

Onde viscoélastique non lineaire de faible amplitude

A. MOLINARI (METZ)

ON ÉTUDIE la propagation d'une onde de faible amplitude dans un demi-espace viscoélastique. La loi de comportement du matériau est donnée sous forme d'un développement en intégrales multiples. On utilise deux méthodes de perturbation qui donnent des solutions approchées valables, l'une loin du bord, l'autre près du front d'onde.

W pracy bada się rozchodzenie się fali o słabej amplitudzie w półprzestrzeni lepkosprężystej. Prawo konstytutywne materiału dane jest w formie rozwinięcia na całki wielokrotne. Użyto dwóch metod perturbacyjnych, które dają dobre rozwiązania przybliżone, jedno blisko brzegu, a drugi blisko czoła fali.

В работе исследуется распространение волны со слабой амплитудой в вязкоупругом полупространстве. Закон поведения материала дается в форме разложения на многократные интегралы. Используются два пертурбационных метода, которые дают хорошие приближенные решения, одно близко границы, второе близко фронта волны.

1. Introduction

ON SE PROPOSE d'étudier l'onde transitoire qui se propage dans un demi-espace viscoélastique non linéaire initialement au repos dont le bord est soumis à une contrainte variable de faible amplitude. Ce problème, dont la difficulté résulte des effets combinés de la non linéarité et de la dissipation, ne peut être résolu actuellement que de façon partielle et en faisant usage de méthodes asymptotiques.

VARLEY et ROGERS [1] se sont intéressés à la propagation d'ondes de hautes fréquences (voir aussi [2]). Les effets non linéaires peuvent éventuellement provoquer des chocs, tandis que les effets dissipatifs se manifestent par une atténuation exponentielle de l'onde avec l'éloignement du bord. La perturbation se limite donc en pratique à un voisinage de l'origine d'autant plus restreint que le temps de relaxation instantané du matériau est faible.

Ce n'est pas le cas si la sollicitation au bord est de nature quelconque. Le front d'onde est toujours amorti exponentiellement, mais il n'en est pas de même de toute la perturbation. La partie principale de celle-ci se déplace, quand on est loin du bord, à une vitesse peu différente de la célérité différée du son ⁽¹⁾ et son évolution est gouvernée au premier ordre par une équation de Burgers.

Equation bien connue et qu'il est naturel de rencontrer dans un problème de propagation d'onde en milieu dissipatif non linéaire, voir par exemple [3, 4 et 5]. Elle s'obtient en employant des techniques asymptotiques mises au point initialement en mécanique des fluides, voir par ex. [6, 7, 8]. Ainsi JOHNSON [9] arrive-t-il à ce résultat pour un corps thermoélastique non linéaire; de même BLAKE [10] et BLAND [11] pour des corps vis-

⁽¹⁾ Peu différente, parce que nous supposons que l'amplitude de l'onde est faible.

coélastiques non linéaires, dont le comportement est régi pour le premier par des paramètres cachés, pour le second par un assemblage en parallèle d'un ressort non linéaire avec un amortisseur linéaire.

Nous prenons ici une loi de comportement de type intégral et cherchons à décrire la solution du problème dans l'espace abscisse-temps (\bar{x}, \bar{t}) . L'idée simplificatrice, qui permet d'aborder ce problème complexe, nous la trouvons dans le comportement même du matériau qui est directement tributaire des échelles de temps ou de longueur caractéristiques des phénomènes étudiés.

Ainsi le comportement d'un glacier est-il à l'échelle des temps géologiques celui d'un fluide qui s'écoule; mais à notre échelle il se comporte comme un solide: On ne peut y enfoncer la main par simple pression.

Autre exemple significatif, celui du mastic rebondissant. Lancé contre le sol il rebondit, alors que posé sur une table il s'étale au bout d'un certain temps. A l'échelle de la durée du choc, il se comporte comme un solide ayant une composante élastique, mais à l'échelle du "repos" sur la table il se comporte comme un fluide.

D'où l'idée de prendre dans les problèmes dynamiques l'échelle de temps ou de longueur comme paramètre perturbateur tout en simplifiant de façon consécutive et adéquate la loi de comportement du matériau. En procédant de la sorte nous parviendrons à décrire l'onde dans deux zones du plan (\bar{x}, \bar{t}) . Dans l'une, voisinage du front d'onde, c'est le comportement instantané du matériau qui prédomine; alors que dans la seconde, loin du bord, c'est le comportement différé ⁽²⁾.

Dans la première partie de ce travail, § 1 nous étudions l'onde loin du bord. D'abord, § 2.1, nous exprimons la loi de comportement sous une forme qui met en valeur ses composantes différées. Puis, en utilisant une méthode de développements asymptotiques raccordés § 2.2, nous étudions le problème linéaire § 1.2.1 et non linéaire § 2.2.2. Tous ces résultats peuvent s'obtenir de façon élégante par une méthode d'échelles multiples § 2.3.

Dans la seconde partie, § 3, on étudie l'onde au voisinage du front. La loi de comportement est mise sous une forme qui fait apparaître ses composantes instantanées § 3.1. Au paragraphe 3.2, nous étudions l'onde à l'aide d'un processus asymptotique du type échelles multiples.

On s'efforce de préciser les domaines de validité des différentes solutions approchées que l'on obtient.

2. Etude asymptotique loin du bord

On considère un corps viscoélastique non linéaire dont la loi de comportement est donnée au second ordre par un développement en intégrales multiples de la forme ⁽³⁾.

$$(2.1) \quad \bar{\sigma}(\bar{t}) = \int_0^{\bar{t}} G_1(\bar{t}-\tau) \frac{\partial \bar{e}}{\partial \tau}(\tau) d\tau + \frac{1}{2} \int_0^{\bar{t}} \int_0^{\bar{t}} G_2(\bar{t}-\tau_1, \bar{t}-\tau_2) \frac{\partial \bar{e}}{\partial \tau}(\tau_1) \frac{\partial \bar{e}}{\partial \tau}(\tau_2) d\tau_1 d\tau_2 \dots,$$

⁽²⁾ Il est remarquable de constater que ces deux zones ont une partie commune dans laquelle les solutions approchées sont compatibles.

⁽³⁾ Prendre un développement à un ordre supérieur ne changerait rien aux résultats. On ne tient pas compte ici de la variation d'entropie, ce qui est justifié en première approximation pour les ondes de faible amplitude.

où $\bar{\sigma}$ et $\bar{e} = \partial\bar{u}/\partial\bar{x}$ représentent la contrainte et la déformation unitaire, \bar{x} et t l'abscisse et le temps ⁽⁴⁾; G_1, G_2 des fonctions de relaxation. Les dérivées du type $\partial\bar{e}/\partial\tau$ sont éventuellement à prendre au sens des distributions.

On se propose d'étudier la réponse d'un demi-espace $\bar{x} \geq 0$ initialement au repos sollicité à son extrémité $\bar{x} = 0$ par une contrainte:

$$(2.2) \quad \bar{\sigma}(\bar{x} = 0, \bar{t}) = F(t).$$

Dans ce paragraphe, on s'intéresse à la recherche d'une solution asymptotique loin du bord.

Transformons d'abord la loi de comportement sous une forme adaptée à cette étude.

2.1. Expressions de la loi de comportement et de l'équation du mouvement adaptées à l'étude loin du bord

Introduisons les notations:

$$(2.3) \quad E_1 = G_1(\infty), \quad E_2 = G_2(\infty, \infty), \quad \mu = \int_0^{\infty} (G_1(\xi) - G_1(\infty)) d\xi,$$

qui désignent les coefficients d'élasticité différée du premier et du second ordre, et une viscosité différée.

Le premier terme de (2.1) peut s'écrire:

$$I = \int_0^{\bar{t}} G_1(\bar{t} - \tau) \frac{\partial\bar{e}}{\partial\tau}(\tau) d\tau = E_1 \bar{e}(\bar{t}) + \int_0^{\bar{t}} (G_1(\bar{t} - \tau) - E_1) \frac{\partial\bar{e}}{\partial\tau}(\tau) d\tau$$

puis, moyennant une intégration par parties et compte tenu du repos initial ($\dot{\bar{e}}(\bar{t} = 0) = 0$)⁽⁵⁾:

$$I = E_1 \bar{e}(\bar{t}) + \mu \dot{\bar{e}}(\bar{t}) - \int_0^{\bar{t}} \ddot{\bar{e}}(\bar{t} - \tau) \left(\int_{\tau}^{\infty} (G_1(\xi) - E_1) d\xi \right) d\tau.$$

Après avoir également transformé le terme non linéaire, l'équation (2.1) s'écrit:

$$(2.4) \quad \bar{\sigma}(\bar{x}, \bar{t}) = E_1 \bar{e}(\bar{t}) + \frac{1}{2} E_2 \bar{e}^2(\bar{t}) + \mu \dot{\bar{e}}(\bar{t}) - \int_0^{\bar{t}} \ddot{\bar{e}}(\bar{t} - \tau) \left(\int_{\tau}^{\infty} (G_1(\xi) - E_1) d\xi \right) d\tau \\ + \frac{1}{2} \int_0^{\bar{t}} \int_0^{\bar{t}} \ddot{\bar{e}}(\bar{t} - \tau_1) \dot{\bar{e}}(\bar{t} - \tau_2) (G_2(\tau_1, \tau_2) - E_2) d\tau_1 d\tau_2.$$

Posons:

$$(2.5) \quad \Omega = \left(\frac{E_1}{\rho_0} \right)^{1/2}, \quad \eta = \sup_{\bar{t}} \frac{|F(\bar{t})|}{E_1}$$

⁽⁴⁾ Précisément si l'on convient de désigner par \bar{x} et \tilde{x} la position d'une particule respectivement à l'instant initial et à l'instant t , on a: $\bar{u} = \tilde{x} - \bar{x}$.

⁽⁵⁾ Le point „ $\dot{\cdot}$ ” désigne la dérivation par rapport à \bar{t} ici, par rapport à t dans la suite.

où Ω désigne la vitesse différée du son, et η un paramètre sans dimension supposé petit ($\eta \ll 1$).

Et faisons les changements de variable et de fonction:

$$(2.6) \quad \bar{x} = \bar{X} x, \quad \bar{t} = \frac{\bar{X}}{\Omega} t, \quad \bar{u} = \eta \bar{X} u,$$

$$\eta \frac{\partial u}{\partial x} = \eta e, \quad \bar{\sigma} = \eta E_1 \sigma, \quad \bar{e} = \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}}$$

où \bar{X} désigne une échelle de longueur, paramètre qui comme η aura un rôle majeur à jouer dans la construction des processus de perturbation à venir. Nous utiliserons aussi la notation $\bar{T} = \frac{\bar{X}}{\Omega}$ qui désigne l'échelle de temps associée à \bar{X} .

L'équation qui gouverne la propagation de l'onde s'obtient en combinant l'équation du mouvement:

$$(2.7) \quad \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \bar{x}} = \rho_0 \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{t}^2} \quad (\rho_0 \text{ densité dans l'état initial})$$

avec (2.4) et (2.6):

$$(2.8) \quad \frac{\partial e}{\partial x} + \frac{\mu \Omega}{E_1 \bar{X}} \frac{\partial^2 e}{\partial t \partial x} + \eta \frac{E_2}{E_1} e \frac{\partial e}{\partial x} - \frac{\Omega}{\bar{X}} \int_0^t \frac{\partial \bar{e}}{\partial x} (t-v) \left(\int_{\frac{\bar{X}v}{a}}^{\infty} \frac{G_1(\xi) - E_1}{E_1} d\xi \right) dv$$

$$+ \eta \int_0^t \int_0^t \frac{\partial \bar{e}}{\partial x} (t-u_1) \bar{e}(t-u_2) \frac{\left(G_2 \left(u_1 \frac{\bar{X}}{\Omega}, u_2 \frac{\bar{X}}{\Omega} \right) - E_2 \right)}{E_1} du_1 du_2 = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}.$$

La condition à la limite (2.2) s'écrit quant à elle:

$$(2.9) \quad \sigma(x=0, t) = \frac{F(\bar{T}t)}{\eta E_1} \stackrel{\text{def}}{=} f(t), \quad (|f(t)| \leq 1, \quad f(t) = 0 \quad \text{pour } t < 0).$$

Dans toute la suite nous utiliserons, sans les rappeler les conditions de repos initial:

$$(2.10) \quad e(x, 0) = \frac{\partial e}{\partial t}(x, 0) = 0.$$

Pour étudier les phénomènes se produisant loin du bord, on peut remarquer qu'à x fixé on s'éloigne de celui-ci quand \bar{X} augmente ($\bar{x} = \bar{X}x$). Par conséquent il est naturel d'employer des processus asymptotiques dans lesquels l'échelle de longueur \bar{X} tend vers l'infini. En pratique il suffit de supposer \bar{X} suffisamment grand — le sens de ce mot étant à préciser ultérieurement — de sorte que par exemple le terme $\mu\Omega/E_1\bar{X}$ puisse être considéré comme petit. Compte tenu également du fait que η est petit certains termes de l'équation (2.8) pourront être négligés. Ces simplifications doivent se faire avec discernement car, et c'est la difficulté du problème, un terme apparemment petit n'est pas forcément

négligeable partout, c'est-à-dire à tout instant et tout endroit. Nous utilisons dans la suite deux méthodes l'une s'appuyant sur les développements asymptotiques raccordés l'autre sur les échelles multiples.

2.2. Développements asymptotiques raccordés

Une première idée venant à l'esprit lorsqu'on examine l'équation (2.8) est d'imaginer que les termes en η sont négligeables, c'est-à-dire de linéariser cette équation en posant $\eta = 0$:

$$(2.11) \quad \frac{\partial e}{\partial x} + \frac{\mu\Omega}{E_1\bar{X}} \frac{\partial e^2}{\partial t \partial x} - \frac{\Omega}{\bar{X}} \int_0^t \frac{\partial \ddot{e}}{\partial x} (t-v) \left(\int_{\frac{\bar{X}v}{\Omega}}^{\infty} \frac{G_1(\xi) - E_1}{E_1} d\xi \right) dv = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}.$$

En fait il est bien connu que la solution approchée donnée par (2.11) ne peut être valable que pour des temps suffisamment faibles, car les termes non linéaires, même petits, prennent par un effet cumulatif de l'importance aux grands temps.

Résolvons néanmoins le problème linéaire afin de dégager d'une part son domaine de validité et de bien préciser d'autre part l'esprit de la méthode qui reste constant par delà le cas particulier.

2.2.1. Problème linéaire. En général la fonction $G_1(\xi) - E_1$ décroît exponentiellement à l'infini par conséquent nous admettrons que

$$\lim_{\bar{X} \rightarrow \infty} \int_0^t \frac{\partial^2 \ddot{e}}{\partial x^2} (t-v) \left(\int_{\frac{\bar{X}v}{\Omega}}^{\infty} \frac{G_1(\xi) - E_1}{E_1} d\xi \right) dv = 0.$$

Posons:

$$(2.12) \quad \varepsilon = \frac{\mu\Omega}{E_1\bar{X}}$$

paramètre qui tend vers zéro quand $\bar{X} \rightarrow \infty$.

Après une dérivation par rapport à x , (2.11) s'écrit:

$$(2.13) \quad \frac{\partial^2 e}{\partial x^2} + \varepsilon \frac{\partial^3 e}{\partial t \partial x^2} + \varepsilon o(\varepsilon) = \frac{\partial^2 e}{\partial t^2}$$

équation dont on cherche une solution approchée au premier ordre.

La condition à la limite (2.9) s'écrit, compte tenu de (2.4):

$$(2.14) \quad \sigma(x=0, t) = \left(e + \varepsilon \frac{\partial e}{\partial t} + \varepsilon o(\varepsilon) \right) \Big|_{x=0} = f(t).$$

Calculons d'abord, à l'aide d'un processus de perturbation directe, le développement extérieur:

$$(2.15) \quad e^{(\varepsilon)} = \sum_{n \geq 0} \varepsilon^n e_n^{(\varepsilon)}(x, t).$$

Par substitution dans (2.13) et (2.14), on trouve au premier ordre, en faisant tendre ε vers 0 à x et t fixés:

$$(2.16) \quad \frac{\partial^2 e_0^{(\varepsilon)}}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 e_0^{(\varepsilon)}}{\partial x^2} = 0, \quad e_0^{(\varepsilon)}(x=0, t) = f(t),$$

soit:

$$(2.17) \quad e_0^{(\varepsilon)}(x, t) = f(t-x).$$

Cette solution approchée ne peut tenir compte de la réalité physique du problème car elle propage un signal sans l'atténuer, c'est à dire sans faire jouer la viscosité du matériau.

Pour pallier cela on introduit des variables et un développement dits intérieurs, et définis comme suit:

$$(2.18) \quad \xi = t-x, \quad x_1 = \varepsilon x;$$

$$(2.19) \quad e^{(i)} = \sum_{n \geq 0} \varepsilon^n e_n^{(i)}(\xi, x_1).$$

L'équation (2.13) s'exprime avec ces variables par:

$$(2.20) \quad \left(\varepsilon \frac{\partial}{\partial x_1} - \frac{\partial}{\partial \xi} \right)^2 e + \varepsilon \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\varepsilon \frac{\partial}{\partial x_1} - \frac{\partial}{\partial \xi} \right)^2 e + \varepsilon o(\varepsilon) = \frac{\partial^2 e}{\partial \xi^2}.$$

La substitution de (2.19) donne au premier ordre, lorsqu'on fait tendre ε vers 0 à ξ et x_1 fixés:

$$\frac{\partial^2 e_0^{(i)}}{\partial \xi^2} = \frac{\partial^2 e_0^{(i)}}{\partial \xi^2}$$

puis à l'ordre suivant:

$$(2.21) \quad \frac{\partial e_0^{(i)}}{\partial x_1} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 e_0^{(i)}}{\partial \xi^2} = 0.$$

Les conditions qui permettent de résoudre cette équation s'obtiennent en "raccordant" $e_0^{(\varepsilon)}$ et $e_0^{(i)}$ par un processus dans lequel interviennent les variables intermédiaires:

$$\bar{\xi} = \xi, \quad \bar{x} = \varphi(\varepsilon)x, \quad (\varepsilon \ll \varphi(\varepsilon) \ll 1).$$

On écrit que, à $\bar{\xi}$ et \bar{x} fixés:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} e_0^{(\varepsilon)} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} e_0^{(i)}$$

et l'on obtient:

$$(2.22) \quad e_0^{(i)}(\xi, x_1=0) = f(\xi).$$

La solution composite au premier ordre e_0 obtenue en retranchant à la somme $e_0^{(\varepsilon)} + e_0^{(i)}$ la limite intermédiaire $f(\xi)$, s'identifie à $e_0^{(i)}$ et s'obtient en résolvant (2.21), (2.22):

$$(2.23) \quad e_0(x, t) = \frac{1}{\sqrt{\frac{2\pi\mu x}{E_1 T}}} \int_0^\infty f(v) \exp\left(-\frac{(t-x-v)^2}{\frac{2\mu x}{E_1 T}}\right) dv.$$

Cette solution approchée semble paradoxale puisqu'à un instant donné t elle fait dépendre e_0 de toutes les valeurs de $f(v) = \sigma(x=0, v)$ y compris des valeurs futures

($v > t$). En fait nous verrons que ces dernières n'influencent pas la solution (2.23) dans son domaine de validité, et que, du même coup la condition de repos initial est vérifiée dans celui-ci.

Et d'abord définissons, au moins approximativement, dans le quart de plan $\bar{x} \geq 0$, $\bar{t} \geq 0$, un domaine de validité $\bar{\mathcal{D}}$ sur lequel la solution approchée (2.23) est une bonne approximation de la solution exacte.

Pour cela on examine de quelle façon le terme intégral J de (2.11) tend vers zéro quand \bar{X} tend vers l'infini.

On définit à partir de G_1 un temps de relaxation moyen T_m :

$$\mu T_m \stackrel{\text{d\u00e9f}}{=} \int_0^{\infty} \xi (G_1(\xi) - E_1) d\xi$$

où le deuxième membre représente le moment d'ordre 1 de G_1 .

En effectuant une intégration par partie on peut exprimer le terme intégral J sous la forme:

$$J = - \frac{\mu T_m \Omega^2}{E_1 \bar{X}^2} \frac{\partial \ddot{e}}{\partial x} - R$$

avec

$$R = \frac{\Omega^2}{\bar{X}^2} \int_0^t \frac{\partial e}{\partial x} (t-v) \left[\int_{\frac{\bar{x}v}{\bar{\alpha}}}^{\infty} \left(\frac{\bar{X}v}{\Omega} - \xi \right) \left(\frac{G_1(\xi) - E_1}{E_1} \right) d\xi \right] dv.$$

L'équation (2.11) s'écrit alors:

$$\frac{\partial e}{\partial x} + \varepsilon \frac{\partial^2 e}{\partial t \partial x} - \varepsilon \frac{T_m \Omega}{\bar{X}} \frac{\partial^3 e}{\partial t^2 \partial x} - R = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}.$$

Par conséquent, pour valider les approximations faites, on peut estimer que \bar{X} doit satisfaire la condition heuristique:

$$(2.24) \quad \bar{X} \gg X_s = \text{Sup} \left(\frac{\mu \Omega}{E_1}, T_m \Omega \right)$$

et l'on supposera que les domaines donnés en (2.25) et (2.26), respectivement par rapport aux variables physiques et réduites, sont des domaines de validité de la solution (2.23) ⁽⁶⁾

$$(2.25) \quad \begin{aligned} \bar{\mathcal{D}} &= \{(\bar{x}, \bar{t}) \text{ tel que } \bar{x} \geq \bar{L}\}, \\ \mathcal{D} &= \{(x, t) \text{ tel que } x \geq L\}. \end{aligned}$$

On admettra également que les bornes L et $\bar{L} = \bar{X}L$ de \mathcal{D} et $\bar{\mathcal{D}}$ vérifient les conditions (2.27) et (2.28) déduites de (2.24) de façon heuristique:

$$(2.27) \quad \bar{L} \gg X_s,$$

$$(2.28) \quad L \gg \text{Sup} \left(\varepsilon, \frac{T_m \Omega}{\bar{X}} \right).$$

⁽⁶⁾ La solution (2.23) est valable pour $x \geq L$, pour $x = 0$, mais pas pour les x compris entre 0 et L .

D'autre part il est bien connu en théorie linéaire qu'une discontinuité $[f]$ de la sollicitation au bord f se propage à la *vitesse instantanée* du son tout en s'atténuant avec un facteur d'amortissement exponentiel

$$\exp\left(-\frac{\bar{x}}{2T_r\Omega_i}\right),$$

où:

$$(2.29) \quad T_r = -\frac{G_1(0)}{\dot{G}_1(0)},$$

$$(2.30) \quad \Omega_i = \sqrt{\frac{G_1(0)}{\rho_0}}$$

désignent un temps instantané de relaxation du matériau, et la vitesse instantanée du son. Or l'équation (2.23) montre que dans \mathcal{D} un signal se propage à la *vitesse différée* du son tout en diffusant. Par conséquent, pour une raison de compatibilité, toute discontinuité de f doit être devenue négligeable dans \mathcal{D} , ce qui conduit à admettre que

$$\bar{L} \geq 0 (T_r\Omega_i).$$

Montrons maintenant que les valeurs futures de f n'influencent pas e_0 dans son domaine de validité.

Précisément si l'on pose:

$$R = \frac{1}{\sqrt{2\pi\epsilon x}} \int_t^\infty f(v) \exp\left(-\frac{(t-x-v)^2}{2\epsilon x}\right) dv$$

on prouve que:

$$(2.31) \quad \forall \mathcal{X} > 0, \exists a > 0$$

tel que $x \geq a$ implique $|R| \leq \mathcal{X}$ uniformément par rapport à t . (a est indépendant de t).

En utilisant $|f(t)| \leq 1$, cf. (2.9), on a:

$$(2.32) \quad |R| \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi\epsilon x}} \int_t^\infty \exp\left(-\frac{(t-x-v)^2}{2\epsilon x}\right) dv = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \sqrt{\frac{x}{2\epsilon}}$$

d'où (2.31).

En pratique d'après (2.32) R est négligeable dès que $x \geq 0(\epsilon)$ et suite à (2.28) les valeurs futures de f ne perturbent pas la solution approchée e_0 dans son domaine de validité \mathcal{D} .

Ainsi peut-on remplacer dans la formule (2.23) le signe \int_0^∞ par \int_0^t :

$$(2.33) \quad e_0(x, t) = \frac{1}{\sqrt{\frac{2\pi\mu x}{E_1 \bar{T}}}} \int_0^t f(v) \exp\left(-\frac{(t-x-v)^2}{\frac{2\mu x}{E_1 \bar{T}}}\right) dv.$$

Mise sous cette forme la formule (2.23) est identique à celle obtenue à partir d'une méthode de point selle appliquée à la transformée de Laplace de la solution.

(Voir CHU [12] dans le cas particulier où f est un échelon unité). Cette méthode assez complexe ne peut de toute façon pas se généraliser au problème non linéaire.

REMARQUE 1

Un choix de variables intérieures symétriques en quelque sorte des précédentes:

$$(2.34) \quad \xi = t - x, \quad t_1 = \varepsilon t$$

aurait conduit aux résultats

$$(2.35) \quad \frac{\partial e_0^{(1)}}{\partial t_1} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 e_0^{(1)}}{\partial \xi^2} = 0,$$

$$(2.36) \quad e_0(t, x) = \frac{1}{\sqrt{\frac{2\pi\mu t}{E_1 \bar{T}}}} \int_0^\infty f(v) \exp\left(-\frac{(t-x-v)^2}{\frac{2\mu t}{E_1 \bar{T}}}\right) dv.$$

En fait s'agissant d'un problème où l'on se donne une condition à la limite en $x = 0$, le premier choix de variable est meilleur car c'est avec l'éloignement du bord que se manifestent les effets dissipatifs.

REMARQUE 2

Examinons le cas particulier où

$$f(t) = H(t) \quad (\text{fonction échelon unité de Heaviside}).$$

Les équations (2.23), (2.33) et (2.36) fournissent successivement:

$$(2.37) \quad e_{(1)}(x, t) = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \frac{x-t}{\sqrt{2\varepsilon x}},$$

$$(2.38) \quad e_{(2)}(x, t) = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \frac{x-t}{\sqrt{2\varepsilon x}} - \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \sqrt{\frac{x}{2\varepsilon}},$$

$$(2.39) \quad e_{(3)}(x, t) = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \frac{x-t}{\sqrt{2\varepsilon t}}.$$

Ces solutions approchées sont différentes à certains égards, mais on peut montrer qu'elles coïncident toutes sur un domaine tel que \mathcal{D} défini en (2.26) et (2.28).

On peut constater sur le cas particulier de la Remarque 2 qu'au voisinage du front $x = t$:

$$\frac{\partial e_{(1)}}{\partial x} = 0(x^{-1/2}),$$

$$\frac{\partial^2 e_{(1)}}{\partial t \partial x} = 0(x^{-3/2}),$$

$$\frac{\partial^2 u_{(1)}}{\partial t^2} = 0(x^{-\frac{1}{2}}).$$

De sorte que dans la formule (2.8) il n'y a plus de raison de négliger le terme $A = \eta e_{(1)} \frac{\partial e_{(1)}}{\partial x} = 0(\eta x^{-1/2})$ relativement à $B = \frac{\mu \Omega}{E_1 \bar{X}} \frac{\partial^2 e_{(1)}}{\partial t \partial x} = 0(\varepsilon x^{-3/2})$ dès lors que $x = 0\left(\frac{\varepsilon}{\eta}\right)$. La solution linéaire échoue si l'on s'éloigne suffisamment du bord.

2.2.2. Problème non linéaire. Dans le problème non linéaire interviennent deux petits paramètres η et ε . Si l'on fait tendre l'un vers 0, par exemple η , il faudra, pour que les expressions A et B dont on vient de parler soient de même ordre, prendre $\bar{X} = 0 \left(\frac{1}{\eta} \right)$. En somme plus la non-linéarité est faible ($\eta \rightarrow 0$), plus loin du bord se produiront ses effets et l'échelle de longueur adéquate pour "accompagner" ceux-ci est:

$$\bar{X} = \bar{X}^*/\eta = 0 \left(\frac{1}{\eta} \right).$$

Nous posons par conséquent pour $\eta \neq 0$:⁽⁷⁾

$$(2.40) \quad \varepsilon = \frac{\mu\Omega}{E_1 \bar{X}^*} \eta \quad \text{de sorte que } \frac{\varepsilon}{\eta} = 0(1) \text{ quand } \eta \rightarrow 0$$

$$(2.41) \quad \xi = t - x, \quad x_1 = \eta x.$$

Alors, compte tenu de

$$\frac{\partial}{\partial x} = -\frac{\partial}{\partial \xi} + \eta \frac{\partial}{\partial x_1}, \quad \frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \xi}$$

l'équation (2.8) s'écrit après une dérivation par rapport à x :

$$(2.42) \quad \left(\frac{\partial}{\partial \xi} - \eta \frac{\partial}{\partial x_1} \right)^2 e + \eta \left(\frac{\varepsilon}{\eta} \right) \cdot \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\partial}{\partial \xi} - \eta \frac{\partial}{\partial x_1} \right)^2 e + \eta \frac{E_2}{E_1} \left(\frac{\partial}{\partial \xi} - \eta \frac{\partial}{\partial x_1} \right) \left[e \left(\frac{\partial}{\partial \xi} - \eta \frac{\partial}{\partial x_1} \right) e \right] + \eta o(\eta) = \frac{\partial^2 e}{\partial \xi^2}.$$

Cherchons un développement intérieur sous la forme:

$$(2.43) \quad e^{(i)} = \sum_{n \geq 0} \eta^n e_n^{(i)}(\xi, x_1).$$

La substitution dans (2.42) donne en identifiant les coefficients de η :

$$\frac{\partial^2 e_0^{(i)}}{\partial \xi^2} = \frac{\partial^2 e_0^{(i)}}{\partial \xi^2}$$

puis:

$$(2.44) \quad \frac{\partial e_0^{(i)}}{\partial x_1} - \frac{E_2}{2E_1} e_0^{(i)} \frac{\partial e_0^{(i)}}{\partial \xi} = \frac{\varepsilon}{2\eta} \frac{\partial^2 e_0^{(i)}}{\partial \xi^2}.$$

C'est une équation de Burgers, équation qui intervient classiquement lorsqu'on étudie les ondes dans des milieux dissipatifs. Celle-ci fait à la fois jouer une nonlinéarité dans le

⁽⁷⁾ Cette condition autorise la nullité de ε , sans pour autant que η soit nul ($\mu = 0$).

⁽⁸⁾ En s'appuyant sur le fait qu'en général la fonction $G_2(t_1, t_2)$ tend exponentiellement vers E_2 quand $(t_1, t_2) \rightarrow (\infty, \infty)$, nous admettons pour trouver la formule (2.42) que:

$$\lim_{\bar{X} \rightarrow \infty} \int_0^t \int_0^t \frac{\partial \hat{e}}{\partial x} (t-u_1) \hat{e}(t-u_2) \frac{G_2(u_1 \left(\frac{\bar{X}}{\Omega}, u_2 \frac{\bar{X}}{\Omega} \right) - E_2}{E_1} du_1 du_2 = 0.$$

premier membre et une dissipation dans le second. D'ailleurs en annulant la viscosité ($\varepsilon = 0$) on obtient une équation d'onde non linéaire, la plus simple qu'on puisse imaginer; alors qu'en annulant la non linéarité ($E_2 = 0$) on obtient simplement l'équation de la chaleur. Grâce à la transformation de Cole-Hopf, on sait résoudre explicitement l'équation (2.44), d'où son importance théorique considérable.

Le résultat (2.44) a été obtenu par BLAKE [10] dans le cas d'un matériau dont le comportement est décrit à l'aide de paramètres cachés et par BLAND [11] en prenant une loi de comportement du type:

$$(2.45) \quad \sigma = E_1 e + E_2 e^2 + \mu \dot{e}.$$

L'étude faite sur la loi de comportement de type intégral montre que le modèle (2.45) choisi par BLAND présente le degré de généralité suffisant pour décrire au premier ordre les phénomènes se produisant loin du bord. Les coefficients figurant dans (2.45) sont dans ce cas donnés par (2.3).

Pour déterminer la condition à la limite qui permet le calcul de $e_0^{(i)}$ il convient d'utiliser un processus de raccordement avec la solution extérieure définie par un développement du type:

$$(2.46) \quad e^{(e)}(x, t) = \sum_{n \geq 0} \eta^n e_n^{(e)}(x, t).$$

Rappelons qu'au premier ordre la condition à la limite (2.9) s'écrit:

$$(2.47) \quad e_0^{(e)}(0, t) = f(t)$$

si bien que:

$$(2.48) \quad e_0^{(e)}(x, t) = f(t-x).$$

En prenant comme variables intermédiaires:

$$(2.49) \quad \begin{aligned} \bar{\xi} &= \xi = t-x, \\ \bar{x} &= \varphi(\eta)x, \quad (\eta \ll \varphi(\eta) \ll 1) \end{aligned}$$

on obtient la condition de raccordement:

$$(2.50) \quad e_0^{(i)}(\xi, \bar{x}_1 = 0) = f(\xi).$$

Là aussi la solution composite e_0 est confondue avec $e_0^{(i)}$.

REMARQUE 1

La formule (2.40) indique qu'il est équivalent d'utiliser un processus dans lequel $\varepsilon \rightarrow 0$. On pose alors:

$$(2.51) \quad x_1 = \varepsilon x, \quad \eta = \varepsilon \left(\frac{\eta}{\varepsilon} \right) \quad \text{avec} \quad \frac{\eta}{\varepsilon} = 0(1) \quad \text{quand} \quad \varepsilon \rightarrow 0$$

et l'on obtient à la place de (2.44):

$$(2.52) \quad \frac{\partial e_0^{(i)}}{\partial x_1} - \frac{E_2}{2E_1} \frac{\eta}{\varepsilon} e_0^{(i)} \frac{\partial e_0^{(i)}}{\partial \xi} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 e_0^{(i)}}{\partial \xi^2}.$$

On remarque que l'on passe de (2.44) à (2.52) par une simple multiplication en $\frac{\eta}{\varepsilon}$.

Si l'on pose $\eta = 0$ dans (2.52) on retrouve la formule (2.21). Cela montre que la solution de (2.52) (ou de 2.44) contient celle du paragraphe précédent. Précisément elles

sont confondues pas trop loin du bord puis divergent pour $x \geq 0 \left(\frac{\varepsilon}{\eta} \right)$, lorsque les effets cumulés de la nonlinéarité interviennent et ne sont pas suffisamment étouffés par la viscosité.

Le processus du paragraphe 1.2.1 donnait une solution moins satisfaisante car il supposait $\eta = 0$ alors qu'en fait il convient, pour bien d'écrire le phénomène, de prendre η proportionnel à ε .

REMARQUE 2

En posant:

$$(2.53) \quad \xi = t - x, \quad t_1 = \eta t$$

nous aboutissons à:

$$(2.54) \quad \frac{\partial e_0^{(i)}}{\partial t_1} - \frac{E_2}{2E_1} e_0^{(i)} \frac{\partial e_0^{(i)}}{\partial \xi} = \frac{1}{2} \frac{\varepsilon}{\eta} \frac{\partial^2 e_0^{(i)}}{\partial \xi^2}.$$

REMARQUE 3

Comme précédemment, on peut définir approximativement un domaine de validité \mathcal{D} de la solution de l'équation (2.44):

$$(2.55) \quad \bar{\mathcal{D}} = \{(\bar{x}, \bar{t}) \text{ tel que } \bar{x} \geq \bar{L}\}$$

avec \bar{L} vérifiant les conditions heuristiques:

$$(2.56) \quad \begin{aligned} \bar{L} &\geq \sup \left(\frac{\mu}{E_1} \Omega, T_m \Omega \right), \\ \bar{L} &\geq 0(\Omega_i T_n), \\ \bar{L}^2 &\geq \frac{\Omega^2 \mu_2}{E_1} \end{aligned}$$

où μ_2 est une quantité ayant la dimension d'une contrainte par un temps au carré:

$$(2.57) \quad \mu_2 = \int_0^\infty \int_0^\infty (G_2(\tau_1, \tau_2) - E_2) d\tau_1 d\tau_2.$$

REMARQUE 4

La condition "initiale" (2.50) implique que la solution $e_0^{(i)}$ de (2.44) dépend à un instant donné t des valeurs futures de $f(\tau)$ ($\tau > t$). Cette dépendance est là aussi négligeable car elle n'influence pas la solution approchée dans le domaine de validité $\bar{\mathcal{D}}$.

2.3. Une méthode d'échelles multiples

On se propose ici de retrouver les résultats précédents en employant une méthode d'échelles multiples voir [8] et [13].

Construisons un processus de perturbation dans lequel $\eta \rightarrow 0$. Posons comme en (2.40):

$$(2.58) \quad \varepsilon = \eta \left(\frac{\varepsilon}{\eta} \right) \quad \text{avec} \quad \frac{\varepsilon}{\eta} = 0(1) \quad \text{quand} \quad \eta \rightarrow 0.$$

L'équation (2.8) s'écrit, après une dérivation en x :

$$(2.59) \quad \frac{\partial^2 e}{\partial x^2} + \eta \left(\frac{\varepsilon}{\eta} \right) \frac{\partial^3 e}{\partial t \partial x^2} + \eta \frac{E_2}{E_1} \frac{\partial}{\partial x} \left(e \frac{\partial e}{\partial x} \right) + \eta 0(\eta) = \frac{\partial^2 e}{\partial t^2}.$$

Introduisons les variables multiples:

$$(2.60) \quad \underline{x}_i = \eta^i x \quad (i \geq 0)$$

et cherchons une solution de (2.59) sous la forme:

$$(2.61) \quad e(x, t, \eta, \varepsilon) = \sum_{i \geq 0} \eta^i e_i \left(t, \underline{x}_0, \underline{x}_1, \dots, \frac{\varepsilon}{\eta} \right).$$

On obtient après une substitution dans (2.59) et l'identification des coefficients de η^0, η^1 :

$$(2.62) \quad \frac{\partial^2 e_0}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 e_0}{\partial \underline{x}_0^2} = 0,$$

$$(2.63) \quad \frac{\partial^2 e_1}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 e_1}{\partial \underline{x}_0^2} = 2 \frac{\partial^2 e_0}{\partial \underline{x}_0 \partial \underline{x}_1} + \frac{\varepsilon}{\eta} \frac{\partial^3 e_0}{\partial t \partial \underline{x}_0^2} + \frac{E_2}{E_1} \frac{\partial}{\partial \underline{x}_0} \left(e_0 \frac{\partial e_0}{\partial \underline{x}_0} \right).$$

La condition à la limite (2.9) s'écrit:

$$(2.64) \quad f(t) = \sigma(x=0, t) = e(x=0, t) + 0(\eta) = e_0 \left(t, \underline{x}_0 = 0, \underline{x}_1 = 0, \dots, \frac{\varepsilon}{\eta} \right) + 0(\eta)$$

et donne au premier ordre:

$$(2.65) \quad e_0(t, \underline{x}_0 = 0, \underline{x}_1 = 0, \dots) = f(t).$$

L'équation (2.62) montre que e_0 est de la forme:

$$(2.66) \quad e_0(t, \underline{x}_0, \underline{x}_1) = e_0(\xi, \underline{x}_1) \quad \text{avec} \quad \xi = t - \underline{x}_0.$$

Pour éviter l'apparition de termes séculaires dans la résolution de (2.63), on pose que le deuxième membre est nul, d'où:

$$(2.67) \quad \frac{\partial e_0}{\partial \underline{x}_1} + \frac{E_2}{2E_1} e_0 \frac{\partial e_0}{\partial \underline{x}_0} = - \frac{\varepsilon}{2\eta} \frac{\partial^2 e_0}{\partial t \partial \underline{x}_0}$$

soit aussi, compte tenu de (2.66) et (2.65)

$$(2.68) \quad \frac{\partial e_0}{\partial \underline{x}_1} - \frac{E_2}{2E_1} e_0 \frac{\partial e_0}{\partial \xi} = \frac{\varepsilon}{2\eta} \frac{\partial^2 e_0}{\partial \xi^2},$$

$$(2.69) \quad e_0(\xi = t, \underline{x}_1 = 0) = f(t).$$

Ces équations sont identiques à (2.44) et (2.50).

Naturellement si l'on prend comme variables multiples:

$$\underline{x}_i = \varepsilon^i x$$

et si l'on pose:

$$\eta = \varepsilon \left(\frac{\eta}{\varepsilon} \right)$$

on obtient l'équation (2.52).

3. Etude asymptotique près du front

Le front d'onde sépare la zone perturbée de la zone de repos et il se déplace à la vitesse instantanée du son Ω_i , voir (2.30), s'il ne contient pas de choc; à une vitesse un peu supérieure à Ω_i dans le cas d'un choc faible. Les propriétés de l'onde au voisinage de ce front sont assez bien connues aussi se contente-t-on d'une étude rapide.

De nombreux travaux ont montré que l'évolution du front est gouvernée par la réponse instantanée du matériau, évolution que l'on peut d'ailleurs déterminer de manière exacte et explicite. Dans un voisinage du front il est logique de penser que seules les "composantes instantanées" de la loi de comportement générale (2.1) auront un rôle à jouer. Nous écrivons, dans le paragraphe 3.1, cette dernière sous une forme mettant en valeur ces "composantes instantanées". Cette forme a déjà été utilisée par HUANG et LEE [15] et LUBLINER [14]. Elle donne la réponse du matériau de manière exacte au front et de façon approchée dans son voisinage.

Puis § 3.2 nous décrivons l'onde près du front en construisant un processus asymptotique dans lequel le paramètre perturbateur est l'éloignement par rapport au front de la théorie linéaire, éloignement que nous faisons tendre vers zéro (alors que précédemment c'était l'éloignement par rapport à l'origine que nous faisons tendre vers l'infini).

3.1. Expressions de la loi de comportement et de l'équation du mouvement adaptées à l'étude près du front

En intégrant par parties le terme $I = \int_0^{\bar{t}} G_1(\bar{t} - \tau) \frac{\partial \bar{e}}{\partial \tau}(\tau) d\tau$ qui figure dans la loi de

comportement (2.1), on obtient, compte tenu du repos initial:

$$I = \hat{E}_1 \bar{e}(t) + \int_0^{\bar{t}} \dot{G}_1(\bar{t} - \tau) \bar{e}(\tau) d\tau$$

avec

$$(3.1) \quad \hat{E}_1 = G_1(0).$$

En réitérant le procédé sur le terme $\int_0^{\bar{t}} \dot{G}_1(\bar{t} - \tau) \bar{e}(\tau) d\tau$ ainsi que sur le terme non linéaire

de (2.1), on obtient finalement:

$$(3.2) \quad \bar{\sigma}(\bar{t}, \bar{x}) = \hat{E}_1 \bar{e}(\bar{t}) + \frac{1}{2} \hat{E}_2 \bar{e}^2 + \dot{G}_1(0) \int_0^{\bar{t}} \bar{e}(u) du + \int_0^{\bar{t}} \ddot{G}_1(\bar{t} - \tau) \left(\int_0^{\tau} \bar{e}(u) du \right) d\tau \\ + \bar{e}(\bar{t}) \int_0^{\bar{t}} \frac{\partial G_2}{\partial \bar{t}}(\bar{t} - \tau, 0) \bar{e}(\tau) d\tau + \frac{1}{2} \int_0^{\bar{t}} \int_0^{\bar{t}} \frac{\partial^2 G_2}{\partial \tau_1 \partial \tau_2}(\bar{t} - \tau_1, \bar{t} - \tau_2) \bar{e}(\tau_1) \bar{e}(\tau_2) d\tau_1 d\tau_2$$

avec

$$(3.3) \quad \hat{E}_2 = G_2(0, 0).$$

Rappelons les définitions:

$$(3.4) \quad \Omega_i = \left(\frac{\hat{E}_1}{\rho_0} \right)^{1/2}$$

$$T_r = -\hat{E}_1 / \dot{G}_1(0)$$

de la vitesse instantanée du son, et d'un temps de relaxation "instantané" du matériau. Puis, après avoir posé:

$$(3.5) \quad \eta = \sup_{\bar{t}} \frac{|F(\bar{t})|}{\hat{E}_1}$$

opérons dans (3.2) les changements de variables et de fonctions suivants ⁽⁹⁾:

$$(3.6) \quad \bar{x} = \bar{X}x, \quad \bar{t} = \frac{\bar{X}}{\Omega_i} t,$$

$$\bar{u} = \eta \bar{X}u, \quad \bar{\sigma} = \eta \hat{E}_1 \sigma,$$

$$\bar{e} = \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} = \eta \frac{\partial u}{\partial x} = \eta e.$$

Cela donne:

$$(3.7) \quad \sigma = e + \frac{1}{2} \eta \frac{\hat{E}_2}{\hat{E}_1} e^2 - \varepsilon \int_0^t e(\tau) d\tau + O(\eta, \varepsilon)$$

où

$$(3.8) \quad \varepsilon = \frac{\bar{X}}{T_r \Omega_i}.$$

N o t a. Pour ne pas alourdir les notations, on utilise sans inconvénient majeur les lettres $x, t, \sigma, e, \eta, \varepsilon, f$ etc employées au paragraphe 2 dans un contexte un peu différent.

L'équation du mouvement (2.7) et la condition à la limite (2.2) prennent la forme, compte tenu de (3.6) et (3.7):

$$(3.9) \quad \frac{\partial^2 e}{\partial x^2} + \eta \frac{\hat{E}_2}{\hat{E}_1} \frac{\partial}{\partial x} \left(e \frac{\partial e}{\partial x} \right) - \varepsilon \int_0^t \frac{\partial^2 e}{\partial x^2}(\tau) d\tau + O(\eta, \varepsilon) = \frac{\partial^2 e}{\partial t^2},$$

$$\sigma(x=0, t) = \frac{F(\bar{T}t)}{\eta \hat{E}_1} \stackrel{\text{def}}{=} f(t).$$

3.2. Etude de l'onde par un processus asymptotique

$A(t-x)$ fixé, on s'approche du front d'onde de la théorie linéaire (i.e. $\Omega_i \bar{t} - \bar{x}$ tend vers zéro), si $\bar{X} \rightarrow 0$. Par suite nous utiliserons un processus asymptotique dans lequel \bar{X} — et donc ε — tend vers zéro.

⁽⁹⁾ On utilise aussi dans la suite la notation $\bar{T} = \frac{\bar{X}}{\Omega_i}$ pour désigner l'échelle de temps associée à \bar{X} .

On pose:

$$(3.10) \quad \begin{aligned} x_i &= \varepsilon^i x \quad (i \geq 0), \\ \eta &= \varepsilon \left(\frac{\eta}{\varepsilon} \right) \end{aligned}$$

et l'on suppose que

$$(3.11) \quad \left(\frac{\eta}{\varepsilon} \right) = 0(1) \quad \text{quand} \quad \varepsilon \rightarrow 0.$$

Après substitution du développement

$$(3.12) \quad e(t, x, \varepsilon, \eta) = \sum_{i \geq 0} \varepsilon^i e_i \left(t, x_0, x_1, \dots, \frac{\eta}{\varepsilon} \right)$$

dans l'équation (3.9)₁ et identification des coefficients de ε , il vient:

$$(3.13) \quad \frac{\partial^2 e_0}{\partial x_0^2} - \frac{\partial^2 e_0}{\partial t^2} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 e_1}{\partial x_0^2} - \frac{\partial^2 e_1}{\partial t^2} + 2 \frac{\partial^2 e_0}{\partial x_0 \partial x_1} + \frac{\hat{E}_2}{\hat{E}_1} \frac{\eta}{\varepsilon} \frac{\partial}{\partial x_0} \left(e_0 \frac{\partial e_0}{\partial x_0} \right) - \int_0^t \frac{\partial^2 e_0}{\partial x_0^2} (u) du = 0.$$

La méthode des échelles multiples, [13, 8] montre que e_0 est une fonction de la forme:

$$(3.14) \quad e_0(t, x_0, x_1) = e_0(\xi, x_1) \quad (\xi = t - x_0)$$

qui vérifie de plus l'équation:

$$(3.15) \quad \frac{\partial e_0}{\partial x_1} - \frac{1}{2} \frac{\hat{E}_2}{\hat{E}_1} \frac{\eta}{\varepsilon} e_0 \frac{\partial e_0}{\partial \xi} + \frac{1}{2} e_0 = 0.$$

D'après (3.7) et (3.12) la condition à la limite (3.9)₂ s'écrit au premier ordre:

$$(3.16) \quad e_0(t, x_0 = 0, x_1 = 0) = e_0(\xi = t, x_1 = 0) = f(t).$$

Il s'agit maintenant de résoudre l'équation (3.15) sous la condition (3.16). On effectue un changement de fonction inconnue:

$$(3.17) \quad e_0(\xi, x_1) = e^{-x_1/2} g(\xi, x_1).$$

La fonction g vérifie:

$$(3.18) \quad \frac{\partial g}{\partial x_1} - \alpha(x_1) g \frac{\partial g}{\partial \xi} = 0$$

où:

$$(3.19) \quad \alpha(x_1) = \frac{1}{2} \frac{\hat{E}_2}{\hat{E}_1} \frac{\eta}{\varepsilon} e^{-\frac{x_1}{2}}.$$

L'équation (3.18) est non linéaire mais d'un type simple. Ses caractéristiques sont solutions de l'équation:

$$(3.20) \quad \frac{d\xi}{dx_1} = -\alpha(x_1) g(\xi, x_1).$$

Appelons ζ_{ξ_0} celle qui vérifie:

$$(3.21) \quad \xi(x_1 = 0) = \xi_0.$$

D'après (3.18) et (3.20) g a une valeur constante sur ζ_{ξ_0} , qui est donnée par (3.16):

$$(3.22) \quad g(\xi, x_1) = f(\xi_0) \quad \text{sur} \quad \zeta_{\xi_0}.$$

On obtient alors l'équation de ζ_{ξ_0} en intégrant (3.20) avec la condition (3.21):

$$(3.23) \quad \xi(x_1) = \xi_0 - \frac{\hat{E}_2}{\hat{E}_1} \frac{\eta}{\varepsilon} f(\xi_0) \left(1 - e^{-\frac{x_1}{2}} \right).$$

Remarquons que ζ_{ξ_0} a pour asymptote la droite:

$$(3.24) \quad \xi = \text{const} = \xi_0 - \frac{\hat{E}_2}{\hat{E}_1} \frac{\eta}{\varepsilon} f(\xi_0).$$

Finalement la solution e_0 de (3.15) et (3.16) est donnée par:

$$(3.25) \quad e_0(\xi, x_1) = e^{-\frac{x_1}{2}} f(\xi_0)$$

où ξ_0 est déterminé implicitement en fonction de ξ et x_1 par (3.23).

Si plusieurs caractéristiques passent par un même point (ξ, x_1) il faut pour assurer l'unicité de la solution physique introduire la notion de choc, c'est à dire une discontinuité dans e_0 . Cela est une manifestation directe de la nonlinéarité.

Les effets de la dissipation apparaissent quant à eux dans le facteur d'amortissement exponentiel de la formule (3.25).

Définissons maintenant un domaine de validité de la solution approchée e_0 . Compte tenu de l'expression (3.8) de ε , on peut estimer que le processus de perturbation est validé dès lors que $\bar{X} \ll T_n \Omega_t$. Par suite nous admettrons que les domaines \bar{v} et v , définis respectivement en variables physiques et réduites par (3.26), sont des domaines de validité pour la solution approchée que l'on vient de calculer.

$$(3.26) \quad \begin{aligned} \bar{v} &= \{(\bar{x}, \bar{t}) \text{ tel que } |\Omega_t \bar{t} - \bar{x}| \leq \bar{1}\}, \\ v &= \{(x, t) \text{ tel que } |t - x| \leq 1\}, \\ &\text{avec } \bar{1} \ll T_n \Omega_t \text{ et } 1 \ll \frac{1}{\varepsilon}. \end{aligned}$$

REMARQUE

Signalons qu'avec cette méthode on peut retrouver, avec la solution à l'ordre un, tous les résultats ⁽¹⁰⁾ de VARLEY et ROGERS [1].

Ces résultats sont un prolongement de ceux de VARLEY et ROGERS dans le cas d'une excitation au bord de nature quelconque. Naturellement dans le cas de vibrations de hautes fréquences, le domaine de validité de la solution obtenue dans ce paragraphe est confondu avec le quart de plan ($\bar{x} \geq 0, \bar{t} \geq 0$). Cela tient à la périodicité de la sollicitation.

⁽¹⁰⁾ A l'exception des tracés des courbes d'hystérésis. Mais on peut tout de même calculer la dissipation.

Les méthodes employées sont différentes, puisque le paramètre de perturbation dans [1] est une fréquence ω que l'on fait tendre vers l'infini. De plus ces auteurs font leur étude avec les variables (α, x) où α est une variable caractéristique.

Conclusion

Nous avons calculé de façon approchée la solution du problème dans les domaines \bar{v} et $\bar{\mathcal{D}}$ qui concernent des points (\bar{x}, \bar{t}) situés respectivement près du front et loin du bord (voir la figure 1).

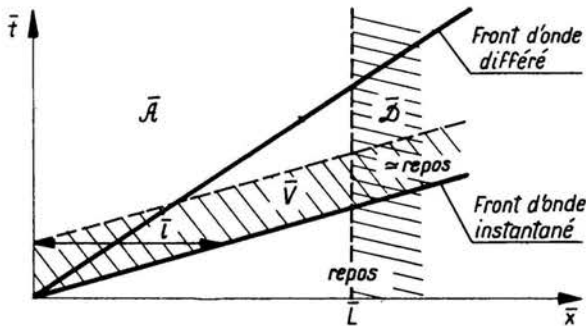


FIG. 1. Différents domaines d'intérêt dans la description de l'onde.

Dans le premier domaine, le matériau réagit par ses composantes instantanées. Dans le cadre des sollicitations de faible amplitude, objet de ce travail, un signal se propage à une vitesse peu différente de la célérité instantanée du son. Les nonlinéarités peuvent éventuellement provoquer des chocs, tandis que la dissipation se manifeste par un amortissement exponentiel de la perturbation.

Dans le second domaine c'est la réponse différée qui prédomine. Un signal se propage à une vitesse voisine de la célérité différée du son. Les effets combinés de la nonlinéarité et de la dissipation sont décrits par une équation de Burgers. On remarque que la dissipation se manifeste par un terme de diffusion dans cette équation.

Les deux solutions approchées sont compatibles dans la partie commune $\bar{v} \cap \bar{\mathcal{D}}$ où elles sont pratiquement nulles.

Nous ne décrivons pas ici la solution dans le domaine $\bar{\mathcal{A}}$ constitué des points (\bar{x}, \bar{t}) qui se trouvent derrière le front d'onde et à l'extérieur de \bar{v} et de $\bar{\mathcal{D}}$. Le matériau est alors sollicité à la fois de façon instantanée à cause de la proximité du bord et de façon différée parce que les temps sont grands et que le corps se souvient depuis l'instant initial de toutes les sollicitations imposées au bord.

On peut remarquer cependant qu'il est souvent possible de négliger les effets de non linéarité au voisinage immédiat du bord. Le problème est alors du type viscoélastique linéaire. Ce dernier cas a été très étudié; voir BRUN [16] qui en donne une solution exacte sous forme de série ainsi que des références.

Nous avons essayé de définir grossièrement les domaines de validité des solutions calculées. Cependant il est bien clair que les frontières de ceux-ci dépendent du problème particulier étudié, c'est à dire des conditions aux limite.

Ainsi pour une sollicitation périodique de fréquence suffisamment élevée, le domaine \bar{v} s'étend au quart plan tout entier. La solution est donc pratiquement nulle suffisamment loin du bord à cause de l'amortissement exponentiel. Il doit en être évidemment de même pour la solution approchée, disons S , calculée dans $\bar{\mathcal{D}}$. Imaginons, pour fixer les idées, que la sollicitation est sinusoïdale. On conçoit bien que les arches vont être nivelées par le terme de diffusion de l'équation de Burgers, si bien que, suffisamment loin du bord, S est nulle. La borne \bar{L} du domaine $\bar{\mathcal{D}}$ peut alors être précisée; c'est la limite en deça de laquelle S n'est pas sensiblement nulle.

Bibliographie

1. E. VARLEY et T. G. ROGERS, *The propagation of high frequency, finite acceleration pulses and shocks in viscoelastic materials*, Proc. Roy. Soc. London, A, **296**, 498—518, 1967.
2. B. R. SEYMOUR et E. VARLEY, *High frequency, periodic disturbances in dissipative systems. I. Small amplitude, finite rate theory*, Proc. Roy. Soc. London, A, **314**, 387—415, 1970.
3. P. GERMAIN, *Progressive waves*, Ludwig Prandtl Memorial Lecture, Mannheim, 16, April 1971.
4. G. A. NARIBOLI, W. C. LIN, *A new type of Burgers equation*, ZAMM, **53**, 505—510, 1973.
5. A. SEDOV, G. A. NARIBOLI, *Viscoelastic wave by the use of wave-front theory*, Int. J. Nonlinear Rech., **6**, 615—624, 1971.
6. J. P. MORAN et S. F. SHEN, *On the formation of weak plane shock waves by impulsive motion of a piston*, J. Fluid Mech., **25**, 705—718, 1966.
7. M. J. LIGHTHILL, *Viscosity effects in sound waves of finite amplitude*, Surveys in Mechanics, Cambridge Univ. Press, 250—351, 1965.
8. P. GERMAIN, *Méthodes asymptotiques en mécanique des fluides*, Ecole d'Eté de Physique Théorique, Gordon and Breach Publ., Les Houches, Juillet 1973.
9. A. F. JOHNSON, *Pulse propagation in heat-conducting elastic materials*, J. Mech. Phys. Solids, **23**, 55—75, 1975.
10. T. R. BLAKE, *Plane longitudinal waves of small amplitude in a nonlinear viscoelastic material*, Acta Mech., **17**, 211—226, 1973.
11. D. R. BLAND, *On shock structure in a solid*, J. Inst. Math. Applic., **1**, 56—75, 1965.
12. B. T. CHU, *Stress waves in isotropic linear viscoelastic material*, J. de Mécanique, **4**, 439—462, 1962.
13. S. C. CHIKWENDU et J. KEVORKIAN, *A perturbation method for hyperbolic equations with small nonlinearities*, SIAM, J. Appl. Math., **22**, 235—258, 1972.
14. J. LUBLINER, *Short-time approximations in nonlinear viscoelasticity*, Int. J. Sol. Struct., **3**, 513—520, 1967.
15. N. C. HUANG et E. H. LEE, *Nonlinear viscoelasticity for short time ranges*, J. Appl. Mech., **33**, 313—321, 1966.
16. L. BRUN, *L'onde simple viscoélastique linéaire*, J. de Mécanique, **13**, 449—498, 1974.

LABORATOIRE DE MÉCANIQUE, FACULTE DES SCIENCES
ILE DU SAULCY, METZ, FRANCE.

Received November 9, 1977.