

ÜBER EINIGE CURVEN
DIE MIT DER
THEORIE DES EBENEN GELENKVIERECKS
IN ZUSAMMENHANG STEHEN.

VON

R. MÜLLER.

1. Bei der Untersuchung der Veränderungen, die bei einem vorgelegten Kurbelmechanismus hinsichtlich der Gestalt der Koppelcurve eintreten, wenn der beschreibende Punkt in der Koppelene wandert, erlangen drei bestimmte Curven dieser Ebene eine ausschlaggebende Bedeutung, nämlich die Polcurve p , die Uebergangscurve q — d. i. der Ort der Systempunkte, welche Koppelcurven mit einem Selbstberührungspunkt erzeugen — und der Ort u der Ball'schen Punkte, d. h. derjenigen Systempunkte, deren Bahnen einen Flachpunkt (Undulationspunkt) besitzen. Denn jede Koppelcurve hat im Allgemeinen drei endliche Doppelpunkte; davon geht jedesmal einer in eine Spitze über, falls der beschreibende Punkt auf p liegt, und an Stelle dieser Spitze tritt ein isolirter oder ein Knotenpunkt, wenn der Systempunkt in der nächsten Umgebung des vorigen, aber ausserhalb p auf der einen oder der entgegengesetzten Seite von p gewählt wird. In analoger Weise theilt die Curve q die Koppelene in zwei Gebiete, so dass den Punkten des einen Koppelcurven mit drei reellen Doppelpunkten, denen des anderen solche mit einem reellen und zwei conjugirt imaginären Doppelpunkten zukommen ¹⁾. Nimmt man endlich in der Nähe von u , aber auf entgegengesetzten Seiten dieser Curve, zwei Systempunkte an, so unterscheiden sich ihre Bahncurven dadurch von einander, dass die eine zwei (reelle) Inflexionspunkte mehr besitzt als die andere ²⁾. Durch die Curven p , q , u wird die Koppelene in eine Anzahl von Feldern zerlegt, und dann ist klar, dass alle Punkte desselben Feldes Koppelcurven beschreiben, die hinsicht-

¹⁾ Ueber die Doppelpunkte der Koppelcurve, Zeitschr. f. Math. u. Phys. 1889, S. 303 u. 372, sowie 1891, S. 69. — Ueber die Gestaltung der Koppelcurven für besondere Fälle des Kurbelgetriebes, daselbst 1891, S. 11. — ²⁾ Ueber die angenäherte Geradföhrung mit Hölfe eines ebenen Gelenkvierecks, daselbst 1893, S. 36. — Allievi, Cinematica della biella piana, Napoli 1895, p. 59.

lich ihrer Doppel- und Inflexionspunkte, also überhaupt hinsichtlich ihrer Gestalt, denselben Charakter aufweisen.

Die Curven p und u sind für jeden vorgelegten Kurbelmechanismus leicht zu construiren, indem man die Bewegung umkehrt, also bei festgehaltener Koppelebene für beliebig viele Lagen des ursprünglich festen Gliedes die Pole und die Ball'schen Punkte ermittelt¹⁾. Man erhält sie ferner als die beiden Einhüllenden aller in der Koppelebene liegenden Kreise, die im Verlauf der Bewegung der Reihe nach zu Wendekreisen werden. Bezüglich der Curve p liegen für specielle Fälle des Kurbelmechanismus auch bereits einige analytische Untersuchungen vor²⁾; wir vervollständigen sie im ersten Theile dieser Arbeit, indem wir uns vor Allem mit dem allgemeinen Fall eingehend beschäftigen. Im zweiten Theil wenden wir uns zu der bisher überhaupt noch nicht behandelten Curve u , beschränken uns aber in der Hauptsache auf zwei besonders einfache Fälle des Gelenkvierecks. Dabei wollen wir u zur Abkürzung des Ausdrucks als die Flachpunktcurve der Koppelebene bezeichnen.

Von der Uebergangscurve q kennen wir bisher zwar eine Reihe geometrischer Eigenschaften, doch fehlt es noch an einem Verfahren, um diese Curve, analog wie p und u , ihrer Definition entsprechend punktweise zu construiren. Diese Lücke soll im dritten Theile ausgefüllt werden, indem gezeigt wird, wie man für jede Koppellage die Systempunkte findet, die augenblicklich einen Selbstberührungspunkt ihrer Bahn durchschreiten.

I. Die Polcurve p .

2. In Fig. 1 bedeutet $ABBA$ ein beliebiges Gelenkviereck mit dem festen Glied AB ; die Verlängerungen der Arme AA und BB schneiden sich im Pol \mathfrak{P} der gezeichneten Koppellage AB . Setzen wir $AA = a$, $BB = b$, $AB = c$, $AB = d$, $A\mathfrak{P} = r$, $B\mathfrak{P} = s$, so ergibt sich

¹⁾ Bezüglich der Construction des Ball'sshen Punktes vergleiche: Beiträge zur Theorie des ebenen Gelenkvierecks, Zeitschr. f. Math. u. Phys. 1897, S. 259. — ²⁾ Roberts, On the motion of a plane under certain conditions, Proceedings of the London Mathematical Society III, p. 312; On the pedals of conic sections, daselbst, p. 94.

$$2 \cos \angle A \mathfrak{P} B = \frac{r^2 + s^2 - c^2}{rs} = \frac{(r + a)^2 + (s + b)^2 - d^2}{(r + a)(s + b)},$$

mithin

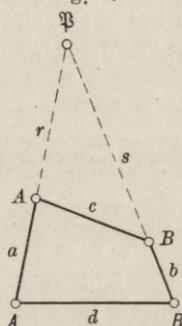
$$(r + a)(s + b)(r^2 + s^2 - c^2) - rs \{(r + a)^2 + (s + b)^2 - d^2\} = 0$$

oder

$$ab(r^2 + s^2 - c^2) - (a^2 + b^2 + c^2 - d^2)rs - as(r^2 - s^2 + c^2) - br(-r^2 + s^2 + c^2) = 0 \dots (1)$$

Die letzte Gleichung gilt für die Pole aller Koppellagen, doch haben wir dabei das Vorzeichen von r oder s in das entgegengesetzte zu verwandeln, wenn in der jeweilig betrachteten Figur der Punkt \mathfrak{P} auf derselben Seite von A oder B liegt, wie der Punkt A bzw. B . Für jeden Punkt der Polcurve p genügen also die Coordinaten r und s entweder der Gleichung (1) oder einer der drei folgenden Gleichungen

Fig. 1.



$$ab(r^2 + s^2 - c^2) + (a^2 + b^2 + c^2 - d^2)rs - as(r^2 - s^2 + c^2) + br(-r^2 + s^2 + c^2) = 0 \dots (2)$$

$$ab(r^2 + s^2 - c^2) + (a^2 + b^2 + c^2 - d^2)rs + as(r^2 - s^2 + c^2) - br(-r^2 + s^2 + c^2) = 0 \dots (3)$$

$$ab(r^2 + s^2 - c^2) - (a^2 + b^2 + c^2 - d^2)rs + as(r^2 - s^2 + c^2) + br(-r^2 + s^2 + c^2) = 0 \dots (4)$$

Multipliciren wir (1) mit (4), (2) mit (3) und hierauf diese beiden Producte mit einander, so erhalten wir die Gleichung der Polcurve p in der Form

$$\begin{aligned} & \{a^2 b^2 (r^2 + s^2 - c^2)^2 + (a^2 + b^2 + c^2 - d^2)^2 r^2 s^2 \\ & - a^2 s^2 (r^2 - s^2 + c^2)^2 - b^2 r^2 (-r^2 + s^2 + c^2)^2\}^2 \\ & - 4 a^2 b^2 r^2 s^2 \{(a^2 + b^2 + c^2 - d^2)(r^2 + s^2 - c^2) \\ & \cdot + (r^2 - s^2 + c^2)(-r^2 + s^2 + c^2)\}^2 = 0 \dots (5) \end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned} & \{a^2 b^2 (r^2 + s^2 - c^2)^2 - (a^2 + b^2 + c^2 - d^2)^2 r^2 s^2\}^2 \\ & + \{a^2 s^2 (r^2 - s^2 + c^2)^2 - b^2 r^2 (-r^2 + s^2 + c^2)^2\}^2 \\ & - 2 a^2 r^2 \{(a^2 + b^2 + c^2 - d^2) s^2 (r^2 - s^2 + c^2) + b^2 (r^2 + s^2 - c^2) \cdot \\ & \cdot (-r^2 + s^2 + c^2)\}^2 - 2 b^2 s^2 \{(a^2 + b^2 + c^2 - d^2) r^2 (-r^2 + s^2 + c^2) \\ & + a^2 (r^2 + s^2 - c^2)(r^2 - s^2 + c^2)\}^2 = 0 \dots (6) \end{aligned}$$

Bezeichnen wir ferner mit x und y die rechtwinkligen Coordinaten von \mathfrak{P} für A als Anfangspunkt, AB als positive x -Achse, so wird $r^2 = x^2 + y^2$, $s^2 = (c - x)^2 + y^2$, $r^2 + s^2 - c^2 = 2(x^2 + y^2 - cx)$, $r^2 - s^2 + c^2 = 2cx$, $-r^2 + s^2 + c^2 = 2c(c - x)$, und wir erkennen sofort, dass p im Allgemeinen eine Curve achter Ordnung ist. Sie ist symmetrisch in Bezug auf die Gerade AB .

Durch Vertauschung von c und d verwandeln sich (5) und (6) in die Gleichung der Polcurve für die umgekehrte Bewegung, d. h. der Polbahn π in der Ebene des festen Gliedes d .

3. Um zunächst die Beziehungen der Polcurve zu den imaginären Kreispunkten zu ermitteln, bestimmen wir ihre Schnittpunkte mit dem Geradenpaar

$$(x - m)^2 + y^2 = 0,$$

setzen also in (6) $r^2 = m(2x - m)$, $s^2 = (m - c)(2x - m - c)$, wobei m vorläufig jeden beliebigen Werth haben kann. Hierdurch ergibt sich eine Gleichung sechsten Grades in x , und zwar bekommt das Glied mit x^6 , welches ausschliesslich vom zweiten Klammersausdruck geliefert wird, den Factor

$$64 c^4 [(a^2 - b^2)m - a^2 c]^2.$$

Dieser verschwindet nur für

$$m = \frac{a^2 c}{a^2 - b^2};$$

dann geht aber der Factor von x^5 über in

$$- 128 a^4 b^4 c^5 \frac{(c^2 - d^2)^2}{(a^2 - b^2)^3},$$

bleibt also im Allgemeinen von Null verschieden. Wir schliessen hieraus, dass die Polcurve die imaginären Kreispunkte im Allgemeinen zu Spitzen hat. Die zugehörigen imaginären Tangenten schneiden sich auf AB in einem reellen Punkte F , dem Focalcentrum von p , mit der Abscisse $AF = \frac{a^2 c}{a^2 - b^2}$.

Da $BF = AF - c = \frac{b^2 c}{a^2 - b^2}$ ist, so theilt das Focalcentrum die Koppelstrecke AB aussen im Verhältniss $a^2 : b^2$.

Spezielle Fälle. Ist $c = d$, so verschwindet in der Gleichung für x auch der Factor von x^3 , und das folgende Glied verwandelt sich in $144 \frac{a^4 b^4 c^8}{(a^2 - b^2)^2} x^4$. Die imaginären Kreispunkte sind also als Selbstberührungspunkte der Polcurve aufzufassen; jeder von ihnen zählt für zwei unendlich benachbarte Punkte in der Geraden, die ihn mit dem Punkte F verbindet. — Sind die Arme a und b einander gleich, so wird F unendlich fern. Die imaginären Kreispunkte behalten dann den Charakter von Spitzen der Polcurve, aber mit der unendlich fernen Geraden als Tangente.

4. Neben den imaginären Kreispunkten besitzt die Curve p vier weitere unendlich ferne Punkte. Construiren wir in Fig. 1 p in der Weise, dass wir das Glied AB festhalten und für verschiedene Lagen von AB die Pole ermitteln, so ergeben sich die unendlich fernen Punkte von p aus denjenigen Lagen von AB , bei denen $AA \parallel BB$ ist. Um sie zu finden, zeichnen

Fig. 2.

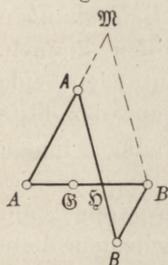
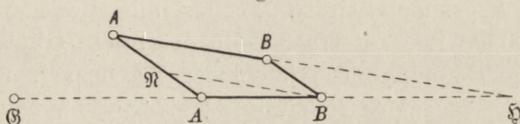


Fig. 3.



wir über AB das Dreieck ABM mit den Seiten $AM = a + b$, $BM = d$ (Fig. 2), sowie das Dreieck ABR mit den Seiten $AR = a - b$, $BR = d$ (Fig. 3). Verstehen wir in beiden Figuren unter S den Schnittpunkt von AB und AB und machen auf AB die Strecke AG entgegengesetzt gleich BS , so gehen durch den Punkt G jedesmal zwei Asymptoten von p , die eine bzw. parallel zu AM oder AR , die andere symmetrisch dazu in Bezug auf AB . Dann ist

$$\frac{AG}{BG} = \frac{BS}{AS} = \mp \frac{b}{a},$$

d. h. die Asymptoten theilen die Koppelstrecke AB innen und aussen im Verhältniss $b:a$.

Die vier Asymptoten von p können theilweise oder sämmtlich imaginär sein. Die in Fig. 2 angedeutete Construction ist nämlich nur ausführbar, wenn das Dreieck ABM möglich ist, d. h. für

$$a + b < c + d \quad (1).$$

Ebenso ergibt sich aus Fig. 3 für die Existenz des zweiten Asymptotenpaares die nothwendige und hinreichende Bedingung

$$|a - b| > |c - d| \quad (\text{II}).$$

Die Figuren 2 und 3 bestimmen gleichzeitig die Asymptoten der Polbahn π ; die Curven p und π besitzen demnach immer gleich viel Asymptoten.

Diese Realitätsverhältnisse stehen in unmittelbarem Zusammenhang mit der üblichen Eintheilung der Kurbelmechanismen, an die wir zunächst kurz erinnern wollen. Man spricht bekanntlich von einem Doppelkurbel-, Schwingkurbel- oder Doppelschwingmechanismus, je nachdem von beiden Armen a und b , oder nur von einem, oder von keinem Arm volle Umdrehungen in der Ebene des festen Gliedes ausgeführt werden können. Bei einem Doppelschwingmechanismus schwingen entweder beide Arme zwischen je zwei Grenzlagen, die in Bezug auf das feste Glied symmetrisch sind, oder alle Bewegungsvorgänge finden zunächst nur auf einer Seite des festen Gliedes statt, so dass es einer Oeffnung des Gelenkvierecks bedarf, um die Koppel auf die entgegengesetzte Seite zu bringen. Wir unterscheiden diese beiden Fälle bezw. als Doppelschwingmechanismus erster und zweiter Art. Ist ferner bei einem Gelenkviereck die Summe des grössten und kleinsten Gliedes kleiner als die Summe der beiden anderen Glieder, so erhalten wir einen Doppelkurbel-, einen Schwingkurbel- oder einen Doppelschwingmechanismus zweiter Art, je nachdem wir das kleinste Glied, oder eines der beiden ihm benachbarten Glieder, oder das gegenüberliegende Glied feststellen. Ist dagegen die Summe des grössten und kleinsten Gliedes grösser als die Summe der beiden anderen, so entsteht auf alle Fälle ein Doppelschwingmechanismus erster Art. Der singuläre Fall, in welchem die genannten Summen einander gleich sind, möge vorläufig ausgeschlossen bleiben. (Vergl. Art. 7.)

Wir wollen nun zunächst voraussetzen, der bisher betrachtete Kurbelmechanismus sei ein Doppelkurbelmechanismus. Dann ist d das kleinste Glied, also entweder die Koppel c , oder einer der Arme, etwa a , das grösste unter sämtlichen Gliedern. Im ersten Falle ist nach Voraussetzung $c + d < a + b$ und $c - d > |a - b|$; die Bedingungen I und II sind also nicht

erfüllt, d. h. die Curven p und π besitzen überhaupt keine reellen Asymptoten. Zu demselben Ergebniss gelangen wir im zweiten Falle; dann ist nämlich nach Voraussetzung $a + d < b + c$, also $a - b < c - d$ und $c + d < a + b$. Machen wir jetzt das Glied AB fest und AB beweglich, so entsteht ein Doppelschwingmechanismus zweiter Art mit π als Polcurve und p als Polbahn, und wir erhalten somit den Satz: Bei jedem Doppelkurbelmechanismus und bei jedem Doppelschwingmechanismus zweiter Art sind die Asymptoten von Polcurve und Polbahn sämmtlich imaginär. — In analoger Weise ergibt sich: Bei jedem Schwingkurbelmechanismus haben Polcurve und Polbahn vier reelle Asymptoten; dagegen sind im Falle des Doppelschwingmechanismus erster Art immer nur je zwei dieser Asymptoten reell.

5. Die Endpunkte A und B der Koppelstrecke sind Brennpunkte und zugleich vierfache Punkte der Polcurve. Setzen wir nämlich in Gleichung (5) $r^2 = 0$, so folgt

$$(s^2 - b^2)^2(s^2 - c^2)^4 = 0;$$

von den beiden Geraden $r^2 = 0$, welche die imaginären Kreispunkte mit A verbinden, berührt also jede die Curve p in einem

Fig. 4.

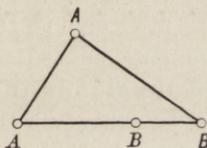
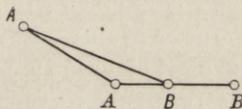


Fig. 5.



Punkte des Kreises $s^2 = b^2$ und hat in A mit p vier zusammenfallende Punkte gemein. Dass p in A einen vierfachen Punkt besitzt, ist auch geometrisch unmittelbar ersichtlich, denn bringen wir das Glied AB in eine solche Lage, dass der Punkt B in die Gerade AB fällt, so ist der zugehörige Pol identisch mit A . Dann ist AB entweder $= c + b$, wie in Fig. 4, oder $= c - b$, wie in Fig. 5, und zu jeder von beiden Lagen des Punktes B gehören zwei in Bezug auf AB symmetrische Lagen des Gliedes AA . Diese sind die vier Tangenten von p im Punkte A .

Damit nun Fig. 4 überhaupt möglich und demnach das eine Tangentenpaar von p reell sei, muss

$$b + c < a + d \quad (\text{III})$$

sein, und für Fig. 5 lautet die analoge Bedingung

$$|b - c| < |a - d| \quad (\text{IV}).$$

Ebenso ist im vierfachen Punkte B das eine Tangentenpaar reell für

$$a + c < b + d \quad (\text{V})$$

und das andere für

$$|a - c| > |b - d| \quad (\text{VI}).$$

Untersuchen wir jetzt die verschiedenen Arten des Kurbelmechanismus hinsichtlich der Realität der betrachteten Tangenten und beginnen wieder mit dem Falle des Doppelkurbelmechanismus, so ist d das kleinste Glied. Ist dann die Koppel c das grösste Glied, mithin $c + d < a + b$, so bestehen zwischen den vier Gliedlängen a, b, c, d jedenfalls die Beziehungen $b + c > a + d$, $c - b < a - d$, $a + c > b + d$ und $c - a < b - d$. Andererseits führt die Annahme, dass einer der Arme, z. B. a , das grösste Glied sei, zu den Ungleichungen $a + d < b + c$, $a - d > |b - c|$, $a + c > b + d$ und $a - c < b - d$; den Bedingungen (III) bis (VI) wird also in beiden Fällen nicht genügt, d. h. die Tangenten der Polcurve p in A und B sind sämtlich imaginär.

Werden dieselben Ueberlegungen auf einen Doppelschwingmechanismus zweiter Art angewendet, so zeigt sich, dass dann die Polcurve in jedem der Koppelendpunkte vier reelle Tangenten hat. Diese Curve ist aber die Polbahn für den Doppelkurbelmechanismus, der durch Umkehrung der Bewegung aus dem zuletzt betrachteten Mechanismus hervorgeht, d. h.: Bei jedem Doppelkurbelmechanismus sind die Tangenten der Polbahn in den Endpunkten des festen Gliedes sämtlich reell.

Im weiteren Verlauf der Untersuchung gelangen wir durch wiederholte Anwendung der bisherigen Schlussweise noch zu folgenden Ergebnissen: Bei jedem Schwingkurbelmechanismus haben Polcurve und Polbahn im Endpunkte des grösseren Armes (der Schwinde) vier reelle, im Endpunkte des kleineren Armes (der Kurbel) vier imaginäre Tangenten. Bei jedem Doppelschwingmechanismus

erster Art besitzen beide Curven in jedem ihrer vierfachen Punkte zwei reelle und zwei conjugirt imaginäre Tangenten.

6. Weitere Doppelpunkte der Polcurve. Aus Gleichung (5) ergibt sich sofort, dass p die Schnittpunkte der Curven

$$a^2 b^2 (r^2 + s^2 - c^2)^2 + (a^2 + b^2 + c^2 - d^2)^2 r^2 s^2 - a^2 s^2 (r^2 - s^2 + c^2)^2 - b^2 r^2 (-r^2 + s^2 + c^2)^2 = 0$$

und

$$(a^2 + b^2 + c^2 - d^2)(r^2 + s^2 - c^2) + (r^2 - s^2 + c^2)(-r^2 + s^2 + c^2) = 0$$

zu Doppelpunkten hat. Wir bedienen uns nun wieder rechtwinkliger Coordinaten mit A als Anfangspunkt, AB als x -Achse, schreiben also die beiden letzten Gleichungen in der Form

$$4 a^2 b^2 (x^2 + y^2 - cx)^2 + (a^2 + b^2 + c^2 - d^2)^2 (x^2 + y^2) \{ (c-x)^2 + y^2 \} - 4 a^2 c^2 x^2 \{ (c-x)^2 + y^2 \} - 4 b^2 c^2 (c-x)^2 (x^2 + y^2) = 0 \quad (7)$$

und

$$(a^2 + b^2 + c^2 - d^2)(x^2 + y^2 - cx) + 2c^2 x(c - x) = 0 \quad (8).$$

Gleichung (7) stellt eine circulare Curve vierter Ordnung dar mit Doppelpunkten in A und B , (8) einen Kegelschnitt mit der Hauptachse AB ; beide Curven schneiden sich also ausser in A und B noch in zwei Punktpaaren C_1, D_1 und C_2, D_2 , deren jedes in Bezug auf AB symmetrisch ist. Setzen wir zur Abkürzung

$$a^2 + b^2 + c^2 - d^2 = n^2,$$

so folgt aus (8)

$$n^2 (x^2 + y^2 - cx) = -2c^2 x(c - x),$$

$$n^2 (x^2 + y^2) = -cx \{ 2c(c - x) - n^2 \},$$

$$n^2 \{ (c - x)^2 + y^2 \} = -c(c - x)(2cx - n^2);$$

demnach geht Gleichung (7), unter Weglassung des Factors $c^2 x(c - x)$, über in

$$16 a^2 b^2 c^2 x(c - x) + n^4 \{ 2c(c - x) - n^2 \} (2cx - n^2) + 4 a^2 c n^2 x (2cx - n^2) + 4 b^2 c n^2 (c - x) \{ 2c(c - x) - n^2 \} = 0$$

oder

$$\{ 2c(n^2 - 2a^2)x + n^2(n^2 - 2c^2) \} \cdot \{ 2c(n^2 - 2b^2)(c - x) + n^2(n^2 - 2c^2) \} = 0.$$

Hieraus ergibt sich für die Doppelpunkte C_1 und D_1 der Polcurve



$$x_1 = -\frac{n^2(n^2 - 2c^2)}{2c(n^2 - 2a^2)} = \frac{(a^2 + b^2 + c^2 - d^2)(a^2 + b^2 - c^2 - d^2)}{2c(a^2 - b^2 - c^2 + d^2)}$$

und für die Doppelpunkte C_2 und D_2

$$\begin{aligned} c - x_2 &= -\frac{n^2(n^2 - 2c^2)}{2c(n^2 - 2b^2)} \\ &= \frac{(a^2 + b^2 + c^2 - d^2)(a^2 + b^2 - c^2 - d^2)}{2c(-a^2 + b^2 - c^2 + d^2)}. \end{aligned}$$

Damit sind aber noch nicht alle Doppelpunkte von p ermittelt. Multipliciren wir nämlich in Artikel 2 zunächst Gleichung (1) mit (2) und (3) mit (4), so finden wir die Gleichung von p in der Form

$$\begin{aligned} &\{a^2 b^2 (r^2 + s^2 - c^2)^2 - n^4 r^2 s^2 + a^2 s^2 (r^2 - s^2 + c^2)^2 \\ &- b^2 r^2 (-r^2 + s^2 + c^2)^2 - 4 b^2 s^2 \{n^2 r^2 (-r^2 + s^2 + c^2) \\ &+ a^2 (r^2 + s^2 - c^2)(r^2 - s^2 + c^2)\}^2 = 0, \end{aligned}$$

und hiernach sind Doppelpunkte von p auch die Schnittpunkte der Curven

$$\begin{aligned} &a^2 b^2 (r^2 + s^2 - c^2)^2 - n^4 r^2 s^2 + a^2 s^2 (r^2 - s^2 + c^2)^2 \\ &- b^2 r^2 (-r^2 + s^2 + c^2)^2 = 0 \end{aligned}$$

und

$$n^2 r^2 (-r^2 + s^2 + c^2) + a^2 (r^2 + s^2 - c^2) (r^2 - s^2 + c^2) = 0$$

oder

$$\begin{aligned} &4 a^2 b^2 (x^2 + y^2 - cx)^2 - n^4 (x^2 + y^2) \{(c - x)^2 + y^2\} \\ &+ 4 a^2 c^2 x^2 \{(c - x)^2 + y^2\} - 4 b^2 c^2 (c - x)^2 (x^2 + y^2) = 0 \end{aligned}$$

und

$$n^2 (c - x)(x^2 + y^2) + 2 a^2 x(x^2 + y^2 - cx) = 0.$$

Die erste dieser Gleichungen repräsentirt eine circulare Curve vierter Ordnung mit Doppelpunkten in A und B , die zweite eine circulare Curve dritter Ordnung mit einem Doppelpunkte in A und einem einfachen Punkte in B ; wir erhalten demnach von A , B und den imaginären Kreispunkten abgesehen wieder vier Schnittpunkte, die in Bezug auf AB paarweise symmetrisch liegen. Die Elimination von $x^2 + y^2$ liefert nach einfacher Rechnung für die Abscissen dieser Schnittpunkte die Gleichung

$$\begin{aligned} &\{2c(n^2 - 2a^2)x + n^2(n^2 - 2c^2)\} \\ &\cdot \{2(n^2 - a^2 - b^2)x - c(n^2 - 2b^2)\} = 0. \end{aligned}$$

Der erste Factor giebt gleich Null gesetzt wieder den Werth

$x = x_1$ und damit die bereits bekannten Doppelpunkte C_1 und D_1 ; dagegen entspricht dem zweiten Factor ein neues Paar von Doppelpunkten C_3, D_3 mit der Abscisse

$$x_3 = \frac{c(n^2 - 2b^2)}{2(n^2 - a^2 - b^2)} = \frac{c(a^2 - b^2 + c^2 - d^2)}{2(c^2 - d^2)}.$$

Da jeder der vierfachen Punkte A und B für sechs Doppelpunkte zählt, so haben wir mit Einschluss der imaginären Kreispunkte bis jetzt im Ganzen 20 Doppelpunkte der Polcurve ermittelt. Nun besitzt eine Curve achter Ordnung nie mehr als 21 Doppelpunkte; diese Anzahl kann aber bei der Curve p nicht erreicht werden, weil p in Bezug auf AB symmetrisch ist. Wir kennen also bereits sämtliche Doppelpunkte von p und gelangen somit zu dem Satz: Die Polcurve hat ausser den imaginären Kreispunkten und den vierfachen Punkten A und B im Allgemeinen noch sechs (reelle oder imaginäre) Doppelpunkte, die in Bezug auf AB symmetrisch liegen. Sie ist also vom Geschlecht eins.

Fig. 6 zeigt die Polcurve p für den in Fig. 1 bis 5 dargestellten Schwingkurbelmechanismus.

Specielle Fälle. I. Ist $a^2 + b^2 = c^2 + d^2$, d. h. stehen die Diagonalen des Gelenkvierecks $ABBA$ für jede Koppellage auf einander senkrecht, so wird $x_1 = 0$, $x_2 = c$ und $y_1 = y_2 = 0$; die Punktpaare C_1, D_1 und C_2, D_2 fallen also bezw. zusammen mit A und B . In diesem Falle sind die durch Fig. 4 und 5 bestimmten Tangenten von p mit einander identisch; die Polcurve hat folglich in A und B je zweimal einen Selbstberührungspunkt.

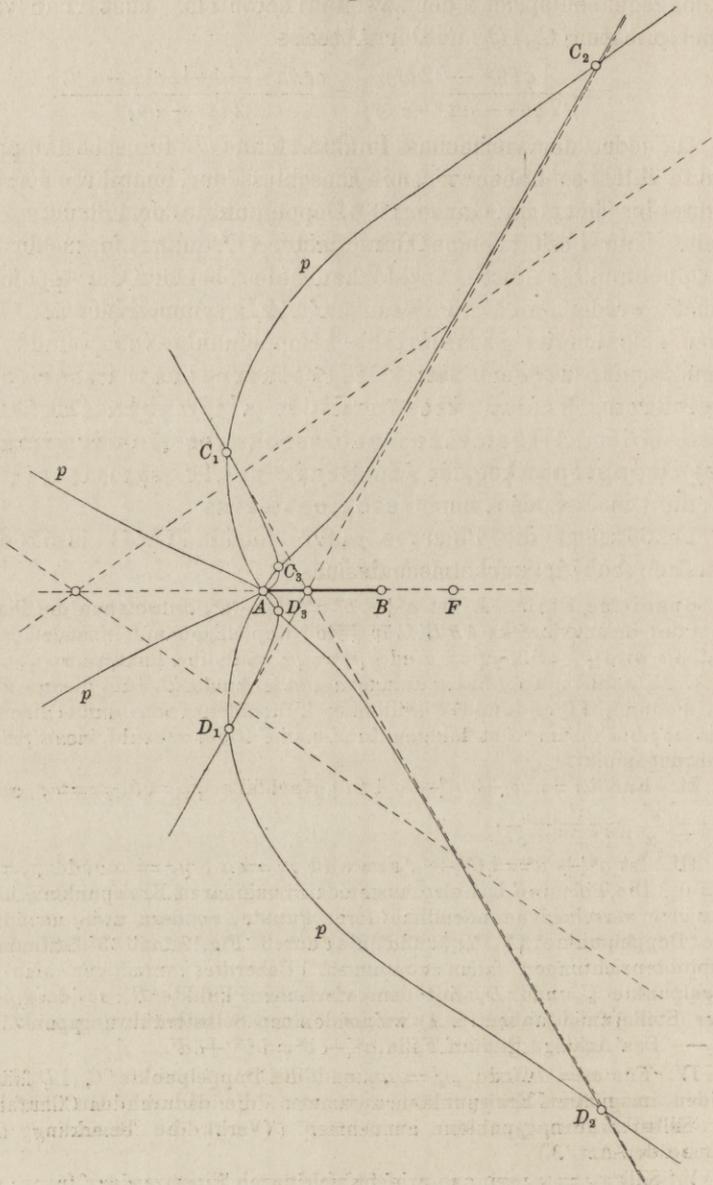
II. Für $d^2 = a^2 + b^2 + c^2$ ist gleichfalls $x_1 = 0$, $x_2 = c$, aber $y_1 = \pm \frac{c^2}{a}$, $y_2 = \pm \frac{c^2}{b}$.

III. Ist $a^2 + d^2 = b^2 + c^2$, so wird $x_1 = \infty$, $y_1 = \infty$ und $x_3 = c$, $y_3 = 0$. Die Polcurve hat also ausser den imaginären Kreispunkten nicht mehr vier verschiedene unendlich ferne Punkte, sondern zwei unendlich ferne Doppelpunkte C_1, D_1 , und die durch Fig. 2 und 3 bestimmten Asymptotenrichtungen fallen zusammen. Ueberdies vereinigen sich die Doppelpunkte C_3 und D_3 mit dem vierfachen Punkte B , so dass p an dieser Stelle (nicht aber in A) zweimal einen Selbstberührungspunkt besitzt. — Das Analoge gilt im Falle $a^2 + c^2 = b^2 + d^2$.

IV. Für $c = d$ wird $x_3 = \infty$, und die Doppelpunkte C_3, D_3 fallen mit den imaginären Kreispunkten zusammen, die dadurch den Charakter von Selbstberührungspunkten annehmen. (Vergl. die Bemerkung am Schlusse des Art. 3.)

V. Soll $x_1 = x_2$ sein, so ergiebt sich durch Einsetzen der für x_1 und

Fig. 6.



$c - x_2$ gefundenen Werthe in die Gleichung $x_1 + (c - x_2) = c$ sofort die Bedingung

$$- n^2 (n^2 - 2c^2)(n^2 - a^2 - b^2) = c^2 (n^2 - 2a^2)(n^2 - 2b^2)$$

oder

$$- n^6 + n^4 (a^2 + b^2 + c^2) - 4a^2 b^2 c^2 = 0$$

oder

$$d^2 (a^2 + b^2 + c^2 - d^2)^2 - 4a^2 b^2 c^2 = 0.$$

Dann ist aber auch $x_1 = x_3$, d. h. die drei Paare von Doppelpunkten $C_1, D_1; C_2, D_2; C_3, D_3$ vereinigen sich zu einem Paar dreifacher Punkte C, D der Curve p . Aus der letzten Gleichung folgt

$$\pm \frac{c}{d} = -\frac{a}{d} \cdot \frac{b}{d} \pm \sqrt{\left(1 - \frac{a^2}{d^2}\right)\left(1 - \frac{b^2}{d^2}\right)},$$

oder, wenn $\frac{a}{d} = \cos \alpha$, $\frac{b}{d} = \cos \beta$, $\frac{c}{d} = \cos \gamma$ gesetzt wird,

$$\pm \cos \gamma = -(\cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta) = -\cos(\alpha \pm \beta).$$

Verstehen wir also unter α, β, γ irgend drei Winkel, deren Summe 180° beträgt, und unter d eine beliebige Strecke, und bilden wir das Gelenkviereck $ABBA$ aus den Seiten $a = d \cos \alpha$, $b = d \cos \beta$, $c = d \cos \gamma$ und d , so hat die zugehörige Polcurve p zwei dreifache Punkte C und D ; jeder von beiden beschreibt also eine Koppelcurve mit drei Spitzen. — Berechnen wir für den Punkt C aus Gleichung (8) die Werthe von r und s , so finden wir leicht

$$r = c \frac{\sin \alpha}{\sin \gamma}, \quad s = c \frac{\sin \beta}{\sin \gamma}.$$

Wir erhalten demnach C , indem wir die Winkel α und β bezw. in B und A an die Koppelstrecke antragen¹⁾.

7. Ausartungen der Polcurve in speciellen Fällen des Kurbelmechanismus. Wir beginnen mit der Betrachtung des durchschlagenden Kurbelmechanismus, setzen also voraus, im Gelenkviereck $ABBA$ sei die Summe zweier Glieder gleich der Summe der beiden anderen Glieder. Dabei haben wir zu unterscheiden, ob die einander gleichen Summen von je zwei gegenüberliegenden oder von je zwei benachbarten Gliedern gebildet werden.

I. Ist $a + b = c + d$, also $a^2 + b^2 + c^2 - d^2 = 2(-ab + ac + bc)$, so gehen die Gleichungen (1) bis (4) über in

$$(r + s + c) \{ (br^2 + as^2 - abc) - (a + b)rs + b(a - c)r + a(b - c)s \} = 0$$

¹⁾ In anderer Weise von Cayley gefunden. On three-bar motion, Proceedings of the London Mathematical Society VII, p. 141.

$$(-r + s + c) \{ (br^2 + as^2 - abc) + (a + b)rs - b(a - c)r + a(b - c)s \} = 0$$

$$(r - s + c) \{ br^2 + as^2 - abc \} + (a + b)rs + b(a - c)r - a(b - c)s = 0$$

$$(-r - s + c) \{ (br^2 + as^2 - abc) - (a + b)rs - b(a - c)r - a(b - c)s \} = 0.$$

Bilden wir nun wieder die Gleichung der Polcurve durch Multiplication dieser vier Gleichungen, so wird das Product

$$(r + s + c)(-r + s + c)(r - s + c)(-r - s + c) = (r^2 - s^2)^2 - 2c^2(r^2 + s^2) + c^4 = -4c^2y^2;$$

die Polcurve zerfällt also in die doppelt zählende Gerade AB und eine Curve sechster Ordnung p . Diese hat wiederum Spitzen in den imaginären Kreispunkten und ausserdem zwei unendlich ferne Punkte, die durch Fig. 3 bestimmt sind. Die Punkte A und B sind Doppelpunkte von p ; die zugehörigen Tangenten liefert Fig. 4. Ueberdies schneidet p die Gerade AB noch in zwei Punkten, den beiden Polen der Durchschlagslage des Gelenkvierecks¹⁾. Da die Curve p ausser A und B und den imaginären Kreispunkten noch die sechs mit C_1 bis D_3 bezeichneten Doppelpunkte besitzt, so ist sie vom Geschlecht Null. Nun ist bekanntlich die Koppelcurve, die irgend ein Punkt der Koppellebene beschreibt, eine tricirculare Curve sechster Ordnung, die im Allgemeinen drei, im gegenwärtig vorliegenden Sonderfalle aber vier Doppelpunkte hat, also bezw. vom Geschlecht Eins oder Null. Hieraus ergibt sich, dass die Polcurve p in beiden Fällen von gleichem Geschlecht ist, wie die Koppelcurven, die zu dem jeweilig betrachteten Kurbelmechanismus gehören.

II. Sei ferner die Summe zweier benachbarten Glieder gleich der Summe der beiden anderen Glieder, z. B. $a + d = b + c$. Dann wird der Ausdruck $a^2 + b^2 + c^2 - d^2 = 2(ab + ac - bc)$, und dieser Werth geht aus dem unter I. gefundenen hervor durch Vertauschung von b mit $-b$. Nun enthält die Gleichung (5) der Polcurve die Gliedlänge d nur in der Verbindung $a^2 + b^2 + c^2 - d^2$ und im Uebrigen nur gerade Potenzen von b ; wir

¹⁾ Vergl. Burmester, Kinematik I, S. 113, sowie Fig. 334.

schliessen hieraus, dass in den beiden mit I. und II. bezeichneten Fällen die Gleichungen der Polcurve sich nur durch die entgegengesetzten Vorzeichen der Gliedlänge b unterscheiden werden. Der Fall II. bedarf daher keiner besonderen Untersuchung.

8. Wenn im Falle I. $a = d$ und $b = c$ ist, so erhalten wir einen gleichschenkligen Kurbelmechanismus (Fig. 7).

Dann zerfällt bekanntlich jede der Koppelcurven in eine gewisse Curve vierter Ordnung und einen Kreis¹⁾, und auch die Polcurve erleidet eine weitere Ausartung. Gleichung (1) verwandelt sich nämlich gegenwärtig in

$$(r + s + b)(-r + s + b)(as - br - ab) = 0,$$

mithin spaltet sich die Polcurve in die vierfach zählende Gerade AB und eine Curve vierter Ordnung p mit der Gleichung

$$(as - br - ab)(-as - br - ab)(as + br - ab)(-as + br - ab) = 0$$

oder

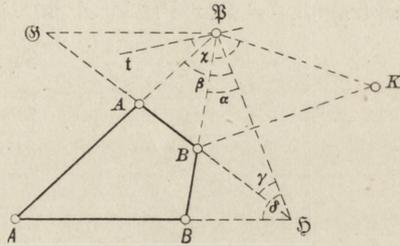
$$\{a^2 s^2 - b^2(r + a)^2\} \{a^2 s^2 - b^2(r - a)^2\} = 0 \dots (9)$$

Setzen wir hier $s^2 = b^2 + r^2 - 2br \cos \varphi$, wobei φ den Winkel $BA\mathfrak{P}$ bedeutet, so ergiebt sich die Gleichung von p in der Form

$$r = \frac{2a^2 b}{a^2 - b^2} \cos \varphi \pm \frac{2ab^2}{a^2 - b^2}, \dots (10)$$

d. h. p ist eine Pascal'sche Curve²⁾. In der That, machen wir in Fig. 8 auf AB die Strecke $AA_0 = A^0A = a$ und bezeichnen mit \mathfrak{P}_0 den vierten harmonischen Punkt zu B, A_0, A , mit \mathfrak{P}^0 den vierten harmonischen Punkt zu B, A^0, A , mit \mathfrak{D} den Mittelpunkt von $\mathfrak{P}_0 \mathfrak{P}^0$, so wird $A \mathfrak{P}_0 = \frac{2ab}{a+b}$, $A \mathfrak{P}^0 = \frac{2ab}{a-b}$, folglich $A \mathfrak{D} = \frac{2a^2 b}{a^2 - b^2}$ und $\mathfrak{D} \mathfrak{P}^0 = - \mathfrak{D} \mathfrak{P}_0 = \frac{2ab^2}{a^2 - b^2}$; wir

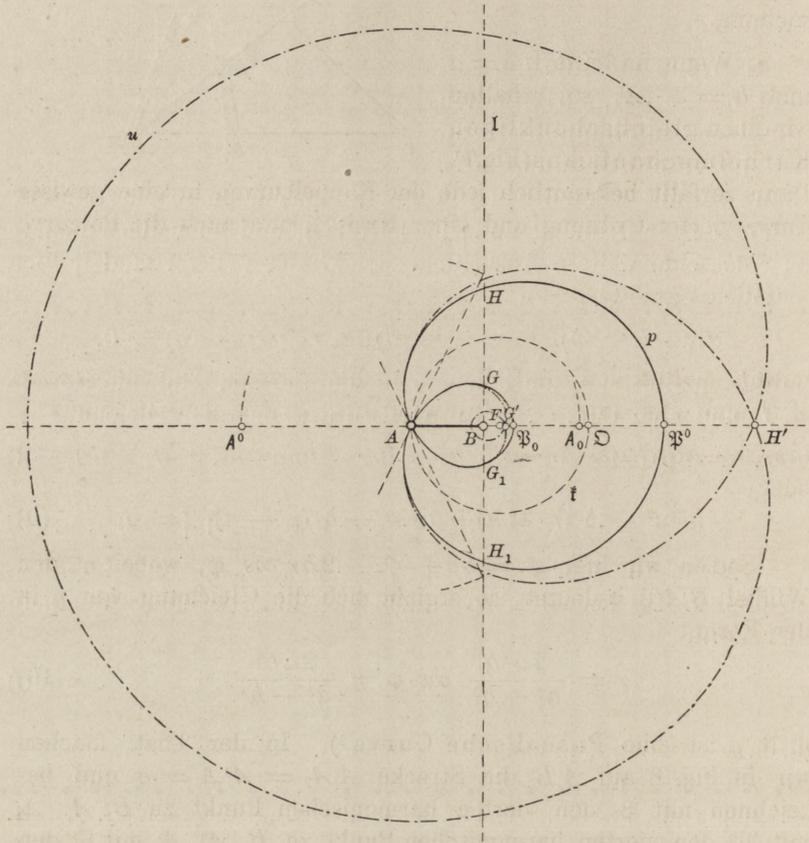
Fig. 7.



¹⁾ Vergl. Burmester, Kinematik I, S. 331. — ²⁾ Roberts, a. a. O., S. 94.

erhalten daher p , indem wir über $A\mathcal{D}$ als Durchmesser den Kreis f beschreiben und auf den durch A gehenden Strahlen von ihren Schnittpunkten mit f aus die Strecke $\mathcal{D}\mathcal{P}^0$ beiderseits abtragen. — Der Punkt A ist ein Doppelpunkt von p . Wie sich

Fig. 8.



aus Fig. 4 ergibt, gehen seine Tangenten durch die Schnittpunkte des um A mit dem Radius a beschriebenen Kreises und der Geraden l , die in B auf AB senkrecht steht. Die imaginären Kreispunkte sind wiederum Spitzen von p ; die zugehörigen Tangenten schneiden sich im Mittelpunkte F von f , denn dieser theilt AB im Verhältniss $a^2:b^2$ (Art. 3). Die Curve p ist hier-

nach von der vierten Classe. Durch jeden der imaginären Kreispunkte geht folglich nur noch je eine Tangente, und diese Tangenten treffen sich in B . Für $s^2 = 0$ folgt nämlich aus Gleichung (9)

$$(r^2 - a^2)^2 = 0,$$

d. h. die Geraden $s^2 = 0$ sind Tangenten von p (Art. 5).

9. Ist $a = b$ und $c = d$, so geht Gleichung (1) über in

$$a(r - s + c)(r - s - c)(r + s + a) = 0;$$

die Polcurve zerfällt also in die vierfach zählende Gerade AB , die doppelt zählende unendlich ferne Gerade und die Curve

$$(r + s + a)(r - s + a)(-r + s + a)(-r - s + a) = 0, \quad (11)$$

d. h. einen Kegelschnitt p , der A und B zu Brennpunkten und die Gliedlänge a zur Hauptachse hat. Das Gelenkviereck $ABBA$ liefert gegenwärtig einen Parallelkurbelmechanismus, der in einer der beiden Durchschlagslagen in einen Zwillingskurbelmechanismus übergehen kann. Im ersten Fall ist die Polcurve die unendlich ferne Gerade, und jeder Koppelpunkt bewegt sich auf einem Kreise vom Radius a ; im zweiten Fall ergibt sich als Polcurve der Kegelschnitt p , und die einzelnen Punkte der Koppelene beschreiben Curven vierter Ordnung¹⁾.

10. Zu weiteren Sonderfällen gelangen wir durch die Annahme, in dem betrachteten Gelenkviereck seien zwei benachbarte Glieder, z. B. b und d , unendlich gross. Diese Sonderfälle sind zuerst von Roberts behandelt worden²⁾, und wir erhalten die betreffenden Resultate ohne Weiteres aus den vorstehend entwickelten allgemeinen Formeln der Artikel 2 bis 6, indem wir dort $b = \infty$, $d = \infty$ und $d - b$ gleich irgend einer endlichen Länge setzen.

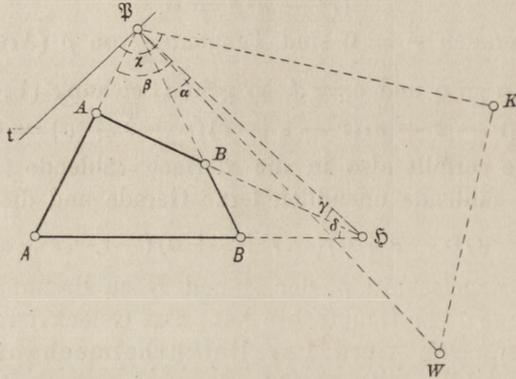
II. Die Flachpunktcurve u .

11. Wir verstehen wie bisher unter $ABBA$ einen beliebigen Kurbelmechanismus mit den Gliedlängen $AA = a$, $BB = b$, $AB = c$, $AB = d$ (Fig. 9). Für die augenblicklich betrachtete

¹⁾ Burmester, Kinematik I, S. 302. — ²⁾ A. a. O., S. 312 und 314. Vergl. auch „über die Gestaltung der Koppelcurven etc.“, a. a. O., S. 15.

Koppellage AB , die AB in \mathfrak{H} schneidet, sei \mathfrak{P} der Pol, t die gemeinsame Tangente von Polbahn und Polcurve, W der Wendepol und K der Ball'sche Punkt, also $\angle t\mathfrak{P}A = \angle B\mathfrak{P}\mathfrak{H}$,

Fig. 9



$\mathfrak{P}W \perp t$ und $WK \perp \mathfrak{P}K$. Wir setzen weiter $\mathfrak{P}\mathfrak{H} = h$, $\angle B\mathfrak{P}\mathfrak{H} = \alpha$, $\angle A\mathfrak{P}\mathfrak{H} = \beta$, $\angle \mathfrak{P}\mathfrak{H}A = \gamma$, $\angle \mathfrak{P}\mathfrak{H}B = \delta$, $\angle t\mathfrak{P}K = \chi$; dann dienen zur Bestimmung der Punkte W und K die an anderer Stelle ¹⁾ abgeleiteten Gleichungen

$$\mathfrak{P}W = h \frac{\sin \gamma \sin \delta}{\sin \alpha \sin \beta \sin(\delta - \gamma)} \dots \dots \dots (12)$$

$$\tan \chi = - \frac{\tan \alpha \tan \beta}{\tan \delta} \dots \dots \dots (13)$$

Bezeichnen wir wieder die Strecken $A\mathfrak{P}$ und $B\mathfrak{P}$ bezw. mit r und s und ferner AK mit r' , BK mit s' , so folgt aus dem Dreieck $A\mathfrak{P}K$

$$r'^2 = r^2 + \mathfrak{P}K^2 - 2r \cdot \mathfrak{P}K \cos(\chi - \alpha).$$

Nun ist

$$r = h \frac{\sin \gamma}{\sin(\beta + \gamma)}$$

und $\mathfrak{P}K = \mathfrak{P}W \sin \chi$; schreiben wir also zur Abkürzung $\tan \alpha = \lambda$, $\tan \beta = \mu$, $\tan \gamma = \nu$, $\tan \delta = \omega$, so finden wir mit Rücksicht auf (12) und (13) nach einfacher Rechnung

¹⁾ Beiträge zur Theorie des ebenen Gelenkvierecks, a. a. O., S. 258 und 259.

$$r'^2 = h^2 \frac{\mu^2(1 + \lambda^2)(\lambda + v)^2(\lambda^2\mu^2 + v^2)}{(\lambda + \mu)^2(\mu - v)^2(\lambda^2 + v^2)} \quad (14)$$

und analog

$$s'^2 = h^2 \frac{\mu^2(1 + \kappa^2)(\kappa + v)^2(\lambda^2\mu^2 + v^2)}{(\kappa + \mu)^2(\mu - v)^2(\lambda^2 + v^2)} \quad (15)$$

Aus der Figur ergibt sich weiter

$$a = h \frac{\sin \beta \sin(\delta - \gamma)}{\sin(\beta + \gamma) \sin(\beta + \delta)} \quad b = h \frac{\sin \alpha \sin(\delta - \gamma)}{\sin(\alpha + \gamma) \sin(\alpha + \delta)}$$

$$c = h \frac{\sin \gamma \sin(\beta - \alpha)}{\sin(\alpha + \gamma) \sin(\beta + \gamma)} \quad d = h \frac{\sin \delta \sin(\beta - \alpha)}{\sin(\alpha + \delta) \sin(\beta + \delta)},$$

es ist also

$$a^2 = h^2 \frac{\lambda^2(1 + \lambda^2)(\mu - v)^2}{(\lambda + \mu)^2(\lambda + v)^2} \quad b^2 = h^2 \frac{\kappa^2(1 + \kappa^2)(\mu - v)^2}{(\kappa + \mu)^2(\kappa + v)^2}$$

$$c^2 = h^2 \frac{\mu^2(1 + \mu^2)(\kappa - \lambda)^2}{(\kappa + \mu)^2(\lambda + \mu)^2} \quad d^2 = h^2 \frac{v^2(1 + v^2)(\kappa - \lambda)^2}{(\kappa + v)^2(\lambda + v)^2} \quad (16)$$

Die Elimination von $h, \kappa, \lambda, \mu, v$ zwischen (14), (15) und den vier Gleichungen (16) würde zu einer Gleichung zwischen a, b, c, d, r' und s' führen, die für die Ball'schen Punkte aller Koppellagen gilt, d. h. zur Gleichung der Flachpunktcurve u der Koppelebene. Wesentlich einfacher gestaltet sich aber die Ableitung dieser Gleichung bei dem speciellen Kurbelmechanismus, zu dem wir nunmehr übergehen.

12. Der Zwillingskurbelmechanismus. In Fig. 10 ist $ABBA$ ein Antiparallelogramm, also $AA = BB = a$, $AB = AB = c$. Unter Beibehaltung der früher eingeführten Bezeichnungen wird t identisch mit $\mathfrak{F}\mathfrak{H}$ und $\beta = -\alpha$, $\gamma = -\delta$; die Gleichungen (12) und (13) gehen daher über in

$$\mathfrak{F} W = \frac{h \tan \delta}{2 \sin^2 \alpha}$$

und

$$\tan \chi = \frac{\tan^2 \alpha}{\tan \delta}.$$

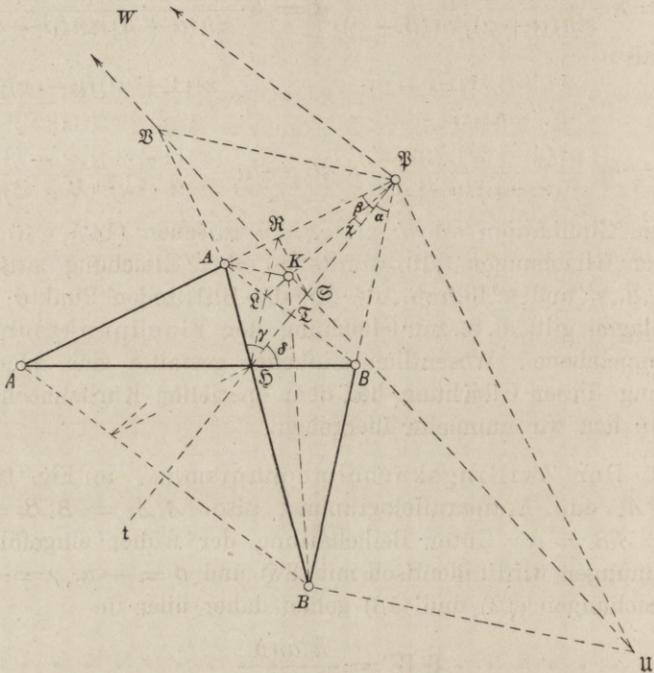
Verstehen wir also unter \mathfrak{S} den Schnittpunkt von WK mit $\mathfrak{F}\mathfrak{H}$, so folgt

$$\mathfrak{F}\mathfrak{S} = \mathfrak{F} W \tan \chi = \frac{h}{2 \cos^2 \alpha}.$$

Hieraus ergibt sich für die Construction des Ball'schen Punktes K die einfache Regel: Man ziehe durch \mathfrak{H} zu BB eine Parallele, die AB in \mathfrak{Q} , AA in \mathfrak{R} schneidet, errichte in \mathfrak{R} zu AA ein Loth und bestimme seinen Schnittpunkt \mathfrak{S} mit $\mathfrak{P}\mathfrak{H}$; dann ist K der Fusspunkt des Lothes von \mathfrak{S} auf $\mathfrak{P}\mathfrak{Q}$. Bedeutet nämlich \mathfrak{I} den Schnittpunkt von $\mathfrak{P}\mathfrak{H}$ und AB , so ist

$$\tan \angle \mathfrak{Q}\mathfrak{P}\mathfrak{H} = \frac{\mathfrak{I}\mathfrak{Q}}{\mathfrak{P}\mathfrak{I}} = \frac{\mathfrak{H}\mathfrak{I}}{\mathfrak{P}\mathfrak{I}} \tan \alpha = \frac{A\mathfrak{I} \cot \delta}{A\mathfrak{I} \cot \alpha} \tan \alpha = \frac{\tan^2 \alpha}{\tan \delta},$$

Fig. 10.



also $\angle \mathfrak{Q}\mathfrak{P}\mathfrak{H} = \zeta$. — Die Gerade $\mathfrak{P}K$ geht auch durch den Schnittpunkt von BA mit der Parallelen durch \mathfrak{H} zu AA .

Aus den Kreisvierecken $A\mathfrak{R}\mathfrak{S}\mathfrak{I}$ und $\mathfrak{Q}K\mathfrak{S}\mathfrak{I}$ folgt

$$\mathfrak{P}A \cdot \mathfrak{P}\mathfrak{R} = \mathfrak{P}\mathfrak{I} \cdot \mathfrak{P}\mathfrak{S} = \mathfrak{P}\mathfrak{Q} \cdot \mathfrak{P}K;$$

mithin ist auch $A\mathfrak{R}K\mathfrak{Q}$ ein Kreisviereck, also $\angle KA\mathfrak{P} = \angle K\mathfrak{Q}\mathfrak{R} = \angle K\mathfrak{P}B$. Ebenso zeigt man, dass $\angle \mathfrak{P}BK = \angle A\mathfrak{P}K$ ist; demnach ist auch $\angle AK\mathfrak{Q} = \angle \mathfrak{Q}KB = \angle A\mathfrak{P}B$.

d. h. die Normale der Bahncurve des Punktes K halbirt den Winkel AKB . Hieraus folgt eine zweite Construction des Punktes K : Man ziehe $A\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{B}\mathfrak{U} \perp \mathfrak{B}A$, sowie $B\mathfrak{U}$ und $\mathfrak{B}\mathfrak{B} \perp \mathfrak{B}B$ und fälle von \mathfrak{B} auf $\mathfrak{U}\mathfrak{B}$ ein Loth; dieses trifft $\mathfrak{U}\mathfrak{B}$ in K . Da nämlich die Punkte $\mathfrak{B}, \mathfrak{B}, A, K$ ein Kreisviereck bilden, so ist $\angle AK\mathfrak{B} = \angle A\mathfrak{B}\mathfrak{B} = \angle A\mathfrak{B}B$ etc.

Wenn in der Koppellebene die Polcurve p bereits gezeichnet vorliegt, so liefert die letzte Construction zu jedem Punkte \mathfrak{B} von p den entsprechenden Punkt K der Flachpunktcurve u , und zwar ohne Benutzung der zugehörigen Lage des Gliedes AB . Die hiernach zwischen den Curven p und u bestehende Beziehung führt nun in einfachster Weise zur Gleichung von u . Es ist nämlich $\sphericalangle A\mathfrak{B}K \sim \sphericalangle \mathfrak{B}BK$, mithin

$$\frac{AK}{A\mathfrak{B}} = \frac{\mathfrak{B}K}{B\mathfrak{B}}$$

und

$$\frac{\mathfrak{B}K}{A\mathfrak{B}} = \frac{BK}{B\mathfrak{B}},$$

folglich

$$\frac{AK}{A\mathfrak{B}^2} = \frac{BK}{B\mathfrak{B}^2},$$

oder mit Anwendung der früher gebrauchten Bezeichnungen

$$s^2 r' = r^2 s' \dots \dots \dots (17)$$

Aus den Dreiecken AKB und $A\mathfrak{B}B$ folgt ferner

$$\cos \angle AKB = \frac{r'^2 + s'^2 - c^2}{2r's'}$$

und

$$\cos \angle A\mathfrak{B}B = \frac{r^2 + s^2 - c^2}{2rs}.$$

Nun ist aber $\angle AKB = 2 \cdot \angle A\mathfrak{B}B$, also

$$\frac{r'^2 + s'^2 - c^2}{2r's'} = \frac{(r^2 + s^2 - c^2)^2}{2r^2s^2} - 1$$

oder nach (17)

$$r's'(2r^2 + 2s^2 - c^2) - r^2s^2 = 0.$$

Dabei genügen r und s der Gleichung (11) der Polcurve p , die wir auch schreiben können

$$(r^2 - s^2)^2 - 2a^2(r^2 + s^2) + a^4 = 0.$$

Bringen wir mit Hülfe von (17) die beiden letzten Gleichungen auf die Form

$$\left(\frac{r^2}{r'}\right)^2 - 2(r' + s') \frac{r^2}{r'} + c^2 = 0$$

und

$$(r' - s')^2 \left(\frac{r^2}{r'}\right)^2 - 2a^2(r' + s') \frac{r^2}{r'} + a^4 = 0,$$

so ergibt sich durch Elimination von $\frac{r^2}{r'}$

$$4a^2(a^2 - c^2)(r' + s')^2 \{(r' - s')^2 - a^2\} + \{c^2(r' - s')^2 - a^4\}^2 = 0;$$

mithin lautet die vollständige Gleichung der Flachpunkcurve

$$[4a^2(a^2 - c^2)(r' + s')^2 \{(r' - s')^2 - a^2\} + \{c^2(r' - s')^2 - a^4\}^2] \\ \cdot [4a^2(a^2 - c^2)(r' - s')^2 \{(r' + s')^2 - a^2\} + \{c^2(r' + s')^2 - a^4\}^2] = 0, \quad (18)$$

oder, wenn zur Abkürzung $r'^2 + s'^2 = V$, $r'^2 - s'^2 = W$ gesetzt wird,

$$16a^4(a^2 - c^2)^2 W^2 (W^2 - 2a^2 V + a^4) \\ + 8a^2(a^2 - c^2) \{c^4 W^2 (2V^2 - W^2) - a^2 c^4 V (4V^2 - 3W^2) \\ - 2a^4 c^2 V W^2 + 2a^6 c^2 (2V^2 - W^2) + a^8 W^2 - a^{10} V\} \\ + (c^4 W^2 - 2a^4 c^2 V + a^8)^2 = 0 \dots (19)$$

Bezeichnen wir mit 0 den Mittelpunkt von AB , mit x und y die rechtwinkligen Coordinaten des Punktes K für 0 als Anfangspunkt und $0A$ als positive x -Achse, so wird $r'^2 = \left(\frac{c}{2} - x\right)^2 + y^2$,

$$s'^2 = \left(\frac{c}{2} + x\right)^2 + y^2, \text{ also } V = 2(x^2 + y^2) + \frac{c^2}{2}, \quad W = -2cx.$$

Durch Einführung dieser Werthe verwandelt sich (19) in eine Gleichung sechsten Grades, welche nur gerade Potenzen von x und y enthält, und zwar ist das Glied sechsten Grades, von einem constanten Factor abgesehen, gleich $(x^2 + y^2)^2 \{(c^2 - a^2)x^2 - a^2 y^2\}$. Die Flachpunkcurve ist also eine in Bezug auf die gewählten Coordinatenachsen symmetrische bicirculare Curve sechster Ordnung. Ihre Asymptoten

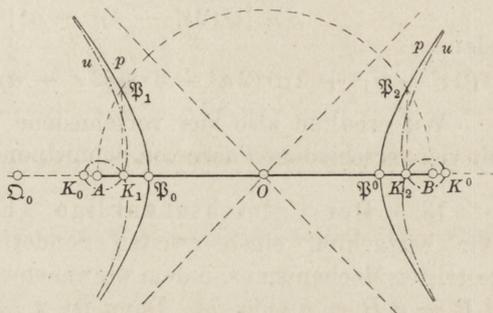
$$(c^2 - a^2)x^2 - a^2 y^2 = 0$$

sind identisch mit den Asymptoten eines Kegelschnittes, der A

und B zu Brennpunkten und a zur Hauptachse hat, d. h. der Polcurve p . In Fig. 11, welche für das in Fig. 10 gezeichnete Gelenkviereck die Curven p und u darstellt, ist $c > a$, also p eine Hyperbel.

Verstehen wir unter \mathfrak{P}_1 und \mathfrak{P}_2 die Schnittpunkte von p mit dem Halbkreis über dem Durchmesser AB , unter K_1 und K_2 die entsprechenden Punkte von u , so folgt aus der vorhin abgeleiteten zweiten

Fig. 11.



Construction des Ball'schen Punktes sofort, dass K_1 und K_2 mit den Fusspunkten der Lothe zusammenfallen, die von \mathfrak{P}_1 und \mathfrak{P}_2 auf AB gefällt werden. Nun entsprechen K_1 und K_2 aber auch denjenigen

Punkten von p , die zu \mathfrak{P}_1 und \mathfrak{P}_2 in Bezug auf AB symmetrisch liegen; sie sind also Doppelpunkte von u . Die Gerade AB schneidet u überdies in denjenigen Punkten K_0 und K_0' , die den auf ihr liegenden Scheiteln \mathfrak{P}_0 und \mathfrak{P}_0' von p entsprechen. Nach (17) ist

$$\frac{AK_0}{BK_0} = \left(\frac{A\mathfrak{P}_0}{B\mathfrak{P}_0} \right)^2;$$

bedeutet demnach Σ_0 den vierten harmonischen Punkt zu A , B , \mathfrak{P}_0 , also den Krümmungsmittelpunkt von p für den Scheitel \mathfrak{P}_0 , so ist K_0 der Mittelpunkt von $\mathfrak{P}_0 \Sigma_0$.

Setzen wir in (18) $r' = 0$, so giebt sich

$$\{(2a^2 - c^2)s'^2 - a^4\}^4 = 0.$$

Von den beiden Geraden, die den Punkt A mit den imaginären Kreispunkten verbinden, hat folglich jede mit u vier zusammenfallende Punkte gemein; die Punkte A und B sind also singuläre Brennpunkte von u . — Durch das in Artikel 3 angewendete Verfahren finden wir ferner, dass die Curve u zwei Focalcentra hat, und zwar auf AB oder auf der Mittelsenkrechten dieser Strecke, je nachdem $c \geq a$ ist. Ihr Abstand vom Punkte 0

ist im ersten Falle

$$= \pm \frac{(2a^2 - c^2)^2}{8ac\sqrt{c^2 - a^2}}, \text{ im zweiten } = \pm \frac{(2a^2 - c^2)^2}{8'ac\sqrt{a^2 - c^2}}.$$

Die Curven p und u berühren sich nur in den beiden unendlich fernen Punkten von p ; denn setzen wir in Gleichung (18) $r' - s' = a$, also $r' + s' = 2r' - a$, so folgt

$$(a^2 c^2 - a^4)^2 \cdot [4 a^4 (a^2 - c^2) \{ (2r' - a)^2 - a^2 \} + \{ c^2 (2r' - a)^2 - a^4 \}^2] = 0$$

oder

$$c^4 (2r' - a)^4 + 2 a^4 (2a^2 - 3c^2) (2r' - a)^2 + a^6 (4c^2 - 3a^2) = 0.$$

Wir erhalten also vier verschiedene Werthe von r' und mithin vier verschiedene Paare von Schnittpunkten der Curven p und u .

13. Der gleichschenklige Kurbelmechanismus. Wir betrachten einen zweiten Sonderfall des in Fig. 9 dargestellten Mechanismus, indem wir annehmen, es sei $AB = AA = a$, $AB = BB = b$ (Fig. 7). Dann ist $\gamma = \alpha$, $\delta = \beta$, mithin nach Gleichung (13) $\chi = 180^\circ - \alpha$, d. h. $\angle B\wp K = 180^\circ - (\alpha + \beta)$. Ziehen wir daher $\wp\mathcal{G} \parallel AB$ bis AB , so ist $\angle B\wp K = \angle \mathcal{G}\wp B$. Gleichung (12) verwandelt sich gegenwärtig in

$$\wp W = \frac{h}{\sin(\beta - \alpha)},$$

folglich wird

$$\wp K = \wp W \sin \chi = \frac{h \sin \alpha}{\sin(\beta - \alpha)}$$

d. h.

$$= \wp \mathcal{G};$$

der Punkt K liegt also symmetrisch zu \mathcal{G} in Bezug auf $B\wp$. Hieraus folgt weiter, dass die Dreiecke $B\wp K$ und $BA\wp$ einander ähnlich sind; mithin ist

$$\frac{BK}{B\wp} = \frac{B\wp}{BA}.$$

Gebrauchen wir nun wieder die Bezeichnungen $B\wp = s$, $BK = s'$ und setzen überdies $\angle \wp BA = \vartheta$, $\angle KBA = \vartheta'$, so finden wir, dass entsprechende Punkte \wp und K der Curven p und u durch die Gleichungen mit einander verknüpft sind

$$s' = \frac{s^2}{b}, \vartheta' = 2\vartheta. \dots \dots \dots (20)$$

Betrachten wir endlich die Strecken $B\mathfrak{B}$ und BK bezw. als die geometrischen Bilder der complexen Grössen

$$z = x + iy = s e^{i\vartheta}, z' = x' + iy' = s' e^{i\vartheta'},$$

so können wir das soeben erhaltene Resultat auch in folgender Weise aussprechen: Die Flachpunktcurve u entsteht aus der Polcurve p durch conforme Abbildung der Koppelenebene auf sich selbst mittelst der Function

$$z' = \frac{z^2}{b}.$$

Die Eigenschaften der Curve u ergeben sich demnach ohne Weiteres aus den in Artikel 8 ermittelten Eigenschaften der Curve p . — Spalten wir die letzte Gleichung in

$$x^2 - y^2 = b x' \dots \dots \dots (21)$$

und

$$2xy = b y' \dots \dots \dots (22)$$

und bezeichnen mit E die ursprüngliche, mit E' die transformirte Koppelenebene, so erhalten wir zwischen E' und E die folgende ein-vierdeutige Beziehung: Einem reellen Punkte $C'(x', y')$ von E' entsprechen in E zwei reelle Punkte C, C_1 und zwei conjugirt imaginäre C_2, C_3 , nämlich die vier Schnittpunkte der durch die Gleichungen (21) und (22) dargestellten Hyperbeln; sind s', ϑ' die Polarcoordinaten von C' , so folgt für C und C_1

$$s = s_1 = \sqrt{b s'}, \vartheta = \frac{\vartheta'}{2}, \vartheta_1 = \pi + \frac{\vartheta'}{2}$$

und für C_2, C_3

$$s_2 = s_3 = i\sqrt{b s'}, \vartheta_2 = \frac{\pi}{2} + \frac{\vartheta'}{2}, \vartheta_3 = \frac{3\pi}{2} + \frac{\vartheta'}{2}.$$

Ist C' unendlich fern, so wird C_1 identisch mit C ($s = \infty, \vartheta = \frac{\vartheta'}{2}$); ebenso vereinigen sich C_2 und C_3 zu einem reellen unendlich fernen Punkte ($\vartheta_2 = \frac{\pi}{2} + \frac{\vartheta'}{2}$). Dem Punkte A der Ebene E' ist in E ein Punktquadrupel zugeordnet, dessen einer Punkt mit

A zusammenfällt; dagegen sind B und die imaginären Kreispunkte I und J drei selbstentsprechende Punkte von E' und E insofern, als für jeden dieser Punkte das ganze zugeordnete Quadrupel mit ihm selbst identisch ist. — Einer in E' beliebigen angenommenen Geraden g' entspricht in E eine Hyperbel g ; den acht Schnittpunkten von g und p sind also in E' ebenso viele Schnittpunkte von g' und u zugeordnet, d. h. die Curve u ist von der achten Ordnung. Geht aber g' durch einen der drei selbstentsprechenden Punkte B, I, J , so zerfällt g in zwei Geraden, die sich in demselben Punkte schneiden. Es entsprechen z. B. der Geraden $C'I$ die Geraden CI und C_1I , von denen die eine den Punkt C_2 , die andere den Punkt C_3 enthält. Nun zählt der Punkt I doppelt unter den Schnittpunkten von p mit CI und C_1I ; folglich hat u mit $C'I$ in I vier zusammenfallende Punkte gemein, d. h. die imaginären Kreispunkte sind vierfache Punkte von u . Da ferner p in I eine Spitze mit der Tangente IF besitzt, so fallen die vier Tangenten von u in I mit der Geraden nach dem Punkte F' zusammen, der in E' dem Punkte F der Fig. 8 entspricht, und F' ist demnach das einzige Focalcentrum von u . — Die Gerade BI entspricht sich selbst bei der Transformation von E in E' ; der Punkt B ist folglich ein Brennpunkt von u von der besonderen Beschaffenheit, dass jede der Geraden, die ihn mit einem der beiden imaginären Kreispunkte verbindet, ausserdem noch vier zusammenfallende Punkte mit u gemein hat.

Schneidet p die Gerade l der Fig. 8 in den Punktpaaren G, G_1 und H, H_1 , so entspricht jedem von ihnen in E' ein einziger Punkt G' bezw. H' der Geraden AB , also jedesmal ein Doppelpunkt von u . Ein dritter Doppelpunkt von u ist der Punkt A , den E und E' entsprechend gemein haben. — Da die Abbildung, die p in u überführt, eine conforme ist, so folgt weiter, dass die Tangenten in je zwei entsprechenden Punkten von p und u mit den von B nach diesen Punkten gehenden Strahlen gleiche Winkel bilden. Die Curven p und u berühren sich daher in ihrem gemeinsamen Doppelpunkte A .

Um noch die Krümmung in entsprechenden Curvenpunkten zu untersuchen, bezeichnen wir zunächst ganz allgemein mit k und k' irgend zwei entsprechende Curven von E und E' , mit

P, Q, R drei unendlich benachbarte Punkte von k , mit P', Q', R' die zugeordneten Punkte von k' und setzen $BP = s, BP' = s', \angle PBA = \vartheta, \angle P'BA = \vartheta', \angle QBP = d\vartheta, \angle Q'BP' = d\vartheta', PQ = d\sigma, P'Q' = d\sigma', \angle QR, PQ = d\tau, \angle Q'R', P'Q' = d\tau', \angle PQB = \omega, \angle P'Q'B = \omega'$ (Fig. 12). Nach einer vorhin gemachten Bemerkung bildet das Curvenelement $P'Q'$ mit BP' denselben Winkel wie PQ mit BP , und das Analoge gilt von den Elementen $Q'R'$ und QR ; mithin ist

$$d\tau' - d\vartheta' = d\tau - d\vartheta.$$

Aus (20) folgt aber

$$d\vartheta' = 2d\vartheta,$$

also wird

$$d\tau' = d\tau + d\vartheta.$$

Ferner ergibt sich aus den Dreiecken BPQ und $BP'Q'$

$$d\sigma = \frac{s d\vartheta}{\sin \omega}$$

und

$$d\sigma' = \frac{s' d\vartheta'}{\sin \omega'}.$$

Nun ist

$$\omega' + d\vartheta' = \omega + d\vartheta,$$

also

$$\omega' = \omega - d\vartheta;$$

hieraus folgt

$$d\sigma' = 2 \frac{s'}{s} d\sigma.$$

Verstehen wir jetzt unter ϱ und ϱ' bezw. die Krümmungsradien von k und k' in P und P' , so erhalten wir

$$\varrho = \frac{d\sigma}{d\tau}$$

und

$$\begin{aligned} \varrho' &= \frac{d\sigma'}{d\tau'} = 2 \frac{s'}{s} \cdot \frac{d\sigma}{d\tau + d\vartheta} = 2 \frac{s'}{s} \cdot \frac{1}{\frac{1}{\varrho} + \frac{\sin \omega}{s}} \\ &= 2 s' \cdot \frac{\varrho}{s + \varrho \sin \omega} = 2 \frac{s^2}{b} \cdot \frac{\varrho}{s + \varrho \sin \omega} \dots \dots \dots (23) \end{aligned}$$

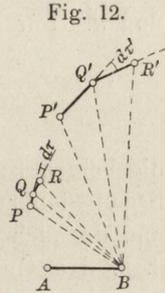


Fig. 12.

Dabei bedeutet ω den Winkel, den die Tangente von k in P mit BP einschliesst. — Wir wenden die gefundene Formel an auf den sich selbst entsprechenden Punkt A der Curven p und u . Für $r = 0$ und $\cos \varphi = \frac{b}{a}$ folgt aus Gleichung (10)

$$\varrho = \frac{ab}{\sqrt{a^2 - b^2}} = \frac{b}{\sin \varphi};$$

die beiden Krümmungsmittelpunkte des Punktes A der Polcurve liegen daher auf der Geraden l . Demnach wird $\varrho \sin \omega = b$, und da auch $s = b$ ist, so geht Gleichung (23) über in $\varrho' = \varrho$; d. h. die Curven p und u osculiren einander in ihrem gemeinsamen Doppelpunkte A . Dieser zählt also achtfach unter den 32 Schnittpunkten von p und u , und dasselbe gilt von jedem der imaginären Kreispunkte. Die übrigen acht Schnittpunkte sind in Fig. 8 imaginär.

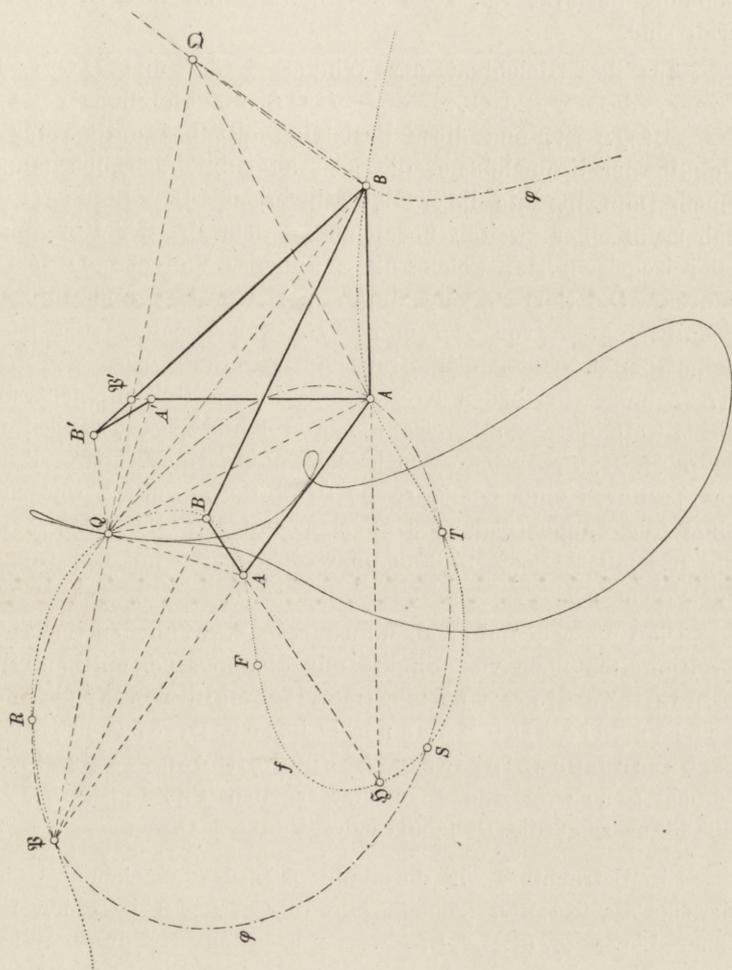
III. Die Uebergangscurve q .

14. In Fig. 13 ist $ABBA$ wieder ein beliebiger Kurbelmechanismus; für die gezeichnete Koppellage AB sollen diejenigen Punkte der Koppellebene bestimmt werden, die augenblicklich einen Selbstberührungspunkt ihrer Bahn durchschreiten.

Angenommen, der Punkt Q genüge der gestellten Aufgabe, so existirt eine zweite Koppellage $A'B'$, für welche er sich wieder an der mit Q bezeichneten Stelle befindetet, es ist also $\sphericalangle ABQ \cong \sphericalangle A'B'Q$. Die Geradenpaare AA , BB und AA' , BB' schneiden sich bezw. in den Polen \mathfrak{P} und \mathfrak{P}' der betrachteten Koppellagen; mithin sind $\mathfrak{P}Q$ und $\mathfrak{P}'Q$ die Normalen der Bahncurve des Punktes Q , und da diese Curve in Q einen Selbstberührungspunkt haben soll, so liegen die Punkte \mathfrak{P} , \mathfrak{P}' und Q auf einer Geraden. Die sechs Geraden von A und B nach \mathfrak{P} , $\mathfrak{P}'Q$ sind entsprechende Strahlen zweier perspectiven Strahlenbüschel; dabei halbiren AQ und BQ bezw. die Winkel $\mathfrak{P}A\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{P}'B\mathfrak{P}$. Der vierte harmonische Strahl zu $A\mathfrak{P}$, $A\mathfrak{P}'$ und AQ ist daher senkrecht zu AQ ; ihm entspricht im anderen Büschel das Loth in B zu BQ , und die beiden Lothe schneiden

sich auf $\mathfrak{P}\mathfrak{P}'$ im vierten harmonischen Punkte Ω zu \mathfrak{P} , \mathfrak{P}' und Q . Die Punkte A , B , Q , Ω liegen also auf einem Kreise, dessen Mittelpunkt sich auf $\mathfrak{P}\mathfrak{P}'$ befindet. Markiren wir nun auf jedem

Fig. 13.



der durch A und B gelegten Kreise die beiden Endpunkte des nach \mathfrak{P} gehenden Durchmessers, so erhalten wir bekanntlich eine specielle circulare Curve dritter Ordnung φ , die als Focalcurve

5*

bezeichnet wird¹⁾. Diese Focalcurve φ , die \mathfrak{P} zum Focalcentrum und A und B zu Grundpunkten hat, ist demnach der erste geometrische Ort des gesuchten Punktes Q . Sie ist, wie nur beiläufig bemerkt sei, stets zweitheilig, weil ihre Grundpunkte reell sind.

Aus der Gleichheit der Winkel AQA' und BQB' folgt ferner, dass $\angle AQA = \angle BQB$ und folglich $\angle AQB = \angle AQB$ ist, und diese Beziehung gilt bekanntlich für alle Punkte der Koppelebene, die sich augenblicklich überhaupt in einem Doppelpunkte ihrer Bahn befinden. Der Punkt Q liegt daher auf einer zweiten Focalcurve f , dem Ort der Brennpunkte aller Kegelschnitte, welche die Seiten des Vierecks $ABBA$ berühren. Die Curve f geht durch A, B, B, A, \mathfrak{P} und durch den Schnittpunkt \mathfrak{H} von AB und AB . Ihr Focalcentrum ist der Schnittpunkt F der den Dreiecken $\mathfrak{P}AB, \mathfrak{P}AB, \mathfrak{H}AA$ und $\mathfrak{H}BB$ umgeschriebenen Kreise, und ihre Mittellinie geht durch die Mittelpunkte der Strecken AB, BA und $\mathfrak{P}\mathfrak{H}$. Da die Punkt-paare $A, B; B, A; \mathfrak{P}, \mathfrak{H}$ aus jedem Punkte von f , also z. B. auch aus \mathfrak{P} , durch eine symmetrische Involution projicirt werden, so bildet die Tangente der Curve in \mathfrak{P} mit $\mathfrak{P}B$ denselben Winkel wie $\mathfrak{P}A$ mit $\mathfrak{P}\mathfrak{H}$; sie fällt demnach zusammen mit der Tangente der Polcurve p .

Die Curven φ und f haben ausser \mathfrak{P}, A, B und den imaginären Kreispunkten noch vier Punkte mit einander gemein; für jede Koppellage giebt es also im Allgemeinen vier System-punkte, die sich augenblicklich in einem Selbst-berührungspunkte ihrer Bahn befinden. — In Fig. 13 schneiden sich φ und f in vier reellen Punkten Q, R, S, T . Die Figur zeigt die Bahncurve des Punktes Q .

15. Betrachten wir die Seite AB des gegebenen Gelenk-vierecks als fest und zeichnen die Strecke AB in einer Reihe neuer Lagen $A_1B_1, A_2B_2 \dots$, so erhalten wir durch Wieder-holung der eben ausgeführten Construction die Focalcurven φ_1

¹⁾ Vergl. Schröter, Ueber eine besondere Curve dritter Ordnung, Math. Annalen V, S. 50, sowie Durège, Ueber die Curve dritter Ordnung, welche den geometrischen Ort der Brennpunkte einer Kegelschnittschar bildet, daselbst, S. 83.

und f_1, φ_2 und $f_2 \dots$ bezw. mit den Schnittpunkten $Q_1, R_1, S_1, T_1; Q_2, R_2, S_2, T_2 \dots$, und dann ergibt sich als Ort dieser sämtlichen Punktquadrupel die Uebergangscurve q .

Im Focalcentrum F der Curve f schneiden sich die durch \mathfrak{S}, A, A und \mathfrak{S}, B, B gelegten Kreise; es ist also $\angle AAF = \angle A\mathfrak{S}F = \angle BBF$ und $\angle AFA = \angle A\mathfrak{S}A = \angle BFB$, d. h. $\triangle FAA \sim \triangle FBB$, mithin

$$\frac{FA}{FB} = \frac{AA}{BB}.$$

Dasselbe gilt auch von den Focalcentren $F_1, F_2 \dots$ der Curven $f_1, f_2 \dots$. Diese Focalcentra erfüllen daher den Kreis, der die Strecke AB innen und aussen im Verhältniss $AA:BB$ theilt, und dessen Mittelpunkt auf AB liegt.

Da die Bahncurve des Punktes Q in ihrem Selbstberührungspunkte zwei unendlich benachbarte Doppelpunkte besitzt, so geht durch Q auch die zu f unendlich benachbarte Curve der Schar $f, f_1, f_2 \dots$. Die Curven $f, f_1, f_2 \dots$ umhüllen daher einerseits die Uebergangscurve q , andererseits die Polcurve p .

Nach früheren Darlegungen¹⁾ ist q eine Curve zehnter Ordnung mit Doppelpunkten in A und B und vierfachen Punkten in den imaginären Kreispunkten. Ausser den vier eben genannten singulären Punkten haben die Curven p und q noch 36 Punkte, darunter 12 Berührungspunkte, mit einander gemein²⁾. — Von den 30 Schnittpunkten der Curven q und f entfallen je vier auf die imaginären Kreispunkte und je zwei auf die Punkte A, B, Q, R, S, T . Die übrig bleibenden zehn Schnittpunkte sind solche Punkte der Koppalebene, die sich augenblicklich in einem gewöhnlichen Knotenpunkte ihrer Bahn befinden, und deren Bahncurven in ihrem weiteren Verlauf noch einen Selbstberührungspunkt aufweisen.

¹⁾ Ueber die Doppelpunkte der Koppelcurve, a. a. O. S. 303 u. 372. —

²⁾ Beiträge zur Theorie des ebenen Gelenkvierecks, a. a. O. S. 271.