligned}$$

This is represented by two conical surfaces in the space of generalized stress resultants (Figure 1). M_p and M_p' denote yield moments for uniaxial positive and negative bending, respectively. A similar treatment is possible⁽²⁾ for the case of orthotropy.

If the co-ordinate axes α, β coincide with those of a yield line (n, t), we have because $\bar{x}_{nt} = \bar{x}_{nt} = 0$, a stress state corresponding to the projection of the yield surface in the directions M_{nn} and M_{nt} . Since a double projection of a two-dimensional surface has been made, a zero-dimensional object is obtained, i.e. two points A and B, on the M_{nn} axis. Now, the assumption $M_{nt} = 0$ is due only to the fact that, in the case of isotropy, the projection on the plane $M_{nt} = 0$ and the intersection with it must coincide. For orthotropy, however, the assumption holds only if the direction of the yield line coincides with the principal direction of orthotropy (see, for example, reference 3), otherwise torsional moments M_{nt} must exist at the yield line.

However, whether dealing with the complete surface or with its projections, we always use the same yield

criterion ('square yield criterion'). Differences mentioned in the literature are due only to the different methods of approach to the problem. (See, for example, reference 4.)

If a purely kinematical (i.e. energy) approach is to be adopted, it is only projections that are of interest, whereas if some supplementary statical considerations have to be introduced, the use of the complete criterion becomes necessary. In this connexion, the notion of the 'stepped yield criterion'⁽⁴⁾ has to be used only as a means of justifying the same square yield criterion for reinforced concrete slabs. It is related to compatibility in a cross-section and should be discussed together with the 'internal compatibility' conditions (pages 42 to 44).

Since some misunderstanding may arise from the form of the dissipation formula for an orthotropic slab:

$$dD = M_{px}\psi_x dy + M_{py}\psi_y dx \dots\dots\dots(10)$$

it may be useful to observe that it does not suggest the existence of a stress resultant state $M_{xx} = M_{px}$, $M_{yy} = M_{py}$, but is a simple transformation of

$$dD = M_{nn}\bar{x}_{nn} dt \dots\dots\dots(11)$$

using the relationships:

$$\left. \begin{aligned} M_{nn} &= M_{px} \cos^2 \theta + M_{py} \sin^2 \theta \\ \bar{x}_{nn} &= \psi_x \cos \theta + \psi_y \sin \theta \\ \psi_y &= \psi_x \tan \theta \end{aligned} \right\} \dots\dots(12)$$

where θ denotes an angle between the yield line and the principal direction of orthotropy x .

The least upper-bound solution and supplementary restrictions imposed on it

As has already been pointed out, the only criterion of validity for upper-bound solutions is the kinematical admissibility of the velocity fields considered. However, the exact solution can be obtained with this technique if the real collapse mechanism belongs to the class of velocity field actually considered.

It is true⁽⁵⁾ that the normality law, when applied to the surface defined by equation 9, imposes rectilinearity of one family for both principal strain and principal stress trajectories but, if the stress state corresponds to the intersection of the cones (Figure 1), the trajectories do not have to be (and, in the presence of distributed loads, cannot be) straight ones. Thus, since the class admitted in the yield-line theory does not contain all the possible collapse patterns, it is not certain that an exact solution belongs to this class. Hence we have to remember that we are looking only for a reasonably satisfactory approximate solution, not necessarily for the exact one.

The classical case of this type arises when negative and positive yield lines meet (Figures 2 and 3). It is obvious that, if the orthogonality of lines is not satisfied, the yield patterns cannot correspond to the exact solutions but, if the real configuration contains some

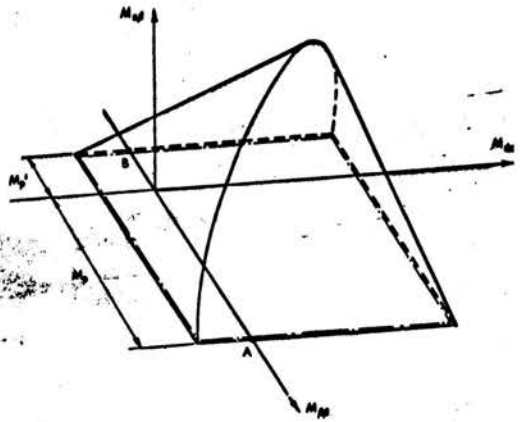


Figure 1

V

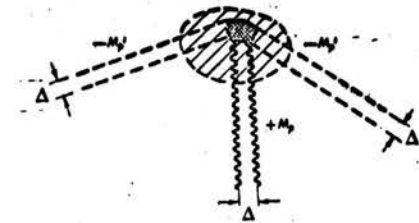


Figure 2

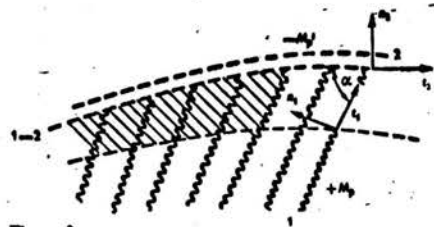


Figure 3

- free edge
- ▨ simply supported edge
- ▩ fixed edge
- ~ positive yield line
- - - negative yield line

Convention used in the Figures

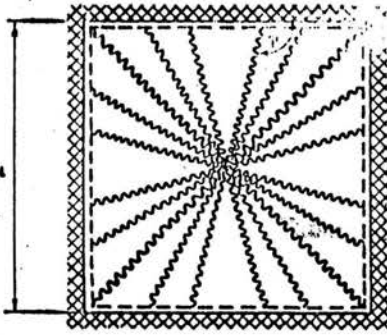


Figure 4

small zones of negative Gaussian curvature ($M_{11} = M_p, M_{22} = -M_p$) shown shaded, or some fan system difficult to analyse (see page 37), the best yield-line solution must permit non-orthogonal intersection of yield lines. An example of such a situation is given on page 41. However, when considering such collapse patterns, one could question whether kinematical compatibility conditions are strictly satisfied. Let us, therefore, briefly examine both the case of intersection of isolated yield lines (Figure 2) and that of a continuous field of yield lines (Figure 3).

In the first case, continuity conditions in the plastic zones ($\dot{\kappa}_{n1} = \dot{\kappa}_{t1} = 0$) cannot be satisfied in the intersection zone. Therefore, some non-homogeneous strain pattern $\dot{\kappa}_{n\beta}$ must exist there. However, if only integral values of external work and dissipation are of interest to us, the question becomes irrelevant, because the contribution of the intersection zone to the work equation is of order Δ^2 ($\Delta \rightarrow 0$), whereas the other components are of order Δ .

A similar situation is observed in the case of a continuous yield-line pattern (Figure 3). Continuity conditions at the intersections of lines 1 and 2 (together with $\dot{\kappa}_{n1} = \dot{\kappa}_{t1} = 0$) give, on the boundary line 1-2, $\dot{\kappa}_{n2} = 0$, but since $\dot{\kappa}_{n1}$ has not to be continuous, hinge 2 still coincides with the direction of principal curvature. Moreover, we must remember that the existing curvature components are here of a different order of magnitude. While κ_{n12} is finite, κ_{nn2} must be infinitely large. Hence, when dealing with conventional strains, we have, from equation 5, $\kappa_{nn2} = \kappa_{t12} = 0$ and $\kappa_{nn2} \neq 0$, and equation 11 still holds.

If we now consider the arguments put forward in reference 4, we can certainly agree that there are many boundary problems for which yield-line collapse mechanisms cannot provide exact solutions. However, the conclusion that corresponding kinematically and statically admissible fields do not exist in these cases



Figure 5

cannot be accepted. Adoption of a yield criterion other than equation 9 does not change the situation qualitatively, except that the existence of an exact solution corresponding to a yield-line collapse pattern is then considerably less likely.

The supplementary statical restrictions imposed on the yield-line patterns (e.g. orthogonality of positive and negative lines) can really be justified only if we are sure that the exact solution belongs to the yield-line class. Otherwise, such restriction, of course, gives information on the more realistic yield-line configuration, but unfortunately can also exclude from consideration the best mechanism in the class actually admitted, thus resulting in an overestimate of the collapse load.

Moreover, in searching for the illusory possibility of finding an exact solution by means of yield-line technique, we can easily violate the essential principles of the upper-bound method. The collapse mode for a square uniformly loaded clamped slab, which is given in reference 7 (Figure 4), may be an example of such a possibility. The solution proposed contains the supplementary condition of statical admissibility, because the moments at the clamped edge are assumed to be $M_{nn} = M_p \cos^2 \varphi - M_p' \sin^2 \varphi$, in order to satisfy (together with moments on the internal yield lines $M_{nn} = M_p$) the square yield criterion. This finally gives a bound for the collapse load of $qL^2 = 37.7M_p$, which is lower than the lowest previously known upper bound ($qL^2 = 42.8M_p$). Unfortunately, if we examine the kinematics of the yield-line pattern, we discover that our rotation vectors must be tangential to some curved line and so violate the support conditions (see page 34), or that these vectors must be collinear, and no relative rotations are possible except at the diagonals. In the latter case we have a diagonal collapse pattern and, if the appropriate dissipation formula is applied, the solution is $qL^2 = 48M_p$.

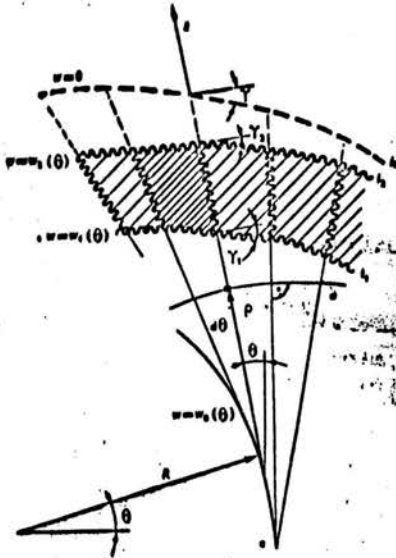


Figure 6

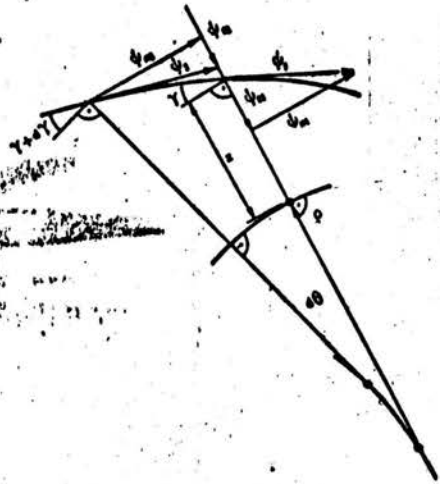


Figure 7

Arbitrary fan patterns

In seeking least-upper-bound solutions, we have to consider as large a class of mechanisms as possible. The yield-line collapse pattern can consist of systems of isolated plastic hinges, or of entirely plastified zones. In the latter case, polar fans are generally considered, whereas straight-line patterns can constitute an arbitrary fan developed from some envelope line (Figure 5). Special cases of this type of yield-line distribution have been analysed by means of the equilibrium method^(6,8), and it would be interesting to investigate the problem by means of the purely kinematical (i.e. energy) technique. Solution of the differential equation developed by Johansen⁽⁶⁾ would now be equivalent to the application of variational procedure (variation of the envelope or both envelope and boundary hinge) to the work equation components in the case of one straight boundary.

Let us analyse the collapse pattern by using a curvilinear orthogonal co-ordinate system with one family coinciding with straight yield lines (Figure 6). If the co-ordinates adopted are: angle θ and distance z from the arbitrary reference line a (normal to the yield lines), the Lamé coefficients are $h_r = 1, h_\theta = \rho(\theta) + z$, where ρ is the radius of curvature of reference line a . Lengths of elements of the co-ordinate lines are now $ds_r = dz, ds_\theta = (\rho + z)d\theta$.

Since, at the line l_0 , deflexions must vanish, rotation vectors of all the infinitesimal strips must be tangential to the line. Then, the continuity condition on the line separating two infinitesimal adjacent portions imposes the equality of the appropriate vector projections

$\psi_{n1} = \psi_{n2}$ (Figure 7). This gives:

$$\psi \cos \gamma = (\psi + d\psi) \cos (\gamma + d\gamma - d\theta) \dots (13)$$

On neglecting second-order terms, we obtain

$$\frac{\psi'}{\psi} + \tan \gamma (1 - \gamma) = 0 \dots (14)$$

with $(\quad)' = d/d\theta$. Finally, if

$$\tan \gamma = \frac{1}{\rho + z_0} \frac{dz_0}{d\theta} \dots (15)$$

is introduced, we have:

$$\psi = \frac{C_0}{(\rho + z_0) \cos \gamma} \exp \left(\int \frac{\rho' d\theta}{\rho + z_0} \right) \dots (16)$$

where $z = z_0(\theta)$ is the boundary equation, and C_0 is an arbitrary constant. Since the relative rotation at the straight yield line is equal to the difference of vectors ψ_1 and ψ_2 we have:

$$\begin{aligned} \bar{x}_{nn} &= \psi_{n1} - \psi_{n2} \\ &= \psi \sin \gamma - (\psi + d\psi) \sin (\gamma + d\gamma - d\theta) \dots (17) \end{aligned}$$

which finally gives:

$$\bar{x}_{nn} = \psi \cos \gamma \left[1 + \frac{z_0'(2z_0' + \rho')}{(z_0 + \rho)^2} - \frac{z_0''}{z_0 + \rho} \right] \dots (18)$$

If the region considered is bounded by two arbitrary curved hinges l_1 and l_2 , with rotations:

$$\bar{x}_{nnl} = \psi_l = \psi \cos (\gamma - \gamma_l) \dots (19)$$

where $l = 1$ or 2

the formula for dissipation in the heavily shaded region (Figure 6) can be established in the form:

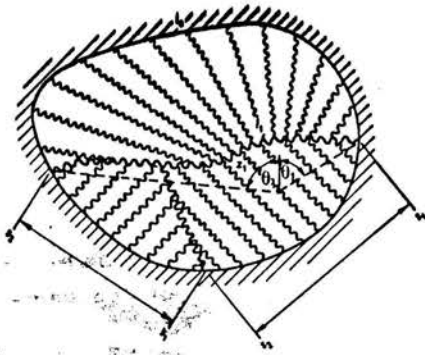


Figure 8

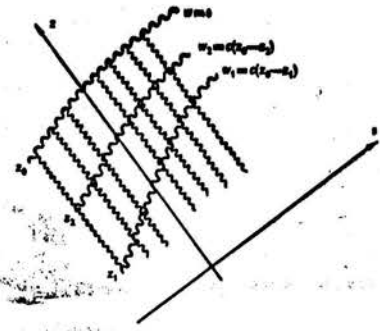


Figure 9

$$dD = \left[\psi_1(z_1 + \rho)M_{p1} - \psi_2(z_2 + \rho)M_{p2} + \int_{z_1}^{z_2} z_m(\rho + z)dz \right] d\theta \dots \dots \dots (20)$$

Finally, by adopting a new variable $r = \rho + z$ and using the relation:

$$R = -d\rho/d\theta \dots \dots \dots (21)$$

valid on the envelope line, we obtain:

$$dD = \left\{ M_p \frac{r_2 - r_1}{r_0} \left[1 + \frac{(r_0' + R)(2r_0' + R)}{r_0^2} - \frac{r_0'' + R'}{r_0} \right] + M_{p1} \left[\frac{r_1}{r_0} + \frac{(r_0' + R)(r_1' + R)}{r_0^2} \right] - M_{p2} \left[\frac{r_2}{r_0} + \frac{(r_0' + R)(r_2' + R)}{r_0^2} \right] \right\} W_0(\theta) d\theta \dots (22)$$

where $W_0(\theta)$ denotes deflexions on the envelope line:

$$W_0 = C_0 \exp \left(- \int \frac{R}{r_0} d\theta \right) \dots \dots \dots (23)$$

and M_{p1}, M_{p2} can be M_p or $-M_p'$ depending upon the sign of the total curvature at the respective hinge. They vanish at the free edge. The most important case is obviously that for which $r_2 = r_0$ and $M_{p2} = -M_p'$, when the zone considered is adjacent to the rigid region or (if $M_p' = 0$) to the simple support. If, moreover, there is no internal free edge, equation 22 can be rearranged in the following form, more convenient for further consideration:

$$dD = \left\{ (M_p + M_p') \left[1 + \left(\frac{r_0' + R}{r_0} \right)^2 \right] + M_p \left(\frac{R r_0' + R}{r_0} \right) + M_p \left[\left(1 - \frac{r_1}{r_0} \right) \left(\frac{r_0' + R}{r_0} \right) \right] \right\} W_0(\theta) d\theta \dots \dots \dots (24)$$

By means of a similar procedure, after integration along the co-ordinate z , one can obtain a formula for the external work T done by the distributed load $p = p(\theta)$ and by a line load at a curved hinge $\bar{p}_1 = \bar{p}_1(\theta)$,

respectively, as:

$$dT_p = \frac{p}{6r_0} \left[r_2^2(3r_0 - 2r_2) - r_1^2(3r_0 - 2r_1) \right] W_0(\theta) d\theta \dots \dots \dots (25)$$

$$dT_l = \bar{p}_1 \left(1 - \frac{r_1}{r_0} \right) \sqrt{r_1^2 + (r_1' + R)^2} W_0(\theta) d\theta \dots (26)$$

Unfortunately, the application of these expressions in their general form is extremely cumbersome. The main difficulty occurs just in the formulation of the boundary equations in the new co-ordinate system. However, some special cases of the patterns considered are of practical interest.

The first case to be considered is, naturally, that of conical bending. If we insert the envelope curvature $R = 0$, and consequently $W_0 = C_0$, into equations 22 to 26 they give the well-known expressions for polar fans. If the fan is adjacent to a rigid region ($r_2 = r_0, M_{p2} = -M_p'$) and if there is no internal free edge (i.e. $M_{p1} = M_p$), equation 24, after integration second term, of its gives:

$$D = C_0(M_p + M_p') \int_{\theta_1}^{\theta_2} \left[1 + \left(\frac{r_0'}{r_0} \right)^2 \right] d\theta - C_0 M_p \left[\left(1 - \frac{r_1}{r_0} \right) \frac{r_0'}{r_0} \right]_{\theta_1}^{\theta_2} \dots \dots \dots (27)$$

It is interesting to observe that dissipation is not influenced by the equations of the internal yield lines but only by the co-ordinates of their origins and ends. Moreover, if the lines meet the boundary negative hinge (Figure 8), the second term in equation 27 disappears and the shapes of the internal hinges do not affect the dissipation formula at all. This fact can greatly simplify the analysis of combined yield-line patterns.

The second special case occurs when the envelope degenerates into the infinitely distant point. Straight lines now become parallel and the slab segment under-

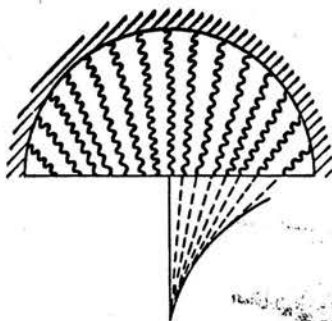


Figure 10

goes cylindrical bending (Figure 9). Substituting $-ds$ for $\rho d\theta$ and letting $\rho \rightarrow \infty$, we obtain directly from equations 22 to 26:

$$dD = [M_p(z_2 - z_1)(-z_0'') + M_{p1}(1 + z_0'z_1') - M_{p2}(1 + z_0'z_2')] C ds \dots\dots\dots(28)$$

$$dT_p = p \left(z_0 - \frac{z_2 - z_1}{2} \right) (z_2 - z_1) C ds \dots\dots\dots(29)$$

$$dT_l = p(z_0 - z_1) \sqrt{1 + z_1'^2} C ds \dots\dots\dots(30)$$

where $()' = d/ds$ and C denotes constant rotation of generatrices. As in deriving equation 27, we obtain, in the case of $z_2 = z_0$, $M_{p1} = M_p$:

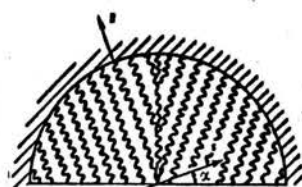
$$D = C(M_p + M_p') \int_{s_1}^{s_2} (1 - z_0'^2) ds - CM_p [z_0'(z_0 - z_1)]_{s=s_1}^{s=s_2} \dots\dots\dots(31)$$

If the region considered does not meet an undeformed area, deflexions W_l at the hinge l_i must be fixed, whereas the boundary line $z = z_0$ is unknown and fictitious. Since deflexions are linear functions of z , we can replace z_0 in equations 28 to 30 by the expression:

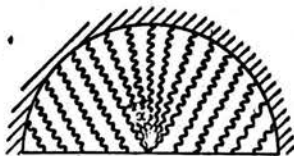
$$z_0 = z_l + W_l/C \dots\dots\dots(32)$$

We now note that the upper bound for collapse load depends only slightly upon small changes in the yield-line configuration. Consequently, applications of combined polar fans and parallel patterns can nearly always provide results very close to the optimal ones obtained by numerical integration of the differential equations established by using the equilibrium method^(6,8).

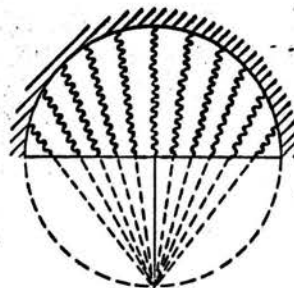
Let us prove this statement for the case of a simply supported and uniformly loaded semi-circular slab



PATTERN I



PATTERN II



PATTERN III

Figure 11

(Figure 10). It was analysed by M. P. Nielson⁽⁶⁾ by means of the equilibrium method with the aid of a computer.

The upper-bound solution obtained in this way is $pa^2 = 4.40M_p$ and corresponds to some fan pattern. Figure 11 shows some simple collapse modes containing combined polar and parallel yield-line patterns. For the pattern I, containing only parallel lines with a discontinuity at the axis of symmetry, we have the boundary equations:

$$\left. \begin{aligned} z_0 = z_2 = \sqrt{a^2 - s^2} \\ z_{1a} = s \cot \alpha \\ z_{1b} = -s \tan \alpha \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(33)$$

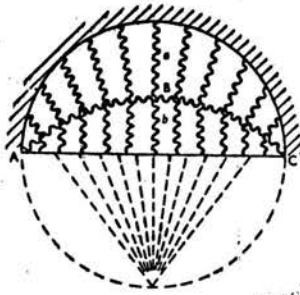


Figure 12

Using these in equations 28 and 29, and assuming that $M_{p1} = M_p$ for $s > 0$, and $M_{p1} = 0$ for $s < 0$ we obtain, after integration:

$$p = \frac{3M_p}{a^2} \frac{\ln \left[\tan \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2} \right) \cot \frac{\alpha}{2} \right] - \tan \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2} \right)}{\tan \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2} \right) + \tan \frac{\alpha}{2}} \dots \dots \dots (34)$$

For $\alpha = 30^\circ$, we obtain $pa^2 = 4.58M_p$. If the central part of the pattern (for $s > 0$) is replaced by the circular fan (pattern II), we obtain, using the above procedure, $pa^2 = 4.52M_p$ for $\alpha = 25^\circ$. Finally, if the fan with the pole on the opposite side of the circle is adopted (III), we obtain $pa^2 = 4.42M_p$. Hence, we see that the collapse modes considered give results 0.5 to 3.4% superior to the optimal one obtained by the much more complicated procedure.

For the same slab loaded with a uniform line load at the free edge, pattern III gives results identical with those obtained in reference 6 by directly satisfying the equation obtained with the equilibrium method. Patterns like those in Figure 11 applied to the case of a circular slab loaded along a diameter give upper bounds 2.7 to 5.5% superior to the results obtained in reference 8 with the aid of a computer.

As has been mentioned, the equilibrium method furnishes directly the fan with the type of envelope line that ensures the least upper bound in the class admitted. Hence it must *a priori* be expected that, for example, the pattern III cannot give a result inferior to that obtained from reference 8; this conclusion might not be true for the other patterns because discontinuous fields have not been considered in the equilibrium method. However, in this special case it is not very likely that some other discontinuous yield-line pattern, e.g. that shown in Figure 12, can give a lower estimate of limit load.

An additional collapse mechanism (Figure 12) is presented because it may be a good example of application of the combined pattern with one boundary line unknown (z_0 for region b). If the boundary line

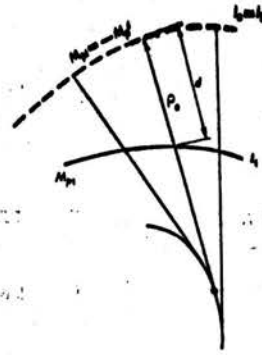


Figure 13

ABC is fixed and deflexions on it are defined from the fan a, the position of the zero-deflexion curve for b can be found from equation 32. The value of M_{p1} (for region a) and M_{p2} (for b) must be defined depending upon the sign of total slope discontinuity across the line ABC. For example, if the slope of the central generatrix is assumed to be the same in both regions, reciprocal rotation at ABC is non-positive and the work equation yields the result $pa^2 = 5.55M_p$, whereas, for smaller slopes of b, the result is slightly inferior, both numerical results being naturally of little interest.

Orthogonal fans

Another simpler case of general fan patterns is that of straight yield lines orthogonal to the boundary line l_0 . In addition to being relatively simple, such a pattern can satisfy the statical conditions at the clamped boundary line and can thus be used when the exact solution is required.

If the condition of orthogonality is adopted, the boundary can be considered, in the co-ordinate system z, θ , as a reference line, whereas in the system r, θ its co-ordinate r_0 is equal to its radius of curvature. Hence we have $r_0' + R = 0$ and rotations of generatrices are constant: $\psi = C$. We thus obtain:

$$W_0 = Cr_0 \dots \dots \dots (35)$$

and the dissipation equation (22) becomes:

$$dD = [r_2(M_p - M_{p2}) - r_1(M_p - M_{p1})]Cd\theta \dots (36)$$

If the region considered is adjacent to the rigid zone ($r_2 = r_0, M_{p2} = -M_p'$) the work equation components are:

$$dD = [(M_p' + M_{p1})r_0 + (M_p - M_{p1})d]Cd\theta \dots (37)$$

$$dT_p = \frac{pd^2}{6} (3r_0 - 2d) Cd\theta \dots \dots \dots (38)$$

$$dT_l = \bar{p}_l \frac{d}{r_0} \sqrt{(r_0 - d)^2 + d'^2} Cd\theta \dots \dots \dots (39)$$

where r_0 is the radius of curvature of the boundary line and d is the distance from it to the inner boundary (Figure 13).

We now see that we have not to refer to the coordinate system r, θ developed from the envelope. As in the case of polar fans, in the absence of an internal free edge (i.e. if $M_{p1} = M_p$), dissipation is not influenced by the shape of the positive hinge. It is now proportional to the length s of boundary line:

$$D = (M_p + M_p')sC \dots \dots \dots (40)$$

Since the formula can be applied also in the case of a non-continuous periphery line, we can obtain from it the known expression for the dissipation in a polygonal slab (Figure 14):

$$D = (M_p + M_p')\Sigma C_i l_i \dots \dots \dots (41)$$

One can, moreover, observe that the work T_p done by uniform external load (equation 38) on the displacement pattern bounded by the closed negative hinge is proportional to the torsional plastic moment for the bar with the periphery of the cross-section defined by the same curve. The sand-heap analogy also holds and known solutions for torsion can be applied here.

As an example of such a procedure, let us consider an orthogonal fan pattern (Figure 15a) for a clamped elliptic slab loaded uniformly. Both the perimeter and the sand-heap volume cannot be expressed by elementary functions, but we can avoid troublesome integrations and use the known results directly. Thus, we have from the perimeter formula:

$$D = 4aE(k^2)(M_p + M_p')C \dots \dots \dots (42)$$

and the solution of torsion problem gives⁽⁹⁾:

$$T_p = \frac{3}{8} p a b^2 \left[2E(k^2) - \frac{b^2}{a^2} K(k^2) \right] C \dots \dots \dots (43)$$

where $k^2 = 1 - b^2/a^2$ and $K(k^2)$, $E(k^2)$ are complete elliptic integrals of the first and second kind, respectively.

For purposes of comparison, let us consider also the simplest polar fan mode (pattern II, Figure 15b). Inserting the polar equation of the ellipse:

$$r = ab(a^2 \cos^2 \theta + b^2 \sin^2 \theta)^{-1/2} \dots \dots \dots (44)$$

into the work equation, we obtain:

$$p = 3(M_p + M_p') \frac{a^2 + b^2}{a^2 b^2} \dots \dots \dots (45)$$

Although this yield-line pattern does not satisfy the statical boundary conditions, it happens that it always gives results slightly inferior to those obtained with the use of the visually much more attractive pattern I. But that is not surprising. Pattern I, although it can satisfy the yield criterion at plastic hinges, is finally seen to be statically inadmissible. This can be shown by considering equilibrium equations referred to the moment trajectories (see, for example, reference 10) that coincide with the yield lines. Thus, we have again a situation in which the adoption of statical restrictions in the yield-line method brings no advantage.

If the same elliptical slab is loaded with the uniform line load p along the longer axis, dissipation remains

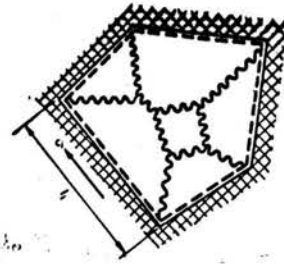
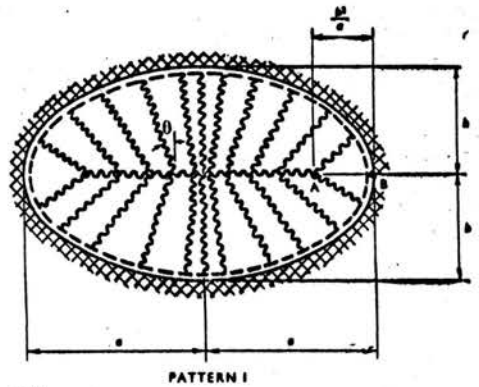
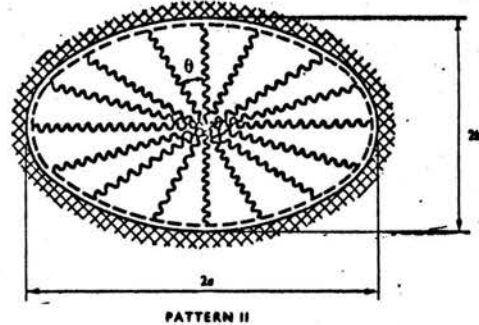


Figure 14



(a)



(b)

Figure 15

unchanged for both the collapse modes considered, whereas external work can be expressed in terms of elementary functions.

If the geometrical relations for the pattern I:

$$\begin{aligned} r_0 &= a^2 b^2 (a^2 \sin^2 \theta + b^2 \cos^2 \theta)^{-1/2} \\ d &= b^2 (a^2 \sin^2 \theta + b^2 \cos^2 \theta)^{-1} \dots \dots \dots (46) \end{aligned}$$

are used in equation 39 and if we introduce the work done by the load along the generatrix AB (Figure 15a), we finally obtain the following upper bound for the

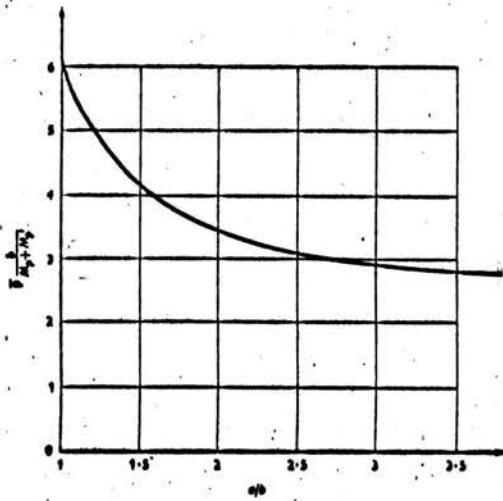


Figure 16

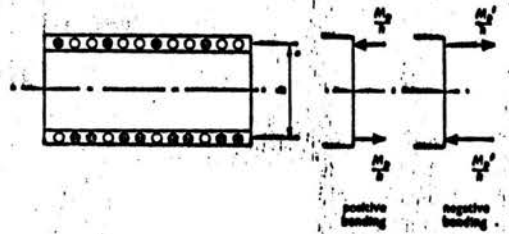


Figure 18

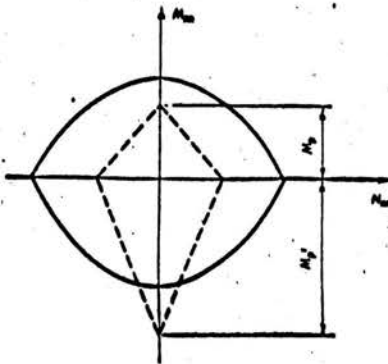


Figure 17

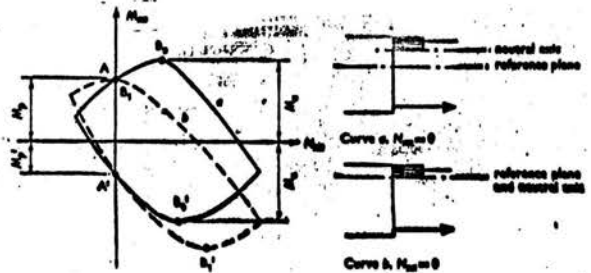


Figure 19

collapse load:

$$F = \frac{M_p + M_p'}{b} \frac{4E(k^2)}{\left(\frac{b}{a}\right)^3 + k \left(k \frac{b}{a} + \arctan \frac{ka}{b}\right)} \dots (47)$$

This is inferior to that obtained for the pattern II. Numerical values of equation 47 are given in Figure 16.

Internal compatibility conditions

Since, in classical yield-line theory, the yield criterion is assumed to depend only upon the moments (equation 8), other stress resultants must be regarded as internal reactions and the corresponding strain rates must vanish all over the slab. As was mentioned on page 34, this situation leads to the assumption of inextensibility of the reference plane ($\lambda\alpha\beta = 0$). This assumption will be satisfied if all the rotation vectors lie

in the plane, i.e. if the reference and rotation planes coincide. The value of the bending moment introduced into the dissipation formula (equation 11) must thus correspond to the projection of the general yield surface on the axis M_{nn} . However, the points representing the projection do not have to coincide with the intersection points of the surface and the axis.

The coincidence holds in the case of metal slabs since the yield curve* is symmetrical with respect to the M_{nn} axis (Figure 17, solid curve). Where there are different yield moments for positive and negative bending ($M_p \neq M_p'$) this coincidence can, however, be strictly satisfied only for the completely fictitious sand-

*If we consider the situation where all the generalized strain rates, except $\dot{\epsilon}_{nn}$ and $\dot{\lambda}_{nn}$, vanish at the yield line, we can deal only with the projection of the yield surface on the plane M_{nn} , N_{nn} . Thus we can consider the yield-line section as being equivalent to the cross-section of a uniaxially stressed rod.

with cross-section (Figure 18) composed for the system of bars (dots) and strings (circles) resisting only compression and tension, respectively. The dashed line in Figure 17 represents the yield curve for such a cross-section. Only in this case, there is no objection to using in equation 11 yield moment values obtained in pure bending tests ($N_{nn} = 0$).

For the reinforced concrete cross-section, the interaction curve established for the median plane chosen as the reference plane (Figure 19, solid curve) provides either pure bending ($A, A', N_{nn} = 0$) or pure curvature deformation ($B_0, B_0', \lambda_{nn} = 0$). If the simple bending formula for dissipation (equation 11) is to be applied, we must introduce into it moment values corresponding to the point B_0 or B_0' . Hence, the yield moment must be $M_{nn} = \pm M_u$ and not M_p . Now (since $M_u > M_p$), the work equation gives an upper bound for the collapse load considerably larger than that provided by the classical theory in which, in spite of the compatibility conditions imposed by the flow law ($\lambda_{nn} = 0$), yield moment was assumed to be $M_{nn} = M_p$.

In the classical theory (where internal compatibility is not considered), the position of a reference plane has no influence upon the result. However, we can see that the form of the interaction curve is strongly dependent upon the choice of that reference plane. Thus, for each position of the reference plane, we have another value of $M_{nn} = M_u$ (corresponding to the points B_1, B_1'), and the work equation gives different upper bounds for the collapse load. Since we are seeking the least upper bound, we have to find the appropriate optimal position of the reference plane. If the position of the reference plane coincides with that of the neutral axis of the cross-section at pure plastic bending, the coincidence of both projection ($\lambda_{nn} = 0$) and intersection ($N_{nn} = 0$) of the yield curve (Figure 19, dashed line) is achieved. We now have $M_{nn} = M_u = M_p$, and there is no difference from the classical theory. However, the coincidence can only be obtained either for positive (Figure 19) or negative bending.

The procedure of finding the best position for the reference plane, which is assumed to be inextensible, is equivalent to dropping the inextensibility assumption for the reference plane that is given a fixed position. Now rotation and reference planes no longer coincide, the distance between these planes being z . If the condition $\lambda_{nn} = 0$ is not satisfied, the yield criterion must depend both upon moment and upon axial force: $(M_{nn}, N_{nn}) = 0$, and the formula for dissipation must be rearranged as:

$$D = [\dot{\epsilon}_{nni} M_{nni}(z) + \dot{\lambda}_{nni}(z) N_{nni}(z)] l_i \dots \dots (48)$$

where l_i denotes the length of the i th yield line, and generalized strains and stresses are related by the normality law applied to the appropriate yield curve.

We now have, in addition to parameters defining the distribution of yield lines, a new arbitrary parameter

z that is to be computed, like the others, from the condition of minimum collapse load. Considerations are simplified by the fact that the work done by transverse external load is not influenced by z . Although the yield criterion depends upon the position of the reference plane, the least upper bound for collapse load is not affected by this choice. If there are no yield lines with different signs of rotation in the pattern considered, the minimum collapse load corresponds to the state of pure bending $M_{nn}(z) = M_p$ (or M_p'), $N_{nn}(z) = 0$, and results are always the same as those obtained from simple yield-line theory.

However, if it is necessary to assume that there are both negative and positive yield lines, the state of pure bending cannot in general exist and in this case classical theory actually turns out to be kinematically inadmissible. Let us observe that solutions are then considerably dependent upon the conditions of lateral restraint at boundaries (see, for example, reference 11). Since $M_{nn} \neq M_p$, a considerable autogenous (not due to the lateral external loads) system of membrane forces is generated, known as 'arching action'. The fact has been observed by many authors (see, for example, references 7 and 12) and has influenced some design codes⁽¹³⁾.

The collapse modes considered, with translation of the rotation plane permitted, do not include all the possible yield-line mechanisms. To allow consideration of a larger class of collapse patterns, two more parameters can be introduced, defining the inclination of the rotation plane with respect to the reference plane. It can be shown that, for many types of boundary condition, the least upper bound corresponds to an inclined rotation plane. In this case, the distance z from plastic hinge axis to rotation axis changes along the yield line. Then the simple multiplication in equation 48 must be replaced by integration with respect to the co-ordinate t .

Finally, if the most general class of yield-line patterns is to be admitted, we must not confine our considerations to coplanar rotation-vector systems. However, if rotation axes do not lie in one plane, the condition $\lambda_{nn} = 0$ does not have to be satisfied and yield lines do not coincide with the directions of principal strain rates (since principal directions of curvatures and axial strains do not coincide). Such a situation is observed commonly if yield-line theory is applied to shells⁽¹⁴⁾. It can be found (see Figure 20) that, if two non-coplanar rotation vectors θ_1, θ_2 govern the motion of adjacent rigid panels 1 and 2, the reciprocal displacements of both portions are defined by the difference vector θ_{12} and by the vector couple $(\Phi_1, \Phi_2 = -\Phi_1)$. The first component yields the curvature $R_{nn} = \varphi_{12}$ and the extension of the reference plane $\lambda_{nn} = \psi_{12}(t - a)$, whereas the second one gives parallel translation of the two parts $\lambda_{ni} = \Delta\Phi_1$.

The main problem is now the adoption of an appropriate yield criterion. In the preceding case, when the

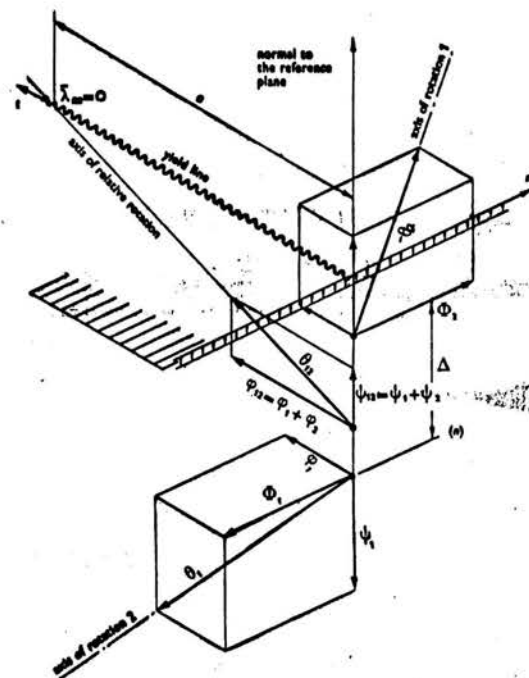


Figure 20

yield lines were principal strain axes, different approaches^(15,16) seem to prove that adoption of the square yield criterion and its extrapolation to the case equivalent to cylindrical bending (see footnote at the beginning of this section) is justified. In this situation, there is no reason to introduce a notion of 'stepped yield criterion' which was an attempt to justify the square yield criterion accepted. Since this justification has been achieved by more rigorous methods^(15,16) and internal compatibility is not satisfied at the 'stepped yield line', the latter type of justification ought to be regarded as only of historical interest.

In the case of the 'generalized yield line' the problem is much more open to discussion. We may mention simply that, if maximum principal stress criteria are accepted both for concrete and for reinforced layers then, by using general geometrical relations at that hinge⁽¹⁴⁾, parametric representation of the yield surface can be derived and a dissipation formula established⁽¹¹⁾. However, the calculations are heavy.

Fortunately, it happens that, for most important types of boundary condition, shears λ_{max} are small in comparison with other strain rates and consideration of the 'coplanar class' of collapse pattern does not result in important overestimation of the collapse load.

Finally, it must be pointed out that all the solutions which include 'arching action' are very sensitive to changes in geometry and no considerations which neglect secondary effects can yield reliable results. In this situation Johansen's classical theory appears to be

the safe approximation to the approach including membrane effects. However, since it is found to give lower-bound approximations to kinematical solutions, it is difficult to appreciate its position in relation to the exact solutions.

ACKNOWLEDGEMENT

The author wishes to express his gratitude to Professor Marcel Save, Faculté Polytechnique de Mons, for his encouragement, valuable critical discussions and help throughout the preparation of this paper.

REFERENCES

1. PRAGER, W. General theory of limit design. *Proceedings of the Eighth Congress on Applied Mechanics, Istanbul, 1952*. Istanbul, 1956. Vol. 2. pp. 65-72.
2. MASSONNET, CH. and SAVE, M. *Calcul plastique des constructions. Vol. 2: Structures spatiales*. Brussels, Centre Belgo-Luxembourgeois de l'Information de l'Acier, 1963. pp. 214-217.
3. KEMP, K. O. The yield criterion for orthotropically reinforced concrete slabs. *International Journal of Mechanical Sciences*. Vol. 7, No. 11. November 1965. pp. 737-746.
4. WOOD, R. H. New techniques in nodal-force theory for slabs. *Recent developments in yield-line theory*. London, Cement and Concrete Association, May 1965. MCR Special Publication. pp. 31-62.
5. SCHUMANN, W. On limit analysis of plates. *Quarterly of Applied Mathematics*. Vol. 16, No. 1. April 1958. pp. 61-71.
6. JOHANSEN, K. W. *Brudliniteori*. Copenhagen, 1943. English edition: *Yield-line theory*. London, Cement and Concrete Association, 1962. pp. 181.
7. WOOD, R. H. *Plastic and elastic design of slabs and plates*. London, Thames and Hudson, 1961. pp. 344.
8. NIELSEN, M. P. On the calculation of yield-line patterns with curved yield lines. *RILEM Bulletin*. No. 19. June 1963. pp. 67-74.
9. OLSZAK, W., PERZYNA, P., SAWCZUK, A. (editors). *Teoria plastycznosci*. Warsaw, PWN-Polish Scientific Publishers, 1965. pp. 243-244.
10. HOPKINS, H. O. On the plastic theory of plates. *Proceedings of the Royal Society of London*. Series A. No. 241. 1957. pp. 153-179.
11. JANAS, M. and SAWCZUK, A. Influence of position of lateral restraints on carrying capacities of plates. *Archiwum Inzynierii Lądowej*. Vol. 12, No. 3. 1966. pp. 231-244.
12. GVOZDEV, A. A. The basis for paragraph 33 of the reinforced concrete design code. *Stroitel'naya Promyshlennost*. Vol. 17, No. 3. 1939. pp. 51-58. (In Russian.)
13. ANON. *Instruction on the design of reinforced concrete static structures undergoing stress redistribution*. Moscow, Gosstroizdat, 1961. (In Russian.)
14. JANAS, M. Limit analysis of non-symmetric plastic shells by a generalized yield-line method. *Non-classical shell problems. Proceedings of an IASS Symposium, Warsaw, 1963*. Amsterdam, North-Holland Publishing Company and Warsaw, PWN-Polish Scientific Publishers, 1964. pp. 997-1010.
15. NIELSEN, M. P. Yield conditions for reinforced concrete slabs. *Nordisk Betong*. Vol. 7, No. 1. 1963. pp. 61-82.
16. MORLEY, C. T. On the yield criterion of an orthogonally reinforced concrete slab element. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*. Vol. 14, No. 1. January 1966. pp. 33-47.

LARGE PLASTIC DEFORMATIONS OF REINFORCED CONCRETE SLABS

M. JANAS*

Polish Academy of Sciences, Warsaw, Poland

Abstract—Plastic response of reinforced concrete slabs is analyzed, including membrane effects and geometry changes at large deflections. Based on the flow theory of rigid-plastic bodies, load-deflection relations are derived, starting from the initial compression ("arching action") in laterally restrained slabs, up to the overall membrane tension and cracking. The kinematical approach is applied, using energy or/and equilibrium methods, with the initial collapse mode assumed to be preserved at large deflections. Examples of clamped strip, square and circular slabs are presented, and the comparison with the approach based on the deformation theory is discussed.

1. INTRODUCTION

THE theory of limit analysis employs the model of rigid-perfectly plastic body, and thus cannot account for deformations prior to collapse. For real structures, however, these deformations may sometimes be large enough to influence the equilibrium equations, and to change the load intensity at which the unrestrained plastic flow commences. The influence of changes in geometry can, however, be studied within the framework of the rigid-plastic theory as "the post-yield behavior". One then obtains a sequence of load intensities at which the instantaneous plastic motion of the sequence of deformed structures occurs. The work-hardening being neglected, the load-deflection relations thus are influenced only by the changes in geometry due to plastic deformations. This sort of influence ("secondary effects") has been studied by Onat [1], and certain problems of post-yield behavior of metal rod systems have been solved [2-4]. Existing complete solutions for axially symmetric metal plates are due to Hodge [5] and Lepik [6], and the approximate approach assuming continuation of the initial collapse mode at large deflections has been used in [7, 8].

For reinforced concrete slabs the kinematical approach using the above assumption has been applied by Wood to circular plates [9], whereas Sawczuk [10, 11] and Park [12] treated rectangular plates. For very large deflections, pure membrane analysis has been employed (cf. [13, 14]).

It must be pointed out that the term "secondary effects" (cf. [1]) is misleading when applied to reinforced concrete structures, since in this case small changes in geometry can be of considerable importance. This is due to "the arching action" neglected in both elastic and plastic theories of plates. As first observed by Gvozdev [15], and later discussed by Drucker [16], as well as verified in numerous tests (e.g. [9, 12]), this action can considerably strengthen concrete structures. The arching action is, however, unstable, thus considerations based on the undeformed geometry can lead to erroneous results. For metal plates, the load-deflection curves always keep increasing [6], but for reinforced concrete plates they may decrease appreciably (see Fig. 1).

* At present at: Faculté Polytechnique de Mons, Belgium.

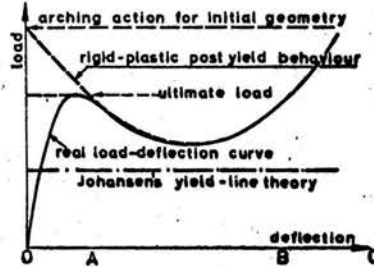


FIG. 1. Load-deflection relations for laterally restrained reinforced concrete slabs.

2. KINEMATICAL APPROACH FOR DEFORMED SLABS

The post-yield behavior of reinforced concrete slabs will be analyzed with the following assumptions:

- (i) The materials are rigid-perfectly plastic,
- (ii) One is interested in approximate solutions based upon the upper-bound theorem of the limit analysis theory,
- (iii) The collapse modes adopted do not change with the deformation, i.e. the deflection changes are proportional to one parameter,
- (iv) The initial collapse modes are chosen among the yield-line collapse mechanisms.

The upper-bound theorem is valid for structures undergoing negligible changes in geometry prior to the collapse. If it is used in the analysis at large deflections, the routine energy technique has to be applied to the current deformed configuration. Thus, at each stage of the deformation process, the associated kinematic solution can be found and the upper bound for the load-deflection relation can be established. Unfortunately, the real configuration of the deformed system should be known *a priori* at each instant considered. This requirement can rarely be satisfied. Nevertheless, the discussed method is valid in all cases, provided the components of the work equation depend solely upon the deflection at a fixed point. This situation arises, for example, if the yield-line collapse mode assumed is initially exact, and then, due to translation or expansion of plastic hinges, the deformed zones develop into conical surfaces. In a general case, it is not certain that the kinematical approach really gives an upper bound for the load-deflection relation. However, if the considered collapse mode is reasonably close to the real one, errors should not be excessive.

The assumptions stated at the beginning of this section have already been applied in some papers cited in Section 1. However, all the papers dealing with reinforced concrete slabs [9-12] are actually based upon the deformation theory, even if they are written within the framework of the theory of plastic flow.

The difference between the applications of both theories can be easily demonstrated by examining the deformed beam as shown in Fig. 2. For small but finite rotations $\alpha = w_0/a$, the position of the undeformed (neutral) layer O_0 is determined by $z_0 = 0.5w_0$ (see [9]). The deformation theory relates stresses to strains, and thus at the point O_0 the yield stress

changes sign. However, since the displacements are governed by the rule of rigid-body motion, the neutral axis for strain rates must coincide with the axis O_1 of instantaneous rotation. The principle of vector summation specifies the rotation rate at the hinge, and the axis O_1 must therefore lie on the straight line AB, its co-ordinate being $z_1 = w_0$. For the flow theory the signs of strain rates and those of stresses must agree, and hence the zone O_4C is in tension. The deformation theory would give there compressive stresses. The rate of energy dissipation is therefore different in the two theories and kinematical approaches based upon them must give different results.

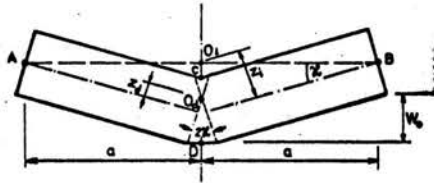


FIG. 2. Yield hinge at large deflections.

Both theories coincide only if deformations vary proportionally in the whole structure. Approximations obtained from the deformation theory can be satisfactory also if the deformation process does not differ strongly from proportionality. Unfortunately, this situation does not occur for slabs, since, as can be seen in Fig. 2, the initially compressed layers become successively stretched during the deformation process. Only for the incipient flow of undeformed structures and at a considerably advanced flow (with both the axes O_4 and O_1 falling out of the cross-section) will both theories give identical results.

One objection can be raised against adopting the flow theory. The concrete is assumed to be a stable plastic material with the yield point in tension $\sigma_c \rightarrow 0$. Thus, the cracked zone is to be considered as undergoing plastic tensile deformations and, whenever the sign of the strain rate changes, the compressive yield stress must appear. However, the compressive strength of the cracked concrete is very small (theoretically equal to zero), until the cracks are closed. Therefore, when cracked zones can possibly turn back to compression the applicability of the flow theory becomes questionable and use of the deformation theory could be considered. However, in the absence of reversed loads, and at collapse modes excluding upward deflections, strain rates decrease monotonically and no change from tensile strains to compressive strains is possible.

3. DISSIPATION OF ENERGY IN A PLASTIC HINGE

If a yield-line collapse mode is assumed, no strains but those normal to the cross-section of a plastic hinge can exist, and the only generalized stress resultants are the bending moment M and the axial force N . The rate of energy dissipation dD for an elementary length dt of a yield line is then:

$$dD = \kappa(M + z_0 N) dt, \quad (1)$$

where κ denotes the curvature rate, and z_0 stands for the co-ordinate of the neutral axis of strain rates (the axis of instantaneous reciprocal rotation, Fig. 3(a)). The stress resultants

in the plastic hinge of an arbitrary nonhomogeneous or layered cross-section (Fig. 3b) are:

$$M = \int_{x_0}^{h_1} z \sigma_c(z) dz - \int_{-h_2}^{x_0} z \sigma_t(z) dz, \quad N = - \int_{x_0}^{h_1} \sigma_t(z) dz + \int_{-h_2}^{x_0} \sigma_c(z) dz, \quad (2)$$

where $\sigma_c(z)$, $\sigma_t(z)$ are the yield stresses in compression and tension, respectively.

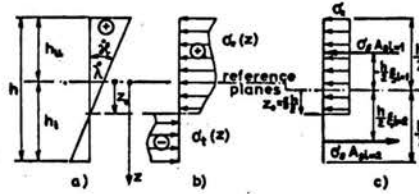


FIG. 3. Strain rate and stress distribution within a plastic hinge: (a) strain rates, (b) yield stresses within an arbitrary non-homogeneous cross-section, (c) reinforced concrete cross-section.

For transversely loaded horizontal slabs, vertical positions of the rotation axes x_{0j} do not influence the work of external loads. Hence, the positions corresponding to the least upper bound to the collapse load must furnish the minimum rate of the total energy dissipation D in the structure, and thus they must be determined from the condition:

$$\frac{\partial D}{\partial z_{0j}} = 0. \quad (3)$$

Since the elementary dissipation dD is non-negative, the absolute minimum of D will be furnished by the values of z_0 found from the equation:

$$\frac{\partial(dD)}{\partial z_0} = 0. \quad (4)$$

Introducing equations (1) and (2) into (4), one finds that the latter is equivalent to the assumption of pure bending in plastic hinges ($N = 0$). The least collapse load should then correspond to zero axial forces all over the yield lines. Such a condition is *a priori* satisfied in the yield-line theory (pure bending theory), and Johansen's theory [17] always gives the least upper-bound collapse load possible for the assumed yield-line pattern.

Kinematical restraints, disregarded in the bending theory, rarely permit to satisfy equation (4) all over the slab, even at incipient plastic flow. On the other hand, it is possible to satisfy equation (4) for metal slabs, since the neutral axes for negative and positive pure bending coincide, and the condition $N = 0$ does not contradict kinematical restraints. For reinforced concrete this is impossible, except for the laterally unrestrained slabs; in other cases axial forces (arching action) must be taken into consideration.

For deformed slabs, the position of the neutral axis depends on displacements (Fig. 2) and therefore it may be impossible to have simultaneously $N = 0$ along all plastic hinges. Indeed, upper-bound solutions give in general collapse loads considerably larger than the results from Johansen's theory (see Sections 5 and 6). Only for strips and beams (Section 4)

can the condition (4) be satisfied for a fixed value of the deflection, and then the minimum value of the load-deflection curve (Fig. 1) coincides with the result supplied by the pure bending theory.

To particularize formula (1) for the case of a reinforced concrete cross-section (Fig. 3c), values $\sigma_c(z) = \sigma_c$, $\sigma_t(z) = \sigma_t$ for concrete and $\sigma_c(z) = \sigma_s$, for steel reinforcement have to be introduced into equation (2). Using non-dimensional co-ordinates of the neutral axis $\xi = 2z_0:h$ and of the i th layer of reinforcement (with the area of steel cross-section A_{st}) $\xi_i = 2z_i:h$, we can express the elementary rate of energy dissipation as:

$$dD = |\dot{\kappa}| M_0 \left(\frac{1 + \xi^2}{2} + \xi \operatorname{sgn} \dot{\kappa} + 2\eta_i \xi - \xi_i \right) dt \quad \text{for } |\xi| \leq 1 \quad (5)$$

$$dD = |\dot{\kappa}| M_0 (|\xi| + \xi \operatorname{sgn} \dot{\kappa} + 2\eta_i \xi - \xi_i) dt \quad \text{for } |\xi| \geq 1 \quad (6)$$

where M_0 denotes double ultimate bending strength for a unreinforced cross-section, and η_i is the reinforcement intensity of the i th layer, namely:

$$M_0 = \frac{\sigma_c h^2}{4}, \quad \eta_i = \frac{\sigma_s A_{st}}{\sigma_c h} \quad (7)$$

The summation convention applies to repeated subscripts in equations (5) and (6).

4. REINFORCED CONCRETE STRIP

The kinematical approach, based on the plastic flow theory (see Section 2), will be applied to the case of a clamped slab strip of span L . Reinforcement of arbitrary intensity is assumed to be distributed at the bottom ($\eta_b, \xi_b = 1$) and top face ($\eta_t, \xi_t = -1$) of the slab. At symmetrical loads the motion commences when plastic hinges form at the mid-span and at the supports. If this mode is assumed to continue, the deflection increments are due to rotation rates ϕ with respect to the instantaneous axes at supports O_A (Fig. 4).

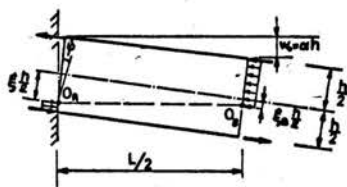


FIG. 4. Stress distribution in plastic hinges at large deflections.

Thus, the rate of work T of uniformly distributed load q and due to the virtual rotation rate ϕ is:

$$T = \frac{qL^2}{4} \phi \quad (8)$$

both for the undeformed and deformed states.

Neutral axes in plastic hinges of the deformed strip (Fig. 4) coincide with the axes of reciprocal rotation rates. Hence the relations:

$$\dot{\kappa}_A = -\dot{\phi}, \xi_A = \xi; \quad \dot{\kappa}_B = 2\dot{\phi}, \xi_B = \xi - 2\alpha \quad (9)$$

define the strain rates due to the virtual rotation rate $\dot{\phi}$.

Introducing the adopted reinforcement characteristics, together with relations (9), into (5) for both support and midspan hinges, we obtain the total rate of dissipation for a unitary width of the strip:

$$D = 2D_A + D_B = M_0 \dot{\phi} [(1-\xi)^2 + (1+\xi-2\alpha)^2 + 8(\eta_t + \eta_b) + 8(\eta_t - \eta_b)(\alpha - \xi)]. \quad (10)$$

Since the external work does not depend on the position of rotation axis, the balance equation $T = D$ furnishes the least bound to collapse load, when the dissipation rate attains a minimum, that is when:

$$\frac{\partial D}{\partial \xi} = 0. \quad (11)$$

Condition (11) furnishes

$$\xi = \alpha + 2(\eta_b - \eta_t) \quad (12)$$

and the work equation yields the collapse load:

$$\frac{qL^2}{8M_0} = 4(\eta_b + \eta_t) - 4(\eta_b - \eta_t)^2 + (1-\alpha)^2 \quad (13)$$

The result (13) holds for $\xi \leq 1$ and $\xi_B \geq -1$, i.e. for

$$\alpha \leq \alpha_1 = 1 - 2|\eta_b - \eta_t|. \quad (14)$$

When this value is exceeded, formula (6) must be used instead of (5) for the support or the midspan hinge, depending on the sign of the expression $(\eta_b - \eta_t)$. The minimum condition (11) is satisfied for $\xi = 1$ or $\xi_B = -1$, respectively, and the collapse load is:

$$\frac{qL^2}{8M_0} = 4(\eta_b + \eta_t) + 2(1-\alpha)^2 - 4(1-\alpha)(\eta_b - \eta_t). \quad (15)$$

For a more advanced deformation ($\alpha > \alpha_2 = 1$) the formula (6) must be applied to all hinges, and ξ turns out not to influence the work equation. The collapse load is then expressed by the linear relation:

$$\frac{qL^2}{8M_0} = 4\alpha(\eta_b + \eta_t). \quad (16)$$

The collapse load is plotted versus central deflection in Fig. 5, for various configurations of reinforcement. The minimum value of the collapse load:

$$\frac{q_0 L^2}{8M_0} = 4(\eta_b + \eta_t) - 2(\eta_b - \eta_t)^2, \quad (17)$$

is obtained for $\alpha = \alpha_0 = 1 - |\eta_b - \eta_t|$. It is equal to the collapse load supplied by the yield-line theory, since (according to Section 3) the state $\alpha = \alpha_0$ corresponds to pure bending ($N = 0$) in all hinges.

Large plastic deformations of reinforced concrete slabs

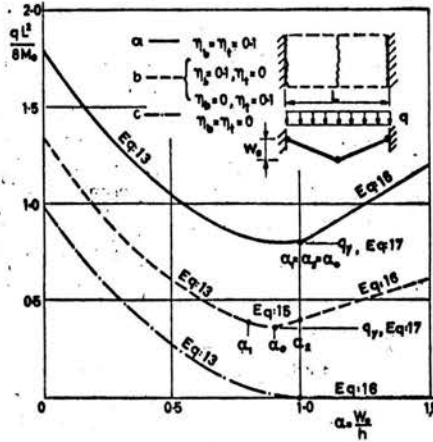


FIG. 5. Load-deflection curves for clamped reinforced concrete strips: (a) symmetrically reinforced, (b) singly reinforced, (c) unreinforced.

It is known that the energy method is equivalent to so called "equilibrium method" in the kinematical approach. In the equilibrium method the work equation corresponds to the moment equilibrium, and the minimum condition (11) represents the equilibrium of horizontal forces acting in the hinges. This method seems to be more illustrative, since different collapse-load expressions can be associated with different plastic regimes met by stress profiles at the interaction curve. For the cross-section considered (and $\eta_b > \eta_t$) the interaction curve is shown in Fig. 6. For relatively small rotations $\varphi = 2w_0 : L$, the axial forces can be assumed constant throughout the strip. Thus, the stress profile remains vertical and it moves from the initial position A_1B_1 up to the state of maximum tensile action. Since the structure considered is symmetric, the initial vertical locations of neutral axes must be the same in the support and in the midspan hinges. Thus for both hinges the plastic flow vectors $\vec{z}(\lambda, \lambda = z_0 \times)$ must be parallel. This requirement, together with the normality condition, specifies the initial position of the stress profile A_1B_1 .

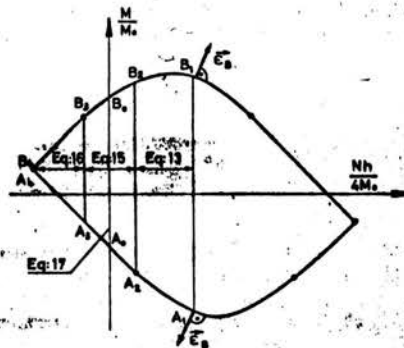


FIG. 6. Interaction curve for doubly reinforced concrete cross-section.

All the load-deflection relations presented are valid also for loads other than uniformly distributed, provided they produce the maximum moment at the midspan of the undeformed strip. Only the left sides of the formulae must be replaced by expressions corresponding to the rate of work of the actually considered external load. There is, however, one difference. For a concentrated load applied at the midspan, the solution presented is exact, i.e. the yield criterion is not violated in the rigid regions. For distributed loads this condition is satisfied as long as the axial force remains compressive. For larger deflections the plastic hinge moves out of the cross-section (see [4], for steel plates) and the employed collapse mode furnishes only an upper bound to the limit load.

5. CIRCULAR CLAMPED SLAB

Consider a circular slab of radius R uniformly and doubly isotropically reinforced (thus $\eta_s = \eta_t = \eta$). The reinforcements are placed at the top ($\xi_r = -1$) and at the bottom ($\xi_s = 1$) faces. The initial conical collapse mode, of Fig. 8, is assumed to apply even as the deflections increase.

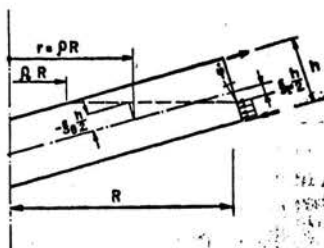


FIG. 7. Radial section of deformed circular slab.

If the formulae (5), (6) for the dissipation rate are to be applied, a continuous strain field must be considered as a yield-line pattern. The adjacent radial yield lines make then the angle $d\theta$. Thus, a virtual rotation rate about the axis O at the clamped edge (Fig. 7) produces in the support hinge the following deformations:

$$\dot{\kappa}_r = -\dot{\phi}, \quad \dot{\xi}_r = \dot{\xi}. \quad (18)$$

For the conically deformed surface one obtains

$$\dot{\kappa}_\theta = \dot{\phi} d\theta, \quad \dot{\xi}_\theta = \dot{\xi} - 2\alpha(1-\rho), \quad (19)$$

where $\rho = r/R$ denotes a dimensionless radial co-ordinate, and $\alpha = w_0/h$ stands for a dimensionless central deflection. For a virtual rotation rate $\dot{\phi}$, the elementary work of the uniformly distributed load q is:

$$T = \frac{qR^3}{6} \dot{\phi} d\theta. \quad (20)$$

Since the deformations vary along the radial hinges, the total dissipation rate for an elementary segment $d\theta$ takes eventually the form:

$$D = M_0 \phi \left\{ \frac{(1-\xi_r)^2}{2} + 4\eta + \int_0^1 \left[\frac{(1+\xi_\theta)^2}{2} + 4\eta \right] d\rho \right\} R d\theta. \quad (21)$$

After integrations, the minimum condition (11) applied to the expression (21) gives $\xi = 0.5\alpha$. The virtual work equation $T = D$ yields the collapse load:

$$\frac{qR^2}{6M_0} = 1 + 8\eta - \alpha + \frac{5}{12}\alpha^2. \quad (22)$$

The formula (22) is valid for $\xi \leq 1$, $\xi \geq -1$, i.e. for $\alpha \leq \alpha_1 = 2.3$. For larger deflections a membrane zone spreads from the centre and the formulae (6) and (5) must be applied for $0 < \rho \leq \rho_0$ and $\rho_0 \leq \rho < 1$, respectively. The boundary radius ρ_0 is specified by the condition $\xi_\theta = -1$, which gives:

$$\rho_0 = -\frac{1+\xi}{2\alpha}. \quad (23)$$

Integrating the dissipation and employing the appropriate formulae for each zone, one obtains

$$\frac{qR^2}{6M_0} = 2 \left(1 - \frac{1+\xi}{2} \right)^2 + 4\eta \left[2 + \frac{3}{\alpha} \left(\frac{1+\xi}{2} - \alpha \right)^2 \right] + \frac{(1+\xi)^3}{12\alpha}, \quad (24)$$

whereas the minimum criterion (11) gives:

$$\frac{1+\xi}{2} = \sqrt{[(6\eta + \alpha)^2 + 2\alpha(6\eta + 1)]} - (6\eta + \alpha). \quad (25)$$

Expression (25) is valid for $\xi < 1$, i.e. for

$$\alpha \leq \alpha_2 = 1 + \frac{1}{12\eta}, \quad (26)$$

but there is no need to establish new formulae for larger deflections. The minimum principle (11) is identical to the condition of equilibrium for horizontal forces. Considering a slab segment with central angle $\theta = \pi$, we can see that, if $\xi > 1$, the radial forces in the support hinge cannot be balanced by the resultant of circumferential stresses acting along the diameter. Thus, once the rotation axis attains the bottom face, it must remain there for $\alpha > \alpha_2$. Thus formula (24) is still valid. Introducing $\xi = 1$ instead of the value given by (25), we obtain:

$$\frac{qR^2}{6M_0} = 4\eta \left[2 + \frac{3}{\alpha} (1 - \alpha)^2 \right] + \frac{2}{3\alpha}. \quad (27)$$

In Fig. 8, the collapse loads for reinforcement intensity $\eta = 0.1$ are plotted vs. the central deflection. It can be seen, that the minimum load is considerably larger than

$$\frac{q_r R^2}{6M_0} = 8\eta. \quad (28)$$

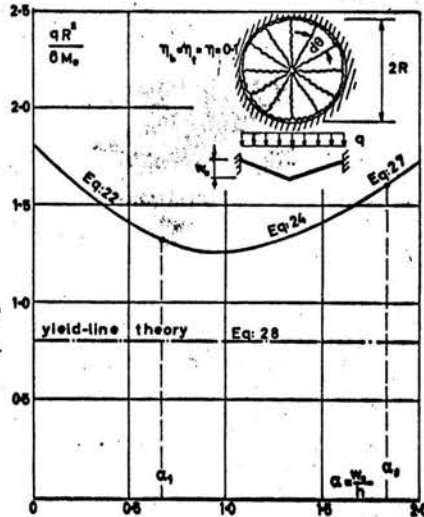


FIG. 8. Load-deflection curve for symmetrically reinforced circular clamped slab.

as given by the yield-line theory. It is clear that the coincidence observed for the slab strip cannot occur here.

6. SQUARE SLAB

Considerations concerning a circular plate can be directly applied to the case of a square clamped slab. Assuming the diagonal collapse mode (Fig. 9) to be preserved at large deflections, the rate of external work of the uniformly distributed load q is found to be

$$T = \frac{qL^2}{6} \dot{\phi}. \quad (29)$$

As in the case of the deformed circular slab, strains vary along the diagonal hinges (see Fig. 7), and the deformation rates are:

$$\dot{x}_S = -\dot{\phi}, \quad \dot{\zeta}_S = \dot{\zeta}, \quad \dot{x}_D = \sqrt{2}\dot{\phi}, \quad \dot{\zeta}_D = \dot{\zeta} - 2\alpha \left(1 - \frac{t\sqrt{2}}{L}\right). \quad (30)$$

Subscripts S and D correspond to the support and to the diagonal yield lines, respectively, and t is the coordinate measured from the slab centre along the diagonal hinge.

The slab is assumed to be reinforced only at its bottom face. Then, introducing the reinforcement characteristics and the relations (30) into the dissipation formula (5), and performing the integration, we obtain the total dissipation rate D . It reaches minimum

for $\xi = 2\eta + 0.5\alpha$. The work equation $T = D$ now yields the collapse load:

$$\frac{qL^2}{48M_0} = \frac{1-\alpha}{2} + \frac{5}{24}\alpha^2 + 2\eta(1-\eta). \quad (31)$$

The obtained formula is valid for $\xi_S \leq 1$ and $\xi_D \geq -1$, and it gives the following limitations for the central deflection:

$$\alpha \leq \alpha_1 = 2(1-2\eta), \quad \alpha \leq \alpha_2 = \frac{2}{3}(1+2\eta). \quad (32)$$

Whenever $\alpha_1 < \alpha < \alpha_2$, the formula (6) ought to be applied when evaluating the dissipation in the boundary hinges. One can see, however, that the equilibrium of horizontal thrusts acting on a triangular panel cannot be satisfied if $\xi > 1$. Thus, $\xi = 1$ must be introduced in the original formula from which the expression (31) was derived, and eventually we obtain

$$\frac{qL^2}{48M_0} = 1 - \alpha(1-\eta) + \frac{\alpha^2}{3}. \quad (33)$$

For the central deflection $\alpha > \alpha_3 = 1$, the formula (6) must be applied in the inner zone of diagonal hinges whenever

$$t < \frac{L}{\sqrt{2}} \left(1 - \frac{1}{\alpha} \right). \quad (34)$$

Since the condition $\xi = 1$ must still hold, we obtain:

$$\frac{qL^2}{48M_0} = \alpha\eta + \frac{1}{3\alpha}. \quad (35)$$

When the second of conditions (32) is more restrictive, ($\alpha_1 > \alpha > \alpha_2$), a membrane zone appears for

$$t < \frac{L}{\sqrt{2}} \left(1 + \frac{1+\xi}{2\alpha} \right) \quad (36)$$

when $\xi < 1$. Then, applying the formula (5) to the support hinges and to the outer part of diagonals, and the formula (6) to the inner part, we obtain a total dissipation rate which attains a minimum for

$$\xi = \alpha^3 [\alpha + 2(1+2\eta)]^{\frac{1}{2}} - \alpha - 1. \quad (37)$$

When the minimum of D is introduced into the work equation, the load-deflection relation becomes

$$\frac{qL^2}{48M_0} = (1+\alpha)^2 - \frac{\alpha^2}{3} - \frac{2}{3}\alpha^3 [\alpha + 2(1+2\eta)]^{\frac{1}{2}} + \eta(4+5\alpha). \quad (38)$$

When the deflection exceeds the value

$$\alpha_4 = \frac{1}{4\eta}, \quad (39)$$

the neutral axis remains at the bottom face ($\xi = 1$), and thus, the expression (35) is again valid.

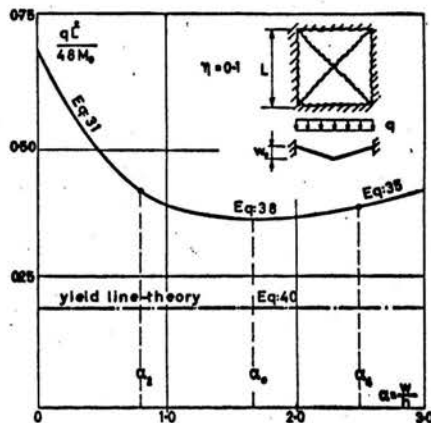


FIG. 9. Load-deflection curve for square clamped symmetrically reinforced slab.

For reinforcement intensity $\eta = 0.1$, the collapse load is plotted in Fig. 9 vs. the central deflection. Similarly to the case of a circular slab, the minimum load, though being considerably smaller than the initial load, is larger than that provided by the yield-line theory:

$$\frac{q_r L^2}{48M_0} = \eta(2 - \eta). \quad (40)$$

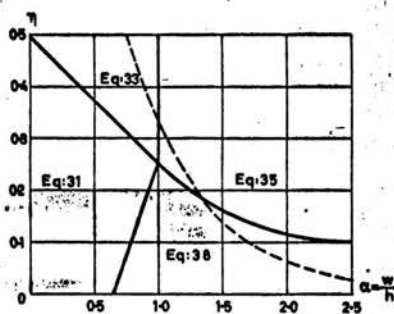


FIG. 10. Square clamped slab; ranges of validity of solutions.

Regions of applicability of expressions (31–38) are shown in Fig. 10, where the dashed line indicates the deflection values for which the minimum load is attained.

7. FINAL REMARKS

The load-deflection curve for rigid plastic structures being decreasing (zone OA in Fig. 1), for the reasons of safety the geometry changes prior to the initial plastic flow should be taken into consideration. If they are not accounted for, the classical pure bending theory [17] should be preferentially applied. For clamped or laterally restrained reinforced concrete slabs, this theory occurs to be kinematically non-admissible (see [18]) but it gives a safe approximation of the collapse load. On the other hand, the rigid-plastic analysis, kinematically correct but based upon the initial geometry, can lead to a considerable overestimation of the real carrying capacity.

If the ultimate collapse load (the peak value) is desired, the analysis must account for the elastic-plastic response. If it does not, it must be accompanied by experiments specifying approximate values of deflections associated with the peak load [14]; otherwise the minimum ordinate should stand for the ultimate collapse load.

Variations of a yield mechanism due to the changes in geometry, disregarded in the paper, are of importance for metal plates. For reinforced concrete structures, however, the yield mechanism is of a more stable character. In fact, the collapse mode maintains its original form up to rather large deflections. This situation is due to the fact that membrane forces are always tensile in metal slabs, whereas reinforced concrete structures are compressed in the early stage of deformation. For example, the positive plastic hinge must move out of the midspan cross-section of a uniformly loaded clamped metal strip, whereas for a reinforced concrete structure the maximum moment conserves its initial position until the membrane force becomes tensile.

Acknowledgements—The author wishes to thank Professor Marcel Save (Faculté Polytechnique de Mons) and Professor Antoni Sawczuk (Université de Grenoble and Polish Academy of Sciences) for their valuable discussions, critical remarks, and help throughout the preparation of this paper.

REFERENCES

- [1] E. T. ONAT, The influence of geometry changes on the load-deformation behavior of plastic solids, *Plasticity. Proc. 2nd Symp. Naval Structural Mech.* p. 225, Pergamon Press (1960).
- [2] E. T. ONAT and L. S. SHU, Finite deformations of a rigid perfectly plastic arch, *J. appl. Mech.* **29**, 549 (1962).
- [3] M. JANAS, Plastic analysis of rib gridwork at large deflections (in Polish), *Archw. Inzyn. iadov.* **11**, 95 (1965).
- [4] R. M. HAYTHORNTHWAITE, Mode change during the plastic collapse of beams and plates, *Development in Mechanics*, Vol. 1, Plenum Press (1961).
- [5] P. G. HODGE, *Limit Analysis of Rotationally Symmetric Plates and Shells*, Prentice-Hall (1963).
- [6] Ū. R. LEPIK, Plastic flow of thin rigid-plastic circular plates (in Russian), *Izv. Akad. Nauk USSR Mekh. i Mash'stroen* **78**, No. 2 (1960).
- [7] E. T. ONAT and R. M. HAYTHORNTHWAITE, The load-carrying capacity of circular plates at large deflection, *J. appl. Mech.* **23**, 49 (1956).
- [8] A. R. RZHANITSYN, The design of plates and shells by the kinematical method of limit equilibrium, IX^e Congr. Int. de Méc. Appliquée **6**, 331, Université de Bruxelles, Bruxelles (1957).
- [9] R. H. WOOD, *Plastic and Elastic Design of Slabs and Plates*, Thames & Hudson (1961).
- [10] A. SAWCZUK and L. WINNICKI, Plastic behavior of simply supported concrete plates at moderately large deflections, *Int. J. Solids Struct.* **1**, 97 (1965).
- [11] A. SAWCZUK, Membrane action in flexure of rectangular plates with restrained edges, *Flexural Mechanics of Reinforced Concrete, Proc. Int. Symp. Miami*, p. 347, Am. Soc. civ. Engrs (1965).
- [12] R. PARK, Ultimate strength of rectangular concrete slabs under short-term uniform loading with edges restrained against lateral movement, *Proc. Inst. civ. Engrs* **28**, 125 (1964).
- [13] L. G. JAEGER, An approximate analysis for plating panels under uniformly distributed load, *Proc. Inst. civ. Engrs* **10**, 137 (1958).

- [14] R. PARK, Tensile membrane behavior of uniformly loaded rectangular reinforced concrete slabs with fully restrained edges. *Mag. Concr. Res.* 16, 39 (1964).
- [15] A. A. GVOZDEV, The basis for paragraph 33 of the Reinforced Concrete Design Code, (in Russian), *Stroitel. Prom.* 17, 51 (1939).
- [16] D. C. DRUCKER, On structural concrete and the theorems of limit analysis. *Publs. Int. Ass. Bridge struct. Engng* 21, 49 (1961).
- [17] K. W. JOHANSEN, *Yield-Line Theory*. Cement and Concrete Ass. (1962).
- [18] M. JANAS, Kinematical compatibility problems in the yield-line theory. *Mag. Concr. Res.* 19, 33 (1967).

(Received 27 December 1966; revised 29 May 1967)

Абстракт—В работе приводится пластический анализ железобетонных пластинок с учетом влияния мембранных усилий и изменении геометрии конструкции, возникающих при больших прогибах. Используя теорию течения жестко-, пластических тел, получены соотношения между прогибом и нагрузкой в целом процессе деформации: начиная от осевого сжатия возникающего при наличии горизонтальных опорных связей (эффект распора), до мембранного растяжения и трещинообразования. Используется кинематический подход с применением энергетического метода или метода равновесия; схема разрушения считается неизменной в процессе нагружения. Приводятся примеры для балочной защемленной плиты, для круглых и квадратных пластинок и сравнивается предложенный метод с анализом использующим деформационную теорию пластичности.

Arching Action in Elastic-Plastic Plates

MAREK JANAS

INSTITUTE OF BASIC TECHNICAL PROBLEMS
WARSAW, POLAND

I. INTRODUCTION

Arching action may considerably increase the carrying capacities of reinforced concrete slabs in comparison with the values obtained from a simple flexural analysis. In a slab whose material reveals different responses to compression and to tension (a "sign-sensitive" material), pure bending must be accompanied by lateral displacements at the supports. The displacements are prevented by the support restraints and, therefore, membrane forces appear. The more the properties in tension and compression are different, the more pronounced is the effect.

It might appear surprising that the yield-line theory [1] based upon the upper bound technique furnishes results inferior to the experimental data. In a simple bending theory, however, the compatibility conditions in plastic hinges are not necessarily fulfilled (see [2]). Actually, in the case of restrained edges and/or mixed boundary conditions, a pure flexural collapse appears to be kinematically inadmissible [3]. The problem therefore requires a careful study within a kinematically compatible theory. A plate is to be considered as a three-dimensional structure and axial forces have to be taken into account; due to their contribution, collapse loads are obtained which are considerably greater than the upper bound values given by the yield-line method. Unfortunately, a simple theory, in which an incipient plastic motion is considered, seriously

overestimates the actual carrying capacity. This is due to the fact that, unlike the case of metal plates, even small deflections are capable of weakening the reinforced concrete slabs. Therefore, results derived from the consideration of an incipient collapse have to be completed by a large-deflection analysis.

II. RIGID-PLASTIC POST-YIELD BEHAVIOR

The influence of deformations can be studied within the framework of the rigid-plastic theory as "post-yield behavior." Loads corresponding to the plastic limit equilibrium are sought at consecutive stages of the deformation process, and a sequence of values thus obtained gives a load-deflection relation. In such a procedure the actual collapse mode must be known at any configuration throughout the deformation process. To avoid this difficulty the incipient plastic flow mechanism is assumed to be preserved also at moderately large deflections. Such an approach was employed by various authors (see [4-6]), but the analyses were based on the physical relations inherent in the deformation theories of plasticity. However, the use of this theory is not appropriate, because in the case considered local unloading appears in the process. The plastic flow theory was consequently applied in [7] and [8]. The difference between the "deformational" and the "incremental" analysis was explained in [7]. Since the present paper is also based on a similar kinematical approach, the principles of the method have to be presented in order to make the paper self-contained.

If the incipient yield-line collapse mode is assumed to apply to the deformed structure, the deflection pattern is defined to within a single parameter, e.g., the central deflection. Therefore, deflection rates \dot{w} are related to rotation velocities $\dot{\phi}$ with respect to the instantaneous axes (point O in Fig. 1). In order to satisfy the boundary conditions, the rotation axes must lie at supports, but their distance from the reference plane (i.e., the distance z in Fig. 1) is not *a priori* fixed. The rotation rate $\dot{\phi}$ gives rise to discontinuities of deformation rates in plastic hinges. The generalized strain rates can be defined in terms of these discontinuities. For the deformed portion of a slab shown in Fig. 1 the generalized rates of axial deformations $\dot{\lambda}$ and curvatures $\dot{\kappa}$ are, for positive and negative hinges, respectively:

$$\begin{aligned} \dot{\lambda}_p &= \dot{\phi}(z - w_0), & \dot{\kappa}_p &= \dot{\phi} \\ \dot{\lambda}_n &= -\dot{\phi}z, & \dot{\kappa}_n &= -\dot{\phi} \end{aligned} \quad (1)$$

where the dot denotes differentiation with respect to a time-dependent parameter.

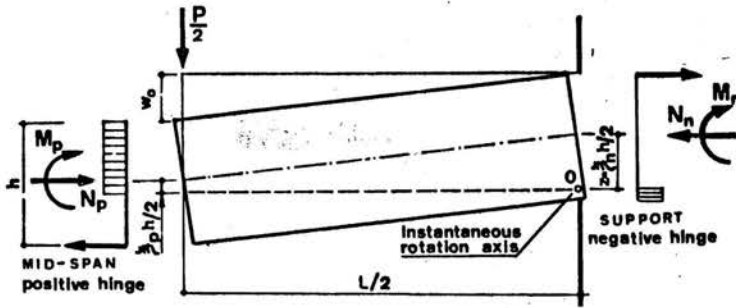


Fig. 1 A half-span of a clamped reinforced concrete strip collapsing at finite deflection w_0 .

The positions of instantaneous neutral axes are given by the relation

$$\xi = \frac{2z}{h} = \frac{2\lambda}{h\kappa} \tag{2}$$

and hence they are related in the positive and negative hinge as follows

$$\xi_p = \xi_n - 2\alpha \tag{3}$$

denoting a nondimensional deflection $\alpha = w_0/h$.

If the mechanism considered consists of rotation vectors lying in one plane, only deformations normal to plastic hinges can appear (see [2, 9]). Thus the generalized stresses in the plastic hinges are the same as in the case of an eccentrically loaded rectangular beam (for the Huber-Mises yield criterion, with a multiplier $2/\sqrt{3}$). In the case of a homogeneous cross section made of a sign-sensitive material (yield stress depending upon a sign of the strain rate) the interaction curve is described by the following equations:

$$\begin{aligned} m_p &= 1 - \xi_p^2, & n_p &= K + \xi_p, & \dot{\kappa} &> 0 \\ m_n &= -1 + \xi_n^2, & n_n &= K - \xi_n, & \dot{\kappa} &< 0 \end{aligned} \tag{4a}$$

The appropriate formulas for the double-reinforced concrete cross section shown in Fig. 2 can be written as follows:

$$m_p = 1 - \xi_p^2 + 4(\eta_b + \eta'_i), \quad n_p = 1 + \xi_p - 2(\eta_b - \eta'_i), \quad -1 < \xi_p < 1, \dot{\kappa} > 0, \tag{4b'}$$

$$m_p = 4(\eta_b - \eta'_i), \quad n_p = -2(\eta_b + \eta'_i), \quad \xi_p < -1, \dot{\kappa} > 0, \tag{4b''}$$

$$m_n = -1 + \xi_n^2 - 4(\eta_t + \eta'_b), \quad n_n = 1 - \xi_n - 2(\eta_t - \eta'_b), \quad -1 < \xi_n < 1, \dot{\kappa} < 0 \tag{4b'''}$$

$$m_n = -4(\eta_t - \eta'_b), \quad n_n = -2(\eta_t + \eta'_b), \quad \xi_n > 1, \dot{\kappa} < 0 \tag{4b^{IV}}$$

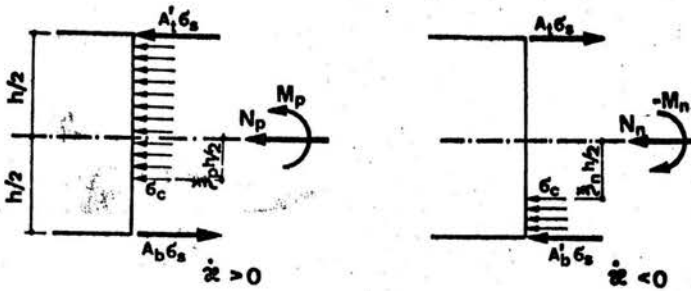


Fig. 2 Stresses and stress resultants at plastic hinges in a reinforced concrete cross section.

The nondimensional couples $m = M/M_0$ and stress resultants $n = N/N_0$ are referred to plastic moduli of the cross section:

$$M_0 = \frac{\sigma_r h^2}{4}, \quad N_0 = \sigma_r h \quad (5)$$

The value σ_r stands for a mean yield point at compression σ_c and at tension σ_t , and

$$K = \frac{\sigma_c - \sigma_t}{\sigma_c + \sigma_t} \quad (6)$$

- In the case of reinforced concrete the tensile strength of concrete is neglected, and thus $\sigma_t = \sigma_c/2$. Intensities of reinforcement defined with respect to the area of its cross section A and the yield point σ_r are

$$\eta = \frac{A \sigma_r}{h \sigma_c}$$

The subscripts b and t correspond to the bottom and the top reinforcement, respectively and (') denotes reinforcement in the compressed zones. For the sake of simplicity, the reinforcement (as it is shown in Fig. 2) is assumed to be placed at the faces of the cross section.

Equations (4b) do not define the complete plastic interaction curve but only its portions necessary in our further analysis.

Using relations (1)–(4) the work equation can be established including dissipation due to the axial deformations. Then the routine procedure of the kinematical approach may be applied. The appropriate formulas for dissipation energy are given in [7]. In addition to parameters defining an incipient

collapse pattern, the current distance of the plane of rotation from the reference plane (parameter ξ_n in Fig. 1) and its slope are to be found from an appropriate minimum condition.

The work equation is known to be equivalent to the equations of rotational equilibrium for the whole rigid panels. The position of the rotation plane is to be specified from the equilibrium condition for axial forces. The equilibrium method appears to be more convenient for our further considerations than the energy method. This will be illustrated by the example of a clamped reinforced concrete strip loaded at its midspan with a linear force P . For the sake of simplicity the compressed reinforcement is disregarded ($\eta'_b = \eta'_t = 0$). One half of the deformed strip is shown in Fig. 1.

The moment equilibrium gives immediately the formula for a current collapse value of a concentrated force¹

$$q = \frac{PL}{8M_0} = \frac{m_p - m_n}{2} - 2n_p\alpha \quad (7)$$

The second equilibrium condition $n_n = n_p$, together with the formulas (4b') and (4b'') and the geometrical relation (3) gives

$$\xi_n = \eta_b - \eta_t + \alpha, \quad \xi_p = \eta_b - \eta_t - \alpha \quad (8)$$

Introducing the values (8) into (4b') and (4b'') and then into the formula (7) one finally obtains

$$q = q_Y + (k - \alpha)^2, \quad n = k - \alpha \quad (9)$$

where q_Y is the collapse load given by the simple bending theory, i.e., when $n_p = n_n = 0$ are introduced into (4b'), (4b'') and (7). In the case of single reinforcement we have

$$q_Y = 4(\eta_b + \eta_t) - 2(\eta_b^2 + \eta_t^2) \quad (10)$$

The parameter k in (9) defines the total intensity of reinforcement:

$$k = 1 - \eta_b - \eta_t \quad (11)$$

Depending upon the distribution of reinforcement, the instantaneous neutral axis (8) reaches its limit position ($\xi_n = 1$ or $\xi_p = -1$) in the negative or in the

¹Equation (7) is applicable also to the case of a uniformly loaded strip if the nondimensional load q stands for $q = pL^2/16M_0$.

positive hinge at a nondimensional deflection α_m . For larger deflections the limiting value of ξ_n or ξ_p being exceeded in a hinge, (4b^m) must be replaced by (4bⁿ) or (4b^p) by (4bⁿ). The generalized stresses in the hinge are now independent of the position of neutral axis. Equilibrium equation $n_n = n_p$ together with (4b) give the generalized stresses in another hinge. All those values introduced into (7) yield a modified membrane formula:

$$q_m = 4(\eta_b + \eta_t) - 2(\eta_b - \eta_t)^2 + 2(\alpha - 1) \cdot (\eta_b + \eta_t - |\eta_b - \eta_t|) \quad (12)$$

It can be readily verified that the load-deflection relation given by (9) and (12) is exact and not only kinematically admissible. However, if the solution is applied to the uniformly loaded strip it remains exact only so long as the axial force is compressive. After the axial force becomes tensile the collapse mode changes. Thus the compressive membrane action clearly extends the range of applicability of the assumption of preserving the incipient collapse mode.

In the case of a homogeneous cross section, (9) remains valid but k has to be replaced by K given by (6). The flexural collapse load (10) must also be changed to become

$$q_y = 1 - K^2 \quad (13)$$

III. ELASTIC EFFECTS

The rigid-plastic solution demonstrated in the preceding section overestimates considerably (as illustrated in Fig. 3) the incipient load-carrying capacity. This is due to elastic and elastic-plastic deformations being disregarded prior to the initiation of plastic flow. The influence of elastic deformation has two main features:

1) Elastic and elastic-plastic bending at an early stage of loading—although having no influence on the post-yield curve—provides deflections before the curve is attained; thus, the plastic flow commences from the point q_e instead of q_0 (Fig. 3).

2) Elastic axial compressibility of slab panels changes geometrical relations (3) and therefore affects the plastic load-deflection relation.

Since variations in axial forces exert a predominant influence on the load-deflection behavior, the second effect is of primary importance. It was accounted for in [10] and [11], where, however, the deformation theory was

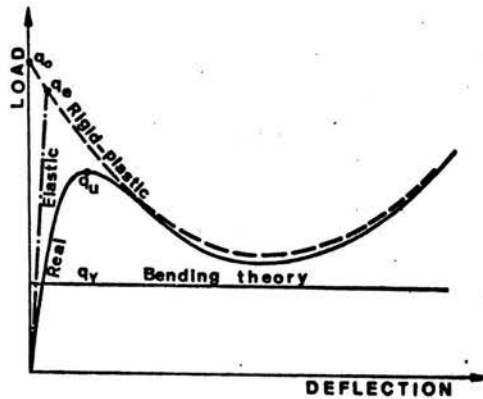


Fig. 3 Load-deflection relations for laterally restrained reinforced concrete slabs.

actually employed (perhaps inconsciously) instead of the plastic flow law. Here and in [12] the flow theory is consequently followed.

The method is first presented with the example of the clamped strip mentioned previously, according to the principles of rigid-plastic analysis. Increments $d\lambda_e$ of elastic axial deformation of the slab panel shown in Fig. 1 are proportional to the length $L/2$ and to the force increment dN ; thus, we have

$$d\lambda_e = \frac{dNL}{2Eh}$$

where E is the actual modulus of compressibility. If this deformation is added to the plastic one given by (1), the relation (3) for positions of the instantaneous neutral axes changes into

$$\xi_p = \xi_n - 2\alpha - \frac{2h_p}{\varepsilon} \quad (14)$$

where ε describes the elastic compressibility of the slab

$$\varepsilon = \frac{8EH^2}{\sigma_c L^2} \quad (15)$$

If the supports can undergo lateral elastic deformation, this can be accounted for through an appropriate reduction of ε .

Since differentiating with respect to time can be replaced by derivation with respect to the deflection, (14) becomes

$$\frac{1}{\varepsilon} \cdot \frac{dn}{d\alpha} + n = k - \alpha \quad (16)$$

provided that the condition $n_p = n_n = n$ as well as expressions (4b') and (4b'') are accounted for. Its solution, together with the initial condition $n = 0$ for $\alpha = 0$, leads to

$$n = (1 - e^{-\varepsilon\alpha}) \left(k + \frac{1}{\varepsilon} \right) - \alpha \quad (17)$$

Once the axial force is obtained the current limit load can be found from (7) using (4b') and (4b''), to be

$$q = q_Y + (k - \alpha)^2 - \left[k - (1 - e^{-\varepsilon\alpha}) \left(k + \frac{1}{\varepsilon} \right) \right]^2 \quad (18)$$

For special cases this equation reduces to the formula (9) for incompressible slabs ($\varepsilon \rightarrow \infty$) and to the simple bending value q_Y (10) for free axial displacements of supports ($\varepsilon = 0$). Similarly to the rigid plastic solution, (18) is valid for $\xi_n < 1$ and $\xi_p > -1$, i.e., for $\alpha < \alpha_m$ with α_m evaluated from the following transcendental equation:

$$\alpha_m + e^{-\varepsilon\alpha_m} \left(k + \frac{1}{\varepsilon} \right) + |\eta_b - \eta_t| = 1 + \frac{1}{\varepsilon} \quad (19)$$

The value α_m is always larger than the corresponding value for the rigid-plastic solution. For deflections exceeding α_m , the pure membrane action begins and (12) is valid again.

The curve defined by (18) gives loads inferior to those obtained from (9) with one common point corresponding to maximum axial compression. The latter takes place at the deflection

$$\alpha_c = \frac{1}{\varepsilon} \ln(1 + k\varepsilon) \quad (20)$$

From numerical data it follows that the ultimate peak load corresponds to deflections $\alpha_u \approx 0.5\alpha_c$. Once this value is introduced in (18), the ultimate peak load becomes

$$q_u = q_Y + \left(k - \frac{\alpha_c}{2} \right)^2 - \frac{1}{\varepsilon^2} (\sqrt{1 + k\varepsilon} - 1)^2 \quad (21)$$

The results presented above strongly depend upon the value of ϵ , which therefore has to be carefully specified. In reality the compressibility varies as forces and deflections change. Accepting the mean value as a representative one, the compressibility modulus E in expression (15) has to be chosen smaller than the Young modulus for compressed concrete. Depending upon the span-to-thickness ratio, the coefficient ϵ varies within the interval $1 < \epsilon < 50$. In Fig. 4 the current load is plotted versus central deflection for different compressibility coefficients ϵ and different reinforcement intensities.

Axial deformability of reinforced concrete slabs in compression is distinctly

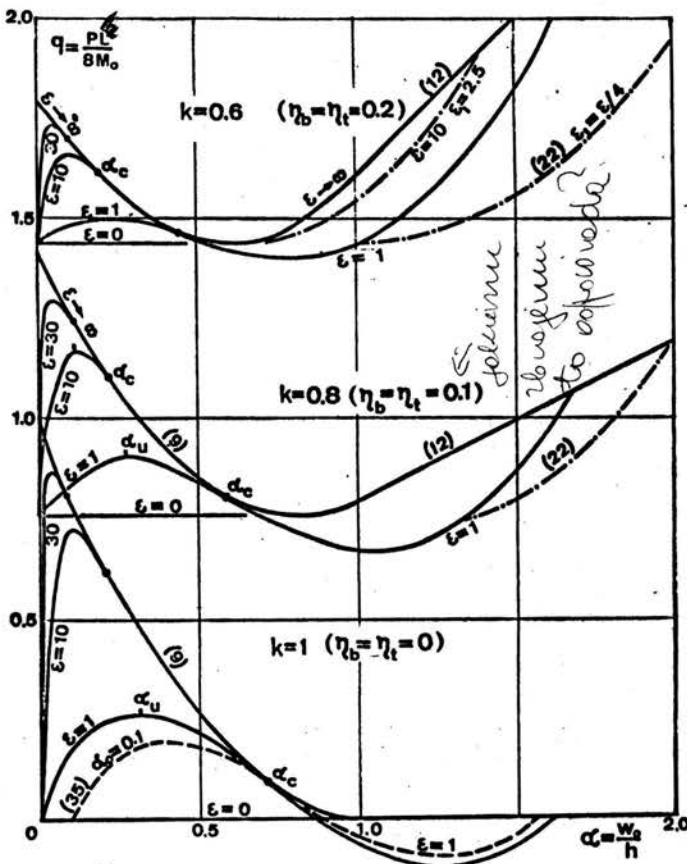


Fig. 4 Load-deflection curves for a clamped reinforced concrete strip.

different from that in tension. Therefore, to make the solution more realistic, a new coefficient of extensibility ε_1 has to be introduced instead of ε in the pre-membrane phase of advanced deformation. Now, for $n < 0$, i.e., for $\alpha > \alpha_1$ (defined from (17) on putting $n = 0$), (16) together with the condition of continuity gives

$$q_t = q_r + (k - \alpha)^2 - \left[k - \alpha_1 - (1 - e^{-\varepsilon_1(\alpha - \alpha_1)}) \left(k + \frac{1}{\varepsilon_1} - \alpha_1 \right) \right]^2 \quad (22)$$

It can be readily shown that the tensile zone (22) appears when the current load is equal to its bending value, $q(\alpha_1) = q_r$. In Fig. 4 some curves are given for the case $\varepsilon_1 = \varepsilon/4$.

IV. SQUARE SLAB

The procedure explained above will be applied to a clamped square slab. As before, the reinforcement is distributed only in the tensile zones ($\eta'_b = \eta'_t = 0$). An incipient collapse mode is assumed to be that with diagonal plastic hinges (Fig. 5). If the nondimensional coordinates ζ, χ are introduced as shown in Fig. 5, and α denotes the nondimensional central deflection, the deflections in the positive plastic hinge OA ($\zeta = \chi$) are $w/h = \alpha\zeta$. As before, the moment equilibrium of one panel furnishes expression for a current collapse load. For a uniformly distributed load p one obtains

$$q = \frac{pL^2}{48M_0} = \int_0^1 \left(\frac{m_p - m_n}{2} - 2n_p\alpha\zeta \right) d\zeta \quad (23)$$

Axial forces acting on one panel must satisfy equilibrium, i.e.:

$$\int_0^1 (n_p - n_n) d\zeta = 0 \quad (24)$$

The position of the instantaneous neutral axis in the positive hinge is now defined by the relation

$$\xi_p = \frac{\lambda_x + \lambda_y}{\phi} \quad (25)$$

where λ_x and λ_y include elastic and plastic strain rates in the respective direc-

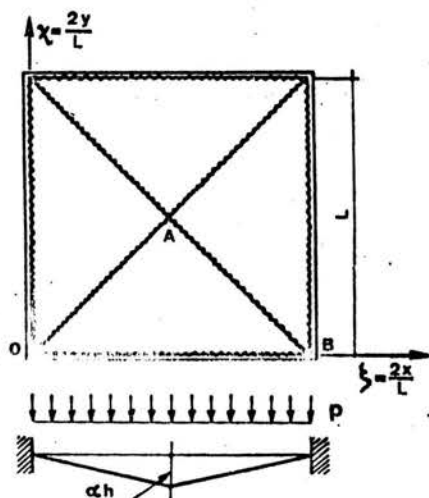


Fig. 5 The yield-line collapse mode assumed for a clamped square slab.

tions. The elastic compressibility of the triangular panel depends upon the variable distance between the hinges. Suitable values for x and y directions must supersede the constant coefficient ε :

$$\varepsilon_x = \frac{\varepsilon}{1 - \chi}, \quad \varepsilon_y = \frac{\varepsilon}{\zeta} \quad (26)$$

For the sake of simplicity elastic deformations in both directions are assumed to be proportional to the mean value of axial forces, $n = 0.5(n_p + n_n)$. With these assumptions and for virtual rotations around supports the position of the neutral axis in the positive hinge (25) is related to the corresponding value in the negative hinge:

$$\zeta_p = \zeta_n - 2\alpha\zeta - \frac{2dn}{\varepsilon d\alpha} \quad (27)$$

Defining axial forces from (4b') and (4b'') with the use of relation (27), the following equations are obtained:

$$\begin{aligned} n_p &= 1 - 2\eta_b + \zeta_n - 2\alpha\zeta - \frac{2dn}{\varepsilon d\alpha} \\ n_n &= 1 - 2\eta_t - \zeta_n \end{aligned} \quad (28)$$

To define n , (16) is again obtained from the above set. Subtracting (28) and using (24) we can find ξ_n which, due to the symmetry, must be independent of ζ . Thus we have

$$n = k - \alpha \zeta + \frac{\zeta}{\varepsilon} + C(\zeta)e^{-\varepsilon \zeta} \quad (29)$$

$$\xi_n = \frac{\alpha}{2} + \eta_b - \eta_t - \frac{1}{2\varepsilon} + \int_0^1 C(\zeta) d\zeta e^{-\varepsilon \zeta} \quad (30)$$

where k is again defined by (11). Introducing expressions (29) and (30) into (28) and defining the arbitrary function $C(\zeta)$ from the initial condition $\alpha = 0$, $n_p = n_n = 0$, we obtain

$$\begin{aligned} n_n &= (1 - e^{-\varepsilon \alpha}) \left(k + \frac{1}{2\varepsilon} \right) - \frac{\alpha}{2} \\ n_p &= (1 - e^{-\varepsilon \alpha}) \left(k - \frac{1}{2\varepsilon} + \frac{2\zeta}{\varepsilon} \right) + \alpha \left(\frac{1}{2} - 2\zeta \right) \end{aligned} \quad (31)$$

These equations together with expressions (4b), when introduced into the (23) and the prescribed integration performed, yield finally

$$\begin{aligned} q &= q_Y + k^2 - \alpha \left(k - \frac{5}{12} \alpha \right) - \left[k - (1 - e^{-\varepsilon \alpha}) \left(k + \frac{1}{2\varepsilon} \right) \right]^2 \\ &\quad - \frac{1}{6\varepsilon^2} (1 - e^{-\varepsilon \alpha})^2 \end{aligned} \quad (32)$$

Incidentally, the simple bending collapse load q_Y is equal to the value for clamped strip, given by equation (10).

Equation (32) is valid for $\zeta_p > -1$, i.e., for $\alpha < \alpha_1, \alpha_1$ being defined from the equation

$$\alpha_1 + e^{-\varepsilon \alpha_1} \left(\frac{2}{3} k + \frac{1}{\varepsilon} \right) = \frac{1}{\varepsilon} + \frac{2}{3} (1 + \eta_b - \eta_t) \quad (33)$$

For larger α , a pure membrane tension zone appears in the central part of positive hinges and (4b'') has to supersede (4b'). The analysis becomes very cumbersome, but its results are of rather minor interest for the ultimate peak load always belongs to the zone covered by (32). Moreover, for larger values of ε the influence of the compressibility becomes irrelevant when deflections increase. For these reasons, only the rigid-plastic formula valid for $\alpha > \frac{3}{2}(1 + \eta_b - \eta_t)$ is given here.

$$q = (2 + \alpha)(\eta_b + \eta_t) + (2 + \alpha + 2\eta_b - 2\eta_t) \cdot \left\{ \frac{4}{3} \alpha \left[1 - \sqrt{1 + \frac{2}{\alpha}(1 + \eta_b - \eta_t)} \right] + 1 \right\} + \frac{\alpha}{3}(1 + 7\eta_b - 7\eta_t) \quad (34)$$

For several intensities of reinforcement some values of the limit load are plotted versus deflection in Fig. 6.

It must be observed that the elastic compressibility in the x direction results in tangential displacements at supports. Therefore, the solution may be applied

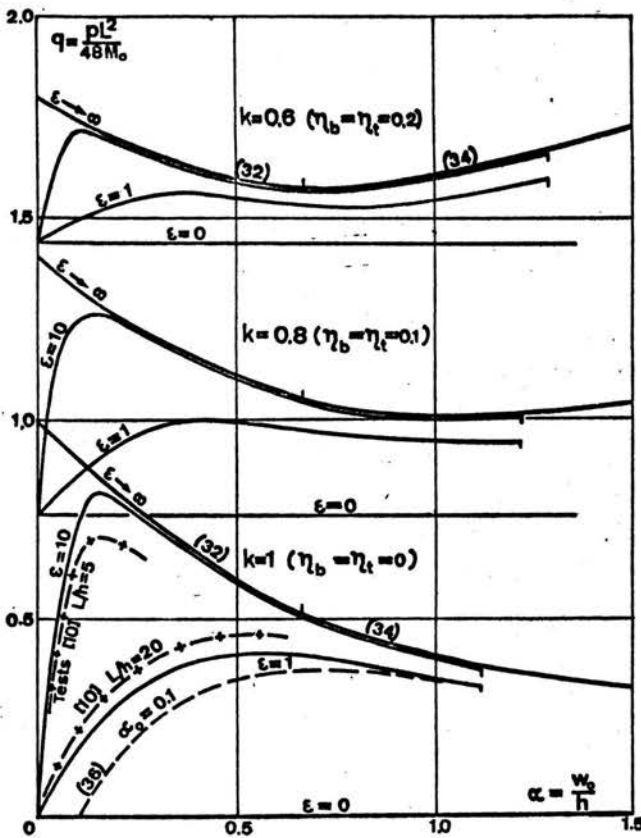


Fig. 6 Load-deflection curves for a square clamped slab.

if support conditions enable such displacements to develop in the absence of plastic shears. This is the case with a multispans system of square slabs. If the tangential displacements are not permitted, compressibility in the x direction has to be reduced or disregarded. The same situation arises when the supports are laterally deformable and hence the deformability in the y direction is of primary importance.

When the compressibility in the x direction is disregarded, $\varepsilon_x \rightarrow \infty$ has to be put into expressions (26). Fortunately, if ε_x is replaced by a constant average value ε_0 , the new solution is identical with (32).

V. PLATES WITH AN ARBITRARY CONTOUR

For plates of arbitrary shapes whose collapse modes consist of triangular segments the equilibrium equations (23) and (24) can be written for an i th segment, with the integration performed along the contour. The whole procedure shown before remains unchanged. However, it should be mentioned that the simplifying assumption on deformations to be proportional to the mean value of membrane forces $n = 0.5(n_n + n_p)$ ceases to be reasonable enough when the triangular segments are very narrow.

In the case of a circular plate (32) and (34) remain valid, but the nondimensional load is

$$q = \frac{P}{4\pi M_0}$$

for concentrated force, and

$$q = \frac{pR^2}{48M_0}$$

for an uniformly distributed load.

VI. INITIAL DEFLECTIONS

Allowance for initial deflections does not change the basic equations of the problem, only the integration constant (or function) has to be defined from a new initial condition. For the clamped strip one obtains

$$q = q_Y + (k - \alpha)^2 - \left[k - \alpha_0 - (1 - e^{-s(\alpha - \alpha_0)}) \left(k + \frac{1}{\varepsilon} - \alpha_0 \right) \right]^2 \quad (35)$$

In the same way, for the clamped square slab we get

$$q = q_Y + k^2 - \alpha \left(k - \frac{5}{12} \alpha \right) - \left[k - \frac{\alpha_0}{2} - (1 - e^{-s(\alpha - \alpha_0)}) \left(k - \frac{\alpha_0}{2} + \frac{1}{2\varepsilon} \right) \right]^2 - \frac{1}{6} \left[(1 - e^{-s(\alpha - \alpha_0)}) \left(\frac{1}{\varepsilon} - \alpha_0 \right) + \alpha_0 \right]^2 \quad (36)$$

The load-deflection curves for the initial deflection $\alpha_0 = 0.1$ are drawn with dashed lines in Fig. 4 and Fig. 6.

It may be noticed that (35) and (36) enable a protective concrete cover of thickness a to be accounted for. Solutions for the ideal cross section shown in Fig. 2 can still be used provided the thickness h is replaced by the distance h_1 between the compressed face and the stretched reinforcement. Moreover, an initial negative deflection $\alpha_0 = -a/h_1$ should be introduced.

VII. DOUBLE REINFORCEMENT AND A HOMOGENEOUS CROSS SECTION

For the double reinforcement (with $\eta'_t \leq \eta_b$ and $\eta'_b \leq \eta_t$) the resulting formula (18) for the strip appears to remain valid if k , given previously by (11), is replaced by

$$k' = 1 - \eta_b - \eta_t + \eta'_b + \eta'_t \quad (37)$$

The magnitude of the simple bending collapse load q_Y is now

$$q_Y = 4(\eta_b + \eta_t) - 2(\eta_b - \eta'_t)^2 - 2(\eta_t - \eta'_b)^2 \quad (38)$$

However, in this case the limits of validity of (18) are slightly different since before the phase of pure membrane response there is an intermediate one corresponding to those parts of the interaction curve which are not covered by (4b).

For a doubly reinforced square slab, (32) is also valid with the modifications and restrictions displayed above.

All the solutions discussed are valid also for slabs with homogeneous cross sections made of a sign-sensitive material. Reinforcement parameter k has

to be now replaced by K defined by (6) and the bending collapse loads are given by (13).

VIII. CONCLUSIONS

The kinematical approach based upon the rigid-plastic post-yield analysis can give a qualitatively good description of the real response of clamped reinforced concrete slabs if completed with the effect of elastic axial compressibility. Depending upon an assumed coefficient of compressibility the results vary between those predicted by the simple bending theory and those of full rigid-plastic arching action. Therefore, if reliable quantitative results are desired, the appropriate value of the coefficient ε has to be adopted. Suitable choice of that value remains to be made, experimental evidence on the subject being relatively scarce. Interesting tests on square slabs are reported in [10] and some of the results are shown in Fig. 6. Due to the absence of top reinforcement, the test data and the actual results are truly comparable only in the case of concrete slabs ($\eta = 0$, $k = 1$). Clamped strips with elastically deforming supports were tested by Roberts [11]. One finds that the best quantitative coincidence may be ensured for the compressibility coefficient corresponding to the reduced modulus E which is roughly equal to half the incipient elastic modulus for concrete.

REFERENCES

1. K. W. Johansen, *Brudlinienteorier*, Copenhagen, 1943; in English: *Yield-line Theory*, Cement and Concrete Assoc., London, 1962.
2. M. Janas, Kinematical compatibility problems in yield-line theory, *Mag. Concrete Res.* 19: 33-44 (1967).
3. M. Janas and A. Sawczuk, Influence of position of lateral restraints on carrying capacities of plates, *Arch. Inz. Lad.* 12: 232-244 (1966); also, Bull. Inform. C.E.B. No. 58, 1966.
4. R. H. Wood, *Plastic and Elastic Design of Slabs and Plates*, Thames & Hudson, London, 1961.
5. A. Sawczuk, Membrane action in flexure of rectangular plates with restrained edges, in *Flexural Mechanics of Reinforced Concrete*, Proc. Int. Symp., Miami, ASCE, New York, 1965, p. 347.
6. R. Park, Ultimate strength of rectangular concrete slabs under short-term uniform loading with edges restrained against lateral movements, *Proc. Inst. Civil Eng.* 28: 125-136 (1964).

7. M. Janas, Large plastic deformations of reinforced concrete slabs, *Int. J. Solids Struct.* 4: 61-74 (1968).
8. C. R. Calladine, Simple ideas in the large-deflection plastic theory of plates and slabs, *Engineering Plasticity*, Cambridge Univ. Press, London, 1968, pp. 93-127.
9. M. Janas and J. A. König, *Nosność Graniczna Powłok-Przekrycia i Zbiorniki* (in Polish), Arkady, Warsaw, 1968.
10. A. Jacobson, Membrane-flexural failure modes of restrained slabs, *Proc. ASCE J. Struct. Div.* 93: 85-112 (1967).
11. E. H. Roberts, Load-carrying capacity of slab-strips restrained against longitudinal expansion, *Concrete* 3: 369-378 (1969).
12. M. Janas, Membrane forces and arching action in slabs, *Proc. 1st Nat. Congr. Mech.* 1969, Vol. 2, BAN, Sofia, 1971, pp. 473-479.

Received January 31, 1972.

Marek Janas
Zakład Teorii Konstrukcji
IPPT

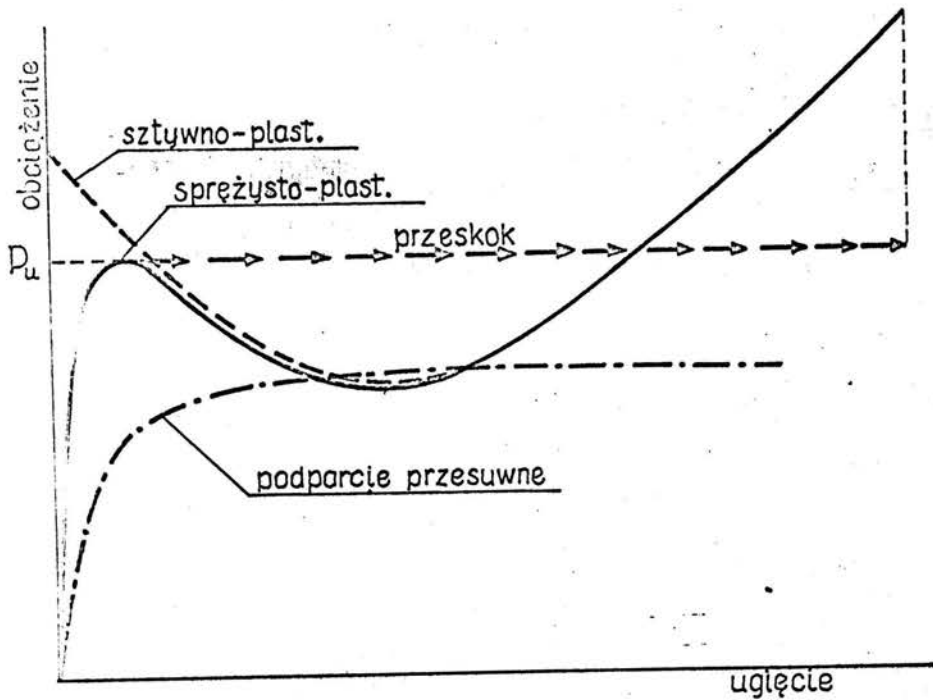
PRZESKOK W ZGINANYCH ELEMENTACH ŻELBETOWYCH

1. Wprowadzenie

Jak wykazuje doświadczenie /por.np.[1]/, zniszczenie żelbetowych belek i płyt w przypadku ich nieprzesuwnego podparcia ma gwałtowny charakter i obserwujemy nagły przeskok konstrukcji do nowego stanu równowagi, któremu odpowiada pojawienie się dużych deformacji. Wynika to stąd, że w nieprzesuwnie podpartych elementach zginanych z materiałów "znaczących" /o różnych charakterystykach przy rozciąganiu i ściskaniu/ pojawiają się ściskające siły membranowe. W pierwszej fazie procesu deformacji wzmacniają one znacznie konstrukcję [2], ale nadają dalszemu procesowi odkształcenia charakter niestateczny, podobnie jak w przypadku mimośrodowego ściskania smukłych prętów. Zależność między obciążeniem poprzecznym i ugięciem ma charakter pokazany na rys.1 /linia ciągła/.

W przypadku podparcia przesuwnego zachowanie się konstrukcji jest jakościowo różne /linia "kropka - kreska"/, a jej maksymalny udźwig jest znacznie niższy.

Praktyczne zrealizowanie się przedstawionego na rys.1 za pomocą linii ciągłej procesu możliwe jest jedynie w przypadku gdy rozpatrywany element stanowi część statycznie niewyznaczalnego układu, w którym rezultatem zwiększonej podatliwości elementu jest zmniejszenie oddziaływującego nań obciążenia. W przypadku elementów poddanych bezpośrednio obciążeniu zewnętrznemu proces deformacji przebiega na ogół przy



Rys. 1

obciążeniu niemalejącym. Po osiągnięciu intensywności obciążenia odpowiadającej maksymalnemu udźwigowi P_u nie jest już możliwe zachowanie równowagi quasistatycznej. W zależności od charakteru wpływu zmian w geometrii układu wywołanych odkształceniami konstrukcja może bądź ulec całkowitemu zniszczeniu, bądź przejść w sposób dynamiczny do nowego stanu równowagi. W przypadku nieprzesuwne podparcia elementów zginanych mamy na ogół do czynienia z dynamicznym przeskokiem.

Z punktu widzenia konsekwencji obciążenia konstrukcji do granic jej udźwigu bardzo istotnym jest określenie trwałych ugięć układu po przeskoku. Temu zagadnieniu poświęcona jest niniejsza praca.

Rozpatrywane dotychczas zagadnienia dynamicznej teorii konstrukcji plastycznych sprowadzają się do określania trwałych ugięć przy zadanym w czasie obciążeniu przekraczającym nośność układu [3] lub przy zadanych prędkościach początkowych [4]. W obu tych przypadkach odkształcenia sprężyste są o rząd mniejsze od plastycznych i można z powodzeniem operować modelem ciała sztywno-plastycznego. W naszym przypadku obciążenie ma charakter statyczny i narasta powoli do wielkości równej maksymalnemu udźwignięciu / P_u na rys.1/, ale konstrukcja jest geometrycznie nieliniowa i z chwilą osiągnięcia wielkości obciążenia P_u zaczyna się jej ruch przyspieszony.

Wpływ odkształceń sprężystych jest tu istotny, ale ogranicza się on głównie do fazy przed osiągnięciem maksymalnego udźwignięcia /linią przerywaną na rys.1/. Porównując wyniki analizy sztywno-plastycznej [2] i sprężysto-plastycznej [5] widzimy, że przy normalnie spotykanych smukłościach konstrukcji różnice dla ugięć większych od w_u /przy którym osiąga się maksymalny udźwignięcie P_u / są bardzo małe. Dla ugięć mniejszych od w_u proces ma charakter quasistatyczny, wobec czego analiza dynamiczna może być prowadzona w oparciu o model sztywno-plastyczny. Z analizy sprężysto-plastycznej niezbędne nam będą wielkości początkowe dla procesu dynamicznego: p_u i w_u . Słuszność takiego uproszczenia potwierdza przytoczony w p.3 przykład.

2. Podejście kinematyczne przy dynamicznej analizie konstrukcji plastycznych

Podobnie jak w przypadku statycznej analizy "pozagranicznej" [2], czy analizy dynamicznej dla małych lub skończonych [3,6] deformacji najwygodniejszym podejściem jest oparcie się na założeniu o niezmienności w procesie deformacji ogólnego charakteru mechanizmu plastycznego płynięcia. analizę można prowadzić wówczas metodami dobrze znanymi z klasycznej teorii nośności granicznej, a w pierwszym rzędzie

metodą energetyczną.

Równanie przyrostów mocy obciążeń zewnętrznych T i prędkości zmian energii odkształcenia D dla ustalonej chwili czasowej można zapisać dla konstrukcji przestrzennej o powierzchni środkowej S w postaci:

$$/1/ \int_S \left(p_0 \mathcal{E}_p - \frac{p \mathcal{E}_p - p_c}{g} \ddot{w}_c \mathcal{E}_w \right) \dot{w}_c \mathcal{E}_w ds = \int_S \dot{w}_c \bar{d} ds,$$

gdzie obciążenie zewnętrzne p przyjmuje się za stałe w czasie dynamicznej części procesu deformacji i określane przy pomocy intensywności p_0 i konfiguracji \mathcal{E}_p zależnej od współrzędnych x^i na powierzchni środkowej:

$$/2/ \quad p = p_0 \mathcal{E}_p(x^i).$$

Wielkość $p_c = p_c(x^i)$ jest częścią obciążenia nie związaną z masą /np. ciśnienie gazowe/, Pole przemieszczeń poprzecznych w jest jednoparametrową /parametr w_c / funkcją czasu

$$/3/ \quad w = w_c \mathcal{E}(x^i).$$

Jednostkową prędkość zmian energii odkształcenia występującą po prawej stronie równania /1/ oznaczymy przez d :

$$/4/ \quad d = \dot{w}_c \bar{d}(x^i, w_c),$$

zaś różniczkowanie względem czasu oznaczymy, jak zwykle, kropkami.

Równanie /1/ przekształcić można do postaci

$$/5/ \quad \ddot{w}_c = g \frac{\int_S (p_o e_p e_w - \bar{d}) dS}{\int_S e_w^2 (p_o e_p - p_c) dS}$$

ponieważ drogą analogicznego postępowania określić możemy statyczną nośność konstrukcji /lub jej oszacowanie/

$$/6/ \quad P_s = p_{os}(w_c) \cdot e_p(x^i)$$

na kolejnym etapie procesu deformacji [2]:

$$/7/ \quad p_{os} = \frac{\int_S \bar{d} dS}{\int_S e_p e_w dS} ,$$

równanie /5/ można zapisać jako

$$8/ \quad \ddot{w}_c = g \frac{(1 - \frac{p_{os}}{p_o}) \int_S e_p e_w dS}{\int_S e_w^2 (e_p - \frac{p_c}{p_o}) dS}$$

w powyższym wzorze mamy zadane, stałe intensywności obciążenia p_o i jego części bezmasowej p_c oraz obciążenie graniczne $p_{os}(w_c)$ znane z analizy "stanów pozagranicznych" [2];

e_p jest niezmienną w procesie deformacji konfiguracją obciążenia zaś e_w określa założony, niezmienny mechanizm płynięcia. Jediną niewiadomą funkcją jest więc $\ddot{w}_c = \ddot{w}_c(w_c)$

Dokonując podstawienia

$$/9/ \quad v = \dot{w}_c$$

mamy

$$/10/ \quad \frac{dU}{dw_c} v = w_c$$

i po scałkowaniu równania /8/ względem w_c otrzymujemy

$$/11/ \quad \frac{v^2}{2} = g \frac{\int_S e_p e_w dS}{\int_S e_w^2 (e_p - \frac{p_c}{p_0}) dS} \left(w_c - \frac{\int p_{os} dw_c}{p_0} + C_1 \right).$$

Cały czynnik przed nawiasem jest znaną, stałą wielkością C zaś C_1 jest stałą całkowania zależną od warunków początkowych.

Podstawiając warunek początkowy dla rozpatrywanej części procesu

$$/12/ \quad w_c = w_1 ; \quad v = v_1$$

otrzymujemy

$$/13/ \quad v^2 = v_1^2 + 2C \int_{w_1}^{w_c} \left[1 - \frac{p_{os}(w)}{p_0} \right] dw.$$

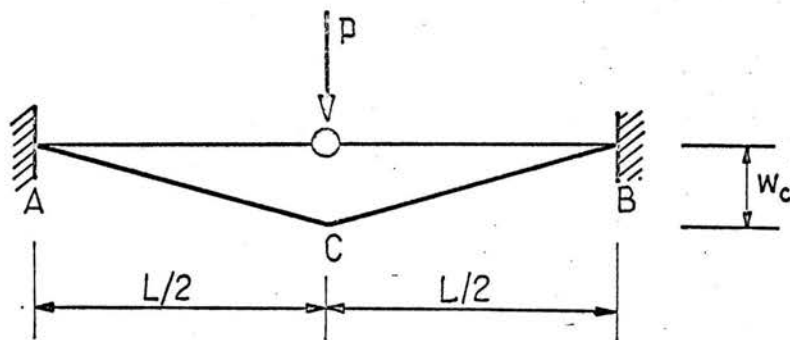
Ugięcie w_k odpowiadające zakończeniu procesu ruchu konstrukcji otrzymamy z warunku

$$/14/ \quad w_c = w_k , \quad v = 0$$

Jeśli przyjęty mechanizm deformacji jest mechanizmem rzeczywistym, W_k określa ścisłą wartość obciążenia końcowego; w przeciwnym razie uzyskujemy jedynie jego oszacowanie [6,7]. Podobnie jak to ma miejsce w przypadku statycznej analizy nośności granicznej uzyskane z podejścia kinematycznego przybliżone rezultaty mają na ogół dostateczną dokładność dla potrzeb zastosowań praktycznych.

3. Przykład zginania walcowego

Dla możliwie jasnego przedstawienia toku postępowania przy określaniu ugięć konstrukcji po przeskoku rozpatrzmy prosty przykład obustronnie zamocowanego pasma płytowego /belki/ obciążonego w połowie rozpiętości /rys.2/ siłą skupioną. Ciężar własny konstrukcji pomijamy.



Rys. 2

Rozpatrzmy jednostkowej szerokości pasmo o jednorodnym przekroju o wysokości h zbudowane z materiału "znakoczu-
łego" o granicach plastyczności przy sciskaniu σ_c i przy rozciąganiu σ_r . Obliczeniowymi charakterystykami takiego materiału są wielkości:

$$/15/ \quad \bar{\sigma}_\theta = \frac{\bar{\sigma}_c + \bar{\sigma}_r}{2}, \quad K = \frac{\bar{\sigma}_c - \bar{\sigma}_r}{\bar{\sigma}_c + \bar{\sigma}_r}.$$

zaletą operowania takim wyidealizowanym przekrojem jest wygodna dla analizy jakościowej postać uzyskiwanych wzorów oraz łatwość przejścia do wyników dla przekroju żelbetowego [5]. Przekrój żelbetowy rozpatrzony zostanie w p.4.

Dla skupionego obciążenia P związanego z masą P/g i przy mechanizmie odkształcenia pokazanym na rys.2 konfiguracja obciążenia e_p opisywana jest funkcją Diraca, zaś konfiguracja ugięcia e_w jest liniową funkcją x . Występujące we wzorach /1÷8/ całki mają wówczas wartości:

$$/16/ \quad \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} e_w e_p dx = 1, \quad \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} e_w^2 e_p dx = 1.$$

zaś pozostałe wielkości równe są

$$/17/ \quad p_c = 0, \quad c = g.$$

Wprowadzamy wielkości bezwymiarowe:

$$/18/ \quad q_s = \frac{PL}{2\sigma_0 h^2}, \quad \alpha = \frac{w_c}{h}, \quad \varepsilon = \frac{4Eh^2}{\sigma_0 L^2},$$

gdzie E jest uśrednionym modułem odkształcalności podłużnej belki. Przy tych oznaczeniach zależność między bieżącą nośnością graniczną q_s i ugięciem α przybiera wg [5] postać:

$$/19/ \quad q_s = q_{y_s} + (K - \alpha)^2 - \left[K - (1 - e^{-\alpha\varepsilon}) \left(K + \frac{1}{\varepsilon} \right) \right]^2.$$

wielkość Q_y jest nośnością belki podpartej przesuwnie

$$/20/ \quad Q_y = 1 - K^2.$$

równanie /19/ obowiązuje dla $\alpha \leq \alpha_m$ przy α_m określanym z równania [5]:

$$/21/ \quad \alpha_m + e^{-\varepsilon \alpha_m} \left(K + \frac{1}{\varepsilon} \right) = 1 + \frac{1}{\varepsilon}.$$

dla większych ugięć belka przechodzi w stan membranowy

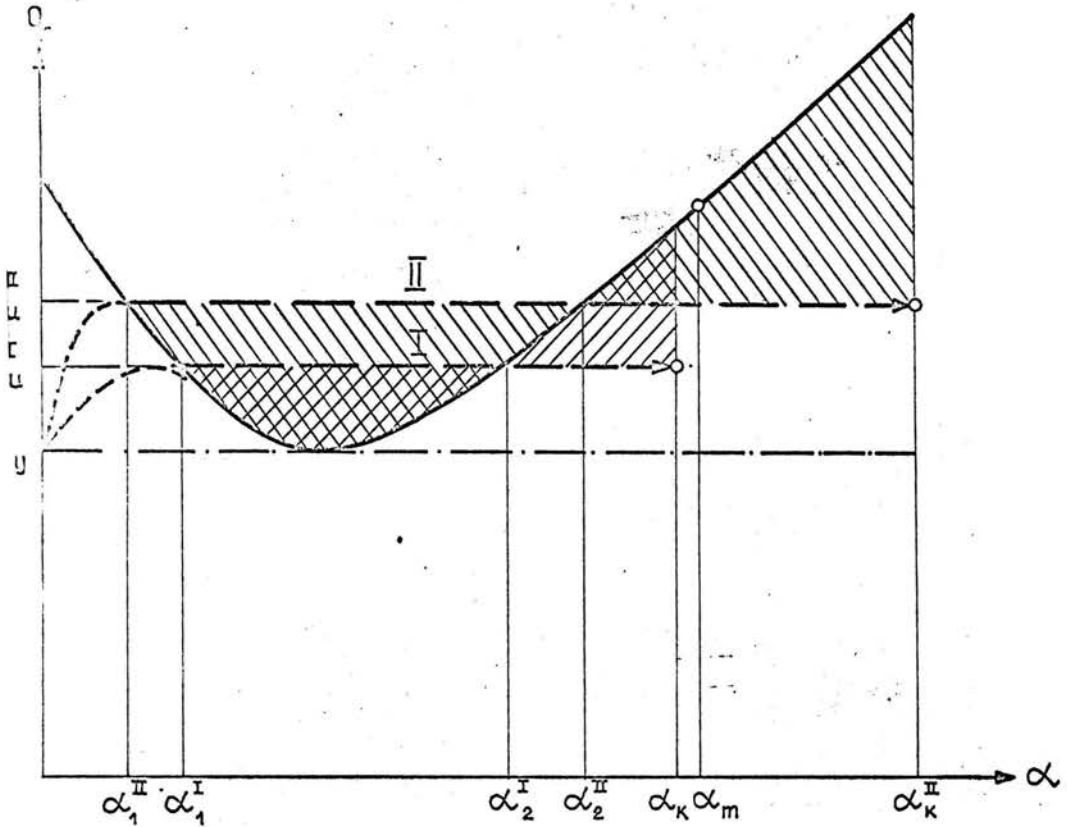
$$/22/ \quad q_s = 2\alpha(1-K):$$

Zgodnie z rozważaniami podanymi na końcu p.1, przy całkowaniu wyrażenia /13/ operować możemy modelem sztywno-plastycznym ($\varepsilon \rightarrow \infty$, dla którego znika wyrażenie w nawiasie kwadratowym /19/ zaś /21/ sprowadza się do $\alpha_m = 1$).

Podstawiając wielkości /17/ i /18/ mamy wyrażenie na prędkość ugięcia

$$/23/ \quad v^2 = v_1^2 + 2gh \int_{\alpha_1}^{\alpha} \left(1 - \frac{q_s}{q_0} \right) d\alpha,$$

gdzie $q_0 = Q_u$ jest maksymalnym obciążeniem, przy którym następuje przeskok /rys.3/.



Rys.3

Ponieważ narastanie obciążenia w granicach $0 - q_u$ jest bardzo wolne w porównaniu z przebiegiem przeskoku, można przyjąć, że dla

$$/24/ \quad \alpha = \alpha_1, \quad v_1 = 0.$$

W przypadku gdyby obciążenie q_0 przekraczało znacznie wielkość q_u , należałoby rozpatrywać cały proces obciążenia od $\alpha_1 = 0$.

W zależności od tego, czy ruch ustaje dla $\alpha_k \leq \alpha_m$ /proces I na rys.2/ lub $\alpha_k > \alpha_m$ /proces II/, we wzorze /23/ podstawiamy q_s wg /19/ lub w odpowiednich obszarach wg /19/ i wg /22/. W pierwszym przypadku z warunku /14/ otrzymujemy

$$/25/ \quad \alpha_K^I = \frac{3}{2}K - \frac{\alpha_1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \sqrt{4(q_u - q_y) - (K - \alpha_1)^2}$$

po podstawieniu zależności
otrzymujemy:

$$q_u = q_s(\alpha_1) \quad \text{wg /19/}$$

$$/25.a/ \quad \alpha_K^I = 3K - 2\alpha_1$$

lub

$$/25.b/ \quad \alpha_K^I = K + 2\sqrt{q_u - q_y}$$

wzory /25/ obowiązują dla $\alpha_K \leq \alpha_m = 1$, t.j. dla

$$/26/ \quad q_u - q_y \leq \left(\frac{1-K}{2}\right)^2$$

jeśli nierówność ta nie jest spełniona, to otrzymujemy odpowiednio jak dla przypadku I:

$$/27/ \quad \alpha_K^II = \alpha_s + \sqrt{(\alpha_s - \alpha_1) - \frac{(1 - \alpha_1)^3}{3(1-K)}}$$

$$/27.b/ \quad \alpha_K^II = \alpha_s + \frac{1-K}{2} \left(1 - \frac{\sqrt{q_u - q_y}}{1-K}\right)^{\frac{1}{2}} \left[\left(\frac{\sqrt{q_u - q_y}}{1-K}\right)^3 - \frac{1}{3}\right]^{\frac{1}{2}}$$

gdzie

$$/28/ \quad \alpha_s = \frac{q_u}{2(1-K)} .$$

Gdyby w obszarze $\alpha_1 - \alpha_k$ operować krzywą dla modelu sprężysto-plastycznego całkowanie równania /19/ dla $\varepsilon \neq 0$ prowadziłyby do niewygodnych wzorów. Łatwiej jest przeprowadzić całkowanie numeryczne. Proces ustaje dla α_k , przy którym powierzchnie pól zakreskowanych nad i pod krzywą /rys.3/ są równe. W najczęściej spotykanym przypadku, gdy $\alpha_k > \alpha_m$, wykorzystując liniowość zależności w fazie membranowej /22/ otrzymujemy formułę półanalityczną:

$$/29/ \quad \alpha_k^{\text{II}} = \alpha_s + \sqrt{\frac{F_d}{1-K} + (\alpha_s - \alpha_m)^2}$$

gdzie F_d jest bezwymiarowym polem powierzchni $\alpha < \alpha_m$:

$$/30/ \quad F = \int_{\alpha_1}^{\alpha_m} (q_s - q_u) d\alpha$$

W poniższej tabelicy porównano wyniki uzyskane dla materiału o rozbieżności granic plastyczności $K=0,6$ /tj. $\sigma_r = 0,25 \sigma_c$ / uzyskane przez przyjęcie modelu sztywno-plastycznego w obszarze $\alpha_1 - \alpha_k$. Jak widać, o rzeczywiście liczących się błędach wynikających z przybliżenia sztywno-plastycznego mówić można dopiero dla $\varepsilon \leq 2$; co może dotyczyć jedynie bardzo smukłych konstrukcji.

ε	Q_u	α_m	α_k spręż-plast	α_k szt-plast	błąd
∞	1,000	1,00	2.11	2.11	-
10	0,865	1,05	1.69	1.68	0,6%
5	0,820	1,20	1.58	1.53	3,2%
1	0,705	1,70	1.52	1.29	15,1%

4. Przekrój żelbetowy

Jak zaznaczono na początku p.3, charakter zachowania się konstrukcji żelbetowej jest identyczny jak dla konstrukcji z jednorodnego materiału znakoczułego. Równanie /19/ opisujące przebieg procesu odkształcenia statycznego pozostaje nadal w mocy [5], jeśli np. dla konstrukcji zbrojonej w strefie rozciąganej /na powierzchni dolnej w przęśle i na powierzchni górnej na podporach/ przyjmiemy

$$/31/ \quad K = 1 - \eta_d - \eta_g,$$

gdzie η_d i η_g określają bezwymiarową intensywność zbrojenia przęsłowego i podporowego o przekrojach f_d i f_g i granicy plastyczności σ_s :

$$/32/ \quad \eta_d = \frac{f_d \sigma_s}{h \sigma_c}, \quad \eta_g = \frac{f_g \sigma_s}{h \sigma_c}.$$

wytrzymałość betonu na rozciąganie pomija się, zaś granicę elastyczności przy ściskaniu oznaczono przez σ_c .

Nośność zgięciową /20/ dla konstrukcji podpartej przesuwnie wyraża się obecnie wzorem [5]:

$$/33/ \quad q_y = 4(\eta_g - \eta_d) - 2(\eta_g^2 + \eta_d^2).$$

ze względu na asymetrię przekroju zmianie ulega także wyrażenie /22/ odpowiadające strerze membranowej ($\alpha > \alpha_m$):

$$/34/ \quad q_{vs} = A + 2\alpha(\eta_d + \eta_g - |\eta_g - \eta_d|),$$

$$/35/ \quad A = 2 \left[\eta_g - \eta_d - (\eta_g - \eta_d)^2 + |\eta_g - \eta_d| \right],$$

Równanie dla α_m określającego zakres ważności wyrażen /19/ i /34/ ma obecnie postać:

$$/36/ \quad \alpha_m + e^{-\varepsilon \alpha_m} \left(K + \frac{1}{\varepsilon} \right) = 1 + \frac{1}{\varepsilon} - |\eta_g - \eta_d|.$$

Wzory /25 - 25.b/ na ugięcie końcowe α_k dla modelu sztywno-plastycznego pozostają nadal ważne, zaś dla $\alpha_k > \alpha_m$ otrzymujemy obecnie:

$$/37/ \quad \alpha_k^{\text{II}} = \bar{\alpha}_s + \sqrt{(\bar{\alpha}_s - \alpha_1)^2 + \frac{(\alpha_m - \alpha_1)^3}{3(\alpha_m - K)}}$$

gdzie

$$/38/ \quad \bar{\alpha}_s = \frac{Q_u - A}{2(\alpha_m - K)}.$$

Wzór /29/, z zastosowaniem numerycznego całkowania dla modelu sprężysto- lub sztywno-plastycznego ulega także niewielkiej modyfikacji:

$$/39/ \quad \alpha_k^{\text{II}} = \bar{\alpha}_s + \sqrt{\frac{F}{\alpha_m - K} + (\bar{\alpha}_s - \alpha_m)^2}$$

Wzory p.3 stanowią szczególny przypadek powyższych wzorów dla $A = 0$ i $\eta_g = \eta_d$.

5. Zamocowana płyta kwadratowa

Zakładając mechanizm zniszczenia dla równomiernie obciążonej płyty żelbetowej jak na rys.4 otrzymujemy [5] krzywą statyczną:

$$/40/ \quad q_s = q_y + k^2 - \alpha \left(K - \frac{5}{12} \alpha \right) - \left[K - (1 - e^{-\epsilon \alpha}) \left(K + \frac{1}{2\epsilon} \right) \right] + \\ - \frac{1}{6\epsilon^2} (1 - e^{-\epsilon \alpha})^2$$

zas dla $\alpha > \alpha_m$

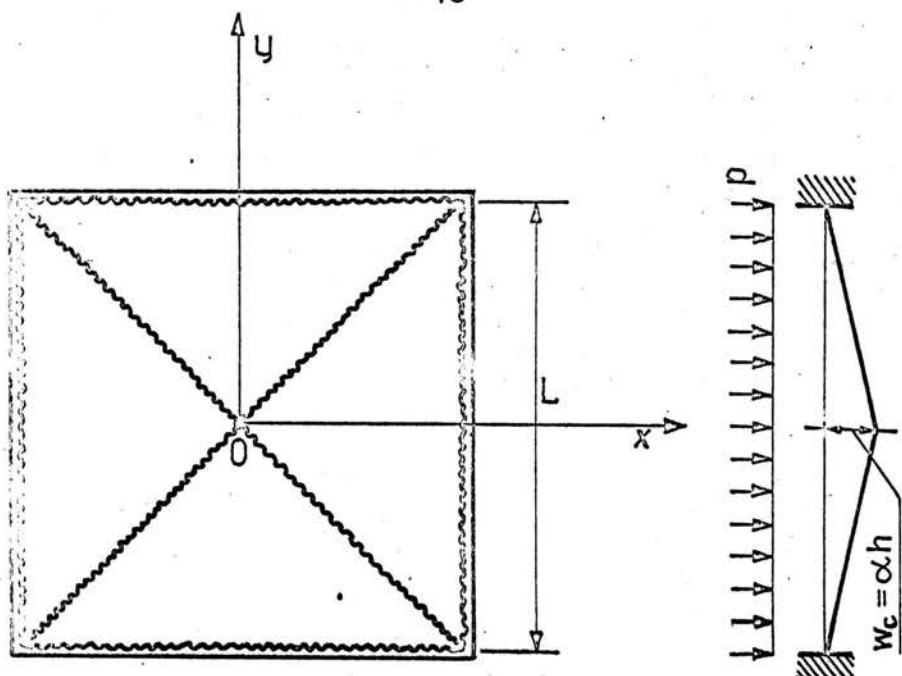
$$/41/ \quad \alpha_m = \frac{2}{3} (1 + \eta_d - \eta_g)$$

wystarczy operować wyrażeniem odpowiadającym modelowi sztywno-piastycznemu:

$$/42/ \quad q_s = (2 + \alpha)(\eta_g + \eta_d) + \frac{\alpha}{3} (1 + 7\eta_g - 7\eta_d) + \\ + (2 + \alpha + 2\eta_g - 2\eta_d) \left\{ \frac{4}{3} \alpha \left[1 - \sqrt{1 + \frac{2}{\alpha} (1 + \eta_g - \eta_d)} \right] + 1 \right\}.$$

W powyższych wyrażeniach operujemy wielkościami bezwymiarowymi określonymi w p.5, a jedynie intensywność bezwymiarowego obciążenia równa jest:

$$/43/ \quad q = \frac{p_o L^2}{6 \sigma_c h^2}$$



rys. 4

zgodnie z procedurą przedstawioną w poprzednich punktach, przy całkowaniu wyrażenia /13/ operować możemy modelem sztywno-plastycznym ($\varepsilon \rightarrow \infty$), a jedynie przy wyznaczaniu wielkości α_1 i q_{yu} korzystać z rozwiązania sprężysto-plastycznego /40/.

Dla obciążenia równomiernego mamy wg /2/ $\varrho_p = 1$, oraz wg /3/

$$/44/ \quad \varrho_w = 1 - \frac{||x| - |y|| + |x| + |y|}{L}$$

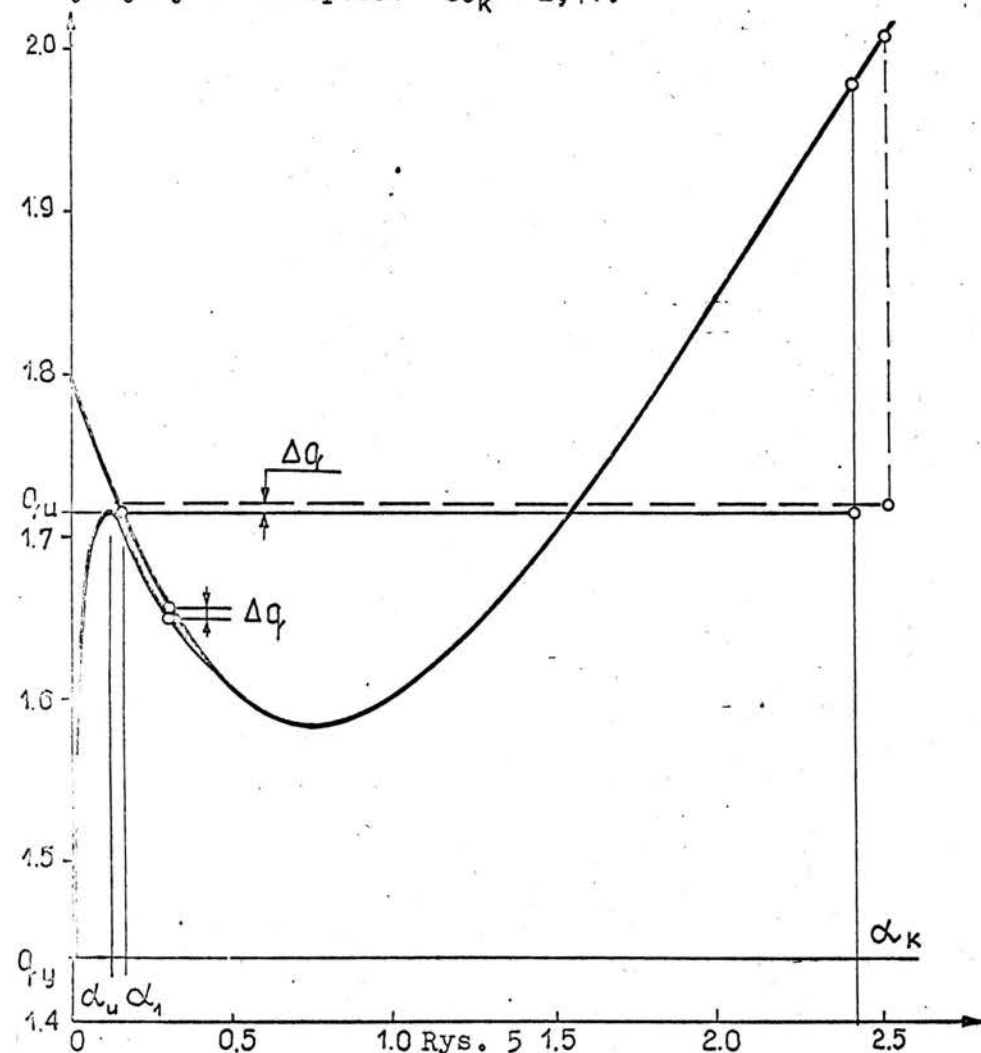
i po scałkowaniu wyrażień w /11/ otrzymujemy we wzorze /13/ na prędkość przeskoku C.

Dla warunku początkowego: $\alpha = \alpha_1, \dot{\alpha}_1 = 0$ warunek ustania ruchu /14/ sprowadza się do postaci

$$/45/ \quad \int_{\alpha_1}^{\alpha_k} (q_{yu} - q_s) d\alpha = 0$$

Analityczne całkowanie wyrażenia q_{ys} nie jest celowe, gdyż i tak z warunku /45/ otrzymalibyśmy równanie przestępne. Wygodniej jest bezpośrednio planimetrować wykres jak na rys.5, określając α_K w warunku równości pól nad i pod rzędną $q = q_{yu}$. Dla przykładu pokazanego na rys.5, dla którego mamy:

$q_{yu} = 1,44$, $\alpha_u \approx 0,125$, $q_{yu} = 1,715$, $\alpha_1 = 0,155$
otrzymujemy w ten sposób $\alpha_K = 2,41$.



Ponieważ zmienność krzywej $q_s(\alpha)$ dla płyty kwadratowej jest łagodniejsza niż w przypadku belki, niewielkie zmiany rzędnej wywołane efektami sprężystymi mogą mieć większy wpływ na ocenę ugięć końcowych płyty niż belki. Aby zmniejszyć wynikający stąd błąd można operować w obszarze $\alpha_1 < \alpha < \alpha_k$ odpowiednio zmodyfikowaną wielkością obciążenia q_u :

$$/46/ \quad q'_u = q_u + \frac{5}{12 \xi^2}$$

6. Ocena wpływu prędkości odkształcenia

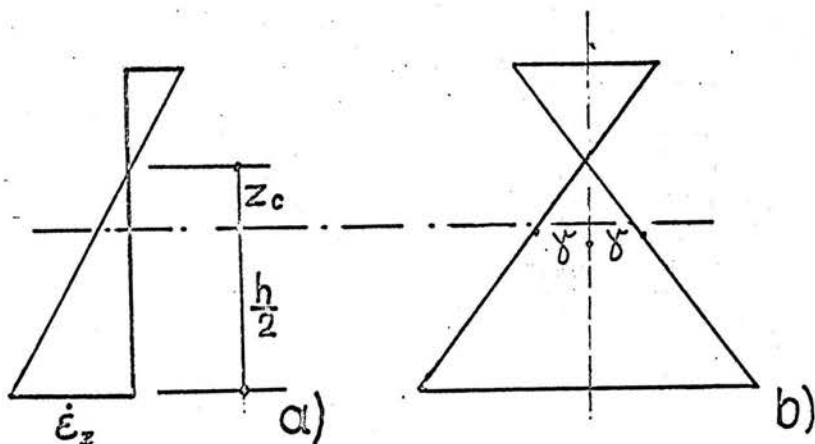
Wpływ prędkości odkształcenia na zachowanie się konstrukcji żelbetowej uwidacznia się w pierwszym rzędzie przez wzrost granicy plastyczności zbrojenia przy szybkim rozciąganiu. Aby przekonać się o znaczeniu tego czynnika dla dokładności proponowanej metody oceny ugięć należy przejść od prędkości ugięcia - poprzez kątowe prędkości w przegubach plastycznych - do prędkości liniowych odkształceń w zbrojeniu.

Dla określonych z równania /13/ prędkości ugięcia v można określić prędkość wydłużenia v_z zbrojenia w strefie plastycznego przegubu przęsłowego /rys.6a/ jako:

$$/47/ \quad v_z = \frac{2v}{L} (h + 2Z_c)$$

gdzie Z_c określa położenie chwilowej osi obojętnej w przekroju.

Odkształcenia w przegubie plastycznym powinny osiągać teoretycznie nieskończone wielkości. W rzeczywistości przegub "rozmazuje" się w obszarze przekroju pokazanym schematycznie na rys.6b. Zakładając w przybliżeniu, że wydłuże-



Rys. 6

nie o ... rozkłada się równomiernie na długości $l = (h + 2z_c) \operatorname{tg} \gamma$ otrzymujemy średnią prędkość odkształcenia zbrojenia w strefie przegubu:

$$/48/ \quad \dot{\epsilon}_z = \frac{2v}{L} \operatorname{ctg} \gamma$$

Największą prędkość ugięcia, a więc i prędkość odkształcenia osiągamy w przypadku rozpatrywanej w p.4 belki żelbetowej dla ugięcia α_2 /wg rys.3/, przy którym zachodzi $q_{rs} = q_{ru}$; t.j. dla:

$$/49/ \quad \alpha_2^I = K + \sqrt{q_{ru} - q_{ry}} \quad , \quad \text{dla} \quad q_{ru} \leq 2(1-K)(2 - |\eta_g - \eta_d|),$$

$$/50/ \quad \alpha_2^{II} = \frac{q_{ru} - A}{2(1-K - |\eta_g - \eta_d|)} \quad \text{dla} \quad q_{ru} > 2(1-K)(2 - |\eta_g - \eta_d|).$$

W przypadku I otrzymujemy największą prędkość

$$/51/ \quad v_{\max}^I = \left(\frac{8gh}{3q_{ru}} \right)^{\frac{1}{2}} (q_{ru} - q_{ry})^{\frac{3}{4}}$$

Literatura

1. R.H.WOOD, Plastic and Elastic Design of Slabs and Plates, Thames and Hudson, London 1961.
2. M.JANAS, Large plastic deformations of reinforced concrete slabs, Int.J.Solid Structures, 4,/1968/, 61-74.
3. N.JONES, A theoretical study of the dynamic plastic behavior of beams and plates at finite deflection, Int. J.Solids Struct.,7/1971/,1007-1030.
4. T.WIERZBICKI, Impulsive loading of rigid viscoplastic plates, Int.J.Solid Struct., 3/1967/,635-647.
5. M.JANAS, Arching action in elastic-plastic plates, J.Struct.Mech., 1/1973/,277-293.
6. T.WIERZBICKI, Bounds on large dynamic deformations of structures, J.Eng.Mech.Div.-Proc.ASCE, 96/1970/,267-276.
7. J.B.MARTIN, A.R.S.PONTER, Bounds on large deformation of impulsively loaded elastic-plastic structures, Report 70-72, University of Leicester, August 1970.
8. M.J.MANJOINE, Influence of rate of strain and temperature on yield stress of mild steel, J.Appl.Mech.,11/1944/, 1-21.

Marek Janas
Zakład Teorii Konstrukcji
IPPT

ZAGADNIENIE MAKSYMALNEGO UDŹWIGU
ŻELBETOWYCH POWŁOK WALCOWYCH

1. Zależności podstawowe

Rozpatrujemy zamkniętą powłokę walcową /rys. 1/ obciążoną kołowo-symetrycznie ciśnieniem wewnętrznym p oraz siłami krawędziowymi $T_0, M_{x0}, N_{x0}, T_H, M_{xH}, N_{xH}$. Przy oznaczeniach i konwencji znaków jak na rys. 1 równania równowagi powłoki można zapisać /por. np [1]/:

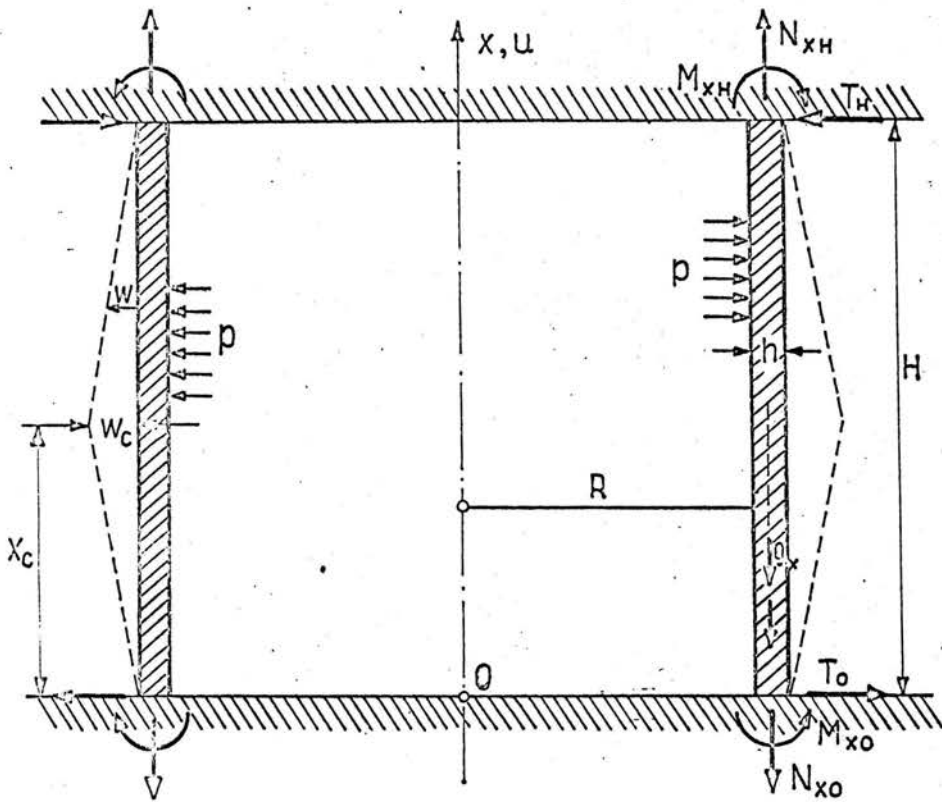
$$/1/ \quad T_{x,x} + \frac{N_{\theta}}{R} = p,$$

$$/2/ \quad M_{x,x} - T_x = 0,$$

$$/3/ \quad N_{x,x} + q_x = 0,$$

gdzie /, x/ oznacza różniczkowanie po x zaś q_x jest obciążeniem masowym. Dwa pierwsze równania można sprowadzić do postaci

$$/4/ \quad M_{x,xx} + \frac{N_{\theta}}{R} = p.$$



Rys. 1

Odształcenia osiowe λ i zmiany krzywizny α wyrażają się odpowiednio, wzorami:

$$/5/ \quad \lambda_x = u, x \quad , \quad \lambda_\theta = \frac{w}{R} \quad , \quad \lambda_{x\theta} = 0$$

$$/6/ \quad \alpha_x = w, xx \quad , \quad \alpha_\theta = 0 \quad , \quad \alpha_{x\theta} = 0.$$

Prędkości odkształceń $\dot{\lambda}_x, \dot{\lambda}_\theta, \dot{\alpha}_x, \dot{\alpha}_\theta$ można wyrazić tymi samymi wzorami zastępując przemieszczenia u i w przez prędkości \dot{u}, \dot{w} . W przegubach plastycznych operujemy umownymi odkształceniami skupionymi będącymi wynikiem całkowania prędkości odkształceń po nieskończenie wąskim obszarze. Wyrażają się one wzorami /por. [2] /:

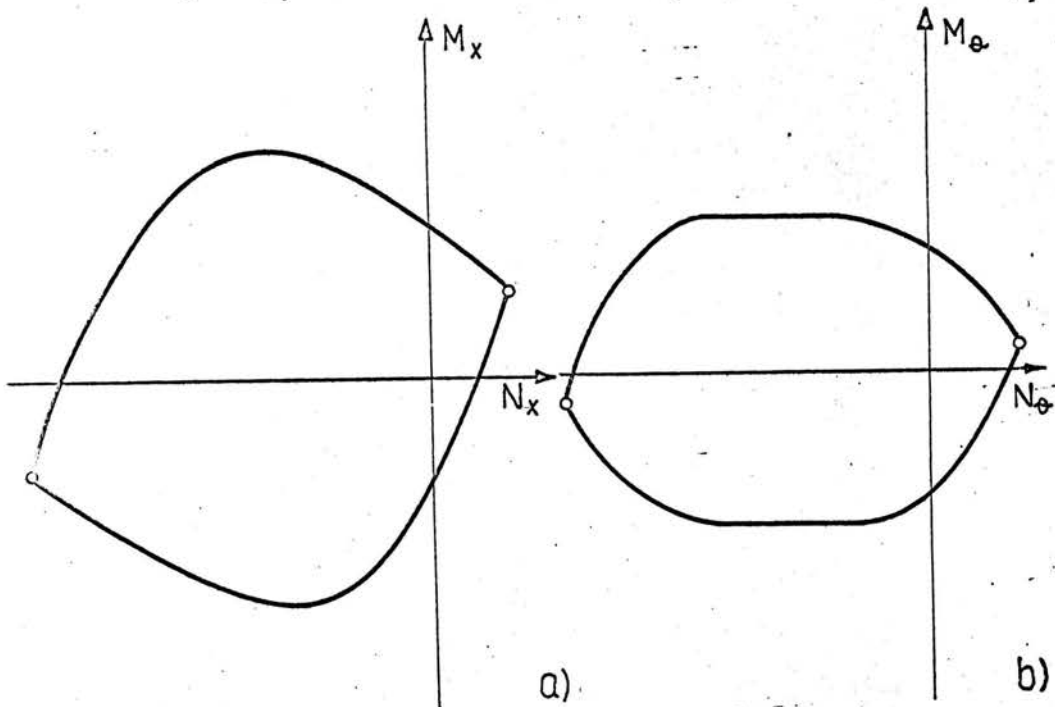
$$\bar{\lambda}_x = u, \quad \bar{\alpha}_x = u, x \quad , \quad \bar{\lambda}_\theta = \bar{\alpha}_\theta = 0,$$

/7/ gdzie] oznacza skok /nieciągłość/ danej wielkości.

Powłoka posiadać może dowolną niejednorodność poprzeczną, przy czym zakłada się, że poszczególne warstwy spełniają warunek plastyczności Galileusza /t.zw. "warunek prostokątny"/. W rozpatrywanym przypadku kołowej symetrii kierunki główne się pokrywają się z głównymi kierunkami ortotropii. Zapisując warunki plastyczności przy pomocy naprężeń głównych otrzymujemy niezależne warunki dla każdego z kierunków głównych. Wobec tego zależność graniczna przedstawiająca warunek uplastycznienia całego przekroju rozpada się także na dwa niezależne związki pomiędzy siłą membranową i momentem zginającym w obu głównych kierunkach [3] . Mamy więc:

$$/8/ \quad F_x (M_x, N_x) = 0$$

$$/9/ \quad F_\theta (M_\theta, N_\theta) = 0.$$



Rys. 2

Zależności te są identyczne jak dla prostokątnych prętów obciążonych mimośrodowo [3], [4]. Zależności te opisują dwie płaskie krzywe graniczne /rys. 2/.

Dla powłok zbudowanych z materiału krucho-plastycznego o granicy plastyczności σ_c , mogącego przenosić jedynie naprężenia ściskające oraz z dowolnej liczby warstw ciągłego zbrojenia o granicach plastyczności σ_{si} i powierzchniach przekroju na jednostkę A_i zależność graniczna /8/ przybiera parametryczną postać:

$$n_x = \frac{2N_x}{\sigma_c h} = -1 - \operatorname{sgn} \alpha_x \left[\xi - 2 \sum_i \eta_{xi} \operatorname{sgn}(\xi_i - \xi) \right],$$

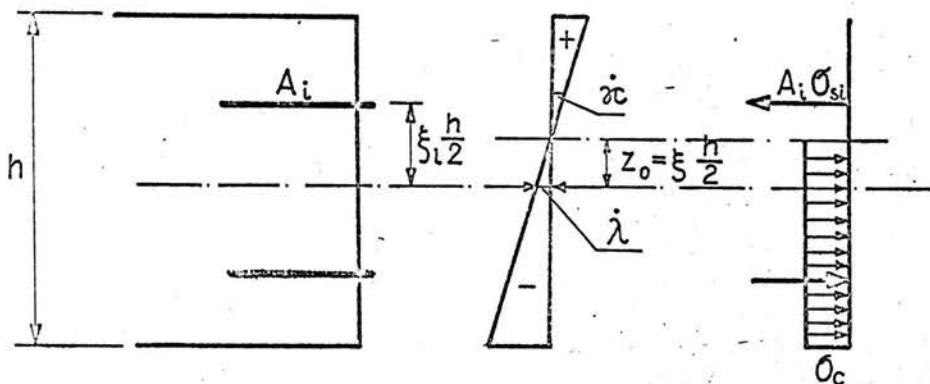
/10/

$$m_x = \frac{8M_x}{\sigma_c h^2} = \operatorname{sgn} \alpha_x \left[1 - \xi^2 + 4 \sum_i \xi_i \eta_{xi} \operatorname{sgn}(\xi_i - \xi) \right].$$

Intensywność zbrojenia i -tej warstwy odległej /rys. 3/ o $\xi_i h/2$ od powierzchni odniesienia określa wielkość

$$\eta_{xi} = \frac{\sigma_{si} A_i}{\sigma_c h}$$

zaś $\xi = \frac{2z_0}{h}$ jest parametrem określającym położenie chwilowej osi obojętnej przekroju. Równania /10/ opisują całą krzywą graniczną jeśli przyjmiemy funkcję "signum" jako: $\operatorname{sgn} a = 1$ dla $a > 0$, $\operatorname{sgn} a = -1$ dla $a < 0$, $\operatorname{sgn} a = \beta$ dla $a = 0$ ($-1 < \beta < 1$).



Rys. 3

Wówczas dla $\xi = \xi_k$, czyli przy ustalonym ξ , występuje nowy, dowolny parametr β .

Wzory /10/ obowiązują dla $-1 \leq \xi \leq 1$. Poza tymi granicami M_x i N_x równe są wielkościom odpowiadającym wartościom $\xi = \pm 1$. Dla kierunku obwodowego, zgodnie ze stowarzyszonym prawem przynięcia:

$$/12/ \quad \dot{\alpha}_\theta = \nu \frac{\partial F_\theta}{\partial M_\theta},$$

z warunku $\dot{\alpha}_\theta = 0$ wynika, że stan graniczny odpowiadać może tylko jednemu z wierzchołków A, B krzywej granicznej /rys. 2b/. Mamy wówczas:

$$/13/ \quad n_\theta = \bar{n}_\theta = 2 \sum_i \eta_{ei}, \quad \text{lub} \quad n_\theta = \bar{n}_\theta = -2 - 2 \sum \eta_{ei}.$$

2. Stan graniczny cylindra jednorodnego

W przypadku powłoki plastycznie jednorodnej w kierunku obwodowym /o stałym zbrojeniu obwodowym/, z równań /1-3/ i /13/ otrzymujemy wyrażenia:

$$T_x = \left(p - \frac{N_\theta^*}{R} \right) x + C_1$$

$$/14/ \quad M_x = \left(p - \frac{N_\theta^*}{R} \right) \frac{x^2}{2} + C_1 x + C_2,$$

gdzie $N_x^* = \bar{N}_\theta$ przy $\dot{w} > 0$ i $N_x^* = -\bar{N}_\theta$ przy $\dot{w} < 0$.

Przy podparciu krawędzi $x=0$ i $x=H$ siły poprzeczne nie są z góry zadane. Podstawiając wielkości momentów krawędziowych M_{x0} i M_{xH} do /14/ otrzymujemy:

$$/15/ \quad T_x = \frac{M_{xH} - M_{x0}}{H} - \left(p - \frac{N_\theta^*}{R} \right) \left(\frac{H}{2} - x \right),$$

$$/16/ \quad M_x = \frac{M_{x0}(H-x) + M_{xH}x}{H} - \left(p - \frac{N_e^*}{R}\right)x(H-x).$$

Jak wynika z charakteru zmienności momentów, zależność graniczna $F_x=0$ może być na ogół spełniona jedynie wzdłuż izolowanych linii obwodowych; powierzchnia odkształcona musi więc pozostać prostokreślna /por. [2], [6]/. Warunkiem powstania mechanizmu zniszczenia tego typu jest, oprócz uplastycznienia w kierunku obwodowym, utworzenie się przegubu plastycznego w miejscu ekstremum momentu M_x /a ściślej: ekstremum funkcji $F_x(M_x, N_x)$ /; przy $w \gg 0$ spełniony więc musi być warunek $M_x = -M'_{xc}$ dla $x = x_c$, gdzie:

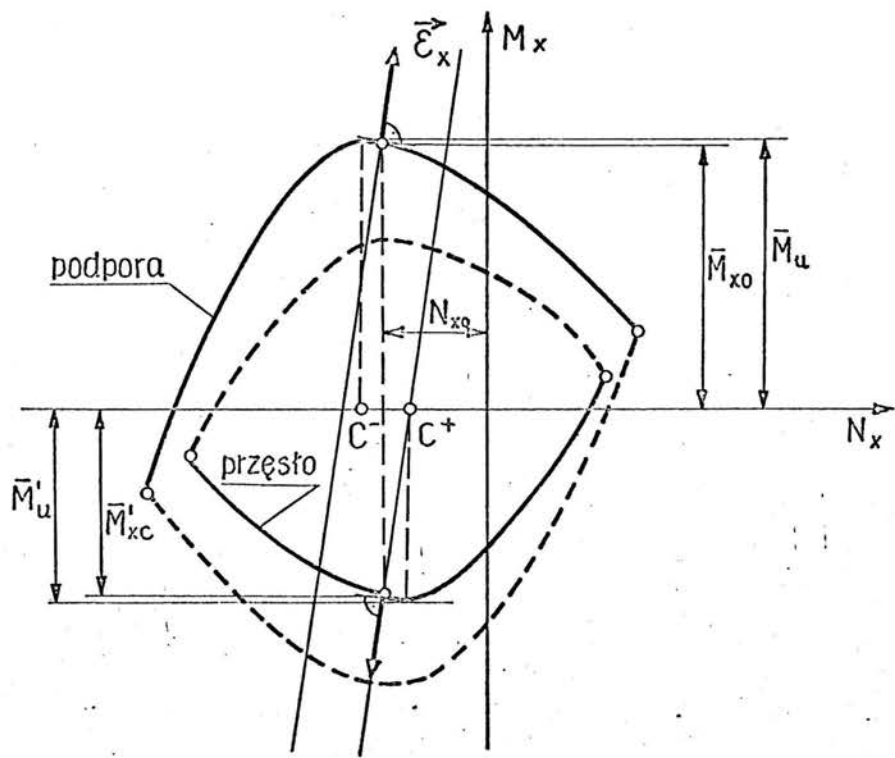
$$/17/ \quad x_c = \frac{H}{2} + \frac{M_{x0} - M_{xH}}{\left(p - \frac{N_e}{R}\right)H}.$$

Warunek ten podstawiony do /16/ daje, po rozwiązaniu otrzymanego równania kwadratowego ze względu na p , poszukiwane ciśnienie graniczne

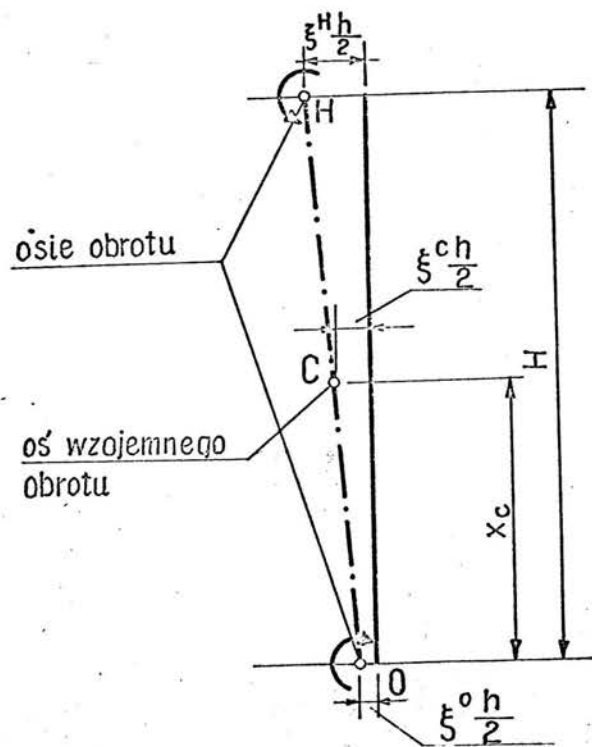
$$/18/ \quad \left(p - \frac{N_e}{R}\right) \frac{H^2}{2} = \left(\sqrt{M_{xH} + \bar{M}'_{xc}} + \sqrt{\bar{M}_{x0} + \bar{M}'_{xc}}\right)^2.$$

Dla powstania mechanizmu wymagane jest ponadto uzyskanie swobody obrotu wokół podpór. W przypadku podparcia przegubowego momenty podporowe M_{x0} i M_{xH} muszą być z góry zadane; w przypadku zamocowania krawędzi wyznaczyć należy $M_{x0} = \bar{M}_{x0}$ i $M_{xH} = \bar{M}_{xH}$, podobnie jak momentu \bar{M}'_{xc} z zależności granicznej $F_x(M_x, N_x) = 0$, dla której wartość siły podłużnej wyznaczamy z równania równowagi /3/ i z odpowiednich warunków brzegowych. Jak łatwo zauważyć, nadwyżka ciśnienia granicznego ponad wielkość wynikającą z nośności zbrojenia obwodowego odpowiada nośności umownej belki wyciętej wzdłuż tworzącej.

W dalszym ciągu rozpatrzmy szczegółowiej przypadek powłoki obustronnie zamocowanej i zabezpieczonej przed przesuwem podpór. Problem ten nie jest już statycznie wyznaczalny, gdyż warunki brzegowe do wyznaczenia N_x są typu kinema-



Rys. 4



Rys. 5

tycznego. Pomijając ewentualne siły masowe otrzymujemy z /3/ warunek stałości sił N_x w całej powłoce; momenty graniczne \bar{M}_{x_0} , \bar{M}_{x_H} i \bar{M}_{x_c} odpowiadają więc tej samej wartości $N_x = N_{x_0}$. Pokazuje to rys. 4.

Wielkość siły N_{x_0} wynika z warunków kinematycznej zgodności /por. [7] /, które przy odkształceniu w postaci powierzchni stożkowej przybierają formę prawa opisującego sztywne obroty górnej i dolnej części tworzącej /rys. 5/. Stosując bezwymiarową współrzędną położenia osi obojętnej /rys. 3/ $\xi = \frac{2z_0}{h}$ prawo to możemy zapisać jako:

$$/19/ \quad \xi^c = \xi^0 + \frac{x_c}{H} (\xi^H - \xi^0).$$

Zależność /19/ podstawiona, wraz z warunkami $N_{x_0} = N_{x_H} = N_{x_c}$, do wzoru na siłę osiową /10/ daje wraz z /17/ i /18/ układ równań pozwalający na rozwiązanie problemu.

Z technicznego punktu widzenia najważniejszym jest przypadek, dla którego charakterystyki wytrzymałościowe powłoki są jednakowe na obu podporach. Mamy wówczas $\bar{M}_{x_0} = \bar{M}_{x_H}$ i $x_c = H/2$, zaś warunek /19/ sprowadza się do

$$\xi^c = \xi^0 = \xi^H$$

Ponieważ z założenia o prostych normalnych wynika zależność:

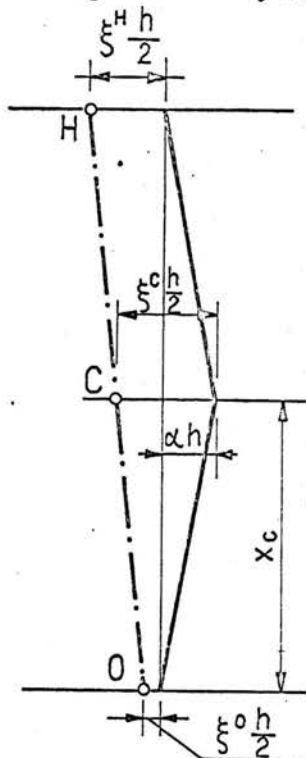
$$/20/ \quad \xi = \frac{2\bar{\lambda}_x}{h\bar{\alpha}_x},$$

zgodnie ze stowarzyszonym prawem płynięcia plastycznego wektory plastycznego płynięcia $\vec{E}_x(\bar{\lambda}_x, \bar{\alpha}_x)$ we wszystkich przegubach muszą być do siebie równoległe; pokazuje to rys. 4.

Można łatwo wykazać, że warunek ten może być spełniony tylko dla siły osiowej N_{x_0} zmieniającej się w granicach pomiędzy wielkościami odpowiadającymi największym momentom granicznym przy zginaniu dodatnim ($\bar{\alpha} > 0$) - M_u i ujemnym ($\bar{\alpha} < 0$) - M_u' , a więc wewnątrz odcinka C^+C^- na rys. 4.

Jeżeli zbrojenie przeszłowe jest ułożone względem powierzchni środkowej antysymetrycznie w stosunku do zbrojenia podporowego, wówczas musi zachodzić $\xi = 0$. To samo dotyczy, oczywiście, przypadku jednakowego, symetrycznego zbrojenia na podporach i w przęśle. Za wielkości \bar{M}_{x_0} , M_{x_H} i M'_{x_c} we wzorze /18/ podstawić należy wówczas wielkość M_u , która równa jest wg /10/:

$$/21/ \quad M_u = \frac{\sigma_c h^2}{8} \left(1 + 4 \sum_i \rho_{xi} |\xi_i| \right).$$



Rys. 6

3. Stan pozagraniczny

Podobnie jak w przypadku zamocowanej belki żelbetowej [8], równowaga graniczna rozpatrywanej powłoki ma charakter niestateczny i należałoby ją rozpatrywać z uwzględnieniem odkształceń konstrukcji. Jeśli rozpatrywać będziemy równowagę odkształconej plastycznie powłoki o ugięciu $w_c = \alpha h$,

wówczas zależność geometryczna /19/ przyjmie postać:

$$/22/ \quad \xi^c = \xi^o + \frac{x_c}{H} (\xi^H - \xi^o) + 2\alpha.$$

Ograniczając się, jak przy analizie konstrukcji nieodkształconej, do przypadku jednakowego zbrojenia na obu podporach mamy $\xi^o = \xi^H$. Wielkość ξ^o zależy od charakterystyk plastycznych przekroju poprzecznego powłoki. Dla zbrojenia jednowarstwowego rozłożonego w pobliżu rozciąganej powierzchni powłoki /zewewnętrznej w przęśle i wewnętrznej na podporach/ mamy zgodnie z przyjętym systemem oznaczeń /rys. 3/, charakterystyki przekrojów:
na podporze -

$$i = w, \quad \eta_i = \eta_w \quad \text{dla} \quad \xi_i = 1,$$

w przęśle -

$$i = z, \quad \eta_i = \eta_z \quad \text{dla} \quad \xi_i = -1.$$

Z warunku $\eta_x|_{x=0} = \eta_x|_{x=H}$ oraz z /10/ i /22/ otrzymujemy dla powyższych charakterystyk położenie chwilowych osi obojętnych w przegubach:

$$/23/ \quad \xi^o = \eta_w - \eta_z - \alpha, \quad \xi^c = \eta_w - \eta_z + \alpha$$

i z /10/ otrzymujemy:

$$/24/ \quad n = -1 + \eta_w + \eta_z + \alpha \quad \text{dla} \quad -1 + |\eta_w - \eta_z| < \alpha < 1 - |\eta_w - \eta_z|.$$

Zgodnie z ograniczeniami dotyczącymi wzorów /10/, gdy w procesie narastania ugięć jedna z wielkości /23/ osiągnie wartość graniczną $\xi^o = -1$ lub $\xi^c = 1$, siła osiowa nie będzie ulegać dalszym zmianom i będzie równa mniejszej z wartości:

$$/25/ \quad n = 2\eta_w, \quad n = 2\eta_z.$$

4. Odształcenia sprężyste

Jak wynika z analizy przedstawionej w poprzednim punkcie, rozpatrywany układ jest silnie geometrycznie nieliniowy i jego nośność zależy w sposób istotny od aktualnej konfiguracji odształconej konstrukcji. Przestaje wobec tego obowiązywać znana z liniowej teorii konstrukcji zasada, w myśl której odształcenia sprężyste nie wpływają na nośność graniczną. Stan początkowego plastycznego płynięcia osiągnie konstrukcja już dla pewnych skończonych deformacji, a więc przy obciążeniu mniejszym od nośności konstrukcji nieodkształconej.

Aby uniknąć kłopotliwego obliczania krok po kroku kolejnych etapów procesu deformacji sprężysto-plastycznej wykorzystać można podejście zaproponowane w [10] uwzględniające jedynie wpływ odształceń sprężystych od sił osiowych, a pomijające wpływ na geometrię układu eprężysto-plastycznych zmian krzywizny.

Przy takim podejściu zmianie w stosunku do toku postępowania przedstawionego w poprzednim punkcie ulega jedynie zależność geometryczna /22/, która podobnie jak w [10] musi być uzupełniona członem odpowiadającym sprężystemu przyrostowi długości tworzącej przy przyroście siły osiowej N_x . Zależność ta przybiera wówczas postać:

$$/31/ \quad \xi^c = \xi^o + \frac{x_c}{H} (\xi^H - \xi^o) + 2\alpha - \frac{2}{\epsilon} \frac{dn}{d\alpha},$$

gdzie ϵ oznacza bezwymiarową podatność sprężystą tworzącej:

$$/32/ \quad \epsilon = \frac{2 E h^2}{\sigma_c x_c (H - x_c)}.$$

Dla rozpatrywanego w p.3 przypadku jednowarstwowego zbrojenia w strefie rozciąganej otrzymujemy, podstawiając /31/ do /10/ i wykorzystując warunek równości sił osiowych w przegubach, zmodyfikowane wyrażenia /23/:

$$/33/ \quad \xi^o = \eta_w - \eta_z - \alpha + \frac{dn}{d\alpha} \frac{1}{\varepsilon}, \quad \xi^c = \eta_w - \eta_z + \alpha - \frac{dn}{d\alpha} \frac{1}{\varepsilon}$$

oraz

$$/34/ \quad \frac{1}{\varepsilon} \frac{dn}{d\alpha} + n - \alpha + 1 - \eta_w - \eta_z = 0.$$

Po rozwiązaniu równania różniczkowego /34/ otrzymujemy:

$$/35/ \quad n = \alpha - \frac{1}{\varepsilon} - 1 + \eta_w + \eta_z + C e^{-\alpha \varepsilon}.$$

Mając określoną wartość siły osiowej możemy wyznaczyć z /33/ wielkość ξ w przegubach i następnie z /10/ odpowiednie wielkości momentów. Równanie równowagi /27/ daje wówczas:

$$/36/ \quad \left(p - \frac{\bar{N}_e}{R}\right) \frac{H^2}{h^2 Q_c} = 2 \left[4(\eta_w + \eta_z) - (\eta_w^2 + \eta_z^2) + (1 - \eta_w - \eta_z - \alpha)^2 \right] - 2 \left[C e^{-\varepsilon \alpha} - \frac{1}{\varepsilon} \right]^2.$$

Jako warunek początkowy dla wyznaczenia stałej całkowania przyjąć można stan w chwili powstania pierwszego mechanizmu plastycznego płynięcia. Ponieważ deformacje w fazie sprężystej są niewielkie, można przyjąć, że ruch płynięcia plastycznego rozpoczyna się od stanu nieodkształconego.

Przy takim przyjęciu /por. [10] / warunkiem początkowym jest:

$$/37/ \quad \alpha = 0, \quad n = 0$$

Po jego wykorzystaniu równanie /36/ daje ostateczne rozwiązanie.

$$/38/ \quad n = (1 - e^{-\varepsilon \alpha}) \left(\frac{1}{\varepsilon} + 1 - \eta_w - \eta_z \right) - \alpha,$$

$$/39/ \quad \left(p - \frac{\bar{N}_e}{R}\right) \frac{H^2}{h^2 Q_c} = 2 \left[4(\eta_w + \eta_z) - 2(\eta_w^2 + \eta_z^2) + (1 - \eta_w - \eta_z - \alpha)^2 \right] + 2 \left[1 - \eta_w - \eta_z - (1 - e^{-\varepsilon \alpha}) \left(1 - \eta_w - \eta_z + \frac{1}{\varepsilon} \right) \right]^2.$$

W przypadku gdy konstrukcja posiada wstępne ugięcie $w_{c0} = \alpha_0 h$ warunek początkowy /37/ zmienia się na:

$$/40/ \quad \alpha = \alpha_0, \quad n = 0$$

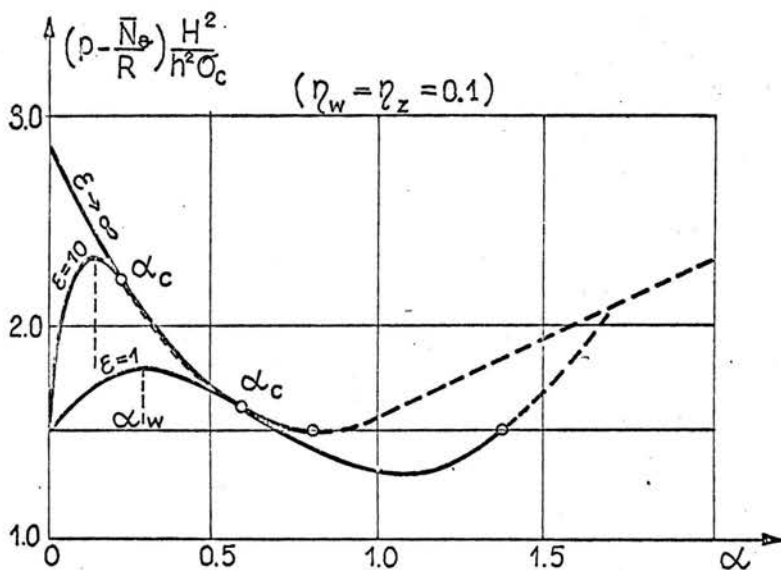
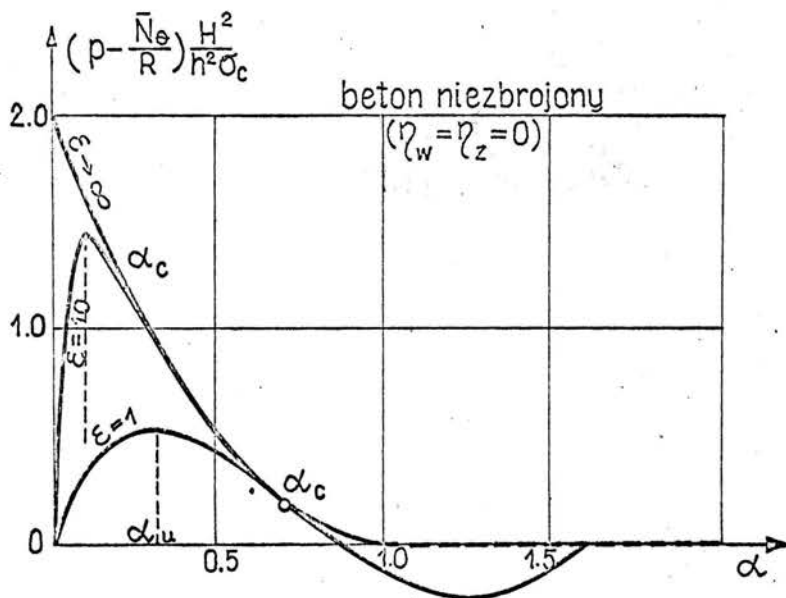
i rozwiązanie /39/ przybiera postać

$$/41/ \quad \left(p - \frac{N_0}{R}\right) \frac{H^2}{h^2 \sigma_c} = 2 \left[4(\eta_w + \eta_z) - (\eta_w^2 + \eta_z^2) + (1 - \eta_w - \eta_z - \alpha)^2 \right] + \\ - 2 \left[1 - \eta_w - \eta_z - \alpha_0 - (1 - e^{-\varepsilon(\alpha - \alpha_0)}) \left(1 - \eta_w - \eta_z + \frac{1}{\varepsilon} - \alpha_0 \right) \right]^2$$

Zależność bieżącego obciążenia granicznego od ugięcia pokazano na rys. 7 dla powłoki pozbawionej zbrojenia podłużnego oraz dla dość silnego zbrojenia /ok. 1%/. Najważniejszą informacją jest wartość największego obciążenia p_u , które przenieść może konstrukcja. Odpowiada ono ugięciu, które w przybliżeniu można określić jako $\alpha_u \approx 0.5 \alpha_c$, gdzie α_c odpowiada punktowi styczności aktualnej krzywej z krzywą odpowiadającą konstrukcji sztywno-plastycznej. Odpowiednie rozważania są identyczne jak w przypadku belki i podane są w [10]. Otrzymujemy ostatecznie wzór:

$$/42/ \quad \left(p_u - \frac{N_0}{R}\right) \frac{H^2}{h^2 \sigma_c} = 2 \left\{ 4(\eta_w + \eta_z) - 2(\eta_w^2 + \eta_z^2) + 1 - \eta_w - \eta_z - \frac{1}{2\varepsilon} \ln \left[1 + \varepsilon(1 - \eta_w - \eta_z) \right] + \right. \\ \left. - \left[\frac{\sqrt{1 + \varepsilon(1 - \eta_w - \eta_z)} - 1}{\varepsilon} \right]^2 \right\}$$

Podobnie jak w przypadku konstrukcji sztywno-plastycznej, zakres ważności rozwiązania /39/ ograniczony jest warunkami $\xi^0 \geq -1$ i $\xi^c \leq 1$. Przy odpowiednio dużych ugięciach α dla których warunki te nie będą spełnione obowiązywać będzie nadal membranowe rozwiązanie /29/. Ścisłość rozwiązania /39/ ogranicza się do zakresu ściskających sił osiowych. Z warunku $n = 0$ wynika, że przestaje ono być ścisłe dla ugięć odpowiadających na rys. 7 prawej części krzywej leżącej powyżej poziomu nośności początkowej. Ten odcinek krzywej /dający jedynie oszacowanie/ oznaczono na rys. 7 linią przerywaną.



Rys. 7

W przypadku zbrojenia podwójnego rozmieszczonego w pobliżu krawędzi przekroju wzory wynikowe pozostają nadal ważne, a jedynie wielkości η_w i η_z zastąpić należy odpowiednio przez $\eta_w - \eta'_z$ i $\eta_z - \eta'_w$, gdzie η'_z i η'_w oznaczają zbrojenie w strefie ściskanej na podporze i w przęśle; zamiana ta nie dotyczy pierwszego członu we wzorach /39/ i /41/: $4(\eta_w + \eta_z)$, który pozostaje bez zmian.

5. Uwagi końcowe

W zależności od przyjętej wielkości współczynnika przedstawione rozwiązanie opisywać może całą gamę przypadków od "efektu rozporu" dla konstrukcji sztywno-plastycznych /dla $\varepsilon \rightarrow \infty$ / do nieczułego na ugięcie zachowania się konstrukcji podpartej przesuwnie / $\varepsilon = 0$ /. W przypadku, gdy podpory mają pewną sprężystą podatność w kierunku X, należałoby zmodyfikować wartość współczynnika ε zastępując go przez ε_1 związany z poprzednim zależnością:

$$/43/ \quad \frac{1}{\varepsilon_1} = \frac{1}{\varepsilon} + \frac{H}{hk}$$

gdzie k jest współczynnikiem sprężystej podatności podpory.

Rozwiązanie dla konstrukcji wstępnie odkształconych /42/ pozwala uwzględnić wzmacniające oddziaływanie skosów na podporach lub wykształcenia powłoki w kształcie hiperboloidy o bardzo małej krzywiznie w kierunku osi X.

LITERATURA

1. P.G. HODGE, Limit analysis of rotationally symmetric plates and shells, Prentice-Hall, Englewood Cliffs N.J. 1963.
2. M.JANAS, J.A. KÖNIG, Nośność graniczna powłok - przekrycia i zbiorniki, Arkady. Warszawa 1968.
3. Z.MRÓZ, The load-carrying capacity of orthotropic shells, AMS, 12, 1960, s.85.
4. M.JANAS, Nośność graniczna łuków i sklepień, Arkady, Warszawa 1967.
5. D.NIEPOSTYN, The limit analysis of an orthotropic cylinder, AMS, 8, 1956, 565.
6. A.SAWCZUK, J.A. KÖNIG, Analiza stanu zniszczenia walcowych silosów żelbetowych, A.I.L. 8, 1962, s.161.
7. M.JANAS, Kinematical compatibility problems in yieldline theory, Mag. Concrete Research, 19, 1967, s.33.
8. M.JANAS, Large plastic deformations of reinforced concrete slabs, Int. J.Solids Structures, 4, 1968, s.61.
9. M.DUSZEK, A. SAWCZUK, Load-deflection relations for rigidplastic cylindrical shells beyond the incipient collapse load, Int. J.Mech. Sci., 12, 1970, s.839.
10. M.JANAS, Arching action in elastic-plastic plates, J.Struct.Mech., 1, 1973, s.277.