J. THOMAE

BALTZER

I

70
71

1. Abriss einer Theorie der complexen Functionen und der Thetafunctionen einer Veränderlichen. von Dr J. Thomae
Erste Auflage 1870

2. Theorie und Anwendung der Determinanten von Dr. Richard Baltzer. Dritte Auflage
1870

Dr. Sue[illegible]
1806

THEORIE UND ANWENDUNG

DER

DETERMINANTEN

VON

Dr RICHARD BALTZER

PROFESSOR AN DER UNIVERSITÄT GIESSEN, MITGLIED DER K. SÄCHS. GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN ZU LEIPZIG

DRITTE VERBESSERTE AUFLAGE

LEIPZIG

VERLAG VON S. HIRZEL

1870.

$18\frac{21}{X}71$

Vorrede

zur ersten Auflage.

Das mächtige Instrument der Algebra und Analysis, welches unter dem Namen der Determinanten in Gebrauch gekommen ist, war aus den bis vor wenig Jahren vorhandenen Quellen nicht leicht kennen zu lernen. Die grossen Meister hatten jenes Hülfsmittel für die höheren Zwecke, denen ihr Genius diente, sich geschaffen und waren wenig gesonnen, ihren Bau durch Betrachtungen über Material und Werkzeug, von deren Tüchtigkeit sie tiefe Ueberzeugung hatten, aufzuhalten. Daher ist es mit den Determinanten wie wohl mit allen wichtigen Instrumenten der Mathematik ergangen, dass sie längere Zeit im Besitz von wenig Auserwählten blieben, bevor eine geordnete Theorie derselben den Nichtkennern das Verständniss und den Gebrauch zugänglicher machte. Die erste Idee, der Algebra durch Bildung combinatorischer Aggregate, die heute Determinanten genannt werden, zu Hülfe zu kommen, rührt, wie Dirichlet bemerkt hat, von Leibniz her. Ausser dem Briefe an L'Hospital 1693 April 28, worin Leibniz die Ueberzeugung von der Fruchtbarkeit seines Gedankens ausspricht, scheint aber nichts übrig zu sein, woraus sich schliessen liesse, dass Leibniz sich um weitere Früchte dieser Idee bemüht habe. Die zweite Erfindung der Determinanten durch Cramer 1750 blieb unverloren wegen der Dienste, die der Algebra daraus erwuchsen, theils durch Cramer selbst, theils nach einer Reihe von Jahren durch Bezout, Vandermonde, Laplace, Lagrange. Namentlich war es Vandermonde (sur l'élimination 1771), der einen Algorithmus der Determinanten zu begründen suchte, während LAGRANGE in der classischen Abhandlung sur les pyramides 1773 von den Determinanten dritten Grades bei Problemen der analytischen Geometrie bereits in grosser Ausdehnung Gebrauch machte. Den wichtigsten Anstoss jedoch zur weiteren Ausbildung der Rechnung mit Determinanten haben GAUSS' Disquisitiones arithmeticae 1801 gegeben. Ausgehend von der Betrachtung der Algorithmen, welche in diesem Werke sich auf die »Determinanten der quadratischen Formen« beziehen, stellten BINET und CAUCHY 1812 die allgemeinen Regeln für die Multiplication der Determinanten auf, wodurch Rechnungen mit schwer zu bewältigenden Aggregaten eine unerwartete Leichtigkeit gewannen. Des neuen Calcüls, welchen besonders CAUCHY weiter ausgebildet hatte, bemächtigte sich mit schöpferischer Kraft vorzüglich JACOBI 1826, dessen in Crelle's Journal niedergelegte Arbeiten reichlich Zeugniss geben, was das neue Instrument in des Meisters Hand zu leisten vermochte. Erst durch JACOBI's Abhandlungen »de formatione et proprietatibus determinantium« und »de determinantibus functionalibus 1841« wurden die Determinanten Gemeingut der Mathematiker, welches seitdem von verschiedenen Seiten her wesentliche Vermehrungen erhalten hat.

JACOBI's Abhandlung de formatione etc., welche nicht unmittelbar für das erste Studium des Gegenstandes verfasst ist, und SPOTTISWOODE elementary theorems relating to determinants, London 1851, eine Schrift, welche bei zweckmässiger Anordnung des Stoffes und einer guten Auswahl von Beispielen manche Ungenauigkeiten und selbst Unrichtigkeiten enthält, wodurch ihrem Werthe Eintrag geschieht, waren die einzigen vorhandenen Anleitungen zur Kenntniss der Determinanten, als ich mich entschloss, das zum grossen Theil noch zerstreute Material in eine Theorie der Determinanten, begleitet von den wichtigsten Anwendungen derselben, zusammenzustellen. Meine Arbeit war fast zum Abschluss gebracht, als mir BRIOSCHI la teorica dei determinanti, Pavia 1854, bekannt wurde. Dieses Werk, hervorgerufen durch das auf vielen Seiten gefühlte Bedürfniss einer elementaren Anleitung zur Kenntniss der Determinanten, ist, wenn auch in den Elementen nicht immer streng, doch mit vorzüglicher Sachkenntniss geschrieben und enthält einen reichen Schatz trefflichen Materials, wodurch es schnell in weiten Kreisen Eingang und Anerkennung sich verschafft hat. Die jüngst in Berlin erschienene deutsche Uebersetzung dieses werthvollen Buches ist ohne Zweifel den deutschen Mathematikern sehr willkommen. Dass ich den Muth hatte, meine Schrift über denselben Gegenstand zu vollenden, gründet sich hauptsächlich auf die Verschiedenheit in der Anlage und Ausführung meiner Arbeit. Um den theoretischen Kern des Gegenstandes möglichst rein herauszuschälen, habe ich die Haupteigenschaften der Determinanten und die darauf gegründeten Algorithmen in synthetisch genau articulirtem Vortrag, wie er den Lehrbüchern von Alters her eignet, abgehandelt und wo es nöthig schien durch einfache Beispiele erläutert. Es kann zur klaren Einsicht in die Lehrsätze eines Systems nur erwünscht sein, bei jedem Lehrsatze die Summe der Prämissen, auf denen er beruht, straff zusammengezogen zu sehen. Dagegen habe ich die Anwendungen auf Algebra, Analysis und Geometrie in einen besondern Abschnitt vereinigt, um durch grösseren Zusammenhang leichtere Auffassung und in den einzelnen Materien eine gewisse Vollständigkeit erreichen zu können. Besonders aber wünschte ich meiner Arbeit dadurch einigen Werth zu verleihen, dass ich soviel als möglich bis zu den Originalquellen vorzudringen suchte, um die ersten Erfinder von Methoden und die ersten Entdecker von Lehrsätzen citiren zu können. Solche Citate sind nicht nur ein Opfer, welches die spätere Zeit den frühern Offenbarungen des Genius schuldet, sie bilden ein Stück Geschichte der Wissenschaft und laden zum Studium der hohen Werke ein, aus denen die Wissenschaft aufgebaut ist, und in denen noch immer reiche Schätze ungehoben ruhen. Freilich kann ich nicht erwarten, dass mein Suchen hierbei überall zum Finden des Richtigen geführt hat; ich hoffe aber, dass verlautete Irrthümer zu gelegentlicher Aussprache des Richtigen Veranlassung geben werden.

Nach dem Vorbemerkten ist es unnöthig hervorzuheben, was von meiner Seite eigenes dem vorgefundenen Material hinzugefügt worden ist. Es bleibt mir nur übrig, die Güte meines gelehrten Freundes Borchardt dankbar zu rühmen, der durch mancherlei Anweisung mich bei meiner Arbeit wirksam unterstützt hat.

1857.

Zur dritten Auflage.

Die dritte Auflage meines Buches hat in mehrern Abschnitten wesentliche Verbesserungen und Zusätze erhalten. Zum Theil neu bearbeitet wurden die Determinanten mit polynomischen Elementen (§. 5), die Functionaldeterminanten (§. 12), die homogenen Functionen (§. 13), die geometrischen Determinanten (§. 15 – 17). Unter den einzelnen Zusätzen erwähne ich §. 3, 6 und 15, §. 4, 2 und 3, §. 6, 5, §. 10, 2 und 3, §. 11, 3. Nicht mehr einfügen liess sich die Bemerkung, welche die Herren Brill und Gordan gemacht haben, dass p. 105 die Determinanten $(n+m-1)$ten, $(n+m-2)$ten, .. Grades vermöge der Beschaffenheit der letzten Colonnen auf den um 1 niederen Grad gebracht werden können. Zur Zierde gereichen der neuen Auflage dankenswerthe Originalmittheilungen des Herrn Weierstrass p. 47 über successive lineare Substitutionen und des Herrn Borchardt p. 233 über das grösste Tetraeder, dessen Flächen von gegebenem Inhalt sind. Ausserdem bin ich zu besonderem Dank Herrn Kronecker verpflichtet, dessen Einfluss auf meine Arbeit durch die Anführungen seines Namens sich nur annähernd ausdrücken liess. Im Journal für Mathematik erscheinen demnächst Aufsätze, welche Herr Kronecker mit Bezug auf diese neue Auflage zu redigiren sich hat bewegen lassen.

Inhalt.

Theorie der Determinanten.

Anwendungen.

Erster Abschnitt.

Theorie der Determinanten.

§. 1. Eintheilung der Permutationen gegebener Elemente in zwei Classen.

1. Die Elemente einer Complexion, aus welcher Permutationen abgeleitet werden sollen, werden durch Ordnungszahlen unterschieden. Ein Element heisst höher als ein anderes, wenn es die grössere Ordnungszahl hat. Bei einer abgeleiteten Complexion vergleicht man jedes Element mit allen folgenden und zählt, wievielmal einem höhern Elemente ein niederes nachsteht; die gefundene Anzahl heisst die Anzahl der Inversionen (dérangements, variations), welche die Complexion enthält*), z. B. die Permutation $a_2 a_4 a_3 a_1$ enthält 4 Inversionen: $a_2 a_1$, $a_4 a_3$, $a_4 a_1$, $a_3 a_1$.

Die Permutationen gegebener Elemente sind von Cramer in zwei Classen getheilt worden, deren erste die Permutationen umfasst, in welchen eine gerade Anzahl von Inversionen vorhanden ist, deren zweite die Permutationen mit ungerader Anzahl von Inversionen enthält.

2. **Lehrsatz.** Wenn in einer Permutation ein Element mit einem andern vertauscht wird, während die übrigen Elemente ihre Plätze behalten, so ändert sich die Anzahl der vorhandenen Inversionen um eine ungerade Zahl**).

*) Cramer Analyse des lignes courbes, 1750. Appendix p. 658.

**) Dieser Satz wurde zur Unterscheidung der Permutationen von Bézout aufgestellt (Hist. de l'acad. de Paris 1764 p. 292) und von Laplace bewiesen in derselben Sammlung 1772, II p. 294, einfacher in der hier mitgetheilten Weise von Mollweide demonstratio eliminationis Cramerianae, Leipzig 1811 §. 9 und von Gergonne Ann. de Math. 4 p. 150.

Beweis. Sind g und h die zu vertauschenden Elemente, h das höhere derselben, A die Gruppe der Elemente, welche g vorangehen, B die Gruppe der Elemente, welche zwischen g und h stehen, C die Gruppe der Elemente, welche h nachfolgen; ist also die gegebene Permutation

$$A\,g\,B\,h\,C,$$

und die zu bildende

$$A\,h\,B\,g\,C,$$

so rührt die gesuchte Aenderung der Anzahl der vorhandenen Inversionen von der Stellung her, welche g und h gegen einander und gegen die in B enthaltenen Elemente einnehmen.

Die Gruppe B enthalte β Elemente, von denen β_1 höher als g, β_2 höher als h seien. Dann sind in der Complexion gBh ausser den in B vorhandenen Inversionen deren $\beta-\beta_1+\beta_2$ anzutreffen, weil g höher ist als $\beta-\beta_1$ Elemente von B, und β_2 Elemente von B höher sind als h. Anstatt dieser Inversionen kommen in der Complexion hBg, welche durch Vertauschung von g und h abgeleitet ist, $\beta-\beta_2+1+\beta_1$ Inversionen vor, weil h höher ist als $\beta-\beta_2$ Elemente von B, ferner h höher als g, und endlich noch β_1 Elemente von B höher sind als g. Die Differenz dieser Anzahlen

$$\beta-\beta_2+1+\beta_1-(\beta-\beta_1+\beta_2)=2\beta_1-2\beta_2+1$$

ist ungerade, w. z. b. w.

3. Durch Vertauschung von jedesmal 2 Elementen können nach und nach alle Permutationen einer gegebenen Complexion dargestellt werden*). Die in dieser Reihe der Permutationen anzutreffenden Inversionen sind abwechselnd von gerader und von ungerader Anzahl (2). Da die Anzahl aller Permutationen gerade ist, so giebt es ebensoviel Permutationen der ersten Classe, in denen eine gerade Anzahl Inversionen vorhanden ist, als Permutationen der zweiten Classe, welche eine ungerade Anzahl Inversionen enthalten. Jene lassen sich durch eine gerade, diese durch eine ungerade Anzahl Vertauschungen von jedesmal 2 Elementen aus der gegebenen Complexion ableiten.

Zwei Permutationen gehören in dieselbe Classe, wenn eine aus der andern oder beide aus einer dritten durch eine gerade

---

*) Vergl. Gallenkamp Elem. d. Math. 1850 §. 110 oder des Verf. Elem. d. Math. 2tes Buch §. 24.

Anzahl Vertauschungen von jedesmal 2 Elementen sich ableiten lassen.

4. Analytischer Beweis des Lehrsatzes (2) *). Zur Unterscheidung der Permutationen bilde man bei jeder derselben die Differenzen der den Elementen zugehörigen Ordnungszahlen, indem man die Ordnungszahl jedes Elements von der jedes folgenden Elements subtrahirt. Eine Permutation enthält soviel Inversionen, als unter den erwähnten Differenzen negative vorkommen (1).

Das Product dieser Differenzen ist eine alternirende Function der Ordnungszahlen **), welche durch Vertauschung von 2 Ordnungszahlen den entgegengesetzten Werth erhält.

Beweis. Nach der Vertauschung von zwei Ordnungszahlen haben die einzelnen Differenzen in veränderter Ordnung dieselben absoluten Werthe wie vorher, also behält ihr Product seinen absoluten Werth. Versteht man unter i und k zwei bestimmte, unter r und s zwei beliebige andere Ordnungszahlen; unter

$$\Pi(r-i)(r-k), \quad \Pi(r-s)$$

die Producte der Factoren, deren allgemeine Formeln

$$(r-i)(r-k), \quad r-s$$

sind; bezeichnet man endlich einen der Werthe 1 oder -1 durch ε, so kann das Product der bei einer gegebenen Permutation zu bildenden Differenzen durch

$$\varepsilon(k-i) \; \Pi(r-i)(r-k) \; \Pi(r-s)$$

dargestellt werden. Wird nun i mit k vertauscht, so bleiben

$$\Pi(r-i)(r-k) \text{ und } \Pi(r-s)$$

unverändert, und $k-i$ erhält den entgegengesetzten Werth. Also bekommt das Product den entgegengesetzten Werth, w. z. b. w.

Da durch Vertauschung von 2 Elementen der Permutation das in Betracht gezogene Product einen Zeichenwechsel erleidet, so ändert sich zugleich die Anzahl der negativen Differenzen,

*) Jacobi Determ. 2 (Crelle J. 22 no. 11).

**) Fonction alternée nach Cauchy J. de l'éc. polyt. Cah. 17 p. 30, Analyse algébr. III, 2. — Functio alternans nach Jacobi Crelle J. 22 p. 360.

mithin die Anzahl der vorhandenen Inversionen um eine ungerade Zahl, wie oben bewiesen worden.

5. Die Vertauschung der Elemente einer Complexion heisst cyclisch, wenn jedes Element durch das folgende, das letzte Element durch das erste ersetzt wird.

Durch eine cyclische Vertauschung aller Elemente erhält man aus einer gegebenen Permutation eine Permutation derselben oder nicht derselben Classe, je nachdem die Anzahl der Elemente ungerade oder gerade ist. Denn die cyclische Vertauschung von n Elementen lässt sich durch Vertauschung des ersten Elements mit dem zweiten, dritten u. s. f., also durch $n-1$ Vertauschungen von jedesmal 2 Elementen erreichen.

Aus einer gegebenen Permutation kann jede andere durch cyclische Vertauschung einzelner Gruppen von Elementen abgeleitet werden. Sind z. B.

7 2 5 4 3 8 1 6 9

die Ordnungszahlen der Elemente in der gegebenen Permutation, und

2 9 3 8 7 4 1 5 6

die Ordnungszahlen der Elemente in der abzuleitenden Permutation, so beginne man mit dem ersten umzustellenden Element der gegebenen Permutation, und ersetze der Reihe nach 7 durch 2, 2 durch 9, 9 durch 6, 6 durch 5, 5 durch 3, endlich 3 durch das Anfangs ausgestossene Element 7. Dadurch ist eine Gruppe von Elementen abgeschlossen und deren cyclische Vertauschung vollendet. Hierauf ersetze man aus der Reihe der noch übrigen Elemente 4 durch 8, 8 durch 4, womit die cyclische Vertauschung einer zweiten Gruppe von Elementen sich schliesst. Das noch übrige Element 1 ist durch ein anderes nicht zu ersetzen. Demnach ist durch 2 partiale cyclische Vertauschungen aus der ersten Permutation die zweite abgeleitet.

Wenn man jedes der Elemente, welches bei der eben beschriebenen Ableitung einer Permutation aus einer andern durch sich selbst zu ersetzen ist, als eine besondere Gruppe mitzählt, so gilt die Regel:

Zwei Permutationen gehören in dieselbe Classe oder nicht, je nachdem die Differenz der Anzahl ihrer Elemente und der Anzahl der Gruppen, durch deren cyclische Vertauschung die eine Permutation aus der andern abgeleitet werden kann, gerade oder ungerade ist*). Bestehen nämlich die gegebenen Permutationen aus n Elementen, lässt sich aus der ersten die zweite dadurch ableiten, dass man die Elemente in p Gruppen von α_1, α_2, α_3, . . Elementen vertheilt, und die einzelnen Gruppen durch cyclische Vertauschungen umbildet, so können die vorzunehmenden cyclischen Vertauschungen durch

$$(\alpha_1-1)+(\alpha_2-1)+(\alpha_3-1)+\,.\,.$$

Vertauschungen von jedesmal 2 Elementen bewirkt werden. Nun ist

$$\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\,.\,.\;=n\,,$$

also kann die zweite Permutation aus der ersten durch $n-p$ Vertauschungen von jedesmal 2 Elementen abgeleitet werden.

Um die Elemente der ersten Gruppe an ihre neuen Plätze zu bringen, sind nicht weniger als α_1-1 Vertauschungen von jedesmal 2 Elementen erforderlich u. s. f., daher kann eine der gegebenen Permutationen aus der andern nicht durch weniger als $n-p$ Vertauschungen von jedesmal 2 Elementen abgeleitet werden. Im obigen Beispiel ist $p=3$, $n-p=6$, folglich gehören die gegebenen Permutationen derselben Classe an.

§. 2. Determinante eines Systems von n^2 Elementen.

1. Wenn m Zeilen (Horizontalreihen, lignes) von je n Elementen, oder von der andern Seite betrachtet n Colonnen (Verticalreihen) von je m Elementen zu unterscheiden sind, so werden die Elemente im Allgemeinen zweckmässig durch 2 Numern (indices, suffixe) bezeichnet, deren erste die Stelle der Reihe, deren zweite die Stelle des Elements in der Reihe angiebt**), z. B.

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \cdot\;\cdot & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdot\;\cdot & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot\;\cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdot\;\cdot & a_{mn} \end{matrix}$$

*) Cauchy J. de l'ec. polyt. Cah. 17 p. 42. Anal. algébr. Note 4. Jacobi Det. 3.

**) Diese Bezeichnung ist zuerst von Leibniz angewandt worden. S. des-

Statt a_{ik} schreibt man auch $a_i^{(k)}$ oder (ik). Wenn $m=n$, so heisst die Reihe der Elemente vom ersten zum letzten

$$a_{11} \quad a_{22} \quad . \; . \quad a_{nn}$$

die Diagonalreihe des Quadrats der Elemente.

2. Definition. Unter der Determinante des Systems von n^2 Elementen, welche in n Reihen von je n Elementen stehen und von denen das $k$te der $i$ten Reihe durch a_{ik} bezeichnet wird, versteht man das Aggregat der Producte von je n solchen Elementen, die sämmtlich aus verschiedenen Zeilen und Colonnen entnommen sind. Das Anfangsglied der Determinante ist das Product der Elemente der Diagonalreihe

$$a_{11} \quad a_{22} \quad . \; . \quad a_{nn} \, .$$

Aus dem Anfangsglied werden die übrigen Glieder abgeleitet, indem man die ersten Numern unverändert lässt und die zweiten permutirt. Die einzelnen Glieder werden positiv oder negativ genommen, je nachdem die Permutationen der Numern, durch welche sie entstanden sind, derselben Classe angehören als die erste Complexion der Numern, oder nicht.

Die Determinante von n^2 Elementen heisst $n$ten Grades, weil ihre Glieder Producte von n Elementen sind. Sie hat $1 . 2 \ldots n$ Glieder, welche zur Hälfte positiv, zur andern Hälfte negativ sind (§. 1, 3), unter denen aber entgegengesetzt gleiche nicht vorkommen, so lange nicht besondere Beziehungen zwischen den einzelnen Elementen stattfinden. Man bezeichnet die Determinante nach CAUCHY und JACOBI durch Einschluss des Systems der Elemente zwischen Colonnenstriche, oder durch das mit dem Doppelzeichen $\pm$ unter ein Summenzeichen gesetzte Anfangsglied, oder nach VANDERMONDE durch Aufstellung der Reihe der ersten Numern, welche zur Unterscheidung der Elemente dienen, über der Reihe der zweiten Numern *):

---

sen Brief an L'Hôpital 1693 April 28 in Leibniz math. Schriften herausgeg. von Gerhardt II p. 239.

*) CAUCHY J. de l'école polyt. Cah. 17 p. 52. JACOBI Det. 4 und Crelle J. 15 p. 115. VANDERMONDE Mem. sur l'élimination 1771 (Hist. de l'acad. de Paris 1772, II p. 517). Die Determinanten sind von LEIBNIZ (l. c.) erfunden worden, der mit Hülfe derselben die Resultante von n linearen Gleichungen für $n-1$ Unbekannte, sowie die Resultante von 2 algebraischen Gleichungen für eine Unbekannte darzustellen suchte. Als zweiter Erfinder der Determinanten ist CRAMER (vergl. §. 1, 1) zu nennen. Die von CAUCHY

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdot\,\cdot & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdot\,\cdot & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot\,\cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdot\,\cdot & a_{nn} \end{vmatrix} = \Sigma \pm a_{11}\, a_{22} \,.\,.\, a_{nn} = \frac{1 \mid 2 \mid .\,. \mid n}{1 \mid 2 \mid .\,. \mid n} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & .\,. & n \\ 1 & 2 & .\,. & n \end{pmatrix}$$

Beispiele.

$$\begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} = ab_1 - a_1 b \,.$$

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = ab_1c_2 - ab_2c_1 + a_1b_2c - a_1bc_2 + a_2bc_1 - a_2b_1c \,.$$

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \end{vmatrix} = \begin{matrix} ab_1c_2d_3 - ab_1c_3d_2 + ab_2c_3d_1 - ab_2c_1d_3 + ab_3c_1d_2 - ab_3c_2d_1 \\ -a_1bc_2d_3 + a_1bc_3d_2 + a_1b_2cd_3 - a_1b_2c_3d - a_1b_3cd_2 + a_1b_3c_2d \\ +a_2bc_1d_3 - a_2bc_3d_1 - a_2b_1cd_3 + a_2b_1c_3d + a_2b_3cd_1 - a_2b_3c_1d \\ -a_3bc_1d_2 + a_3bc_2d_1 + a_3b_1cd_2 - a_3b_1c_2d - a_3b_2cd_1 + a_3b_2c_1d \,. \end{matrix}$$

3. *Die Glieder der Determinante können aus dem Anfangsglied auch dadurch abgeleitet werden, dass man die ersten Numern permutirt, während die zweiten ihre Plätze behalten.* Bei dem ersten Verfahren nimmt man der Reihe nach aus jeder Zeile Elemente, welche verschiedenen Colonnen angehören; bei dem zweiten Verfahren nimmt man der Reihe nach aus jeder Colonne Elemente, die verschiedenen Zeilen angehören. Irgend ein Glied $a_{1p}\, a_{2q}\, a_{3r} \cdot\cdot$, welches beim ersten Verfahren durch Vertauschung von a_{11} mit a_{1p}, von a_{22} mit a_{2q}, von a_{33} mit a_{3r}, . . gebildet worden ist, ergiebt sich beim zweiten Verfahren durch Vertauschung von a_{pp} mit a_{1p}, von a_{qq} mit a_{2q}, von a_{rr} mit a_{3r}, . . . In beiden Fällen werden gleichviel Numern mit andern vertauscht, folglich erhält das abgeleitete Glied bei dem zweiten Verfahren dasselbe Zeichen, als beim ersten. Z. B. aus

$$a_{11}\; a_{22}\; a_{33}\; a_{44}\; a_{55}\; a_{66}$$

entspringt

$$a_{13}\; a_{22}\; a_{31}\; a_{44}\; a_{56}\; a_{65}$$

indem man die zweiten Numern 1, 2, 3, 4, 5, 6 mit 3, 2, 1, 4, 6, 5 vertauscht. Dasselbe Glied kann man aus dem Anfangsglied

---

eingeführte Benennung Determinante ist von den nach dem obigen Gesetz gebildeten Aggregaten hergenommen, welche GAUSS (Disquis. arithm.) Determinanten der quadratischen Formen genannt hat. Später hat CAUCHY (Exerc. de Math., Exerc. d'Analyse) den Namen Determinante wieder mit fonction alternee und mit dem von LAPLACE (vergl. §. 1, 2) gebrauchten Ausdruck Resultante vertauscht.

auch dadurch finden, dass man die ersten Numern 3, 2, 1, 4, 6, 5 der Reihe nach in 1, 2, 3, 4, 5, 6 verwandelt. Bei dem einen wie bei den andern Verfahren werden 4 Numern durch andere ersetzt und in beiden Fällen erhält das abgeleitete Glied dasselbe Zeichen.

Zwei Systeme von der Art, dass die Zeilen des einen mit den Colonnen des andern übereinstimmen,

$$\begin{array}{llll} a_{11} & a_{12} & \cdot\ \cdot & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdot\ \cdot & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdot\ \cdot & a_{nn} \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{llll} a_{11} & a_{21} & \cdot\ \cdot & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdot\ \cdot & a_{n2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdot\ \cdot & a_{nn} \end{array}$$

haben einerlei Determinante $\Sigma \pm a_{11}\, a_{22} \,.\,.\, a_{nn}$. Denn jedes Glied der einen Determinante kommt in der andern mit demselben Zeichen vor.

4. **Lehrsatz.** Die Determinante wechselt das Zeichen, wenn im System der Elemente eine Reihe mit einer parallelen Reihe vertauscht wird. Die Determinante verschwindet identisch, wenn die Elemente einer Reihe denen einer parallelen Reihe einzeln in derselben Ordnung gleich sind*).

Beweis. Ist R die gegebene Determinante, R' die durch Vertauschung von 2 parallelen Reihen der Elemente abgeleitete Determinante, so enthält R' dieselben Glieder als R mit entgegengesetzten Zeichen. Denn das Anfangsglied von R' entsteht aus dem Anfangsglied von R durch Vertauschung von 2 ersten oder 2 zweiten Numern, kommt also in R mit dem entgegengesetzten Zeichen vor. Alle andern Glieder von R', welche aus deren Anfangsglied durch eine ungerade (gerade) Anzahl Vertauschungen von jedesmal 2 Numern hervorgehen, entspringen aus dem Anfangsglied von R durch eine gerade (ungerade) Anzahl solcher Vertauschungen. Mithin kommen alle Glieder von R' in R mit den entgegengesetzten Zeichen vor, d. h. $R' = -R$.

Sind die in 2 parallelen Reihen stehenden Elemente einander der Reihe nach gleich, so wird durch Vertauschung dieser Reihen R in $-R$ verwandelt, das System der Elemente bleibt

---

*) Vandermonde l. c. p. 518 u. 522. Laplace Hist. de l'acad. de Paris 1772, II p. 297.

aber bei dieser Vertauschung unverändert, d. h. $-R = R$, folglich $R = 0$ für beliebige Werthe der Elemente. Z. B.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & . & . & a_{1n} \\ . & . & . & . \\ a_{n1} & . & . & a_{nn} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{12} & a_{11} & a_{13} & . & . & a_{1n} \\ a_{22} & a_{21} & a_{23} & . & . & a_{2n} \\ . & . & . & . & . & . \\ a_{n2} & a_{n1} & a_{n3} & . & . & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{22} & . & . & a_{2n} & a_{21} \\ . & . & . & . & . \\ a_{n2} & . & . & a_{nn} & a_{n1} \\ a_{12} & . & . & a_{1n} & a_{11} \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{n-1} \begin{vmatrix} a_{12} & . & . & a_{1n} & a_{11} \\ a_{22} & . & . & a_{2n} & a_{21} \\ . & . & . & . & . \\ a_{n2} & . & . & a_{nn} & a_{n1} \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \begin{vmatrix} a_{1n} & a_{1,n-1} & . & . & a_{11} \\ . & . & & . & . \\ . & . & & . & . \\ a_{nn} & a_{n,n-1} & . & . & a_{n1} \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & . & . & a_{2n} \\ a_{21} & a_{22} & . & . & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & . & . & a_{3n} \\ . & . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & . & . & a_{nn} \end{vmatrix} = 0.$$

Ueberhaupt: wenn sowohl $i, k, l, \ldots$ als auch $r, s, t, \ldots$ gegebene Permutationen von $1, 2, \ldots, n$ bedeuten, so ist

$$\begin{vmatrix} a_{ir} & a_{is} & a_{it} & . \\ a_{kr} & a_{ks} & a_{kt} & . \\ a_{lr} & a_{ls} & a_{lt} & . \\ . & . & . & \end{vmatrix} = \varepsilon \begin{vmatrix} a_{11} & . & . & a_{1n} \\ . & . & . & . \\ a_{n1} & . & . & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{ri} & a_{rk} & a_{rl} & . \\ a_{si} & a_{sk} & a_{sl} & . \\ a_{ti} & a_{tk} & a_{tl} & . \\ . & . & . & \end{vmatrix}$$

worin ε die positive oder negative Einheit bedeutet, je nachdem die gegebenen Permutationen einer Classe angehören oder nicht.

5. **Lehrsatz.** Wenn die in einer Reihe stehenden Elemente des Systems mit Ausnahme eines einzigen verschwinden, so reducirt sich die Determinante des gegebenen Systems auf das Product des erwähnten Elements mit einer Determinante vom nächst niederen Grade*).

Beweis. Ist

$$R = \begin{vmatrix} a_{11} & . & . & a_{1n} \\ . & . & . & . \\ a_{n1} & . & . & a_{nn} \end{vmatrix}$$

und unter den Elementen

$$a_{i1} \quad a_{i2} \quad . \; . \quad a_{in}$$

*) Jacobi Det. 5.

nur a_{ik} von 0 verschieden, so mache man im gegebenen System die $i$te Zeile der Elemente zur ersten Zeile und die $k$te Colonne zur ersten Colonne, so dass R durch $(i-1)+(k-1)$ Zeichenwechsel (4) in

$$\varepsilon R = \begin{vmatrix} a_{ik} & a_{i1} & \cdot\cdot & a_{i,k-1} & a_{i,k+1} & \cdot\cdot & a_{in} \\ a_{1k} & a_{11} & \cdot\cdot & a_{1,k-1} & a_{1,k+1} & \cdot\cdot & a_{1n} \\ \cdot & \cdot & & & & & \\ a_{i-1,k} & a_{i-1,1} & \cdot\cdot & & & & \\ a_{i+1,k} & a_{i+1,1} & \cdot\cdot & & & & \\ \cdot & \cdot & & & & & \\ a_{nk} & a_{n1} & \cdot\cdot & & & & \end{vmatrix}$$

übergeht, wo $\varepsilon = (-1)^{i+k}$. Nach der Voraussetzung verschwinden die Glieder von εR, in welchen die erste unter den zweiten Numern von k verschieden ist. Daher reducirt sich εR auf die Glieder, welche aus dem Anfangsgliede

$$a_{ik}\, a_{11} \cdot\cdot\, a_{nn}$$

durch Permutation der zweiten Numern $1, 2, .., k-1, k+1, .., n$ nach Ausschliessung von k hervorgehen, d. i. auf die Glieder einer Determinante $(n-1)$ten Grades (2), welchen der Factor a_{ik} zugesetzt ist, also

$$\varepsilon R = a_{ik} \begin{vmatrix} a_{11} & \cdot\cdot & a_{1,k-1} & a_{1,k+1} & \cdot\cdot & a_{1n} \\ \cdot & \cdot\cdot & & & & \\ a_{i-1,1} & \cdot\cdot & & & & \\ a_{i+1,1} & \cdot\cdot & & & & \\ \cdot & \cdot\cdot & & & & \\ a_{n1} & \cdot\cdot & & & & \end{vmatrix}$$

worin ε die angegebene Bedeutung hat.

Beispiel.

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \\ 0 & 0 & d_3 & 0 \end{vmatrix} = -d_3 \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_4 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 & a_3 \\ 0 & b_1 & b_2 & b_3 \\ 0 & c_1 & c_2 & c_3 \\ 0 & d_1 & d_2 & d_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ d_1 & d_2 & d_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ b & b_1 & b_2 & b_3 \\ c & c_1 & c_2 & c_3 \\ d & d_1 & d_2 & d_3 \end{vmatrix}$$

6. Umgekehrt folgt, dass jede Determinante als Determinante von einem höhern Grade dargestellt werden kann, z. B.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdot\cdot & a_{1n} \\ \cdot & & \cdot\cdot \\ a_{n1} & \cdot\cdot & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a_{n+1,1} & \cdot & a_{n+1,n} \\ 0 & a_{11} & \cdot\cdot & a_{1n} \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ 0 & a_{n1} & \cdot\cdot & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a_{n+2,n+1} & a_{n+2,1} & \cdot\cdot & a_{n+2,n} \\ 0 & 1 & a_{n+1,1} & \cdot\cdot & a_{n+1,n} \\ 0 & 0 & a_{11} & \cdot\cdot & a_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \\ 0 & 0 & a_{n1} & \cdot\cdot & a_{nn} \end{vmatrix}$$

u. s. w. Die Elemente

$$\begin{matrix} a_{n+1,1} & \cdot\cdot & a_{n+1,n} & \\ a_{n+2,1} & \cdot\cdot & a_{n+2,n} & a_{n+2,n+1} \end{matrix}$$

welche in der Entwickelung der transformirten Determinante nicht angetroffen werden, können jeden beliebigen Werth annehmen, also auch verschwinden.

7. Wenn alle Elemente verschwinden, welche auf einer Seite der Diagonalreihe stehen, so reducirt sich die Determinante des gegebenen Systems auf ihr Anfangsglied.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdot\cdot & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdot\cdot & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdot\cdot & a_{3n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdot\cdot & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & \cdot\cdot & a_{2n} \\ 0 & a_{33} & \cdot\cdot & a_{3n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \\ 0 & 0 & \cdot\cdot & a_{nn} \end{vmatrix} \text{ u. s. f. (5)}$$

$$= a_{11}\, a_{22} \,..\, a_{nn}\,.$$

§. 3. Entwickelung einer Determinante nach den in einer Reihe stehenden Elementen.

1. **Bestimmung des Coefficienten α_{ik}, welchen das Element a_{ik} in der Determinante $R = \Sigma \pm a_{11} \,..\, a_{nn}$ hat.** Um die Glieder von R, in denen a_{ik} vorkommt, übrig zu behalten, setze man die Elemente einer Reihe, welche das Element a_{ik} enthält, gleich 0 mit Ausnahme von a_{ik}. Setzt man dann 1 an die Stelle von a_{ik}, so findet man den gesuchten Coefficienten

$$\alpha_{ik} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdot\cdot & a_{1,k-1} & a_{1k} & a_{1,k+1} & \cdot\cdot & a_{1n} \\ \cdot & \cdot\cdot & & & & & \\ a_{i-1,1} & \cdot\cdot & a_{i-1,k-1} & a_{i-1,k} & a_{i-1,k+1} & \cdot\cdot & a_{i-1,n} \\ 0 & & 0 & 1 & 0 & & 0 \\ a_{i+1,1} & \cdot\cdot & a_{i+1,k-1} & a_{i+1,k} & a_{i+1,k+1} & \cdot\cdot & a_{i+1,n} \\ \cdot & \cdot\cdot & & & & & \\ a_{n1} & \cdot\cdot & a_{n,k-1} & a_{nk} & a_{n,k+1} & \cdot\cdot & a_{nn} \end{vmatrix}$$

welcher sich als Determinante $(n-1)$ten Grades darstellen lässt (§. 2, 5). Wenn man die $i$te Zeile zur ersten Zeile und die $k$te Colonne zur ersten Colonne macht, so finden $(i-1)+(k-1)$ Zeichenwechsel in α_{ik} statt (§. 2, 4), folglich ist

$$\alpha_{ik} = (-1)^{i+k} \begin{vmatrix} a_{11} & \cdot\cdot & a_{1,k-1} & a_{1,k+1} & \cdot\cdot & a_{1n} \\ \cdot & \cdot\cdot & & & & \\ a_{i-1,1} & \cdot\cdot & & & & \\ a_{i+1,1} & \cdot\cdot & & & & \\ \cdot & \cdot\cdot & & & & \\ a_{n1} & \cdot\cdot & & & & \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{i+k} \begin{vmatrix} 1 & 2 & .. & i-1 & i+1 & .. & k & k+1 & .. & n \\ 1 & 2 & .. & i-1 & i & .. & k-1 & k+1 & .. & n \end{vmatrix}$$

Wenn insbesondre jedes Element a_{ki} verschwindet, für welches $k > i$ ist, so verschwindet α_{ik}. Denn die Elemente der Diagonale verschwinden zum Theil, während alle einerseits der Diagonale stehenden Elemente verschwinden.

Durch ein analoges Verfahren leitet man aus R den Coefficienten ab, welchen das Product $a_{ik}\, a_{rs}$ in R hat, indem man 1 an die Stelle von a_{ik} und a_{rs} setzt und 0 an die Stelle der übrigen Elemente, welche die in a_{ik} und a_{rs} sich schneidenden Reihen des Systems enthalten. Dieser Coefficient reducirt sich auf eine Determinante $(n-2)$ten Grades u. s. f.

2. Bestimmung von α_{ik} durch cyclische Vertauschung. Um aus R eine dem absoluten Werth nach gleiche Determinante, deren Anfangselement a_{ik} ist, durch cyclische Vertauschung abzuleiten, hat man nach einander $i-1$ cyclische Vertauschungen der Zeilen und $k-1$ cyclische Vertauschungen der Colonnen vorzunehmen, wodurch

$$(i-1+k-1)(n-1)$$

Zeichenwechsel eintreten (§. 1, 5). Daher ist (1)

$$\alpha_{ik} = (-1)^{(n-1)(i+k)} \begin{vmatrix} a_{i+1,k+1} & \cdot\cdot & a_{i+1,n} & a_{i+1,1} & \cdot\cdot & a_{i+1,k-1} \\ \cdot & \cdot\cdot & & & & \\ a_{n,k+1} & \cdot\cdot & & & & \\ a_{1,k+1} & \cdot\cdot & & & & \\ \cdot & \cdot\cdot & & & & \\ a_{i-1,k+1} & \cdot\cdot & & & & \end{vmatrix}.$$

Bei Determinanten ungeraden Grades können die Coefficienten α_{ik} aus α_{11} durch cyclische Vertauschung ohne Zeichenwechsel abgeleitet werden. Zu recurrenter Bildung der Determinanten hat man demnach

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = a \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} + a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b & c \end{vmatrix} + a_2 \begin{vmatrix} b & c \\ b_1 & c_1 \end{vmatrix} .$$

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \end{vmatrix} = a \begin{vmatrix} b_1 & c_1 & d_1 \\ b_2 & c_2 & d_2 \\ b_3 & c_3 & d_3 \end{vmatrix} - a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 & d_2 \\ b_3 & c_3 & d_3 \\ b & c & d \end{vmatrix} + a_2 \begin{vmatrix} b_3 & c_3 & d_3 \\ b & c & d \\ b_1 & c_1 & d_1 \end{vmatrix} - a_3 \begin{vmatrix} b & c & d \\ b_1 & c_1 & d_1 \\ c_2 & c_2 & d_2 \end{vmatrix} .$$

3. **Lehrsatz.** Wenn α_{ik} den Coefficienten des Elements a_{ik} in der Determinante R bedeutet, mithin $a_{ik}\,\alpha_{ik}$ das Aggregat der Glieder von R, welche das Element a_{ik} enthalten, so haben die Summen

$$a_{i1}\,\alpha_{k1} + a_{i2}\,\alpha_{k2} + \,.\,.\, + a_{in}\,\alpha_{kn}\,,$$
$$a_{1i}\,\alpha_{1k} + a_{2i}\,\alpha_{2k} + \,.\,.\, + a_{ni}\,\alpha_{nk}$$

den Werth R oder 0, je nachdem die Numern i und k gleich oder ungleich sind. Die Determinante ist eine homogene lineare Function der Elemente, welche in einer Reihe stehn*).

Beweis. Jedes Glied von R enthält je eines der Elemente

$$a_{i1}\,,\quad a_{i2}\,,\,.\,.\,,\,a_{in}\,,$$

welche die $i$te Zeile ausmachen. Nach der Voraussetzung ist $a_{i1}\,\alpha_{i1}$ das Aggregat der Glieder von R, welche das Element a_{i1} enthalten, u. s. w. Daher

$$R = a_{i1}\,\alpha_{i1} + a_{i2}\,\alpha_{i2} + \,.\,.\, + a_{in}\,\alpha_{in}$$

Auf demselben Wege findet man die Identität

$$R = a_{1i}\,\alpha_{1i} + a_{2i}\,\alpha_{2i} + \,.\,.\, + a_{ni}\,\alpha_{ni}\,.$$

Setzt man hierin

$$a_{i1} = a_{k1}\,,\; a_{i2} = a_{k2}\,,\,.\,.\;\text{oder}\; a_{1i} = a_{1k}\,,\; a_{2i} = a_{2k}\,,\,.\,.$$

so erhält man Summen, welche den Determinanten von Systemen gleichgelten, in denen die Elemente einer Reihe den Elementen einer parallelen Reihe einzeln gleich sind. Diese Determinanten verschwinden identisch (§. 2, 4).

4. Um eine Determinante mit einem Factor zu multiplicieren, hat man alle Elemente einer Reihe mit demselben zu multiplici-

---

*) Cramer l. c. Cauchy l. c. p. 66. Jacobi Det. 6. Die aus diesem Satze für $n = 3$ entspringenden Identitäten finden sich bei Lagrange sur les pyr. 7. (Mém. de l'acad. de Berlin 1773).

ren. Den gemeinschaftlichen Factor aller Elemente einer Reihe kann man vor die Determinante setzen. Z. B.

$$p\begin{vmatrix} a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} pa & b & c \\ pa_1 & b_1 & c_1 \\ pa_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} pa & pb & pc \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

Diess ergiebt sich, wenn die Determinante unter der Form $a\alpha + a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2$ oder $a\alpha + b\beta + c\gamma$ vorgestellt wird. Ferner ist

$$-\begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -a & b \\ -a_1 & b_1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a & b & c \\ a & b_1 & c_1 \\ a & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = a\begin{vmatrix} 1 & b & c \\ 1 & b_1 & c_1 \\ 1 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a & b & c_1 \\ a & b & c_2 \end{vmatrix} = ab\begin{vmatrix} 1 & 1 & c \\ 1 & 1 & c_1 \\ 1 & 1 & c_2 \end{vmatrix} = 0$$

Wenn die Elemente einer Colonne (Zeile) des Systems sich zu einander verhalten, wie die Elemente einer andern Colonne (Zeile), so verschwindet die Determinante identisch.

5. Sind alle Elemente einer Reihe Aggregate von m Gliedern, so lässt sich die Determinante in das Aggregat von m Determinanten auflösen. Wenn

$$\begin{aligned} a_{i1} &= p_1 + q_1 + r_1 + \,.\,. \\ a_{i2} &= p_2 + q_2 + r_2 + \,.\,. \\ &\;.\;\;.\;\;.\;\;.\;\;. \end{aligned}$$

so ist

$$\begin{aligned} R = {} & a_{i1}\,\alpha_{i1} + a_{i2}\,\alpha_{i2} + \,.\,. + a_{in}\,\alpha_{in} \\ = {} & p_1\,\alpha_{i1} + p_2\,\alpha_{i2} + \,.\,. + p_n\,\alpha_{in} \\ & + q_1\,\alpha_{i1} + q_2\,\alpha_{i2} + \,.\,. + q_n\,\alpha_{in} \\ & + r_1\,\alpha_{i1} + r_2\,\alpha_{i2} + \,.\,. + r_n\,\alpha_{in} \\ & + \;.\;\;.\;\;.\;\;.\;\;.\;\;. \end{aligned}$$

Die einzelnen Determinanten, in welche R sich zerlegen lässt, entspringen aus R, indem an die Stelle der Elemente

$$a_{i1} \quad a_{i2} \quad .\,. \quad a_{in}$$

die Glieder derselben

$$\begin{matrix} p_1 & p_2 & .\,. & p_n \\ q_1 & q_2 & .\,. & q_n \\ r_1 & r_2 & .\,. & r_n \end{matrix}$$

u. s. w. der Reihe nach gesetzt werden. Z. B.

$$\begin{vmatrix} a + a' & a_1 & a_2 \\ b + b' & b_1 & b_2 \\ c + c' & c_1 & c_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & a_1 & a_2 \\ b & b_1 & b_2 \\ c & c_1 & c_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a' & a_1 & a_2 \\ b' & b_1 & b_2 \\ c' & c_1 & c_2 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \\ c & c' & c'' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & a' & a'' \\ 0 & b' & b'' \\ 0 & c' & c'' \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & a' & a'' \\ b & b' & b'' \\ c & c' & c'' \end{vmatrix}$$

6. Der Werth einer Determinante wird nicht verändert, wenn man zu den Elementen einer Reihe die mit einem beliebigen gemeinschaftlichen Factor multiplicirten Elemente einer parallelen Reihe addirt*)

$$\begin{vmatrix} a + pb & b & c \\ a_1 + pb_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 + pb_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} + p \begin{vmatrix} b & b & c \\ b_1 & b_1 & c_1 \\ b_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

(vergl. 3. u. 2.), wovon die zweite Determinante identisch verschwindet (§. 2, 4).

Beispiele.
$$\begin{vmatrix} 1 & x-a & y-b \\ 1 & x_1-a & y_1-b \\ 1 & x_2-a & y_2-b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & x & y \\ 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} x-a & y-b \\ x_1-a & y_1-b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a-a & b-b \\ 1 & x-a & y-b \\ 1 & x_1-a & y_1-b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a & b \\ 1 & x & y \\ 1 & x_1 & y_1 \end{vmatrix} \quad \text{(vergl. §. 2, 6.)}$$

$$\begin{vmatrix} a+x & a'+x \\ b+x & b'+x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & a+x & a'+x \\ 1 & b+x & b'+x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -x & -x \\ 1 & a & a' \\ 1 & b & b' \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a & a' \\ b & b' \end{vmatrix} - x \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & a & a' \\ 1 & b & b' \end{vmatrix}.$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & & & \\ 0 & -2 & & \\ 0 & 0 & 2 & \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 16\,.$$

Wenn man in der Determinante $n$ten Grades

$$S = \begin{vmatrix} a_1 & . & . & a_n \\ b_1 & . & . & b_n \\ c_1 & . & . & c_n \\ . & . & . & . \end{vmatrix}$$

die $n$te Colonne mit a_{n-1} multiplicirt und dann von dieser Colonne die mit a_n multiplicirte vorhergehende Colonne subtrahirt; wenn man auf dieselbe Weise die $(n-1)$te, . . Colonne transformirt, so findet man

*) Jacobi Crelle J. 22 p. 371.

$$Sa_1 \,.\,.\, a_{n-1} = \begin{vmatrix} a_1 & a_1 a_2 - a_2 a_1 & . \, . & a_{n-1} a_n - a_n a_{n-1} \\ b_1 & a_1 b_2 - a_2 b_1 & . \, . & a_{n-1} b_n - a_n b_{n-1} \\ c_1 & a_1 c_2 - a_2 c_1 & . \, . & a_{n-1} c_n - a_n c_{n-1} \\ . & & . \, . & . \end{vmatrix}$$

und daher die Determinante $(n-1)$ten Grades

$$Sa_2 \,.\,.\, a_{n-1} = \begin{vmatrix} a_1 b_2 - a_2 b_1 & . \, . & a_{n-1} b_n - a_n b_{n-1} \\ a_1 c_2 - a_2 c_1 & . \, . & a_{n-1} c_n - a_n c_{n-1} \\ . & . \, . & . \end{vmatrix}.$$

Wenn die Elemente ganze Zahlen sind, so kann die Determinante ohne Multiplication reducirt werden, indem man einzelne Reihen durch Verbindung mit parallelen Reihen transformirt, bis dass ein Element ± 1 geworden ist*).

$$\begin{vmatrix} 13 & 28 & 5 \\ 9 & 5 & 9 \\ 4 & 14 & 11 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -14 & -22 \\ 9 & 5 & 11 \\ 4 & 14 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 9 & 131 & 209 \\ 4 & 70 & 97 \end{vmatrix}$$

Von der 1ten Zeile wurde die 3te Zeile 3fach subtrahirt, zur 2ten und 3ten Colonne wurde die 1te Colonne 14fach und 22fach addirt.

Die Determinante

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ b & a & d & c \\ c & d & a & b \\ d & c & b & a \end{vmatrix}$$

ist durch $a+b+c+d$, $a-b-c+d$, $a-b+c-d$, $a+b-c-d$ theilbar, also auch durch das Product dieser Factoren. Der Quotient ist 1.

Die Determinante

$$\begin{vmatrix} a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \\ c & c' & c'' \end{vmatrix} = \frac{1}{x} \begin{vmatrix} ax + a'y + a''z & a' & a'' \\ bx + b'y + b''z & b' & b'' \\ cx + c'y + c''z & c' & c'' \end{vmatrix}$$

verschwindet, wenn x, y, z von Null verschiedene Werthe haben, für welche zugleich

$$ax + a'y + a''z = 0$$
$$bx + b'y + b''z = 0$$
$$cx + c'y + c''z = 0 \;.$$

---

*) Vergl. Kronecker Berl. Monatsbericht 1866 p. 609

7. Wenn man

$$\binom{b}{k} = \frac{b\,(b-1)\;.\,.\;(b-k+1)}{1\;.\;2\quad .\,.\quad k}$$

setzt, so ist

$$R = \begin{vmatrix} 1 & \binom{c+m}{1} & \binom{c+m+1}{2} & .\,. & \binom{c+2m-1}{m} \\ 1 & \binom{c+m+1}{1} & \binom{c+m+2}{2} & .\,. & \binom{c+2m}{m} \\ . & . & . & .\,. & . \\ 1 & \binom{c+2m}{1} & \binom{c+2m+1}{2} & .\,. & \binom{c+3m-1}{m} \end{vmatrix} = 1$$

Denn zufolge der Identität

$$\binom{c+n}{k} - \binom{c+n-1}{k} = \binom{c+n-1}{k-1}$$

erhält man nach Verminderung jeder Zeile um die vorhergehende

$$R = \begin{vmatrix} 1 & \binom{c+m}{1} & \binom{c+m+1}{2} & .\,. & \binom{c+2m-1}{m} \\ 0 & 1 & \binom{c+m+1}{1} & .\,. & \binom{c+2m-1}{m-1} \\ . & . & . & .\,. & . \\ 0 & 1 & \binom{c+2m}{1} & .\,. & \binom{c+3m-2}{m-1} \end{vmatrix}$$

Vollzieht man dieselbe Operation an den letzten $m-1$, $m-2$, .. Zeilen, so werden alle Elemente der Diagonale 1, während alle Elemente einerseits der Diagonale verschwinden. Daher ist $R = 1$, unabhängig von c und m.

8. Multiplicirt man in der Determinante (die leeren Stellen des Systems enthalten verschwindende Elemente)

$$B = \begin{vmatrix} a_0 & b_1 & & & & \\ a_1 & -b_0 & b_2 & & & \\ a_2 & & -b_1 & b_3 & & \\ . & . & . & & & \\ a_{n-1} & & & & -b_{n-2} & b_n \\ a_n & & & & & -b_{n-1} \end{vmatrix}$$

die Zeilen der Reihe nach mit b_0, b_1, .., b_n, und addirt dann zu jeder Zeile die folgenden Zeilen, so erhält man eine Determinante, die sich auf ihr Anfangsglied reducirt, nämlich

$$B\,b_0 b_1\,.\,.\,b_n = (-1)^n\,(a_0 b_0 + .\,. + a_n b_n)\,b_0 b_1\,.\,b_1 b_2\,.\,.\,b_{n-1} b_n\,.$$

Daher ist

$$B = (-1)^n (a_0 b_0 + \ldots + a_n b_n)\, b_1 b_2 \ldots b_{n-1} \text{ *)}.$$

9. Wenn die Elemente a_{ik} und a_{ki} gleich sind, und jedes in der Diagonale stehende Element a_{ii} der Summe der mit ihm in einer Reihe stehenden Elemente entgegengesetzt gleich ist, so verschwindet die Determinante $\Sigma \pm a_{11} \ldots a_{nn}$, und alle Elemente haben in der Determinante gleiche Coefficienten **).

Beweis. Alle Elemente einer Zeile von

$$\begin{vmatrix} a_{00} & \cdot & \cdot & a_{0n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n0} & \cdot & \cdot & a_{nn} \end{vmatrix}$$

verschwinden zufolge der Voraussetzung, wenn man zu derselben Zeile alle übrigen Zeilen des Systems addirt. Also verschwindet die Determinante.

Wenn man in dem Coefficienten von a_{00}

$$\alpha_{00} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdot & \cdot & a_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & \cdot & \cdot & a_{nn} \end{vmatrix}$$

zur $i$ten Zeile die übrigen Zeilen addirt, so kommen in die $i$te Zeile die Elemente

$$-a_{01} \quad -a_{02} \quad \cdot \quad \cdot \quad -a_{0n}.$$

Addirt man nun zur $k$ten Colonne die übrigen Colonnen, so erhält man in der $k$ten Colonne die Elemente

$$-a_{10} \quad \cdot \quad \cdot \quad -a_{i-1,0} \quad a_{00} \quad -a_{i+1,0} \quad \cdot \quad \cdot \quad -a_{n0}.$$

Indem man noch die transformirten Reihen voranstellt, findet man

$$\alpha_{00} = (-1)^{i+k} \begin{vmatrix} a_{00} & \cdot & \cdot & a_{0,k-1} & a_{0,k+1} & \cdot & \cdot & a_{0n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & & & & & \\ a_{i-1,0} & \cdot & \cdot & & & & & \\ a_{i+1,0} & \cdot & \cdot & & & & & \\ \cdot & \cdot & \cdot & & & & & \\ a_{n0} & \cdot & \cdot & & & & & \end{vmatrix} = \alpha_{ik}$$

10. Die aus $2n-1$ Grössen gebildete Determinante $n$ten Grades

---

*) Hermite Liouv. J. 14 p. 26.

**) Borchardt Berl. Monatsbericht 1859 p. 380 und Crelle J. 57 p. 111.

$$P = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & \cdot\;\cdot & a_{n-1} \\ a_1 & a_2 & \cdot\;\cdot & a_n \\ \cdot & \cdot & \cdot\;\cdot & \cdot \\ a_{n-1} & a_n & \cdot\;\cdot & a_{2n-2} \end{vmatrix}$$

bleibt unverändert, wenn an die Stelle der Grössen die Anfangsglieder ihrer Differenzen-Reihen gesetzt werden *).

Beweis. Man bilde aus der Reihe der gegebenen Grössen die Reihen ihrer ersten, zweiten, .. Differenzen, indem man jedes Glied von dem folgenden subtrahirt:

$$\begin{array}{cccccc} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & \cdot\;\cdot \\ & \Delta_1 & \Delta_{11} & \Delta_{12} & \Delta_{13} & \cdot\;\cdot \\ & & \Delta_2 & \Delta_{21} & \Delta_{22} & \cdot\;\cdot \\ & & & \Delta_3 & \Delta_{31} & \cdot\;\cdot \\ & & & & \Delta_4 & \cdot\;\cdot \\ & & & & & \cdot\;\cdot \end{array}$$

Subtrahirt man nun in P von der $n$ten, $(n-1)$ten, .. Colonne die jedesmal vorhergehende, so erhält man

$$P = \begin{vmatrix} a_0 & \Delta_1 & \cdot\;\cdot & \Delta_{1,n-2} \\ a_1 & \Delta_{11} & \cdot\;\cdot & \Delta_{1,n-3} \\ \cdot & \cdot & \cdot\;\cdot & \cdot \\ a_{n-1} & \Delta_{1,n-1} & \cdot\;\cdot & \Delta_{1,2n-3} \end{vmatrix}$$

Indem man dieselbe Operation wiederholt an den neuen Colonnen vollzieht, findet man

$$P = \begin{vmatrix} a_0 & \Delta_1 & \Delta_2 & \cdot\;\cdot & \Delta_{n-1} \\ a_1 & \Delta_{11} & \Delta_{21} & \cdot\;\cdot & \Delta_{n-1,1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\;\cdot & \cdot \\ a_{n-1} & \Delta_{1,n-1} & \Delta_{2,n-1} & \cdot\;\cdot & \Delta_{n-1,n-1} \end{vmatrix}$$

Führt man die angegebene Reihe von Operationen auch an den Zeilen der zuletzt gefundenen Determinante aus, so erhält man

$$P = \begin{vmatrix} a_0 & \Delta_1 & \Delta_2 & \cdot\;\cdot & \Delta_{n-1} \\ \Delta_1 & \Delta_2 & \Delta_3 & \cdot & \Delta_n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\;\cdot & \cdot \\ \Delta_{n-1} & \Delta_n & \Delta_{n+1} & \cdot\;\cdot & \Delta_{2,n-2} \end{vmatrix}$$

was zu beweisen war.

---

*) H. Hankel über eine besondre Classe der symmetrischen Determinanten. Göttingen 1861. Das System $a_{11} \,..\, a_{nn}$ heisst symmetrisch, wenn $a_{ik} = a_{ki}$. Das obige besondre System ist von Sylvester persymmetrisch, von Hankel orthosymmetrisch genannt worden.

Ist insbesondre a_k eine ganze Function $m$ten Grades von k, so bilden wie bekannt die Grössen a_0, a_1, a_2, .. eine arithmetische Progression $m$ter Ordnung, und die Glieder ihrer $m$ten Differenzen-Reihe haben den gemeinschaftlichen Werth $\Delta_m = 1.2...m$, weshalb Δ_{m+1}, Δ_{m+2}, .. verschwinden. Wenn nun $n-1=m$, so wird (§. 2, 7)

$$P = (-1)^{\frac{m(m+1)}{2}} (1.2...m)^{m+1}$$

während P verschwindet, wenn $n-1<m$. In beiden Fällen können statt der Grössen a_0, a_1, a_2, .. auch die Grössen a_i, a_{i+1}, a_{i+2}, gesetzt werden.

Wenn z. B. c eine beliebige Zahl ist und

$$a_k = \binom{c+k+m}{m} = \frac{(c+k+m)(c+k+m-1)..(c+k+1)}{1.2...m}$$

so hat man

$$P = \begin{vmatrix} \binom{c+m}{m} & \binom{c+m+1}{m} & .. & \binom{c+2m}{m} \\ \binom{c+m+1}{m} & . & .. & . \\ . & . & .. & . \\ \binom{c+2m}{m} & . & . & \binom{c+3m}{m} \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{m(m+1)}{2}}$$

11. Wenn man aus $R = \Sigma \pm a_{11} .. a_{nn}$ und $S = \Sigma \pm b_{11} .. b_{nn}$ neue Determinanten ableitet, nämlich t_{ih} aus R dadurch, dass man die $i$te Colonne von R durch die $h$te von S ersetzt, und u_{hk} aus S dadurch, dass man die $h$te Colonne von S durch die $k$te Colonne von R ersetzt, so hat die Summe

$$t_{i1}\, u_{1k} + t_{i2}\, u_{2k} + .. + t_{in}\, u_{nk}$$

den Werth RS oder 0, je nachdem $i=k$ oder nicht*).

Beweis. Bezeichnet man die Coefficienten der Elemente a_{ik} und b_{ik} in R und S durch α_{ik} und β_{ik}, so hat man (3)

---

*) Dieser Satz ist in einem allgemeinen Satz enthalten, der von Sylvester (s. unten §. 4, 10) herrührt. Den hier mitgetheilten Beweis hat Brioschi Det. (39) gegeben. Die einfachsten Fälle des Satzes kommen bei Bezout (équat. algebr. 1779 §. 220) vor. Die entsprechenden geometrischen Sätze (vergl. unten §. 15) hat Monge 1809 abgeleitet (Journ. de l'éc. polyt. Cah. 15 p. 68) und auf anderm Wege Möbius (baryc. Calc. §. 166 u. 171).

$$t_{i1} = b_{11}\ \alpha_{1i} + \ldots + b_{n1}\ \alpha_{ni}$$
$$\ldots\ldots\ldots$$
$$t_{in} = b_{1n}\ \alpha_{1i} + \ldots + b_{nn}\ \alpha_{ni}$$

folglich

$$t_{i1}\ \beta_{11} + \ldots + t_{in}\ \beta_{1n} = \alpha_{1i}\ S$$
$$\ldots\ldots\ldots$$
$$t_{i1}\ \beta_{n1} + \ldots + t_{in}\ \beta_{nn} = \alpha_{ni}\ S$$

folglich

$$t_{i1}\ (a_{1k}\ \beta_{11} + \ldots + a_{nk}\ \beta_{n1}) + \ldots + t_{in}\ (a_{1k}\ \beta_{1n} + \ldots + a_{nk}\ \beta_{nn})$$
$$= (a_{1k}\ \alpha_{1i} + \ldots + a_{nk}\ \alpha_{ni})\ S\,.$$

Nun ist $a_{1k}\ \beta_{11} + \ldots + a_{nk}\ \beta_{n1} = u_{1k}$, u. s. w.

Beispiele Schreibt man zur Abkürzung

$$(ab) \qquad\qquad (abc) \qquad\qquad (abcd) \qquad \ldots$$

statt

$$\begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \end{vmatrix} \qquad \ldots$$

so erhält man

$$(bc)(ad) + (ca)(bd) + (ab)(cd) = 0$$
$$(bcde)(aef) - (cda)(bef) + (dab)(cef) - (abc)(def) = 0$$
$$(bcde)(afgh) + (cdea)(bfgh) + (deab)(cfgh)$$
$$+ (eabc)(dfgh) + (abcd)(efgh) = 0 \qquad \text{u. s. w.}$$

12. Bestimmung von α_{ik} durch Differentiation. Wenn die Elemente des Systems von einander unabhängig sind, so kommt bei der Differentiation von R (1) in Bezug auf a_{ik} nur das Aggregat $a_{ik}\ \alpha_{ik}$ in Betracht. Nun ist α_{ik} von a_{ik} unabhängig, folglich kann der Coefficient von a_{ik} in R durch den partialen Differentialquotienten

$$\frac{\partial R}{\partial a_{ik}}$$

ausgedrückt werden *).

Der Coefficient von $a_{ik}\ a_{rs}$ in R erscheint als Coefficient von a_{rs} in α_{ik} und kann demnach durch Differentiation von α_{ik} nach a_{rs} gefunden, mithin durch

$$\frac{\partial^2 R}{\partial a_{ik}\ \partial a_{rs}}$$

*) Jacobi Det. 6. 10.

ausgedrückt werden. Aus diesem Coefficienten lässt sich der Coefficient von $a_{rk} a_{is}$ in R ableiten, wenn man i und r, d. h. die $i$te Zeile des gegebenen Systems mit der $r$ten vertauscht. Dabei erleidet R einen Zeichenwechsel, also ist der gesuchte Coefficient

$$\frac{\partial^2 R}{\partial a_{rk}\, \partial a_{is}} = -\frac{\partial^2 R}{\partial a_{ik}\, \partial a_{rs}}.$$

Analog lässt sich der Coefficient von $a_{ik}\, a_{rs}\, a_{uv}$ in R bestimmen. Man findet dabei Relationen zwischen den dritten partialen Differentialquotienten von R u. s. w.

13. Sind die Elemente des Systems, welche dieselben Numern in umgekehrter Ordnung haben, z. B. a_{ik} und a_{ki}, von einander abhängig, so sind auch die Determinanten $m$ten Grades

$$P = \begin{vmatrix} a_{ir} & a_{is} & a_{it} & \cdot \\ a_{kr} & a_{ks} & a_{kt} & \cdot \\ a_{lr} & a_{ls} & a_{lt} & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \end{vmatrix} \qquad Q = \begin{vmatrix} a_{ri} & a_{rk} & a_{rl} & \cdot \\ a_{si} & a_{sk} & a_{sl} & \cdot \\ a_{ti} & a_{tk} & a_{tl} & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \end{vmatrix}$$

deren eine aus der andern dadurch entsteht, dass die Reihe der ersten Numern mit der Reihe der zweiten Numern vertauscht wird, von einander abhängig.

I. Wenn insbesondere $a_{ki} = \varepsilon a_{ik}$, wobei ε entweder 1 oder -1 bedeutet, und in dem zweiten Falle die Elemente $a_{11}, a_{22}, \ldots$ als verschwindend vorausgesetzt werden, so erhält man durch Multiplication jeder Colonne mit ε

$$\varepsilon^m P = \begin{vmatrix} a_{ri} & a_{si} & a_{ti} & \cdot \\ a_{rk} & a_{sk} & a_{tk} & \cdot \\ a_{rl} & a_{sl} & a_{tl} & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{ri} & a_{rk} & a_{rl} & \cdot \\ a_{si} & a_{sk} & a_{sl} & \cdot \\ a_{ti} & a_{tk} & a_{tl} & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \end{vmatrix} = Q$$

Ist die Reihe $r, s, t, \ldots$ eine Permutation der Reihe $i, k, l, \ldots$ und $\varepsilon = -1$, m ungerade, so ist Q nicht nur $= P$ (§. 2, 4), sondern auch $= -P$, d. h. die Determinante verschwindet identisch.

II. Wenn die Elemente der Diagonale $a_{11}, a_{22}, \ldots$ real, die andern aber complex und paarweise a_{ik} und a_{ki} conjugirt sind, so hat die Determinante $R = \Sigma \pm a_{11} \ldots a_{nn}$ einen realen Werth*),

*) Hermite Comptes rendus 41 p. 181. Crelle J. 52 p. 40.

während die Elemente a_{ik} und a_{ki} in R conjugirte complexe Coefficienten α_{ik} und α_{ki} besitzen.

Vertauscht man nämlich in den complexen Elementen $\sqrt{-1}$ mit $-\sqrt{-1}$, so geht a_{ik} in a_{ki} über, und die Zeilen des gegebenen Systems werden die Colonnen des neuen Systems. Demnach bleibt die Determinante R unverändert (§. 2, 3), also kann sie nicht complex sein. Dagegen geht α_{ik} in α_{ki} über, so dass beide conjugirt complexe Werthe haben.

14. Wenn R wie oben die Determinante $\Sigma \pm a_{11} \ldots a_{nn}$ und α_{ik} den Coefficienten von a_{ik} in R bedeutet, so ist unter der Voraussetzung $a_{ki} = a_{ik}$

$$\alpha_{ik} = \alpha_{ki} = \frac{1}{2} \frac{\partial R}{\partial a_{ik}} \text{ *)}, \qquad \alpha_{ii} = \frac{\partial R}{\partial a_{ii}} .$$

Dagegen ist unter der Voraussetzung $a_{ki} = -a_{ik}$ und $a_{ii} = 0$

$$R = (-1)^n R , \qquad \alpha_{ik} = (-1)^{n-1} \alpha_{ki}$$

d. h. bei geradem n

$$\alpha_{ik} = -\alpha_{ki} = \frac{1}{2} \frac{\partial R}{\partial a_{ik}} , \qquad \alpha_{ii} = 0$$

und bei ungeradem n

$$R = 0 \text{ **)} , \qquad \alpha_{ik} = \alpha_{ki} .$$

Beweis. Die über R und α_{ik} aufgestellten Behauptungen folgen aus den im vorigen Artikel gefundenen Eigenschaften von P und Q (vergl. 1). Ferner ist wegen des Zusammenhangs zwischen den correspondirenden Elementen a_{ik} und a_{ki} (12)

$$\frac{\partial R}{\partial a_{ik}} = \alpha_{ik} + \alpha_{ki} \frac{\partial a_{ki}}{\partial a_{ik}} = \alpha_{ik} + \varepsilon \alpha_{ki} .$$

Nach der ersten Voraussetzung ist aber $\alpha_{ki} = \alpha_{ik}$, folglich

$$\frac{\partial R}{\partial a_{ik}} = 2\alpha_{ik} .$$

Gemäss der zweiten Voraussetzung und bei geradem n ist $-\alpha_{ki} = \alpha_{ik}$, mithin

$$\frac{\partial R}{\partial a_{ik}} = \alpha_{ik} - \alpha_{ki} = 2\alpha_{ik} .$$

Bei ungeradem n verschwindet $\frac{\partial R}{\partial a_{ik}}$ identisch, wie R selbst, und die Gleichung

*) Jacobi Crelle J. 12 p. 20.
**) Jacobi Crelle J. 2 p. 354.

$$\frac{\partial R}{\partial a_{ik}} = \alpha_{ik} - \alpha_{ki}$$

giebt das bereits erhaltene Resultat $\alpha_{ik} = \alpha_{ki}$.

15. Differential einer Determinante. Wenn alle Elemente des Systems als von einander unabhängige Variable betrachtet werden, so ist vermöge der Gleichung (12)

$$\frac{\partial R}{\partial a_{ik}} = \alpha_{ik}$$

das vollständige Differential*)

$$dR = \sum_{ik} \alpha_{ik}\, da_{ik} = \sum_i \alpha_{i1}\, da_{i1} + \ldots + \sum_i \alpha_{in}\, da_{in}$$

$$= \begin{vmatrix} da_{11} & a_{12} & a_{13} & . \\ . & . & . & . \\ da_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & . \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & da_{12} & a_{13} & . \\ . & . & . & . \\ a_{n1} & da_{n2} & a_{n3} & . \end{vmatrix} + \ldots$$

eine Summe von n^2 Gliedern, die man aus $\alpha_{ik}\, da_{ik}$ ableitet, indem man für i und k alle Numern von 1 bis n setzt, oder von n Determinanten, die man aus R ableitet, indem man die Elemente je einer unter den parallelen Reihen durch deren Differentiale ersetzt.

Beispiele.

$$R = \Sigma \pm a_{11} \ldots a_{44} = \begin{vmatrix} a & 2b & c & 0 \\ 0 & a & 2b & c \\ b & 2c & d & 0 \\ 0 & b & 2c & d \end{vmatrix}$$

$$\frac{\partial R}{\partial a} = \frac{\partial R}{\partial a_{11}}\frac{\partial a_{11}}{\partial a} + \frac{\partial R}{\partial a_{22}}\frac{\partial a_{22}}{\partial a} = \alpha_{11} + \alpha_{22}$$

$$\frac{\partial R}{\partial b} = \frac{\partial R}{\partial a_{12}}\frac{\partial a_{12}}{\partial b} + \frac{\partial R}{\partial a_{23}}\frac{\partial a_{23}}{\partial b} + \frac{\partial R}{\partial a_{31}}\frac{\partial a_{31}}{\partial b} + \frac{\partial R}{\partial a_{42}}\frac{\partial a_{42}}{\partial b}$$

$$= 2\alpha_{12} + 2\alpha_{23} + \alpha_{31} + \alpha_{42}$$

$$\frac{\partial R}{\partial c} = \alpha_{13} + \alpha_{24} + 2\alpha_{32} + 2\alpha_{43}$$

$$\frac{\partial R}{\partial d} = \alpha_{33} + \alpha_{44}\,.$$

Wenn man durch $y_1, y_2, \ldots$ gegebene Functionen von x und durch y_{ik} den $k$ten Differentialquotienten von y_i bezeichnet, so verschwindet die Determinante $n$ten Grades

$$R = \begin{vmatrix} y_1 & y_{11} & \cdot\cdot & y_{1,n-1} \\ . & . & \cdot\cdot & . \\ y_n & y_{n1} & \cdot\cdot & y_{n,n-1} \end{vmatrix}$$

*) Jacobi Det. 6

wenn die Elemente einer von den ersten $n-1$ Colonnen durch ihre Differentialquotienten ersetzt werden. Also ist*)

$$\frac{dR}{dx} = \begin{vmatrix} y_1 & y_{11} & \cdot\cdot & y_{1,n-2} & y_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot\cdot & \cdot & \cdot \\ y_n & y_{n1} & \cdot\cdot & y_{n,n-2} & y_{nn} \end{vmatrix}$$

Sind $t_1, t_2, \ldots, t_n$ von einander unabhängig, und

$$R_n = \begin{vmatrix} 1 & t_1 & t_1^2 & \cdot\cdot & t_1^{n-1} \\ 1 & t_2 & t_2^2 & \cdot\cdot & t_2^{n-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\cdot & \cdot \\ 1 & t_n & t_n^2 & \cdot\cdot & t_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

so findet man

$$\frac{\partial R_n}{\partial t_1} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2t_1 & \cdot\cdot & (n-1)\,t_1^{n-2} \\ 1 & t_2 & t_2^2 & \cdot\cdot & t_2^{n-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\cdot & \cdot \\ 1 & t_n & t_n^2 & \cdot\cdot & t_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

$$\frac{\partial^{n-1} R_n}{\partial t_1 \ldots \partial t_{n-1}} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2t_1 & \cdot\cdot & (n-1)\,t_1^{n-2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\cdot & \cdot \\ 0 & 1 & 2t_{n-1} & \cdot\cdot & (n-1)\,t_{n-1}^{n-2} \\ 1 & t_n & t_n^2 & \cdot\cdot & t_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{n-1} \cdot 1 \cdot 2 \ldots (n-1)\, R_{n-1}\,.$$

Ebenso ergiebt sich

$$f(t_1)^2 \frac{\partial}{\partial t_1}\left(\frac{R_n}{f(t_1)}\right) = \begin{vmatrix} -f'(t_1) & f(t_1) - t_1 f'(t_1) & \cdot\cdot & (n-1)\,t_1^{n-2} f(t_1) - t_1^{n-1} f'(t_1) \\ 1 & t_2 & \cdot\cdot & t_2^{n-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot\cdot & \cdot \\ 1 & t_n & \cdot\cdot & t_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

$$f(t_1)^2 f(t_2)^2 \ldots f(t_n)^2 \frac{\partial^n}{\partial t_1 \ldots \partial t_n}\left(\frac{R_n}{f(t_1) \ldots f(t_n)}\right)$$

$$= \begin{vmatrix} -f'(t_1) & f(t_1) - t_1 f'(t_1) & \cdot\cdot & (n-1)t_1^{n-2} f(t_1) - t_1^{n-1} f'(t_1) \\ \cdot & \cdot & \cdot\cdot & \cdot \\ -f'(t_n) & f(t_n) - t_n f'(t_n) & \cdot\cdot & (n-1)t_n^{n-2} f(t_n) - t_n^{n-1} f'(t_n) \end{vmatrix}$$

16. Bezeichnet man die Determinante $\Sigma \pm a_{11} \ldots a_{nn}$ durch R, und den Coefficienten des Elements a_{ik} in R durch α_{ik}, so giebt die Entwickelung der Determinante $(n+1)$ten Grades

$$S = \Sigma \pm a_{00}\, a_{11} \ldots a_{nn}$$

*) Abel Crelle J. 2 p. 22. Malmsten Crelle J. 39 p. 91.

nach den Elementen, welche mit a_{00} in derselben Zeile und Colonne stehn *)

$$S = a_{00} R - \sum_{ik} a_{i0} a_{0k} \alpha_{ik}$$

Die Glieder der Summe werden dargestellt, indem man für i und k alle Numern bis n ausser 0 setzt.

Beweis. Die Glieder der Determinante S enthalten entweder das Element a_{00} oder das Product eines der Elemente a_{10}, a_{20}, .. mit einem der Elemente a_{01}, a_{02}, .. z. B. $a_{i0} a_{0k}$. Das Aggregat der Glieder von S, in denen a_{00} vorkommt, ist $a_{00} R$ (1). Der Coefficient des Products $a_{i0} a_{0k}$ in S ist dem Coefficienten von $a_{00} a_{ik}$ in S entgegengesetzt gleich (12), mithin dem Coefficienten von a_{ik} in R entgegengesetzt gleich. Daher ist $-\alpha_{ik}$ der Coefficient von $a_{i0} a_{0k}$ in S.

Beispiel.

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ b' & 1 & 0 & 0 \\ c' & 0 & 1 & 0 \\ d' & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = a - bb' - cc' - dd' .$$

17. Ist das System der Elemente symmetrisch, so dass $a_{ki} = a_{ik}$ und folglich $\alpha_{ki} = \alpha_{ik}$ (13), so sind die Glieder der Summe (16), welche aus zwei verschiedenen Werthen von i und k entspringen, einander gleich.

Beispiele.

$$\begin{vmatrix} a & b_{01} & b_{02} \\ b_{01} & a_1 & b_{12} \\ b_{02} & b_{12} & a_2 \end{vmatrix} = aa_1a_2 - ab_{12}^2 - a_1b_{02}^2 - a_2b_{01}^2 + 2b_{01}b_{02}b_{12} .$$

$$\begin{vmatrix} a & b_{01} & b_{02} & b_{03} \\ b_{01} & a_1 & b_{12} & b_{13} \\ b_{02} & b_{12} & a_2 & b_{23} \\ b_{03} & b_{13} & b_{23} & a_3 \end{vmatrix}$$

$$= a(a_1a_2a_3 - a_1b_{23}^2 - a_2b_{13}^2 - a_3b_{12}^2 + 2b_{12}b_{13}b_{23})$$

$$- b_{01}^2(a_2a_3 - b_{23}^2) - b_{02}^2(a_1a_3 - b_{13}^2) - b_{03}^2(a_1a_2 - b_{12}^2)$$

$$+ 2b_{01}b_{02}(a_3b_{12} - b_{13}b_{23}) + 2b_{01}b_{03}(a_2b_{13} - b_{12}b_{23}) + 2b_{02}b_{03}(a_1b_{23} - b_{12}b_{13}) .$$

*) Cauchy J. de l'ec. polyt. Cah. 17 p. 69.

Insbesondere ist

$$\begin{vmatrix} 0 & a & b \\ a & 0 & c \\ b & c & 0 \end{vmatrix} = 2abc\,.$$

$$\begin{vmatrix} 0 & a & b & c \\ a & 0 & c_1 & b_1 \\ b & c_1 & 0 & a_1 \\ c & b_1 & a_1 & 0 \end{vmatrix} = a^2a_1{}^2 + b^2b_1{}^2 + c^2c_1{}^2 - 2aa_1bb_1 - 2aa_1cc_1 - 2bb_1cc_1$$

$$= (aa_1 + bb_1 - cc_1)^2 - 4aa_1bb_1$$

$$= -(\sqrt{aa_1} + \sqrt{bb_1} + \sqrt{cc_1})(-\sqrt{aa_1} + \sqrt{bb_1} + \sqrt{cc_1})$$

$$\times (\sqrt{aa_1} - \sqrt{bb_1} + \sqrt{cc_1})(\sqrt{aa_1} + \sqrt{bb_1} - \sqrt{cc_1})\,.$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & c & b \\ 1 & c & 0 & a \\ 1 & b & a & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & a & b & c \\ a & 0 & 1 & 1 \\ b & 1 & 0 & 1 \\ c & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= a^2 + b^2 + c^2 - 2ab - 2ac - 2bc = (a + b - c)^2 - 4ab$$

$$= -(\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c})(-\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c})(\sqrt{a} - \sqrt{b} + \sqrt{c})(\sqrt{a} + \sqrt{b} - \sqrt{c})\,.$$

§. 4. Zerlegung einer Determinante nach partialen Determinanten.

1. Wenn man aus dem gegebenen System von n^2 Elementen

$$\begin{matrix} a_{11} & \cdot & \cdot & a_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & \cdot & \cdot & a_{nn} \end{matrix}$$

beliebig m Zeilen auswählt, deren Numern durch f, g, h, .. bezeichnet werden, und von diesen Zeilen m Colonnen behält, deren Numern r, s, t, .. sind, so heisst die Determinante $m$ten Grades

$$P = \begin{vmatrix} a_{fr} & a_{fs} & a_{ft} & \cdot \\ a_{gr} & a_{gs} & a_{gt} & \cdot \\ a_{hr} & a_{hs} & a_{ht} & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \end{vmatrix}$$

eine partiale Determinante*) des gegebenen Systems.

*) Jacobi Crelle J. 27 p. 206. 30 p. 136. Von gleicher Bedeutung ist Dét. d'un système dérivé bei Cauchy J. de l'éc. polyt. Cah. 17 p. 96, Minor determinant bei den englischen, Unterdeterminante (Subdeterminante) bei den deutschen Mathematikern.

Die partiale Determinante P ist der gemeinschaftliche Divisor derjenigen Glieder der Determinante $R = \Sigma \pm a_{11} \dots a_{nn}$, welche dadurch entstehen, dass von den ersten Numern $f, g, h, \dots$ ihre Plätze behalten und die übrigen $n-m$ unter einander auf alle Arten vertauscht werden; oder dadurch, dass von den zweiten Numern $r, s, t, \dots$ ihre Plätze behalten und die übrigen vertauscht werden. Daher ist der Coefficient Q, welchen P in R hat, eine partiale Determinante $(n-m)$ten Grades, welche sich wie folgt angeben lässt. Sind

$$f, g, h, \dots, \varphi, \chi, \psi, \dots$$
$$r, s, t, \dots, \varrho, \sigma, \tau, \dots$$

Permutationen von $1, 2, \dots, n$, so ist

$$\Sigma \pm a_{fr}\, a_{gs}\, a_{ht} \dots a_{\varphi\varrho}\, a_{\chi\sigma}\, a_{\psi\tau} \dots = \varepsilon R,$$

wobei ε den Werth 1 oder -1 hat, je nachdem die Permutationen in eine Classe gehören oder nicht (§. 2, 4). Nun hat P in εR denselben Coefficienten, als das Product $a_{fr}\, a_{gs}\, a_{ht} \dots$, folglich ist

$$\varepsilon Q = \Sigma \pm a_{\varphi\varrho}\, a_{\chi\sigma}\, a_{\psi\tau} \dots$$

Die Determinante R geht in Q über, wenn die Elemente $a_{fr}, a_{gs}, a_{ht}, \dots$ den Werth 1 erhalten, während die übrigen Elemente, welche mit den genannten je in einer Zeile oder in einer Colonne stehn, verschwinden *).

Unter der Voraussetzung von einander unabhängiger Elemente hat man (§. 3, 12)

$$Q = \frac{\partial^m R}{\partial a_{fr}\, \partial a_{gs}\, \partial a_{ht} \dots}.$$

2. Die Glieder der Determinante R enthalten von den Elementen der Diagonale entweder keines, oder 1, oder 2, .., oder alle n. Bildet man die Coefficienten, welche a_{ff}, $a_{ff}\, a_{gg}$, $a_{ff}\, a_{gg}\, a_{hh}, \dots$ in R haben, und bezeichnet man die Werthe, welche R und diese partialen Determinanten annehmen, wenn alle Elemente der Diagonale $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ durch Nullen ersetzt werden, durch D, D_f, D_{fg}, $D_{fgh}, \dots$, so hat man

$$R = D + \Sigma a_{ff}\, D_f + \Sigma a_{ff}\, a_{gg}\, D_{fg} + \dots + a_{11}\, a_{22} \dots a_{nn}.$$

Die Glieder der einzelnen Summen werden erhalten, wenn man

---

*) Daher heissen die partialen Determinanten P und Q complementär bei CAUCHY l. c.

für f alle Numern $1, 2, .., n$, für fg alle Binionen derselben, für fgh alle Ternionen derselben u. s. w. setzt*).

Beweis. Die Glieder von R, welche keines der Elemente $a_{11}, a_{22}, .., a_{nn}$ enthalten, stimmen mit den Gliedern von D überein. Aus dem Aggregat der Glieder von R, welche das Product von m bestimmten Elementen der Diagonale $a_{ff}\, a_{gg}\, a_{hh} ..$ enthalten, entspringt das Aggregat der Glieder von R, welche ausser jenen Elementen kein andres Element der Diagonale enthalten, indem man die übrigen Elemente der Diagonale durch Nullen ersetzt. Also wird dieses Aggregat durch

$$a_{ff}\, a_{gg}\, a_{hh} \, .. \, D_{fgh\,..}$$

ausgedrückt. Die Summe dieser auf alle möglichen Arten gebildeten Aggregate umfasst alle Glieder der Determinante R.

Anmerkung. Die Anzahl der Glieder von R, welche k oder mehr Elemente der Diagonale enthalten, wird durch

$$\chi(k) = \binom{n}{k}(n-k)! = \frac{n!}{k!}$$

ausgedrückt, wenn aus n Elementen k auf $\binom{n}{k}$ Arten gewählt werden können, und wenn es von m Elementen $m!$ Permutationen giebt. Dabei hat man $\chi(0) = n!$ und $\chi(n) = 1$. Demnach werden die Anzahlen der Glieder von R, welche $n-1$, $n-2$, $n-3$, .. Elemente der Diagonale enthalten, durch

$$\begin{aligned}&\chi(n-1) - \chi(n)\\ &\chi(n-2) - \chi(n-1) + \chi(n)\\ &\chi(n-3) - \chi(n-2) + \chi(n-1) - \chi(n)\end{aligned}$$

u. s. w. ausgedrückt, und die Anzahl der Glieder von R, welche keines von allen Elementen der Diagonale enthalten, d. i. die Anzahl der Glieder von D beträgt

$$\begin{aligned}\psi(n) &= \chi(0) - \chi(1) + \chi(2) - \,..\, + (-1)^n\\ &= n!\left(\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \,..\, + \frac{(-1)^n}{n!}\right)\end{aligned}$$

Daher ist

$$\begin{aligned}\psi(n+1) &= (n+1)!\left(\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \,..\, + \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!}\right)\\ &= (n+1)\psi(n) + (-1)^{n+1}\end{aligned}$$

*) Cayley Crelle J. 38 p. 93.

also $\psi(1) = 0$, $\psi(2) = 1$, $\psi(3) = 2$, $\psi(4) = 9$, $\psi(5) = 44$, u. s. w. Zufolge des obigen Satzes hat man

$$n! = \psi(n) + \binom{n}{1}\psi(n-1) + \binom{n}{2}\psi(n-2) + \ldots + \binom{n}{n-2}\psi(2) + 1 .$$

3. Die Entwickelung der Determinante

$$f(z) = \begin{vmatrix} a_{11} + z & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} + z & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} + z \end{vmatrix}$$

nach Potenzen von z giebt

$$R_n + z\Sigma R_{n-1} + z^2\Sigma R_{n-2} + \ldots + z^{n-1}\Sigma R_1 + z^n ,$$

wo

$$R_m = \begin{vmatrix} a_{ii} & a_{ik} & \cdot \\ a_{ki} & a_{kk} & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix}$$

eine partiale Determinante $m$ten Grades ist, deren Diagonale aus Elementen der Diagonale von R_n besteht, und ΣR_m die Summe der Determinanten bedeutet, welche aus R_m entspringen, indem für $i, k, \ldots$ alle verschiedenen Combinationen von je m aus der Reihe $1, 2, \ldots, n$ gesetzt werden*).

Beweis. Die Uebereinstimmung des ersten Gliedes R_n mit $f(0)$ und die Richtigkeit des letzten Gliedes z^n ist unmittelbar wahrzunehmen. Die Glieder der Entwickelung, welche z^m enthalten, entspringen aus den Gliedern der Determinante $f(z)$, worin irgend welche m Elemente der Diagonale vorkommen. Bedeutet nun $i, k, \ldots$ irgend eine (aufsteigend geordnete) Combination von m Numern der Reihe $1, 2, \ldots n$ und $r, s, \ldots$ die Reihe der übrigen Numern, so ist (§. 2, 4)

$$f(z) = \begin{vmatrix} a_{ii} + z & a_{ik} & \ldots & a_{ir} & a_{is} & \cdot \\ a_{ki} & a_{kk} + z & \ldots & a_{kr} & a_{ks} & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & & \\ a_{ri} & a_{rk} & \ldots & a_{rr} + z & a_{rs} & \cdot \\ a_{si} & a_{sk} & \ldots & a_{sr} & a_{ss} + z & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & & \end{vmatrix}$$

Aus dieser Form von $f(z)$ erkennt man (1), dass die Entwickelung des Products

*) Jacobi Crelle J. 12 p. 15.

$$\begin{vmatrix} a_{ii}+z & a_{ik} & . \\ a_{ki} & a_{kk}+z & . \\ . & . & \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{rr}+z & a_{rs} & . \\ a_{sr} & a_{ss}+z & . \\ . & . & \end{vmatrix}$$

einen Theil der gesuchten Entwickelung von der Determinante $f(z)$ bildet. Die Entwickelung des ersten Factors nach Potenzen von z schliesst mit z^m, die des zweiten Factors beginnt mit

$$\begin{vmatrix} a_{rr} & a_{rs} & . \\ a_{sr} & a_{ss} & . \\ . & . & \end{vmatrix}$$

Daher ist

$$z^m \begin{vmatrix} a_{rr} & a_{rs} & . \\ a_{sr} & a_{ss} & . \\ . & . & \end{vmatrix}$$

die allgemeine Formel für ein Glied von $f(z)$, in welchem z^m vorkommt. Indem man für i, k, .. alle möglichen Combinationen von je m Numern aus der Reihe 1, 2, .., n, folglich für r, s, .. alle möglichen Combinationen von je $n-m$ aus derselben Reihe setzt, erhält man alle Glieder von $f(z)$, in denen der Factor z^m anzutreffen ist.

Anmerkung. Die analoge Entwickelung von

$$U = \begin{vmatrix} a-u & b & c \\ a' & b'-u' & c' \\ a'' & b'' & c''-u'' \end{vmatrix}$$

ergiebt

$$\Delta - u\alpha - u'\beta' - u''\gamma'' + u'u''a + uu''b' + uu'c'' - uu'u''$$

wenn

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix}$$

und α, β', γ'' die Coefficienten der Elemente a, b', c'' in Δ bedeuten. Unter den Voraussetzungen

$$u = a + b + c\,, \qquad u' = a' + b' + c'\,, \qquad u'' = a'' + b'' + c''$$

verschwindet U (§. 3, 4) und man hat

$$\begin{aligned} \Delta &= uu'u'' - u'u''a - uu''b' - uu'c'' + u\alpha + u'\beta' + u''\gamma'' \\ &= uu'u'' - u'u''b - uu''c' - uu'a'' + u\beta + u'\gamma' + u''\alpha'' \\ &= uu'u'' - u'u''c - uu''a' - uu'b'' + u\gamma + u'\alpha' + u''\beta'' \end{aligned}$$

nach cyclischer Vertauschung der Colonnen, bei welcher Δ das Zeichen nicht wechselt (§. 1, 5). Daher ist

$$\frac{A}{uu'u''} = 1 - \frac{a}{u} - \frac{b'}{u'} - \frac{c''}{u''} + \frac{\alpha}{u'u''} + \frac{\beta'}{uu''} + \frac{\gamma''}{uu'}$$

wovon die 3 letzten Glieder wiederum zerlegt werden können*).

4. Die Determinante $n$ten Grades $R = \Sigma \pm a_{11} \,..\, a_{nn}$ kann in eine Summe von

$$\binom{n}{m} = \frac{n(n-1)\,..\,(n-m+1)}{1\,.\,2\,..\,m} = \mu$$

Producten je einer partialen Determinante $m$ten Grades und einer zugehörigen partialen Determinante $(n-m)$ten Grades zerlegt werden.

Aus den Numern $1, 2, .., n$, durch deren Permutationen die Glieder der Determinante R entstehn, wähle man m verschiedene z. B. $f, g, h, ..$ und bilde die partiale Determinante $m$ten Grades

$$P = \Sigma \pm a_{f1}\, a_{g2}\, a_{h3} \, \ldots$$

Werden die übrigen Numern durch $r, s, t, ..$ bezeichnet, so hat P in

$$\varepsilon R = \Sigma \pm a_{f1}\, a_{g2}\, a_{h3} \, \ldots \, a_{r,m+1}\, a_{s,m+2}\, a_{t,m+3} \, \ldots$$

zum Coefficienten die partiale Determinante $(n-m)$ten Grades

$$Q = \Sigma \pm a_{r,m+1}\, a_{s,m+2}\, a_{t,m+3} \, \ldots,$$

wenn ε den Werth 1 oder -1 hat, je nachdem die Reihen $f, g, h, .., r, s, t, ..$ und $1, 2, .., n$ in dieselbe Classe der Permutationen gehören oder nicht. Dann ist

$$R = \Sigma\, \varepsilon PQ$$

eine Summe von μ Gliedern, welche dadurch gebildet werden, dass man für $f, g, h, ..$ alle Combinationen von m verschiedenen Numern der Reihe $1, 2, .., n$, für $r, s, t, ..$ die jedesmal übrigen Numern setzt, und ε auf die angegebene Art bestimmt**).

Beweis. Ein Product wie PQ enthält diejenigen Glieder von R, welche aus dem Anfangsglied $a_{11} \,..\, a_{nn}$ dadurch entstehn, dass man von den beweglichen Numern m in eine Gruppe, die übrigen in eine zweite Gruppe vereinigt, und die Numern der einzelnen Gruppen permutirt. Wenn man die einzelnen Gruppen auf alle möglichen Arten bildet und dabei die Numern der Gruppen permutirt, so erhält man alle Permutationen der

*) Vergl. Jacobi Crelle J. 5 p. 350.

**) Vandermonde l. c. p. 524 und Laplace l. c. p. 294. Jacobi Det. 8.

m beweglichen Numern. Also umfasst die angegebene Summe von Producten alle Glieder von R.

Das Product PQ hat $1.2..m.1.2..(n-m)$ Glieder; in der That hat die Summe aller Producte μmal so viel d. i. $1.2..n$ Glieder.

Beispiel.

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} c_2 & d_2 \\ c_3 & d_3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a & b \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} c_1 & d_1 \\ c_3 & d_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} c_1 & d_1 \\ c_2 & d_2 \end{vmatrix}$$

$$+ \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} c & d \\ c_3 & d_3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} c & d \\ c_2 & d_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} c & d \\ c_1 & d_1 \end{vmatrix}$$

Die Zerlegung einer Determinante $n$ten Grades in eine Summe von Producten aus partialen Determinanten 2ten und $(n-2)$ten Grades findet man ausführlich behandelt bei Jacobi Det. 9 u. 10.

5. Die Determinante R kann auch in eine Summe von Producten aus mehr als je zwei partialen Determinanten zerlegt werden.

Man wähle aus den beweglichen Numern $1, 2, .., n$ zuerst α z. B. $f, g, h, ..$; dann aus den übrigen Numern β z. B. $p, q, r, ..$; dann aus den übrigen γ z. B. $t, u, v, ..$, u. s. f. so dass $\alpha + \beta + \gamma + .. = n$; und bilde nun die partialen Determinanten αten, βten, γten, .. Grades

$$A = \Sigma \pm a_{f1}\ a_{g2}\ a_{h3}\ ..$$
$$B = \Sigma \pm a_{p,\alpha+1}\ a_{q,\alpha+2}\ a_{r,\alpha+3}\ ..$$
$$C = \Sigma \pm a_{t,\alpha+\beta+1}\ a_{u,\alpha+\beta+2}\ a_{v,\alpha+\beta+3}\ ..$$

u. s. w. Dann ist $R = \Sigma\, \varepsilon ABC..$ die Summe von

$$\binom{n}{\alpha}\binom{n-\alpha}{\beta}\binom{n-\alpha-\beta}{\gamma}.. = \frac{1.2..n}{1.2..\alpha.1.2..\beta.1.2..\gamma...}$$

Gliedern, welche entstehn, indem man A, B, C, .. auf alle möglichen Arten bildet. Dabei bedeutet ε die positive oder negative Einheit, je nachdem die Reihe

$$f, g, h, .., p, q, r, .., t, u, v, ...$$

eine Permutation der ersten oder der zweiten Classe von $1, 2, \ldots, n$ ist*).

6. Wenn die Elemente des Systems verschwinden, welche m Colonnen mit $n-m$ Zeilen gemein haben, so reducirt sich die Determinante auf das Product einer Determinante $m$ten Grades mit einer Determinante $(n-m)$ten Grades**).

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdot\cdot & a_{1m} & a_{1,m+1} & \cdot\cdot & a_{1n} \\ \cdot & \cdot\cdot & \cdot & \cdot & \cdot\cdot & \cdot \\ a_{m1} & \cdot\cdot & a_{mm} & a_{m,m+1} & \cdot\cdot & a_{mn} \\ 0 & \cdot\cdot & 0 & a_{m+1,m+1} & \cdot\cdot & a_{m+1,n} \\ \cdot & \cdot\cdot & \cdot & \cdot & \cdot\cdot & \cdot \\ 0 & \cdot\cdot & 0 & a_{n,m+1} & \cdot\cdot & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdot\cdot & a_{1m} \\ \cdot & \cdot\cdot & \cdot \\ a_{m1} & \cdot\cdot & a_{mm} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{m+1,m+1} & \cdot\cdot & a_{m+1,n} \\ \cdot & \cdot\cdot & \cdot \\ a_{n,m+1} & \cdot\cdot & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Wenn die Elemente verschwinden, welche m Colonnen mit mehr als $n-m$ Zeilen gemein haben, so verschwindet die Determinante identisch.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdot\cdot & a_{1m} & a_{1,m+1} & \cdot\cdot & a_{1n} \\ \cdot & \cdot\cdot & \cdot & \cdot & \cdot\cdot & \cdot \\ a_{m-1,1} & \cdot\cdot & a_{m-1,m} & a_{m-1,m+1} & \cdot\cdot & a_{m-1,n} \\ 0 & \cdot\cdot & 0 & a_{m,m+1} & \cdot\cdot & a_{mn} \\ \cdot & \cdot\cdot & \cdot & \cdot & \cdot\cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot\cdot & \cdot & \cdot & \cdot\cdot & \cdot \\ 0 & \cdot\cdot & 0 & a_{n,m+1} & \cdot\cdot & a_{nn} \end{vmatrix} = 0 .$$

Beweis. Zerlegt man die gegebene Determinante in eine Summe von Producten aus partialen Determinanten $m$ten und $(n-m)$ten Grades dergestalt, dass die Elemente der Determinanten $m$ten Grades aus den oben erwähnten m Colonnen, die Elemente der Determinanten $(n-m)$ten Grades aus den übrigen Colonnen des Systems gewählt werden (4), so ist unter den zu bildenden Determinanten $m$ten Grades in dem ersten Falle nur eine, in dem zweiten Falle keine von Null verschieden.

Beispiel.

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ b_4 & b_3 & b_2 & b_1 \\ a_4 & a_3 & a_2 & a_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1+a_4 & a_2+a_3 & a_3+a_2 & a_4+a_1 \\ b_1+b_4 & b_2+b_3 & b_3+b_2 & b_4+b_1 \\ b_4 & b_3 & b_2 & b_1 \\ a_4 & a_3 & a_2 & a_1 \end{vmatrix}$$

*) Dieser allgemeine Satz heisst der LAPLACE'sche Determinantensatz. Vergl. die vorigen Citate.

**) JACOBI Det. 5.

$$= \begin{vmatrix} a_1+a_4 & a_2+a_3 & 0 & 0 \\ b_1+b_4 & b_2+b_3 & 0 & 0 \\ b_4 & b_3 & b_2-b_3 & b_1-b_4 \\ a_4 & a_3 & a_2-a_3 & a_1-a_4 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_1+a_4 & a_2+a_3 \\ b_1+b_4 & b_2+b_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_1-a_4 & a_2-a_3 \\ b_1-b_4 & b_2-b_3 \end{vmatrix}$$

7. Um die Determinante $(m+n)$ten Grades

$$R = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} & e_{11} & \cdot\cdot & e_{1n} \\ \cdot & \cdot\cdot & \cdot & \cdot & \cdot\cdot & \cdot \\ a_{m1} & \cdot\cdot & a_{mm} & e_{m1} & \cdot\cdot & e_{mn} \\ 0 & \cdot\cdot & 0 & b_{11} & \cdot\cdot & b_{n1} \\ \cdot & \cdot\cdot & \cdot & \cdot & \cdot\cdot & \cdot \\ 0 & \cdot\cdot & 0 & b_{1m} & \cdot\cdot & b_{nm} \\ a_{m+1,1} & \cdot\cdot & a_{m+1,m} & e_{m+1,1} & \cdot\cdot & e_{m+1,n} \\ \cdot & \cdot\cdot & \cdot & \cdot & \cdot\cdot & \cdot \\ a_{n1} & \cdot\cdot & a_{nm} & e_{n1} & \cdot\cdot & e_{nn} \end{vmatrix}$$

deren Elemente $e_{11} \,..\, e_{nn}$ so angenommen werden, dass e_{ik} den Werth 1 oder 0 hat, je nachdem i und k gleich oder ungleich sind, zu entwickeln, bilde man aus den ersten m Colonnen eine beliebige nicht verschwindende partiale Determinante $m$ten Grades

$$A = \Sigma \pm a_{f1}\, a_{g2} \,..\, a_{lm}\,.$$

Um den Coefficienten B, welchen A in R besitzt, zu finden, permutire man die von den Elementen b unabhängigen Zeilen, bis dass die $f$te, $g$te, .., $l$te Zeile zur 1ten, 2ten, .., $m$ten gemacht ist und die übrigen Zeilen folgen; dann nehme man dieselben Vertauschungen der von den Elementen a unabhängigen Colonnen vor. Hierdurch hat die Determinante R keinen Wechsel erlitten, und in jede Stelle des Systems, welche ein Element e mit 2 gleichen Numern enthielt, ist wiederum ein solches Element eingetreten. Also ist der Coefficient B die Determinante $n$ten Grades

$$\Sigma \pm b_{1f}\, b_{2g} \,..\, b_{ml}\, e_{rr}\, e_{ss} \,.. = \Sigma \pm b_{1f}\, b_{2g} \,..\, b_{ml} \quad (§. 2, 7).$$

Demnach ist (4) $R = \Sigma\, AB$ eine Summe, deren Glieder dadurch entstehn, dass man für $f, g, .., l$ alle Combinationen von m verschiedenen Numern der Reihe 1, 2, .., n setzt.

8. Aus der Reihe $1, 2, .., n$ können m verschiedene Numern auf

$$\mu = \binom{n}{m}$$

verschiedene Arten gewählt werden. Diese Combinationen sollen nach Belieben die Numern $1, 2, .., \mu$ erhalten. Haben nun z. B. die Combinationen $fgh..$ und $stu..$ die Numern γ und δ, so soll die partiale Determinante $m$ten Grades

$$\Sigma \pm a_{fs}\, a_{gt}\, a_{hu} \, ..$$

durch $p_{\gamma\delta}$, und deren Coefficient in $A = \Sigma \pm a_{11} .. a_{nn}$ durch $p'_{\gamma\delta}$ bezeichnet werden.

Lehrsatz. Die Summen

$$p_{\gamma 1}\, p'_{\delta 1} + p_{\gamma 2}\, p'_{\delta 2} + .. + p_{\gamma\mu}\, p'_{\delta\mu}$$
$$p_{1\gamma}\, p'_{1\delta} + p_{2\gamma}\, p'_{2\delta} + .. + p_{\mu\gamma}\, p'_{\mu\delta}$$

haben den Werth A oder 0, je nachdem die Numern γ und δ übereinstimmen oder nicht. Vergl. §. 3, 3 *).

Beweis. Wenn man die partialen Determinanten

$$p_{\delta 1},\ p_{\delta 2}, .., p_{\delta\mu}$$

bildet und die ihnen in A zugehörigen Coefficienten durch

$$p'_{\delta 1},\ p'_{\delta 2}, .., p'_{\delta\mu}$$

bezeichnet, so hat man (4)

$$A = p_{\delta 1}\, p'_{\delta 1} + p_{\delta 2}\, p'_{\delta 2} + .. + p_{\delta\mu}\, p'_{\delta\mu}\, .$$

Aus denselben Gründen folgt die Entwickelung

$$A = p_{1\delta}\, p'_{1\delta} + p_{2\delta}\, p'_{2\delta} + .. + p_{\mu\delta}\, p'_{\mu\delta}\, .$$

Die Reihe der ersten (zweiten) Numern derjenigen Elemente a, aus denen das Anfangsglied von $p_{\gamma\eta}$ besteht, bildet mit der Reihe der ersten (zweiten) Numern derjenigen Elemente, die in dem Anfangsglied von $p'_{\gamma\eta}$ vorkommen, zusammen eine Reihe von n Numern, die alle von einander verschieden sind (1). Dagegen bildet die zuerst erwähnte Reihe mit der Reihe der ersten (zweiten) Numern derjenigen Elemente, die in dem Anfangsglied von $p'_{\delta\eta}$ vorkommen, zusammen eine Reihe von n Numern, die nicht alle von einander verschieden sind. Also ist jede von den beiden Summen

*) Cauchy l. c. p. 100.

$$p_{\gamma 1}\, p'_{\delta 1} + p_{\gamma 2}\, p'_{\delta 2} + \ldots + p_{\gamma\mu}\, p'_{\delta\mu}$$
$$p_{1\gamma}\, p'_{1\delta} + p_{2\gamma}\, p'_{2\delta} + \ldots + p_{\mu\gamma}\, p'_{\mu\delta}$$

eine Entwickelung der Determinante eines Systems von n^2 Elementen, dessen parallele Reihen nicht alle von einander verschieden sind. Die Determinante eines solchen Systems verschwindet identisch (§. 2, 4).

9. Wenn die partialen Determinanten $q_{\gamma\eta}$ und $q'_{\gamma\eta}$ aus den Elementen b der Determinante

$$B = \Sigma \pm b_{11} \ldots b_{nn}$$

ebenso zusammengesetzt werden, als die partialen Determinanten $p_{\gamma\eta}$ und $p'_{\gamma\eta}$ aus den Elementen a der Determinante (8)

$$A = \Sigma \pm a_{11} \ldots a_{nn}\,;$$

und wenn man aus den beiden Systemen die Determinanten $n$ten Grades

$$t_{\gamma\delta} = p_{\gamma 1}\, q'_{\delta 1} + p_{\gamma 2}\, q'_{\delta 2} + \ldots + p_{\gamma\mu}\, q'_{\delta\mu}$$
$$u_{\gamma\delta} = q_{\gamma 1}\, p'_{\delta 1} + q_{\gamma 2}\, p'_{\delta 2} + \ldots + q_{\gamma\mu}\, p'_{\delta\mu}$$

ableitet, so hat die Summe der Producte

$$t_{\gamma 1}\, u_{1\delta} + t_{\gamma 2}\, u_{2\delta} + \ldots + t_{\gamma\mu}\, u_{\mu\delta}$$

den Werth AB oder 0, je nachdem die Numern γ und δ übereinstimmen oder nicht*).

Beweis. Aus dem System

$$t_{\gamma 1} = p_{\gamma 1}\, q'_{11} + \ldots + p_{\gamma\mu}\, q'_{1\mu}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$t_{\gamma\mu} = p_{\gamma 1}\, q'_{\mu 1} + \ldots + p_{\gamma\mu}\, q'_{\mu\mu}$$

findet man nach (8)

$$t_{\gamma 1}\, q_{11} + \ldots + t_{\gamma\mu}\, q_{\mu 1} = p_{\gamma 1}\, B$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$t_{\gamma 1}\, q_{1\mu} + \ldots + t_{\gamma\mu}\, q_{\mu\mu} = p_{\gamma\mu}\, B\,.$$

Indem man die Zeilen dieses Systems mit $p'_{\delta 1}, \ldots, p'_{\delta\mu}$ multiplicirt und dann colonnenweise addirt, erhält man

$$t_{\gamma 1}\,(q_{11}\, p'_{\delta 1} + \ldots + q_{1\mu}\, p'_{\delta\mu}) + \ldots + t_{\gamma\mu}\,(q_{\mu 1}\, p'_{\delta 1} + \ldots + q_{\mu\mu}\, p'_{\delta\mu})$$
$$= (p_{\gamma 1}\, p'_{\delta 1} + \ldots + p_{\gamma\mu}\, p'_{\delta\mu})\, B$$

d. i. AB oder 0, w. z. b. w.

---

*) Sylvester Philos. Mag. 1851 II p. 142 und 1852 II p. 342. Beweis von Brioschi Det. (63).

§. 5. Producte von Determinanten.

1. Lehrsatz. Wenn das Element c_{ik} ein Polynomium von n Gliedern und jedes Glied das Product von 2 Factoren ist, deren erster von dem Index k, deren zweiter von dem Index i unabhängig ist, wenn also

$$c_{ik} = a_{i1}\, b_{k1} + a_{i2}\, b_{k2} + \ldots + a_{in}\, b_{kn}$$

aus der $i$ten Zeile des Systems

$$\begin{array}{ccc} a_{11} & \cdot\ \cdot & a_{1n} \\ a_{21} & \cdot\ \cdot & a_{2n} \\ \cdot & \cdot\ \cdot & \cdot \end{array}$$

und der $k$ten Zeile des Systems

$$\begin{array}{ccc} b_{11} & \cdot\ \cdot & b_{1n} \\ b_{21} & \cdot\ \cdot & b_{2n} \\ \cdot & \cdot\ \cdot & \cdot \end{array}$$

zusammengesetzt ist; wenn ferner $fgh\,..$ und $qrs\,..$ gegebene Combinationen von m verschiedenen Numern der Reihe 1 bis n bedeuten, so ist die Determinante $m$ten Grades

$$\Sigma \pm c_{fq}\, c_{gr}\, c_{hs}\, \ldots$$

die Summe der Producte, welche aus der Formel

$$\Sigma \pm a_{ft}\, a_{gu}\, a_{hv}\, \ldots \Sigma \pm b_{qt}\, b_{ru}\, b_{sv}\, \ldots$$

dadurch entspringen, dass man für $tuv\,..$ alle Combinationen von je m verschiedenen Numern der Reihe 1 bis n setzt. Die Determinante $n$ten Grades $\Sigma \pm c_{11} \ldots c_{nn}$ ist dem Product $\Sigma \pm a_{11} \ldots a_{nn}$ $\Sigma \pm b_{11} \ldots b_{nn}$ gleich. Die Determinanten höherer Grade der Elemente c verschwinden*).

Beweis. Wenn jede der Numern $t, u, v, \ldots$ alle Werthe der Reihe 1 bis n erhält, so ist nach der Voraussetzung das Anfangsglied der Determinante

$$c_{fq}\, c_{gr}\, c_{hs} \ldots = \left(\sum_t a_{ft}\, b_{qt}\right)\left(\sum_u a_{gu}\, b_{ru}\right)\left(\sum_v a_{hv}\, b_{sv}\right) \ldots$$

$$= \sum_{tuv..} a_{ft}\, a_{gu}\, a_{hv} \ldots b_{qt}\, b_{ru}\, b_{sv} \ldots$$

---

*) Binet und Cauchy (in den gleichzeitigen Abhandlungen J. de l'éc. polyt. Cah. 16 p. 286 und Cah. 17 p. 81, 107) haben diesen Satz gefunden durch Betrachtung der besondern Fälle, welche Lagrange (Mém. de l'acad. de Berlin 1773 p. 285) und Gauss (Disquis. arithm. 157. 159. 268, I) gegeben hatten. Vergl. Jacobi Det. 13 und 14, wo der Schlusssatz zuerst ausgesprochen ist.

und nach Permutation der zweiten Numern $q, r, s, \ldots$

$$\Sigma \pm c_{fq}\, c_{gr}\, c_{hs} \ldots = \sum_{tuv\ldots} (a_{ft}\, a_{gu}\, a_{hv} \ldots \Sigma \pm b_{qt}\, b_{ru}\, b_{sv} \ldots)$$

Um die Glieder dieser Summe zu bilden, braucht man für $tuv\ldots$ nur je m verschiedene Numern der Reihe 1 bis n zu setzen, weil die Determinante $\Sigma \pm b_{qt}\, b_{ru}\, b_{sv} \ldots$ verschwindet, wenn $t, u, v, \ldots$ nicht alle von einander verschieden sind. Wenn man aber für bestimmte Numern $tuv\ldots$ deren Permutationen setzt, so erleidet $\Sigma \pm b_{qt}\, b_{ru}\, b_{sv} \ldots$ nur einen oder mehrere Zeichenwechsel, also ist

$$\Sigma \pm c_{fq}\, c_{gr}\, c_{hs} \ldots = \sum_{tuv\ldots} (\Sigma \pm a_{ft}\, a_{gu}\, a_{hv} \ldots \Sigma \pm b_{qt}\, b_{ru}\, b_{sv} \ldots)$$

eine Summe, deren Glieder gebildet werden, indem man für $tuv\ldots$ alle Combinationen von je m verschiedenen Numern der Reihe 1 bis n setzt.

Wenn $m < n$, so hat die Summe $\binom{n}{m}$ Glieder. Wenn $m = n$, so ist die Determinante der polynomischen Elemente ein Product, dessen Factoren Determinanten desselben Grades sind. Wenn $m > n$, so kann die aus der Reihe 1 bis n zu bildende Complexion $tuv\ldots$ nicht lauter verschiedene Numern enthalten, und die Determinante der polynomischen Elemente verschwindet bei beliebigen Werthen der Grössen a und b.

Anmerkung. Wenn das Element $c_{ik} = a_{i1}\, b_{1k} + \ldots + a_{in}\, b_{nk}$ aus der $i$ten Zeile des ersten Systems und der $k$ten Colonne des zweiten Systems zusammengesetzt ist, so hat man auf gleiche Weise

$$\Sigma \pm c_{fq}\, c_{gr}\, c_{hs} \ldots = \sum_{tuv\ldots} (\Sigma \pm a_{ft}\, a_{gu}\, a_{hv} \ldots \Sigma \pm b_{tq}\, b_{ur}\, b_{vs} \ldots)$$

Beispiel. Wenn $d_{ik} = a_i\, f_k + b_i\, g_k + c_i\, h_k$, so ist

$$\begin{vmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} & d_{14} \\ d_{21} & d_{22} & d_{23} & d_{24} \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} & d_{34} \\ d_{41} & d_{42} & d_{43} & d_{44} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} f_1 & g_1 & h_1 \\ f_2 & g_2 & h_2 \\ f_3 & g_3 & h_3 \\ f_4 & g_4 & h_4 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} \\ d_{21} & d_{22} & d_{23} \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} f_1 & g_1 & h_1 \\ f_2 & g_2 & h_2 \\ f_3 & g_3 & h_3 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} f_1 & g_1 & h_1 \\ f_2 & g_2 & h_2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_1 & b_2 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} f_1 & g_1 \\ f_2 & g_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} f_1 & h_1 \\ f_2 & h_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} g_1 & h_1 \\ g_2 & h_2 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} d_{21} & d_{23} \\ d_{31} & d_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} f_1 & g_1 & h_1 \\ f_3 & g_3 & h_3 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} f_1 & g_1 \\ f_3 & g_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} f_1 & h_1 \\ f_3 & h_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} g_1 & h_1 \\ g_3 & h_3 \end{vmatrix}$$

2. Wenn insbesondere die Elemente b den mit denselben Numern versehenen Elementen a gleich sind, so ist das System der Elemente c symmetrisch, d. h.

$$c_{ik} = a_{i1}\, a_{k1} + a_{i2}\, a_{k2} + \ldots + a_{in}\, a_{kn} = c_{ki}$$

folglich

$$\Sigma \pm c_{fq}\, c_{gr}\, c_{hs} \ldots = \sum_{tuv\ldots} (\Sigma \pm a_{ft}\, a_{gu}\, a_{hv} \ldots)^2$$

worin man für $tuv\ldots$ alle Combinationen von je n aus der Reihe 1 bis n zu setzen hat, um alle Glieder der Summe zu erhalten.

So lange die Elemente a real sind, ist die Determinante $\Sigma \pm c_{fq}\, c_{gr}\, c_{hs} \ldots$ positiv und kann nur dadurch verschwinden, dass die Determinante $\Sigma \pm a_{ft}\, a_{gu}\, a_{hv} \ldots$ bei allen Combinationen $t, u, v, \ldots$ verschwindet *). Die besonderen Fälle

$$\begin{vmatrix} x^2+y^2+z^2 & xx_1+yy_1+zz_1 & xx_2+yy_2+zz_2 \\ x_1x+y_1y+z_1z & x_1^2+y_1^2+z_1^2 & x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2 \\ x_2x+y_2y+z_2z & x_2x_1+y_2y_1+z_2z_1 & x_2^2+y_2^2+z_2^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & y & z \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}^2$$

$$\begin{vmatrix} x^2+y^2+z^2 & xx_1+yy_1+zz_1 \\ xx_1+yy_1+zz_1 & x_1^2+y_1^2+z_1^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & y \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x & z \\ x_1 & z_1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} y & z \\ y_1 & z_1 \end{vmatrix}^2$$

sind bereits von Lagrange (sur les pyr. 3 u. 4) gefunden worden.

3. Wenn unter Anwendung der §. 4, 8 festgesetzten Bezeichnung die gesuchte partiale Determinante $m$ten Grades der Elemente c durch $r_{\delta\varepsilon}$ bezeichnet wird und durch die Vertauschungen von c mit a und b in $p_{\delta\varepsilon}$ und $q_{\delta\varepsilon}$ übergeht, so erhält der bewiesene Lehrsatz den Ausdruck **)

$$r_{\delta\varepsilon} = p_{\delta 1}\, q_{\varepsilon 1} + \ldots + p_{\delta\mu}\, q_{\varepsilon\mu}$$

*) Jacobi l. c.

**) Cauchy l. c. p. 90. 107. 108.

Folglich ist wiederum (1)

$$\Sigma \pm r_{11} \ldots r_{\mu\mu} = \Sigma \pm p_{11} \ldots p_{\mu\mu} \, \Sigma \pm q_{11} \ldots q_{\mu\mu}$$

und unter der Voraussetzung $b_{ik} = a_{ik}$

$$r_{\delta\delta} = p_{\delta 1}{}^2 + \ldots + p_{\delta\mu}{}^2$$

$$\Sigma \pm r_{11} \ldots r_{\mu\mu} = (\Sigma \pm p_{11} \ldots p_{\mu\mu})^2$$

Insbesondere ist der Coefficient γ_{ik}, welchen das Element c_{ik} in der Determinante $C = \Sigma \pm c_{11} \ldots c_{nn}$ hat, eine partiale Determinante $(n-1)$ten Grades. In der Determinante γ_{ik} bilden die ersten Numern der Elemente c eine bestimmte Complexion der Numern 1 bis n ohne i, die zweiten Numern eine bestimmte Complexion der Numern 1 bis n ohne k. In den Combinationen von $n-1$ Numern der Reihe 1 bis n fehlt ebenfalls je eine Numer derselben Reihe. Also ist in dem vorliegenden Falle, wenn man durch α_{ik}, β_{ik} die Coefficienten bezeichnet, welche in den Determinanten $A = \Sigma \pm a_{11} \ldots a_{nn}$ und $B = \Sigma \pm b_{11} \ldots b_{nn}$ die Elemente a_{ik} und b_{ik} haben,

$$\gamma_{ik} = \alpha_{i1} \beta_{k1} + \ldots + \alpha_{in} \beta_{kn}$$

$$\Sigma \pm \gamma_{11} \ldots \gamma_{nn} = \Sigma \pm \alpha_{11} \ldots \alpha_{nn} \, \Sigma \pm \beta_{11} \ldots \beta_{nn}$$

und unter der Voraussetzung $b_{ik} = a_{ik}$

$$\gamma_{ii} = \alpha_{i1}{}^2 + \ldots + \alpha_{in}{}^2$$

$$\Sigma \pm \gamma_{11} \ldots \gamma_{nn} = (\Sigma \pm \alpha_{11} \ldots \alpha_{nn})^2$$

Diese Relationen können aus der Identität

$$C = c_{i1} \frac{\partial C}{\partial c_{i1}} + \ldots + c_{in} \frac{\partial C}{\partial c_{in}} = AB$$

durch Differentiation nach $a_{i1}, \ldots, a_{in}$ abgeleitet werden *). Weil $\frac{\partial C}{\partial c_{ik}}$ von c_{ik} unabhängig und $\frac{\partial c_{ik}}{\partial a_{ih}} = b_{kh}$ ist, so erhält man

$$\frac{\partial C}{\partial c_{i1}} b_{11} + \ldots + \frac{\partial C}{\partial c_{in}} b_{n1} = \frac{\partial A}{\partial a_{i1}} B$$

$$\ldots \ldots \ldots \ldots$$

$$\frac{\partial C}{\partial c_{i1}} b_{1n} + \ldots + \frac{\partial C}{\partial c_{in}} b_{nn} = \frac{\partial A}{\partial a_{in}} B$$

Diese Zeilen mit $\frac{\partial B}{\partial b_{k1}}, \ldots, \frac{\partial B}{\partial b_{kn}}$ multiplicirt geben durch Addition

$$\frac{\partial C}{\partial c_{ik}} = \frac{\partial A}{\partial a_{i1}} \frac{\partial B}{\partial b_{k1}} + \ldots + \frac{\partial A}{\partial a_{in}} \frac{\partial B}{\partial b_{kn}}$$

*) Joachimsthal Crelle J. 40 p. 46.

in Betracht, dass $b_{l1} \frac{\partial B}{\partial b_{k1}} + \ldots + b_{ln} \frac{\partial B}{\partial b_{kn}}$ den Werth B oder 0 hat, je nachdem l mit k übereinstimmt oder nicht (§. 3, 3).

4. Aus einem gegebenen System von n^2 Elementen a von der Art, dass die partiale Determinante $m$ten Grades $d = \Sigma \pm a_{11} \ldots a_{mm}$ nicht verschwindet, kann ein System von n^2 Elementen c dargestellt werden, von welchem alle partialen Determinanten $(m+1)$ten und höhern Grades identisch verschwinden *).

Man bilde die Determinante $(m+1)$ten Grades

$$d_{ik} = \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1m} & a_{1k} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & \ldots & a_{mm} & a_{mk} \\ a_{i1} & \ldots & a_{im} & a_{ik} \end{vmatrix} = a_{i1} b_{1k} + \ldots + a_{im} b_{mk} + a_{ik} d$$

welche identisch verschwindet, wenn i oder k eine Numer der Reihe 1 bis m ist (§. 2, 4). Die Coefficienten $b_{1k}, \ldots, b_{mk}$ verschwinden identisch, wenn k eine Numer der Reihe 1 bis m und von der voranstehenden Numer verschieden ist; dagegen haben $b_{11}, b_{22}, \ldots, b_{mm}$ den Werth $-d$, weil bei jedem h der Reihe 1 bis m mit der Determinante d_{ih} die Summe $a_{ih} b_{hh} + a_{ih} d$ verschwindet.

Unter diesen Voraussetzungen ist

$$c_{ik} = a_{ik} - \frac{d_{ik}}{d} = -\frac{1}{d}(a_{i1} b_{1k} + \ldots + a_{im} b_{mk})$$

eines von n^2 Elementen, deren System nach dem Schlusse des Lehrsatzes (1) die verlangte Eigenschaft besitzt, dass alle partialen Determinanten $(m+1)$ten und höhern Grades identisch verschwinden.

Nach der über d_{ik} gemachten Bemerkung unterscheidet sich das System der Elemente c von dem gegebenen System der Elemente a nur in den $(n-m)^2$ Elementen, welche den $(n-m)$ letzten Zeilen und Colonnen zugleich angehören. Hieraus folgt das Lemma:

Wenn das System der n^2 Elemente a so beschaffen ist, dass

*) Kronecker Winter-Vorlesung 1864/5. Der Schluss dieser Mittheilung war in der 2ten Auflage dieses Buches enthalten.

die partiale Determinante $m$ten Grades d nicht verschwindet, und dass die $(n-m)^2$ partialen Determinanten $(m+1)$ten Grades

$$\begin{array}{ccc} d_{m+1,m+1} & \cdot\ \cdot & d_{m+1,n} \\ \cdot & \cdot\ \cdot & \cdot \\ d_{n,m+1} & \cdot\ \cdot & d_{nn} \end{array}$$

verschwinden, so verschwinden alle partialen Determinanten $(m+1)$ten und höhern Grades.

5. Der Satz über die Zerlegung einer Determinante, deren Elemente Summen von Producten der angegebenen Art sind (1), kann auf den Laplace'schen Determinantensatz zurückgeführt werden wie folgt*).

Man verwandle die Determinante $\Sigma \pm c_{11} \,.\,.\, c_{mm}$ in die Determinante $(m+n)$ten Grades (§. 2, 6)

$$\begin{vmatrix} c_{11} & \cdot\ \cdot & c_{m1} & b_{11} & \cdot\ \cdot & b_{1n} \\ \cdot & \cdot\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\ \cdot & \cdot \\ c_{1m} & \cdot\ \cdot & c_{mm} & b_{m1} & \cdot\ \cdot & b_{mn} \\ 0 & \cdot\ \cdot & 0 & 1 & \cdot\ \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\ \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot\ \cdot & 0 & 0 & \cdot\ \cdot & 1 \end{vmatrix}$$

Indem man nun von der $i$ten Colonne die letzten n der Reihe nach mit $a_{i1}, a_{i2}, \,.\,.$ multiplicirten Colonnen subtrahirt, und auf diese Weise die ersten m Colonnen transformirt, erhält man zufolge der Voraussetzung

$$c_{ik} = a_{i1}\, b_{k1} + a_{i2}\, b_{k2} + \,.\,. + a_{in}\, b_{kn}$$

den Ausdruck für $\Sigma \pm c_{11} \,.\,.\, c_{mm}$

$$\begin{vmatrix} 0 & \cdot\ \cdot & 0 & b_{11} & \cdot\ \cdot & b_{1n} \\ \cdot & \cdot\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\ \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot\ \cdot & 0 & b_{m1} & \cdot\ \cdot & b_{mn} \\ -a_{11} & \cdot\ \cdot & -a_{m1} & 1 & \cdot\ \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\ \cdot & \cdot \\ -a_{1n} & \cdot\ \cdot & -a_{mn} & 0 & \cdot\ \cdot & 1 \end{vmatrix}$$

Multiplicirt man endlich jede der ersten m Colonnen mit -1, und rückt die zweiten m Zeilen des Systems an den Anfang, so erhält man (nach $m+m^2$ Zeichenwechseln)

---

*) Gordan nach briefl. Mittheilung des Hrn. Prof. Clebsch 1863 Nov.

$$\left|\begin{array}{ccccccc} a_{11} & \cdot\,\cdot & a_{m1} & 1 & \cdot\,\cdot & 0 & 0 & \cdot\,\cdot & 0 \\ \cdot & \cdot\,\cdot & \cdot & \cdot & \cdot\,\cdot & \cdot & \cdot & \cdot\,\cdot & \cdot \\ a_{1m} & \cdot\,\cdot & a_{mm} & 0 & \cdot\,\cdot & 1 & 0 & \cdot\,\cdot & 0 \\ 0 & \cdot\,\cdot & 0 & b_{11} & \cdot\,\cdot & b_{1m} & b_{1,m+1} & \cdot\,\cdot & b_{1n} \\ \cdot & \cdot\,\cdot & \cdot & \cdot & \cdot\,\cdot & \cdot & \cdot & \cdot\,\cdot & \cdot \\ 0 & \cdot\,\cdot & 0 & b_{m1} & \cdot\,\cdot & b_{mm} & b_{m,m+1} & \cdot\,\cdot & b_{mn} \\ a_{1,m+1} & \cdot\,\cdot & a_{m,m+1} & 0 & \cdot\,\cdot & 0 & 1 & \cdot\,\cdot & 0 \\ \cdot & \cdot\,\cdot & \cdot & \cdot & \cdot\,\cdot & \cdot & \cdot & \cdot\,\cdot & \cdot \\ a_{1n} & \cdot\,\cdot & a_{mn} & 0 & \cdot\,\cdot & 0 & 0 & \cdot\,\cdot & 1 \end{array}\right|$$

Die Entwickelung dieser Determinante in eine Summe von Producten aus partialen Determinanten $m$ten Grades (§. 4, 7) stimmt mit der oben (1) angegebenen Entwickelung der Determinante $\Sigma \pm c_{11} \ldots c_{mm}$ überein.

6. Das Product von zwei Determinanten $n$ten Grades P und Q ist eine Determinante R desselben Grades, die man auf 4 im Allgemeinen verschiedene Arten darstellen kann*), indem man ihre Elemente entweder aus je einer Zeile von P und einer Zeile von Q zusammensetzt, oder aus je einer Zeile von P und einer Colonne von Q, oder aus je einer Colonne von P und einer Zeile von Q, oder aus je einer Colonne von P und einer Colonne von Q. Wenn nämlich

$$P = \left|\begin{array}{ccc} a_{11} & \cdot\,\cdot & a_{1n} \\ \cdot & \cdot\,\cdot & \cdot \\ a_{n1} & \cdot\,\cdot & a_{nn} \end{array}\right| \qquad Q = \left|\begin{array}{ccc} b_{11} & \cdot\,\cdot & b_{1n} \\ \cdot & \cdot\,\cdot & \cdot \\ b_{n1} & \cdot\,\cdot & b_{nn} \end{array}\right|$$

so ist (1)

$$R = \left|\begin{array}{ccc} c_{11} & \cdot\,\cdot & c_{1n} \\ \cdot & \cdot\,\cdot & \cdot \\ c_{n1} & \cdot\,\cdot & c_{nn} \end{array}\right| = PQ$$

unter der Voraussetzung

$$c_{ik} = a_{i1}\, b_{k1} + a_{i2}\, b_{k2} + \ldots + a_{in}\, b_{kn}\,.$$

Folglich ist

$$\left|\begin{array}{ccc} a_{11} & \cdot\,\cdot & a_{1n} \\ a_{n1} & \cdot\,\cdot & a_{nn} \end{array}\right| \left|\begin{array}{ccc} b_{11} & \cdot\,\cdot & b_{1n} \\ b_{n1} & \cdot\,\cdot & b_{nn} \end{array}\right| = \left|\begin{array}{ccc} \Sigma a_{1k}\, b_{1k} & \cdot\,\cdot & \Sigma a_{1k}\, b_{nk} \\ \cdot & & \cdot \\ \Sigma a_{nk}\, b_{1k} & \cdot\,\cdot & \Sigma a_{nk}\, b_{nk} \end{array}\right|$$

wenn die einzelnen Summen dadurch gebildet werden, dass man

*) Cauchy l. c. p. 83.

für k alle Numern von 1 bis n setzt. Nach der hierin enthaltenen Bildungsregel ist ferner

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdot\cdot & a_{1n} \\ \cdot & \cdot\cdot & \cdot \\ a_{n1} & \cdot\cdot & a_{nn} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_{11} & \cdot\cdot & b_{n1} \\ \cdot & \cdot\cdot & \cdot \\ b_{1n} & \cdot\cdot & b_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \Sigma a_{1k} b_{k1} & \cdot\cdot & \Sigma a_{1k} b_{kn} \\ \cdot & \cdot\cdot & \cdot \\ \Sigma a_{nk} b_{k1} & \cdot\cdot & \Sigma a_{nk} b_{kn} \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdot\cdot & a_{n1} \\ \cdot & \cdot\cdot & \cdot \\ a_{1n} & \cdot\cdot & a_{nn} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_{11} & \cdot\cdot & b_{1n} \\ \cdot & \cdot\cdot & \cdot \\ b_{n1} & \cdot\cdot & b_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \Sigma a_{k1} b_{1k} & \cdot\cdot & \Sigma a_{k1} a_{nk} \\ \cdot & \cdot\cdot & \cdot \\ \Sigma a_{kn} b_{1k} & \cdot\cdot & \Sigma a_{kn} b_{nk} \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdot\cdot & a_{n1} \\ \cdot & \cdot\cdot & \cdot \\ a_{1n} & \cdot\cdot & a_{nn} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_{11} & \cdot\cdot & b_{n1} \\ \cdot & \cdot\cdot & \cdot \\ b_{1n} & \cdot\cdot & b_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \Sigma a_{k1} b_{k1} & \cdot\cdot & \Sigma a_{k1} b_{kn} \\ \cdot & \cdot\cdot & \cdot \\ \Sigma a_{kn} b_{k1} & \cdot\cdot & \Sigma a_{kn} a_{kn} \end{vmatrix}$$

Die links stehenden Determinanten, deren Product gebildet wurde, sind von P und Q nicht verschieden (§. 2, 3). Also sind die rechts stehenden Determinanten von R nicht verschieden, d. h.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdot\cdot & a_{1n} \\ \cdot & \cdot\cdot & \cdot \\ a_{n1} & \cdot\cdot & a_{nn} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_{11} & \cdot\cdot & b_{1n} \\ \cdot & \cdot\cdot & \cdot \\ b_{n1} & \cdot\cdot & b_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c_{11} & \cdot\cdot & c_{1n} \\ \cdot & \cdot\cdot & \cdot \\ c_{n1} & \cdot\cdot & c_{nn} \end{vmatrix}$$

wenn c_{ik} eine der Summen

$$\begin{gathered} a_{i1}\, b_{k1} + \cdot\cdot + a_{in}\, b_{kn} \\ a_{i1}\, b_{1k} + \cdot\cdot + a_{in}\, b_{nk} \\ a_{1i}\, b_{k1} + \cdot\cdot + a_{ni}\, b_{kn} \\ a_{1i}\, b_{1k} + \cdot\cdot + a_{ni}\, b_{nk} \end{gathered}$$

bedeutet.

Beispiel. Nach der ersten Regel hat man

$$\begin{vmatrix} a & b \\ -b' & a' \end{vmatrix} \begin{vmatrix} c & d \\ -d' & c' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ac + bd & -ad' + bc' \\ -b'c + a'd & b'd' + a'c' \end{vmatrix}$$

Wenn $a, b, \ldots$ complexe Zahlen, $a', b', \ldots$ die conjugirten Zahlen sind, so ist aa' die Norm von a, eine Summe von 2 Quadraten, welche durch $\mathrm{N}a$ bezeichnet wird, u. s. w., folglich

$$(\mathrm{N}a + \mathrm{N}b)(\mathrm{N}c + \mathrm{N}d) = \mathrm{N}(ac + bd) + \mathrm{N}(ad' - bc')$$

Diese Identität enthält den Euler'schen Satz (Acta Petrop. 1777. I, 2 p. 48. Vergl. Nov. Comm. Petrop. 5 p. 53 und Lagrange Mem. de Berlin 1770 p. 123), nach welchem das Product zweier Summen von 4 Quadraten selbst eine Summe von 4 Quadraten ist*).

*) Hermite Crelle J. 40 p. 297. Vergl. Gauss Werke 3 p. 384.

7. **Das Product von beliebig vielen Determinanten** ist eine Determinante, deren Grad den höchsten unter den gegebenen Graden nicht übersteigt und deren Elemente ganze Functionen der gegebenen Elemente sind*). Wenn nämlich die Grade der gegebenen Determinanten den $n$ten Grad nicht übersteigen, so kann man alle Determinanten als solche $n$ten Grades darstellen und dann nach einer der Regeln (6) die erste mit der zweiten multipliciren, das Product mit der dritten u. s. w.

Nach §. 2, 6 ist

$$\begin{vmatrix} a_{11} & . & . & a_{1m} \\ . & & . & . \\ a_{m1} & . & . & a_{mm} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & . & . & a_{1n} \\ . & & . & . \\ a_{n1} & . & . & a_{nn} \end{vmatrix}$$

wenn das Element a_{ik} für $i > m$ den Werth 0 oder 1 hat, je nachdem $k < i$ oder $k = i$ ist; die übrigen nicht gegebenen Elemente bleiben unbestimmt. Daher ist

$$\begin{vmatrix} a_{11} & . & . & a_{1m} \\ . & & . & . \\ a_{m1} & . & . & a_{mm} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_{11} & . & . & b_{1n} \\ . & & . & . \\ b_{n1} & . & . & b_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & . & . & a_{1n} \\ . & & . & . \\ a_{n1} & . & . & a_{nn} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_{11} & . & . & b_{1n} \\ . & & . & . \\ b_{n1} & . & . & b_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c_{11} & . & . & c_{1n} \\ . & & . & . \\ c_{n1} & . & . & c_{nn} \end{vmatrix}$$

wenn

$$c_{ik} = a_{i1} b_{k1} + a_{i2} b_{k2} + \,.\,.\, + a_{in} b_{kn}\,.$$

Von diesem Aggregat bleiben für $i > m$ nur die Glieder

$$b_{ki} + a_{i,i+1} b_{k,i+1} + \,.\,.\, + a_{in} b_{kn}\,.$$

Wenn die unbestimmten Elemente sämmtlich verschwinden, so erhält man

$$c_{ik} = a_{i1} b_{k1} + a_{i2} b_{k2} + \,.\,.\, + a_{im} b_{km}$$

wovon für $i > m$ nur b_{ki} übrig bleibt.

Beispiel.

$$\begin{vmatrix} a_0 & b_0 & c_0 & d_0 \\ a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} p_0 & q_0 \\ p_1 & q_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_0p_0 + b_0q_0 & a_0p_1 + b_0q_1 & c_0 & d_0 \\ a_1p_0 + b_1q_0 & a_1p_1 + b_1q_1 & c_1 & d_1 \\ a_2p_0 + b_2q_0 & a_2p_1 + b_2q_1 & c_2 & d_2 \\ a_3p_0 + b_3q_0 & a_3p_1 + b_3q_1 & c_3 & d_3 \end{vmatrix}$$

8. Wenn $x_1, .\,., x_n$ homogene lineare Functionen der Variablen $x_1', .\,., x_n'$ sind, wenn diese Variablen eben solche Functionen der Variablen $x_1'', .\,.\,, x_n''$ sind, u. s. w., und zwar

*) Jacobi Det. 13.

$$(1)\begin{cases} x_1 = a_{11}\, x_1' + \ldots + a_{1n}\, x_n' \\ \cdot\quad \cdot\quad \cdot\quad \cdot\quad \cdot\quad \cdot\quad \cdot\quad \cdot \\ x_n = a_{n1}\, x_1' + \ldots + a_{nn}\, x_n' \end{cases}$$

$$(2)\begin{cases} x_1' = a_{11}'\, x_1'' + \ldots + a_{1n}'\, x_n'' \\ \cdot\quad \cdot\quad \cdot\quad \cdot\quad \cdot\quad \cdot\quad \cdot\quad \cdot \\ x_n' = a_{n1}'\, x_1'' + \ldots + a_{nn}'\, x_n'' \end{cases}$$

$$(3)\begin{cases} x_1'' = a_{11}''\, x_1''' + \ldots + a_{1n}''\, x_n''' \\ \cdot\quad \cdot\quad \cdot\quad \cdot\quad \cdot\quad \cdot\quad \cdot\quad \cdot \\ x_n'' = a_{n1}''\, x_1''' + \ldots + a_{nn}''\, x_n''' \end{cases}$$

u. s. w., so erhält man durch successive Substitutionen *)

$$(\mathrm{I})\begin{cases} x_1 = (a, a')_{11}\, x_1'' + \ldots + (a, a')_{1n}\, x_n'' \\ \cdot\quad \cdot\quad \cdot\quad \cdot\quad \cdot\quad \cdot\quad \cdot\quad \cdot\quad \cdot\quad \cdot \\ x_n = (a, a')_{n1}\, x_1'' + \ldots + (a, a')_{nn}\, x_n'' \end{cases}$$

$$(\mathrm{II})\begin{cases} x_1 = (a, a', a'')_{11}\, x_1''' + \ldots + (a, a', a'')_{1n}\, x_n''' \\ \cdot\quad \cdot\quad \cdot\quad \cdot\quad \cdot\quad \cdot\quad \cdot\quad \cdot\quad \cdot\quad \cdot\quad \cdot\quad \cdot \\ x_n = (a, a', a'')_{n1}\, x_1''' + \ldots + (a, a', a'')_{nn}\, x_n''' \end{cases}$$

u. s. w. Der βte Coefficient der αten Zeile des Systems (I)

$$(a, a')_{\alpha\beta} = \sum_\gamma a_{\alpha\gamma}\, a'_{\gamma\beta} = a_{\alpha 1}\, a'_{1\beta} + \ldots + a_{\alpha n}\, a'_{n\beta}$$

ist aus den Coefficienten der αten Zeile des Systems (1) und der βten Colonne des Systems (2) zusammengesetzt. Ebenso ist der Coefficient $(a, a', a'')_{\alpha\beta}$ aus den Coefficienten der αten Zeile des Systems (I) und der βten Colonne des Systems (3) zusammengesetzt, folglich

$$(a, a', a'')_{\alpha\beta} = \sum_\delta (a, a')_{\alpha\delta}\, a''_{\delta\beta} = \sum_{\gamma\delta} a_{\alpha\gamma}\, a'_{\gamma\delta}\, a''_{\delta\beta}$$

u. s. w. Man bezeichne ferner durch A, A', A'', .. die Determinanten $n$ten Grades der zusammenzusetzenden Systeme, deren Elemente $a_{\alpha\beta}$, $a'_{\alpha\beta}$, $a''_{\alpha\beta}$, .. sind; durch (A, A'), (A, A', A''),.. die Determinanten der zusammengesetzten Systeme, deren Elemente $(a, a')_{\alpha\beta}$, $(a, a', a'')_{\alpha\beta}$, .. sind; durch

$$A_{\alpha\beta},\ A'_{\alpha\beta}, \ldots, (A, A')_{\alpha\beta},\ (A, A', A'')_{\alpha\beta}, \ldots$$

die partialen Determinanten $(n-1)$ten Grades, mit welchen in

*) Mittheilung von Weierstrass bei Gelegenheit der Abhandlung über bilineare und quadratische Formen, Berliner Monatsbericht 1868 Mai 18. Crelle J. 70.

den Determinanten $A, A', \ldots, (A, A'), (A, A', A''), \ldots$ die Elemente

$$a_{\alpha\beta}, \; a'_{\alpha\beta}, \ldots, (a, a')_{\alpha\beta}, \; (a, a', a'')_{\alpha\beta} \ldots$$

multiplicirt sind; durch

$$A_{\alpha\beta\,\alpha'\beta'}, \; A'_{\alpha\beta\,\alpha'\beta'}, \; (A, A')_{\alpha\beta\,\alpha'\beta'}, \; (A, A', A'')_{\alpha\beta\,\alpha'\beta'}, \ldots$$

die partialen Determinanten $(n-2)$ten Grades, mit welchen in den Determinanten $A, A', \ldots, (A, A'), (A, A', A''), \ldots$ die partialen Determinanten 2ten Grades

$$\Sigma \pm a_{\alpha\beta}\, a_{\alpha'\beta'}, \; \Sigma \pm a'_{\alpha\beta}\, a'_{\alpha'\beta'}, \; \Sigma \pm (a, a')_{\alpha\beta}\, (a, a')_{\alpha'\beta'},$$
$$\Sigma \pm (a, a', a'')_{\alpha\beta}\, (a, a', a'')_{\alpha'\beta'}, \ldots$$

multiplicirt sind, u. s. w. Dann ist nach 1)

$$(A, A') = AA'$$

$$(A, A')_{\alpha\beta} = \sum_{\gamma} A_{\alpha\gamma}\, A'_{\gamma\beta}$$

$$(A, A')_{\alpha\beta\,\alpha'\beta'} = \sum_{\gamma\gamma'} A_{\alpha\gamma\,\alpha'\gamma'}\, A'_{\gamma\beta\,\gamma'\beta'}$$

$$(A, A')_{\alpha\beta\,\alpha'\beta'\,\alpha''\beta''} = \sum_{\gamma\gamma'\gamma''} A_{\alpha\gamma\,\alpha'\gamma'\,\alpha''\gamma''}\, A'_{\gamma\beta\,\gamma'\beta'\,\gamma''\beta''}$$

u. s. w. Die Glieder dieser Summen werden dadurch gebildet, dass man für γ, $\gamma\gamma'$, $\gamma\gamma'\gamma''$, .. alle Combinationen von je 1, 2, 3, .. verschiedenen Numern der Reihe 1 bis n setzt. Denn es ist z. B.

$$(A, A')_{\alpha\beta\,\alpha'\beta'\,\alpha''\beta''}$$

eine partiale Determinante $(n-3)$ten Grades der Elemente (a, a'); die ersten Numern dieser Elemente bleiben von der Reihe 1 bis n übrig nach Ausschliessung von α, α', α'', und stimmen mit den ersten Numern der Elemente in $A_{\alpha\gamma\,\alpha'\gamma'\,\alpha''\gamma''}$ überein; die zweiten Numern jener Elemente bleiben von der Reihe 1 bis n übrig nach Ausschliessung von β, β', β'', und stimmen mit den zweiten Numern der Elemente in $A'_{\gamma\beta\,\gamma'\beta'\,\gamma''\beta''}$ überein; dagegen sind die zweiten Numern der Elemente in $A_{\alpha\gamma\,\alpha'\gamma'\,\alpha''\gamma''}$ sowie die ersten Numern in $A'_{\gamma\beta\,\gamma'\beta'\,\gamma''\beta''}$ alle Combinationen von je $n-3$ verschiedenen Numern der Reihe 1 bis n.

Ebenso ist

$$(A, A', A'') = (A, A')A'' = AA'A''$$

$$(A, A', A'')_{\alpha\beta} = \sum_{\delta} (A, A')_{\alpha\delta}\, A''_{\delta\beta} = \sum_{\gamma\delta} A_{\alpha\gamma}\, A'_{\gamma\delta}\, A''_{\delta\beta}$$

$$(A, A', A'')_{\alpha\beta\,\alpha'\beta'} = \sum_{\delta\delta'} (A, A')_{\alpha\delta\,\alpha'\delta'} A''_{\delta\beta\,\delta'\beta'}$$

$$= \sum_{\gamma\gamma'\delta\delta'} A_{\alpha\gamma\,\alpha'\gamma'} A'_{\gamma\delta\,\gamma'\delta'} A''_{\delta\beta\,\delta'\beta'}$$

$$(A, A' A'')_{\alpha\beta\,\alpha'\beta'\,\alpha''\beta''} = \sum_{\delta\delta'\delta''} (A, A')_{\alpha\delta\,\alpha'\delta'\,\alpha''\delta''} A''_{\delta\beta\,\delta'\beta'\,\delta''\beta''}$$

$$= \sum_{\gamma\gamma'\gamma''\delta\delta'\delta''} A_{\alpha\gamma\,\alpha'\gamma'\,\alpha''\gamma''} A'_{\gamma\delta\,\gamma'\delta'\,\gamma''\delta''} A''_{\delta\beta\,\delta'\beta'\,\delta''\beta''}$$

u. s. w. Die Glieder dieser Summen werden dadurch gebildet, dass man sowohl für γ, $\gamma\gamma'$, $\gamma\gamma'\gamma''$,.. als auch für δ, $\delta\delta'$, $\delta\delta'\delta''$,.. alle Combinationen von je 1, 2, 3,.. verschiedenen Numern der Reihe 1 bis n setzt.

Ueberhaupt ist jede partiale Determinante des Systems der zusammengesetzten Elemente $(a, a', .., a^{(\lambda)})$ darstellbar als Summe von Producten aus $(\lambda+1)$ Factoren, welche partiale Determinanten derselben Ordnung der Systeme der einfachen Elemente a, a', .., $a^{(\lambda)}$ sind.

§. 6. Determinanten von adjungirten Systemen.

1. Wenn α_{ik} den Coefficienten des Elements a_{ik} in der Determinante

$$R = \begin{vmatrix} a_{11} & . & . & a_{1n} \\ . & . & . & . \\ a_{n1} & . & . & a_{nn} \end{vmatrix}$$

bedeutet, so heisst das System der Elemente

$$\begin{matrix} \alpha_{11} & . & . & \alpha_{1n} \\ . & . & . & . \\ \alpha_{n1} & . & . & \alpha_{nn} \end{matrix}$$

dem System der Elemente a adjungirt*).

Lehrsatz. Die Determinante des Systems von Elementen, welches einem System von n^2 Elementen adjungirt ist, ist die $(n-1)$te Potenz der Determinante des gegebenen Systems**).

---

*) Cauchy l. c. p. 64 hat diese Benennung aus der Theorie der quadratischen Formen (Gauss disquis. arithm. 267) aufgenommen.

**) Cauchy l. c. p. 82. Den Fall $n = 3$ findet man bei Lagrange sur les pyr. 5 und bei Gauss l. c.

Beweis. Wenn man das Product

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdot & \cdot & a_{1n} \\ \cdot & & & \cdot \\ a_{n1} & \cdot & \cdot & a_{nn} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{11} & \cdot & \cdot & a_{1n} \\ \cdot & & & \cdot \\ a_{n1} & \cdot & \cdot & a_{nn} \end{vmatrix}$$

nach der Multiplicationsregel (§. 5, 6) bildet, so erhält man

$$\begin{vmatrix} c_{11} & \cdot & \cdot & c_{1n} \\ \cdot & & & \cdot \\ c_{n1} & \cdot & \cdot & c_{nn} \end{vmatrix}$$

worin

$$c_{ik} = \alpha_{i1} a_{k1} + \alpha_{i2} a_{k2} + \cdot \cdot + \alpha_{in} a_{kn} .$$

Diese Elemente haben den Werth R oder 0, je nachdem k und i gleich oder verschieden sind (§. 3, 3). Also reducirt sich die Determinante ihres Systems auf das Anfangsglied $c_{11} c_{22} \cdot \cdot c_{nn} = R^n$ (§. 2, 7). Daher ist

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \cdot & \cdot & \alpha_{1n} \\ \cdot & & & \cdot \\ \alpha_{n1} & \cdot & \cdot & \alpha_{nn} \end{vmatrix} R = R^n$$

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \cdot & \cdot & \alpha_{1n} \\ \cdot & & & \cdot \\ \alpha_{n1} & \cdot & \cdot & \alpha_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdot & \cdot & a_{1n} \\ \cdot & & & \cdot \\ a_{n1} & \cdot & \cdot & a_{nn} \end{vmatrix}^{n-1}$$

2. **Lehrsatz.** Eine partiale Determinante des adjungirten Systems vom $m$ten Grade ist das Product von R^{m-1} mit dem Coefficienten, welchen die entsprechende partiale Determinante des ursprünglichen Systems in R hat*).

Beweis. Wenn

$$\begin{matrix} f, & g, & \cdot \cdot, & r, & s, & \cdot \cdot \\ i, & k, & \cdot \cdot, & u, & v, & \cdot \cdot \end{matrix}$$

gegebene Permutationen von $1, 2, \ldots, n$ sind und darin $f, g, \ldots$ und $i, k, \ldots$ Gruppen von m Numern bedeuten, während die übrigen $n-m$ Numern durch $r, s, \ldots$ und $u, v, \ldots$ bezeichnet werden, so ist die Determinante $m$ten Grades

$$\begin{vmatrix} \alpha_{fi} & \alpha_{fk} & \cdot \\ \alpha_{gi} & \alpha_{gk} & \cdot \\ \cdot & & \end{vmatrix}$$

*) Jacobi Det. 11. Dieser Beweis ist von Borchardt angegeben worden. Briefl. Mittheilung 1853 Juli.

eine partiale Determinante des adjungirten Systems (§. 4, 1), welche nach §. 2, 6 in folgende Determinante $n$ten Grades transformirt werden kann:

$$\begin{vmatrix} \alpha_{fi} & \alpha_{fk} & \cdots & \alpha_{fu} & \alpha_{fv} & \cdots \\ \alpha_{gi} & \alpha_{gk} & \cdots & \alpha_{gu} & \alpha_{gv} & \cdots \\ \vdots & & & & & \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & \cdots \\ \vdots & & & & & \end{vmatrix}$$

Unter den gemachten Voraussetzungen ist aber

$$\begin{vmatrix} a_{fi} & a_{fk} & \cdots & a_{fu} & a_{fv} & \cdots \\ a_{gi} & a_{gk} & \cdots & a_{gu} & a_{gv} & \cdots \\ \vdots & & & & & \\ a_{ri} & a_{rk} & \cdots & a_{ru} & a_{rv} & \cdots \\ a_{si} & a_{sk} & \cdots & a_{su} & a_{sv} & \cdots \\ \vdots & & & & & \end{vmatrix} = \varepsilon R\,,$$

wo ε den Werth 1 oder -1 hat, je nachdem die gegebenen Permutationen in eine Classe gehören oder nicht (§. 2, 4). Wenn man das Product dieser beiden Determinanten durch zeilenweise Multiplication bildet, so findet man die Determinante $n$ten Grades

$$\begin{vmatrix} R & 0 & \cdots & a_{fu} & a_{fv} & \cdots \\ 0 & R & \cdots & a_{gu} & a_{gv} & \cdots \\ \vdots & & & & & \\ 0 & 0 & \cdots & a_{ru} & a_{rv} & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{su} & a_{sv} & \cdots \\ \vdots & & & & & \end{vmatrix}$$

Diese Determinante reducirt sich aber auf das Product von zwei Determinanten (§. 4, 6), deren erste den Werth R^m hat (§. 2, 7). Daher ist

$$\begin{vmatrix} \alpha_{fi} & \alpha_{fk} & \cdots \\ \alpha_{gi} & \alpha_{gk} & \cdots \\ \vdots & & \end{vmatrix} = R^{m-1}\varepsilon \begin{vmatrix} a_{ru} & a_{rv} & \cdots \\ a_{su} & a_{sv} & \cdots \\ \vdots & & \end{vmatrix}$$

Nach §. 4, 1 bedeutet

$$\varepsilon \begin{vmatrix} a_{ru} & a_{rv} & \cdots \\ a_{su} & a_{sv} & \cdots \\ \vdots & & \end{vmatrix}$$

den Coefficienten, mit welchem in R die partiale Determinante des gegebenen Systems

$$\begin{vmatrix} a_{fi} & a_{fk} & \cdot \\ a_{gi} & a_{gk} & \cdot \\ \cdot & & \end{vmatrix}$$

versehen ist, deren Elemente mit denen der gesuchten Determinante in Hinsicht der Numern übereinstimmen.

Beispiele. Wenn $R = \Sigma \pm a_{11}\, a_{22} \,.\,.\, a_{nn}$, so ist

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdot & a_{1m} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & \cdot & a_{mm} \end{vmatrix} = R^{m-1} \begin{vmatrix} a_{m+1,m+1} & \cdot & a_{m+1,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n,m+1} & \cdot & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a_{k+1,k+1} & \cdot & a_{k+1,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n,k+1} & \cdot & a_{nn} \end{vmatrix} = R^{n-k-1} \begin{vmatrix} a_{11} & \cdot & a_{1k} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{k1} & \cdot & a_{kk} \end{vmatrix}$$

Wenn insbesondere $n = 5$ ist, so ist

$$\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \\ a_{51} & a_{53} & a_{54} \end{vmatrix} = -R \begin{vmatrix} a_{12} & a_{15} \\ a_{32} & a_{35} \end{vmatrix}$$

weil die Permutationen

$$\begin{matrix} 2 & 4 & 5 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 4 & 2 & 5 \end{matrix}$$

nicht in eine Classe gehören.

Dagegen ist

$$\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{41} & a_{43} \end{vmatrix} = R \begin{vmatrix} a_{12} & a_{14} & a_{15} \\ a_{32} & a_{34} & a_{35} \\ a_{52} & a_{54} & a_{55} \end{vmatrix}$$

weil

$$\begin{matrix} 2 & 4 & 1 & 3 & 5 \\ 1 & 3 & 2 & 4 & 5 \end{matrix}$$

Permutationen derselben Classe sind.

Der Coefficient des Elements a_{ik} in der Determinante des adjungirten Systems $\Sigma \pm a_{11}\, a_{22} \,.\,.\, a_{nn}$ ist*)

$$R^{n-2}\, a_{ik}$$

Denn dieser Coefficient ist eine partiale Determinante des adjungirten Systems vom $(n-1)$ten Grade und der Coefficient, welchen die entsprechende partiale Determinante des ursprünglichen Systems in R hat, ist a_{ik}, folglich u. s. w. (2)

---

*) Cauchy l. c. p. 82.

Wenn insbesondere $n = 3$, so ist*)

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{vmatrix} = R a_{33}, \quad \begin{vmatrix} \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{22} & \alpha_{23} \end{vmatrix} = R a_{31} \text{ u. s. w.}$$

3. Um eine partiale Determinante zweiten Grades im adjungirten System zu berechnen, z. B.

$$\begin{vmatrix} \alpha_{fi} & \alpha_{fk} \\ \alpha_{gi} & \alpha_{gk} \end{vmatrix}$$

bedarf man des Coefficienten, welchen die entsprechende Determinante

$$\begin{vmatrix} a_{fi} & a_{fk} \\ a_{gi} & a_{gk} \end{vmatrix}$$

in R hat. Dieser Coefficient stimmt mit demjenigen überein, welchen das Product $a_{fi}\, a_{gk}$ in R hat (§. 4, 1). Folglich ist**)

$$\begin{vmatrix} \alpha_{fi} & \alpha_{fk} \\ \alpha_{gi} & \alpha_{gk} \end{vmatrix} = R \frac{\partial^2 R}{\partial a_{fi}\, \partial a_{gk}}$$

$$\begin{vmatrix} \alpha_{fi} & \alpha_{fk} & \alpha_{fl} \\ \alpha_{gi} & \alpha_{gk} & \alpha_{gl} \\ \alpha_{hi} & \alpha_{hk} & \alpha_{hl} \end{vmatrix} = R^2 \frac{\partial^3 R}{\partial a_{fi}\, \partial a_{gk}\, \partial a_{hl}} \text{ u. s. w.}$$

Diese Identitäten geben zugleich an, wie man zweite, dritte, .. partiale Differentialquotienten einer Determinante durch erste partiale Differentialquotienten derselben ausdrücken kann.

Beispiel. Weil (§. 3, 15) $dR = \sum_{i,k} \alpha_{ik}\, da_{ik}$ und

$$d\alpha_{rs} = \sum_{ik} \frac{\partial \alpha_{rs}}{\partial a_{ik}} da_{ik} = \sum_{ik} \frac{\partial^2 R}{\partial a_{rs}\, \partial a_{ik}} da_{ik}$$

ist, so findet man

$$R\, d\alpha_{rs} = \sum_{ik} (\alpha_{rs}\, \alpha_{ik} - \alpha_{is}\, \alpha_{rk})\, da_{ik}$$

$$R\, d\alpha_{rs} - \alpha_{rs}\, dR = - \sum_{ik} \alpha_{is}\, \alpha_{rk}\, da_{ik}$$

$$R^2 d \frac{\alpha_{rs}}{R} = - \sum_{ik} \alpha_{is}\, \alpha_{rk}\, da_{ik}\ ^{***)}.$$

*) Lagrange sur les pyr. 3.

**) Jacobi Det. 10.

***) Weierstrass Berl. Monatsbericht 1858 p. 214.

4. Bezeichnet man in der Determinante

$$V_{r+1} = \Sigma \pm a_{11} \ldots a_{r+1,r+1}$$

den Coefficienten des Elements a_{ik} durch α_{ik}, so ist

$$\alpha_{r+1,r+1} = V_r, \quad \frac{\partial^2 V_{r+1}}{\partial a_{rr}\, \partial a_{r+1,r+1}} = V_{r-1}$$

folglich (3)

$$\alpha_{rr} V_r - \alpha_{r,r+1}\, \alpha_{r+1,r} = V_{r+1}\, V_{r-1}.$$

Wenn insbesondere die correspondirenden Elemente a_{ik} und a_{ki} gleich oder conjugirt complex sind, so ist das Product $\alpha_{r,r+1}\, \alpha_{r+1,r}$ real und positiv (§. 3, 13). Also haben, während V_r verschwindet, V_{r+1} und V_{r-1} Werthe von entgegengesetzten Zeichen *).

5. Wenn R verschwindet, so verschwinden auch die partialen Determinanten des adjungirten Systems vom 2ten, 3ten, .. Grade, weil sie den Factor R enthalten (2). Aus der Gleichung

$$\begin{vmatrix} \alpha_{fi} & \alpha_{fk} \\ \alpha_{gi} & \alpha_{gk} \end{vmatrix} = 0$$

folgen die Proportionen

$$\alpha_{fi} : \alpha_{fk} = \alpha_{gi} : \alpha_{gk}, \quad \alpha_{fi} : \alpha_{gi} = \alpha_{fk} : \alpha_{gk}$$

$$\alpha_{f1} : \alpha_{f2} : \alpha_{f3} : \ldots = \alpha_{g1} : \alpha_{g2} : \alpha_{g3} : \ldots$$

$$\alpha_{1i} : \alpha_{2i} : \alpha_{3i} : \ldots = \alpha_{1k} : \alpha_{2k} : \alpha_{3k} : \ldots \text{**)}$$

$$\alpha_{i1}\, \alpha_{1i} : \alpha_{i2}\, \alpha_{2i} : \alpha_{i3}\, \alpha_{3i} : \ldots = \alpha_{11} : \alpha_{22} : \alpha_{33} : \ldots$$

Wenn insbesondere die Elemente des gegebenen Systems so beschaffen sind, dass $\alpha_{ik} = \alpha_{ki}$, so hat man unter der Voraussetzung $R = 0$ für α_{ik} den Ausdruck $\sqrt{\alpha_{ii}}\, \sqrt{\alpha_{kk}}$, in welchem das Zeichen einer Wurzel von dem Zeichen der andern abhängt, und bei jedem i

$$\alpha_{i1}^2 : \alpha_{i2}^2 : \alpha_{i3}^2 : \ldots = \alpha_{11} : \alpha_{22} : \alpha_{33} : \ldots$$

Anwendung. Wenn in einer Determinante der Coefficient eines Elements verschwindet, so ist die Determinante das Product von zwei homogenen linearen Functionen der Elemente, welche mit jenem Element in einer Zeile und in einer Colonne stehn ***). Nach §. 3, 16 hat man

---

*) Brioschi Det. p. 72.

**) Jacobi Crelle J. 15 p. 104 und anderwärts.

***) Hesse Crelle J. 69 p. 319. Vergl. unten §. 7, 2.

$$S = \Sigma \pm a_{00}\, a_{11} \,.\,.\, a_{nn} = a_{00} R - \sum_{ik} a_{i0}\, a_{0k}\, \alpha_{ik}$$

Unter der Voraussetzung $R = 0$ ist aber

$$\alpha_{1k} : \alpha_{2k} : \alpha_{3k} : \,.\,. = \alpha_{11} : \alpha_{21} : \alpha_{31} : \,.\,.$$

$$a_{10}\, \alpha_{1k} + \,.\,. + a_{n0}\, \alpha_{nk} : \alpha_{1k} = a_{10}\, \alpha_{11} + \,.\,. + a_{n0}\, \alpha_{n1} : \alpha_{11}$$

folglich

$$\alpha_{11} S = -(a_{10}\, \alpha_{11} + \,.\,. + a_{n0}\, \alpha_{n1})(a_{01}\, \alpha_{11} + \,.\,. + a_{0n}\, \alpha_{1n})$$

6. Analoge Sätze gelten für das System der partialen Determinanten $m$ten Grades, welche zu dem System der Elemente $a_{11} \,.\,. a_{nn}$ gehören,

$$\begin{matrix} p_{11} & \cdot\,\cdot & p_{1\mu} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ p_{\mu 1} & \cdot\,\cdot & p_{\mu\mu} \end{matrix}$$

von denen $p_{\gamma\delta}$ die oben §. 4, 8 angegebene Bedeutung hat, und für das (adjungirte) System der partialen Determinanten $(n-m)$ten Grades

$$\begin{matrix} p'_{11} & \cdot\,\cdot & p'_{1\mu} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ p'_{\mu 1} & \cdot\,\cdot & p'_{\mu\mu} \end{matrix}$$

von denen $p'_{\gamma\delta}$ den Coefficienten von $p_{\gamma\delta}$ in der Determinante $R = \Sigma \pm a_{11} \,.\,. a_{nn}$ bedeutet. Bei diesen Bezeichnungen hat man die Identitäten *)

$$\Sigma \pm p_{11} \,.\,. p_{\mu\mu}\, \Sigma \pm p'_{11} \,.\,. p'_{\mu\mu} = R^{\mu}$$

$$\Sigma \pm p_{11} \,.\,. p_{\mu\mu} = R^{\binom{n-1}{m-1}}, \qquad \Sigma \pm p'_{11} \,.\,. p'_{\mu\mu} = R^{\binom{n-1}{m}}$$

Beweis. Das Product $\Sigma \pm p_{11} \,.\,. p_{\mu\mu}\, \Sigma \pm p'_{11} \,.\,. p'_{\mu\mu}$ ist eine Determinante μten Grades, welche sich auf ihr Anfangsglied R^{μ} reducirt, weil ihr Element

$$p_{\gamma 1}\, p'_{\delta 1} + \,.\,. + p_{\gamma\mu}\, p'_{\delta\mu}$$

den Werth R oder 0 hat, je nachdem die Numern γ und δ übereinstimmen oder nicht (§. 4, 9).

Da nun $P = \Sigma \pm p_{11} \,.\,. p_{\mu\mu}$ ein Divisor von R^{μ} und R eine Function ersten Grades eines bestimmten Elements z. B. a_{11} ist, so kann P von einer Potenz von R nur durch einen von den Elementen $a_{11}, \,.\,., a_{nn}$ unabhängigen Coefficienten unterschie-

*) Diese Identitäten sind die erste von Cauchy l. c. p. 102, die beiden andern von Franke Crelle J. 61 p. 350 gefunden worden.

den sein. Unter den $\mu = \binom{n}{m}$ Combinationen der Numern 1, 2, .., n giebt es aber $\lambda = \binom{n-1}{m-1}$ solche, in denen 1 vorkommt. Es giebt also λ Zeilen und λ Colonnen des Systems $p_{11}, \cdot\cdot, p_{\mu\mu}$, deren gemeinschaftliche Elemente Functionen ersten Grades von a_{11} sind, mithin ist P eine Function λten Grades von a_{11} und durch R^λ theilbar. Der Quotient $P : R^\lambda$ ist 1, wie sich aus der Betrachtung eines besondern Falles ergiebt. Wenn z. B. alle Elemente der Diagonale $a_{11}, \cdot\cdot, a_{nn}$ den Werth 1 haben und die übrigen Elemente verschwinden, so ist $R = 1$, während $p_{\gamma\delta}$ den Werth 1 oder 0 erhält, je nachdem γ und δ übereinstimmen oder nicht. Daher ist $P = 1$ und $P : R^\lambda = 1$.

7. Eine partiale Determinante des Systems $p_{11}, \cdot\cdot, p_{\mu\mu}$ vom ωten Grade ist das Product von $R^{\omega-(\mu-\lambda)}$ mit dem Coefficienten, welchen die entsprechende partiale Determinante des Systems $p'_{11}, \cdot\cdot, p'_{\mu\mu}$ in der Determinante dieses Systems $\Sigma \pm p'_{11} \cdot\cdot p'_{\mu\mu}$ hat*).

Beweis. Wenn wie oben (2)

$$\begin{matrix} f, & g, & \cdot\cdot, & r, & s, & \cdot\cdot \\ i, & k, & \cdot\cdot, & u, & v, & \cdot\cdot \end{matrix}$$

Permutationen von $1, 2, \ldots, \mu$ sind und darin $f, g, \ldots$ und $i, k, \ldots$ Gruppen von ω Numern bedeuten, während die übrigen $\mu-\omega$ Numern durch $r, s, \ldots$ und $u, v, \ldots$ bezeichnet werden, so kann die partiale Determinante ωten Grades

$$\begin{vmatrix} p_{fi} & p_{fk} & \cdot \\ p_{gi} & p_{gk} & \cdot \\ \cdot & \cdot & \end{vmatrix}$$

in die Determinante μten Grades transformirt werden

$$\begin{vmatrix} p_{fi} & p_{fk} & \cdot\cdot & p_{fu} & p_{fv} & \cdot\cdot \\ p_{gi} & p_{gk} & \cdot\cdot & p_{gu} & p_{gv} & \cdot\cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot & \\ 0 & 0 & \cdot\cdot & 1 & 0 & \cdot\cdot \\ 0 & 0 & \cdot\cdot & 0 & 1 & \cdot\cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot & \end{vmatrix}$$

*) Franke Crelle J. 61 p. 350 und Borchardt's Bemerkung zu diesem Aufsatz.

Multiplicirt man dieselbe mit

$$\begin{vmatrix} p'_{fi} & p'_{fk} & \cdot & \cdot & p'_{fu} & p'_{fv} & \cdot & \cdot \\ p'_{gi} & p'_{gk} & \cdot & \cdot & p'_{gu} & p'_{gv} & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & & & \cdot & \cdot & & \\ p'_{ri} & p'_{rk} & \cdot & \cdot & p'_{ru} & p'_{rv} & \cdot & \cdot \\ p'_{si} & p'_{sk} & \cdot & \cdot & p'_{su} & p'_{sv} & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & & & & & & \end{vmatrix} = \varepsilon \Sigma \pm p'_{11} \cdot \cdot p'_{\mu\mu}$$

wobei ε den Werth 1 oder -1 hat, je nachdem die obigen Permutationen in eine Classe gehören oder nicht, so findet man (§. 4, 8)

$$\begin{vmatrix} R & 0 & \cdot & \cdot & p'_{fu} & p'_{fv} & \cdot & \cdot \\ 0 & R & \cdot & \cdot & p'_{gu} & p'_{gv} & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & & & \cdot & \cdot & & \\ 0 & 0 & \cdot & \cdot & p'_{ru} & p'_{rv} & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot & \cdot & p'_{su} & p'_{sv} & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & & & \cdot & \cdot & & \end{vmatrix}$$

Daher ist

$$\Sigma \pm p'_{11} \cdot \cdot p'_{\mu\mu} \, \Sigma \pm p_{fi} \, p_{gk} \cdot \cdot = \varepsilon R^{\lambda} \, \Sigma \pm p'_{ru} \, p'_{sv} \cdot \cdot$$

wobei $\varepsilon \Sigma \pm p'_{ru} \, p'_{sv} \cdot \cdot$ den Coefficienten von $\Sigma \pm p'_{fi} \, p'_{gk} \cdot \cdot$ in der Determinante $\Sigma \pm p'_{11} \cdot \cdot p'_{\mu\mu} = R^{\mu - \lambda}$ bedeutet.

§. 7. Determinante eines Systems, dessen correspondirende Elemente a_{ik} und a_{ki} entgegengesetzt gleich sind.*)

1. **Lehrsatz.** Wenn n eine gerade Zahl ist und die Elemente des Systems $a_{11} \, . \, . \, a_{nn}$ so beschaffen sind, dass

$$a_{ki} = -a_{ik} \quad \text{und} \quad a_{ii} = 0 \; ,$$

so ist die Determinante $R = \Sigma \pm a_{11} \, . \, . \, a_{nn}$ ein Quadrat**).

Beweis. Wenn $R_m = \Sigma \pm a_{11} \, . \, . \, a_{mm}$, so gilt bei beliebigen Elementen die Identität (§. 6, 3)

$$R_m \, R_{m-2} = \frac{\partial R_m}{\partial a_{m-1,m-1}} \frac{\partial R_m}{\partial a_{mm}} - \frac{\partial R_m}{\partial a_{m-1,m}} \frac{\partial R_m}{\partial a_{m,m-1}}$$

---

*) Ein solches System und seine Determinante wird nach CAYLEY Crelle J. 32 p. 119 *gauche* (skew, gobbo) genannt.

**) CAYLEY Crelle J. 38 p. 95. Der hier mitgetheilte Beweis ist von BORCHARDT 1858 angegeben worden. Einen andern Beweis enthält der folgende Artikel, einen andern hat SCHEIBNER Leipz. Berichte 1859 p. 151 geführt.

In dem vorliegenden Falle bei geradem m ist (§. 3, 14)

$$\frac{\partial R_m}{\partial a_{ii}} = 0, \quad \frac{\partial R_m}{\partial a_{ki}} = -\frac{\partial R_m}{\partial a_{ik}},$$

folglich

$$R_m \, R_{m-2} = \left(\frac{\partial R_m}{\partial a_{m-1,m}}\right)^2$$

d. h. R_m ein Quadrat, wenn R_{m-2} ein Quadrat ist. Nun ist R_2 ein Quadrat, also sind auch R_4, R_6, .. Quadrate.

2. Bezeichnet man den Coefficienten des Elements a_{11} in der Determinante R durch R', und den Coefficienten des Elements a_{ik} in R' durch α_{ik}, so ist nach §. 3, 16

$$R = a_{11} R' - \Sigma a_{i1} a_{1k} \alpha_{ik}$$

wenn die Glieder der Summe dadurch gebildet werden, dass man für i und k alle Numern der Reihe 2, 3, .., n setzt. Bei dem vorausgesetzten System ist $R' = 0$, $\alpha_{ki} = \alpha_{ik}$ (§. 3, 13), folglich $\alpha_{ik}{}^2 = \alpha_{ii} \alpha_{kk}$ (§. 6, 5), also

$$\begin{aligned} R &= \Sigma a_{i1} a_{1k} \sqrt{\alpha_{ii}} \sqrt{\alpha_{kk}} = (\Sigma a_{1i} \sqrt{\alpha_{ii}})(\Sigma a_{ik} \sqrt{\alpha_{kk}}) \\ &= (\Sigma a_{1i} \sqrt{\alpha_{ii}})^2, \end{aligned}$$

weil von dem Zeichen einer Wurzel die Zeichen der andern Wurzeln so abhängen, dass das Product $\sqrt{\alpha_{ii}} \sqrt{\alpha_{kk}}$ den Werth α_{ik} (nicht $-\alpha_{ik}$) hat.

Wenn $n = 4$, so ist $\sqrt{\alpha_{ii}}$ rational, folglich $\sqrt{R}$ ein rationales Aggregat von 3 Gliedern; bei $n = 6$ ist also $\sqrt{\alpha_{ii}}$ rational und $\sqrt{R}$ ein rationales Aggregat von 3 . 5 Gliedern; u. s. w. Daher ist überhaupt $\sqrt{R}$ ein Aggregat von

$$1 \,.\, 3 \,.\, 5 \,..\, (n-3)(n-1) = \frac{1 \,.\, 2 \,...\, n}{2^{\frac{n}{2}} \,.\, 1 \,.\, 2 \,...\, \frac{n}{2}}$$

Gliedern. Jedes Glied von $\sqrt{R}$ ist ein Product von $\frac{n}{2}$ Elementen, unter deren Numern zwei gleiche überhaupt nicht vorkommen. Als Anfangsglied findet man

$$a_{12} \, a_{34} \,..\, a_{n-1,n}.$$

In der That ist

$$(a_{12} \, a_{34} \,..\, a_{n-1,n})^2 = (-1)^{\frac{n}{2}} a_{12} \, a_{21} \, a_{34} \, a_{43} \,..\, a_{n-1,n} \, a_{n,n-1}$$

ein positives Glied der Determinante R, weil die Permutationen

$$\begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & .. & n-1 & n \\ 2 & 1 & 4 & 3 & .. & n & n-1 \end{matrix}$$

einer Classe angehören oder nicht, je nachdem $\frac{n}{2}$ gerade oder ungerade.

3. **Lehrsatz**. Die Formel $S = a_{12}\, a_{34} \ldots a_{n-1,n} + \cdots$, deren Quadrat der vorhin betrachteten Determinante R gleichkommt, ist alternirend, d. h. sie erhält den entgegengesetzten Werth, wenn irgend zwei Numern der Elemente vertauscht werden, und verschwindet identisch, wenn zwei Numern einander gleich sind*).

Beweis. Wenn S_1 die Formel bedeutet, welche aus S durch Vertauschung der Numern i und k entspringt, so ist $S_1{}^2$ die Determinante, welche aus R durch Vertauschung derselben Numern hervorgeht. Nun kommen i und k in R sowohl unter den ersten, als auch unter den zweiten Numern vor, also wird R durch diese Vertauschung nicht verändert (§. 2, 4), d. h. $S_1{}^2 = S^2$. Zufolge dieser Identität sind die Glieder von S_1 den Gliedern von S der Reihe nach gleich und zwar von gleichen oder von entgegengesetzten Zeichen, je nachdem ein Glied von S_1 und das gleiche von S gleiche oder entgegengesetzte Zeichen haben. Bedeutet nun $a_{ik} B$ das Aggregat der Glieder von S, in denen das Element a_{ik} vorkommt, so enthält B nur solche Elemente, deren Numern von i und k verschieden sind (2), folglich geht $a_{ik} B$ durch Vertauschung von i und k in $a_{ki} B$ über. Die Glieder $a_{ik} B$ in S und $a_{ki} B$ in S_1 sind entgegengesetzt gleich, weil $a_{ki} = -a_{ik}$, folglich sind auch S und S_1 entgegengesetzt gleich.

Wenn i und k einander gleich sind, so hat S_1 sowohl den Werth $-S$ als auch den Werth S, d. h. S verschwindet identisch.

4. Das mit dem Anfangsglied $a_{12}\, a_{34} \ldots a_{n-1,n}$ beginnende Aggregat S, dessen Quadrat die Determinante R ist, wird nach Jacobi durch die Reihe aller Numern der in dem Anfangsglied vorkommenden Elemente

---

*) Die Formel S ist von Jacobi (Crelle J. 2 p. 354, 29 p. 236) zum Gebrauch beim Pfaff'schen Integrationsproblem construirt und neuerlich von Cayley (l. c.) mit dem Namen Pfaffian belegt worden. Die Eigenschaften derselben hat Jacobi ohne Beweis und ohne die fundamentale Relation $S^2 = R$ mitgetheilt.

$$(1,\ 2,\ 3,\ ..,\ n)$$

unzweideutig bezeichnet. Nach dem bewiesenen Lehrsatz (3) ist

$$(1,\ 2,\ 3,\ ..,\ n) = -(2,\ 1,\ 3,\ ..,\ n) = -(2,\ 3,\ ..,\ n,\ 1) \text{ u. s. w.}$$

Daher hat man im Allgemeinen

$$\sqrt{R} = \pm(1,\ 2,\ ..,\ n)\,, \quad \sqrt{a_{ii}} = \pm(2,\ 3,\ ..,\ i-1,\ i+1,\ ..,\ n)\,.$$

Es ist aber nur dann auch dem Zeichen nach (2)

$$\sqrt{\alpha_{ii}}\sqrt{\alpha_{kk}} = \alpha_{ik}$$

$$(1,\ 2,\ ..,\ n) = \Sigma\, a_{1i}\sqrt{\alpha_{ii}}$$

wenn man die Zeichen der Wurzeln von den Numern so abhängig macht, dass

$$\sqrt{\alpha_{ii}} = (-1)^i(2,\ 3,\ ..,\ i-1,\ i+1,\ ..,\ n) = (i+1,\ ..,\ n,\ 2,\ ..,\ i-1)$$

Hiernach gilt zur Entwickelung von $(1,\ 2,\ ..,\ n)$ die Recursionsformel *)

$$(1,\ 2,\ ..,\ n) = a_{12}\,(3,\ ..,\ n) + a_{13}\,(4,\ ..,\ n,\ 2) + ..$$
$$+ a_{1i}\,(i+1,\ ..,\ n,\ 2,\ ..,\ i-1) + .. + a_{1n}\,(2,\ ..,\ n-1)$$

Beweis. Das Product $\sqrt{\alpha_{ii}}\sqrt{\alpha_{kk}}$ d. i. nach Voraussetzung

$$(-1)^{i+k}(2,\ ..,\ i-1,\ i+1,\ ..,\ n)(2,\ ..,\ k-1,\ k+1,\ ..,\ n)$$

ist identisch entweder mit α_{ik} oder mit $-\alpha_{ik}$, weil $\alpha_{ii}\alpha_{kk} = \alpha_{ik}^2$. Nach Vandermonde's Bezeichnung hat man (§. 3, 1)

$$\alpha_{ik} = (-1)^{i+k}\left|\begin{matrix} 2,\ ..,\ i-1,\ i+1,\ \ .\ \ ..,\ n \\ 2,\ ..\ \ .\ \ k-1,\ k+1,\ ..,\ n \end{matrix}\right|$$

In der Reihe der ersten Numern fehlen 1 und i, in der Reihe der zweiten Numern fehlen 1 und k. Werden die übrigen $n-3$ Numern der Reihe $1,\ 2,\ ..,\ n$ durch

$$p,\ q,\ r,\ s,\ ..,\ u,\ v$$

bezeichnet, so erhält man aus

$$\left|\begin{matrix} 2,\ ..,\ i-1,\ i+1,\ \ .\ \ ..\ n \\ 2,\ ..\ \ .\ \ k-1,\ k+1,\ ..\ n \end{matrix}\right|$$

durch eine bestimmte Anzahl von Zeichenwechseln (§. 2, 4)

$$\left|\begin{matrix} k,\ p,\ q,\ r,\ ..,\ u,\ v \\ p,\ q,\ r,\ s,\ ..,\ v,\ i \end{matrix}\right|$$

*) Jacobi und Cayley (l. c.) gebrauchen diese Identität als Definition von $(1,\ 2,\ ..,\ n)$.

Aus dem Product

$$(2, \ldots, i-1, i+1, \ldots, n)(2, \ldots, k-1, k+1, \ldots, n)$$

erhält man durch dieselbe Anzahl von Zeichenwechseln (3)

$$(k, p, q, r, \ldots, u, v)(p, q, r, s, \ldots, v, i).$$

Nun stimmt das Anfangsglied jener Determinante

$$a_{kp}\, a_{pq}\, a_{qr}\, a_{rs} \ldots a_{uv}\, a_{vi}$$

mit dem Anfangsglied dieses Products

$$a_{kp}\, a_{qr} \ldots a_{uv}\, a_{pq}\, a_{rs} \ldots a_{vi}$$

auch dem Zeichen nach überein. Also hat unter der gemachten Voraussetzung das Product $\sqrt{\alpha_{ii}}\,\sqrt{\alpha_{kk}}$ den Werth α_{ik}, nicht $-\alpha_{ik}$, w. z. b. w.

Durch $i-2$ cyclische Vertauschungen findet man

$$\sqrt{\alpha_{ii}} = (-1)^i (2, \ldots, i-1, i+1, \ldots, n) = (i+1, \ldots, n, 2, \ldots, i-1).$$

Beispiele.

$$\Sigma \pm a_{11} \ldots a_{44} = (1, 2, 3, 4)^2$$

$$(1, 2, 3, 4) = a_{12}\, a_{34} + a_{13}\, a_{42} + a_{14}\, a_{23}$$

$$\Sigma \pm a_{11} \ldots a_{66} = (1, 2, \ldots, 6)^2$$

$$\begin{aligned}(1, 2, \ldots, 6) &= a_{12}\,(3, 4, 5, 6) + a_{13}\,(4, 5, 6, 2) + \ldots + a_{16}\,(2, 3, 4, 5)\\
&= a_{12}\, a_{34}\, a_{56} + a_{12}\, a_{35}\, a_{64} + a_{12}\, a_{36}\, a_{45}\\
&+ a_{13}\, a_{45}\, a_{62} + a_{13}\, a_{46}\, a_{25} + a_{13}\, a_{42}\, a_{56}\\
&+ a_{14}\, a_{56}\, a_{23} + a_{14}\, a_{52}\, a_{36} + a_{14}\, a_{53}\, a_{62}\\
&+ a_{15}\, a_{62}\, a_{34} + a_{15}\, a_{63}\, a_{42} + a_{15}\, a_{64}\, a_{23}\\
&+ a_{16}\, a_{23}\, a_{45} + a_{16}\, a_{24}\, a_{53} + a_{16}\, a_{25}\, a_{34}\end{aligned}$$

$$\begin{vmatrix} 0 & a & b & c \\ -a & 0 & f & e \\ -b & -f & 0 & d \\ -c & -e & -d & 0 \end{vmatrix} = (ad - be + cf)^2$$

$$\begin{vmatrix} 0 & a & -b & c \\ -a & 0 & f & e \\ b & -f & 0 & d \\ -c & -e & -d & 0 \end{vmatrix} = (ad + be + cf)^2$$

5. Um den Coefficienten des Elements a_{ik} in der Formel

$$S = (1, 2, \ldots, n)$$

zu finden, bildet man

$$(-1)^{i-1} S = (i, 1, \ldots, i-1, i+1, \ldots, n)$$
$$= a_{i1} (2, \ldots, i-1, i+1, \ldots, n) + a_{i2} (3, \ldots, 1) + \ldots$$

Hieraus erkennt man den gesuchten Coefficienten

$$(-1)^{i-1} (k+1, \ldots, k-1) \text{ ohne } i \text{ und } k.$$

Derselbe Coefficient kann auch (wie §. 3, 12) durch

$$\frac{\partial S}{\partial a_{ik}}$$

ausgedrückt werden. Die Summe

$$a_{i1} \frac{\partial S}{\partial a_{k1}} + a_{i2} \frac{\partial S}{\partial a_{k2}} + \ldots + a_{in} \frac{\partial S}{\partial a_{kn}}$$

hat den Werth S oder 0, je nachdem i und k übereinstimmen oder nicht *). Denn in dem zweiten Falle entspringt die Summe dadurch, dass in $(1, \ldots, n)$ die Numer i für k gesetzt wird, wobei $(1, \ldots, n)$ verschwindet (3).

Der Differentialquotient $\frac{\partial S}{\partial a_{kk}}$ ist an sich 0.

6. Wenn die Elemente der Determinante R so beschaffen sind, dass

$$a_{ik} = -a_{ki}, \qquad a_{11} = a_{22} = \ldots = a_{nn} = z,$$

so ist zufolge der oben (§. 4, 2) gezeigten Entwickelung

$$R = z^n + z^{n-2} \Sigma D_2 + z^{n-4} \Sigma D_4 + \ldots **),$$

wobei

$$D_m = \begin{vmatrix} a_{ii} & a_{ik} & \cdot \\ a_{ki} & a_{kk} & \cdot \\ \cdot & \cdot & \end{vmatrix}$$

eine partiale Determinante $m$ten Grades ist, deren Elemente den Bedingungen

$$a_{rs} = -a_{sr}, \quad a_{rr} = 0$$

unterliegen, und ΣD_m die Summe der Determinanten bedeutet, welche aus D_m entspringen, indem für $i, k, \ldots$ alle Combinationen von je m aus der Reihe $1, 2, \ldots, n$ gesetzt werden.

---

*) Jacobi l. c.

**) Cayley l. c. Vergl. Crelle J. 50 p. 299.

Bei ungeraden m verschwindet D_m (§. 3, 13), bei geraden m ist (4)

$$D_m = (i, k, \ldots)^2 ,$$

also ΣD_m die Summe von $\binom{n}{m}$ Quadraten.

Beispiele.

$$\begin{vmatrix} z & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & z & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & z \end{vmatrix} = z^3 + z\,(a_{12}{}^2 + a_{13}{}^2 + a_{23}{}^2)\,.$$

$$\begin{vmatrix} z & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & z & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & z & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & z \end{vmatrix} = z^4 + z^2\,(a_{12}{}^2 + a_{13}{}^2 + a_{14}{}^2 + a_{23}{}^2 + a_{24}{}^2 + a_{34}{}^2) \\ + (a_{12}\,a_{34} + a_{13}\,a_{42} + a_{14}\,a_{23})^2\,.$$

Zweiter Abschnitt.

Anwendungen der Determinanten.

§. 8. Auflösung eines Systems von linearen Gleichungen.

1. Wenn $u_1, \ldots, u_n$ homogene lineare Functionen der Variablen $x_1, \ldots, x_n$ sind, nämlich

$$\begin{aligned} u_1 &= a_{11}\, x_1 + \ldots + a_{1n}\, x_n \\ &\cdots\cdots \\ u_n &= a_{n1}\, x_1 + \ldots + a_{nn}\, x_n \end{aligned}$$

so heisst die Determinante $n$ten Grades der Coefficienten

$$R = \Sigma \pm a_{11} \ldots a_{nn}$$

die **Determinante des Systems von linearen Functionen** $u_1, \ldots, u_n$ *).

Wenn die Determinante R nicht verschwindet, so gehört zu jedem System von endlichen Werthen $u_1, \ldots, u_n$ ein bestimmtes System von endlichen Werthen $x_1, \ldots, x_n$. Man findet

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdot\ \cdot & a_{1n} \\ \cdot & \cdot\ \cdot & \cdot \\ a_{n1} & \cdot\ \cdot & a_{nn} \end{vmatrix} x_k = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdot\ \cdot & a_{1,k-1} & u_1 & a_{1,k+1} & \cdot\ \cdot & a_{1n} \\ \cdot & \cdot\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\ \cdot & \cdot \\ a_{n1} & \cdot\ \cdot & a_{n,k-1} & u_n & a_{n,k+1} & \cdot\ \cdot & a_{nn} \end{vmatrix}$$

indem man in R die $k$te Colonne mit x_k multiplicirt, und dann die übrigen der Reihe nach mit $x_1, x_2, \ldots$ multiplicirten Colonnen zur $k$ten Colonne addirt (§. 3, 6).

*) Jacobi Det. 7.

Bezeichnet man den Coefficienten des Elements a_{ik} in R durch α_{ik}, so erhält man

$$Rx_k = \alpha_{1k} u_1 + \ldots + \alpha_{nk} u_n *).$$

Von der Summe $\alpha_{1k} u_1 + \ldots + \alpha_{nk} u_n$ bleibt in der That nur das Glied Rx_k übrig, weil $\alpha_{1k} a_{1i} + \ldots + \alpha_{nk} a_{ni}$ den Werth 0 oder R hat, je nachdem i von k verschieden ist oder nicht (§. 3, 3).

Anmerkung. Wenn v eine andre gegebene homogene lineare Function von $x_1, \ldots, x_n$ bedeutet, so lassen sich bestimmte Multiplicatoren $C_1, \ldots, C_n$ angeben von der Art, dass bei beliebigen Werthen der x

$$C_1 u_1 + \ldots + C_n u_n = Rv$$

eine Identität wird.

2. Die Auflösung des vorhin betrachteten linearen Systems kann auf die Auflösung des Systems von n linearen Gleichungen

$$\begin{gathered} a_{10} x_0 + a_{11} x_1 + \ldots + a_{1n} x_n = 0 \\ \cdots \\ a_{n0} x_0 + a_{n1} x_1 + \ldots + a_{nn} x_n = 0 \end{gathered}$$

gegründet werden, indem man $x_k : x_0$ für x_k setzt.

Man bilde nach Hinzunahme einer willkürlichen Hülfsgleichung

$$a_{00} x_0 + a_{01} x_1 + \ldots + a_{0n} x_n = 0$$

die Determinante $(n+1)$ten Grades

$$S = \begin{vmatrix} a_{00} & a_{01} & \ldots & a_{0n} \\ a_{10} & a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ a_{n0} & a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{00} R_0 + a_{01} R_1 + \ldots + a_{0n} R_n$$

Multiplicirt man die erste Colonne in S mit x_0, und addirt man zur ersten Colonne die übrigen der Reihe nach mit $x_1, x_2, \ldots$ multiplicirten Colonnen, so verschwinden alle Elemente der ersten Colonne. Mithin verschwindet Sx_0, und wenn x_0 nicht verschwindet, so ist $S = 0$.

Nun verschwindet $a_{i0} R_0 + a_{i1} R_1 + \ldots + a_{in} R_n$ bei

*) Diese Auflösung wurde zuerst von Leibniz angegeben, später von Cramer neu erfunden. Vergl. §. 1 und §. 2.

$i = 1, 2, .., n$ (§. 3, 3), also genügt man dem gegebenen System durch die Proportion

$$x_0 : x_1 : x_2 : . . : x_n = R_0 : R_1 : R_2 : . . : R_n$$

unter der Voraussetzung, dass die Grösse R_0, welche mit der oben (1) durch R bezeichneten Determinante übereinstimmt, nicht verschwindet.

Anmerkung. Bezeichnet man den Coefficienten des Elements a_{ik} in R_0 durch α_{ik}, so folgt unter der Bedingung $R_0 = 0$ aus dem gegebenen System

$$(a_{10}\alpha_{11} + a_{20}\alpha_{21} + .. + a_{n0}\alpha_{n1})x_0 = 0 .$$

Wenn nun $a_{10}\alpha_{11} + .. + a_{n0}\alpha_{n1}$ nicht Null ist, so genügen dem gegebenen System

$$x_0 = 0, \quad \left\{ \begin{array}{l} a_{11}x_1 + .. + a_{1n}x_n = 0 \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ a_{n1}x_1 + .. + a_{nn}x_n = 0 \end{array} \right.$$

Wenn aber $a_{10}\alpha_{11} + .. + a_{n0}\alpha_{n1} = 0$ ist, so genügen die Werthe $x_0, x_1, .., x_n$, bei welchen $n-1$ unter den gegebenen Gleichungen bestehn, auch der $n$ten Gleichung. Denn zufolge des Systems verschwindet

$$-x_0(a_{20}\alpha_{21} + .. + a_{n0}\alpha_{n1}) - .. - x_n(a_{2n}\alpha_{21} + .. + a_{nn}\alpha_{n1})$$

$$\text{d. i. } (a_{10}x_0 + .. + a_{1n}x_n)\alpha_{11} .$$

3. Auflösung des Systems (1) $u_1 = 0, .., u_n = 0$.

I. Wenn die Determinante $R = \Sigma \pm a_{11} .. a_{nn}$ nicht verschwindet, so wird dem System nur durch die Werthe $x_1 = 0, .., x_n = 0$ genügt. Multiplicirt man die $k$te Colonne von R mit x_k, und addirt man zur $k$ten Colonne die mit x_1, x_2, .. multiplicirten übrigen Colonnen, so findet man für Rx_k eine Determinante, deren $k$te Colonne verschwindende Elemente hat. Daher ist $Rx_k = 0$, folglich $x_k = 0$, in Betracht dass R nicht verschwindet.

II. Wenn die Determinante R verschwindet und eine partiale Determinante $(n-1)$ten Grades nicht verschwindet, so wird dem System der Gleichungen durch die Proportion

$$x_1 : x_2 : .. : x_n = \alpha_{i1} : \alpha_{i2} : .. : \alpha_{in} \text{ *)}$$

*) Jacobi Det. 7. Die Gleichung $R = 0$ heisst nach Bezout Hist. de l'Acad. de Paris 1764 p. 288 die Resultante der linearen Gleichungen $u_1 = 0, .., u_n = 0$.

genügt, in welcher α_{ik} den Coefficienten des Elements a_{ik} in R und i eine beliebige Numer bedeutet. Denn die Summe

$$a_{ki}\,\alpha_{i1} + \ldots + a_{kn}\,\alpha_{in}$$

verschwindet für irgend welche Numern i und k aus der Reihe 1 bis n (§. 3, 3). Das System $u_1 = 0, \ldots, u_n = 0$ ist einfach unbestimmt. Die Werthe $x_1, x_2, \ldots$, welche $n-1$ beliebigen Gleichungen des Systems genügen, genügen auch der letzten Gleichung des Systems.

III. Wenn die Determinante R und alle partialen Determinanten $(n-1)$ten bis $(m+1)$ten Grades verschwinden, und eine partiale Determinante $m$ten Grades z. B. $\Sigma \pm a_{11} \ldots a_{mm}$ nicht verschwindet*), so ist

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1m} & a_{1,m+1}\,x_{m+1} + \ldots + a_{1n}\,x_n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & \ldots & a_{mm} & a_{m,m+1}\,x_{m+1} + \ldots + a_{mn}\,x_n \\ a_{i1} & \ldots & a_{im} & a_{i,m+1}\,x_{m+1} + \ldots + a_{in}\,x_n \end{vmatrix} = 0$$

als Summe von $n-m$ partialen Determinanten $(m+1)$ten Grades, welche nach der Voraussetzung einzeln verschwinden. Bezeichnet man die Coefficienten, welche die Elemente der letzten Zeile in der verschwindenden Determinante haben, der Reihe nach durch $p_1, p_2, \ldots, p_m, p$, so hat man (II)

$$x_1 : x_2 : \ldots : x_m : 1 = p_1 : p_2 : \ldots : p_m : p\,.$$

Die Grössen $p_1, \ldots, p_m$ sind homogene lineare Functionen von $x_{m+1}, \ldots, x_n$ und unabhängig von i. Also genügen die den Gleichungen $u_1 = 0, \ldots, u_m = 0$ genügenden Werthe $x_1, \ldots, x_m$ auch jeder andern Gleichung des gegebenen Systems, und das gegebene System ist $(n-m)$fach unbestimmt.

4. Bei besondrer Beschaffenheit der Coefficienten giebt es besondre Methoden zur Auflösung von Systemen linearer Gleichungen.

Wenn die Coefficienten des in (1) betrachteten Systems von der Art sind, dass

$$a_{ki} = -a_{ik}\,, \qquad a_{ii} = 0\,,$$

und wenn n gerade ist, so hat man nach den Sätzen und Bezeichnungen von §. 7 die Auflösung**)

*) Die Behandlung dieses Falls und die Ermittelung seiner Bedingungen verdankt man Kronecker. Vergl. §. 5, 4.

**) Jacobi Crelle J. 2 p. 356.

$$(-1)^k (1, 2, .., n)\, x_k = u_1 (2, .., k-1, k+1, .., n) + u_2 (3, .., k-1, k+1, .., n, 1)$$
$$+ .. + u_n (1, .., k-1, k+1, .., n-1)\,.$$

Multiplicirt man nämlich die gegebenen Gleichungen der Reihe nach mit

$$(2, .., k-1, k+1, .., n)\,,\ (3, .., k-1, k+1, .., n, 1)\,, ..,\ (1, .., k-1, k+1, .., n-1)$$

und addirt die erhaltenen Gleichungen, so bekommt x_k den Coefficienten

$$a_{1k} (2, .., n) + a_{2k} (3, .., n, 1) + .. + a_{nk} (1, .., n-1)\,,$$

dessen Werth durch

$$-(k, 1, .., k-1, k+1, .., n)$$

dargestellt werden kann (§. 7, 4). Indem man noch k mit $1, 2, .., k-1$ vertauscht, erhält man für den gesuchten Coefficienten (§. 7, 3)

$$(-1)^k (1, 2, .., n)\,.$$

Dagegen hat x_i in der erhaltenen Summe den Coefficienten

$$-(i, 1, .., k-1, k+1, .., n)\,,$$

welcher identisch verschwindet.

5. Wenn die Coefficienten des linearen Systems von der Art sind, dass

$$a_{ik} = -a_{ki}\,, \qquad a_{ii} = 0$$

und n ungerade ist, so ist $R = 0$ (§. 3, 13), und den gegebenen Gleichungen wird im Allgemeinen nur durch unendliche Werthe von $x_1, x_2, ..$ genügt, welche zu einander bestimmte Verhältnisse haben (2, Anm.).

Wenn jedoch die partialen Determinanten $(n-1)$ten Grades $\alpha_{1k}, \alpha_{2k}, ..$, deren Verhältnisse zu einander von k unabhängig sind (§. 6, 5), und die Werthe $u_1, u_2, ..$ der Bedingung

$$u_1 \alpha_{1k} + u_2 \alpha_{2k} + .. + u_n \alpha_{nk} = 0$$

genügen, so ist wenigstens eine Gleichung des Systems überflüssig und das System der übrigen Gleichungen nach (4) auflösbar.

Vermöge der Identität (§. 7, 4)

$$\alpha_{ik} = (i+1, .., n, 1, .., i-1)(k+1, .., n, 1, .., k-1)$$

reducirt sich jene Bedingung auf

$$u_1 (2, .., n) + u_2 (3, .., n, 1) + .. + u_n (1, .., n-1) = 0 \text{ *)}.$$

*) Jacobi l. c.

Beispiel. Unter den Gleichungen

$$\begin{array}{rrrl} * & cy & -bz & = f \\ -cx & * & +az & = g \\ bx & -ay & * & = h \end{array}$$

folgt eine aus den beiden andern, wenn

$$af + bg + ch = 0 ,$$

ausserdem wird denselben durch unendliche Werthe von x, y, z genügt, die sich zu einander wie $a : b : c$ verhalten, vorausgesetzt dass keine der Grössen a, b, c verschwindet.

Andre lineare Systeme von besonderer Art werden unten (§. 10) aufgelöst.

§. 9. Lehrsätze über die linearen Differentialgleichungen.

1. Die Coefficienten einer linearen Differentialgleichung $n$ter Ordnung, welche kein von der Function unabhängiges Glied enthält, können aus n particulären Integralen derselben in ähnlicher Weise zusammengesetzt werden, wie die Coefficienten einer algebraischen Gleichung aus den Wurzeln derselben*). Wenn nämlich $y_1, y_2, \ldots y_n$ particuläre Integrale der linearen Differentialgleichung

$$0 = a_0 y + a_1 y' + \ldots + a_n y^{(n)}$$

bedeuten, wobei y', y'', .. die Differentialquotienten der Function y von x und die Grössen $a_0, a_1, \ldots, a_n$ von y, y', .. unabhängig sind, so werden durch das System

$$\begin{array}{c} a_0 y_1 + a_1 y_1' + \ldots + a_n y_1^{(n)} = 0 \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ a_0 y_n + a_1 y_n' + \ldots + a_n y_n^{(n)} = 0 \end{array}$$

die Verhältnisse der Grössen $a_0, a_1, \ldots$ zu einander bestimmt (§. 8, 2). Man bilde die Determinante $(n+1)$ten Grades

$$\begin{vmatrix} y & y' & \ldots & y^{(n)} \\ y_1 & y_1' & \ldots & y_1^{(n)} \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ y_n & y_n' & \ldots & y_n^{(n)} \end{vmatrix}$$

*) Vergl. Libri Crelle J. 10 p. 189.

wrote for Ch 25

und bezeichne durch η_k den Coefficienten, welchen in der Determinante das Element $y^{(k)}$ hat, so ist

$$a_0 : a_1 : \ldots : a_n = \eta_0 : \eta_1 : \ldots : \eta_n$$

Diese Determinanten $n$ten Grades sind aus den n particulären Integralen und deren Differentialquotienten zusammengesetzt.

2. Wenn $y_1, \ldots, y_n$ particuläre Integrale der Differentialgleichung

$$0 = a_0 y + a_1 y' + \ldots + a_n y^{(n)}$$

sind, so hat man insbesondere

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_1' & \ldots & y_1^{(n-2)} & y_1^{(n)} \\ \cdot & \cdot & \ldots & \cdot & \cdot \\ y_n & y_n' & \ldots & y_n^{(n-2)} & y_n^{(n)} \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} y_1 & y_1' & \ldots & y_1^{(n-1)} \\ \cdot & \cdot & \ldots & \cdot \\ y_n & y_n' & \ldots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} = -\frac{a_{n-1}}{a_n}$$

Nun ist der Dividendus der Differentialquotient des Divisor (§. 3, 15), folglich*)

$$\frac{d}{dx} \log \begin{vmatrix} y_1 & y_1' & \ldots & y_1^{(n-1)} \\ \cdot & \cdot & \ldots & \cdot \\ y_n & y_n' & \ldots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} = -\frac{a_{n-1}}{a_n}$$

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_1' & \ldots & y_1^{(n-1)} \\ \cdot & \cdot & \ldots & \cdot \\ y_n & y_n' & \ldots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} = e^{-\int \frac{a_{n-1}}{a_n} dx}$$

3. Die Integration der linearen Differentialgleichung $n$ter Ordnung

$$\text{(I)} \qquad a = a_0 y + a_1 y' + \ldots + a_n y^{(n)},$$

worin $a, a_0, a_1, \ldots$ von $y, y', \ldots$ unabhängig sind, lässt sich auf die Integration einer linearen Differentialgleichung $(n-m)$ter Ordnung reduciren, wenn m particuläre Integrale der einfacheren linearen Differentialgleichung $n$ter Ordnung

$$\text{(II)} \qquad 0 = a_0 y + a_1 y' + \ldots + a_n y^{(n)}$$

gegeben sind. Lagrange (Miscell. Taur. 3 p. 179) hat diesen Satz 1764 ausgesprochen und die Möglichkeit der Reduction nachgewiesen. Die Reduction ist von D'Alembert (l. c. p. 381) in kurzen Umrissen ausgeführt worden, mit dessen Verfahren

*) Abel Crelle J. 2 p. 22. Vergl. Malmsten Crelle J. 39 p. 91 und Tissot Liouv. J. 17 p. 178.

Libri's Abhandlung über diesen Gegenstand (Crelle J. 10 p. 185) im Wesentlichen zusammentrifft. Nachdem mit Hülfe der Determinanten von Malmstèn (Crelle J. 39 p. 91) die Ableitung des allgemeinen Integrals der Gleichung (II) aus $n-1$ particulären Integralen derselben gezeigt worden war, hat Joachimsthal (Crelle J. 40 p. 48) auch die Reduction der allgemeinern linearen Differentialgleichung (I) durch m gegebene particuläre Integrale der Gleichung (II) auf analoge Weise ausgeführt. Das hierzu dienliche Verfahren ist zum grossen Theil bereits von Lagrange vorgezeichnet, der in einer spätern Abhandlung (Mém. de Berlin 1775 p. 190) das allgemeine Integral der Gleichung (I) durch n particuläre Integrale der Gleichung (II) dargestellt hat.

Wenn die von x abhängigen Grössen $y_1, y_2, \ldots, y_m$ gegebene particuläre Integrale der Gleichung (II) bedeuten, so lassen sich ebensoviel Functionen von x, welche durch $b_1, b_2, \ldots, b_m$ bezeichnet werden, durch Auflösung einer allgemeinen linearen Differentialgleichung $(n-m)$ter Ordnung und durch m Quadraturen dergestalt bestimmen, dass

$$y = b_1 y_1 + b_2 y_2 + \ldots + b_m y_m$$

das allgemeine Integral der Gleichung (I) wird. Bezeichnet man nämlich

$$\frac{d^k y_i}{d x^k} \text{ durch } y_{ik}, \quad \frac{d b_i}{d x} \text{ durch } b_{i1},$$

so erhält man

$$\begin{aligned}
y' &= b_1 y_{11} + \ldots + b_m y_{m1} \\
y'' &= b_1 y_{12} + \ldots + b_m y_{m2} \\
&\ldots\ldots\ldots \\
y^{(m-1)} &= b_1 y_{1,m-1} + \ldots + b_m y_{m,m-1}
\end{aligned}$$

unter den Bedingungen

$$\begin{aligned}
b_{11} y_1 + \ldots + b_{m1} y_m &= 0 \\
b_{11} y_{11} + \ldots + b_{m1} y_{m1} &= 0 \\
\ldots\ldots\ldots \\
b_{11} y_{1,m-2} + \ldots + b_{m1} y_{m,m-2} &= 0
\end{aligned}$$

durch welche die Verhältnisse $b_{11} : b_{21} : b_{31} : \ldots$ bestimmt werden. Ferner erhält man

$$y^{(m)} = b_1 y_{1m} + \ldots + b_m y_{mm} + z,$$

wo

$$b_{11}\, y_{1,m-1} + \cdot\cdot + b_{m1}\, y_{m,m-1} = z\,,$$

eine bestimmte Function von x. Ebenso ist

$$y^{(m+1)} = b_1\, y_{1,m+1} + \cdot\cdot + b_m\, y_{m,m+1} + z' + z_1$$

wenn

$$b_{11}\, y_{1m} + \cdot\cdot + b_{m1}\, y_{mm} = z_1\,, \quad \frac{dz}{dx} = z'\,,$$

$$y^{(m+2)} = b_1\, y_{1,m+2} + \cdot\cdot + b_m\, y_{m,m+2} + z'' + z_{11} + z_2$$

wenn

$$b_{11}\, y_{1,m+1} + \cdot\cdot + b_{m1}\, y_{m,m+1} = z_2\,, \quad \frac{dz_1}{dx} = z_{11}\,,$$

$$y^{(n)} = b_1\, y_{1n} + \cdot\cdot + b_m\, y_{mn} + z^{(n-m)}$$
$$+ z_{1,n-m-1} + \cdot\cdot + z_{n-m-1,1} + z_{n-m}$$

wenn

$$b_{11}\, y_{1,n-1} + \cdot\cdot + b_{m1}\, y_{m,n-1} = z_{n-m}\,.$$

Indem man diese Gleichungen der Reihe nach mit $a_0, a_1, \ldots$ multiplicirt und dann addirt, so findet man vermöge der über $y_1, y_2, \ldots, y_m$ gemachten Voraussetzungen

$$\begin{aligned} a = a_m z &+ a_{m+1} z' + a_{m+2} z'' + \cdot\cdot + a_n z^{(n-m)} \\ &+ a_{m+1} z_1 + a_{m+2} z_{11} + \cdot\cdot + a_n z_{1,n-m-1} \\ &\qquad\qquad + a_{m+2} z_2 + \cdot\cdot + a_n z_{2,n-m-2} \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad \cdot \quad \cdot \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad + a_n z_{n-m} \end{aligned}$$

als Bedingung, unter welcher $b_1 y_1 + b_2 y_2 + \ldots + b_m y_m$ ein Integral der Gleichung (I) ist.

Zur Berechnung der Grössen $b_1, \ldots, b_m, z_1, z_2, \ldots$ bilde man die Determinante $m$ten Grades

$$R_\mu = \begin{vmatrix} y_1 & y_{11} & \cdot\cdot & y_{1,m-2} & y_{1\mu} \\ \cdot & \cdot & \cdot\cdot & \cdot & \cdot \\ y_m & y_{m1} & \cdot\cdot & y_{m,m-2} & y_{m\mu} \end{vmatrix}$$

und bezeichne durch η_i den Coefficienten, welchen in R_μ das Element $y_{i\mu}$ hat. Wenn man die $i$te Zeile mit b_{i1} multiplicirt und zu ihr die übrigen der Reihe nach mit $b_{11}, b_{21}, \ldots$ multiplicirten Zeilen addirt, so verschwinden ihre Elemente mit Ausnahme des letzten, welches einen der Werthe $z, z_1, z_2, \ldots$ annimmt. Also ist

$$b_{i1} R_{m-1} = \eta_i z\,, \quad b_{i1} R_m = \eta_i z_1\,, \quad b_{i1} R_{m+1} = \eta_1 z_2\,, \ldots$$

$$z_1 = \frac{R_m z}{R_{m-1}} = c_1 z\,, \quad z_2 = \frac{R_{m+1} z}{R_{m-1}} = c_2 z\,, \ldots$$

$$b_{i1} = \frac{\eta_i z}{R_{m-1}}\,, \quad b_i = \int \frac{\eta_i z}{R_{m-1}} dx\,.$$

Die Grössen c_1, c_2, .. sind gegebene Functionen von x, mithin werden, nachdem z gefunden ist, b_1, b_2, .. durch Quadraturen berechnet. Durch Differentiation findet man

$$\begin{aligned} z_{i1} &= c_{i1} z + c_i z' \\ z_{i2} &= c_{i2} z + 2 c_{i1} z' + c_i z'' \\ z_{i3} &= c_{i3} z + 3 c_{i2} z' + 3 c_{i1} z'' + c_i z''' \\ &\ldots \end{aligned}$$

folglich ist

$$\begin{aligned} a = \; & a_m z \\ & + a_{m+1} \; (c_1 z + z') \\ & + a_{m+2} \left| \begin{array}{l} c_{11} z + c_1 z' + z'' \\ + c_2 z \end{array} \right. \\ & + a_{m+3} \left| \begin{array}{l} c_{12} z + 2 c_{11} z' + c_1 z'' + z''' \\ + c_{21} z + c_2 z' \\ + c_3 z \end{array} \right. \\ & + a_{m+4} \left| \begin{array}{l} c_{13} z + 3 c_{12} z' + 3 c_{11} z'' + c_1 z^{(3)} + z^{(4)} \\ + c_{22} z + 2 c_{21} z' + c_2 z'' \\ + c_{31} z + c_3 z' \\ + c_4 z \end{array} \right. \\ & + \ldots \end{aligned}$$

die lineare Gleichung $(m-n)$ter Ordnung, welcher die Function z zu genügen hat. Aus dem Werth von z lassen sich dann die Functionen b_1, b_2, .., b_m berechnen, so dass

$$b_1 y_1 + b_2 y_2 + \ldots + b_m y_m$$

ein Integral der Gleichung (1) wird. Da in den particulären Integralen y_1, y_2, .., y_m nach üblicher Voraussetzung unbestimmte Constanten nicht vorkommen, da ferner das allgemeine Integral z der zuletzt gefundenen linearen Gleichung $n-m$ unbestimmte Constanten enthält, und durch m Quadraturen bei der Berechnung von b_1, b_2, .., b_m andere m unbestimmte Constanten entstehen, so hat das gefundene Integral der Gleichung

(I) die erforderliche Anzahl von n unbestimmten Constanten, wodurch es als das allgemeine Integral der Gleichung (I) erscheint.

4. Die lineare Differentialgleichung, welche zur Integration der gegebenen Differentialgleichung zu lösen übrig bleibt, ist im Allgemeinen nicht lösbar, wenn sie die erste Ordnung übersteigt. Also kommen besonders die Fälle $m = n$ und $m = n - 1$ in Betracht.

Für $m = n$ ist $a = a_n z$ und η_i der Coefficient von $y_{i,n-1}$ in

$$R_{n-1} = \begin{vmatrix} y_1 & y_{11} & \cdot\cdot & y_{1,n-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ y_n & y_{n1} & \cdot\cdot & y_{n,n-1} \end{vmatrix}$$

$$b_{i1} R_{n-1} = \eta_i z\,, \quad b_i = \int \frac{a\,\eta_i}{a_n R_{n-1}}\, dx$$

folglich ist das allgemeine Integral der Gleichung (I)

$$y = y_1 \int \frac{a\,\eta_1}{a_n R_{n-1}}\, dx + y_2 \int \frac{a\,\eta_2}{a_n R_{n-1}}\, dx + \ldots + y_n \int \frac{a\,\eta_n}{a_n R_{n-1}}\, dx$$

wie Lagrange a. a. O. bemerkt hat.

Für $m = n - 1$ ist $a = a_{n-1} z + a_n (c_1 z + z')$ und η_i der Coefficient von $y_{i\mu}$ in

$$R_\mu = \begin{vmatrix} y_1 & y_{11} & \cdot\cdot & y_{1,n-3} & y_{1\mu} \\ \cdot & & \cdot\cdot & \cdot & \cdot \\ y_{n-1} & y_{n-1,1} & \cdot\cdot & y_{n-1,n-3} & y_{n-1,\mu} \end{vmatrix}$$

$$c_1 = \frac{R_{n-1}}{R_{n-2}}$$

Nun ist R_{n-1} der Differentialquotient von R_{n-2} (§. 3, 15), folglich

$$aR_{n-2} = a_{n-1} R_{n-2} z + a_n (R_{n-1} z + R_{n-2} z') = a_{n-1} R_{n-2} z + a_n (R_{n-2} z)'.$$

Zur Auflösung dieser Gleichung bedarf man eines particulären Integrals u_1 der Gleichung $0 = a_{n-1} u + a_n u'$, nämlich

$$u_1 = e^{-\int \frac{a_{n-1}}{a_n} dx}$$

Setzt man nun das zunächst gesuchte allgemeine Integral

$$R_{n-2} z = u_1 v_1$$

folglich nach der angenommenen Bezeichnung

$$(R_{n-2}z)' = u_{11} v_1 + u_1 v_{11}$$

so erhält man, weil $a_{n-1} u_1 + a_n u_{11}$ nach der Voraussetzung verschwindet,

$$a R_{n-2} = a_n u_1 v_{11}, \qquad v_1 = \int \frac{a R_{n-2}}{a_n u_1} dx$$

mit einer unbestimmten Constante. Zur Bestimmung von b_i hat man endlich

$$b_{i1} = \frac{\eta_i z}{R_{n-2}} = \frac{u_1 v_1}{R_{n-2}^2} \eta_i$$

$$b_i = \int \frac{u_1 v_1}{R_{n-2}^2} \eta_i \, dx$$

mit je einer neuen unbestimmten Constante, so dass

$$y = b_1 y_1 + \ldots + b_{n-1} y_{n-1}$$

das allgemeine Integral der Gleichung (I) ist, wie Joachimsthal (l. c.) bemerkt hat. Den besondern Fall $a = 0$, in welchem v_1 selbst zur unbestimmten Constante wird, hatte Malmstèn (l. c.) früher analog behandelt.

§. 10. Product aller Differenzen von gegebenen Grössen.

1. Wenn man in der Reihe der Grössen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ jede von allen folgenden subtrahirt, so erhält man $\frac{1}{2} n (n-1)$ Differenzen, deren Product

$$\begin{array}{cccc} (\alpha_2 - \alpha_1) & (\alpha_3 - \alpha_1) & \ldots & (\alpha_n - \alpha_1) \\ & (\alpha_3 - \alpha_2) & \ldots & (\alpha_n - \alpha_2) \\ & & \ldots & \ldots \\ & & & (\alpha_n - \alpha_{n-1}) \end{array}$$

durch $\Delta(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ bezeichnet wird. Dieses Product reducirt sich auf eine Determinante $n$ten Grades, deren Zeilen geometrische Progressionen enthalten, nämlich*)

*) Cauchy J. de l'éc. polyt. Cah. 17 p. 48. Analyse algébr. III, 2 und Note IV. Jacobi Crelle J. 22 p. 360. Das Product der Differenzen der Wurzeln einer algebraischen Gleichung war von Waring, Lagrange, Vandermonde betrachtet worden. Bei dem Letztern findet man den besondern Fall des obigen Satzes

$$(b-a)(c-a)(c-b) = ab^2 - a^2 b + bc^2 - b^2 c + ca^2 - c^2 a$$

Hist. de l'Acad. de Paris 1771 p. 369.

$$\Delta(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = \begin{vmatrix} 1 & \alpha_1 & \alpha_1^2 & \ldots & \alpha_1^{n-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \ldots & \cdot \\ 1 & \alpha_n & \alpha_n^2 & \ldots & \alpha_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

Beweis. Das Product Δ ist alternirend (§. 1, 4). Wenn nun $\alpha_1^a \alpha_2^b \alpha_3^c \ldots$ ein Glied von Δ ist, so ist $\alpha_2^a \alpha_1^b \alpha_3^c \ldots$ ein Glied von $-\Delta$, folglich $-\alpha_2^a \alpha_1^b \alpha_3^c \ldots$ ein Glied von Δ. Diese beiden Glieder von Δ sind entgegengesetzt gleich, wenn die Exponenten a und b einander gleich sind. Also braucht man, um alle Glieder des Products zu bilden, für die Exponenten $a, b, c, \ldots$ nur verschiedene Zahlen zu setzen, und zwar Zahlen der Reihe $0, 1, \ldots, n-1$, weil kein Exponent den Werth n erreichen kann. Die Glieder, welche aus

$$\alpha_1^0 \alpha_2^1 \alpha_3^2 \ldots \alpha_n^{n-1}$$

durch gegenseitige Vertauschung der Exponenten entspringen, lassen sich auch durch gegenseitige Vertauschung der Dignanden ableiten, und sind daher Glieder von Δ oder von $-\Delta$, d. h. positive oder negative Glieder von Δ, je nachdem sie durch Permutationen der einen oder der andern Classe entstanden. Also ist das Product Δ von der Determinante

$$\Sigma \pm \alpha_1^0 \alpha_2^1 \ldots \alpha_n^{n-1}$$

nicht verschieden (§. 2, 2).

Von allen $2^{\frac{n(n-1)}{2}}$ Gliedern des Products bleiben nur $1 . 2 \ldots n$ übrig, also

bei 3	Grössen	6	statt	8
» 4	»	24	»	64
» 5	»	120	»	1024 u. s. w.

Beispiel.

$$(\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1)(\alpha_1\beta_3 - \alpha_3\beta_1)(\alpha_2\beta_3 - \alpha_3\beta_2) = \begin{vmatrix} \alpha_1^2 & \alpha_1\beta_1 & \beta_1^2 \\ \alpha_2^2 & \alpha_2\beta_2 & \beta_2^2 \\ \alpha_3^2 & \alpha_3\beta_3 & \beta_3^2 \end{vmatrix}.$$

2. Jede ganze alternirende Function der Variablen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ ist durch das Product der Differenzen $\Delta(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ theilbar*). Denn durch die gegenseitige Vertauschung von irgend zwei Variablen erhält die Function den entgegengesetzt

*) Cauchy l. c. p. 46.

gleichen Werth; daher verschwindet sie, wenn die beiden Variablen von einander sich nicht unterscheiden (§. 2, 4); also ist sie durch die Differenz derselben, mithin durch das Product Δ theilbar.

Der Quotient der ganzen alternirenden Function durch das Product der Differenzen ihrer Variablen ist je nach der Anzahl der Dimensionen entweder eine von den Variablen unabhängige Zahl, oder eine (permanent) symmetrische Function der Variablen.

Z. B. die Determinante (1) $\Sigma \pm \alpha_1{}^0 \alpha_2{}^1 \ldots \alpha_n{}^{n-1}$ ist eine ganze alternirende Function von ebensoviel Dimensionen als das Product Δ. Der Quotient der Determinante durch das Product ist 1, weil das Anfangsglied der Determinante mit dem Anfangsglied des Products auch dem Zeichen nach übereinstimmt. In der That ist (§. 3, 6)

$$\begin{vmatrix} 1 & \alpha_1 & \alpha_1^2 & . \\ 1 & \alpha_2 & \alpha_2^2 & . \\ 1 & \alpha_3 & \alpha_3^2 & . \\ . & . & . & . \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & \alpha_1 & \alpha_1^2 & . \\ 0 & \alpha_2-\alpha_1 & \alpha_2^2-\alpha_1^2 & . \\ 0 & \alpha_3-\alpha_1 & \alpha_3^2-\alpha_1^2 & . \\ . & . & . & . \end{vmatrix}$$

$$= (\alpha_2-\alpha_1)(\alpha_3-\alpha_1)\ldots \begin{vmatrix} 1 & \alpha_1+\alpha_2 & \alpha_1^2+\alpha_1\alpha_2+\alpha_2^2 & . \\ 1 & \alpha_1+\alpha_3 & \alpha_1^2+\alpha_1\alpha_3+\alpha_3^2 & . \\ . & . & . & . \end{vmatrix}$$

$$= (\alpha_2-\alpha_1)(\alpha_3-\alpha_1)\ldots \begin{vmatrix} 1 & \alpha_2 & \alpha_2^2 & . \\ 1 & \alpha_3 & \alpha_3^2 & . \\ . & . & . & . \end{vmatrix}$$

u. s. w. Andre Beispiele solcher Quotienten kommen im Folgenden vor. Die allgemeine Berechnung derselben ist von Jacobi Crelle J. 22 p. 365 gezeigt worden.

3. 1. Wenn $\varphi_i(x)$ eine ganze Function $i$ten Grades von x ist, in der die höchste Potenz den Coefficienten 1 hat, so findet man*)

$$\begin{vmatrix} 1 & \varphi_1(\alpha_1) & \ldots & \varphi_{n-1}(\alpha_1) \\ . & . & . & . \\ 1 & \varphi_1(\alpha_n) & \ldots & \varphi_{n-1}(\alpha_n) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & \alpha_1 & \ldots & \alpha_1^{n-1} \\ . & . & . & . \\ 1 & \alpha_n & \ldots & \alpha_n^{n-1} \end{vmatrix} = \Delta$$

*) Borchardt über eine Interpolationsformel. Abh. der Berl. Acad. 1860 p. 4.

indem man zur letzten, vorletzten, .. Colonne in Δ die mit den erforderlichen Coefficienten multiplicirten voranstehenden Colonnen addirt (§. 3, 6). Wenn die höchsten Potenzen von x andre Coefficienten haben, so ist die Determinante Δ mit dem Product dieser Coefficienten zu multipliciren. Wenn z. B.

$$\varphi_i(x) = \binom{x}{i} = \frac{x(x-1)\,..\,(x-i+1)}{1\,.\,2\,\,..\,\,i}$$

so findet man

$$\begin{vmatrix} 1 & \binom{\alpha_1}{1} & .. & \binom{\alpha_1}{n-1} \\ . & . & .. & . \\ 1 & \binom{\alpha_n}{1} & .. & \binom{\alpha_n}{n-1} \end{vmatrix} = \frac{\Delta}{2^{n-2}\,.\,3^{n-3}\,..\,(n-1)}.$$

Und wenn $\alpha_1 = \alpha$, $\alpha_2 = \alpha+1, \ldots, \alpha_n = \alpha+n-1$, so ist

$$\Delta = 2^{n-2}\,.\,3^{n-3}\,..\,(n-1)$$

$$\begin{vmatrix} 1 & \binom{\alpha}{1} & .. & \binom{\alpha}{n-1} \\ . & . & .. & . \\ 1 & \binom{\alpha+n-1}{1} & .. & \binom{\alpha+n-1}{n-1} \end{vmatrix} = 1\text{ *)}.$$

II. Wenn $\varphi_i(x) = a_{0i} + a_{1i}x + .. + a_{n-1,i}x^{n-1}$ ist, so hat man

$$\begin{vmatrix} \varphi_0(\alpha_1) & .. & \varphi_{n-1}(\alpha_1) \\ . & .. & . \\ \varphi_0(\alpha_n) & .. & \varphi_{n-1}(\alpha_n) \end{vmatrix} = \Sigma \pm a_{00} \,..\, a_{n-1,n-1}\,\Delta(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$$

nach der Multiplicationsregel (§. 5, 1).

Dem angegebenen Lehrsatz steht ein allgemeinerer zur Seite. Wenn

$$\begin{aligned} F(x, y) &= \varphi_0(x) + \varphi_1(x)\,y + \,..\, + \varphi_{n-1}(x)\,y^{n-1} \\ &= \Sigma\, a_{ik}\, x^i\, y^k \end{aligned}$$

eine Summe, deren Glieder gebildet werden, indem man für i und k alle Zahlen von 0 bis $n-1$ setzt, so erhält man bei nochmaliger Anwendung der Multiplicationsregel **)

$$\Sigma \pm F(\alpha_1, \beta_1)\,..\,F(\alpha_n, \beta_n) = \Sigma \pm a_{00}\,..\,a_{n-1,n-1}\,\Delta(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)\,\Delta(\beta_1, \ldots, \beta_n)$$

---

*) Vergl. §. 3, 7. Stern Crelle J. 66 p. 285.

**) Borchardt Berl. Monatsbericht 1859 p. 378 und Crelle J. 57 p. 112.

4. Wenn man das Product aller Differenzen der Grössen $\alpha_1, .., \alpha_n$ mit dem Product aller Differenzen der Grössen $\beta_1, .., \beta_n$ multiplicirt, so erhält man eine Determinante $n$ten Grades. Nach der Multiplicationsregel (§. 5, 6) ist

$$\Delta(\alpha_1, .., \alpha_n)\, \Delta(\beta_1, .., \beta_n)$$
$$= \begin{vmatrix} 1 & \alpha_1 & . & . & \alpha_1^{n-1} \\ . & . & . & . & . \\ 1 & \alpha_n & . & . & \alpha_n^{n-1} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & \beta_1 & . & . & \beta_1^{n-1} \\ . & . & . & . & . \\ 1 & \beta_n & . & . & \beta_n^{n-1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c_{11} & . & . & c_{1n} \\ . & . & . & . \\ c_{n1} & . & . & c_{nn} \end{vmatrix}$$

wenn

$$c_{ik} = 1 + \alpha_i\beta_k + \alpha_i^2\beta_k^2 + .. + \alpha_i^{n-1}\beta_k^{n-1} = \frac{1-\alpha_i^n\beta_k^n}{1-\alpha_i\beta_k}\ {}^{*)}$$

oder wenn

$$c_{ik} = \alpha_1^{i-1}\beta_1^{k-1} + \alpha_2^{i-1}\beta_2^{k-1} + .. + \alpha_n^{i-1}\beta_n^{k-1}.$$

Insbesondere ist

$$\Delta(\alpha_1, .., \alpha_n)^2 = \begin{vmatrix} s_0 & s_1 & . & . & s_{n-1} \\ s_1 & s_2 & . & . & s_n \\ . & . & . & . & . \\ s_{n-1} & s_n & . & . & s_{2n-2} \end{vmatrix} = S_n$$

wenn

$$s_i = \alpha_1^i + \alpha_2^i + .. + \alpha_n^i.$$

Denn in diesem Falle reducirt sich das Element c_{ik} der zu bildenden Determinante auf die Summe der $(i+k-2)$ten Potenzen der Grössen $\alpha_1, .., \alpha_n$.

Allgemeiner hat man**)

$$\Sigma\left[\Delta(\alpha_1, \alpha_2, .., \alpha_m)^2\right] = \begin{vmatrix} s_0 & s_1 & . & . & s_{m-1} \\ s_1 & s_2 & . & . & s_m \\ . & . & . & . & . \\ s_{m-1} & s_m & . & . & s_{2m-2} \end{vmatrix} = S_m$$

wenn die Summe die sämmtlichen $\binom{n}{m}$ Glieder umfasst, welche aus dem Anfangsglied $\Delta(\alpha_1, \alpha_2, .., \alpha_m)^2$ dadurch entspringen, dass an die Stelle der Grössen $\alpha_1, \alpha_2, .., \alpha_m$ je m verschiedene aus der Reihe $\alpha_1, .., \alpha_n$ gesetzt werden. Denn unter der Voraussetzung

---

*) Cauchy Exerc. d' anal. 2 p. 169.

**) Cayley Liouv. J. 11 p. 298 und Borchardt Liouv. J. 12 p. 58.

$$c_{ik} = s_{i+k-2} = \alpha_1^{\,i-1}\alpha_1^{\,k-1} + \alpha_2^{\,i-1}\alpha_2^{\,k-1} + \ldots + \alpha_n^{\,i-1}\alpha_n^{\,k-1}$$

ist die durch S_m bezeichnete Determinante in eine Summe von Quadraten zerlegbar (§. 5, 2), nämlich

$$S_m = \begin{vmatrix} c_{11} & \cdot & \cdot & c_{1m} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{m1} & \cdot & \cdot & c_{mm} \end{vmatrix} = \Sigma \left\{ \begin{vmatrix} 1 & \alpha_1 & \cdot & \cdot & \alpha_1^{\,m-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & \alpha_m & \cdot & \cdot & \alpha_m^{\,m-1} \end{vmatrix}^2 \right\}$$

wobei das Summenzeichen die angegebene Bedeutung hat.

5. Ebenso wird die umfassendere Summe

$$\Sigma \left\{ \chi(\alpha_1)\, \chi(\alpha_2) \,\ldots\, \chi(\alpha_m)\, \Delta(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m)^2 \right\}$$

durch die Determinante $m$ten Grades

$$T = \begin{vmatrix} t_0 & t_1 & \cdot & \cdot & t_{m-1} \\ t_1 & t_2 & \cdot & \cdot & t_m \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ t_{m-1} & t_m & \cdot & \cdot & t_{2m-2} \end{vmatrix}$$

ausgedrückt*), wenn $\chi(\alpha_i)$ gegeben ist, und

$$t_\mu = \alpha_1^{\,\mu}\chi(\alpha_1) + \ldots + \alpha_n^{\,\mu}\chi(\alpha_n).$$

Setzt man insbesondere

$$(1) \qquad \chi(\alpha_i) = b_i\,(x - \alpha_i)$$

$$u_\mu = b_1\,\alpha_1^{\,\mu} + \ldots + b_n\,\alpha_n^{\,\mu}$$

so wird $t_\mu = u_\mu x - u_{\mu+1}$, und die Determinante T lässt sich in eine Determinante $(m+1)$ten Grades transformiren, wie folgt**).

Nachdem man jede Colonne mit -1 multiplicirt hat, findet man (§. 2, 7)

$$T = \begin{vmatrix} u_0 & u_1 & \cdot & \cdot & 1 \\ u_1 - u_0 x & u_2 - u_1 x & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ u_m - u_{m-1} x & u_{m+1} - u_m x & \cdot & \cdot & 0 \end{vmatrix}$$

Addirt man zur zweiten Zeile die mit x multiplicirte erste Zeile, so behält man in der zweiten Zeile

$$u_1 \quad u_2 \quad \cdot \quad \cdot \quad u_m \quad x\,.$$

---

*) Joachimsthal Crelle J. 48 p. 394 und Borchardt über eine Interpolationsformel p. 8.

**) Vergl. Jacobi Crelle J. 30 p. 129.

Wenn man diese mit x multiplicirt und zur dritten Zeile addirt, so behält man in der dritten Zeile

$$u_2 \quad u_3 \quad . \quad . \quad u_{m+1} \quad x^2,$$

u. s. w. Daher ist unter der Voraussetzung (I)

$$T = \begin{vmatrix} u_0 & u_1 & . & . & u_{m-1} & 1 \\ u_1 & u_2 & . & . & u_m & x \\ . & . & . & . & . & . \\ u_m & u_{m+1} & . & . & u_{2m-1} & x^m \end{vmatrix}$$

Setzt man ferner

$$\text{(II)} \qquad \chi(\alpha_i) = b_i (x - \alpha_i)(y - \alpha_i)$$

so wird

$$t_\mu = u_{\mu+2} - u_{\mu+1} x - (u_{\mu+1} - u_\mu x) y$$

und die Determinante T kann in eine Determinante $(m+2)$ten Grades transformirt werden. Man hat nämlich wie vorhin

$$T = \begin{vmatrix} 1 & u_1 - u_0 x & u_2 - u_1 x & . & . \\ 0 & u_2 - u_1 x - (u_1 - u_0 x) y & u_3 - u_2 x - (u_2 - u_1 x) y & . & . \\ 0 & u_3 - u_2 x - (u_2 - u_1 x) y & u_4 - u_3 x - (u_3 - u_2 x) y & . & . \\ . & . \quad . \quad . & . \quad . \quad . & & \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & u_1 - u_0 x & . & . & u_m - u_{m-1} x \\ y & u_2 - u_1 x & . & . & u_{m+1} - u_m x \\ . & . & . & . & . \\ y^m & u_{m+1} - u_m x & . & . & u_{2m} - u_{2m-1} x \end{vmatrix}$$

$$= - \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & . & . \\ 1 & u_0 & u_1 - u_0 x & . & . \\ y & u_1 & u_2 - u_1 x & . & . \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 0 & 1 & x & . & . & x^m \\ 1 & u_0 & u_1 & . & . & u_m \\ y & u_1 & u_2 & . & . & u_{m+1} \\ . & . & . & . & . & . \\ y^m & u_m & u_{m+1} & . & . & u_{2m} \end{vmatrix}$$

6. Unter der Voraussetzung

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_0$$
$$= a_n (x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \ldots (x - \alpha_n)$$

kann die Determinante $m$ten Grades (4)

$$S_m = \begin{vmatrix} s_0 & s_1 & . & . & s_{m-1} \\ s_1 & s_2 & . & . & s_m \\ . & . & . & . & . \\ s_{m-1} & s_m & . & . & s_{2m-1} \end{vmatrix} = \Sigma \left\{ \Delta(\alpha_1, \ldots, \alpha_m)^2 \right\}$$

durch die Coefficienten von $f(x)$ ausgedrückt werden. Man bilde aus den $m-2$ Zeilen

$$\begin{matrix} 1 & 0 & 0 & . & . & . \\ 0 & 1 & 0 & . & . & . \\ 0 & 0 & 1 & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \end{matrix}$$

und aus den m folgenden Zeilen

$$\begin{matrix} 0 & 0 & . & . & 0 & s_0 & s_1 & . & . & s_{m-1} \\ 0 & 0 & . & . & s_0 & s_1 & . & . & . & s_m \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ s_0 & s_1 & . & . & . & . & . & . & . & s_{2m-3} \\ s_1 & s_2 & . & . & . & . & . & . & . & s_{2m-2} \end{matrix}$$

ein System von $(2m-2)^2$ Elementen, dessen Determinante von S_m nicht verschieden ist (§. 2, 6). Die Colonnen dieses Systems werden transformirt, die erste, indem man sie mit a_n multiplicirt; die zweite, indem man sie mit a_n multiplicirt und zu ihr die mit a_{n-1} multiplicirte erste Colonne addirt; die dritte, indem man sie mit a_n multiplicirt und zu ihr die mit a_{n-1}, a_{n-2} multiplicirte 2te, 1te Colonne addirt; u. s. f. Dadurch entsteht das System der $m-2$ Zeilen

$$\begin{matrix} a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & . & . & . \\ 0 & a_n & a_{n-1} & . & . & . \\ 0 & 0 & a_n & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \end{matrix}$$

und der $m-1$ folgenden Zeilen, die mit $m-2$, $m-3$,.. Nullen anfangen,

$$\begin{matrix} 0 & . & . & 0 & a_n s_0 & a_n s_1 + a_{n-1} s_0 & . & . \\ 0 & . & . & a_n s_0 & a_n s_1 + a_{n-1} s_0 & a_n s_2 + a_{n-1} s_1 + a_{n-2} s_0 & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . \end{matrix}$$

und der Schlusszeile

$$a_n s_1 \quad a_n s_2 + a_{n-1} s_1 \quad a_n s_3 + a_{n-1} s_2 + a_{n-2} s_1 \quad . \; . \; .$$

Die Determinante dieses Systems hat den Werth $a_n^{2m-2} S_m$ (§. 3, 4. 6), und die Elemente können mit Hülfe der Newton'-schen Identitäten*)

*) Newton Arithm. univers. ed. 's Gravesande p. 192. Man leitet dieselben am einfachsten aus der Identität der beiden für $\frac{f'(x)}{f(x)}$ sich darbietenden Ausdrücke ab.

$$\begin{aligned} a_n s_0 &= n a_n \\ a_n s_1 + a_{n-1} s_0 &= (n-1) a_{n-1} \\ a_n s_2 + a_{n-1} s_1 + a_{n-2} s_0 &= (n-2) a_{n-2} \\ \ldots & \ldots \end{aligned}$$

reducirt werden. Für die Schlusszeile hat man, weil $s_0 = n$ ist,

$$\begin{aligned} a_n s_1 &= -a_{n-1} \\ a_n s_2 + a_{n-1} s_1 &= -2a_{n-2} \\ \ldots & \ldots \end{aligned}$$

Demnach findet man

$$-a_n^{2m-2} S_m = \begin{vmatrix} a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdot\,\cdot \\ 0 & a_n & a_{n-1} & \cdot\,\cdot \\ 0 & 0 & a_n & \cdot\,\cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\,\cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\,\cdot \\ 0 & n a_n & (n-1) a_{n-1} & \cdot\,\cdot \\ n a_n & (n-1) a_{n-1} & (n-2) a_{n-2} & \cdot\,\cdot \\ a_{n-1} & 2a_{n-2} & 3a_{n-3} & \cdot\,\cdot \end{vmatrix}$$

eine Determinante $(2m-2)$ten Grades, bei welcher die $m-2$ ersten und die $m-1$ folgenden Zeilen in Bezug auf die nicht verschwindenden Elemente übereinstimmen. Insbesondere ist

$$-a_n^2 S_2 = \begin{vmatrix} n a_n & (n-1) a_{n-1} \\ a_{n-1} & 2a_{n-2} \end{vmatrix}$$

$$-a_n^4 S_3 = \begin{vmatrix} a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & a_{n-3} \\ 0 & n a_n & (n-1) a_{n-1} & (n-2) a_{n-2} \\ n a_n & (n-1) a_{n-1} & (n-2) a_{n-2} & (n-3) a_{n-3} \\ a_{n-1} & 2a_{n-2} & 3a_{n-3} & 4a_{n-4} \end{vmatrix} \quad \text{u. s. w.}$$

7. Das Quadrat des Products von allen Differenzen der Grössen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ (4)

$$S_n = \Delta(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)^2$$

kann durch Werthe der Differentialquotienten der Function

$$f(x) = a_n (x-\alpha_1)(x-\alpha_2) \ldots (x-\alpha_n)$$

ausgedrückt werden. Man hat nämlich

$$\begin{aligned} f'(\alpha_1) &= a_n \quad (\alpha_1-\alpha_2)(\alpha_1-\alpha_3) \ldots (\alpha_1-\alpha_n) \\ f'(\alpha_2) &= (\alpha_2-\alpha_1) \quad a_n \quad (\alpha_2-\alpha_3) \ldots (\alpha_2-\alpha_n) \\ f'(\alpha_3) &= (\alpha_3-\alpha_1)(\alpha_3-\alpha_2) \quad a_n \quad \ldots (\alpha_3-\alpha_n) \\ \ldots & \ldots \end{aligned}$$

folglich *)

$$f'(\alpha_1)\ .\ .\ f'(\alpha_n) = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_n{}^n \Delta(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)^2$$

Ebendaher findet man für $m < n$

$$f'(\alpha_1)\ .\ .\ f'(\alpha_m) = (-1)^{\frac{m(m-1)}{2}} a_n{}^m \Delta(\alpha_1, \ldots, \alpha_m)^2 P\ ,$$

wenn durch P das Product aller Differenzen der Grössen $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ von den Grössen (Subtrahenden) $\alpha_{m+1}, \ldots, \alpha_n$ bezeichnet wird.

Beispiel. Wenn $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ die $n$ten Wurzeln von 1 sind, so ist

$$f(x) = x^n - 1\ , \quad f'(x) = nx^{n-1}\ , \quad \alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n = (-1)^{n-1}\ ,$$

$$\Delta(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)^2 = (-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}} n^n\ .$$

Und wenn $\alpha_n = 1$, so hat man

$$\Delta(\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1})^2 = \frac{\Delta(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)^2}{f'(\alpha_n)^2} = (-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}} n^{n-2}\ .$$

8. In der Determinante $n$ten Grades

$$P = \begin{vmatrix} 1 & \alpha_1 & . & . & \alpha_1{}^{n-2} & u_1 \\ . & . & . & . & . & . \\ 1 & \alpha_n & . & . & \alpha_n{}^{n-2} & u_n \end{vmatrix}$$

hat das Element u_i den Coefficienten

$$(-1)^{n-i} \Delta(\alpha_1, \ldots, \alpha_{i-1}, \alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_n)\ ,$$

wie sich ergiebt, indem man die $i$te Zeile zur Schlusszeile macht (§. 3, 1). Nach der angegebenen Bezeichnung ist

$$\Delta(\alpha_1, \ldots, \alpha_{i-1}, \alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_n) = \frac{\Delta(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)}{(\alpha_i - \alpha_1) \ldots (\alpha_i - \alpha_{i-1})(\alpha_{i+1} - \alpha_i) \ldots (\alpha_n - \alpha_i)}$$

Bildet man nun

$$f(z) = (z - \alpha_1)(z - \alpha_2)\ .\ .\ (z - \alpha_n)$$

$$f'(\alpha_i) = (\alpha_i - \alpha_1)\ .\ .\ (\alpha_i - \alpha_{i-1})(\alpha_i - \alpha_{i+1})\ .\ .\ (\alpha_i - \alpha_n)$$

so findet man

$$(-1)^{n-i} \Delta(\alpha_1, \ldots, \alpha_{i-1}, \alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_n) = \frac{\Delta(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)}{f'(\alpha_i)}$$

*) Cauchy J. de l'éc. polyt. Cah. 17 p. 485.

und daher folgende Entwickelung der gegebenen Determinante

$$P = \left(\frac{u_1}{f'(\alpha_1)} + \ldots + \frac{u_n}{f'(\alpha_n)}\right) \Delta(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) .$$

9. Bezeichnet man durch P_r die Determinante, in welche P (8) übergeht, wenn α_i^r an die Stelle von u_i tritt, so hat man *)

$$\frac{\alpha_1^r}{f'(\alpha_1)} + \ldots + \frac{\alpha_n^r}{f'(\alpha_n)} = \frac{P_r}{\Delta(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)} .$$

Die Determinante P_r verschwindet, wenn die letzte Colonne mit einer der übrigen Colonnen übereinstimmt. Also verschwindet die Summe der Quotienten für $r = 0, 1, \ldots, n-2$.

Die Determinante P_r geht in das Product Δ über, wenn $r = n - 1$. Also hat für $r = n - 1$ die Summe den Werth 1.

Die Determinante P_r ist eine ganze alternirende Function von $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, mithin durch das Product Δ theilbar (2). Also ist für $r > n - 1$ die betrachtete Summe eine symmetrische ganze Function Q_r der Grössen $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ von $r - n + 1$ Dimensionen.

Wenn nun $\varphi(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots$ ist, so findet man aus

$$\begin{aligned} & a_0 \left(\frac{1}{f'(\alpha_1)} + \frac{1}{f'(\alpha_2)} + \ldots + \frac{1}{f'(\alpha_n)}\right) \\ + \; & a_1 \left(\frac{\alpha_1}{f'(\alpha_1)} + \frac{\alpha_2}{f'(\alpha_2)} + \ldots + \frac{\alpha_n}{f'(\alpha_n)}\right) \\ + \; & a_2 \left(\frac{\alpha_1^2}{f'(\alpha_1)} + \frac{\alpha_2^2}{f'(\alpha_2)} + \ldots + \frac{\alpha_n^2}{f'(\alpha_n)}\right) \\ + \; & \ldots \quad \ldots \quad \ldots \end{aligned}$$

durch Addition der Colonnen die Summe

$$\frac{\varphi(\alpha_1)}{f'(\alpha_1)} + \ldots + \frac{\varphi(\alpha_n)}{f'(\alpha_n)}$$

und durch Addition der Zeilen den Werth dieser Summe, der verschwindet, wenn der Grad von $\varphi(x)$ geringer ist als $n-1$, der aber

$$a_n + a_{n+1} Q_{n+1} + \ldots$$

beträgt, wenn $\varphi(x)$ von einem höhern Grade ist **).

---

*) Cauchy l. c. p. 497.

**) Den ersten Theil dieses Satzes hatte Euler Calc. integr. II §. 1169 gegeben. Durch Jacobi Crelle J. 14 p. 281 ist der Satz auf Functionen von 2 Variablen ausgedehnt worden.

Anmerkung. Nach dem Fundamentalsatz über die gebrochenen rationalen Functionen ist

$$\frac{1}{f(z)} = \frac{1}{(z-\alpha_1)f'(\alpha_1)} + \cdot\cdot + \frac{1}{(z-\alpha_n)f'(\alpha_n)}.$$

Entwickelt man beide Seiten dieser Identität nach fallenden Potenzen von z, so findet man

$$Q_r = \frac{\alpha_1{}^r}{f'(\alpha_1)} + \cdot\cdot + \frac{\alpha_n{}^r}{f'(\alpha_n)}$$

als Coefficienten von z^{-r-1} *).

10. Durch Entwickelung der Determinante (1)

$$\Delta(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = \begin{vmatrix} 1 & \alpha_1 & \cdot & \cdot & \alpha_1{}^{n-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & \alpha_n & \cdot & \cdot & \alpha_n{}^{n-1} \end{vmatrix}$$

nach den Elementen der $i$ten Zeile erhält man (§. 3, 3)

$$\Delta(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = \delta_{i1} + \delta_{i2}\alpha_i + \cdot\cdot + \delta_{in}\alpha_i^{n-1}.$$

Denselben Werth hat (8)

$$(-1)^{n-i} f'(\alpha_i)\, \Delta(\alpha_1, \ldots, \alpha_{i-1}, \alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_n).$$

Nun ist

$$f'(\alpha_i) = \alpha_i^{n-1} + C_{i1}\alpha_i^{n-2} + C_{i2}\alpha_i^{n-3} + \cdot\cdot,$$

wenn man durch C_{ik} die mit dem Zeichen $(-1)^k$ versehene Summe der Producte von k verschiedenen Grössen der Reihe $\alpha_1, \ldots, \alpha_{i-1}, \alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_n$ bezeichnet. Daher hat man die Identität

$$\delta_{ik} = (-1)^{n-i} C_{i,n-k}\, \Delta(\alpha_1, \ldots, \alpha_{i-1}, \alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_n)$$

$$\frac{\delta_{ik}}{\Delta(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)} = \frac{C_{i,n-k}}{f'(\alpha_i)}$$

11. Aus dem linearen System

$$\begin{gathered} x_1 + x_2\alpha_1 + \cdot\cdot + x_n\alpha_1{}^{n-1} = u_1 \\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \\ x_1 + x_2\alpha_n + \cdot\cdot + x_n\alpha_n{}^{n-1} = u_n \end{gathered}$$

findet man nach §. 8, 1

$$x_k\,\Delta(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = u_1\delta_{1k} + \cdot\cdot + u_n\delta_{nk}$$

---

*) Jacobi Disq. de fract. simpl. 1825 p. 5.

mithin (10)

$$x_k = \frac{u_1}{f'(\alpha_1)} C_{1,n-k} + \cdot\cdot + \frac{u_n}{f'(\alpha_n)} C_{n,n-k}\,.$$

Wenn man zu dem gegebenen System die Gleichung

$$x_1 + x_2 z + \cdot\cdot + x_n z^{n-1} = \varphi(z)$$

hinzufügt, so erhält man (§. 8, 2)

$$\begin{vmatrix} 1 & \alpha_1 & \alpha_1^2 & \cdot\cdot & \alpha_1^{n-1} & u_1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & \alpha_n & \alpha_n^2 & \cdot\cdot & \alpha_n^{n-1} & u_n \\ 1 & z & z^2 & \cdot\cdot & z^{n-1} & \varphi(z) \end{vmatrix} = 0$$

In dieser Determinante hat $\varphi(z)$ den Coefficienten $\Delta(\alpha_1, \cdot\cdot, \alpha_n)$ und u_i den Coefficienten $-\Delta(\alpha_1, \cdot\cdot, \alpha_{i-1}, z, \alpha_{i+1}, \cdot\cdot, \alpha_n)$. Nun ist

$$\frac{\Delta(\alpha_1, \cdot\cdot, \alpha_{i-1}, z, \alpha_{i+1}, \cdot\cdot, \alpha_n)}{\Delta(\alpha_1, \cdot\cdot, \alpha_n)} = \frac{\Delta(\alpha_1, \cdot\cdot, \alpha_{i-1}, \alpha_{i+1}, \cdot\cdot, \alpha_n, z)}{\Delta(\alpha_1, \cdot\cdot, \alpha_{i-1}, \alpha_{i+1}, \cdot\cdot, \alpha_n, \alpha_i)}$$

und nach der obigen Bezeichnung (8)

$$= \frac{f(z)}{(z-\alpha_i) f'(\alpha_i)}$$

folglich hat man *)

$$\varphi(z) = \frac{u_1}{f'(\alpha_1)} \frac{f(z)}{z-\alpha_1} + \cdot\cdot + \frac{u_n}{f'(\alpha_n)} \frac{f(z)}{z-\alpha_n}$$

zur Berechnung der Function $(n-1)$ten Grades, welche bei den Werthen $\alpha_1, \cdot\cdot, \alpha_n$ von z die Werthe $u_1, \cdot\cdot, u_n$ annimmt. Die Unbekannte x_k ist der Coefficient von z^{k-1} in $\varphi(z)$, und erhält den oben angegebenen Werth, wenn man

$$\frac{f(z)}{z-\alpha_i} = z^{n-1} + C_{i1} z^{n-2} + \cdot\cdot$$

entwickelt (10).

12. Aus dem linearen System

$$\begin{array}{lllll} x_1 & + \cdot\cdot + & x_n & = & 1 \\ x_1 \alpha_1 & + \cdot\cdot + & x_n \alpha_n & = & t \\ \cdot & \cdot\cdot & \cdot & & \cdot \\ x_1 \alpha_1^{n-1} & + \cdot\cdot + & x_n \alpha_n^{n-1} & = & t^{n-1} \end{array}$$

*) Lagrange's Interpolationsformel (1795) J. de l'éc. polyt. Cah. 7—8 p. 417, welche von dem Fundamentalsatz über die gebrochenen rationalen Functionen sich nicht unterscheidet.

erhält man (§. 8, 1)

$$x_i \begin{vmatrix} 1 & . & . & 1 \\ \alpha_1 & . & . & \alpha_n \\ . & . & . & . \\ \alpha_1^{n-1} & . & . & \alpha_n^{n-1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} . & . & 1 & 1 & 1 & . & . \\ . & . & \alpha_{i-1} & t & \alpha_{i+1} & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & \alpha_{i-1}^{n-1} & t^{n-1} & \alpha_{i+1}^{n-1} & . & . \end{vmatrix}$$

$$x_i \Delta(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = \Delta(\ldots, \alpha_{i-1}, t, \alpha_{i+1}, \ldots)$$

Setzt man beiderseits das $i$te Element ans Ende, so bleibt übrig

$$x_i = \frac{f(t)}{(t-\alpha_i)f'(\alpha_i)} \text{ *)} .$$

13. Aus dem allgemeinern linearen System

$$\begin{array}{lcl} x_1 + \ldots + x_n & = & u_1 \\ x_1 \alpha_1 + \ldots + x_n \alpha_n & = & u_2 \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . & & . \\ x_1 \alpha_1^{n-1} + \ldots + x_n \alpha_n^{n-1} & = & u_n \end{array}$$

findet man nach der angenommenen Bezeichnung (10)

$$x_i \Delta(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = u_1 \delta_{i1} + \ldots + u_n \delta_{in}$$

$$x_i f'(\alpha_i) = u_1 C_{i,n-1} + u_2 C_{i,n-2} + \ldots \text{ **)}.$$

In der That ist

$$C_{i,n-1} + C_{i,n-2}\, z + C_{i,n-3}\, z^2 + \ldots = \frac{f(z)}{z-\alpha_i}$$

eine Function, welche bei $z = \alpha_i$ auf $f'(\alpha_i)$ sich reducirt und die bei den andern Werthen von z aus der Reihe $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ verschwindet.

Anstatt der Grössen $C_{i,n-1}, C_{i,n-2}, \ldots$ findet man, wenn

$$f(z) = z^n + C_1 z^{n-1} + \ldots + C_{n-1} z + C_n$$

gegeben ist, andre Ausdrücke auf folgendem Wege***). Man bilde die Functionen

$$\begin{aligned} f_1(z) &= z + C_1 \\ f_2(z) &= z^2 + C_1 z + C_2 \\ f_3(z) &= z^3 + C_1 z^2 + C_2 z + C_3 \end{aligned}$$

---

*) Lagrange Mem. de Berlin 1775 p. 185. Cauchy J. de l'éc. polyt. Cah. 17 p. 73.

**) Cauchy Anal. algébr. III, 1. Vergl. Lagrange Mém. de Berlin 1771 Réflexions art. 100.

***) Lagrange Mém. de Berlin 1792 p. 248. Vergl. Scheibner Leipz. Berichte 1856 p. 65.

u. s. w. Dann hat man, weil $z^k - t^k$ durch $z - t$ theilbar ist,

$$\frac{f(z) - f(t)}{z - t} = f_{n-1}(z) + t f_{n-2}(z) + \ldots + t^{n-1}$$

und insbesondere, weil $f(\alpha_1)$, $f(\alpha_2)$, .. verschwinden,

$$\frac{f(z)}{z - \alpha_1} = f_{n-1}(z) + \alpha_1 f_{n-2}(z) + \ldots + \alpha_1^{n-1}$$

$$\frac{f(z)}{z - \alpha_2} = f_{n-1}(z) + \alpha_2 f_{n-2}(z) + \ldots + \alpha_2^{n-1}$$

u. s. w. Aus diesem System erhält man vermöge der gegebenen Gleichungen

$$f(z) \left\{ \frac{x_1}{z - \alpha_1} + \frac{x_2}{z - \alpha_2} + \ldots + \frac{x_n}{z - \alpha_n} \right\}$$
$$= u_1 f_{n-1}(z) + u_2 f_{n-2}(z) + \ldots + u_n \,.$$

Demnach erscheinen x_1, x_2, .. als die Zähler der Partialbrüche, in welche man die gebrochene Function

$$\frac{u_1 f_{n-1}(z) + u_2 f_{n-2}(z) + \ldots + u_n}{f(z)}$$

zerlegen kann. Für $z = \alpha_i$ bleibt übrig

$$x_i f'(\alpha_i) = u_1 f_{n-1}(\alpha_i) + u_2 f_{n-2}(\alpha_i) + \ldots + u_n \,.$$

Hiernach sind die Ausdrücke $f_1(\alpha_i)$, $f_2(\alpha_i)$, .. gleichbedeutend mit den oben gegebenen C_{i1}, C_{i2}, .., und enthalten die Grösse α_i nicht, wie man bei ihrer Bildung bestätigt findet.

Wenn insbesondere $u_1 = 1$, $u_2 = t$, $u_3 = t^2$, .. ist, so wird

$$f_{n-1}(z) + t f_{n-2}(z) + \ldots + t^{n-1} = \frac{f(t) - f(z)}{t - z}$$

$$f_{n-1}(\alpha_i) + t f_{n-2}(\alpha_i) + \ldots + t^{n-1} = \frac{f(t)}{t - \alpha_i}$$

in Uebereinstimmung mit (12).

14. Eine homogene ganze Function der Variablen x und y von $2n-1$ Dimensionen kann durch $(2n-1)$te Potenzen linearer Functionen von x und y dargestellt werden, deren Anzahl nicht grösser als n ist*). Wenn die Function

*) SYLVESTER (Philos. Mag. 1851, II p. 391) hat diese Transformation gezeigt und den gesuchten Ausdruck die canonische Form der Function genannt. Ueber die canonische Form einer homogenen Function geraden Grades von 2 Variablen hat SYLVESTER a. a. O. und Cambr. and Dublin math. J. 9 p. 93 weitere Untersuchungen mitgetheilt. Vergl. CAYLEY Crelle J. 54 p. 48.

$$a_0\, x^{2n-1} + a_1 \binom{2n-1}{1} x^{2n-2} y + \ldots + a_{2n-1}\, y^{2n-1}$$

die Form

$$(p_1 x + q_1 y)^{2n-1} + (p_2 x + q_2 y)^{2n-1} + \ldots + (p_n x + p_n y)^{2n-1}$$

erhalten soll, so werden die Unbekannten $p_1, \ldots, p_n, q_1, \ldots, q_n$ durch ebensoviel gegebene Grössen $a_0, \ldots, a_{2n-1}$ bestimmt. Wollte man eine homogene ganze Function von $2n$ Dimensionen in gleicher Weise durch $2n$te Potenzen darstellen, so würde die Anzahl der Unbekannten von der Anzahl der für sie geltenden Gleichungen verschieden sein.

Setzt man $q_i = \alpha_i p_i$ und $p_i^{2n-1} = b_i$, so erfolgt die verlangte Transformation unter den Bedingungen

$$\begin{array}{lll} a_0 & = b_1 & + \ldots + b_n \\ a_1 & = b_1 \alpha_1 & + \ldots + b_n \alpha_n \\ a_2 & = b_1 \alpha_1^2 & + \ldots + b_n \alpha_n^2 \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{2n-1} & = b_1 \alpha_1^{2n-1} & + \ldots + b_n \alpha_n^{2n-1} \end{array}$$

Um denselben zu genügen, bildet man die Function

$$(z - \alpha_1) \ldots (z - \alpha_n) = C_n + C_{n-1} z + \ldots + C_1 z^{n-1} + z^n,$$

welche verschwindet, wenn z einen der Werthe $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ annimmt; demnächst aus der 1ten, 2ten, .. Bedingung, indem man jedesmal die n folgenden Bedingungen hinzuzieht, das System von Gleichungen

$$\begin{array}{lllllll} C_n a_0 & + C_{n-1} a_1 & + \ldots & + C_1 a_{n-1} & + a_n & = 0 \\ C_n a_1 & + C_{n-1} a_2 & + \ldots & + C_1 a_n & + a_{n+1} & = 0 \\ \ldots & \ldots & & \ldots & \ldots & \\ C_n a_{n-1} & + C_{n-1} a_n & + \ldots & + C_1 a_{2n-2} & + a_{2n-1} & = 0 \end{array}$$

und zuletzt die Determinante

$$R = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & \ldots & a_n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n-1} & a_n & \ldots & a_{2n-1} \\ 1 & z & \ldots & z^n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_0 & \ldots & a_{n-1} & 1 \\ a_1 & \ldots & a_n & z \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_n & \ldots & a_{2n-1} & z^n \end{vmatrix}$$

Nun verschwindet $C_n R$, wenn z einen der Werthe $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ annimmt; also sind $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ die Wurzeln der Gleichung $R = 0$. Diese Gleichung gehört zu den oben (5) betrachteten. Die Grössen $b_1, \ldots, b_n$ werden aus den ersten n Bedingungen gefunden (13), und zwar bestimmt unter der Voraussetzung, dass die Wurzeln α_1, α_2, .. alle von einander verschieden sind.

15. Wenn die ganze Function $\varphi(t_1, .. t_n)$ in Bezug auf jede der Variablen den $(n-1)$ten Grad nicht übersteigt, und wenn

$$f(z) = (z-\alpha_1)(z-\alpha_2)\,..\,(z-\alpha_n)\,,$$

so findet man durch wiederholte Anwendung von Lagrange's Interpolationsformel (11)

$$\frac{\varphi(t_1, ..)}{f(t_1)} = \sum_h \frac{\varphi(\alpha_h, ..)}{f'(\alpha_h)(t_1-\alpha_h)}$$

$$\frac{\varphi(\alpha_h, t_2, ..)}{f(t_2)} = \sum_i \frac{\varphi(\alpha_h, \alpha_i, ..)}{f'(\alpha_i)(t_2-\alpha_i)}$$

$$\frac{\varphi(t_1, .., t_n)}{f(t_1)\,..\,f(t_n)} = \sum_{h, i, .., p} \frac{\varphi(\alpha_h, \alpha_i, .., \alpha_p)}{f'(\alpha_h)\,..\,f'(\alpha_p)(t_1-\alpha_h)\,..\,(t_n-\alpha_p)}$$

eine Summe von n^n Gliedern, welche dadurch gebildet werden, dass man für h, i, .., p alle Zahlen von 1 bis n setzt.

Wenn insbesondere die Function φ alternirend ist, mithin zu $\Delta(t_1, .., t_n)$ ein constantes Verhältniss hat (2), so verschwindet jedes Glied der Summe, in welchem die Numern h, i, .., p nicht alle von einander verschieden sind, und man hat für h, i, .., p nur die Permutationen von 1, 2, .., n zu setzen. Dabei ist (7)

$$f'(\alpha_h)\,f'(\alpha_i)\,..\,f'(\alpha_p) = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\,\Delta(\alpha_1, .., \alpha_n)^2$$

und der Quotient $\Delta(\alpha_h, \alpha_i, .., \alpha_p) : \Delta(\alpha_1, .., \alpha_n)$ hat den Werth 1 oder -1, je nachdem die Reihe h, i, .., p mit 1, 2, .., n zu derselben Classe von Permutationen gehört oder nicht. Daher bilden die Glieder der Summe eine Determinante $n$ten Grades, und man hat*)

$$\frac{\Delta(t_1, .., t_n)\,\Delta(\alpha_1, .., \alpha_n)}{f(t_1)\,..\,f(t_n)} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \sum \pm \frac{1}{t_1-\alpha_1}\,..\,\frac{1}{t_n-\alpha_n}\,.$$

Anmerkung. Entwickelt man den Quotienten

$$\frac{\varphi(t_1, .., t_n)}{f(t_1)\,..\,f(t_n)}$$

*) Cauchy (Exerc. d'anal. 2 p. 154) hat diesen Satz gefunden und durch die im folgenden Artikel mitgetheilte Betrachtung bewiesen.

nach fallenden Potenzen von $t_1, \dots, t_n$, und bezeichnet man den Coefficienten von $(t_1 t_2 \dots t_n)^{-1}$ durch

$$\left[\frac{\varphi(t_1, \dots, t_n)}{f(t_1) \dots f(t_n)}\right]_{(t_1 \dots t_n)^{-1}}$$

so erhält man auch in dem Falle, dass die Function φ in Bezug auf die einzelnen Variablen den $(n-1)$ten Grad übersteigt,

$$\left[\frac{\varphi(t_1, \dots, t_n)}{f(t_1) \dots f(t_n)}\right]_{(t_1 \dots t_n)^{-1}} = \Sigma \frac{\varphi(\alpha_h), \dots, \alpha_p)}{f'(\alpha_h) \dots f'(\alpha_p)}$$

also insbesondere

$$\left[\frac{\Delta(t_1, \dots, t_n)\, \psi(t_1, \dots, t_n)}{f(t_1) \dots f(t_n)}\right]_{(t_1 \dots t_n)^{-1}} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \Sigma \frac{\psi(\alpha_1, \dots, \alpha_n)}{\Delta(\alpha_1, \dots, \alpha_n)} \text{ *)}$$

$$\left[\frac{\Delta(t_1, \dots, t_n)^2 f'(t_1) \dots f'(t_n)\, t_1^{m_1} \dots t_n^{m_n}}{f(t_1) \dots f(t_n)}\right]_{(t_1 \dots t_n)^{-1}}$$
$$= \Delta(\alpha_1, \dots, \alpha_n)^2\, \Sigma\, \alpha_1^{m_1} \dots \alpha_n^{m_n} \text{ **)}.$$

Die Glieder dieser beiden Summen werden aus den Permutationen der Grössen $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ gebildet.

16. Dass die Determinante

$$C = \begin{vmatrix} \frac{1}{t_1 - \alpha_1} & \cdot & \cdot & \frac{1}{t_1 - \alpha_n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{1}{t_n - \alpha_1} & \cdot & \cdot & \frac{1}{t_n - \alpha_n} \end{vmatrix}$$

den angegebenen Werth (15)

$$(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \frac{\Delta(t_1, \dots, t_n)\, \Delta(\alpha_1, \dots, \alpha_n)}{f(t_1) \dots f(t_n)}$$

besitzt, wird durch folgende Betrachtung erkannt. Wenn man die Zeilen der Determinante C der Reihe nach mit $f(t_1), f(t_2), \dots$ multiplicirt, so erhält man

$$C f(t_1) \dots f(t_n) = \Sigma \pm \frac{f(t_1)}{t_1 - \alpha_1} \dots \frac{f(t_n)}{t_n - \alpha_n}$$

eine ganze alternirende Function (2) sowohl von $t_1, \dots, t_n$, als auch von $\alpha_1, \dots, \alpha_n$, und theilbar durch $\Delta(t_1, \dots, t_n)\, \Delta(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$.

---

*) Jacobi Crelle J. 22 p. 368.

**) Betti Crelle J. 54 p. 98.

Der Quotient ist eine von den Grössen $t_1, \ldots, t_n, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$ unabhängige Zahl, welche sich dadurch ermitteln lässt, dass man den Grössen $t_1, \ldots, t_n$ der Reihe nach die Werthe $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ zuertheilt. In diesem Falle verschwinden alle die Elemente der Determinante, welche neben der Diagonale stehn; daher bleibt von der Determinante nur ihr Anfangsglied übrig, welches in

$$f'(\alpha_1) f'(\alpha_2) \ldots f'(\alpha_n) = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \Delta(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)^2$$

übergeht (7). Also ist

$$(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$$

der gesuchte Quotient.

17. Der Coefficient γ_{ik} des Elements $\frac{1}{t_i - \alpha_k}$ in der Determinante C (16) entsteht nach §. 3, 1 aus C durch Weglassung von t_i und α_k in den Reihen $t_1, \ldots, t_n$ und $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ und durch Multiplication mit $(-1)^{i+k}$. Daher hat man

$$\gamma_{ik} = (-1)^{i+k} (-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}} \frac{\Delta(\ldots, t_{i-1}, t_{i+1}, \ldots) \Delta(\ldots, \alpha_{k-1}, \alpha_{k+1}, \ldots)}{\frac{f(t_1)}{t_1 - \alpha_k} \ldots \frac{f(t_{i-1})}{t_{i-1} - \alpha_k} \frac{f t_{i+1})}{t_{i+1} - \alpha_k} \ldots \frac{f(t_n)}{t_n - \alpha_k}}$$

Indem man noch die Function

$$g(z) = (z - t_1)(z - t_2) \ldots (z - t_n)$$

bildet, findet man (8)

$$\Delta(\ldots, t_{i-1}, t_{i+1}, \ldots) \Delta(\ldots, \alpha_{k-1}, \alpha_{k+1}, \ldots) = (-1)^{i+k} \frac{\Delta(t_1, \ldots) \Delta(\alpha_1, \ldots)}{g'(t_i) f'(\alpha_k)}$$

$$(t_1 - \alpha_k) \ldots (t_{i-1} - \alpha_k)(t_{i+1} - \alpha_k) \ldots (t_n - \alpha_k) = (-1)^{n-1} \frac{g(\alpha_k)}{\alpha_k - t_i}$$

und mit Hülfe dieser Werthe

$$\gamma_{ik} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \frac{\Delta(t_1, \ldots) \Delta(\alpha_1, \ldots)}{f(t_1) \ldots f(t_n)} \frac{f(t_i) g(\alpha_k)}{g'(t_i) f'(\alpha_k)} \frac{1}{\alpha_k - t_i}$$

$$\frac{\gamma_{ik}}{C} = -\frac{f(t_i)}{g'(t_i)} \frac{g(\alpha_k)}{f'(\alpha_k)} \frac{1}{t_i - \alpha_k}.$$

18. Aus dem linearen System

$$\begin{matrix} \frac{x_1}{t_1 - \alpha_1} + \ldots + \frac{x_n}{t_1 - \alpha_n} = u_1 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \frac{x_1}{t_n - \alpha_1} + \ldots + \frac{x_n}{t_n - \alpha_n} = u_n \end{matrix}$$

findet man nach §. 8, 1

$$Cx_k = u_1 \gamma_{1k} + \cdot \cdot + u_n \gamma_{nk}$$

mithin (17)

$$x_k = -\frac{g(\alpha_k)}{f'(\alpha_k)} \left\{ \frac{f(t_1)}{g'(t_1)} \frac{u_1}{t_1 - \alpha_k} + \cdot \cdot + \frac{f(t_n)}{g'(t_n)} \frac{u_n}{t_n - \alpha_k} \right\} {}^{*)}.$$

Anmerkung. Der besondere Fall, in welchem alle Zeilen und Colonnen des Systems

$$\begin{array}{cccc} \frac{1}{t_1 - \alpha_1} & \cdot \cdot & \frac{1}{t_1 - \alpha_n} & u_1 \\ \cdot & \cdot \cdot & \cdot & \\ \frac{1}{t_n - \alpha_1} & \cdot \cdot & \frac{1}{t_n - \alpha_n} & u_n \end{array}$$

harmonische Reihen sind, kommt in der Theorie der approximativen Quadraturen vor (Gauss 1814 Comm. Gött. Tom. 3. Vergl. Jacobi Crelle J. 1 p. 301, Schellbach Crelle J. 16 p. 192, Scheibner Leipz. Berichte 1856 p. 73, u. A.) und ist von Joachimsthal Crelle J. 48 p. 411 neu behandelt worden. Vergl. auch Ligowski Grunert Archiv 36 p. 181.

19. Wenn man die Determinante (16 ff.)

$$C = \frac{\gamma_{i1}}{t_i - \alpha_1} + \cdot \cdot + \frac{\gamma_{in}}{t_i - \alpha_n}$$

nach t_i differentiirt, so erhält man eine neue Determinante, welche von C dadurch sich unterscheidet, dass die Elemente der $i$ten Zeile

$$\frac{-1}{(t_i - \alpha_1)^2}, \cdot \cdot \cdot, \frac{-1}{(t_i - \alpha_n)^2}$$

sind (§. 3, 15). Daher ist**)

$$(-1)^n \frac{\partial^n C}{\partial t_1 \cdot \cdot \partial t_n} = \begin{vmatrix} \frac{1}{(t_1 - \alpha_1)^2} & \cdot \cdot & \frac{1}{(t_1 - \alpha_n)^2} \\ \cdot & \cdot \cdot & \cdot \\ \frac{1}{(t_n - \alpha_1)^2} & \cdot \cdot & \frac{1}{(t_n - \alpha_n)^2} \end{vmatrix} = B.$$

20. Wenn man die Determinante B durch die Determinante C dividirt, so erhält man

*) Hädenkamp Crelle J. 22 p. 184. 25 p. 182. Liouville J. 11 p. 466. Hermite Crelle J. 52 p. 43.

**) Borchardt Berl. Monatsbericht 1855 p. 165 und Crelle J. 53 p. 193.

$$\frac{B}{C} = \Sigma \frac{1}{(t_1 - \alpha_h)(t_2 - \alpha_i) \, . \, . \, (t_n - \alpha_p)}$$

eine Summe, deren Glieder gebildet werden, indem man für $h, i, .., p$ alle Permutationen der Numern $1, 2, .., n$ setzt*).

Beweis. Das Product

$$B f(t_1)^2 \, . \, . \, f(t_n)^2 = \Sigma \pm \left\{ \frac{f(t_1)}{t_1 - \alpha_1} \, . \, . \, \frac{f(t_n)}{t_n - \alpha_n} \right\}^2$$

ist eine ganze alternirende Function sowohl von $t_1, .., t_n$, als auch von $\alpha_1, .., \alpha_n$, und theilbar durch $\Delta(t_1, .., t_n)\, \Delta(\alpha_1, .., \alpha_n)$. Der Quotient ist eine symmetrische Function $\varphi(t_1, .., t_n)$, welche in Bezug auf jede der Variablen den $(n-1)$ten Grad erreicht und daher (15) durch

$$f(t_1) \, . \, . \, f(t_n) \, \Sigma \frac{\varphi(\alpha_h, .., \alpha_p)}{f'(\alpha_h) \, . \, . \, f'(\alpha_p)(t_1 - \alpha_h) \, . \, . \, (t_n - \alpha_p)}$$

dargestellt werden kann.

Wenn nun $t_1, t_2, .., t_n$ der Reihe nach die Werthe α_h, $\alpha_i, .., \alpha_p$ erhalten, welche nicht alle von einander verschieden sind, so verschwindet

$$\frac{B f(t_1)^2 \, . \, . \, f(t_n)^2}{\Delta(t_1, ..)\, \Delta(\alpha_1, ..)},$$

weil nicht nur B, sondern auch $\frac{f(t_1)^2}{t_2 - t_1}$ verschwindet, während z. B. t_1 und t_2 mit α_h zusammenfallen. Also findet man alle nicht verschwindenden Glieder der Summe, indem man für $h, i, .., p$ alle Permutationen der Numern $1, 2, .., n$ setzt. Wenn aber $t_1, t_2, .., t_n$ der Reihe nach die von einander verschiedenen Werthe $\alpha_h, \alpha_i, .., \alpha_p$ erhalten, so bleibt von der Determinante

$$\Sigma \pm \left\{ \frac{f(t_1)}{t_1 - \alpha_1} \, . \, . \, \frac{f(t_n)}{t_n - \alpha_n} \right\}^2$$

nur ein Glied $\varepsilon\, [f'(\alpha_h) f'(\alpha_i) \, . \, . \, f'(\alpha_p)]^2$ übrig, während

$$\Delta(\alpha_h, \alpha_i, .., \alpha_p) \text{ in } \varepsilon \Delta(\alpha_1, .., \alpha_n)$$

übergeht. Daher ist

*) Borchardt a. a. O. Vergl. Joachimsthal Crelle J. 53 p. 166.

$$\varphi(\alpha_h, \alpha_i, \ldots, \alpha_p) = \left\{ \frac{f'(\alpha_h) \ldots f'(\alpha_p)}{\Delta(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)} \right\}^2 = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} f'(\alpha_h) \ldots f'(\alpha_p) ,$$

$$(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \frac{B f(t_1) \ldots f(t_n)}{\Delta(t_1, \ldots) \, \Delta(\alpha_1, \ldots)} = \Sigma \frac{1}{(t_1 - \alpha_h) \ldots (t_n - \alpha_p)} .$$

Anmerkung. Nach (19) hat man die Identität

$$\Sigma \frac{1}{(t_1 - \alpha_h) \ldots (t_n - \alpha_p)} = \frac{(-1)^n}{C} \frac{\partial^n C}{\partial t_1 \ldots \partial t_n}$$

$$= (-1)^n \frac{f(t_1) \ldots f(t_n)}{\Delta(t_1, \ldots, t_n)} \frac{\partial^n}{\partial t_1 \ldots \partial t_n} \left\{ \frac{\Delta(t_1, \ldots, t_n)}{f(t_1) \ldots f(t_n)} \right\} .$$

Der Differentialquotient (§. 3, 15) ist der Quotient einer alternirenden ganzen Function von $t_1, \ldots, t_n$, dividirt durch $f(t_1)^2 \ldots f(t_n)^2$. Indem man denselben durch $\Delta(t_1, \ldots, t_n)$ dividirt und den Quotienten mit $f(t_1) \ldots f(t_n)$ multiplicirt, erhält man die erzeugende Function aller ganzen symmetrischen Functionen von den Wurzeln der Gleichung $f(z) = 0$. Denn die Entwickelung der Identität nach fallenden Potenzen von $t_1, \ldots, t_n$ giebt einerseits die symmetrische Function der Wurzeln

$$\Sigma \alpha_h^{m_1} \alpha_i^{m_2} \ldots \alpha_p^{m_n} ,$$

andrerseits den Ausdruck derselben durch die Coefficienten der Gleichung, worüber man in der angeführten Abhandlung weitern Aufschluss findet.

21. Wenn $F_1(z), \ldots, F_m(z)$ ganze Functionen und $x_1, \ldots, x_m$ veränderliche Argumente sind, welche für z gesetzt werden, so ist die Determinante $\Sigma \pm F_1(x_1) \ldots F_m(x_m)$ eine alternirende ganze Function der Argumente $x_1, \ldots, x_m$, mithin durch das Product der Differenzen $\Delta(x_1, \ldots, x_m)$ theilbar (2). Der Quotient kann unter der Voraussetzung $m < n$ und dass keine der Functionen den $(n-1)$ten Grad übersteigt, interpolatorisch aus den Werthen berechnet werden, welche die Functionen bei den gegebenen Werthen $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ der Argumente annehmen. Bezeichnet man durch

$$D(\alpha_1, \ldots, \alpha_n; \; x_1, \ldots, x_m)$$

das Product der mn Differenzen, welche durch Subtraction aller Grössen $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ von allen Grössen $x_1, \ldots, x_m$ entstehn, so ist

$$\frac{\Sigma \pm F_1(x_1)\,.\,.\,F_m(x_m)}{\Delta(x_1\,,\,.\,.\,,\,x_m)} = \Sigma \frac{\Sigma \pm F_1(\alpha_1)\,.\,.\,F_m(\alpha_m)\, D(\alpha_{m+1}\,,\,.\,.\,.\,,\,\alpha_n\,;\,x_1\,,\,.\,.\,,\,x_m)}{\Delta(\alpha_1\,,\,.\,.\,,\,\alpha_m)\, D(\alpha_{m+1}\,,\,.\,.\,,\,\alpha_n\,;\,\alpha_1\,,\,.\,.\,,\,\alpha_m)}$$

eine Summe von $\binom{n}{m}$ Gliedern, welche dadurch gebildet werden, dass man für $\alpha_1\,,\,.\,.\,,\,\alpha_m$ je m verschiedene Grössen der Reihe $\alpha_1\,,\,.\,.\,,\,\alpha_n$ setzt*).

Beweis. Bildet man $\varphi(z) = (z-\alpha_1)\,.\,.\,(z-\alpha_n)$, so ist (11)

$$\frac{F_i(x_k)}{\varphi(x_k)} = \frac{F_i(\alpha_1)}{\varphi'(\alpha_1)(x_k-\alpha_1)} + \,.\,.\, + \frac{F_i(\alpha_n)}{\varphi'(\alpha_n)(x_k-\alpha_n)}$$

und nach der Multiplicationsregel (§. 5, 1)

$$\Sigma \pm \frac{F_1(x_1)}{\varphi(x_1)}\,.\,.\,\frac{F_m(x_m)}{\varphi(x_m)} = \Sigma \left\{ \Sigma \pm \frac{F_1(\alpha_1)}{\varphi'(\alpha_1)}\,.\,.\,\frac{F_m(\alpha_m)}{\varphi'(\alpha_m)} \cdot \Sigma \pm \frac{1}{x_1-\alpha_1}\,.\,.\,\frac{1}{x_m-\alpha_m} \right\}.$$

Nun ist (§. 3, 4)

$$\Sigma \pm \frac{F_1(x_1)}{\varphi(x_1)}\,.\,.\,\frac{F_m(x_m)}{\varphi(x_m)} = \frac{\Sigma \pm F_1(x_1)\,.\,.\,F_m(x_m)}{\varphi(x_1)\,.\,.\,\varphi(x_m)},$$

ferner (7)

$$\varphi'(\alpha_1)\,.\,.\,\varphi'(\alpha_m) = (-1)^{\frac{m(m-1)}{2}}\,\Delta(\alpha_1\,,\,.\,.\,,\,\alpha_m)^2\, D(\alpha_{m+1}\,,\,.\,.\,,\,\alpha_n\,;\,\alpha_1\,,\,.\,.\,,\,\alpha_m)$$

endlich (16)

$$\Sigma \pm \frac{1}{x_1-\alpha_1}\,.\,.\,\frac{1}{x_m-\alpha_m} = (-1)^{\frac{m(m-1)}{2}}\,\frac{\Delta(x_1\,,\,.\,.\,,\,x_m)\,\Delta(\alpha_1\,,\,.\,.\,,\,\alpha_m)}{D(\alpha_1\,,\,.\,.\,,\,\alpha_m\,;\,x_1\,,\,.\,.\,,\,x_m)}$$

$$\frac{\varphi(x_1)\,.\,.\,\varphi(x_m)}{D(\alpha_1\,,\,.\,.\,,\,\alpha_m\,;\,x_1\,,\,.\,.\,,\,x_m)} = D(\alpha_{m+1}\,,\,.\,.\,,\,\alpha_n\,;\,x_1\,,\,.\,.\,,\,x_m)\,.$$

Durch Einführung dieser Werthe erhält man sofort den zu beweisenden Ausdruck.

Die Anwendungen dieses Ausdrucks, namentlich auf die Reste, welche bei der Entwickelung des Quotienten einer ganzen Function $f(z)$ durch $\varphi(z)$ in einen Kettenbruch entstehn, und auf die Nenner der Näherungsbrüche für denselben Kettenbruch, findet man in der angeführten Abhandlung.

---

*) Borchardt über eine Interpolationsformel. Abhandl. d. Berl. Acad. 1860 p. 1.

§. 11. Resultante von zwei ganzen Functionen.

1. Wenn z eine eigentliche $n$te Wurzel der Einheit bedeutet, deren Potenzen $z^2, \ldots, z^{n-1}$ von 1 verschieden sind, so hat eine ganze Function derselben n Glieder, z. B.

$$\varphi(z) = a_0 + a_1 z + \ldots + a_{n-1} z^{n-1}$$

Diese Function *) ist $n$deutig, mithin eine Wurzel einer bestimmten Gleichung $n$ten Grades, deren Coefficienten von z unabhängig und ganze Functionen der Grössen a sind.

Um die Gleichung $\varphi(z) - u = 0$ unabhängig von z darzustellen, bilde man unter der Voraussetzung $z^n = 1$ das System

$$\varphi(z) - u = 0, \quad z\varphi(z) - zu = 0, \ldots, z^{n-1}\varphi(z) - z^{n-1} u = 0$$

oder

$$\begin{aligned} 0 &= a_0 - u + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots \\ 0 &= a_{n-1} + (a_0 - u) z + a_1 z^2 + \ldots \end{aligned}$$

u. s. w. Zufolge dieses Systems verschwindet die Determinante

$$\chi(u) = \begin{vmatrix} a_0 - u & a_1 & \cdot & \cdot & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_0 - u & \cdot & \cdot & a_{n-2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_1 & a_2 & \cdot & \cdot & a_0 - u \end{vmatrix}$$

Denn wenn man z. B. zur ersten Colonne die mit $z, z^2, \ldots$ multiplicirten folgenden Colonnen addirt, so verschwinden alle Elemente der ersten Colonne. Also ist $\varphi(z)$ eine Wurzel der Gleichung $\chi(u) = 0$, und wenn man die $n$ten Wurzeln von 1 durch $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ bezeichnet, so werden alle Wurzeln der Gleichung $\chi(u) = 0$ durch $\varphi(\alpha_1), \ldots, \varphi(\alpha_n)$ ausgedrückt.

2. Das mit dem Zeichen $(-1)^n$ versehene Product der Wurzeln $\varphi(\alpha_1) \ldots \varphi(\alpha_n)$ wird gefunden, indem man das von u unabhängige Glied der Gleichung durch den Coefficienten von u^n dividirt. Daher ist **)

---

*) Von Waring Misc. anal. 1762 p. 44 und Euler 1764 (Nov. Comm. Petrop. 9 p. 70) in die Algebra eingeführt. Vergl. Lagrange Réflexions . . 67 ff. (Mém. de Berlin 1771).

**) Dieser alte Satz ist bis jetzt auf einen bestimmten Autor nicht zurückgeführt worden. In der Angabe desselben von Spottiswoode Crelle J. 51 p. 375 fehlt das Zeichen $(-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}}$.

$$\varphi(\alpha_1)\,\varphi(\alpha_2)\,.\,.\,\varphi(\alpha_n) = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & . & . & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_0 & . & . & a_{n-2} \\ . & . & . & . & . \\ a_1 & a_2 & . & . & a_0 \end{vmatrix}$$

Dasselbe Resultat kann man auf dem Wege ableiten, der im Folgenden (6) bei dem allgemeinern Problem angezeigt ist, indem man die Determinante (§. 10, 1)

$$\Delta(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)\,\varphi(\alpha_1)\,.\,.\,\varphi(\alpha_n) = \begin{vmatrix} \varphi(\alpha_1) & \alpha_1\varphi(\alpha_1) & \alpha_1^2\varphi(\alpha_1) & . \\ \varphi(\alpha_2) & \alpha_2\varphi(\alpha_2) & \alpha_2^2\varphi(\alpha_2) & . \\ . & . & . & \end{vmatrix}$$

in das Product

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & . \\ a_{n-1} & a_0 & . \\ . & . & \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & \alpha_1 & \alpha_1^2 & . \\ 1 & \alpha_2 & \alpha_2^2 & . \\ . & . & . & \end{vmatrix}$$

zerlegt (§. 5, 1).

3. Die Determinante des Systems, dessen Zeilen durch cyclische Vertauschung aus der jedesmal vorhergehenden Zeile gebildet werden,

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & . & . & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_0 & . & . & a_{n-2} \\ . & . & . & . & . \\ a_1 & a_2 & . & . & a_0 \end{vmatrix}$$

heisst die Norm*) der $n$deutigen Function $\varphi(z)$. Von den n^n Gliedern des Products $\varphi(\alpha_1)\,.\,.\,\varphi(\alpha_n)$ bleiben nur die $1.2\ldots n$ Glieder der Determinante übrig.

In jedem Glied der Determinante ist die Summe der Indices durch n theilbar. Denn das $k$te Element der $i$ten Zeile hat den Index $-i+k$ oder $n-i+k$, je nachdem i weniger oder mehr als k beträgt. Wird nun ein Glied der Determinante aus dem $r$ten Element der 1ten Zeile, aus dem $s$ten Element der 2ten Zeile, aus dem $t$ten Element der 3ten Zeile, .. gebildet, so ist die Summe der Indices von

---

*) Gauss hat 1831 die »Norm einer complexen Zahl« als das reale Product der complexen Zahl mit der conjugirten complexen Zahl eingeführt. Theoria resid. biquadr. II §. 30.

$$-1-2-3-\,.\,.+r+s+t+\,.\,.\ \text{d.i.}\ 0$$

um λn verschieden, wo λ eine Zahl der Reihe 0 bis $n-1$ bedeutet. Z. B. für $n = 3$ hat man

$$\varphi(\alpha_1)\,\varphi(\alpha_2)\,\varphi(\alpha_3) = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \\ a_2 & a_0 & a_1 \\ a_1 & a_2 & a_0 \end{vmatrix} = a_0{}^3 + a_1{}^3 - 3\,a_0\,a_1\,a_2 + a_2{}^3\,.$$

In Fällen, welche eine unmittelbare Angabe des Products zulassen, wird umgekehrt die Determinante auf das Product zurückgeführt. Z. B.

I. Wenn $a_1, a_2, .\,., a_{n-1}$ den Werth 1 haben, so ist

$$\alpha_i + \alpha_i{}^2 + \,.\,. + \alpha_i{}^{n-1} + 1 = 0\,,$$

$$\varphi(\alpha_1) = a_0 - 1\,, .\,.\,, \quad \varphi(\alpha_{n-1}) = a_0 - 1\,, \quad \varphi(\alpha_n) = a_0 - 1 + n\,,$$

$$\begin{vmatrix} a_0 & 1 & 1 & . \\ 1 & a_0 & 1 & . \\ 1 & 1 & a_0 & \\ . & . & & \end{vmatrix} = (a_0 - 1 + n)(a_0 - 1)^{n-1}\,.$$

II. Wenn $a_0, a_1, a_2, .\,.$ eine geometrische Progression bilden, und zwar $a_0 = 1$, $a_1 = v$, u. s. w., so ist

$$\varphi(z) = \frac{1 - v^n}{1 - vz}\,.$$

Nun sind $1 - v\alpha_1$, $1 - v\alpha_2, .\,.$ die Divisoren von $1 - v^n$, daher

$$\begin{vmatrix} 1 & v & v^2 & . & . & v^{n-1} \\ v^{n-1} & 1 & v & . & . & v^{n-2} \\ . & . & . & . & . & . \\ v & v^2 & v^3 & . & . & 1 \end{vmatrix} = (1 - v^n)^{n-1}\,.$$

III. Wenn $a_2, a_3, .\,.$ verschwinden, so sind $a_0 + a_1\alpha_1$, $a_0 + a_1\alpha_2, .\,.$ die Divisoren von $a_0{}^n - (-a_1)^n$, daher

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & & & \\ & a_0 & a_1 & & \\ & & . & . & \\ & & & a_0 & a_1 \\ a_1 & & & & a_0 \end{vmatrix} = a_0{}^n - (-a_1)^n\,.$$

4. Wenn die ganze Function

$$g(x) = b_0 + b_1 x + \,.\,. + b_n x^n = b_n(x - \beta_1)\,.\,.\,(x - \beta_n)$$

gegeben ist, und durch x eine Wurzel der Gleichung $g(x) = 0$ bezeichnet wird, so ist die ganze Function

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \,.\,.\, + a_m x^m = a_m(x - \alpha_1)\,.\,.\,(x - \alpha_m)$$

$n$deutig, mithin eine Wurzel einer bestimmten Gleichung $n$ten Grades, deren Coefficienten von x unabhängig und ganze Functionen der Grössen a und b sind.

Um die Gleichung $f(x) - u = 0$ unabhängig von x darzustellen, bilde man

$$f(x) - u = 0\,,\quad xf(x) - xu = 0\,, \ldots, \quad x^{n-1}f(x) - x^{n-1}u = 0\,,$$
$$g(x) = 0\,,\quad xg(x) = 0\,, \ldots, \quad x^{m-1}g(x) = 0$$

also das System von $n + m$ Zeilen

$$\begin{array}{lllllll}
0 = & a_0 - u & + \, a_1 x & + \,.\,.\,. & & & \\
0 = & & (a_0 - u)x & + \,.\,.\,. & & & \\
. & . & . & . & . & . & . \\
0 = & & & & & (a_0 - u)x^{n-1} & + \,.\,.\,. \\
0 = & b_0 & + \, b_1 x & + \,.\,.\,. & & & \\
0 = & & b_0 x & + \,.\,.\,. & & & \\
. & . & . & . & . & . & . \\
0 = & & & & b_0 x^{m-1} + \,.\,.\,. & &
\end{array}$$

Zufolge dieses Systems verschwindet die Determinante

$$\psi(u) = \begin{vmatrix}
a_0 - u & a_1 & a_2 & .\;. \\
 & a_0 - u & a_1 & .\;.\;. \\
 & & a_0 - u & .\;.\;.\;. \\
 & & & .\;.\;.\;.\;. \\
b_0 & b_1 & b_2 & .\;. \\
 & b_0 & b_1 & .\;.\;. \\
 & & b_0 & .\;.\;.\;. \\
 & & & .\;.\;.\;.\;.
\end{vmatrix}$$

Also ist $f(x)$ eine Wurzel der Gleichung $\psi(u) = 0$; alle Wurzeln der Gleichung $\psi(u) = 0$ werden durch $f(\beta_1), \ldots, f(\beta_n)$ ausgedrückt (1).

Anmerkung. Die Gleichung $\psi(u) = 0$ trifft zusammen mit der nach v. Tschirnhausen*) zu bildenden Resolvente der

*) Brief an Leibniz 1677 April 17 und Acta Erud. 1683. Vergl. Lagrange Mém. de Berlin 1770. Réflexions .. 10 ff.

Gleichung $g(x) = 0$. Dabei wird die Resolvente durch Verfügungen über die Coefficienten der Hülfsfunction $f(x)$ zu einer besondern; mit jeder Wurzel u der Resolvente ist durch das System

$$g(x) = 0 , \quad f(x) - u = 0$$

eine bestimmte Wurzel x der gegebenen Gleichung verbunden.

5. Das mit dem Zeichen $(-1)^n$ versehene Product der conjugirten Werthe $f(\beta_1), \ldots, f(\beta_n)$ wird gefunden, indem man das von u unabhängige Glied $R = \psi(0)$ der aufgestellten Gleichung durch den Coefficienten von u^n dividirt. Nun ist

$$R = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & . & & & \\ & a_0 & a_1 & . & . & . & \\ & & a_0 & . & . & . & \\ & & & . & . & . & . & . \\ b_0 & b_1 & b_2 & . & . & & \\ & b_0 & b_1 & . & . & . & \\ & & b_0 & . & . & . & \\ & & & . & . & . & . & . \end{vmatrix}$$

eine Determinante $(n+m)$ten Grades, von welcher n Zeilen aus den Coefficienten von $f(x)$ und die folgenden m Zeilen aus den Coefficienten von $g(x)$ gebildet sind. Also ist

$$b_n{}^m f(\beta_1) \ldots f(\beta_n) = R .$$

Zugleich hat man nach der oben (§. 10, 21) angegebenen Bezeichnung

$$\begin{aligned} b_n{}^m f(\beta_1) \ldots f(\beta_n) &= a_m{}^n b_n{}^m D(\alpha_1, \ldots, \alpha_m ; \beta_1, \ldots, \beta_n) \\ &= (-1)^{mn} a_m{}^n b_n{}^m D(\beta_1, \ldots, \beta_n ; \alpha_1, \ldots, \alpha_m) \\ &= (-1)^{mn} a_m{}^n g(\alpha_1) \ldots g(\alpha_m) . \end{aligned}$$

Hiernach ist das angegebene Product im Werthe R eine **symmetrische** ganze Function sowohl der Wurzeln $\beta_1, \ldots, \beta_n$, als auch der Wurzeln $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$, und zugleich eine **homogene** ganze Function sowohl der Coefficienten $a_0, \ldots, a_m$ von n Dimensionen, als auch der Coefficienten $b_0, \ldots, b_n$ von m Dimensionen, und mag die **Resultante der beiden ganzen Functionen** $f(x)$ und $g(x)$ in Bezug auf die Variable x genannt werden, während die Gleichung $R = 0$ die Resultante des Systems von Gleichungen $f(x) = 0$ und $g(x) = 0$ heisst. Vergl. §. 8, 3.

Anmerkung. Die Aufstellung der Resultante von zwei algebraischen Gleichungen (aequatio finalis) ist von EULER (Mém. de Berlin 1748 p. 234) auf die Berechnung von symmetrischen Functionen der Wurzeln der Gleichungen zurückgeführt worden. Zu demselben Zweck hat LAGRANGE (Mém. de Berlin 1769 p 303) den Logarithmus von R berechnet. Die Ableitung der Resultante aus einem linearen System ist gleichzeitig von EULER (Mém. de Berlin 1764 p. 96) und BEZOUT (Mém. de Paris 1764 p. 298) angegeben worden. Von dieser Ableitung ist SYLVESTER's dialytische Methode (Philos. Mag. 1840 no. 101. Vergl. RICHELOT Crelle J. 21 p. 226) und HESSE's Verfahren (Crelle J. 27 p. 1) nicht wesentlich verschieden.

6. Die Identität des Products $b_n{}^m f(\beta_1) \ldots f(\beta_n)$ mit der Determinante R (5) wird ohne Rücksicht auf die Gleichung (4) $\psi(u) = 0$ erkannt*), indem man die Determinante

$$P = \begin{vmatrix} f(\beta_1) & \beta_1 f(\beta_1) & \cdot & \cdot & \beta_1{}^{n-1} f(\beta_1) & g(\beta_1) & \cdot & \cdot & \beta_1{}^{m-1} g(\beta_1) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ f(\beta_n) & \beta_n f(\beta_n) & \cdot & \cdot & \beta_n{}^{n-1} f(\beta_n) & g(\beta_n) & \cdot & \cdot & \beta_n{}^{m-1} g(\beta_n) \\ f(\alpha_1) & \alpha_1 f(\alpha_1) & \cdot & \cdot & \alpha_1{}^{n-1} f(\alpha_1) & g(\alpha_1) & \cdot & \cdot & \alpha_1{}^{m-1} g(\alpha_1) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ f(\alpha_m) & \alpha_m f(\alpha_m) & \cdot & \cdot & \alpha_m{}^{n-1} f(\alpha_m) & g(\alpha_m) & \cdot & \cdot & \alpha_m{}^{m-1} g(\alpha_m) \end{vmatrix}$$

in das Product von R mit der Determinante

$$Q = \begin{vmatrix} 1 & \beta_1 & \cdot & \cdot & \beta_1{}^{n+m-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & \beta_n & \cdot & \cdot & \beta_n{}^{n+m-1} \\ 1 & \alpha_1 & \cdot & \cdot & \alpha_1{}^{n+m-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & \alpha_m & \cdot & \cdot & \alpha_m{}^{n+m-1} \end{vmatrix}$$

zerlegt (§. 5, 1). Zufolge der Gleichungen

$$f(\alpha_1) = 0, \ldots, f(\alpha_m) = 0, \quad g(\beta_1) = 0, \ldots, g(\beta_n) = 0$$

ist aber (§. 4, 6 und §. 10, 1)

$$P = \begin{vmatrix} f(\beta_1) & \cdot & \cdot & \beta_1{}^{n-1} f(\beta_1) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ f(\beta_n) & \cdot & \cdot & \beta_n{}^{n-1} f(\beta_n) \end{vmatrix} \begin{vmatrix} g(\alpha_1) & \cdot & \cdot & \alpha_1{}^{m-1} g(\alpha_1) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ g(\alpha_m) & \cdot & \cdot & \alpha_m{}^{m-1} g(\alpha_m) \end{vmatrix}$$

$$= f(\beta_1) \ldots f(\beta_n)\, g(\alpha_1) \ldots g(\alpha_m)\, \Delta(\beta_1, \ldots)\, \Delta(\alpha_1, \ldots).$$

*) BORCHARDT Crelle J. 57 p. 183. Vergl. HESSE krit. Zeitschr. f. Math. 1858 p. 483 und Tortolini Ann. di Matem. 1859 p. 5.

Ferner ist identisch

$$Q = \Delta(\beta_1, \ldots, \alpha_1, \ldots) = \frac{g(\alpha_1) \ldots g(\alpha_m)}{b_n^m} \Delta(\alpha_1, \ldots) \Delta(\beta_1, \ldots),$$

folglich

$$b_n^m f(\beta_1) \ldots f(\beta_n) = R.$$

7. Die Resultante von $f(x)$ und $g(x)$ ist zugleich die Resultante von $f(x)$ und $g(x) + \lambda f(x)$, wenn diese Function von demselben Grade ist als $g(x)$. Denn die Determinante R bleibt unverändert, wenn man zu m Zeilen des Systems der Reihe nach andre mit λ multiplicirte Zeilen desselben addirt (§. 3, 6), zur $(n+1)$ten die 1te, zur $(n+2)$ten die 2te, u. s. f.

Die Resultante von $f(x)$ und $(x-t)\,g(x)$ ist das Product der Resultante von $f(x)$ und $g(x)$ mit der Resultante von $f(x)$ und $x - t$. Denn die gesuchte Resultante ist

$$b_n^m f(\beta_1) \ldots f(\beta_n) f(t) = R f(t).$$

Wenn die ganzen Functionen $f(x)$ und $g(x)$ beide durch dieselbe ganze Function $h(x)$ theilbar sind, so verschwindet ihre Resultante identisch. Z. B. $f(x)$ und $(x - \alpha_i)\,g(x)$ haben die Resultante $Rf(\alpha_i) = 0$.

8. Umgekehrt schliesst man: Wenn die Resultante von $f(x)$ und $g(x)$ verschwindet, so sind $f(x)$ und $g(x)$ beide durch eine bestimmte ganze Function $h(x)$ theilbar. Denn (5)

$$R = a_m^n b_n^m D(\alpha_1, \ldots, \alpha_m; \beta_1, \ldots, \beta_n)$$

verschwindet nicht, wenn $a_m = 0$ oder $b_n = 0$, weil dabei eine Wurzel von $f(x) = 0$ oder von $g(x) = 0$ unendlich wird; R verschwindet also nur dann, wenn mindestens eine unter den Differenzen $\beta_i - \alpha_k$ verschwindet. Unter dieser Bedingung sind aber $f(x)$ und $g(x)$ durch $x - \beta_i$ theilbar.

Vermöge der Bedingung $R = 0$ hat die obige Gleichung (4) $\psi(u) = 0$ mindestens eine verschwindende Wurzel z. B. $f(\beta_i) = 0$, so dass $\beta_i = \alpha_k$ eine gemeinschaftliche Wurzel der Gleichungen $f(x) = 0$ und $g(x) = 0$ ist.

Wenn nun die Gleichungen $f(x) = 0$ und $g(x) = 0$ eine oder mehr gemeinschaftliche Wurzeln besitzen, so haben die Functionen $f(x)$ und $g(x)$ einen gemeinschaftlichen Divisor ersten oder höhern Grades, dessen Coefficienten ganze homogene Functionen der gegebenen Coefficienten sind.

Jede gemeinschaftliche Wurzel ω genügt nämlich dem System von $n+m$ Gleichungen (4)

$$\begin{array}{rcl}
0 & = & a_0 + a_1\omega + a_2\omega^2 + \dots \\
0 & = & \phantom{a_0 + {}} a_0\omega + a_1\omega^2 + \dots \\
\cdots & & \cdots\cdots\cdots \\
0 & = & \phantom{a_0 + a_1\omega + a_2\omega^2 + {}} a_0\omega^{n-1} + \dots \\
0 & = & b_0 + b_1\omega + b_2\omega^2 + \dots \\
0 & = & \phantom{b_0 + {}} b_0\omega + b_1\omega^2 + \dots \\
\cdots & & \cdots\cdots\cdots \\
0 & = & \phantom{b_0 + b_1\omega + {}} b_0\omega^{m-1} + \dots
\end{array}$$

Also verschwindet nicht nur die durch R bezeichnete Determinante $(n+m)$ten Grades, sondern auch die aus den ersten $n+m-1$ Gleichungen gebildete Determinante $(n+m-1)$ten Grades

$$\left|\begin{array}{cccccc}
a_0 + a_1\omega & a_2 & . & . & & \\
a_0\omega & a_1 & a_2 & . & . & \\
 & a_0 & a_1 & a_2 & . & . \\
 & . & . & . & . & . \\
b_0 + b_1\omega & b_2 & . & . & & \\
b_0\omega & b_1 & b_2 & . & . & \\
 & b_0 & b_1 & b_2 & . & . \\
 & . & . & . & . & .
\end{array}\right| = R_{10} + R_{11}\omega$$

ferner die aus den ersten $n+m-2$ Gleichungen gebildete Determinante $(n+m-2)$ten Grades

$$\left|\begin{array}{cccccc}
a_0 + a_1\omega + a_2\omega^2 & a_3 & . & & & \\
a_0\omega + a_1\omega^2 & a_2 & a_3 & . & & \\
a_0\omega^2 & a_1 & a_2 & a_3 & . & \\
\cdots & . & . & . & . & . \\
b_0 + b_1\omega + b_2\omega^2 & b_3 & . & & & \\
b_0\omega + b_1\omega^2 & b_2 & b_3 & . & & \\
b_0\omega^2 & b_1 & b_2 & b_3 & . & \\
 & . & . & . & . & .
\end{array}\right| = R_{20} + R_{21}\omega + R_{22}\omega^2$$

u. s. w. Denn dadurch, dass man zu den ersten Colonnen dieser Determinanten die übrigen mit hinreichenden Potenzen von ω multiplicirten Colonnen addirt, verschwinden alle Elemente der ersten Colonnen zufolge der Voraussetzung. Die in der Entwickelung dieser verschwindenden Determinanten (§. 3, 5) vorkommenden Coefficienten R_{10}, R_{11}, R_{20}, R_{21}, R_{22}, . . sind partiale Determinanten von R, mithin ganze homogene Functionen der Coefficienten von $f(x)$ und $g(x)$.

Wenn nun die Resultante R nicht verschwindet, so haben die ganzen Functionen $f(x)$ und $g(x)$ keinen gemeinschaftlichen Divisor.

Wenn der Gleichung $R = 0$ genügt wird und dabei R_{11} nicht 0 ist, so haben $f(x)$ und $g(x)$ den gemeinschaftlichen Divisor ersten Grades

$$R_{10} + R_{11}x.$$

Wenn der Gleichung $R = 0$ genügt wird und dabei $R_{11} = 0$, R_{22} nicht 0 ist, so haben $f(x)$ und $g(x)$ den gemeinschaftlichen Divisor zweiten Grades

$$R_{20} + R_{21}x + R_{22}x^2$$

u. s. w. Unter der Voraussetzung $R_{22} = 0$ verschwindet auch R_{21}, sonst wäre eine gemeinschaftliche Wurzel der Gleichungen $f(x) = 0$ und $g(x) = 0$ unendlich.

Anmerkung. Wenn die Coefficienten von $f(x)$ und $g(x)$ Functionen von y sind, so beruht die Auflösung des Systems $f(x) = 0$ und $g(x) = 0$ auf der Auflösung der Gleichung $R = 0$ und der Bildung des hiermit bestimmten gemeinschaftlichen Divisors $h(x)$ von $f(x)$ und $g(x)$. Nachdem man aus der Gleichung $R = 0$ einen Werth von y berechnet hat, findet man aus der Gleichung $h(x) = 0$ den oder die zugehörigen Werthe von x. Wenn $h(x)$ vom ersten Grade ist, so gehört zu dem berechneten Werth von y ein Werth von x; wenn $h(x)$ vom zweiten Grade ist, so gehören zu dem Werth von y zwei Werthe von x, u. s. w.

9. Wenn die ganzen Functionen $f(x)$ und $g(x)$ auf Grund der Gleichung $R = 0$ einen gemeinschaftlichen Divisor, und die Gleichungen $f(x) = 0$ und $g(x) = 0$ eine oder mehrere gemeinschaftliche Wurzeln haben, so bestehn unter den partialen Determinanten von R besondere Relationen, weil die oben (8) gebildeten Determinanten, welche Functionen einer gemeinschaftlichen Wurzel ω vom 1ten, 2ten, . . Grade sind, verschwinden.

Der gemeinschaftliche Divisor sei vom ersten Grade; die Determinante R werde durch $\Sigma \pm a_{00}\, a_{11} \,.\,.\, a_{n+m-1,n+m-1}$ und der Coefficient des Elements a_{ik} in R durch α_{ik} bezeichnet.

Vermöge der Voraussetzung $R = 0$ folgt aus dem System der $n + m$ Gleichungen

$$\begin{array}{l} 0 = a_0 + a_1 \omega + \ldots \\ 0 = \qquad a_0 \omega + a_1 \omega^2 + \ldots \\ \ldots \\ 0 = b_0 + b_1 \omega + \ldots \\ 0 = \qquad b_0 \omega + b_1 \omega^2 + \ldots \\ \ldots \end{array}$$

die Proportion (§. 8, 2)

$$1 : \omega : \omega^2 : \ldots : \omega^{n+m-1} = \alpha_{i0} : \alpha_{i1} : \alpha_{i2} : \ldots : \alpha_{i,n+m-1}$$

d. h. die den Elementen irgend einer Zeile von R zugehörigen Coefficienten $\alpha_{i0}, \alpha_{i1}, \ldots$ bilden eine geometrische Progression, deren Verhältniss die gemeinschaftliche Wurzel der Gleichungen $f(x) = 0$ und $g(x) = 0$ ist *).

10. Wenn $\varphi(x) = h_0 + h_1 x + \ldots$ eine gegebene ganze Function von x ist, welche den $(n + m - 1)$ten Grad nicht übersteigt, so giebt es bestimmte Multiplicatoren p und q, ganze Functionen von x, die erstere $(n - 1)$ten, die andere $(m - 1)$ten Grades von der Art, dass man identisch hat **)

$$p f(x) + q g(x) = R \varphi(x) .$$

Die Möglichkeit der Identität erhellt aus der Anzahl der Coefficienten in p und q, über welche verfügt werden kann. Die Berechnung der Multiplicatoren p und q erfolgt, indem man die Zeilen des Systems

$$\begin{array}{rl} f(x) = & a_0 + a_1 x + \ldots \\ x f(x) = & \qquad a_0 x + a_1 x^2 + \ldots \\ & \ldots \\ x^{n-1} f(x) = & \qquad\qquad a_0 x^{n-1} + \ldots \\ g(x) = & b_0 + b_1 x + \ldots \\ x g(x) = & \qquad b_0 x + b_1 x^2 + \ldots \\ & \ldots \\ x^{m-1} g(x) = & \qquad\qquad b_0 x^{m-1} + \ldots \end{array}$$

der Reihe nach mit den Coefficienten (9) $\alpha_{0i}, \alpha_{1i}, \ldots$ multiplicirt und die Producte addirt. Unter Anwendung der Bezeichnung

*) Vergl. Jacobi Crelle J. 15 p. 106.
**) Jacobi Crelle J. 15 p. 108.

$$p_i = a_{0i} + a_{1i}x + \cdot\cdot + a_{n-1,i}x^{n-1}$$
$$q_i = a_{ni} + a_{n+1,i}x + \cdot\cdot + a_{n+m-1,i}x^{m-1}$$

findet man (§. 3, 3) die Identität

$$p_i f(x) + q_i g(x) = Rx^i .$$

Bildet man nun mit Hülfe der gegebenen Coefficienten

$$p = h_0 p_0 + h_1 p_1 + \cdot\cdot + h_{n+m-1} p_{n+m-1}$$
$$q = h_0 q_0 + h_1 q_1 + \cdot\cdot + h_{n+m-1} q_{n+m-1}$$

so findet die geforderte Identität statt.

Anmerkung. Bei der Aufsuchung des gemeinschaftlichen Divisors von $f(x)$ und $g(x)$ hatte zuerst Euler (Mém. de Berlin 1764 p. 91)

$$\frac{f(x)}{g(x)} = -\frac{q}{p}$$

gesetzt, und die Identität $pf(x) + qg(x) = 0$ der Berechnung des gemeinschaftlichen Divisors

$$\frac{f(x)}{q} = -\frac{g(x)}{p}$$

zu Grunde gelegt. Die Identität

$$p_0 f(x) + q_0 g(x) = R$$

ist von Gauss (Demonstr. nova altera 8. Comm. Gött. III. 1815) in dem besondern Falle betrachtet worden, dass $g(x) = f'(x)$ ist.

11. Durch Differentiation der Identität (10)

$$p_i f(x) + q_i g(x) = Rx^i$$

ergiebt sich im Allgemeinen

$$\frac{\partial p_i}{\partial a_k} f(x) + p_i x^k + \frac{\partial q_i}{\partial a_k} g(x) = \frac{\partial R}{\partial a_k} x^i$$
$$\frac{\partial p_i}{\partial b_k} f(x) + q_i x^k + \frac{\partial q_i}{\partial b_k} g(x) = \frac{\partial R}{\partial b_k} x^i$$

Wenn nun $f(x)$ und $g(x)$ einen gemeinschaftlichen Divisor ersten Grades haben, und ω die gemeinschaftliche Wurzel der Gleichungen $f(x) = 0$ und $g(x) = 0$ ist, so hat man für $x = \omega$ *)

---

*) Richelot Crelle J. 21 p. 228.

$$p_i \omega^k = \frac{\partial R}{\partial a_k}\,\omega^i\,, \qquad q_i \omega^k = \frac{\partial R}{\partial b_k}\,\omega^i\,,$$

$$p_i = \frac{\partial R}{\partial a_i}\,, \qquad q_i = \frac{\partial R}{\partial b_i}\,,$$

$$1 : \omega : \ldots : \omega^m = \frac{\partial R}{\partial a_0} : \frac{\partial R}{\partial a_1} : \ldots : \frac{\partial R}{\partial a_m}$$

$$1 : \omega : \ldots : \omega^n = \frac{\partial R}{\partial b_0} : \frac{\partial R}{\partial b_1} : \ldots : \frac{\partial R}{\partial b_n}$$

in Uebereinstimmung mit der oben (9) angegebenen Proportion.

12. Die Determinante $(n+m)$ten Grades

$$R = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & . & . & & \\ & a_0 & a_1 & a_2 & . & . & \\ & & . & . & . & . & . \\ b_0 & b_1 & b_2 & . & . & & \\ & b_0 & b_1 & b_2 & . & . & \\ & & . & . & . & . & . \end{vmatrix}$$

kann durch Verbindung ihrer Zeilen in eine Determinante $n$ten oder $m$ten Grades zusammengezogen werden, je nachdem n oder m die grössre der beiden Zahlen ist.

Es sei zunächst $m = n$. Um die $n$te Zeile von R zu transformiren, multiplicire man die $n$te Zeile mit b_n und die vorangehenden Zeilen mit $b_{n-1}, b_{n-2}, \ldots$, ebenso die $2n$te Zeile mit a_n und die vorangehenden mit $a_{n-1}, a_{n-2}, \ldots$ Durch Subtraction der $2n$ten Zeile von der $n$ten, der $(2n-1)$ten Zeile von der $(n-1)$ten, .. bilde man nun unter Anwendung der Bezeichnung

$$d_{ik} = a_i b_k - a_k b_i$$

die Zeilen

$$\begin{array}{cccccccc} d_{01} & d_{11} & . & . & d_{n-1,1} & d_{n1} & & \\ & d_{02} & . & . & d_{n-2,2} & d_{n-1,2} & d_{n2} & \\ & . & . & . & . & . & . & \\ & & & & d_{0n} & d_{1n} & d_{2n} & . \;\; . \;\; . \end{array}$$

Die Addition dieser Zeilen ergiebt für die $n$te Zeile von $b_n R$ die Elemente

$$d_{01} \quad d_{02} \quad . \quad . \quad d_{0n} \quad 0 \quad 0 \quad . \quad . \quad .$$

weil $d_{ii} = 0$, $d_{ki} = -d_{ik}$, und daher die Summe

$$d_{i1} + d_{i-1,2} + \ldots + d_{1i} = 0\,.$$

Auf dieselbe Weise transformirt man die $(n-1)$te, $(n-2)$te,.. Zeile von R. Man multiplicirt die $(n-i)$te Zeile mit b_n, die vorangehenden Zeilen mit $b_{n-1}, b_{n-2}, \ldots$ u. s. f. und findet endlich die Elemente der $(n-i)$ten Zeile von $b_n^{i+1} R$ durch Addition der abgeleiteten Zeilen

$$\begin{array}{ccccccccc}
d_{0,i+1} & d_{1,i+1} & \cdot\ \cdot & d_{n-i-1,i+1} & \cdot\ \cdot & d_{n,i+1} & & \\
 & d_{0,i+2} & \cdot\ \cdot & d_{n-i-2,i+2} & \cdot\ \cdot & d_{n-1,i+2} & d_{n,i+2} & \\
 & & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \\
 & & & d_{0n} & \cdot\ \cdot & d_{i+1,n} & d_{i+2,n} &
\end{array}$$

Bezeichnet man das $(k+1)$te Element der $(n-i)$ten Zeile durch c_{ik}, so hat man

$$c_{ik} = d_{0,i+k+1} + d_{1,i+k} + \ldots + d_{k,i+1}.$$

Analog ist

$$c_{ki} = d_{0,i+k+1} + d_{1,i+k} + \ldots + d_{i,k+1} = c_{ik},$$

weil die Summe $d_{i+1,k} + d_{i,k+1} + \ldots + d_{k,i+1}$ identisch verschwindet. Insbesondere hat man

$$c_{i,n-1} = d_{in}, \qquad c_{in} = 0,$$

weil a_r und b_r als verschwindend zu betrachten sind, wenn $r > n$.

Hiernach ist nun

$$b_n^n R = \begin{vmatrix}
c_{n-1,0} & \cdot & \cdot & c_{n-1,n-1} & & \\
 & & \cdot & & & \\
c_{00} & \cdot & \cdot & c_{0,n-1} & & \\
b_0 & \cdot & \cdot & b_{n-1} & b_n & \\
 & b_0 & \cdot & & b_{n-1} & b_n \\
 & & \cdot & & \cdot &
\end{vmatrix}$$

Bezeichnet man die Determinante $\Sigma \pm c_{00} \ldots c_{n-1,n-1}$ durch S, so ist (§. 4, 6) $b_n^n R$ das Product von $(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} S$ mit einer Determinante $n$ten Grades, die von ihrem Anfangsglied b_n^n sich nicht unterscheidet. Also ist [*])

$$R = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} S.$$

---

[*]) Vergl. unten (14).

Beispiele. Wenn $f(x)$ und $g(x)$ vom 2ten Grade sind, so wird

$$R = -S = -\begin{vmatrix} d_{01} & d_{02} \\ d_{02} & d_{12} \end{vmatrix}.$$

Wenn $f(x)$ und $g(x)$ vom 3ten Grade sind, so findet man

$$R = -S = -\begin{vmatrix} d_{01} & d_{02} & d_{03} \\ d_{02} & d_{03} + d_{12} & d_{13} \\ d_{03} & d_{13} & d_{23} \end{vmatrix}.$$

Wenn $f(x)$ und $g(x)$ vom 4ten Grade sind, so findet man

$$R = S = \begin{vmatrix} d_{01} & d_{02} & d_{03} & d_{04} \\ d_{02} & d_{03} + d_{12} & d_{04} + d_{13} & d_{14} \\ d_{03} & d_{04} + d_{13} & d_{14} + d_{23} & d_{24} \\ d_{04} & d_{14} & d_{24} & d_{34} \end{vmatrix}.$$

Diese Determinanten können nach §. 3, 16 weiter entwickelt werden, wobei die Identität

$$d_{ik} d_{lm} + d_{kl} d_{im} + d_{li} d_{km} = 0$$

(§. 3, 11) zur Verfügung steht.

13. Wenn $m < n$, so bilde man durch Hinzufügung von $n - m$ Zeilen,

$$\begin{matrix} b_0 & b_1 & . & . & b_n & & \\ & b_0 & b_1 & . & . & b_n & \\ & & . & . & . & & \end{matrix}$$

welche auf der Diagonale endigen, die Determinante $2n$ten Grades $b_n^{n-m} R$, und verwandle dieselbe auf die angegebene Art (12) in eine Determinante $n$ten Grades, so dass

$$b_n^{n-m} R = \begin{vmatrix} c_{n-1,0} & . & . & c_{n-1,n-1} \\ . & . & . & . \\ c_{00} & . & . & c_{0,n-1} \end{vmatrix}.$$

Diese Determinante ist aber durch b_n^{n-m} theilbar, als Product der beiden Determinanten $n$ten Grades

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & \cdot & \cdot & & \\ & a_0 & a_1 & \cdot & \cdot & \\ & & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{m-1,0} & c_{m-1,1} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{00} & c_{01} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_n & b_{n-1} & \cdot\ \cdot & b_{m+1} & & \\ & b_n & \cdot\ \cdot & b_{m+2} & & \\ & & \cdot\ \cdot & \cdot & & \\ & & & b_n & & \\ & & & & 1 & \\ & & & & & 1 \end{vmatrix}$$

Man findet nämlich durch Multiplication der ersten Colonne in der ersten Determinante mit den Colonnen der zweiten Determinante die erste Colonne des Products, u. s. w. In der That ist

$$a_0 b_{m+i+1} + \ldots + a_i b_{m+1} = d_{0,m+i+1} + \ldots + d_{i,m+1} = c_{mi}$$

weil $a_{m+1}, a_{m+2}, \ldots$ als verschwindend zu betrachten sind. Die zweite Determinante hat den Werth $b_n^{\,n-m}$, also ist R der ersten Determinante gleich *).

14. Die abgekürzte Form der Resultante R (12) ist von Bezout (Mém. de Paris 1764 p. 317) durch ein Verfahren erreicht worden, welches in neuerer Zeit Jacobi (Crelle J. 15 p. 101. Vergl. Cauchy Exerc. d'Anal. 1840 p. 393) in Erinnerung gebracht und durch neue wesentliche Bemerkungen ergänzt hat. Aus den gegebenen Functionen $f(x)$ und $g(x)$, welche beide als Functionen $n$ten Grades vorausgesetzt werden, bildet man mit Hülfe geeigneter Multiplicatoren n bestimmte Functionen $(n-1)$ten Grades $u_0, u_1, \ldots, u_{n-1}$, welche mit $f(x)$ und $g(x)$ zugleich verschwinden. Dann ergiebt sich die Resultante von $f(x)$ und $g(x)$ und der gemeinschaftliche Divisor dieser Functionen aus dem System von Gleichungen $u_0 = 0, \ldots, u_{n-1} = 0$. Es ist nämlich

$$\begin{vmatrix} f(x) & a_{r+1} + a_{r+2}x + \ldots \\ g(x) & b_{r+1} + b_{r+2}x + \ldots \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_0 + a_1 x + \ldots + a_r x^r & a_{r+1} + a_{r+2}x + \ldots + a_n x^{n-r-1} \\ b_0 + b_1 x + \ldots + b_r x^r & b_{r+1} + b_{r+2}x + \ldots + b_n x^{n-r-1} \end{vmatrix}$$

eine Function $(n-1)$ten Grades, welche durch

*) Vergl. Rosenhain Crelle J. 28 p. 268.

$$u_r = c_{r0} + c_{r1}x + \,.\,.\, + c_{r,n-1}x^{n-1}$$

bezeichnet wird. Unter Anwendung der Bezeichnung

$$d_{ik} = a_i b_k - a_k b_i$$

findet man (§. 3, 5)

$$c_{r0} = d_{0,r+1}\,, \quad c_{r1} = d_{0,r+2} + d_{1,r+1}\,, \quad c_{r2} = d_{0,r+3} + d_{1,r+2} + d_{2,r+1}\,, \,.\,.$$
$$c_{rs} = d_{0,r+s+1} + d_{1,r+s} + \,.\,.\, + d_{s,r+1}$$

und analog

$$c_{sr} = d_{0,s+r+1} + d_{1,s+r} + \,.\,.\, + d_{r,s+1} = c_{rs} \text{ *)}\,,$$

weil die Summe $d_{s+1,r} + \,.\,.\, + d_{r,s+1}$ identisch verschwindet (12).

Bezeichnet man nun die Determinante $\Sigma \pm c_{00} \,.\,.\, c_{n-1,n-1}$ durch S, und den Coefficienten des Elements c_{ik} in S durch γ_{ik}, so findet man aus dem System

$$\begin{array}{lllll} u_0 & = c_{00} & + c_{01}x & + \,.\,.\, + & c_{0,n-1}x^{n-1} \\ . & . & . & . & . \\ u_{n-1} & = c_{n-1,0} & + c_{n-1,1}x & + \,.\,.\, + & c_{n-1,n-1}x^{n-1} \end{array}$$

(§. 8, 1) die Identität

$$u_0\gamma_{0i} + \,.\,.\, + u_{n-1}\gamma_{n-1,i} = Sx^i \quad (10)\,.$$

Jede gemeinschaftliche Wurzel ω der Gleichungen $f(x) = 0$ und $g(x) = 0$ genügt dem System $u_0 = 0, \,.\,.\,, u_{n-1} = 0$, weil diese letztern Functionen mit $f(x)$ und $g(x)$ zugleich verschwinden. Wenn nun S nicht verschwindet, so schliesst man wie oben (8), dass die Gleichungen $f(x) = 0$ und $g(x) = 0$ eine gemeinschaftliche Wurzel nicht haben. Wenn aber $S = 0$ und γ_{i0} nicht 0 ist, so haben die Gleichungen eine gemeinschaftliche Wurzel, und es besteht die Proportion (vergl. 9)

$$1 : \omega : \,.\,.\, : \omega^{n-1} = \gamma_{i0} : \gamma_{i1} : \,.\,.\, : \gamma_{i,n-1}\,.$$

Man hat also insbesondere

$$\omega^k : \omega^s = \gamma_{ik} : \gamma_{is}\,,$$
$$\omega^i : \omega^r = \gamma_{si} : \gamma_{sr}\,.$$

Zugleich ist $\gamma_{si} = \gamma_{is}$ zufolge der Identität $c_{si} = c_{is}$ (§. 3, 13), folglich

$$\omega^{i+k} : \omega^{r+s} = \gamma_{ik} : \gamma_{rs}\,.$$

---

*) Jacobi l. c. p. 102.

Wenn nun die Summen $i + k$ und $r + s$ einander gleich sind, so sind γ_{ik} und γ_{rs} einander gleich, und man kann ihren gemeinschaftlichen Werth durch γ_{i+k} bezeichnen. Dann gilt die umfassendere Proportion *)

$$1 : \omega : \ldots : \omega^{2n-2} = \gamma_0 : \gamma_1 : \ldots : \gamma_{2n-2}$$

d. h. die Grössen $\gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_{2n-2}$ bilden eine geometrische Progression, deren Verhältniss die gemeinschaftliche Wurzel der Gleichungen $f(x) = 0$ und $g(x) = 0$ ist.

Wenn die Determinante S verschwindet, so haben $f(x)$ und $g(x)$ einen gemeinschaftlichen Divisor, und die Resultante R verschwindet (8). Nun ist S wie R (5) eine homogene ganze Function sowohl der Grössen $a_0, a_1, \ldots,$ als auch der Grössen $b_0, b_1, \ldots$ von n Dimensionen, also ist der Quotient $S : R$ eine von diesen Grössen unabhängige Zahl. Das Anfangsglied von R ist $a_0{}^n b_n{}^n$ und kommt in dem Anfangsglied von

$$(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} S = \begin{vmatrix} c_{n-1,0} & \cdot & \cdot & c_{n-1,n-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{00} & \cdot & \cdot & c_{0,n-1} \end{vmatrix}$$

mit demselben Zeichen vor. Daher ist $(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} S : R = 1$, wie oben (12) durch directe Transformation gezeigt wurde.

15. Cayley hat die Berechnung der Resultante von $f(x)$ und $g(x)$ auf die Entwickelung der symmetrischen ganzen Function (§. 10, 2)

$$F(x, y) = \frac{f(x)\, g(y) - f(y)\, g(x)}{y - x} = \Sigma\, c_{ik} x^i y^k$$

gegründet**). Dabei wird vorausgesetzt, dass $f(x)$ vom $m$ten Grade, $g(x)$ vom $n$ten Grade, und $m \leqq n$ ist (1). Die Glieder der Summe werden dadurch gebildet, dass man für i und k alle Zahlen von 0 bis $n - 1$ setzt. Weil $F(x, y) = F(y, x)$, so ist $c_{ik} = c_{ki}$.

---

*) Jacobi l. c. p. 106.

**) Vergl. Sylvester's Mittheilung Philos. Trans. 1853 p. 546. Hermite Crelle J. 52 p. 47 Anm. Caylay Crelle J. 53 p. 366. Borchardt Crelle J. 53 p. 367 und 57 p. 112.

Setzt man $a_i b_k - a_k b_i = d_{ik}$, so erhält man

$$\begin{aligned}(a_0 + a_1 x + ..)(b_0 + b_1 y + ..) &- (b_0 + b_1 x + ..)(a_0 + a_1 y + ..) \\ = d_{01}(y-x) + d_{02}(y^2-x^2) &+ .. + d_{0n}(y^n - x^n) \\ + d_{12}(xy^2 - x^2y) &+ .. + d_{1n}(xy^n - x^n y) \\ &+ \dots\dots \\ &+ d_{n-1,n}(x^{n-1}y^n - x^n y^{n-1})\end{aligned}$$

und daher

$$\begin{aligned}F(x,y) = d_{01} + d_{02}(y+x) &+ .. + d_{0n}(y^{n-1} + .. + x^{n-1}) \\ + d_{12}xy &+ .. + d_{1n}(y^{n-2} + .. + x^{n-2})xy \\ &+ \dots\dots \\ &+ d_{n-1,n}x^{n-1}y^{n-1}.\end{aligned}$$

Indem man die Glieder absondert, welche $x^i y^k$ enthalten, findet man wie oben (12 und 14)

$$c_{ik} = d_{0,i+k+1} + d_{1,i+k} + d_{2,i+k-1} + \dots$$

Abgesehn von dieser Entwickelung hat man

$$F(\beta_i, \beta_k) = 0, \qquad F(\beta_i, \beta_i) = f(\beta_i)\, g'(\beta_i),$$

folglich

$$\Sigma \pm F(\beta_1, \beta_1) .. F(\beta_n, \beta_n) = f(\beta_1) .. f(\beta_n)\, g'(\beta_1) .. g'(\beta_n).$$

Wenn man beide Seiten durch $\Delta(\beta_1, .., \beta_n)^2$ dividirt, so findet man (§. 10, 3 und 7)

$$\begin{aligned}\Sigma \pm c_{00} .. c_{n-1,n-1} &= (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} b_n{}^n f(\beta_1) .. f(\beta_n) \\ &= (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} b_n{}^{n-m} R\ (5).\end{aligned}$$

Die Theilbarkeit der Determinante durch $b_n{}^{n-m}$ ist oben (13) nachgewiesen worden.

16. Rosenhain hat die Resultante der Functionen $f(x)$ und $g(x)$ interpolatorisch durch die Werthe von $f(x)$ und $g(x)$ ausgedrückt, welche zu $m+n$ gegebenen Werthen des Arguments x gehören*). Diese Werthe von $f(x)$ sind eben so wenig von einander unabhängig, als die Werthe von $g(x)$, weil $f(x)$ durch $m+1$ und $g(x)$ durch $n+1$ Werthe bestimmt ist (§. 10, 11).

*) Crelle J. 30 p. 157. Vergl. Kronecker Berl. Monatsbericht 1865 p. 690.

Sind $x_1, x_2, \ldots$ gegebene Werthe von x, so multiplicire man die Determinante $(n+m)$ten Grades

$$R = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & . & & \\ & a_0 & a_1 & a_2 & . & \\ & & . & . & . & . \\ b_0 & b_1 & b_2 & . & & \\ & b_0 & b_1 & b_2 & . & \\ & & . & . & . & . \end{vmatrix}$$

zeilenweise mit

$$P = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & \ldots & x_1^{n+m-1} \\ . & . & \ldots & . \\ 1 & x_{n+m} & \ldots & x_{n+m}^{n+m-1} \end{vmatrix}$$

Bezeichnet man das Product durch $\Sigma \pm c_{11} \ldots c_{n+m,n+m}$, so hat man

$$c_{11} = f(x_1), \qquad c_{12} = x_1 f(x_1), \ldots, c_{1n} = x_1^{n-1} f(x_1),$$
$$c_{1,n+1} = g(x_1), \qquad c_{1,n+2} = x_1 g(x_1), \ldots, c_{1,n+m} = x_1^{m-1} g(x_1),$$

u. s. w., folglich RP

$$= \begin{vmatrix} f(x_1) & x_1 f(x_1) & \ldots & x_1^{n-1} f(x_1) & g(x_1) & x_1 g(x_1) & \ldots & x_1^{m-1} g(x_1) \\ . & . & & & & & & \\ f(x_{n+m}) & x_{n+m} f(x_{n+m}) & & & & & & \end{vmatrix}$$

Indem man diese Determinante in eine Summe von Producten partialer Determinanten $n$ten und $m$ten Grades zerlegt (§. 4, 4), findet man

$$\Sigma f(x_1) \ldots f(x_n) \Delta(x_1, \ldots, x_n) g(x_{n+1}) \ldots g(x_{n+m}) \Delta(x_{n+1}, \ldots, x_{n+m}),$$

eine Summe von $\binom{n+m}{m}$ Gliedern, welche dadurch gebildet werden, dass man für $1, 2, \ldots, n$ alle Combinationen von n verschiedenen Numern der Reihe $1, 2, \ldots, n+m$ setzt, und die übrigen Numern so ordnet, dass die Reihe aller Numern jedesmal mit der Reihe $1, 2, \ldots, n+m$ zu derselben Classe der Permutationen gehört. Nun ist identisch (§. 10, 21)

$$\frac{\Delta(x_1, \ldots, x_{n+m})}{\Delta(x_1, \ldots, x_n) \Delta(x_{n+1}, \ldots, x_{n+m})} = D(x_1, \ldots, x_n; x_{n+1}, \ldots, x_{n+m})$$

folglich, unabhängig von den Permutationen,

$$R = \Sigma \frac{f(x_1) \ldots f(x_n) g(x_{n+1}) \ldots g(x_{n+m})}{D(x_1, \ldots, x_n; x_{n+1}, \ldots, x_{n+m})}.$$

Anmerkung. Mit Hülfe dieser Formel hat Rosenhain a. a. O. Cauchy's interpolatorische Darstellung einer gebrochenen algebraischen Function*) abgeleitet.

Die Resultante von $f(x)$ und $(x-z)\,g(x)$ ist (7) $Rf(z)$, und wird nach der angegebenen Regel durch die Werthe der beiden Functionen ausgedrückt, welche zu $m+n+1$ Werthen von x gehören, wie folgt:

$$\Sigma\,\frac{f(x_0)\,.\,.\,f(x_n)\,g(x_{n+1})\,.\,.\,g(x_{n+m})\,(x_{n+1}-z)\,.\,.\,(x_{n+m}-z)}{D(x_0,\,.\,.,\,x_n\,;\,x_{n+1},\,.\,.\,.,\,x_{n+m})}\,.$$

Die Resultante von $(x-z)\,f(x)$ und $g(x)$ ist $Rg(z)$ und nach derselben Regel

$$\Sigma\,\frac{f(x_0)\,.\,.\,f(x_{n-1})\,g(x_n)\,.\,.\,g(x_{n+m})\,(x_0-z)\,.\,.\,(x_{n-1}-z)}{D(x_0,\,.\,.,\,x_{n-1}\,;\,x_n,\,.\,.\,,\,x_{n+m})}\,.$$

Durch Division erhält man, nachdem man den Zähler und den Nenner durch $g(x_0)\,.\,.\,g(x_{n+m})$ dividirt und den Quotienten $f(x_i) : g(x_i)$ durch u_i bezeichnet hat,

$$\frac{f(z)}{g(z)} = \frac{\Sigma\,\dfrac{u_0\,.\,.\,u_n}{D(x_0,\,.\,.\,,\,x_n\,;\,x_{n+1},\,.\,.\,,\,x_{n+m})}\,(x_{n+1}-z)\,.\,.\,(x_{n+m}-z)}{\Sigma\,\dfrac{u_0\,.\,.\,u_{n-1}}{D(x_0,\,.\,.\,,\,x_{n-1}\,;\,x_n,\,.\,.\,,\,x_{n+m})}\,(x_0-z)\,.\,.\,(x_{n-1}-z)}\,.$$

17. Borchardt hat die Resultante der Functionen $f(x)$ und $g(x)$, beide $n$ten Grades, interpolatorisch durch die Werthe von $f(x)$ und $g(x)$ ausgedrückt, welche zu $n+1$ gegebenen Werthen $x_0, x_1, \ldots, x_n$ des Arguments x gehören**).

Unter der Voraussetzung (15)

$$F(x, y) = \frac{f(x)\,g(y) - f(y)\,g(x)}{y-x} = \Sigma\, c_{ik}\, x^i y^k$$

ist die Determinante $\Sigma \pm c_{00}\,.\,.\,c_{n-1,n-1}$ der Resultante R gleich oder entgegengesetzt gleich. Nach §. 10, 3 hat man aber

$$\Sigma \pm c_{00}\,.\,.\,c_{n-1,n-1} = \frac{\Sigma \pm F(x_1, x_1)\,.\,.\,F(x_n, x_n)}{\Delta(x_1,\,.\,.\,.\,,\,x_n)^2}\,.$$

Bildet man nun die Function $(n+1)$ten Grades

$$\varphi(x) = (x-x_0)(x-x_1)\,.\,.\,(x-x_n)$$

---

*) Cauchy Anal. algébr. Note 5. Vergl. Jacobi Crelle J. 30 p. 127.

**) Berl. Monatsbericht 1859 p. 376 und Crelle J. 57 p. 111.

so ist (§. 10, 8)

$$\Delta(x_1, \ldots, x_n)^2 = \frac{\Delta(x_0, x_1, \ldots, x_n)^2}{\varphi'(x_0)^2} = \frac{\varphi'(x_1)^2 \ldots \varphi'(x_n)^2}{\Delta(x_0, \ldots, x_n)^2}\,.$$

Nach Einführung der Elemente

$$h_{ik} = \frac{F(x_i, x_k)}{\varphi'(x_i)\,\varphi'(x_k)} = h_{ki}$$

erhält man daher

$$\Sigma \pm c_{00} \ldots c_{n-1,n-1} = \Delta(x_0, \ldots, x_n)^2\, \Sigma \pm h_{11} \ldots h_{nn}\,.$$

Eine besondere Eigenschaft der Elemente dieser letztern Determinante ergiebt sich daraus, dass $F(x, y)$ in Bezug auf x vom $(n-1)$ten Grade, dagegen $\varphi(x)$ vom $(n+1)$ten Grade ist, dass also (§. 10, 9)

$$\frac{F(x_0, y)}{\varphi'(x_0)} + \frac{F(x_1, y)}{\varphi'(x_1)} + \ldots + \frac{F(x_n, y)}{\varphi'(x_n)} = 0\,.$$

Demnach ist

$$h_{0k} + h_{1k} + \ldots + h_{nk} = 0\,,$$

also insbesondere

$$\begin{aligned} -h_{00} &= h_{01} + h_{02} + \ldots + h_{0n} \\ -h_{11} &= h_{01} + h_{12} + \ldots + h_{1n} \\ -h_{22} &= h_{02} + h_{12} + \ldots + h_{2n} \end{aligned}$$

u. s. w. Nun haben in der verschwindenden Determinante $(n+1)$ten Grades $(-1)^{n+1}\Sigma \pm h_{00}h_{11} \ldots h_{nn}$ alle Elemente gleiche Coefficienten (§. 3, 9), deren gemeinschaftlicher Werth durch die Formel

$$[0, 1, \ldots, n]$$

bezeichnet wird. Also ist

$$\Sigma \pm c_{00} \ldots c_{n-1,n-1} = (-1)^n \Delta(x_0, \ldots, x_n)^2\, [0, 1, \ldots, n]\,.$$

18. Die Formel $[0, 1, \ldots, n]$ d. h. die Determinante $n$ten Grades

$$\begin{vmatrix} h_{01} + \ldots + h_{1n} & -h_{12} & -h_{13} & \cdot \\ -h_{21} & h_{02} + \ldots + h_{2n} & -h_{23} & \cdot \\ -h_{31} & -h_{32} & h_{03} + \ldots + h_{3n} & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \end{vmatrix}$$

ist von Borchardt a. a. O. nach den Producten der in der Diagonale stehenden Grössen $h_{01}, h_{02}, \ldots, h_{0n}$ entwickelt worden (vergl. §. 1, 2).

Der Theil derselben, welcher keine dieser Grössen enthält,

$$\begin{vmatrix} h_{12}+\ldots+h_{1n} & -h_{12} & -h_{13} & . \\ -h_{21} & h_{12}+\ldots+h_{2n} & -h_{23} & . \\ -h_{31} & -h_{32} & h_{13}+\ldots+h_{3n} & . \\ . & . & . & \end{vmatrix}$$

ist wiederum eine verschwindende Determinante (§. 3, 9), in welcher alle Elemente denselben Coefficienten haben, der durch $[1, 2, \ldots, n]$ bezeichnet wird. Daher ist der Theil der gesuchten Entwickelung, welcher je eine der Grössen h_{01}, h_{02}, .. enthält,

$$h_{01}\,[1, 2, \ldots, n] + h_{02}\,[1, 2, \ldots, n] + \ldots$$

Der Theil von $[0, 1, \ldots, n]$, welcher das Product $h_{01}\,h_{02}$ enthält, ist eine partiale Determinante $(n-2)$ten Grades, die aus der Determinante $[2, 3, \ldots, n]$ dadurch gebildet werden kann, dass man die in der Diagonale stehenden Grössen h_{23}, $h_{24}, \ldots, h_{2n}$ durch die Summen

$$h_{13}+h_{23}\,,\quad h_{14}+h_{24}\,, \ldots, h_{1n}+h_{2n}$$

ersetzt. Bezeichnet man die so transformirte Determinante durch

$$[\overline{1+2}, 3, \ldots, n]\,,$$

so ist der Theil von $[0, 1, \ldots, n]$, welcher je 2 von den Grössen h_{01}, h_{02}, .. enthält,

$$h_{01}\,h_{02}\,[\overline{1+2}, 3, 4, \ldots, n] + h_{01}\,h_{03}\,[\overline{1+3}, 2, 4, \ldots, n] + \ldots$$

Auf analoge Weise wird der Theil von $[0, 1, \ldots, n]$, welcher je 3 von jenen Grössen enthält, durch

$$h_{01}\,h_{02}\,h_{03}\,[\overline{1+2+3}, 4, 5, \ldots] + h_{01}\,h_{02}\,h_{04}\,[\overline{1+2+4}, 3, 5, \ldots] + \ldots$$

ausgedrückt, indem man $[\overline{1+2+3}, 4, 5, \ldots]$ aus $[3, 4, 5, \ldots]$ dadurch ableitet, dass man die in der Diagonale stehenden Grössen h_{34}, h_{35}, .. durch die Summen

$$h_{14}+h_{24}+h_{34}\,,\qquad h_{15}+h_{25}+h_{35}\,, \ldots$$

ersetzt. U. s. w. So entsteht die Recursionsregel

$$\begin{aligned}[0, 1, \ldots, n] = \Sigma h_{01}\,[1, 2, \ldots] + \Sigma h_{01}\,h_{02}\,[\overline{1+2}, 3, \ldots] \\ + \Sigma h_{01}\,h_{02}\,h_{03}\,[\overline{1+2+3}, 4, \ldots] + \ldots \\ + h_{01}\,h_{02} \ldots h_{0n}\,.\end{aligned}$$

Zufolge derselben ist

$$[0, 1] = h_{01}$$

$$\begin{aligned}
[0, 1, 2] &= \Sigma h_0\, [1, 2] + h_{01} h_{02} \\
&= h_{01} h_{12} + h_{02} h_{12} + h_{01} h_{02}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[0, 1, 2, 3] &= \Sigma h_{01}\, [1, 2, 3] + \Sigma h_{01} h_{02}\, [\overline{1+2}, 3] + h_{01} h_{02} h_{03} \\
&= (h_{01} + h_{02} + h_{03})[1, 2, 3] + h_{01} h_{02}\, [\overline{1+2}, 3] \\
&\quad + h_{01} h_{03}\, [\overline{1+3}, 2] + h_{02} h_{03}\, [\overline{2+3}, 1] + h_{01} h_{02} h_{03}\,.
\end{aligned}$$

Die Formel $[1, 2, 3]$ hat 3 Glieder, die Formel $[\overline{1+2}, 3]$ hat deren 2, also hat $[0, 1, 2, 3]$ deren 4^2. Ebenso erkennt man, dass die Formel

$$[\overline{1+2+\,.\,.+k},\ k+1,\ k+2,\ k+3]$$

$3^2 k + 3\,.\,2 k^2 + k^3 = k(k+3)^2$ Glieder hat. Unter der Annahme, dass für die Werthe von m, welche eine bestimmte Grenze nicht übersteigen, die Formel

$$[\overline{1+2+\,.\,.+k},\ k+1,\ .\,.\,,\ k+m]$$

$k(k+m)^{m-1}$ Glieder besitzt, findet man vermöge der Recursionsregel für

$$[\overline{1+2+\,.\,.+k},\ k+1,\ .\,.\,,\ k+m+1]$$

die Anzahl der Glieder

$$\begin{aligned}
&k(m+1)(1+m)^{m-1} + k^2\tbinom{m+1}{2}\,.\,2(2+m-1)^{m-2} + k^3\tbinom{m+1}{3}\,.\,3(3+m-2)^{m-3} + \,.\,. \\
&= k(m+1)^m + k^2 m(m+1)^{m-1} + k^3\tbinom{m}{2}(m+1)^{m-2} + \,.\,. \\
&= k(k+m+1)^m\,.
\end{aligned}$$

Demnach ist die bis zu $m = 3$ gültige Annahme unbeschränkt richtig.

19. Die Resultante der Function $n$ten Grades $f(x)$ und der derivirten Function $f'(x)$ ist (5)

$$a_n^{\,n-1} f'(\alpha_1)\,.\,.\,f'(\alpha_n) = \left|\begin{array}{ccccccc}
a_1 & 2a_2 & 3a_3 & . & . & & \\
 & a_1 & 2a_2 & 3a_3 & . & . & \\
 & . & . & . & . & . & . \\
a_0 & a_1 & a_2 & . & . & & \\
 & a_0 & a_1 & a_2 & . & . & \\
 & . & . & . & . & . & .
\end{array}\right|$$

wenn das System n Zeilen der ersten Art und $n-1$ Zeilen der zweiten Art hat. Subtrahirt man die mit n multiplicirte letzte Zeile von der $n$ten, so erhält die $n$te Zeile folgende Elemente

$$0, \ldots, 0, \quad -na_0, \quad -(n-1)a_1, \ldots, \quad -a_{n-1}, \quad 0$$

und die Resultante reducirt sich (§. 2, 5) auf das Product von a_n mit einer Determinante $(2n-2)$ten Grades, welche durch $\varDelta$ bezeichnet wird. Nach §. 10, 7 ist

$$\varDelta = a_n^{n-2} f'(\alpha_1) \ldots f'(\alpha_n) = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_n^{2n-2} \varDelta(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)^2$$

eine symmetrische ganze Function der Wurzeln $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ (vergl. §. 10, 6) und eine homogene ganze Function der Coefficienten $a_0, \ldots, a_n$ von $2n-2$ Dimensionen, welche die **Discriminante der ganzen Function** $f(x)$ **und der Gleichung** $f(x) = 0$ genannt wird*). Wenn a_n verschwindet, so wird eine der Wurzeln $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ unendlich gross; dabei verschwindet die Discriminante im Allgemeinen nicht, sondern wird zur Discriminante einer Function $(n-1)$ten Grades.

Die Discriminante des Products $f(x)\,g(x)$ erscheint hiernach (abgesehn vom Zeichen) als das Product der Discriminanten von $f(x)$ und $g(x)$ multiplicirt mit dem Quadrat der Resultante von $f(x)$ und $g(x)$. Wenn $\varDelta$ die Discriminante von $f(x)$ ist, so findet man z. B. für $(x-t)f(x)$ die Discriminante $\varDelta f(t)^2$.

20. Wenn die Discriminante von $f(x)$ nicht verschwindet, so haben $f(x)$ und $f'(x)$ keinen gemeinschaftlichen Divisor (8) und die Wurzeln der Gleichung $f(x) = 0$ sind sämmtlich von einander verschieden.

Wenn die Discriminante von $f(x)$ verschwindet, so haben $f(x)$ und $f'(x)$ einen gemeinschaftlichen Divisor und die Wurzeln der Gleichung $f(x) = 0$ sind nicht alle von einander verschieden. Der gemeinschaftliche Divisor theilt auch die Function $pf(x) + qxf'(x)$, welche aus der gegebenen Function dadurch

---

*) GAUSS Demonstr. nova altera 6 (Comm. Gott. Vol. 3) hatte dieser Formel den Namen »Determinante der Function $f(x)$ oder der Gleichung $f(x) = 0$« beigelegt. Vergl. JOACHIMSTHAL Crelle J. 33 p. 371. JACOBI Crelle J. 40 p. 244. Bei dem jetzigen Sprachgebrauch ist der von SYLVESTER (Philos. Mag. 1851, II p. 406) gebildete Name »Discriminante« bezeichnender.

abgeleitet werden kann, dass man ihre Coefficienten $a_0, a_1, \ldots$ der Reihe nach mit den Gliedern einer beliebigen arithmetischen Progression multiplicirt, und welche vor Erfindung der Differentialrechnung von HUDDE 1657*) zur Bestimmung mehrfacher Wurzeln der Gleichung $f(x) = 0$ gebildet worden ist.

Wenn $f(x)$ und $f'(x)$ den gemeinschaftlichen Divisor t^k haben, und die Discriminante von t nicht verschwindet, so ist $f(x)$ durch t^{k+1} theilbar. Es sei z. B.

$$f(x) = t^k u\,,$$

$$f'(x) = k t^{k-1} t' u + t^k u' = t^k v\,.$$

Wenn nun t' und t einen gemeinschaftlichen Divisor nicht haben, so ist u durch t, also $f(x)$ durch t^{k+1} theilbar.

21. Die Function $f(x)$ kann als ein besonderer Werth der homogenen Function von 2 Variablen und n Dimensionen

$$u = A_0 y^n + \binom{n}{1} A_1 y^{n-1} x + \binom{n}{2} A_2 y^{n-2} x^2 + \ldots + A_n x^n$$

angesehn werden**). Die Binomialcoefficienten sind den Coefficienten der homogenen Function als Factoren beigegeben, damit die durch n getheilten Differentialquotienten von u Coefficienten derselben Art erhalten, und damit u eine $n$te Potenz in dem Falle wird, dass $A_0, A_1, \ldots, A_n$ eine geometrische Progression bilden.

Nach der Fundamentaleigenschaft der homogenen Functionen hat man die Identität

$$nu = x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y}\,.$$

Der gemeinschaftliche Divisor von u und $\frac{1}{n}\frac{\partial u}{\partial x}$ ist also auch ein Divisor von $\frac{1}{n}\frac{\partial u}{\partial y}$. Die unter der Voraussetzung $y = 1$ gebildete Resultante von $\frac{1}{n}\frac{\partial u}{\partial x}$ und $\frac{1}{n}\frac{\partial u}{\partial y}$ ist wie die Discriminante

---

*) HUDDE Epist. I. Reg. 10 in SCHOOTEN's Ausgabe von DESCARTES' Geometrie.

**) Dieses wichtige Hülfsmittel der Analysis ist von NEWTON Arithm. univ. Inventio divisorum p. 43, PLÜCKER System d. anal. Geom. §. 1, 7, HESSE Crelle J. 28 p. 102, JOACHIMSTHAL Crelle J. 33 p. 373, JACOBI Crelle J. 40 p. 247 und Andern, zu dem gegenwärtigen Zweck von SALMON higher plane curves p. 296 angewendet worden.

von $f(x)$ eine homogene ganze Function der Coefficienten $a_0, a_1, .., a_n$ von $2n-2$ Dimensionen und verschwindet zugleich mit der Discriminante von $f(x)$. Daher hat jene Resultante zu dieser Discriminante ein von den Coefficienten $a_0, a_1, ..$ unabhängiges Verhältniss.

In der That, wenn man in der Determinante A (19) jede der letzten $n-2$ Zeilen mit n multiplicirt, und von ihnen der Reihe nach die 2te, 3te, .. Zeile des Systems subtrahirt, so findet man nach Umstellung der $n$ten Zeile

$$\left|\begin{array}{ccccccc} a_1 & 2a_2 & 3a_3 & . & . & & \\ & a_1 & 2a_2 & 3a_3 & . & . & \\ & & . & . & . & . & . \\ na_0 & (n-1)a_1 & (n-2)a_2 & . & . & & \\ & na_0 & (n-1)a_1 & (n-2)a_2 & . & . & \\ & & . & . & . & . & . \end{array}\right|$$

d. i. die Resultante von $f'(x)$ und $nf(x) - xf'(x)$.

Beispiele. Die Discriminante der Function 2ten Grades

$$a_0 + 2a_1x + a_2x^2$$

ist die Resultante von $a_1 + a_2x$ und $a_0 + a_1x$, nämlich

$$a_1^2 - a_0a_2 .$$

Die Discriminante von $a_0 + 3a_1x + 3a_2x^2 + a_3x^3$ ist die Resultante von

$$a_1 + 2a_2x + a_3x^2$$
$$a_0 + 2a_1x + a_2x^2$$

nämlich in der verkürzten Gestalt (12)

$$-\left|\begin{array}{cc} 2(a_1^2 - a_0a_2) & a_1a_2 - a_0a_3 \\ a_1a_2 - a_0a_3 & 2(a_2^2 - a_1a_3) \end{array}\right| .$$

Ebenso findet man die Determinante von

$$a_0 + 4a_1x + 6a_2x^2 + 4a_1x^3 + a_4x^4 ,$$

$$-\left|\begin{array}{ccc} 3(a_1^2 - a_0a_2) & 3(a_1a_2 - a_0a_3) & a_1a_3 - a_0a_4 \\ 3(a_1a_2 - a_0a_3) & 9a_2^2 - 8a_1a_3 - a_0a_4 & 3(a_2a_3 - a_1a_4) \\ a_1a_3 - a_0a_4 & 3(a_2a_3 - a_1a_4) & 3(a_3^2 - a_2a_4) \end{array}\right| .$$

22. Das in der Discriminante von $f(x)$ enthaltene Product aller positiven und negativen Differenzen zwischen den Wurzeln

$\alpha_1, \alpha_2, .., \alpha_n$ der Gleichung $f(x) = 0$ ist der Quotient des bekannten Gliedes durch den Coefficienten des höchsten Gliedes in der geordneten Gleichung, deren Wurzeln die genannten Differenzen sind*).

Um diese Gleichung zu bilden, bemerke man, dass dem System

$$f(x) = 0, \quad f(x+y) = 0$$

genügt wird, indem man für x und $x+y$ alle Wurzeln $\alpha_1, .., \alpha_n$, mithin für y alle Differenzen der Wurzeln, unter denen n verschwinden, und für x den jedesmaligen Subtrahenden setzt. Dabei verschwindet die Resultante R der beiden durch $f(x)$ und $f(x+y)$ bezeichneten Functionen von x (8). Also ist R durch y^n theilbar, und $R : y^n = 0$ die Gleichung, deren Wurzeln die Differenzen zwischen jeder der Grössen $\alpha_1, .., \alpha_n$ und den übrigen Grössen dieser Reihe sind. Diese Differenzen sind aber paarweise entgegengesetzt gleich, also kommen in $R : y^n$ nur gerade Potenzen von y vor.

Unmittelbar findet man die von den verschwindenden Wurzeln befreite Gleichung, indem man**) von dem System

$$\text{(I)} \qquad f(u+v) = 0, \quad f(u-v) = 0$$

ausgeht, welchem durch die Werthe

$$2u = \alpha_i + \alpha_k, \quad 2v = \alpha_i - \alpha_k$$

genügt wird. Dieselben Auflösungen hat das System

$$\text{(II)} \qquad \frac{f(u+v) + f(u-v)}{2} = 0, \quad \frac{f(u+v) - f(u-v)}{2} = 0,$$

dessen erste Gleichung nur gerade, und dessen zweite Gleichung nur ungerade Potenzen von v enthält. Weil $f(u+v) - f(u-v)$ durch v theilbar ist, so umfasst das System (II) die beiden Systeme

*) Diese unter dem Namen »équation aux carrés des différences« bekannte Gleichung ist von WARING Misc. analyt. 1762 p. 17 mit Hülfe von symmetrischen Functionen der Grössen $\alpha_1, \alpha_2, ..$ construirt und zur Untersuchung der Wurzeln einer gegebenen Gleichung gebraucht worden. Besondere Ausführungen für die Gleichungen 4ten und 5ten Grades hat WARING in den Philos. Transact. 1763 p. 294 mitgetheilt. Die Ableitung der erwähnten Gleichung durch Elimination wurde von EULER Calc. diff. II, §. 244 gezeigt, und ausführlich von LAGRANGE (Mém. de Berlin 1767 p. 311 art. 8. Résolution des équat. art. 8 und Note 3) behandelt.

**) Nach BORCHARDT's Angabe.

$$\text{(III)} \qquad \frac{f(u+v)+f(u-v)}{2} = 0 \,, \qquad v = 0$$

und

$$\text{(IV)} \qquad \frac{f(u+v)+f(u-v)}{2} = 0 \,, \qquad \frac{f(u+v)-f(u-v)}{2v} = 0 \,.$$

Dem System (IV) wird durch die Werthe

$$2u = \alpha_i + \alpha_k \,, \qquad 2v = \alpha_i - \alpha_k$$

unter der Beschränkung genügt, dass i und k verschiedene Zahlen der Reihe $1, 2, .., n$ bedeuten. Bildet man nun die Resultanten $\psi(v^2)$ und $\chi(u)$ der Functionen

$$\frac{f(u+v)+f(u-v)}{2} \quad \text{und} \quad \frac{f(u+v)-f(u-v)}{2v} \,,$$

jene in Bezug auf die Variable u, diese in Bezug auf v^2, so ist

$$\psi(v^2) = 0 \,, \quad \text{wenn } v^2 = \frac{1}{4}(\alpha_i - \alpha_k)^2 \,,$$

$$\chi(u) = 0 \,, \quad \text{wenn } u = \frac{1}{2}(\alpha_i + \alpha_k) \,.$$

§. 12. Die Functionaldeterminanten.

1. Wenn $y_1, .., y_n$ Functionen der Variablen $x_1, .., x_n$ sind, so besteht für die Differentiale das lineare System

$$dy_1 = \frac{\partial y_1}{\partial x_1} dx_1 + \,.\,.\, + \frac{\partial y_1}{\partial x_n} dx_n$$

$$. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$

$$dy_n = \frac{\partial y_n}{\partial x_1} dx_1 + \,.\,.\, + \frac{\partial y_n}{\partial x_n} dx_n$$

Die Determinante desselben (§. 8, 1) $\Sigma \pm \frac{\partial y_1}{\partial x_1} \,.\,.\, \frac{\partial y_n}{\partial x_n}$ heisst die Functionaldeterminante der Functionen $y_1, .., y_n$ in Bezug auf die Variablen $x_1, .., x_n$ *) und wird wie ein partialer Differentialquotient auch durch

*) Jacobi de determ. functionalibus (Crelle J. 22 p. 319) §. 5. Mehrere unter den hierher gehörigen Sätzen hatte Jacobi in frühern Abhandlungen, namentlich Crelle J. 12 p. 38 ff. gegeben.

$$\frac{\partial(y_1, \ldots, y_n)}{\partial(x_1, \ldots, x_n)}$$

bezeichnet*). Wenn die Functionaldeterminante nicht verschwindet, so können die Differentiale dx durch die Differentiale dy ausgedrückt werden. Man findet aus dem angezeigten linearen System

$$\Delta\, dx_k = \Delta_{1k} dy_1 + \ldots + \Delta_{nk} dy_n$$

indem man durch Δ die Functionaldeterminante, durch Δ_{ik} den Coefficienten von $\frac{\partial y_i}{\partial x_k}$ in Δ bezeichnet.

Wenn die Grössen $y_1, \ldots, y_n$ nicht unabhängig von einander, sondern durch die Gleichung $\varphi(y_1, \ldots, y_n) = 0$ verbunden sind, so verschwindet die Functionaldeterminante der y in Bezug auf die x identisch, d. h. bei beliebigen Werthen der x**). Denn die Determinante

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y_i} \Sigma \pm \frac{\partial y_1}{\partial x_1} \ldots \frac{\partial y_n}{\partial x_n}$$

enthält zufolge der Gleichungen ($k = 1, 2, \ldots, n$)

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y_1} \frac{\partial y_1}{\partial x_k} + \ldots + \frac{\partial \varphi}{\partial y_n} \frac{\partial y_n}{\partial x_k} = 0$$

eine Colonne verschwindender Elemente (§. 3, 6).

2. Wenn die Grössen y explicite gegebene Functionen der Grössen x sind

$$y_1 = f_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, y_n = f_n(x_1, \ldots, x_n)$$

so kann der Differentialquotient von y_i in Bezug auf x_k, also auch die Functionaldeterminante unmittelbar gebildet werden.

Wenn insbesondere f_2 die Variable x_1 nicht enthält, wenn f_3 die Variablen x_1, x_2 nicht enthält, wenn überhaupt f_i die Variablen $x_1, \ldots, x_{i-1}$ nicht enthält, so erscheint die Functionaldeterminante in Form eines Products, weil von ihr nur das Anfangsglied übrig bleibt (§. 2, 7).

Wenn die Grössen y gebrochene Functionen mit demselben Nenner sind, z. B.***)

---

*) Donkin Philos. Trans. 1854, I p. 72.

**) Jacobi det. funct. §. 6.

***) Jacobi Crelle J. 12 p. 40.

$$y_i = \frac{u_i}{u}$$

so ist $u^2 \frac{\partial y_i}{\partial x_k} = u \frac{\partial u_i}{\partial x_k} - u_i \frac{\partial u}{\partial x_k}$, folglich

$$u^{2n+1} \Sigma \pm \frac{\partial y_1}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial y_n}{\partial x_n} = \begin{vmatrix} u & u\frac{\partial u}{\partial x_1} - u\frac{\partial u}{\partial x_1} & \cdots & u\frac{\partial u}{\partial x_n} - u\frac{\partial u}{\partial x_n} \\ u_1 & u\frac{\partial u_1}{\partial x_1} - u_1\frac{\partial u}{\partial x_1} & \cdots & u\frac{\partial u_1}{\partial x_1} - u_1\frac{\partial u}{\partial x_n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ u_n & u\frac{\partial u_n}{\partial x_1} - u_n\frac{\partial u}{\partial x_1} & \cdots & u\frac{\partial u_n}{\partial x_n} - u_n\frac{\partial u}{\partial x_n} \end{vmatrix}$$

$$\Sigma \pm \frac{\partial y_1}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial y_n}{\partial x_n} = \frac{1}{u^{n+1}} \begin{vmatrix} u & \frac{\partial u}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial u}{\partial x_n} \\ u_1 & \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial u_1}{\partial x_n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ u_n & \frac{\partial u_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial u_n}{\partial x_n} \end{vmatrix}$$

und durch die Substitution $u_i = \frac{v_i}{t}$ findet man

$$\begin{vmatrix} u & \frac{\partial u}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial u}{\partial x_n} \\ u_1 & \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial u_1}{\partial x_n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ u_n & \frac{\partial u_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial u_n}{\partial x_n} \end{vmatrix} = \frac{1}{t^{n+1}} \begin{vmatrix} v & \frac{\partial v}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial v}{\partial x_n} \\ v_1 & \frac{\partial v_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial v_1}{\partial x_n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ v_n & \frac{\partial v_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial v_n}{\partial x_n} \end{vmatrix}$$

unabhängig von den Differentialen der Function t.

3. Wenn die Grössen y implicite gegebene Functionen der Grössen x sind zufolge des Systems von n Gleichungen

$$F_1(y_1, \ldots, y_n, x_1, \ldots, x_n) = 0, \ldots, F_n(y_1, \ldots, y_n, x_1, \ldots, x_n) = 0$$

so ist*)

$$\Sigma \pm \frac{\partial y_1}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial y_n}{\partial x_n} = (-1)^n \frac{\Sigma \pm \frac{\partial F_1}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial F_n}{\partial x_n}}{\Sigma \pm \frac{\partial F_1}{\partial y_1} \cdots \frac{\partial F_n}{\partial y_n}}$$

*) Jacobi det. funct. §. 10 und 18.

Beweis. Zufolge der Voraussetzungen hat man

$$\frac{\partial F_i}{\partial y_1} dy_1 + \dots + \frac{\partial F_i}{\partial y_n} dy_n + \frac{\partial F_i}{\partial x_1} dx_1 + \dots + \frac{\partial F_i}{\partial x_n} dx_n = 0 ,$$

$$dy_r = \frac{\partial y_r}{\partial x_1} dx_1 + \dots + \frac{\partial y_r}{\partial x_n} dx_n .$$

Wenn nun unter den Variablen x nur x_k sich ändert, so ist

$$\frac{\partial F_i}{\partial y_1}\frac{\partial y_1}{\partial x_k} + \dots + \frac{\partial F_i}{\partial y_n}\frac{\partial y_n}{\partial x_k} + \frac{\partial F_i}{\partial x_k} = 0 ,$$

$$-\frac{\partial F_i}{\partial x_k} = \frac{\partial F_i}{\partial y_1}\frac{\partial y_1}{\partial x_k} + \dots + \frac{\partial F_i}{\partial y_n}\frac{\partial y_n}{\partial x_k}$$

folglich (§. 5, 1)

$$(-1)^n \Sigma \pm \frac{\partial F_1}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial F_n}{\partial x_n} = \Sigma \pm \frac{\partial F_1}{\partial y_1} \cdots \frac{\partial F_n}{\partial y_n} \Sigma \pm \frac{\partial y_1}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial y_n}{\partial x_k}$$

Anmerkung. Wenn die Grössen F_1, F_2, .. so beschaffen sind, dass F_i die Variablen $x_1, \dots, x_{i-1}$ nicht enthält, so ist

$$\Sigma \pm \frac{\partial F_1}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial F_n}{\partial x_n} = \frac{\partial F_1}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial F_n}{\partial x_n}$$

das Product der in der Diagonale stehenden Elemente (2).

Wenn die Grössen F_1, F_2, .. so beschaffen sind, dass

$$F_i = -y_i + f_i(x_1, \dots, x_n)$$

so ist

$$\Sigma \pm \frac{\partial F_1}{\partial y_1} \cdots \frac{\partial F_n}{\partial y_n} = (-1)^n$$

$$\Sigma \pm \frac{\partial y_1}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial y_n}{\partial x_n} = \Sigma \pm \frac{\partial F_1}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial F_n}{\partial x_n} = \Sigma \pm \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial f_n}{\partial x_n}$$

Und wenn man aus dem gegebenen System $F_1 = 0, \dots, F_n = 0$ das System

$$\begin{aligned} y_1 &= \varphi_1(x_1, \dots) \\ y_2 &= \varphi_2(y_1, x_2, \dots) \\ y_3 &= \varphi_3(y_1, y_2, x_3, \dots) \\ &\dots\dots\dots \\ y_n &= \varphi_n(y_1, \dots, y_{n-1}, x_n) \end{aligned}$$

abgeleitet hätte, so erhielte man die Functionaldeterminante der Grössen y in Bezug auf die Variablen x in Form des Products

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_n} .$$

In der That ist die Determinante

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} & \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_2} & \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_3} & . \\ 0 & \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_2} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_3} & . \\ 0 & 0 & \frac{\partial \varphi_3}{\partial x_3} & . \\ . & . & . & \end{vmatrix}$$

das Product der Determinanten

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & . \\ -\frac{\partial \varphi_2}{\partial y_1} & 1 & 0 & . \\ -\frac{\partial \varphi_3}{\partial y_1} & -\frac{\partial \varphi_3}{\partial y_2} & 1 & . \\ . & . & . & \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \frac{\partial y_1}{\partial x_2} & \frac{\partial y_1}{\partial y_3} & . \\ \frac{\partial y_2}{\partial x_1} & \frac{\partial y_2}{\partial x_2} & \frac{\partial y_2}{\partial x_3} & . \\ \frac{\partial y_3}{\partial x_1} & \frac{\partial y_3}{\partial x_2} & \frac{\partial y_3}{\partial x_3} & . \\ . & . & . & \end{vmatrix}$$

zufolge der Identität

$$-\frac{\partial \varphi_i}{\partial y_1}\frac{\partial y_1}{\partial x_k} - \ldots - \frac{\partial \varphi_i}{\partial y_{i-1}}\frac{\partial y_{i-1}}{\partial x_k} + \frac{\partial y_i}{\partial x_k} = \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_k}.$$

4. Wenn $m < n$ und zufolge des Systems von n Gleichungen

$$F_1(y_1, \ldots, y_n, x_1, \ldots, x_m) = 0, \ldots, F_n(y_1, \ldots, y_n, x_1, \ldots, x_m) = 0$$

die Grössen y implicite gegebene Functionen der Grössen x sind, so ist*)

$$\Sigma \pm \frac{\partial y_1}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial y_m}{\partial x_m} = (-1)^m \frac{\Sigma \pm \frac{\partial F_1}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial F_m}{\partial x_m} \frac{\partial F_{m+1}}{\partial y_{m+1}} \cdots \frac{\partial F_n}{\partial y_n}}{\Sigma \pm \frac{\partial F_1}{\partial y_1} \cdots \frac{\partial F_n}{\partial y_n}}$$

Beweis. Die Determinante

$$(-1)^m \begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial x_m} & \frac{\partial F_1}{\partial y_{m+1}} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial y_n} \\ . & \ldots & . & . & \ldots & . \\ \frac{\partial F_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial F_n}{\partial x_m} & \frac{\partial F_n}{\partial y_{m+1}} & \cdots & \frac{\partial F_n}{\partial y_n} \end{vmatrix}$$

ist das Product der Determinanten

*) Jacobi det. funct. §. 13.

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1} & \cdot & \cdot & \frac{\partial F_1}{\partial y_n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial F_n}{\partial y_1} & \cdot & \cdot & \frac{\partial F_n}{\partial y_n} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \cdot & \cdot & \frac{\partial y_1}{\partial x_m} & \frac{\partial y_1}{\partial y_{m+1}} & \cdot & \cdot & \frac{\partial y_1}{\partial y_n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial y_n}{\partial x_1} & \cdot & \cdot & \frac{\partial y_n}{\partial x_m} & \frac{\partial y_n}{\partial y_{m+1}} & \cdot & \cdot & \frac{\partial y_n}{\partial y_n} \end{vmatrix}$$

weil nach (3) bei $k = 1, 2, .., m$

$$\frac{\partial F_i}{\partial y_1}\frac{\partial y_1}{\partial x_k} + \ldots + \frac{\partial F_i}{\partial y_n}\frac{\partial y_n}{\partial x_k} = -\frac{\partial F_i}{\partial x_k}$$

und bei $k = m+1, .., n$

$$\frac{\partial F_i}{\partial y_1}\frac{\partial y_1}{\partial y_k} + \ldots + \frac{\partial F_i}{\partial y_n}\frac{\partial y_n}{\partial y_k} = \frac{\partial F_i}{\partial y_k}\,.$$

Der zweite Factor ist von $\Sigma \pm \frac{\partial y_1}{\partial x_1} \cdot\cdot \frac{\partial y_m}{\partial x_m}$ nicht verschieden (§. 2, 5).

Insbesondre ist bei $m = 1$

$$\frac{\partial y_1}{\partial x_1} = -\frac{\Sigma \pm \frac{\partial F_1}{\partial x_1}\frac{\partial F_2}{\partial y_2} \cdot\cdot \frac{\partial F_n}{\partial y_n}}{\Sigma \pm \frac{\partial F_1}{\partial y_1} \cdot\cdot \frac{\partial F_n}{\partial y_n}}$$

5. Wenn $z_1, .., z_m$ gegebene Functionen der Grössen $y_1, .., y_n$, und diese wiederum gegebene Functionen der Grössen $x_1, .., x_m$ sind, so findet man die Functionaldeterminante der Grössen z in Bezug auf die Grössen x *) bei $m < n$

$$\Sigma \pm \frac{\partial y_1}{\partial x_1} \cdot\cdot \frac{\partial y_m}{\partial x_m} = \sum_{tuv..}\left(\Sigma \pm \frac{\partial z_1}{\partial y_t}\frac{\partial z_2}{\partial y_u}\frac{\partial z_3}{\partial y_v} \cdot\cdot \Sigma \pm \frac{\partial y_t}{\partial x_1}\frac{\partial y_u}{\partial x_2}\frac{\partial y_v}{\partial x_3} \cdot\cdot\right)$$

eine Summe, deren Glieder dadurch gebildet werden, dass man für $tuv..$ alle Combinationen von je m verschiedenen Numern der Reihe 1 bis n setzt. Bei $m = n$ ist

$$\Sigma \pm \frac{\partial z_1}{\partial x_1} \cdot\cdot \frac{\partial z_n}{\partial x_n} = \Sigma \pm \frac{\partial z_1}{\partial y_1} \cdot\cdot \frac{\partial z_n}{\partial y_n}\, \Sigma \pm \frac{\partial y_1}{\partial x_1} \cdot\cdot \frac{\partial y_n}{\partial x_n}$$

$$\frac{\partial(z_1, .., z_n)}{\partial(x_1, .., x_n)} = \frac{\partial(z_1, .., z_n)}{\partial(y_1, .., y_n)}\,\frac{\partial(y_1, .., y_n)}{\partial(x_1, .., x_n)}$$

Unter der Voraussetzung $m > n$ verschwindet die Functionaldeterminante identisch d. h. bei beliebigen Werthen der Variablen x. Alles dieses folgt nach §. 5, 1 aus der Voraussetzung

*) Jacobi det. funct. §. 11.

$$\frac{\partial z_i}{\partial x_k} = \frac{\partial z_i}{\partial y_1}\frac{\partial y_1}{\partial x_k} + \cdot\cdot + \frac{\partial z_i}{\partial y_n}\frac{\partial y_n}{\partial x_k}.$$

6. Dass eine gegebene Function $f_0(x_1, \dots, x_n)$ durch weniger als n von einander unabhängige Variable ausdrückbar sei, erkennt man nach Einführung von neuen von einander unabhängigen Variablen

$$y_1 = f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, y_n = f_n(x_1, \dots, x_n)$$

daran, dass unter den Differentialquotienten der transformirten Function in Bezug auf $y_1, \dots, y_n$ einer oder mehrere verschwinden.

Wenn die partialen Functionaldeterminanten $(m+1)$ten Grades, welche aus dem System der Differentialquotienten von $f_0, f_1, \dots, f_m$ in Bezug auf $x_1, \dots, x_n$

$$\begin{matrix} f_{01} & \cdot\cdot & f_{0n} \\ f_{11} & \cdot\cdot & f_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ f_{m1} & \cdot\cdot & f_{mn} \end{matrix}$$

durch Auswahl von $m+1$ Colonnen gebildet werden können, alle identisch verschwinden, so ist die transformirte Function von den Grössen $y_{m+1}, \dots, y_n$ unabhängig und in Wahrheit von nicht mehr als m Variablen abhängig*).

Beweis. Nach der Voraussetzung ist die Functionaldeterminante der y in Bezug auf die x

$$\Delta = \Sigma \pm f_{11} \cdot\cdot f_{nn} = f_{i1}\Delta_{i1} + \cdot\cdot + f_{in}\Delta_{in}$$

von Null verschieden (1). Durch die Substitution

$$dx_k = \frac{1}{\Delta}\sum_h \Delta_{hk}\, dy_h$$

findet man

$$df_0 = \sum_k f_{0k}\, dx_k = \frac{1}{\Delta}\sum_{kh} f_{0k}\Delta_{hk}\, dy_h$$

Der Differentialquotient der transformirten Function f_0 in Bezug auf y_h wird demnach gefunden, indem man durch Δ die Summe

$$f_{01}\Delta_{h1} + \cdot\cdot + f_{0n}\Delta_{hn}$$

dividirt d. i. die Determinante $n$ten Grades, welche aus Δ abge-

*) Der Jacobi'sche Satz (det. funct. §. 7) ist auf diese Weise von Kronecker erweitert und genauer gefasst worden. Briefl. Mittheilung 1869 März 11.

leitet wird, indem man f_λ durch f_0 ersetzt. Wenn man nun in $\varDelta$ der Reihe nach $f_{m+1}, .., f_n$ durch f_0 ersetzt, so verschwinden identisch die abgeleitete Determinante und jener Differentialquotient, weil die aus $m+1$ bestimmten Zeilen des Systems und je $m+1$ Colonnen desselben zu bildenden partialen Determinanten nach der Voraussetzung sämmtlich identisch verschwinden (§. 4, 4).

Wäre aber unter diesen partialen Determinanten $(m+1)$ten Grades eine von Null verschieden, so könnten die Determinante $n$ten Grades und der von ihr abhängige Differentialquotient nicht identisch verschwinden, in Betracht dass $f_{m+1}, .., f_n$ insoweit verfügbar bleiben, als nicht die Functionaldeterminante $\varDelta$ identisch verschwindet.

7. Besondere Fälle. Wenn die Functionen $f_1, .., f_n$ linear sind, so ist die Functionaldeterminante von der Determinante der Coefficienten nicht verschieden (§. 8). Bei dem Verschwinden dieser Determinante sind die Functionen durch eine Gleichung von der Form

$$\alpha_{1i}f_1 + \alpha_{2i}f_2 + .. + \alpha_{ni}f_n = 0$$

unter einander verbunden und jede von ihnen durch $n-1$ Grössen ausdrückbar.

Wenn die Functionen $f_1, .., f_n$ die partialen Differentialquotienten einer gegebenen Function F sind, so ist die Functionaldeterminante gleichbedeutend mit der von Hesse (Crelle J. 28 p. 83) aus den zweiten partialen Differentialquotienten von F gebildeten Determinante, welcher Sylvester (Cambr. and Dublin math. J. 6 p. 186) den Namen »Hessian of F« gegeben hat. Diese Functionaldeterminante verschwindet identisch, sobald die Differentialquotienten durch eine bei beliebigen Werthen der Variablen gültige Gleichung verbunden sind (1). Wenn die Differentialquotienten durch eine Gleichung von der Art

$$c_1 f_1 + c_2 f_2 + .. + c_n f_n = 0$$

verbunden sind, in welcher $c_1, .., c_n$ Constanten bedeuten, so geht die Function F durch die lineare Substitution

$$\begin{aligned} x_1 &= y_1 + c_1 y_n \\ &\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ x_{n-1} &= y_{n-1} + c_{n-1} y_n \\ x_n &= c_n y_n \end{aligned}$$

in eine Function der $n-1$ Variablen $y_1, \ldots, y_{n-1}$ über, weil

$$\frac{\partial F}{\partial y_n} = f_1 \frac{\partial x_1}{\partial y_n} + \ldots + f_n \frac{\partial x_n}{\partial y_n} = c_1 f_1 + \ldots + c_n f_n = 0 \text{ *)}.$$

Wenn die Function F eine quadratische Form ist d. h. eine ganze homogene Function der Variablen von 2 Dimensionen, so sind ihre Differentialquotienten $f_1, \ldots, f_n$ linear und die mit -1 multiplicirte Functionaldeterminante derselben wird die Determinante der Form genannt. Wenn die Determinante der Form verschwindet, so sind $f_1, \ldots, f_n$ durch eine Gleichung von der Art

$$c_1 f_1 + \ldots + c_n f_n = 0$$

verbunden bei beliebigen Werthen der Variablen $x_1, \ldots, x_n$, und die Form F ist in Wahrheit eine quadratische Form von weniger als n Variablen **).

Beispiel

$$F = x^2 + 4y^2 - 2z^2 + 2yz + xz - 5xy$$

$$\begin{aligned} f_x &= 2x - 5y + z \\ f_y &= -5x + 8y + 2z \\ f_z &= x + 2y - 4z \end{aligned}$$

Die Determinante der Form F verschwindet und man hat

$$2f_x + f_y + f_z = 0 \, .$$

Durch Einführung der neuen Variablen

$$\begin{array}{lclcl} x - 2z & \text{oder} & x - 2y & \text{oder} & x - x \\ y - z & & y - y & & y - \frac{1}{2}x \\ z - z & & z - y & & z - \frac{1}{2}x \end{array}$$

findet man

$$\begin{aligned} F &= (x - 2z)^2 + 4(y - z)^2 - 5(x - 2z)(y - z) \\ &= (x - 2y)^2 - 2(z - y)^2 + (x - 2y)(z - y) \\ &= 4(y - \tfrac{1}{2}x)^2 - 2(z - \tfrac{1}{2}x)^2 + 2(y - \tfrac{1}{2}x)(z - \tfrac{1}{2}x) \\ &= (x - y - z)(x - 4y + 2z) \, . \end{aligned}$$

8. Wenn die Function $F(y_1, \ldots, y_n)$ nach Einführung der Variablen $x_1, \ldots, x_n$, von welchen $y_1, \ldots, y_n$ in gegebener Weise abhängen, durch $G(x_1, \ldots, x_n)$ ausgedrückt wird, so wird das

---

*) Vergl. Hesse Crelle J. 42 p. 117. 56 p. 263.

**) Gauss Disq. arithm. 154. 215. 267.

zwischen bestimmten endlichen Grenzen genommene $n$fache Integral $J = \int F(y_1, \ldots, y_n)\, dy_1 \ldots dy_n$ durch

$$\int G(x_1, \ldots, x_n) \Sigma \pm \frac{\partial y_1}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial y_n}{\partial x_n} dx_1 \ldots dx_n$$

ausgedrückt. Dabei wird vorausgesetzt, dass jedem System von Werthen der y ein System von Werthen der x eindeutig entspricht; dass die entsprechenden Differentiale gleiche Zeichen erhalten; dass die Grenzen der Integrationen in Bezug auf die x entsprechend den gegebenen Grenzen der Integrationen in Bezug auf die y gezogen werden*).

Beweis. Die Reihenfolge der Integrationen ist beliebig. Wenn man mit der Integration in Bezug auf y_n beginnt, und

$$y_n = \varphi_n(y_1, \ldots, y_{n-1}, x_n)$$

setzt, so hat man dy_n durch $\frac{\partial \varphi_n}{\partial x_n} dx_n$ zu ersetzen, weil $y_1, \ldots, y_{n-1}$ unverändert bleiben, und findet

$$J = \int F(y_1, \ldots, y_{n-1}, \varphi_n) \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_n} dy_1 \ldots dy_{n-1}\, dx_n .$$

Wenn man die Entwickelung dieses Integrals mit der Integration in Bezug auf y_{n-1} beginnt und

$$y_{n-1} = \varphi_{n-1}(y_1, \ldots, y_{n-2}, x_{n-1}, x_n)$$

setzt, so hat man dy_{n-1} durch $\frac{\partial \varphi_{n-1}}{\partial x_{n-1}} dx_{n-1}$ zu ersetzen, weil $y_1, \ldots, y_{n-2}, x_n$ unverändert bleiben, und findet

$$J = \int F(y_1, \ldots, y_{n-2}, \varphi_{n-1}, \varphi_n) \frac{\partial \varphi_{n-1}}{d x_{n-1}} \frac{\partial \varphi_n}{d x_n} dy_1 \ldots dy_{n-2}\, dx_{n-1}\, dx_n .$$

Indem man so fortfährt, erhält man endlich

$$J = \int F(\varphi_1, \ldots, \varphi_n) \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_n} dx_1 \ldots dx_n .$$

*) Die Transformation eines zweifachen Integrals ist zuerst von Euler 1759 Nov. Comm. Petrop. 14, I p. 72 (Calc. integr. IV p. 416) gezeigt worden. Bald darauf hat Lagrange Mém. de l'Acad. de Berlin 1773 p. 125 die Transformation eines dreifachen Integrals ausgeführt. Der allgemeine Ausdruck des transformirten vielfachen Integrals rührt von Jacobi her (Crelle J. 12 p. 38, det. funct. §. 19). Denselben Ausdruck hat später Catalan gefunden. Mem. cour. p. l'acad. de Bruxelles t. 14 (1840). Vergl. Bull. de l'acad. de Belgique t. 13, 6.

Das Product der hinzutretenden Differentialquotienten ist der Functionaldeterminante der Grössen y in Bezug auf die Grössen x gleich, wie auch der Zusammenhang jener mit diesen gegeben sei (3).

9. Zu derselben Regel gelangt man unmittelbar durch Verfolgung des Weges, den Lagrange (l. c.) bei der Transformation eines dreifachen Integrals eingeschlagen hat*).

Wenn $f_1, f_2, .., f_n$ Functionen der Variablen $x_1, x_2, .., x_n$ sind, und durch f_{ik} der Differentialquotient von f_i in Bezug auf x_k bezeichnet wird, so besteht das System von linearen Gleichungen

$$\begin{aligned} df_1 &= f_{11}\,dx_1 + f_{12}\,dx_2 + .. + f_{1n}\,dx_n \\ &\cdots \\ df_n &= f_{n1}\,dx_1 + f_{n2}\,dx_2 + .. + f_{nn}\,dx_n\,. \end{aligned}$$

Durch Auflösung desselben erhält man (4)

$$\Delta_{1k}\,df_1 + .. + \Delta_{nk}\,df_n = R_n\,dx_k$$

wenn $R_n = \Sigma \pm f_{11} .. f_{nn}$ und Δ_{ik} den Coefficienten von f_{ik} in R_n bedeutet, so dass insbesondere $\Delta_{nn} = R_{n-1}$ ist. Es sei nun U eine gegebene Function von $f_1, .., f_n$ und

$$\int U\,df_1\,df_2 \,..\, df_n$$

das zu bildende vielfache Integral.

Wenn man die Reihe der auszuführenden Integrationen mit der Integration in Bezug auf f_n eröffnet, so hat man die Summe der Differentiale $U\,df_n$ unter der Bedingung zu suchen, dass $f_1, f_2, .., f_{n-1}$ unverändert bleiben. Unter dieser Bedingung ist in dem obigen System von linearen Gleichungen

$$df_1 = 0,\ df_2 = 0, .., df_{n-1} = 0,$$

folglich

$$R_{n-1}\,df_n = R_n\,dx_n\,,$$

so dass man df_n durch $\frac{R_n}{R_{n-1}}\,dx_n$ ersetzen kann. Folglich ist

$$\int U\,df_1 \,..\, df_n = \int U\,\frac{R_n}{R_{n-1}}\,df_1 \,..\, df_{n-1}\,dx_n\,,$$

*) Vergl. Catalan l. c. Moigno Leçons II p. 223.

wenn die Grenzen von x_n nach den gegebenen Grenzen von f_n bestimmt werden. Indem man die Entwickelung des so transformirten Integrals mit der Integration in Bezug auf die Variable f_{n-1} beginnt, hat man die Summe der Differentiale $U\frac{R_n}{R_{n-1}}\,df_{n-1}$ zu suchen, während $f_1, f_2, .., f_{n-2}, x_n$ unverändert bleiben. Unter dieser Voraussetzung hat man aber

$$df_1 = 0, .., df_{n-2} = 0, \quad dx_n = 0,$$

mithin folgendes System von $n-1$ linearen Gleichungen:

$$\begin{aligned}
0 &= f_{11}\,dx_1 + .. + f_{1,n-1}\,dx_{n-1} \\
&\cdots\cdots\cdots \\
0 &= f_{n-2,1}\,dx_1 + .. + f_{n-2,n-1}\,dx_{n-1} \\
df_{n-1} &= f_{n-1,1}\,dx_1 + .. + f_{n-1,n-1}\,dx_{n-1}.
\end{aligned}$$

Hieraus ergiebt sich wie oben

$$R_{n-2}\,df_{n-1} = R_{n-1}\,dx_{n-1},$$

so dass man df_{n-1} durch $\frac{R_{n-1}}{R_{n-2}}\,dx_{n-1}$ und $U\frac{R_n}{R_{n-1}}\,df_{n-1}$ durch $U\frac{R_n}{R_{n-2}}\,dx_{n-1}$ ersetzen kann. Daher ist bei der erforderlichen Begrenzung

$$\int U\frac{R_n}{R_{n-1}}\,df_1 .. df_{n-1}\,dx_n = \int U\frac{R_n}{R_{n-2}}\,df_1 .. df_{n-2}\,dx_{n-1}\,dx_n.$$

Der gefundene Ausdruck für das gesuchte vielfache Integral lässt sich durch analoge Betrachtungen transformiren, indem man zufolge eines Systems von $n-2$ linearen Gleichungen df_{n-2} durch $\frac{R_{n-2}}{R_{n-3}}\,dx_{n-2}$ ersetzt, wodurch

$$\int U\frac{R_n}{R_{n-2}}\,df_1 .. df_{n-2}\,dx_{n-1}\,dx_n$$

$$= \int U\frac{R_n}{R_{n-3}}\,df_1 .. df_{n-3}\,dx_{n-2}\,dx_{n-1}\,dx_n$$

wird, u. s. w. Endlich findet man auf demselben Wege

$$\int U\frac{R_n}{R_1}\,df_1\,dx_2 .. dx_n = \int U R_n\,dx_1\,dx_2 .. dx_n,$$

indem man zuerst in Bezug auf f_1 integrirend vermöge der Bedingungen

$$dx_2 = 0\,,\quad dx_3 = 0\,,\ldots,\quad dx_n = 0$$

das Differential df_1 durch $\frac{\partial f_1}{\partial x_1}\,dx_1$ d. i. $R_1\,dx_1$ ersetzt.

10. Die Krümmung, welche eine gegebene Fläche in einem ihrer Puncte hat (curvatura localis im Gegensatz zu integra), wird nach Gauss*) durch eine Functionaldeterminante gemessen, die bei den verschiedenen Methoden, die Flächenpuncte zu bestimmen, in verschiedenen Gestalten auftritt.

Der gegebenen Fläche wird von Gauss eine Kugel beigeordnet, deren Centrum im Anfang der orthogonalen Coordinaten liegt und deren Radius eine Längeneinheit ist, so dass dem Flächenpunct (x, y, z) derjenige Kugelpunct (X, Y, Z) entspricht, dessen Radius mit der Normale des Flächenpunctes einerlei Richtung hat. Einem Flächenelement in der Nähe des Punctes (x, y, z) entspricht demnach ein paralleles Kugelelement in der Nähe des Punctes (X, Y, Z). Das Verhältniss dieses Kugelelementes zu jenem Flächenelement ist das Mass der Krümmung der Fläche in dem Puncte (x, y, z). Dasselbe Verhältniss haben die Projectionen der beiden parallelen Flächenelemente auf die Ebene xy. Die Fläche des Dreiecks der Puncte

$$(x, y, z)\,,\quad (x+dx\,, y+dy\,, z+dz)\,,\quad (x+\delta x\,, y+\delta y\,, z+\delta z)$$

hat (vergl. unten §. 15) die Projection $\frac{1}{2}(dx\,\delta y - \delta x\,\delta y)$, während die Fläche des entsprechenden Dreiecks die Projection $\frac{1}{2}(dX\,\delta Y - \delta X\,dY)$ hat. Daher ist die Krümmung der Fläche in dem Punct (x, y, z)

$$k = \frac{dX\,\delta Y - \delta X\,dY}{dx\,\delta y - \delta x\,dy}$$

Nun sind X, Y wie z bestimmte Functionen von x, y, d. h.

$$dX = \frac{\partial X}{\partial x}\,dx + \frac{\partial X}{\partial y}\,dy$$

u. s. w., folglich (§. 5, 1)

$$\begin{vmatrix} dX & \delta X \\ dY & \delta Y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial X}{\partial x} & \frac{\partial X}{\partial y} \\ \frac{\partial Y}{\partial x} & \frac{\partial Y}{\partial y} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} dx & \delta x \\ dy & \delta y \end{vmatrix}$$

*) Disq. generales circa superf. curvas 1827 (Comm. rec. Gott. VI). Die hier gegebene Form der Rechnung ist in einem Aufsatz des Verf. (Leipz. Berichte 1866 p. 1) enthalten.

$$k = \frac{\partial X}{\partial x}\frac{\partial Y}{\partial y} - \frac{\partial X}{\partial y}\frac{\partial Y}{\partial x}$$

die Functionaldeterminante von X, Y in Bezug auf x, y.

11. Wenn z eine gegebene Function von x, y ist und ihre Differentialquotienten in Bezug auf x, y durch p, q, r, s, t nach Euler bezeichnet werden, so hat man

$$dz = pdx + qdy\,, \quad dp = rdx + sdy\,, \quad dq = sdx + tdy$$

$$X : Y : Z : 1 = p : q : -1 : \sqrt{p^2 + q^2 + 1}\,.$$

Nun ist (5)

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial X}{\partial x} & \frac{\partial X}{\partial y} \\ \frac{\partial Y}{\partial x} & \frac{\partial Y}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial X}{\partial p} & \frac{\partial X}{\partial q} \\ \frac{\partial Y}{\partial p} & \frac{\partial Y}{\partial q} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \frac{\partial p}{\partial x} & \frac{\partial p}{\partial y} \\ \frac{\partial q}{\partial x} & \frac{\partial q}{\partial y} \end{vmatrix}$$

und in Folge der Werthe

$$X = \frac{p}{R}\,, \quad Y = \frac{q}{R}\,, \quad R^2 = p^2 + q^2 + 1$$

findet man (2)

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial X}{\partial p} & \frac{\partial X}{\partial q} \\ \frac{\partial Y}{\partial p} & \frac{\partial Y}{\partial q} \end{vmatrix} = \frac{1}{R^3} \begin{vmatrix} R & \frac{\partial R}{\partial p} & \frac{\partial R}{\partial q} \\ p & 1 & 0 \\ q & 0 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{R^4}$$

also

$$k = \frac{rt - s^2}{(p^2 + q^2 + 1)^2}\,.$$

12. Wenn f eine gegebene Function von x, y, z ist und ihre Differentialquotienten durch f_1, f_2, f_3, f_{11}, .. bezeichnet werden, so hat man auf der Fläche $f = 0$

$$p = -\frac{f_1}{f_3}\,, \quad q = -\frac{f_2}{f_3}$$

$$f_3^{\,2}(p^2 + q^2 + 1) = f_1^{\,2} + f_2^{\,2} + f_3^{\,2}$$

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial p}{\partial x} & \frac{\partial p}{\partial y} \\ \frac{\partial q}{\partial x} & \frac{\partial q}{\partial y} \end{vmatrix} = \frac{1}{f_3^{\,3}} \begin{vmatrix} f_1 & \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ f_2 & \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \\ f_3 & \frac{\partial f_3}{\partial x} & \frac{\partial f_3}{\partial y} \end{vmatrix}$$

$$= \frac{-1}{f_3^4} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & f_3 \\ f_1 & f_{11} + f_{13}p & f_{12} + f_{13}q & f_{13} \\ f_2 & f_{12} + f_{23}p & f_{22} + f_{23}q & f_{23} \\ f_3 & f_{13} + f_{33}p & f_{23} + f_{33}q & f_{33} \end{vmatrix}$$

$$= \frac{-1}{f_3^4} \begin{vmatrix} 0 & f_1 & f_2 & f_3 \\ f_1 & f_{11} & f_{12} & f_{13} \\ f_2 & f_{12} & f_{22} & f_{23} \\ f_3 & f_{13} & f_{23} & f_{33} \end{vmatrix}$$

also

$$k = \frac{-1}{(f_1^2 + f_2^2 + f_3^2)^2} \begin{vmatrix} 0 & f_1 & f_2 & f_3 \\ f_1 & f_{11} & f_{12} & f_{13} \\ f_2 & f_{12} & f_{22} & f_{23} \\ f_3 & f_{13} & f_{23} & f_{33} \end{vmatrix}$$

Anmerkung. Wenn f eine homogene Function der Variablen x, y, z, w von m Dimensionen ist, so hat man auf der Fläche $f = 0$, $w = 1$

$$0 = xf_1 + yf_2 + zf_3 + f_4$$
$$(m-1)f_1 = xf_{11} + yf_{12} + zf_{13} + f_{14}$$

u. s. w., folglich durch Verbindung der Zeilen und der Colonnen

$$\begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} & f_1 \\ f_{12} & f_{22} & f_{23} & f_2 \\ f_{13} & f_{23} & f_{33} & f_3 \\ f_1 & f_2 & f_3 & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{m-1} \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} & f_1 \\ f_{12} & f_{22} & f_{23} & f_2 \\ f_{13} & f_{23} & f_{33} & f_3 \\ f_{14} & f_{24} & f_{34} & f_4 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{(m-1)^2} \Sigma \pm f_{11} \ldots f_{44}.$$

Diese Determinante stimmt als Functionaldeterminante der $f_1, \ldots, f_4$ mit der Hesse'schen Determinante von f überein (7).

13. Wenn die Coordinaten x, y, z von den Argumenten u, v abhängen, so hat man

$$dx = x_1 du + x_2 dv, \quad dy = y_1 du + y_2 dv, \quad dz = z_1 du + z_2 dv$$

$$\begin{vmatrix} dx & x_1 & x_2 \\ dy & y_1 & y_2 \\ dz & z_1 & z_2 \end{vmatrix} = A dx + B dy + C dz = 0$$

folglich

$$p = -\frac{A}{C}, \quad q = -\frac{B}{C}$$
$$C^2(p^2 + q^2 + 1) = A^2 + B^2 + C^2.$$

Nun ist (5 und 2)

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial p}{\partial x} & \frac{\partial p}{\partial y} \\ \frac{\partial q}{\partial x} & \frac{\partial q}{\partial y} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial p}{\partial u} & \frac{\partial p}{\partial v} \\ \frac{\partial q}{\partial u} & \frac{\partial q}{\partial v} \end{vmatrix} = \frac{1}{C^3} \begin{vmatrix} A & A_1 & A_2 \\ B & B_1 & B_2 \\ C & C_1 & C_2 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} A & A_1 & A_2 \\ B & B_1 & B_2 \\ C & C_1 & C_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 0 & x_1 & x_2 \\ 0 & y_1 & y_2 \\ 1 & z_1 & z_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} C & Ax_1 + By_1 + Cz_1 & Ax_2 + By_2 + Cz_2 \\ C_1 & A_1x_1 + B_1y_1 + C_1z_1 & A_1x_2 + B_1y_2 + C_1z_2 \\ C_2 & A_2x_1 + B_2y_1 + C_2z_1 & A_2x_2 + B_2y_2 + C_2z_2 \end{vmatrix}$$

Aus den Identitäten

$$Ax_1 + By_1 + Cz_1 = 0\,, \quad Ax_2 + By_2 + Cz_2 = 0\,,$$
$$A_1x_1 + B_1y_1 + C_1z_1 + Ax_{11} + By_{11} + Cz_{11} = 0$$

u. s. w. folgt aber

$$\begin{vmatrix} A & A_1 & A_2 \\ B & B_1 & B_2 \\ C & C_1 & C_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_1x_1 + \ldots & A_1x_2 + \ldots \\ A_2x_1 + \ldots & A_2x_2 + \ldots \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} Ax_{11} + \ldots & Ax_{12} + \ldots \\ Ax_{12} + \ldots & Ax_{22} + \ldots \end{vmatrix}$$

Demnach ist $k\,(A^2 + B^2 + C^2)^2 = C^4\,(rt - s^2)$

$$= \begin{vmatrix} x_{11} & x_1 & x_2 \\ y_{11} & y_1 & y_2 \\ z_{11} & z_1 & z_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_{22} & x_1 & x_2 \\ y_{22} & y_1 & y_2 \\ z_{22} & z_1 & z_2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} x_{12} & x_1 & x_2 \\ y_{12} & y_1 & y_2 \\ z_{12} & z_1 & z_2 \end{vmatrix}^2$$

$$= \begin{vmatrix} x_{11}\,x_{22} + \ldots & x_1\,x_{22} + \ldots & x_2\,x_{22} + \ldots \\ x_{11}\,x_1 + \ldots & x_1\,x_1 + \ldots & x_2\,x_1 + \ldots \\ x_{11}\,x_2 + \ldots & x_1\,x_2 + \ldots & x_2\,x_2 + \ldots \end{vmatrix}$$

$$- \begin{vmatrix} x_{12}\,x_{12} + \ldots & x_1\,x_{12} + \ldots & x_2\,x_{12} + \ldots \\ x_{12}\,x_1 + \ldots & x_1\,x_1 + \ldots & x_2\,x_1 + \ldots \\ x_{12}\,x_2 + \ldots & x_1\,x_2 + \ldots & x_2\,x_2 + \ldots \end{vmatrix}$$

14. Für das Quadrat eines in dem Punct (x, y, z) anfangenden Linienelementes der Fläche hat man

$$dx^2 + dy^2 + dz^2$$
$$= (p^2+1)\,dx^2 + 2pq\;dx\,dy + (q^2+1)\,dy^2$$
$$= E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2$$

wobei

$$E = x_1^{\,2} + y_1^{\,2} + z_1^{\,2}\,, \quad F = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2\,, \quad G = x_2^{\,2} + y_2^{\,2} + z_2^{\,2}\,.$$

Die Krümmung k ist von Gauss auch durch die Grössen E, F, G und deren erste und zweite Differentialquotienten ausgedrückt worden.

Zunächst ist die Determinante der quadratischen Form $E\,du^2 + ..$ aus der Determinante der Form $(p^2+1)\,dx^2 + ..$ ableitbar (§. 14, 3), folglich

$$EG - F^2 = (p^2 + q^2 + 1)\,C^2 = A^2 + B^2 + C^2$$

(vergl. §. 5, 2). Ferner ergiebt die Differentiation nach u und v

$$\tfrac{1}{2}E_1 = x_1 x_{11} + .. \qquad \tfrac{1}{2}G_1 = x_2 x_{12} + ..$$

$$\tfrac{1}{2}E_2 = x_1 x_{12} + .. \qquad \tfrac{1}{2}G_2 = x_2 x_{22} + ..$$

$$\tfrac{1}{2}E_{22} = x_{12}x_{12} + .. + x_1 x_{122} + .. \quad \tfrac{1}{2}G_{11} = x_{12}x_{12} + .. + x_2 x_{112} + ..$$

$$F_1 = x_2 x_{11} + .. + x_1 x_{12} + .. \quad F_2 = x_2 x_{12} + .. + x_1 x_{22} + ..$$

$$F_{12} = x_{11}x_{22} + .. + x_2 x_{112} + .. + x_{12}x_{12} + .. + x_1 x_{122} + ..$$

$$F_{12} - \tfrac{1}{2}E_{22} - \tfrac{1}{2}G_{11} = x_{11}x_{22} + .. - x_{12}x_{12} - ..$$

Durch Benutzung dieser Werthe erhält man aus dem obenstehenden Ausdruck (13) den folgenden für $k\,(EG - F^2)^2$:

$$\begin{vmatrix} F_{12} - \frac{1}{2}E_{22} - \frac{1}{2}G_{11} & F_2 - \frac{1}{2}G_1 & \frac{1}{2}G_2 \\ \frac{1}{2}E_1 & E & F \\ F_1 - \frac{1}{2}E_2 & F & G \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & \frac{1}{2}E_2 & \frac{1}{2}G_1 \\ \frac{1}{2}E_2 & E & F \\ \frac{1}{2}G_1 & F & G \end{vmatrix}$$

Anmerkung. Liouville (Journ. 16 p. 131) hat $EG - F^2 = D^2$ gesetzt und gefunden

$$-kD = \frac{\partial}{\partial u}\frac{1}{D}\left(\tfrac{1}{2}G_1 + \tfrac{1}{2}G_2\frac{F}{G} - F_2\right) + \frac{\partial}{\partial v}\frac{1}{D}\left(\tfrac{1}{2}E_2 - \tfrac{1}{2}G_1\frac{F}{G}\right).$$

15. Wenn $f_1, f_2, .., f_n$ von einander unabhängige Functionen von $x_1, x_2, .., x_n$ sind, so sind auch $x_1, x_2, .., x_n$ von einander unabhängige Functionen von $f_1, f_2, .., f_n$. Die Determinante des Systems $f_1, f_2, .., f_n$ und die Determinante des Systems $x_1, x_2, .., x_n$ sind reciprok, d. h. ihr Product ist $= 1$ *).

Beweis. Um f_i in Bezug auf f_k zu differentiiren, müsste man $x_1, x_2, .., x_n$ durch $f_1, f_2, .., f_n$ ausdrücken und

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial f_k} + \frac{\partial f_i}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial f_k} + .. + \frac{\partial f_i}{\partial x_n}\frac{\partial x_n}{\partial f_k}$$

bilden. Diese Summe beträgt aber 0 oder 1, je nachdem k von

*) Jacobi det. funct. §. 8. Dasselbe Theorem hatte Möbius Crelle J. 12 p. 116 gefunden.

i verschieden ist oder nicht, weil $f_1, f_2, .., f_n$ von einander unabhängig sind.

Bezeichnet man $\frac{\partial f_i}{\partial x_k}$ durch a_{ik}, $\frac{\partial x_i}{\partial f_k}$ durch b_{ik} und die erwähnte Summe durch c_{ik}, bezeichnet man die Determinanten

$$\begin{vmatrix} a_{11} & . & . & a_{1n} \\ . & . & . & . \\ a_{n1} & . & . & a_{nn} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} b_{11} & . & . & b_{1n} \\ . & . & . & . \\ b_{n1} & . & . & b_{nn} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} c_{11} & . & . & c_{1n} \\ . & . & . & . \\ c_{n1} & . & . & c_{nn} \end{vmatrix}$$

durch R, S, T, so ist

$$c_{ik} = a_{i1} b_{1k} + \,.\,.\, + a_{in} b_{nk},$$

folglich (§. 5, 1) $T = RS$. Nun ist c_{ik} entweder 0 oder 1, je nachdem k von i verschieden ist oder nicht; folglich $T = 1$ (§. 2, 7), d. h.

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & . & . & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ . & . & . & . \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & . & . & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial f_1} & . & . & \frac{\partial x_1}{\partial f_n} \\ . & . & . & . \\ \frac{\partial x_n}{\partial f_1} & . & . & \frac{\partial x_n}{\partial f_n} \end{vmatrix} = 1.$$

16. Wenn R und S die vorige Bedeutung haben und die Coefficienten von $\frac{\partial f_i}{\partial x_k}$ in R und von $\frac{\partial x_i}{\partial f_k}$ in S durch α_{ik} und β_{ik} bezeichnet werden, so ist*)

$$R \frac{\partial x_i}{\partial f_k} = \alpha_{ki}, \qquad S \frac{\partial f_i}{\partial x_k} = \beta_{ki},$$

$$R \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial f_1} & . & . & \frac{\partial x_1}{\partial f_m} \\ . & . & . & . \\ \frac{\partial x_m}{\partial f_1} & . & . & \frac{\partial x_m}{\partial f_m} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_{m+1}}{\partial x_{m+1}} & . & . & \frac{\partial f_{m+1}}{\partial x_n} \\ . & . & . & . \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_{m+1}} & . & . & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{vmatrix}$$

$$S \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & . & . & \frac{\partial f_1}{\partial x_m} \\ . & . & . & . \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & . & . & \frac{\partial f_m}{\partial x_m} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_{m+1}}{\partial f_{m+1}} & . & . & \frac{\partial x_{m+1}}{\partial f_n} \\ . & . & . & . \\ \frac{\partial x_n}{\partial f_{m+1}} & . & . & \frac{\partial x_n}{\partial f_n} \end{vmatrix}$$

Beweis. Nach den angenommenen Bezeichnungen (15) ist

*) Jacobi det. funct. §. 8 und 9.

$$a_{11} b_{1k} + a_{12} b_{2k} + \cdot \cdot + a_{1n} b_{nk} = 0$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$a_{k1} b_{1k} + a_{k2} b_{2k} + \cdot \cdot + a_{kn} b_{nk} = 1$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$a_{n1} b_{1k} + a_{n2} b_{2k} + \cdot \cdot + a_{nn} b_{nk} = 0$$

Wenn man diese Identitäten der Reihe nach mit

$$a_{1i}\,, \quad a_{2i}\,, \quad \cdot \cdot \cdot\,, \quad a_{ni}$$

multiplicirt und dann addirt, so erhält man (§. 3, 3)

$$R b_{ik} = a_{ki}\,.$$

Ferner ist (§. 7, 2)

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdot & \cdot & a_{1m} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & \cdot & \cdot & a_{mm} \end{vmatrix} = R^{m-1} \begin{vmatrix} a_{m+1,m+1} & \cdot & \cdot & a_{m+1,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n,m+1} & \cdot & \cdot & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Durch Substitution der eben gefundenen Werthe von $a_{11}, \cdot \cdot, a_{mm}$ erhält man auf der linken Seite (§. 3, 4)

$$R^m \begin{vmatrix} b_{11} & \cdot & \cdot & b_{1m} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ b_{m1} & \cdot & \cdot & b_{mm} \end{vmatrix}$$

und damit den Inhalt der zweiten Behauptung. Die übrigen Behauptungen folgen aus den bewiesenen, indem man gleichzeitig f mit x, R mit S vertauscht.

17. Wenn t eine Grösse bedeutet, von welcher $f_1, f_2, \cdot \cdot, f_n$ auf gegebene Weise abhängen, so kann man die Differentialquotienten

$$\frac{\partial f_1}{\partial t}\,, \quad \frac{\partial f_2}{\partial t}\,, \quad \cdot \cdot \cdot\,, \quad \frac{\partial f_n}{\partial t}\,,$$

welche zunächst Functionen von $x_1, x_2, \cdot \cdot, x_n$ sind, von den Variablen $f_1, f_2, \cdot \cdot, f_n$ abhängig machen, um sie in Bezug auf diese Variablen zu differentiiren. Die Functionaldeterminante R (15 und 16), welche zunächst eine Function von $x_1, x_2, \cdot \cdot, x_n$ ist, kann ebenfalls durch $f_1, f_2, \cdot \cdot, f_n$ ausgedrückt und dann nach t differentiirt werden. Wenn andererseits u eine Variable bedeutet, von welcher $x_1, x_2, \cdot \cdot, x_n$ auf gegebene Weise abhängen u. s. w., so ist nach den angenommenen Bezeichnungen *)

*) Jacobi det. funct. §. 9. Vergl. Jacobi Crelle J. 27 p. 209.

$$\frac{\partial}{\partial f_1}\frac{\partial f_1}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial f_2}\frac{\partial f_2}{\partial t} + \dots + \frac{\partial}{\partial f_n}\frac{\partial f_n}{\partial t} = \frac{\partial \log R}{\partial t}$$

$$\frac{\partial}{\partial f_1}\left(S\frac{\partial f_1}{\partial t}\right) + \frac{\partial}{\partial f_2}\left(S\frac{\partial f_2}{\partial t}\right) + \dots + \frac{\partial}{\partial f_n}\left(S\frac{\partial f_n}{\partial t}\right) = 0$$

und analog

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial u} + \dots + \frac{\partial}{\partial x_n}\frac{\partial x_n}{\partial u} = \frac{\partial \log S}{\partial u}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\left(R\frac{\partial x_1}{\partial u}\right) + \frac{\partial}{\partial x_2}\left(R\frac{\partial x_2}{\partial u}\right) + \dots + \frac{\partial}{\partial x_n}\left(R\frac{\partial x_n}{\partial u}\right) = 0 .$$

Insbesondere ist*)

$$\frac{\partial \beta_{k1}}{\partial f_1} + \frac{\partial \beta_{k2}}{\partial f_2} + \dots + \frac{\partial \beta_{kn}}{\partial f_n} = 0$$

$$\frac{\partial \alpha_{k1}}{\partial x_1} + \frac{\partial \alpha_{k2}}{\partial x_2} + \dots + \frac{\partial \alpha_{kn}}{\partial x_n} = 0 .$$

Beweis. Nach §. 3, 15 hat man

$$\frac{\partial R}{\partial t} = \sum_{ik} \alpha_{ik}\frac{\partial a_{ik}}{\partial t} ,$$

worin nach (11)

$$\alpha_{ik} = R\frac{\partial x_k}{\partial f_i} , \qquad \frac{\partial a_{ik}}{\partial t} = \frac{\partial^2 f_i}{\partial t \partial x_k} .$$

Nun ist aber

$$\frac{\partial^2 f_i}{\partial t\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial f_i} + \frac{\partial^2 f_i}{\partial t\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial f_i} + \dots + \frac{\partial^2 f_i}{\partial t\partial x_n}\frac{\partial x_n}{\partial f_i} = \frac{\partial}{\partial f_i}\frac{\partial f_i}{\partial t} ,$$

folglich

$$\frac{\partial R}{\partial t} = R\sum_i \frac{\partial}{\partial f_i}\frac{\partial f_i}{\partial t} , \qquad \frac{\partial \log R}{\partial t} = \sum_i \frac{\partial}{\partial f_i}\frac{\partial f_i}{\partial t} .$$

Ferner ist $RS = 1$ (15), also $\log R + \log S = 0$, und

$$0 = \frac{\partial \log S}{\partial t} + \sum_i \frac{\partial}{\partial f_i}\frac{\partial f_i}{\partial t} .$$

Da die Functionaldeterminante S eine Function der Grössen $f_1, f_2, \dots, f_n$ ist, welche die Variable t enthalten, so hat man

$$\frac{\partial S}{\partial t} = \frac{\partial S}{\partial f_1}\frac{\partial f_1}{\partial t} + \frac{\partial S}{\partial f_2}\frac{\partial f_2}{\partial t} + \dots + \frac{\partial S}{\partial f_n}\frac{\partial f_n}{\partial t} ,$$

*) Jacobi Crelle J. 27 p. 203.

Nimmt man hinzu, dass

$$\frac{\partial S}{\partial f_i}\,\frac{\partial f_i}{\partial t} + S\,\frac{\partial}{\partial f_i}\,\frac{\partial f_i}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial f_i}\left(S\,\frac{\partial f_i}{\partial t}\right)$$

ist, so erhält man die zweite der aufgestellten Identitäten. Die analogen Identitäten ergeben sich durch gleichzeitige Vertauschung von t mit u, f mit x, R mit S.

Wenn insbesondere $t = x_k$, so ist (16)

$$S\,\frac{\partial f_i}{\partial x_k} = \beta_{ki} \text{ u. s. w.}$$

18. Wenn $X, X_1, \ldots, X_n$ gegebene Functionen von $x, x_1, \ldots, x_n$ bedeuten, f eine unbestimmte Function derselben Variablen und

$$\psi(f) = X\,\frac{\partial f}{\partial x} + X_1\,\frac{\partial f}{\partial x_1} + \ldots + X_n\,\frac{\partial f}{\partial x_n}$$

ist; wenn ferner n von einander unabhängige Lösungen der linearen partialen Differentialgleichung $\psi(f) = 0$ durch $f_1, f_2, \ldots, f_n$ bezeichnet werden, so dass $\psi(f_1), \psi(f_2), \ldots, \psi(f_n)$ identisch verschwinden: so lässt sich ein Multiplicator M angeben, durch welchen $\psi(f)$ zur Determinante der Functionen $f, f_1, \ldots, f_n$ wird. Es ist nämlich

$$R = \begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial x_1} & \cdot & \cdot & \frac{\partial f}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdot & \cdot & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial f_n}{\partial x} & \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \cdot & \cdot & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{vmatrix} = A\,\frac{\partial f}{\partial x} + A_1\,\frac{\partial f}{\partial x_1} + \ldots + A_n\,\frac{\partial f}{\partial x_n}$$

folglich $M\psi(f) = R$, wenn $M = A_i : X_i$. In der That verschwinden R und $\psi(f)$, wenn für f eine der Functionen $f_1, f_2, \ldots$ gesetzt wird. Zufolge der in (17) bewiesenen Eigenschaft der Coefficienten $A, A_1, \ldots, A_n$ ist der Multiplicator M eine Lösung der linearen partialen Differentialgleichung*)

$$\frac{\partial(\mu X)}{\partial x} + \frac{\partial(\mu X_1)}{\partial x_1} + \ldots + \frac{\partial(\mu X_n)}{\partial x_n} = 0 .$$

*) Jacobi Crelle J. 27 p. 210.

Anmerkung. Die durch M bezeichnete Function der Grössen $x, x_1, .., x_n$ wird nach Jacobi (l. c.) der Multiplicator der partialen Differentialgleichung $\psi(f) = 0$, oder der partialen Differentialgleichung

$$0 = X - X_1 \frac{\partial x}{\partial x_1} - .. - X_n \frac{\partial x}{\partial x_n},$$

oder des Systems von gemeinen Differentialgleichungen

$$dx : dx_1 : dx_2 : .. : dx_n = X : X_1 : X_2 : .. : X_n$$

genannt, weil die Auflösungen jener partialen Differentialgleichungen und dieses Systems gemeiner Differentialgleichungen im engsten Zusammenhange stehen. Ist nämlich π eine Lösung der Gleichung $\psi(f) = 0$ und x dadurch von $x_1, x_2, .., x_n$ abhängig gemacht, dass man π einer willkürlichen Constante gleichgesetzt hat, so hat man

$$0 = X \frac{\partial \pi}{\partial x} + X_1 \frac{\partial \pi}{\partial x_1} + .. + X_n \frac{\partial \pi}{\partial x_n},$$

$$\frac{\partial \pi}{\partial x_i} + \frac{\partial \pi}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial x_i} = 0,$$

$$\frac{\partial \pi}{\partial x} : \frac{\partial \pi}{\partial x_1} : \frac{\partial \pi}{\partial x_2} : .. = 1 : -\frac{\partial x}{\partial x_1} : -\frac{\partial x}{\partial x_2} : ..,$$

$$0 = X - X_1 \frac{\partial x}{\partial x_1} - .. - X_n \frac{\partial x}{\partial x_n}.$$

Sind andrerseits $f_1, f_2, .., f_n$ von einander unabhängige Lösungen der Gleichung $\psi(f) = 0$ und willkürlichen Constanten gleichgesetzt, so hat man

$$\frac{\partial f_1}{\partial x} dx + \frac{\partial f_1}{\partial x_1} dx_1 + .. + \frac{\partial f_1}{\partial x_n} dx_n = 0$$

$$\frac{\partial f_n}{\partial x} dx + \frac{\partial f_n}{\partial x_1} dx_1 + .. + \frac{\partial f_n}{\partial x_n} dx_n = 0$$

und durch Auflösung dieses linearen Systems

$$dx : dx_1 : dx_2 : .. = A : A_1 : A_2 : ..$$

$$= X : X_1 : X_2 : ...$$

§. 13. Die homogenen Functionen, insbesondere die quadratischen Formen.

1. Wenn u eine homogene Function der Variablen x_1, $x_2, \ldots, x_n$ von m Dimensionen ist, wenn man $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ durch u_i bezeichnet, so ist identisch nach Euler's Theorem *)

$$mu = u_1 x_1 + \ldots + u_n x_n .$$

Indem man denselben Satz auf die homogenen Functionen $u_1, u_2, \ldots$, von $m-1$ Dimensionen anwendet und $\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k}$ durch u_{ik} bezeichnet, erhält man das System von Identitäten **)

$$\begin{aligned} (m-1)\, u_1 &= u_{11} x_1 + \ldots + u_{1n} x_n \\ &\ldots \\ (m-1)\, u_n &= u_{1n} x_1 + \ldots + u_{nn} x_n . \end{aligned}$$

2. Nach den angenommenen Bezeichnungen ist

$$m(m-1)u = \sum_{ik} x_i x_k u_{ik}$$

wobei für i und k alle Zahlen von 1 bis n zu setzen sind ***). Wenn man nämlich die obigen Identitäten der Reihe nach mit $x_1, x_2, \ldots, x_n$ multiplicirt und addirt, so findet man auf der rechten Seite die angegebene Summe, weil $u_{ik} = u_{ki}$, und auf der linken Seite $m(m-1)u$ nach (1).

Diese und andere Zerlegungen der homogenen Function ergeben sich, wenn man die Identität

$$f(x_1 + \omega x_1,\ x_2 + \omega x_2, \ldots, x_n + \omega x_n) = (1+\omega)^m f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

nach steigenden Potenzen von ω entwickelt.

3. In Folge der in (1) gegebenen Identitäten ist (§. 8)

$$\begin{vmatrix} \frac{m}{m-1} u & u_1 & \cdot & \cdot & u_n \\ u_1 & u_{11} & \cdot & \cdot & u_{n1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ u_n & u_{1n} & \cdot & \cdot & u_{nn} \end{vmatrix} = 0$$

*) Mechanica 1736 tom. II, §. 106. 497. Calc. diff. §. 225.

**) Hesse Crelle J. 28 p. 78.

***) Lacroix Calc. diff. §. 91.

nach Weglassung des Factor $m-1$ in der ersten Colonne (§. 3, 4). Diese identisch verschwindende Determinante $(n+1)$ten Grades kann nach §. 3, 17 entwickelt werden. Bezeichnet man die Hesse'sche Determinante von u (§. 12, 5) durch $v = \Sigma \pm u_{11} \ldots u_{nn}$ und den Coefficienten von u_{ik} in v durch α_{ik}, so ist $\alpha_{ik} = \alpha_{ki}$, weil $u_{ik} = u_{ki}$ (§. 3, 13), und man erhält*)

$$\frac{m}{m-1} u v - \sum_{ik} u_i u_k \alpha_{ik} = 0 .$$

4. Aus dem System (1)

$$\begin{array}{lllllll}
-(m-1)\dfrac{mu}{m-1} & + u_1 & x_1 & + \ldots & + u_n & x_n & = 0 \\
-(m-1) & u_1 & + u_{11} x_1 & + \ldots & + u_{n1} & x_n & = 0 \\
\ldots & & \ldots & & \ldots & & \\
-(m-1) & u_n & + u_{1n} x_1 & + \ldots & + u_{nn} & x_n & = 0
\end{array}$$

folgt nach §. 8, 2 die Proportion

$$-(m-1) : x_1 : x_2 : \ldots = \beta_i : \beta_{1i} : \beta_{2i} : \ldots ,$$

wenn die Coefficienten der Elemente $\frac{mu}{m-1}$, u_i, u_{ik} in der verschwindenden Determinante $(n+1)$ten Grades

$$R = \begin{vmatrix} \dfrac{mu}{m-1} & u_1 & \ldots & u_n \\ u_1 & u_{11} & \ldots & u_{n1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ u_n & u_{1n} & \ldots & u_{nn} \end{vmatrix}$$

der Reihe nach durch v, β_i, β_{ik} bezeichnet werden. Nun ist $\beta_{ik} = \beta_{ki}$ (§. 3, 13), folglich auch $\beta_i^2 = v\beta_{ii}$ (§. 6, 5), und daher

$$-\frac{x_i}{m-1} = \frac{\beta_{ii}}{\beta_i} = \frac{\beta_i}{v} ,$$

$$\frac{x_i x_k}{(m-1)^2} = \frac{\beta_{ii}\beta_{ik}}{\beta_i^2} = \frac{\beta_{ik}}{v} \text{ **)}.$$

Wenn daher irgend eine partiale Determinante $n$ten Grades der identisch verschwindenden Determinante R, namentlich

---

*) Hesse Crelle J. 38 p. 242.

**) Hiermit stimmen die von Hesse (Crelle J. 28 p. 103 und 38 p. 242) gegebenen Relationen überein.

die Determinante v, identisch verschwindet, so verschwinden auch die übrigen partialen Determinanten desselben Grades.

5. Die bewiesenen Relationen leisten einen wichtigen Dienst in der Theorie der Krümmung von Linien und Flächen. Wenn f eine Function der orthogonalen Coordinaten x, y eines Punctes ist, also $f = 0$ die Gleichung der Linie ist, auf welcher der Punct (x, y) liegt; wenn ferner

$$\frac{\partial f}{\partial x} = f_1, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = f_2,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f_{11}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x} = f_{12} = f_{21}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f_{22}$$

gesetzt wird, so ist bekanntlich

$$x - \xi : y - \eta = f_1 : f_2$$

die Gleichung für die Normale der Linie $(f = 0)$ durch den Punct (x, y) derselben, wobei ξ, η die Coordinaten irgend eines Punctes der Normale bedeuten. Setzt man

$$\lambda(x - \xi) = f_1, \quad \lambda(y - \eta) = f_2,$$

und differentiirt diese Gleichungen, so erhält man

$$f_1 dx + f_2 dy = 0,$$

$$(x - \xi)\, d\lambda + \lambda dx = df_1, \quad (y - \eta)\, d\lambda + \lambda dy = df_2,$$

oder

$$f_1 \frac{d\lambda}{\lambda} = df_1 - \lambda dx, \quad f_2 \frac{d\lambda}{\lambda} = df_2 - \lambda dy$$

für die Normale der Linie $(f = 0)$ durch den Punct $(x + dx, y + dy)$, welche mit der ersten Normale den Punct (ξ, η) gemein hat, d. i. das Centrum der Krümmung, welche die Linie $(f = 0)$ im Puncte (x, y) hat. Aus dem System

$$\begin{aligned}
0 &= f_1\, dx + f_2\, dy \\
f_1 \frac{d\lambda}{\lambda} &= (f_{11} - \lambda)\, dx + f_{12}\, dy \\
f_2 \frac{d\lambda}{\lambda} &= f_{21}\, dx + (f_{22} - \lambda)\, dy
\end{aligned}$$

folgt (§. 8)

$$\begin{vmatrix} 0 & f_1 & f_1 \\ f_1 & f_{11} - \lambda & f_{12} \\ f_2 & f_{12} & f_{22} \quad \lambda \end{vmatrix} = 0$$

zur Bestimmung von λ. Wenn man diese Gleichung nach §. 3, 17 entwickelt, so erhält λ den Coefficienten $f_1^2 + f_2^2$ und das von λ unabhängige Glied ist

$$L = \begin{vmatrix} 0 & f_1 & f_2 \\ f_1 & f_{11} & f_{12} \\ f_2 & f_{12} & f_{22} \end{vmatrix}$$

Daher ist

$$\lambda = \frac{-L}{f_1^2+f_2^2}.$$

Endlich hat man zur Berechnung des Radius der Krümmung, der durch ϱ bezeichnet wird,

$$\varrho^2 = (x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 = \frac{f_1^2+f_2^2}{\lambda^2}$$

und zur Berechnung der Krümmung

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{-L}{(f_1^2+f_2^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Die Determinante L ist leichter zu behandeln, wenn die Function, auf welche sie sich bezieht, homogen ist. Versteht man unter u die homogene Function der Variablen x_1, x_2, x_3, welche mit f identisch wird, wenn $x_3 = 1$, so hat man (4)

$$L = \begin{vmatrix} 0 & u_1 & u_1 \\ u_1 & u_{11} & u_{12} \\ u_2 & u_{12} & u_{22} \end{vmatrix} = \frac{v}{(m-1)^2},$$

worin $v = \Sigma \pm u_{11}\, u_{22}\, u_{33}$ und nach der Differentiation $x_3 = 1$ zu setzen ist.

Die Puncte der Linie ($f = 0$ oder $u = 0$), für welche L oder v verschwindet, mithin die Krümmung verschwindet, wenn nicht zugleich $f_1^2 + f_2^2$ verschwindet, sind im Allgemeinen Wendepuncte der Linie. Sie erscheinen als Durchschnitte der Linie ($f = 0$ oder $u = 0$) und der Linie ($L = 0$ oder $v = 0$). Nun sind f und u nach Voraussetzung $m$ten Grades, v aber $3(m-2)$ten Grades, folglich haben die gedachten Linien $3m(m-2)$ gemeinschaftliche Puncte, die im Allgemeinen Wendepuncte der Linie $f = 0$ sind, d. h. eine Linie $m$ten Grades hat im Allgemeinen $3m(m-2)$ Wendepuncte*).

---

*) Dieser Satz ist 1834 von Plücker (Crelle J. 12 p. 105, Syst. der analyt. Geom. p. 264) aufgestellt worden. Der hier mitgetheilte Beweis

6. Wenn f eine Function der orthogonalen Coordinaten x, y, z eines Punctes, also $f = 0$ die Gleichung der Fläche ist, auf welcher der Punct (x, y, z) liegt, so ist nach den vorigen Bezeichnungen

$$x - \xi : y - \eta : z - \zeta = f_1 : f_2 : f_3$$

die Gleichung für die Normale der Fläche $(f = 0)$ durch den Punct (x, y, z), wofür

$$\lambda(x - \xi) = f_1 , \quad \lambda(y - \eta) = f_2 , \quad \lambda(z - \zeta) = f_3$$

gesetzt werden kann. Die Normalen der Fläche $(f = 0)$ durch die Puncte (x, y, z) und $(x + dx, y + dy, z + dz)$ schneiden sich im Allgemeinen nicht, sondern nur dann, wenn der zuletzt genannte Punct auf einer durch (x, y, z) gehenden Krümmungslinie liegt*). Ihr Durchschnitt (ξ, η, ζ) ist das Krümmungscentrum eines Hauptschnitts der Fläche für den Punct (x, y, z). Durch Differentiation der obigen Gleichungen findet man für diesen Fall

$$(x - \xi)\, d\lambda + \lambda\, dx = df_1 , \quad \text{u. s. w.}$$

oder

$$f_1 \frac{d\lambda}{\lambda} = df_1 - \lambda\, dx$$

$$f_2 \frac{d\lambda}{\lambda} = df_2 - \lambda\, dy$$

$$f_3 \frac{d\lambda}{\lambda} = df_3 - \lambda\, dz \quad .$$

Folglich (§. 8) ist

$$\begin{vmatrix} f_1 & df_1 & dx \\ f_2 & df_2 & dy \\ f_3 & df_3 & dz \end{vmatrix} = 0$$

die Differentialgleichung, welche in Verbindung mit der Differentialgleichung der gegebenen Fläche

$$f_1 dx + f_2 dy + f_3 dz = 0$$

---

rührt von Hesse (l. c.) her. Einen andern Beweis findet man bei Jacobi (Crelle J. 40 p. 254).

*) Bei genauer Infinitesimalbetrachtung findet man (Scheibner briefl. Mittheilung), dass in diesem Falle der Abstand der Normalen ein Unendlichkleines 3ter Ordnung ist, während der Abstand der Fusspuntce zu den Unendlichkleinen 1ter Ordnung gehört. Vergl. Bouquet Liouv. J. 11 p. 125.

die durch den Punct (x, y, z) gehenden Krümmungslinien bestimmt. Aus dem System der Gleichungen

$$\begin{aligned}
0 &= f_1\, dx + f_2\, dy + f_3\, dz \\
f_1 \frac{d\lambda}{\lambda} &= (f_{11} - \lambda)\, dx + f_{12}\, dy + f_{13}\, dz \\
f_2 \frac{d\lambda}{\lambda} &= f_{12}\, dx + (f_{22} - \lambda)\, dy + f_{23}\, dz \\
f_3 \frac{d\lambda}{\lambda} &= f_{13}\, dx + f_{23}\, dy + (f_{33} - \lambda)\, dz
\end{aligned}$$

folgt zur Bestimmung von λ

$$\begin{vmatrix} 0 & f_1 & f_2 & f_3 \\ f_1 & f_{11} - \lambda & f_{12} & f_{13} \\ f_2 & f_{12} & f_{22} - \lambda & f_{23} \\ f_3 & f_{13} & f_{23} & f_{33} - \lambda \end{vmatrix} = 0 .$$

Diese Gleichung ist zweiten Grades, und zwar hat λ^2 den Coefficienten $-f_1^2 - f_2^2 - f_3^2$, während das von λ unabhängige Glied

$$L = \begin{vmatrix} 0 & f_1 & f_2 & f_3 \\ f_1 & f_{11} & f_{12} & f_{13} \\ f_2 & f_{12} & f_{22} & f_{23} \\ f_3 & f_{13} & f_{23} & f_{33} \end{vmatrix}$$

ist. Bezeichnet man die Wurzeln derselben Gleichung durch λ', λ'', so hat man

$$\lambda' \lambda'' = \frac{-L}{f_1^2 + f_2^2 + f_3^2} .$$

Wenn man endlich den Abstand des Punctes (ξ, η, ζ) von (x, y, z) durch ϱ bezeichnet, so ist

$$\varrho^2 = (x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + (z - \zeta)^2$$

$$\lambda \varrho = \sqrt{f_1^2 + f_2^2 + f_3^2} .$$

Demnach hat auch ϱ zwei Werthe ϱ', ϱ'', so dass

$$\lambda' \lambda'' \varrho' \varrho'' = f_1^2 + f_2^2 + f_3^2 .$$

Die reciproken Werthe von ϱ' und ϱ'' sind aber die Krümmungen der durch (x, y, z) gehenden Krümmungslinien und der von ihnen berührten Hauptschnitte der Fläche, also ist das Product der Hauptkrümmungen der Fläche $(f = 0)$ in dem Puncte (x, y, z)

$$\frac{1}{\varrho' \varrho''} = -\frac{L}{(f_1^2 + f_2^2 + f_3^2)^2} \quad \text{(vergl. § 12, 12).}$$

Versteht man unter u die homogene Function der Variablen x_1, x_2, x_3, x_4, welche mit f identisch wird, wenn $x_4 = 1$ ist, so hat man (4)

$$L = \begin{vmatrix} 0 & u_1 & u_2 & u_3 \\ u_1 & u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ u_2 & u_{12} & u_{22} & u_{23} \\ u_3 & u_{13} & u_{23} & u_{33} \end{vmatrix} = \frac{v}{(m-1)^2}.$$

Die Puncte der Fläche ($f = 0$ oder $u = 0$), für welche L oder v verschwindet, sind im Allgemeinen Wendepuncte von Hauptschnitten der Fläche. Sie liegen auf dem Durchschnitt der Flächen ($f = 0$ oder $u = 0$) und ($L = 0$ oder $v = 0$). Nun sind f und u nach Voraussetzung $m$ten Grades, v aber $4(m-2)$-ten Grades, also liegt die Wendelinie einer Fläche $m$ten Grades zugleich auf einer bestimmten Fläche $4(m-2)$ten Grades*).

7. Aus den in (1) gegebenen Identitäten hat Jacobi**), veranlasst durch einen von Hesse mitgetheilten Satz, folgendes die mehr erwähnte Determinante

$$v = \Sigma \pm u_{11} \,.\,.\, u_{nn}$$

betreffende System von Identitäten entwickelt. Zunächst ist wie §. 8

$$\text{(I)} \qquad v x_i = (m-1)(\alpha_{1i} u_1 + \,.\,.\, + \alpha_{ni} u_n),$$

wenn $\alpha_{ik} = \alpha_{ki}$ wie oben (3) den Coefficienten von $u_{ik} = u_{ki}$ in v bedeutet. Indem man diese Identität in Bezug auf x_i oder x_k differentiirt und zur Abkürzung

$$\frac{\partial v}{\partial x_k} = v_k$$

setzt, erhält man

$$\text{(II)} \qquad v_i x_i = (m-1)\left(\frac{\partial \alpha_{1i}}{\partial x_i} u_1 + \,.\,.\, + \frac{\partial \alpha_{ni}}{\partial x_i} u_n\right) + (m-2)\, v,$$

*) Hesse l. c.

**) Crelle J. 40 p. 318.

$$v_k x_i = (m-1)\left(\frac{\partial \alpha_{1i}}{\partial x_k} u_1 + \ldots + \frac{\partial \alpha_{ni}}{\partial x_k} u_n\right),$$

weil (§. 3, 3)

$$\alpha_{1i} u_{1i} + \ldots + \alpha_{ni} u_{ni} = v$$
$$\alpha_{1i} u_{1k} + \ldots + \alpha_{ni} u_{nk} = 0 .$$

Durch abermalige Differentiation der gefundenen Identitäten, wobei

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x_k \partial x_l} = v_{kl}$$

gesetzt ist, erhält man

$$\text{(III)} \qquad v_{ik} x_i = (m-1)\left(\frac{\partial^2 \alpha_{1i}}{\partial x_i \partial x_k} u_1 + \ldots + \frac{\partial^2 \alpha_{ni}}{\partial x_i \partial x_k} u_n\right)$$
$$- (m-1)\left(\alpha_{1i} \frac{\partial u_{1i}}{\partial x_k} + \ldots + \alpha_{ni} \frac{\partial u_{ni}}{\partial x_k}\right) + (m-1) v_k ,$$
$$v_{kl} x_i = (m-1)\left(\frac{\partial^2 \alpha_{1i}}{\partial x_k \partial x_l} u_1 + \ldots + \frac{\partial^2 \alpha_{ni}}{\partial x_k \partial x_l} u_n\right)$$
$$- (m-1)\left(\alpha_{1i} \frac{\partial u_{1l}}{\partial x_k} + \ldots + \alpha_{ni} \frac{\partial u_{nl}}{\partial x_k}\right),$$

indem man die Differentiation der Identitäten

$$\alpha_{1i} u_{1i} + \ldots + \alpha_{ni} u_{ni} = v$$
$$\alpha_{1i} u_{1l} + \ldots + \alpha_{ni} u_{nl} = 0$$

in Bezug auf x_k zu Hülfe nimmt.

8. Bei einem System von Werthen der Variablen x_1, $x_2, \ldots, x_n$, welches den nicht unbedingt zulässigen Gleichungen

$$u_1 = 0 , \quad u_2 = 0 , \ldots , \quad u_n = 0$$

genügt, verschwinden zugleich die Functionen u und v (1), sowie $v_1, v_2, \ldots, v_n$ (7, II). Daraus erkennt man, dass ein Doppelpunct der Linie $u = 0$ auf der Linie $v = 0$ liegt und ein Doppelpunct derselben ist, dass also nicht alle gemeinschaftlichen Puncte der Linien $u = 0$, $v = 0$ Wendepuncte der Linie $u = 0$ sein müssen.

Aus den Gleichungen

$$0 = u_{11} x_1 + \ldots + u_{n1} x_n$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$0 = u_{1n} x_1 + \ldots + u_{nn} x_n$$

folgt aber (§. 8, 2 und §. 6, 5), wenn α_{ik} die angegebene Bedeutung hat,

$$x_1 : x_2 : x_3 : \ldots = \alpha_{1i} : \alpha_{2i} : \alpha_{3i} : \ldots$$

$$\frac{x_1^2}{\alpha_{11}} = \frac{x_2^2}{\alpha_{22}} = \ldots = \frac{1}{N}$$

$$N x_i x_k = \alpha_{ik} \, .$$

Durch diese Substitutionen erhält man in (7, III)

$$v_{ik} x_i = -(m-1) N x_i \left(x_1 \frac{\partial u_{ik}}{\partial x_1} + \ldots + x_n \frac{\partial u_{ik}}{\partial x_n} \right),$$

d. i. nach (1)

$$v_{ik} = -(m-1)(m-2) N u_{ik} \, ,$$

folglich *)

$$v_{11} : v_{12} : \ldots : v_{23} : \ldots = u_{11} : u_{12} : \ldots : u_{23} : \ldots$$

weshalb auch die Determinante $\Sigma \pm v_{11} \ldots v_{nn}$ verschwindet.

Die Geraden, welche die Linie $u = 0$ in ihrem Doppelpunct berühren, werden durch die Proportion der nicht verschwindenden Differentialquotienten bestimmt. Man erkennt also, dass die Geraden, welche die Linie $u = 0$ in einem Doppelpunct berühren, zugleich die Linie $v = 0$ daselbst berühren. Ein Doppelpunct der Linie $u = 0$ enthält demnach $4 + 2$ gemeinschaftliche Puncte der Linien $u = 0$, $v = 0$, welche nicht Wendepuncte der Linie $u = 0$ sind. Plücker System 1835 p. 266.

9. Die homogene Function u von m Dimensionen wird, wenn sie rational und ganz ist und ganze Coefficienten hat, eine Form $m$ten Grades (quadratisch, cubisch u. s. f.) von n unbestimmten Variablen (binär, ternär u. s. f.) genannt **). Eine quadratische Form (häufig »Form« schlechthin) kann durch

$$\sum_{ik} a_{ik} x_i x_k \, ,$$

eine cubische Form durch

$$\sum_{ikl} a_{ikl} x_i x_k x_l$$ ***)

*) Hesse Crelle J. 40 p. 316. Vergl. Jacobi l. c.

**) Gauss Disquis. arithm. art. 153 und 266.

***) Vergl. Hesse Crelle J. 28 p. 74.

dargestellt werden, wobei i, k, l alle Werthe von 1 bis n erhalten und die Grössen a_{ik}, a_{ikl} durch Umstellung ihrer Numern keine Veränderung erleiden. Unter der Determinante einer quadratischen Form versteht man den negativen Werth der aus dem System der Coefficienten gebildeten Determinante. Ist also $R = \Sigma \pm a_{11} \,.\,.\, a_{nn}$, so heisst $-R$ die Determinante der Form $u = \sum_{ik} a_{ik} x_i x_k$.

Wenn α_{ik} den Coefficienten von a_{ik} in R bedeutet, so heisst die quadratische Form

$$U = -\sum_{ik} \alpha_{ik} y_i y_k$$

der Form u adjungirt*). Nach §. 6, 1 hat man

$$-\Sigma \pm (-\alpha_{11}) \,.\,.\, (-\alpha_{nn}) = (-R)^{n-1}$$

d. h. die Determinante der adjungirten Form ist die $(n-1)$te Potenz der Determinante der Form.

Die adjungirte Form U und die Form u können als Determinanten dargestellt werden. Nach §. 3, 17 hat man

$$U = \begin{vmatrix} 0 & y_1 & . & . & y_n \\ y_1 & a_{11} & . & . & a_{1n} \\ . & . & . & . & . \\ y_n & a_{n1} & . & . & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Nach derselben Entwickelungsregel ist

$$\begin{vmatrix} 0 & x_1 & . & . & x_n \\ x_1 & \alpha_{11} & . & . & \alpha_{1n} \\ . & . & . & . & . \\ x_n & \alpha_{n1} & . & . & \alpha_{nn} \end{vmatrix} = -\Sigma x_i x_k A_{ik},$$

wenn A_{ik} den Coefficienten von α_{ik} in $\Sigma \pm \alpha_{11} \,.\,.\, \alpha_{nn}$ bedeutet. Nun ist $A_{ik} = R^{n-2} a_{ik}$ (§. 6, 2), folglich**)

$$R^{n-2} u = -\begin{vmatrix} 0 & x_1 & . & . & x_n \\ x_1 & \alpha_{11} & . & . & \alpha_{1n} \\ . & . & . & . & . \\ x_n & \alpha_{n1} & . & . & \alpha_{nn} \end{vmatrix}$$

*) Forma adjuncta. GAUSS l. c. 267.

**) BRIOSCHI Det. (53).

10. Die Form $u = \Sigma a_{ik} x_i x_k$ wird durch $u_1 x_1 + .. + u_n x_n$ ausgedrückt, so dass

$$u_i = a_{i1} x_1 + .. + a_{in} x_n$$

den halben Differentialquotienten von u in Bezug auf x_i bedeutet (1). Wenn die Determinante der Form verschwindet, so sind $u_1, .., u_n$ bei beliebigem x durch eine lineare Gleichung mit constanten Coefficienten verbunden

$$u_1 c_1 + .. + u_n c_n = 0$$

und die Form ist keine eigentliche von n Variablen, sondern geht bei der Vertauschung von $x_1, x_2, ..$ mit

$$x_1 - c_1 \frac{x_n}{c_n}, \qquad x_2 - c_2 \frac{x_n}{c_n}, \quad ...$$

in eine Form von $n-1$ unbestimmten Variablen über (§. 12, 7). In der That ist zufolge jener Bedingung $a_{i1} c_1 + .. + a_{in} c_n = 0$, daher

$$u_i = a_{i1}\left(x_1 - c_1 \frac{x_n}{c_n}\right) + .. + a_{i,n-1}\left(x_{n-1} - c_{n-1} \frac{x_n}{c_n}\right)$$

$$u = u_1\left(x_1 - c_1 \frac{x_n}{c_n}\right) + .. + u_{n-1}\left(x_{n-1} - c_{n-1} \frac{x_n}{c_n}\right)$$

Bei verschwindender Determinante ist auch $\alpha_{ik} = \sqrt{\alpha_{ii}}\sqrt{\alpha_{kk}}$ eindeutig, folglich die adjungirte Form $\Sigma \alpha_{ik} y_i y_k$ ein Quadrat, nämlich $\Sigma (\sqrt{\alpha_{ii}}\, y_i)^2$. Vergl. §. 6, 5 und 7, 2.

11. Eine quadratische Form lässt sich durch Quadrate linearer Functionen ihrer Variablen darstellen, deren Anzahl die Menge der Variablen nicht übersteigt*).

Wenn a_{ii} nicht Null ist, so ist

$$u = a_{ii} x_i^2 + 2 x_i p + u'$$

wobei die lineare Function p und die quadratische Form u' die Variable x_i nicht enthalten; folglich

$$a_{ii} u = (a_{ii} x_i + p)^2 + a_{ii} u' - p^2 .$$

Wenn aber $a_{ii} = 0$ und a_{ik} nicht Null ist, so hat man

---

*) Gauss Disq. arithm. 271. Theoria comb. observ. 31 (Comm. Gott. 1819). Derselbe Satz kommt implicite vor bei Euler's Classification der Flächen zweiten Grades. Introd. II, Append. c. 5.

$$u = 2a_{ik}x_ix_k + 2x_iq + 2x_kp + u''$$

wobei p, q, u'' die beiden Variablen x_i, x_k nicht enthalten; folglich

$$2a_{ik}u = 4(a_{ik}x_i + p)(a_{ik}x_k + q) + 2a_{ik}u'' - 4pq$$

$$= (a_{ik}x_i + p + a_{ik}x_k + q)^2 - (a_{ik}x_i + p - a_{ik}x_k - q)^2 + 2a_{ik}u'' - 4pq$$

In dem ersten Falle besteht die Form u aus einem Quadrat und einer quadratischen Form von $n-1$ Variablen, in dem zweiten Falle besteht sie aus 2 Quadraten und einer quadratischen Form von $n-2$ Variablen. Von den übrigen Formen können wiederum Quadrate abgelöst werden, u. s. w.

12. Im realen Gebiet ist eine quadratische Form entweder fähig, durch Null hindurchgehend das Zeichen zu wechseln, und heisst dann *indefinit*, oder sie ist unfähig, das Zeichen zu wechseln und heisst dann *definit* (positiv oder negativ). Gauss Disq. arithm. 271.

Wenn bei den Werthen $x_1 = c_1, .., x_n = c_n$, unter denen einer z. B. c_n nicht Null ist, die Form $u = 0$ wird, so ist sie indefinit oder eine uneigentliche Form mit verschwindender Determinante*).

Beweis. Durch die Substitution

$$x_1 = c_1\frac{x_n}{c_n} + y_1, \quad ..., \quad x_n = c_{n-1}\frac{x_n}{c_n} + y_{n-1}$$

erhält man

$$\Sigma a_{ik}x_ix_k = \Sigma a_{ik}\left(c_i\frac{x_n}{c_n} + y_i\right)\left(c_k\frac{x_n}{c_n} + y_k\right)$$

$$= \frac{x_n^2}{c_n^2}\Sigma a_{ik}c_ic_k + 2\frac{x_n}{c_n}\Sigma a_{ik}c_iy_k + \Sigma a_{ik}y_iy_k$$

Davon ist das erste Glied $= 0$ nach der Voraussetzung. Wenn nun $\Sigma a_{ik}c_iy_k$ bei gewissen Werthen von $y_1, .., y_{n-1}$ nicht verschwindet, so kann man den Werth von x_n so verändern, dass die Form Werthe von entgegengesetzten Zeichen erhält. Wenn aber $\Sigma a_{ik}c_iy_k$ bei allen Werthen von $y_1, .., y_{n-1}$ verschwindet, so hängt die gegebene Form von nicht mehr als $n-1$ Variablen ab; in der That verschwinden nicht nur die

*) Kronecker Monatsbericht der Berl. Acad. 1868 p. 339.

Summen $\Sigma a_{i1} c_i, \ldots, \Sigma a_{i,n-1} c_i$, sondern in Folge der Voraussetzung $\Sigma a_{ik} c_i c_k = 0$ ist auch $\Sigma a_{in} c_i = 0$, also verschwindet $\Sigma \pm a_{11} \ldots a_{nn}$.

Man schliesst hiernach, dass die eigentliche Form $\Sigma a_{ik} x_i x_k$ definit nicht sein kann, wenn die Coefficienten $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$ nicht alle von Null verschieden und nicht alle von einerlei Zeichen sind.

13. Wenn man aus zwei quadratischen Formen derselben Variablen

$$\varphi = \Sigma a_{ik} x_i x_k, \qquad \psi = \Sigma b_{ik} x_i x_k$$

mittelst der willkürlichen Multiplicatoren u, v unzählig viel Formen $u\varphi + v\psi$ ableitet, z. B.

$$\varphi' = u_1 \varphi + v_1 \psi, \qquad \psi' = u_2 \varphi + v_2 \psi$$

so können alle Formen $u\varphi + v\psi$ auch durch $u'\varphi' + v'\psi'$ dargestellt werden. Dazu sind die Bedingungen

$$u_1 u' + u_2 v' = u, \qquad v_1 u' + v_2 v' = v$$

erforderlich und hinreichend. Die Determinante der Form $u\varphi + v\psi$ ist im Allgemeinen eine Function $n$ten Grades von $u : v$, und abgesehn vom Zeichen

$$\begin{aligned} f(u,v) &= \Sigma \pm (u a_{11} + v b_{11}) \ldots (u a_{nn} + v b_{nn}) \\ &= (u v_1 - u_1 v) \ldots (u v_n - u_n v) \Sigma \pm a_{11} \ldots a_{nn} \end{aligned}$$

Wenn die Determinante von $u\varphi + v\psi$ einen complexen Divisor hat, d. h. wenn die Gleichung $f(u,v) = 0$ eine complexe Wurzel hat, so ist jede eigentliche unter den Formen $u\varphi + v\psi$ indefinit*).

Beweis. Es seien u_1 und u_2, v_1 und v_2 conjugirt complexe Zahlen, und $u_1 \varphi + v_1 \psi$, $u_2 \varphi + v_2 \psi$ Formen mit verschwindender Determinante, mithin von weniger als n Variablen und darstellbar durch weniger als n Quadrate z. B.

$$(y_1 + i z_1)^2 + \ldots + (y_{n-1} + i z_{n-1})^2 = \Sigma (y_r^2 - z_r^2) + 2 i \Sigma y_r z_r$$

in denen i eine Wurzel der negativen Einheit, $y_1, z_1, y_2, z_2, \ldots$ reale lineare Functionen der Variablen $x_1, \ldots, x_n$ bedeuten. Dann sind

*) Kronecker a. a. O. Vergl. unten §. 14, 14.

$$\tfrac{1}{2}(u_1+u_2)\varphi + \tfrac{1}{2}(v_1+v_2)\psi = \Sigma(y_r^2-z_r^2)$$
$$\frac{1}{2i}(u_1-u_2)\varphi + \frac{1}{2i}(v_1-v_2)\psi = 2\Sigma y_r z_r$$

zwei Formen, aus denen, wie oben bemerkt, alle Formen $u\varphi + v\psi$ durch

$$u'\Sigma(y_r^2 - y_r^2) + 2v'\Sigma y_r z_r$$

dargestellt werden können. Nun ist

$$u'y^2 + 2v'yz - u'z^2 = \frac{1}{u'}(u'y+v'z)^2 - \frac{1}{u'}(u'^2+v'^2)z^2$$
$$= (u'y+wz)\left(y - \frac{u'}{w}z\right)$$

wenn $v' + \sqrt{u'^2+v'^2} = w$ und demnach $v' - \sqrt{u'^2+v'^2} = -\frac{u'^2}{w}$ gesetzt wird. Jede unter den Formen

$$\Sigma(u'y_r + wz_r)\left(y_r - \frac{u'}{w}z_r\right)$$

verschwindet aber, wenn $x_1, \ldots, x_n$ den $n-1$ linearen Gleichungen $u'y_r + wz_r = 0$ genügen, und ist indefinit unter der Voraussetzung, dass ihre Determinante nicht verschwindet (12).

Umgekehrt schliesst man: Wenn unter allen eigentlichen Formen $u\varphi + v\psi$ eine definit ist, so hat die Gleichung $f(u, v) = 0$ lauter reale Wurzeln.

14. Zufolge der Identität

$$u\varphi + v\psi = \frac{uv_k - u_k v}{v_k}\varphi + \frac{u_k\varphi + v_k\psi}{v_k}v$$

kann die Form $u\varphi + v\psi$ mittelst der Divisoren ihrer Determinante durch Quadrate linearer Functionen dargestellt werden, in Betracht dass $u_k\varphi + v_k\psi$ eine Form von weniger als n Variablen ist*).

Wenn φ eine positive Form ist, so hat die Determinante von $u\varphi + v\psi$ nur reale Divisoren $uv_k - u_k v$ (13). Die Form $u_k\varphi + v_k\psi$ kann durch $n-1$ Variable $y_2, \ldots, y_n$ ausgedrückt werden. Die Form φ kann durch $y_2, \ldots, y_n$ und eine andre Variable ausgedrückt werden, wobei die Quadrate der Variablen positive Coefficienten haben (12). Man kann demnach von φ das

*) Kronecker briefl. Mittheilung 1867.

Quadrat einer linearen Function aller Variablen ablösen, so dass eine Form der $y_2, \ldots, y_n$ übrig bleibt (11), und man erhält

$$u\varphi + v\psi = \frac{uv_k - u_k v}{v_k} z^2 + u\varphi' + v\psi'$$

Hierbei ist φ' wiederum eine positive Form, daher kann man die Form $u\varphi' + v\psi'$ der Variablen $y_2, \ldots, y_n$ auf dieselbe Art zertheilen, u. s. w. Ein linearer Divisor der Determinante von $u\varphi' + v\psi'$ ist zugleich ein Divisor der Determinante von $u\varphi + v\psi$, weil beim Verschwinden jener Determinante auch diese verschwindet (10). Also findet man

$$u\varphi + v\psi = \frac{uv_1 - u_1 v}{v_1} z_1^2 + \ldots + \frac{uv_n - u_n v}{v_n} z_n^2$$

folglich

$$\varphi = z_1^2 + \ldots + z_n^2$$

$$-\psi = \frac{u_1}{v_1} z_1^2 + \ldots + \frac{u_n}{v_n} z_n^2$$

Wenn alle Wurzeln $\frac{u_1}{v_1}, \frac{u_2}{v_2}, \ldots$ der Gleichung $f(u, v) = 0$ negativ sind, so ist ψ eine positive Form.

Die übrigen Fälle sind von Weierstrass und Kronecker Monatsbericht der Berl. Acad. 1868 p. 310 ff. behandelt worden.

15. Wie man auch die quadratische Form $\Sigma a_{ik} x_i x_k$ in Aggregate von Quadraten realer linearer Ausdrücke transformirt, so findet sich doch in allen Aggregaten dieselbe Anzahl von positiven und dieselbe Anzahl von negativen Coefficienten der Quadrate*). Hat man die gegebene Form in das Aggregat

$$p_1 y_1^2 + p_2 y_2^2 + \ldots + p_n y_n^2$$

und durch eine andere Operation in das Aggregat

$$q_1 z_1^2 + q_2 z_2^2 + \ldots + q_n z_n^2$$

verwandelt, so ist identisch

$$p_1 y_1^2 + \ldots + p_n y_n^2 - q_1 z_1^2 - \ldots - q_n z_n^2 = 0 .$$

*) Jacobi hat diesen Satz 1847 gekannt, aber noch nicht veröffentlicht. Vergl. den nachgelassenen Aufsatz Jacobi's Crelle J. 53 p. 275 nebst den Mittheilungen von Hermite und Borchardt a. a. O. p. 271 und 281. Dasselbe Princip hat Sylvester entdeckt und unter dem Namen »Trägheitsgesetz der quadratischen Formen« bekannt gemacht Philos. Mag. 1852, II p. 140 und Philos. Trans. 1853 p. 481. Durch directe Beziehungen zwischen den Grössen p und q ist der Beweis von Brioschi geführt worden Nouv. Ann. 1856 Juli.

Sind nun m Coefficienten des einen Aggregats z. B. $p_1, \ldots, p_m$ positiv, die übrigen negativ, so können nicht weniger als m Coefficienten des andern Aggregats positiv sein. Wären z. B. $q_1, \ldots, q_{m-1}$ positiv, und $q_m, \ldots, q_n$ negativ, so gäbe es Werthe von $x_1, \ldots, x_n$, bei welchen

$$z_1, \ldots, z_{m-1}, \quad y_{m+1}, \ldots, y_n$$

verschwinden, während

$$p_1 y_1^2 + \ldots + p_m y_m^2 - q_m z_m^2 - \ldots - q_n z_n^2$$

positiv ist, gegen die Voraussetzung.

Anmerkung. Aus diesem Princip folgt, dass die quadratischen Formen von n Variablen (mit nicht verschwindender Determinante) unter einander specifisch verschieden sind je nach den Anzahlen positiver oder negativer Quadrate, durch welche sie dargestellt werden können. Unter den n Quadraten sind entweder n, oder $n-1$, oder $n-2, \ldots$ von einerlei Zeichen. Die Formen der ersten Art haben bei realen Werthen der Variablen nur positive oder nur negative Werthe und sind deshalb definit, während die Formen der übrigen Arten indefinit sind (12).

Wenn für $n = 3$ oder $n = 4$ die Verhältnisse von 2 Variablen zu der 3ten oder die Verhältnisse von 3 Variablen zu der 4ten die Coordinaten eines Punctes sind, und die gegebene Form nebst der durch eine lineare Substitution transformirten verschwindet, so sind die zu diesen Gleichungen gehörenden Curven oder Flächen zweiten Grades collinear (homographisch). Aus dem obigen Princip folgt nun, dass Ellipsen, Parabeln, Hyperbeln ohne Unterschied collinear sind, dass hingegen die Flächen zweiten Grades in 2 Arten zerfallen und nur die Flächen derselben Art collinear sind. Zu der einen Art gehören die Ellipsoide nebst den elliptischen Paraboloiden und Hyperboloiden; die andre Art umfasst die hyperbolischen Hyperboloide und Paraboloide. Möbius baryc. Calc. p. 314. Jacobi a. a. O. p. 280.

16. Unter einer Sturm'schen Reihe wird eine Reihe von Gliedern verstanden, welche durch die in ihr vorhandenen Zeichenwechsel reale Wurzeln einer gegebenen algebraischen

Gleichung anzeigt*). Jacobi und Hermite haben quadratische Formen angegeben, bei denen die Zählung der positiven und der negativen Quadrate, durch welche sie dargestellt werden können, denselben Dienst leistet, als die Betrachtung einer Sturm'schen Reihe.

Aus den von einander verschiedenen Wurzeln $\alpha_1, \alpha_2, .., \alpha_m$ der gegebenen Gleichung $f(x) = 0$, einem gegebenen realen Werth ω und den Unbestimmten $x_0, x_1, .., x_{m-1}$ bilde man die Summe

$$H = \Sigma(\omega - \alpha)(x_0 + x_1\alpha + .. + x_{m-1}\alpha^{m-1})^2$$

indem man für α die Wurzeln $\alpha_1, .., \alpha_m$ setzt. Jede reale unter der Grenze ω liegende Wurzel liefert ein positives Quadrat in die Summe H. Dagegen ergiebt jedes Paar von conjugirt complexen Wurzeln ein positives und ein negatives Quadrat für die Summe H, weil

$$(\beta + \gamma\sqrt{-1})(P + Q\sqrt{-1})^2 + (\beta - \gamma\sqrt{-1})(P - Q\sqrt{-1})^2$$
$$= \frac{2}{\beta}\left\{(\beta P - \gamma Q)^2 - (\beta^2 + \gamma^2)Q^2\right\}.$$

Also wird die Anzahl der verschiedenen realen unter oder über der Grenze ω liegenden Wurzeln gefunden, indem man die Anzahl der positiven oder der negativen Quadrate in der Summe H um die Anzahl der verschiedenen Paare von complexen Wurzeln vermindert. Die Anzahl der verschiedenen realen zwischen den Grenzen ω und ω' liegenden Wurzeln ergiebt sich darnach unabhängig von der Anzahl der complexen Wurzeln.

In der Summe H hat $x_i x_k$ den Coefficienten

$$t_{ik} = \Sigma(\omega - \alpha)\alpha^{i+k} = \omega s_{i+k} - s_{i+k+1}$$

*) Der nach Sturm benannte Lehrsatz ist von demselben der Pariser Academie 1829 Mai 13, ferner in Férussac Bulletin XI p. 410, Choquet et Mayer Algèbre 1832 und Mém. prés. 1835 tom. 6 mitgetheilt worden. Vergl. Moigno Liouv. J. 5 p. 75. Die allgemeine Aufstellung einer Sturm'schen Reihe verdankt man Sylvester (Philos. Mag. 1839 Dec.), dessen Angaben von Sturm (Liouv. J. 7 p. 356) bewiesen, von Cayley (Liouv. J. 11 p. 297. 13 p. 269) und Joachimsthal (Crelle J. 48 p. 386) erweitert wurden. Die zur Vertretung einer Sturm'schen Reihe dienende quadratische Form ist von Hermite Compt. rend. 1853, I p. 294 aufgestellt worden, weniger umfassend bereits von Jacobi 1847, wie aus einer Mittheilung von Borchardt Crelle J. 53 p. 281 hervorgeht. Vergl. Sylvester Philos. Trans. 1853 p. 484, Brioschi Nouv. Ann. 1856 Juli und die Monographie Hattendorf über die Sturm'schen Functionen, Göttingen 1862.

wenn man durch s_r die Summe der $r$ten Potenzen der Wurzeln $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ bezeichnet. Die Grössen s_r sind real und werden aus der Differenz der Quotienten $f'(x) : f(x)$ und $\varphi'(x) : \varphi(x)$ berechnet (§. 10, 6), indem man unter $\varphi(x)$ den Divisor versteht, welchen $f'(x)$ mit $f(x)$ in dem Falle gemein hat, dass die Wurzeln der Gleichung $f(x) = 0$ nicht alle von einander verschieden sind (§. 11, 20). Demnach ist $H = \Sigma\, t_{ik} x_i x_k$ eine quadratische Form mit realen Coefficienten, deren Glieder dadurch gebildet werden, dass man für i und k alle Numern von 0 bis $m-1$ setzt, und welche durch je eine bestimmte Anzahl von positiven und negativen Quadraten darstellbar ist (15). Die Determinante $T_{m-1} = \Sigma \pm t_{00} \ldots t_{m-1,m-1}$ und deren partiale Determinanten T_{m-2}, $T_{m-3}, \ldots$ können nach §. 10, 5 berechnet werden.

Anmerkung. Zu dem angegebenen Zweck hat Hermite*) die symmetrische Function

$$G(x, y) = \frac{(y-\omega) f(x) f'(y) - (x-\omega) f(y) f'(x)}{y-x}$$

aufgestellt und in die Summe $\Sigma\, h_{ik} x^i y^k$ entwickelt, deren Exponenten im Allgemeinen von 0 bis $n-1$ steigen. Zugleich ist

$$G(x, y) = \frac{f(x) f(y)}{y-x} \left\{ (y-\omega) \frac{f'(y)}{f(y)} - (x-\omega) \frac{f'(x)}{f(x)} \right\}$$

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \Sigma \frac{1}{x-\alpha}, \qquad \frac{y-\omega}{y-\alpha} - \frac{x-\omega}{x-\alpha} = \frac{(y-x)(\omega-\alpha)}{(x-\alpha)(y-\alpha)},$$

$$G(x, y) = \Sigma\, (\omega-\alpha) \frac{f(x)}{x-\alpha} \frac{f(y)}{y-\alpha}.$$

Wenn man in diesen Entwickelungen x^i, y^k durch z_i, z_k ersetzt, so erhält man einerseits die quadratische Form $\Sigma\, h_{ik} z_i z_k$, andrerseits die quadratische Form

$$\Sigma\, (\omega-\alpha)(x_0 + x_1 \alpha + \ldots + x_{n-1} \alpha^{n-1})^2$$

wobei $x_0, x_1, \ldots$ lineare Functionen der $z_1, z_2, \ldots$ sind. Die Anzahlen der positiven und der negativen Quadrate, durch welche diese letztre Form sich darstellen lässt, werden durch Bearbeitung der Form $\Sigma\, h_{ik} z_i z_k$ erkannt, deren Coefficienten ganze Functionen der Coefficienten von $f(x)$ sind.

*) Crelle J. 52 p. 43. Vergl. Kronecker Comptes rendus 1869 Mai 10.

§. 14. Die linearen, insbesondere die orthogonalen Substitutionen.

1. Wenn eine oder mehrere Functionen der Variablen $x_1, x_2, .., x_n$ durch die linearen Substitutionen

$$x_1 = b_{11} y_1 + b_{12} y_2 + \cdot \cdot + b_{1n} y_n$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$x_n = b_{n1} y_1 + b_{n2} y_2 + \cdot \cdot + b_{nn} y_n$$

in Functionen der Variablen $y_1, y_2, .., y_n$ transformirt werden, so wird die Determinante der Substitutionscoefficienten

$$\Sigma \pm b_{11} \cdot \cdot b_{nn}$$

die **Determinante (modulus) der linearen Substitution** genannt. Dieselbe muss von Null verschieden sein, wenn $x_1, x_2, .., x_n$ als unabhängig von einander vorausgesetzt werden (§. 12, 7). Die lineare Substitution heisst **unimodular***), wenn ihre Determinante $= 1$ ist.

2. Wenn die linearen Functionen $f_1, f_2, .., f_n$ der Variablen $x_1, x_2, .., x_n$ durch eine lineare Substitution in Functionen der Variablen $y_1, y_2, .., y_n$ transformirt werden, so ist die Determinante des Systems der transformirten Functionen (§. 12, 1) das Product der Determinante des Systems der gegebenen Functionen mit der Determinante der linearen Substitution**).

Beweis. Es seien

$$f_1 = a_{11} x_1 + \cdot \cdot + a_{1n} x_n$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$f_n = a_{n1} x_1 + \cdot \cdot + a_{nn} x_n$$

die gegebenen linearen Functionen. Durch die lineare Substitution

---

*) Sylvester Cambr. and Dubl. math. J. 7 p. 52. Ueber die Construction solcher Determinanten vergl. den oben (§. 3, 8) citirten Aufsatz von Hermite.

**) Vergl. den algebraischen Beweis der Multiplicationsregel (§. 5), z. B. Joachimsthal Crelle J. 40 p. 22. Die weitere Ausführung dieses Satzes ist oben §. 5, 8 gegeben worden.

$$x_1 = b_{11}y_1 + \,.\,.\, + b_{1n}y_n$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$x_n = b_{n1}y_1 + \,.\,.\, + b_{nn}y_n$$

erhält man die transformirten Functionen

$$f_1 = c_{11}y_1 + \,.\,.\, + c_{1n}y_n$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$f_n = c_{n1}y_1 + \,.\,.\, + c_{nn}y_n\,,$$

worin c_{ik} gefunden wird, indem man $x_1, x_2, .., x_n$ der Reihe nach mit $a_{i1}, a_{i2}, .., a_{in}$ multiplicirt, die Producte addirt und in der Summe den Coefficienten y_k aufsucht:

$$c_{ik} = a_{i1}b_{1k} + \,.\,.\, + a_{in}b_{nk}\,.$$

Nach §. 5, 1 ist

$$\Sigma \pm c_{11} \,.\,.\, c_{nn} = \Sigma \pm a_{11} \,.\,.\, a_{nn} \, \Sigma \pm b_{11} \,.\,.\, b_{nn}\,.$$

Anmerkung. Wenn überhaupt die Functionen $f_1, .., f_n$ der Variablen $x_1, .., x_n$ durch eine lineare Substitution in Functionen der Variablen $y_1, .., y_n$ transformirt worden sind, so ist die Functionaldeterminante des transformirten Systems das Product der Functionaldeterminante des gegebenen Systems mit der Determinante der Substitution. Nach §. 12, 5 ist nämlich

$$\Sigma \pm \frac{\partial f_1}{\partial y_1} \,.\,.\, \frac{\partial f_n}{\partial y_n} = \Sigma \pm \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \,.\,.\, \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \, \Sigma \pm \frac{\partial x_1}{\partial y_1} \,.\,.\, \frac{\partial x_n}{\partial y_n}\,.$$

Nun ist $\frac{\partial x_i}{\partial y_k} = b_{ik}$, folglich u. s. w.

3. Wenn die Function f der Variablen $x_1, .., x_n$ durch die lineare Substitution (1) in eine Function der Variablen $y_1, .., y_n$ transformirt worden ist, so ist die Determinante H' der zweiten Differentialquotienten der transformirten Function das Product derselben Determinante H der gegebenen Function mit dem Quadrat der Substitutionsdeterminante B *). Nach (2) hat man

$$\Sigma \pm \frac{\partial^2 f}{\partial y_1 \partial y_1} \,.\,.\, \frac{\partial^2 f}{\partial y_n \partial y_n} = \Sigma \pm \frac{\partial^2 f}{\partial y_1 \partial x_1} \,.\,.\, \frac{\partial^2 f}{\partial y_n \partial x_n} \, \Sigma \pm b_{11} \,.\,.\, b_{nn}$$

$$\Sigma \pm \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial y_1} \,.\,.\, \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial y_n} = \Sigma \pm \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_1} \,.\,.\, \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_n} \, \Sigma \pm b_{11} \,.\,.\, b_{nn}$$

folglich durch Multiplication $H' = H B^2$.

---

*) Hesse Crelle J. 28 p. 89.

Anmerkung. Wenn die Function f eine quadratische Form (§. 13, 9) bedeutet, so ist ihre Functionaldeterminante H von der Determinante dieser Form nur dem Zeichen nach verschieden. Daher wird die Determinante der transformirten Form gefunden, indem man die Determinante der gegebenen Form mit dem Quadrat der Substitutionsdeterminante multiplicirt*).

4. Unter der Resultante der homogenen ganzen Functionen

$$f(x, y) = a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} y + \ldots$$
$$g(x, y) = b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} y + \ldots$$

wird die aus den Coefficienten $a_m, a_{m-1}, \ldots, b_n, b_{n-1}, \ldots$ gebildete Formel verstanden, welche oben (§. 11, 5) als die Resultante von $f(x, 1)$ und $g(x, 1)$ angegeben worden ist. Wenn man die Functionen durch die lineare Substitution

$$x = \lambda u + \mu v, \qquad y = \lambda' u + \mu' v$$

transformirt hat, so findet man die auf gleiche Weise zu bildende Resultante der transformirten Functionen, indem man die Resultante der gegebenen Functionen mit der mnten Potenz der Substitutionsdeterminante $\lambda\mu' - \lambda'\mu$ multiplicirt**). Stellt man die gegebenen Functionen durch die Producte

$$a_m (x - \alpha_1 y) \ldots (x - \alpha_m y) \quad \text{und} \quad b_n (x - \beta_1 y) \ldots (x - \beta_n y)$$

dar, so ist ihre Resultante

$$R = a_m{}^n b_n{}^m D(\alpha_1, \ldots, \alpha_m; \beta_1, \ldots, \beta_n).$$

Die Differenz $\beta - \alpha$ ist die Determinante eines Paares von linearen Functionen $x - \beta y$ und $x - \alpha y$, und geht durch die angegebene Substitution in

$$(\beta - \alpha)(\lambda\mu' - \lambda'\mu)$$

über (2). Daher geht die Resultante R durch dieselbe Substitution in

$$R(\lambda\mu' - \lambda'\mu)^{mn}$$

über.

---

*) Diese Bemerkung ist für $n = 2$ von Lagrange (Mém. de Berlin 1773 p. 285) gemacht worden, für $n = 3$ von Gauss (Disq. arithm. 268).

**) Dieser Satz ist in einem umfassenderen Satz Boole's enthalten, welchen Cayley Crelle J. 30 p. 1 anführt. Vergl. Jacobi Crelle J. 40 p. 245. Salmon higher plane curves p. 295.

Anmerkung. Um die Discriminante der durch die angezeigte Substitution aus $f(x, y)$ entspringenden Function zu finden, hat man die Discriminante der gegebenen Function (§. 11, 19)

$$a_m^{2m-2} \Delta(\alpha_1, \ldots, \alpha_m)^2$$

mit der $m(m-1)$ten Potenz der Substitutionsdeterminante zu multipliciren, in Betracht dass $\Delta(\alpha_1, \ldots)^2$ das Product von $m(m-1)$ Differenzen ist.

Es giebt hiernach aus einer oder mehrern homogenen ganzen Functionen abgeleitete homogene ganze Formeln von der Eigenschaft, dass ihr Verhältniss zu den Formeln, die auf dieselbe Weise aus den durch eine lineare Substitution transformirten Functionen abgeleitet werden, eine Potenz der Substitutionsdeterminante ist, mithin den Werth 1 hat, wenn man eine lineare Substitution gebraucht, deren Determinante 1 ist. Die Formeln dieser Art hat Cayley a. a. O. unter dem Namen Hyperdeterminanten einer Function oder eines Systems von Functionen in umfassende Betrachtung gezogen. Man nennt die Hyperdeterminanten nach Sylvester (Philos. Mag. 1851, II p. 396) Covarianten oder Invarianten, je nachdem sie ausser den Coefficienten der Functionen auch die Variablen derselben enthalten oder nicht. Z. B. die Functionaldeterminante R des Systems von Functionen $f_1, \ldots, f_n$ der Variablen $x_1, \ldots, x_n$ ist im Allgemeinen eine Covariante des Systems, weil die Functionaldeterminante des durch eine lineare Substitution, deren Determinante B ist, transformirten Systems den Werth RB hat (2). Wenn das System nur homogene lineare Functionen enthält, so ist R nur aus den Coefficienten des Systems zusammengesetzt, also eine Invariante des Systems. Die Hesse'sche Determinante H einer homogenen ganzen Function von mehr als 2 Dimensionen ist eine Covariante der Function, weil dieselbe Determinante der transformirten Function den Werth HB^2 hat (3). Die Discriminante einer homogenen ganzen Function ist eine Invariante der Function, und die Resultante von zwei binären Formen ist eine Invariante dieses Systems. Vergl. Salmon Lessons introd. to the modern higher algebra 1859 (deutsch bearb. von Fiedler 1863) und die Abhandlungen von Aronhold Crelle J. 62 p. 281, 69 p. 185, Christoffel Crelle J. 68 p. 246.

5. Unter den linearen Substitutionen, durch welche man eine gegebene Function transformiren kann, ist besonders eine solche bemerkenswerth, durch welche zugleich die Summe der Quadrate der Variablen in die Summe der Quadrate der neuen Variablen transformirt wird. Diese Substitution ist von Euler (Nov. Comm. Petrop. 15 p. 75, 20 p. 217), Cauchy (Exerc. de Math. 4 p. 140), Jacobi (Crelle J. 12 p. 7), Cayley (Crelle J. 32 p. 119) in Betracht gezogen worden und heisst nach einer Bemerkung des Letztern eine orthogonale Substitution.

Wenn eine Function der Variablen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ durch eine lineare (orthogonale) Substitution

$$\begin{aligned} x_1 &= c_{11}y_1 + c_{12}y_2 + \ldots + c_{1n}y_n \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n &= c_{n1}y_1 + c_{n2}y_2 + \ldots + c_{nn}y_n \end{aligned}$$

in eine Function von $y_1, y_2, \ldots, y_n$ zu transformiren ist, dergestalt dass

$$y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_n^2 = x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2,$$

so haben die Coefficienten folgende Haupteigenschaften.

I. Für jedes i und k von 1 bis n ist (Euler)

$$\begin{aligned} c_{1i}^2 + c_{2i}^2 + \ldots + c_{ni}^2 &= 1 \\ c_{1i}c_{1k} + c_{2i}c_{2k} + \ldots + c_{ni}c_{nk} &= 0 \end{aligned}$$

zufolge der Identität

$$\begin{aligned} &y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_n^2 \\ &= (c_{11}y_1 + \ldots + c_{1n}y_n)^2 + \ldots + (c_{n1}y_1 + \ldots + c_{nn}y_n)^2 \\ &= y_1^2(c_{11}^2 + \ldots + c_{n1}^2) + \ldots + 2y_1y_2(c_{11}c_{12} + \ldots + c_{n1}c_{n2}) + \ldots \end{aligned}$$

II. Um die transformirte Function in die gegebene zu transformiren, hat man (Cauchy)

$$y_i = c_{1i}x_1 + c_{2i}x_2 + \ldots + c_{ni}x_n$$

zu substituiren. Denn

$$\begin{aligned} &c_{1i}x_1 + \ldots + c_{ni}x_n \\ &= y_1(c_{1i}c_{11} + \ldots + c_{ni}c_{n1}) + \ldots + y_n(c_{1i}c_{1n} + \ldots + c_{ni}c_{nn}), \end{aligned}$$

worin der Coefficient von y_i den Werth 1 hat, während die Coefficienten der übrigen Grössen verschwinden (I).

III. Das Quadrat der Determinante einer orthogonalen Substitution ist 1 (JACOBI). Denn nach der Multiplicationsregel ist

$$\begin{vmatrix} c_{11} & . & . & c_{1n} \\ . & . & . & . \\ c_{n1} & . & . & c_{nn} \end{vmatrix}^2 = \begin{vmatrix} d_{11} & . & . & d_{1n} \\ . & . & . & . \\ d_{n1} & . & . & d_{nn} \end{vmatrix},$$

wo

$$d_{ik} = c_{1i}c_{1k} + c_{2i}c_{2k} + \,.\,.\, + c_{ni}c_{nk}.$$

Nun ist $d_{ik} = 0$, $d_{ii} = 1$ (I), folglich reducirt sich die gesuchte Determinante auf ihr Anfangsglied $d_{11}\, d_{22}\,.\,.\, d_{nn} = 1$ (§. 2, 7).

IV. Wenn die Determinante der orthogonalen Substitution durch ε, der Coefficient von c_{ik} in ε durch γ_{ik} bezeichnet wird, so ist (JACOBI)

$$\gamma_{ik} = \varepsilon c_{ik}.$$

Um diese Identität zu finden, multiplicirt man der Reihe nach die Identitäten

$$\begin{array}{l} c_{11}c_{1k} + \,.\,.\, + c_{n1}c_{nk} = 0 \\ .\quad .\quad .\quad .\quad .\quad .\quad . \\ c_{1k}c_{1k} + \,.\,.\, + c_{nk}c_{nk} = 1 \\ .\quad .\quad .\quad .\quad .\quad .\quad . \\ c_{1n}c_{1k} + \,.\,.\, + c_{nn}c_{nk} = 0 \end{array}$$

mit $\gamma_{i1}, \gamma_{i2}, \ldots, \gamma_{in}$. Durch Summirung erhält man

$$\begin{array}{r} c_{1k}(c_{11}\gamma_{i1} + \,.\,.\, + c_{1n}\gamma_{in}) + \,.\,.\, + c_{ik}(c_{i1}\gamma_{i1} + \,.\,.\, + c_{in}\gamma_{in}) \\ + \,.\,.\, + c_{nk}(c_{n1}\gamma_{i1} + \,.\,.\, + c_{nn}\gamma_{in}) = \gamma_{ik}. \end{array}$$

Der Coefficient von c_{ik} ist ε, die Coefficienten der übrigen Grössen $c_{1k}, \ldots, c_{nk}$ verschwinden (§. 3, 3).

V. Die Coefficienten der orthogonalen Substitution genügen dem zweiten System von Identitäten (EULER)

$$\begin{array}{l} c_{i1}^2 + c_{i2}^2 + \,.\,.\, + c_{in}^2 = 1 \\ c_{i1}c_{k1} + c_{i2}c_{k2} + \,.\,.\, + c_{in}c_{kn} = 0 \end{array}$$

Denn nach (IV) ist

$$\varepsilon\,(c_{i1}c_{k1} + \,.\,.\, + c_{in}c_{kn}) = \gamma_{i1}c_{k1} + \,.\,.\, + \gamma_{in}c_{kn}.$$

Dieses Aggregat hat aber den Werth ε oder 0, je nachdem i und k gleich oder ungleich sind (§. 3, 3).

VI. Unter den partialen Determinanten, welche man aus dem System der Coefficienten einer orthogonalen Substitution bilden kann, findet folgender Zusammenhang statt (Jacobi):

$$\begin{vmatrix} c_{m+1,m+1} & \cdot & \cdot & c_{m+1,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{n,m+1} & \cdot & \cdot & c_{nn} \end{vmatrix} = \varepsilon \begin{vmatrix} c_{11} & \cdot & \cdot & c_{1m} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{m1} & \cdot & \cdot & c_{mm} \end{vmatrix}$$

Denn nach §. 6, 2 hat man

$$\begin{vmatrix} \gamma_{11} & \cdot & \cdot & \gamma_{1m} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \gamma_{m1} & \cdot & \cdot & \gamma_{mm} \end{vmatrix} = \varepsilon^{m-1} \begin{vmatrix} c_{m+1,m+1} & \cdot & \cdot & c_{m+1,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{n,m+1} & \cdot & \cdot & c_{nn} \end{vmatrix}$$

und nach (IV)

$$\begin{vmatrix} \gamma_{11} & \cdot & \cdot & \gamma_{1m} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \gamma_{m1} & \cdot & \cdot & \gamma_{mm} \end{vmatrix} = \varepsilon^{m} \begin{vmatrix} c_{11} & \cdot & \cdot & c_{1m} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{m1} & \cdot & \cdot & c_{mm} \end{vmatrix}$$

Durch Vergleichung dieser Identitäten ergiebt sich die behauptete Identität.

Noch einige weniger nahe liegende Relationen zwischen den Coefficienten einer orthogonalen Substitution haben Euler in der zuerst erwähnten Abhandlung und Jacobi Crelle J. 30 p. 46 angegeben. Vergl. Hesse Crelle J. 57 p. 175.

Anmerkung. Eine lineare Substitution, durch welche die Form

$$x_1^2 + \ldots + x_i^2 - x_{i+1}^2 - \ldots - x_n^2$$

in die Form

$$y_1^2 + \ldots + y_i^2 - y_{i+1}^2 - \ldots - y_n^2$$

verwandelt werden soll, kann aus einer orthogonalen Substitution abgeleitet werden, durch welche man die Form

$$x_1^2 + \ldots + x_i^2 + y_{i+1}^2 + \ldots + y_n^2$$

in die Form

$$y_1^2 + \ldots + y_i^2 + x_{i+1}^2 + \ldots + x_n^2$$

überführt. Mittelst der für $y_{i+1}, \ldots, y_n$ zu machenden Substitutionen werden dann die Variablen $x_{i+1}, \ldots, x_n$ durch $y_1, \ldots, y_n$ ausgedrückt. Jacobi Crelle J. 53 p. 278.

6. Da die n^2 Coefficienten einer orthogonalen Substitution $\frac{1}{2}n(n+1)$ Gleichungen (5, 1) zu genügen haben, so lassen sie sich als Functionen von $\frac{1}{2}n(n-1)$ unbestimmten Grössen

$$\begin{array}{cccc} b_{12} & b_{13} & \cdot\ \cdot & b_{1n} \\ & b_{23} & \cdot\ \cdot & b_{2n} \\ & & \cdot\ \cdot & \cdot \\ & & & b_{n-1,n} \end{array}$$

betrachten. In der That hat Euler nicht nur den Weg angezeigt, wie man durch $\frac{1}{2}n(n-1)$ binäre Transformationen die Coefficienten einer orthogonalen Substitution als Functionen von $\frac{1}{2}n(n-1)$ unbestimmten Grössen darstellen könne, sondern er hat auch in den Fällen $n=3$ und $n=4$ diese Coefficienten durch die unbestimmten Grössen rational ausgedrückt. Mit Hülfe der Determinanten ist es Cayley (l. c.) gelungen, bei n Variablen die Coefficienten einer orthogonalen Substitution als rationale Functionen von $\frac{1}{2}n(n-1)$ unbestimmten Grössen darzustellen.

Wenn nämlich durch $b_{12}, \ldots, b_{n-1,n}$ unbestimmte Grössen bezeichnet werden, wenn man unter den Voraussetzungen

$$b_{ik} + b_{ki} = 0\,, \qquad b_{11} = b_{22} = \ldots = \omega$$

die Determinante

$$B = \begin{vmatrix} b_{11} & \cdot\ \cdot & b_{1n} \\ \cdot & \cdot\ \cdot & \cdot \\ b_{n1} & \cdot\ \cdot & b_{nn} \end{vmatrix}$$

bildet und den Coefficienten von b_{ik} in B durch β_{ik} bezeichnet, so hat man

$$c_{ik} = \frac{2\omega\beta_{ik}}{B}\,, \qquad c_{ii} = \frac{2\omega\beta_{ii} - B}{B}$$

als allgemeine Formeln für die Coefficienten einer orthogonalen Substitution, deren Determinante den Werth 1 hat. Die Coefficienten einer orthogonalen Substitution von der Determinante -1 erhält man, indem man im System der gefundenen Coefficienten bei einer ungeraden Anzahl paralleler Reihen die Zeichen ändert.

Beweis. Die Grössen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ können dadurch von den Grössen $y_1, y_2, \ldots, y_n$ abhängig gemacht werden, dass man zugleich

$$x_i = b_{1i} z_1 + \cdots + b_{in} z_n$$
$$y_i = b_{i1} z_1 + \cdots + b_{ni} z_n$$

setzt. Durch Auflösung der linearen Systeme

$$x_1 = b_{11} z_1 + \cdots + b_{1n} z_n, \qquad y_1 = b_{11} z_1 + \cdots + b_{n1} z_n$$
$$\cdots\cdots\cdots \qquad \cdots\cdots\cdots$$
$$x_n = b_{n1} z_1 + \cdots + b_{nn} z_n \qquad y_n = b_{1n} z_1 + \cdots + b_{nn} z_n$$

findet man (§. 8, 1)

$$B z_i = \beta_{1i} x_1 + \beta_{2i} x_2 + \cdots + \beta_{ni} x_n$$
$$B z_i = \beta_{i1} y_1 + \beta_{i2} y_2 + \cdots + \beta_{in} y_n$$

Vermöge der Voraussetzungen $b_{ik} + b_{ki} = 0$, $b_{ii} = \omega$ und des zwischen x_i, y_i und den Grössen $z_1, z_2, \ldots, z_n$ angenommenen Zusammenhangs ist aber

$$x_i + y_i = 2\omega z_i,$$

folglich hat man zugleich

$$B y_i = 2\omega\beta_{1i} x_1 + \cdots + (2\omega\beta_{ii} - B) x_i + \cdots + 2\omega\beta_{ni} x_n$$
$$B x_i = 2\omega\beta_{i1} y_1 + \cdots + (2\omega\beta_{ii} - B) y_i + \cdots + 2\omega\beta_{in} y_n,$$

oder abgekürzt

$$y_i = c_{1i} x_1 + \cdots + c_{ni} x_n$$
$$x_i = c_{i1} y_1 + \cdots + c_{in} y_n.$$

Aus der Identität

$$y_i = c_{1i}(c_{11} y_1 + \cdots + c_{1n} y_n) + \cdots + c_{ni}(c_{n1} y_1 + \cdots + c_{nn} y_n)$$

folgen die Identitäten

$$1 = c_{1i}^2 + c_{2i}^2 + \cdots + c_{ni}^2$$
$$0 = c_{1i} c_{1k} + c_{2i} c_{2k} + \cdots + c_{ni} c_{nk},$$

wodurch diese rationalen Functionen der unbestimmten Grössen $b_{12}, \ldots, b_{n-1,n}$ als Coefficienten einer orthogonalen Substitution characterisirt werden (5, I).

Dass die Determinante ε dieser orthogonalen Substitution den Werth 1 (nicht -1) hat, erkennt man durch Bildung des Products εB^{n+1} d. i.

$$\left|\begin{array}{cccc} 2\omega\beta_{11}-B & 2\omega\beta_{12} & 2\omega\beta_{13} & . \\ 2\omega\beta_{21} & 2\omega\beta_{22}-B & 2\omega\beta_{23} & . \\ 2\omega\beta_{31} & 2\omega\beta_{32} & 2\omega\beta_{33}-B & . \\ . & . & . & \end{array}\right| \cdot \left|\begin{array}{cccc} b_{11} & b_{12} & b_{13} & . \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & . \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & . \\ . & . & . & \end{array}\right|$$

Weil nach §. 3, 3

$$2\omega\beta_{i1}b_{k1} + \,.\,.\, + (2\omega\beta_{ii} - B)\,b_{ki} + \,.\,.\, + 2\omega\beta_{in}b_{kn} = B\,b_{ik}$$
$$2\omega\beta_{i1}b_{i1} + \,.\,.\, + (2\omega\beta_{ii} - B)\,b_{ii} + \,.\,.\, + 2\omega\beta_{in}b_{in} = B\,b_{ii}$$

ist, so hat das Product (§. 5, 4) den Werth B^{n+1}, folglich ist $\varepsilon = 1$.

Wenn man endlich die Coefficienten

$$c_{1i}, \quad c_{2i}, \; . \; . \; , \; c_{ni} \qquad \text{oder} \qquad c_{k1}, \quad c_{k2}, \; . \; . \; , \; c_{kn}$$

mit den entgegengesetzten Zeichen versieht, so wechselt die Determinante der Substitution ihr Zeichen, während die characteristischen Gleichungen (5, I. V)

$$c_{1i}^2 + c_{2i}^2 + \,.\,.\, + c_{ni}^2 = 1$$
$$c_{1i}c_{1k} + c_{2i}c_{2k} + \,.\,.\, + c_{ni}c_{nk} = 0$$

oder

$$c_{k1}^2 + c_{k2}^2 + \,.\,.\, + c_{kn}^2 = 1$$
$$c_{k1}c_{i1} + c_{k2}c_{i2} + \,.\,.\, + c_{kn}c_{in} = 0$$

keine Veränderung erleiden.

Beispiele. Für $n = 2$ findet man

$$B = \left|\begin{array}{cc} 1 & \lambda \\ -\lambda & 1 \end{array}\right| = 1 + \lambda^2 .$$

Die Coefficienten der einzelnen Elemente in B sind

$$\begin{array}{cc} 1 & \lambda \\ -\lambda & 1 \; . \end{array}$$

Daher sind die Coefficienten einer binären orthogonalen Substitution von der Determinante 1 folgende:

$$\begin{array}{cc} \dfrac{1-\lambda^2}{1+\lambda^2} & \dfrac{2\lambda}{1+\lambda^2} \\[2ex] -\dfrac{2\lambda}{1+\lambda^2} & \dfrac{1-\lambda^2}{1+\lambda^2} \, . \end{array}$$

Die orthogonale Substitution

$$\begin{array}{cc} \dfrac{1-\lambda^2}{1+\lambda^2} & \dfrac{2\lambda}{1+\lambda^2} \\[2ex] \dfrac{2\lambda}{1+\lambda^2} & -\dfrac{1-\lambda^2}{1+\lambda^2} \end{array}$$

hat die Determinante -1.

Für $n = 3$ findet man (§. 7, 4)

$$B = \begin{vmatrix} 1 & \nu & -\mu \\ -\nu & 1 & \lambda \\ \mu & -\lambda & 1 \end{vmatrix} = 1 + \lambda^2 + \mu^2 + \nu^2$$

Die Coefficienten der einzelnen Elemente in B sind

$$\begin{array}{ccc} 1 + \lambda^2 & \nu + \lambda\mu & -\mu + \lambda\nu \\ -\nu + \lambda\mu & 1 + \mu^2 & \lambda + \mu\nu \\ \mu + \lambda\nu & -\lambda + \mu\nu & 1 + \nu^2 \,. \end{array}$$

Demnach findet man folgende Coefficienten einer ternären orthogonalen Substitution von der Determinante 1:

$$\begin{array}{ccc} \dfrac{1+\lambda^2-\mu^2-\nu^2}{B} & 2\,\dfrac{\nu+\lambda\mu}{B} & 2\,\dfrac{-\mu+\lambda\nu}{B} \\[2ex] 2\,\dfrac{-\nu+\lambda\mu}{B} & \dfrac{1+\mu^2-\nu^2-\lambda^2}{B} & 2\,\dfrac{\lambda+\mu\nu}{B} \\[2ex] 2\,\dfrac{\mu+\lambda\nu}{B} & 2\,\dfrac{-\lambda+\mu\nu}{B} & \dfrac{1+\nu^2-\lambda^2-\mu^2}{B} \end{array}$$

wie schon Euler in der zuerst erwähnten Abhandlung p. 101 angegeben hat. Diese Coefficienten sind von Rodrigues (Liouv. J. 5 p. 405) aus denselben Formeln abgeleitet worden, welche Euler (Nov. Comm. Petrop. 20 p. 217) zur Transformation eines dreirechtwinkeligen Coordinatensystems aufgestellt hatte. Um die Coefficienten einer ternären orthogonalen Substitution von der Determinante -1 zu erhalten, braucht man nur in dem obigen System die Zeichen von einer oder drei Zeilen oder von eben so viel Colonnen zu verändern.

Für $n = 4$ findet man

$$B = \begin{vmatrix} \omega & a & b & c \\ -a & \omega & h & -g \\ -b & -h & \omega & f \\ -c & g & -f & \omega \end{vmatrix} = \begin{array}{c} (\omega^2 + a^2 + b^2 + c^2 + f^2 + g^2 + h^2 + \vartheta^2)\,\omega^2 \,, \\ \omega\vartheta = af + bg + ch \,. \end{array}$$

$$\begin{array}{llll}
\beta_{11} = & (\omega^2 + f^2 + g^2 + h^2)\omega^2 & \beta_{12} = & (a\omega + f\vartheta - bh + cg)\omega \\
\beta_{21} = & (-a\omega - f\vartheta + cg - bh)\omega & \beta_{22} = & (\omega^2 + f^2 + b^2 + c^2)\omega^2 \\
\beta_{31} = & (-b\omega - cf - g\vartheta + ah)\omega & \beta_{32} = & (-h\omega + fg - ab - c\vartheta)\omega \\
\beta_{41} = & (-c\omega + bf - ag - h\vartheta)\omega & \beta_{42} = & (g\omega + fh + b\vartheta - ca)\omega \\
\\
\beta_{13} = & (b\omega + g\vartheta - cf + ah)\omega & \beta_{14} = & (c\omega + h\vartheta - ag + bf)\omega \\
\beta_{23} = & (h\omega + fg + c\vartheta - ab)\omega & \beta_{24} = & (-g\omega + hf - ac - b\vartheta)\omega \\
\beta_{33} = & (\omega^2 + g^2 + c^2 + a^2)\omega^2 & \beta_{34} = & (f\omega + gh + a\vartheta - bc)\omega \\
\beta_{43} = & (-f\omega + gh - bc - a\vartheta)\omega & \beta_{44} = & (\omega^2 + h^2 + a^2 + b^2)\omega^2
\end{array}$$

$$\begin{aligned}
Bc_{11} &= [\omega^2 - \vartheta^2 + f^2 - a^2 + g^2 - b^2 + h^2 - c^2]\omega^2 \\
Bc_{22} &= [\omega^2 - \vartheta^2 + f^2 - a^2 - (g^2 - b^2) - (h^2 - c^2)]\omega^2 \\
Bc_{33} &= [\omega^2 - \vartheta^2 - (f^2 - a^2) + (g^2 - b^2) - (h^2 - c^2)]\omega^2 \\
Bc_{44} &= [\omega^2 - \vartheta^2 - (f^2 - a^2) - (g^2 - b^2) + (h^2 - c^2)]\omega^2
\end{aligned}$$

u. s. f. Mit Hülfe dieser Formeln lassen sich ohne Weiteres die Coefficienten einer quaternären orthogonalen Substitution von der Determinante 1 oder -1 aufstellen.

Cayley's System dieser Coefficienten in Crelle J. 32 p. 122 enthält zwei Fehler (in β_{24} steht $-hf$ statt hf, in Bc_{11}, Bc_{22}, .. steht 1 statt $1 - \vartheta^2$), welche in der neueren Mittheilung Cayley's Crelle J. 50 p. 311 nicht vorkommen. Dagegen ist an dem zuletzt erwähnten Orte p. 312 Z. 5 v. o. der Druckfehler $+\delta\gamma'$ in $-\delta\gamma'$ zu verbessern. Die von Cayley gefundenen Coefficienten einer quaternären orthogonalen Substitution kommen in anderer Form bei Euler (Nov. Comm. Petrop. 15 p. 102) vor, der sie »nulla certa methodo, sed potius quasi divinando« erhalten hatte. Euler fügt hinzu: »si quis viam directam ad hanc solutionem manuducentem investigaverit, insignia certe subsidia analysi attulisse erit censendus.« Es ist Cayley nicht entgangen, wie sich aus den von ihm aufgestellten Coefficienten die Euler'sche Lösung ableiten lässt (vergl. Crelle J. 50 p. 312). Setzt man im obigen System

$$\omega = -\frac{s+d}{2}, \quad f = \frac{r+c}{2}, \quad g = -\frac{q+b}{2}, \quad h = \frac{p+a}{2},$$

$$\vartheta = \frac{s-d}{2}, \quad a = \frac{r-c}{2}, \quad b = -\frac{q-b}{2}, \quad c = \frac{p-a}{2},$$

und ändert man die Zeichen der letzten Horizontalreihe, wodurch die Determinante der orthogonalen Substitution den Werth -1 annimmt, so erhält man Euler's System ohne irgend eine

Abweichung. Denn das zweite Element der zweiten Horizontalreihe enthält bei Euler nur durch einen Druckfehler $-ds$ statt $+ds$.

7. Die binäre und ternäre orthogonale Substitution ist in der Geometrie gleichbedeutend mit der Transformation der orthogonalen Punctcoordinaten. Um von dem orthogonalen System x, y zu dem orthogonalen System x', y' überzugehen, unter der Voraussetzung, dass x, y, x', y' Richtungen einer Ebene sind, hat man die lineare Substitution zu machen, deren Coefficienten

$$\begin{matrix} \cos xx' & \cos xy' \\ \cos yx' & \cos yy' \end{matrix}$$

sind. Wenn Winkel von gleichen Zeichen durch Drehungen von einerlei Sinn beschrieben werden, mithin $xy + yx = 0$ ist, so hat man

$$xy' = xx' + x'y', \quad yx' = yx + xx', \quad yy' = yx + xx' + x'y'.$$

Sind nun die Winkel xy und $x'y'$ beide $= 90^0$, so ist

$$\cos xy' = -\sin xx', \quad \cos yx' = \sin xx', \quad \cos yy' = \cos xx'.$$

Wenn dagegen $xy = 90^0$ und $x'y' = -90^0$ ist, so ist

$$\cos xy' = \sin xx', \quad \cos yx' = \sin xx', \quad \cos yy' = -\cos xx'.$$

Daher hat man, wie bekannt, beim Uebergange zu einem System desselben Sinnes die lineare Substitution

$$\begin{matrix} \cos xx' & -\sin xx' \\ \sin xx' & \cos xx' \end{matrix}$$

von der Determinante 1 zu machen; beim Uebergange zu einem System entgegengesetzten Sinnes ist die erforderliche Substitution

$$\begin{matrix} \cos xx' & \sin xx' \\ \sin xx' & -\cos xx' \end{matrix}$$

von der Determinante -1.

Diese Bemerkungen werden durch ein bekanntes goniometrisches Theorem (s. unten §. 16, 3) bestätigt, nach welchem für beliebige Richtungen einer Ebene x, y, x', y'

$$\begin{vmatrix} \cos xx' & \cos xy' \\ \cos yx' & \cos yy' \end{vmatrix} = \sin xy \sin x'y'.$$

Diese Determinante ist positiv oder negativ, je nachdem $\sin xy$ und $\sin x'y'$ einerlei Zeichen haben oder nicht.

Umgekehrt schliesst man aus den Gleichungen

$$\cos^2 xx' + \cos^2 xy' = 1\,,$$
$$\cos^2 yx' + \cos^2 yy' = 1\,,$$
$$\cos xx' \cos yx' + \cos xy' \cos yy' = 0\,,$$

dass $\sin^2 xy$ und $\sin^2 x'y'$ den Werth 1 haben. Denn nach der Multiplicationsregel (§. 5, 4) ist

$$\sin^2 xy \sin^2 x'y' = \begin{vmatrix} \cos xx' & \cos xy' \\ \cos yx' & \cos yy' \end{vmatrix}^2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1\,.$$

Um die angegebenen Substitutionen zu rationalisiren, braucht man nur $\cos xx' = \cos^2 \frac{1}{2} xx' \left(1 - \operatorname{tang}^2 \frac{1}{2} xx'\right)$ u. s. w. zu benutzen und die Coefficienten der Substitution durch $\operatorname{tang} \frac{1}{2} xx'$ auszudrücken. Vergl. (6) Beispiel 1.

8. Um von dem orthogonalen Coordinatensystem x, y, z zu dem orthogonalen System x', y', z' überzugehen, hat man bekanntlich die lineare Substitution

$$\begin{matrix} \cos xx' & \cos xy' & \cos xz' \\ \cos yx' & \cos yy' & \cos yz' \\ \cos zx' & \cos zy' & \cos zz' \end{matrix}$$

zu machen, deren Coefficienten den Gleichungen (5, I) genügen müssen, mithin Functionen von 3 unbestimmten Grössen sind. Bezeichnet O den gemeinschaftlichen Anfang der Coordinaten und wird die Kugel, deren Centrum O und deren Radius die Längeneinheit ist, von den Richtungen der positiven Coordinaten in X, Y, Z, X', Y', Z' geschnitten, so sind die Coordinatensysteme desselben oder entgegengesetzten Sinnes, je nachdem die sphärischen Dreiecke XYZ und $X'Y'Z'$, oder die Tetraeder $OXYZ$ und $OX'Y'Z'$ desselben oder entgegengesetzten Sinnes sind.

I. Bei zwei sphärischen Figuren, wenn sie gleich und ähnlich und desselben Sinnes sind, giebt es einen sich selbst entsprechenden Punct S von solcher Lage, dass

$$SX = SX', \qquad SY = SY', \qquad SZ = SZ',$$

Winkel $XSY = X'SY', \qquad YSZ = Y'SZ', \qquad XSZ = X'SZ',$

$$XSX' = YSY' = ZSZ'\ *).$$

Nach einem elementaren Satze der sphärischen Trigonometrie hat man daher, wenn OS durch s und der Winkel XSX' durch φ bezeichnet wird,

$$\begin{aligned}
\cos xx' &= \cos^2 sx + \sin^2 sx \cos\varphi = \cos^2 sx\,(1 - \cos\varphi) + \cos\varphi \\
\cos yy' &= \cos^2 sy + \sin^2 sy \cos\varphi = \cos^2 sy\,(1 - \cos\varphi) + \cos\varphi \\
\cos zz' &= \cos^2 sz + \sin^2 sz \cos\varphi = \cos^2 sz\,(1 - \cos\varphi) + \cos\varphi\ .
\end{aligned}$$

Wenn man ferner die gleichen Winkel XSY und $X'SY'$ durch ϑ bezeichnet, so hat man nach demselben Satze der Trigonometrie

$$\cos xy' = \cos sx \cos sy' + \sin sx \sin sy' \cos(\varphi + \vartheta)$$

$$= \cos sx \cos sy + \sin sx \sin sy \cos\varphi \cos\vartheta - \sin sx \sin sy \sin\varphi \sin\vartheta\ .$$

Da aber

$$\cos xy = \cos sx \cos sy + \sin sx \sin sy \cos\vartheta = 0\ ,$$

$$\sin sx \sin sy \sin\vartheta = 6\ OXYS = \sin xy \cos sz = \cos sz\ ,$$

so erhält man

$$\cos xy' = \cos sx \cos sy\,(1 - \cos\varphi) - \cos sz \sin\varphi\ .$$

Aus dem Werthe von $\cos xy'$ findet man $\cos yx'$, weil der Winkel $YSX' = YSX + XSX' = -\varphi + \vartheta$ ist, durch Vertauschung von φ mit $-\varphi$

$$\cos yx' = \cos sx \cos sy\,(1 - \cos\varphi) + \cos sz \sin\varphi\ .$$

Ebenso ist

$$\begin{aligned}
\cos yz' &= \cos sy \cos sz\,(1 - \cos\varphi) - \cos sx \sin\varphi \\
\cos zy' &= \cos sy \cos sz\,(1 - \cos\varphi) + \cos sx \sin\varphi \\
\cos zx' &= \cos sz \cos sx\,(1 - \cos\varphi) - \cos sy \sin\varphi \\
\cos xz' &= \cos sz \cos sx\,(1 - \cos\varphi) + \cos sy \sin\varphi\ **),
\end{aligned}$$

*) Vergl. des Verf. Abhandlung über die Gleichheit und Aehnlichkeit u. s. w. Dresden 1852, §. 31 und 52, oder Elem. d. Math. 5tes Buch §. 4, 18.

**) Diess sind die von Euler Nov. Comm. Petrop. 20 p. 217 gefundenen Formeln, welche Jacobi Crelle J. 2 p. 188 in Erinnerung gebracht hat mit der Aufforderung, dieselben einfacher abzuleiten.

wo von den verfügbaren Grössen sx, sy, sz, φ die ersteren durch die Gleichung

$$\cos^2 sx + \cos^2 sy + \cos^2 sz = 1$$

unter einander verbunden sind.

Um diese Substitutionscoefficienten zu rationalisiren, führt man $\frac{1}{2}\varphi$ ein und erhält

$$\cos xx' = \cos^2 \tfrac{1}{2}\varphi + 2\cos^2 sx \sin^2 \tfrac{1}{2}\varphi - \sin^2 \tfrac{1}{2}\varphi$$

$$\cos xy' = 2\cos sx \cos sy \sin^2 \tfrac{1}{2}\varphi - 2\cos sz \sin \tfrac{1}{2}\varphi \cos \tfrac{1}{2}\varphi$$

u. s. f. Setzt man

$$\cos sx \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}\varphi = \lambda\,, \quad \cos sy \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}\varphi = \mu\,, \quad \cos sz \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}\varphi = \nu\,,$$

mithin

$$\operatorname{tang}^2 \tfrac{1}{2}\varphi = \lambda^2 + \mu^2 + \nu^2\,, \quad \frac{1}{\cos^2 \frac{1}{2}\varphi} = 1 + \lambda^2 + \mu^2 + \nu^2\,,$$

so erhält man das obige System rationaler Coefficienten einer ternären orthogonalen Substitution (6).

II. Bei zwei sphärischen Figuren, wenn sie gleich und ähnlich und entgegengesetzten Sinnes sind, giebt es einen sich selbst entsprechenden Hauptkreis, dessen Pol S seinem Gegenpunct entspricht, so dass

$$SX + SX' = 180^0\,, \quad SY + SY' = 180^0\,, \quad SZ + SZ' = 180^0\,,$$

$$\text{Winkel } XSY = X'SY'\,, \quad YSZ = Y'SZ'\,, \quad XSZ = X'SZ'\,,$$

$$XSX' = YSY' = ZSZ'\,.$$

Unter Annahme der vorigen Bezeichnungen hat man

$$\cos xx' = -\cos^2 sx + \sin^2 sx \cos\varphi = -\cos^2 sx\,(1 + \cos\varphi) + \cos\varphi$$

$$\cos xy' = -\cos sx \cos sy + \sin sx \sin sy \cos(\varphi + \vartheta)$$

$$= -\cos sx \cos sy\,(1 + \cos\varphi) - \cos sz \sin\varphi$$

u. s. w. Diese Formeln unterscheiden sich von den im vorigen Falle gefundenen nur durch die Zeichen, nachdem φ mit $180^0 - \varphi$ vertauscht worden ist. Der Winkel $180^0 - \varphi$ ist aber derjenige, welchen das System x', y', z' um die Axe s beschreiben muss, damit $X'Y'Z'$ mit der Gegenfigur von XYZ zusammenfällt.

III. Nach v. Staudt's Theorem (s. unten §. 16, 3) ist für beliebige Winkel und Lagen der coordinirten Axen

$$\begin{vmatrix} \cos xx' & \cos xy' & \cos xz' \\ \cos yx' & \cos yy' & \cos yz' \\ \cos zx' & \cos zy' & \cos zz' \end{vmatrix} = 36\ OXYZ\,.\,OX'Y'Z'\ .$$

Folglich ist die Determinante positiv oder negativ, je nachdem diese Tetraeder oder die von den Axen gebildeten Ecken desselben oder entgegengesetzten Sinnes sind. Bei einem orthogonalen System beträgt aber das zugehörige Tetraeder $\frac{1}{6}$ Cubikeinheit, daher ist die Determinante der orthogonalen Substitution 1 oder -1, je nachdem das neue System mit dem alten desselben oder entgegengesetzten Sinnes ist *).

IV. Umgekehrt schliesst man aus den Gleichungen

$$\cos^2 xx' + \cos^2 xy' + \cos^2 xz' = 1$$
$$\cos^2 yx' + \cos^2 yy' + \cos^2 yz' = 1$$
$$\cos^2 zx' + \cos^2 zy' + \cos^2 zz' = 1$$

$$\cos xx' \cos yx' + \cos xy' \cos yy' + \cos xz' \cos yz' = 0$$
$$\cos xx' \cos zx' + \cos xy' \cos zy' + \cos xz' \cos zz' = 0$$
$$\cos yx' \cos zx' + \cos yy' \cos zy' + \cos yz' \cos zz' = 0\,,$$

dass die Systeme x, y, z und x', y', z' orthogonal sind **). Denn

$$(36\ OXYZ\,,\ OX'Y'Z')^2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

worin nach der Regel für die Multiplication der Determinanten

$$a_{11} = \cos xx' \cos xx' + \cos xy' \cos xy' + \cos xz' \cos xz' = 1$$
$$a_{12} = \cos xx' \cos yx' + \cos xy' \cos yy' + \cos xz' \cos yz' = 0$$

u. s. w., so dass

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1\,.$$

---

*) Auf diesen Unterschied der Substitutionsdeterminanten hat Jacobi Crelle J. 15 p. 309 aufmerksam gemacht. Vergl. Möbius Statik §. 127, Magnus anal. Geom. des Raumes §. 13.

**) Dedekind Crelle J. 50 p. 272.

Nun ist $6\,OXYZ = \sin xy \sin xz \sin(xy^{\wedge}xz)$ u. s. w. Das Product der Sinus wird aber nur dann 1, wenn die Winkel recht sind.

9. Wenn $c_{11}, \ldots, c_{nn}$ die Coefficienten einer orthogonalen Substitution bedeuten, deren Determinante ε d. i. entweder 1 oder -1 ist, wenn

$$f(z) = \begin{vmatrix} c_{11}+z & c_{12} & . & . & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22}+z & . & . & c_{2n} \\ . & . & & . & . \\ c_{n1} & c_{n2} & . & . & c_{nn}+z \end{vmatrix}$$

so ist die Gleichung $f(z) = 0$ reciprok und hat mit Ausnahme der Wurzel $-\varepsilon$, welche bei ungeradem n vorhanden ist, keine realen Wurzeln*).

Beweis. Die Entwickelung der Determinante $f(z)$ nach steigenden Potenzen von z (§. 4, 3) giebt vermöge der in (5, VI) bewiesenen Eigenschaft der zu $f(0)$ gehörigen partialen Determinanten ohne Weiteres zu erkennen, dass die Coefficienten von $z^0, z^1, z^2, \ldots$ von den Coefficienten von $z^n, z^{n-1}, z^{n-2}, \ldots$ sich nur durch den Factor ε unterscheiden, dass also

$$\frac{\varepsilon f(z)}{z^n} = f\left(\frac{1}{z}\right),$$

was sich durch Multiplication der Determinanten ε und $f(z)$ bestätigen lässt. Demnach ist $f(-\varepsilon) = (-1)^n \varepsilon^{n-1} f(-\varepsilon)$, also verschwindet $f(-\varepsilon)$, wenn n eine ungerade Zahl ist. Ueber die Realität der übrigen Wurzeln der Gleichung $f(z) = 0$ erhält man Aufschluss durch das Product der Determinanten

$$f(z)f(-z) = \begin{vmatrix} d_{11}-z^2 & zd_{12} & zd_{13} & . \\ zd_{21} & d_{22}-z^2 & zd_{23} & . \\ zd_{31} & zd_{32} & d_{33}-z^2 & . \\ . & . & . & \end{vmatrix}$$

worin nach der Multiplicationsregel

$$d_{ii} - z^2 = c_{i1}c_{i1} + \ldots + (c_{ii}+z)(c_{ii}-z) + \ldots + c_{in}c_{in}$$
$$zd_{ik} = c_{i1}c_{k1} + \ldots + (c_{ii}+z)c_{ki} + \ldots + c_{ik}(c_{kk}-z) + \ldots + c_{in}c_{kn}$$

---

*) Brioschi Liouv. J. 19 p. 253. Vergl. Schläfli Crelle J. 65 p. 186.

folglich (5, I)

$$d_{ii} = 1 \,, \qquad d_{ik} = c_{ki} - c_{ik}$$

ist. Daher hat man $d_{ik} + d_{ki} = 0$, und nach §. 7, 6

$$\frac{f(z)\,f(-z)}{z^n} = \begin{vmatrix} \frac{1}{z} - z & d_{12} & . \\ d_{21} & \frac{1}{z} - z & . \\ . & . & \end{vmatrix} = \left(\frac{1}{z} - z\right)^n + \left(\frac{1}{z} - z\right)^{n-2} \Sigma D_2 + \ldots,$$

wobei die a. a. O. näher beschriebenen Coefficienten der Potenzen von $\frac{1}{z} - z$ positiv sind. Wenn nun z real ist, so ist für gerade oder ungerade n

$$\frac{f(z)\,f(-z)}{z^n} \quad \text{oder} \quad \frac{f(z)\,f(-z)}{z^n\left(\frac{1}{z} - z\right)}$$

positiv, folglich $f(z)$ von Null verschieden.

10. Die orthogonalen Substitutionen gehören zu denjenigen linearen Substitutionen, durch welche überhaupt eine gegebene quadratische Form von n Variablen in ein Aggregat von n Quadraten transformirt wird. Wenn die gegebene Form, die nach §. 13, 9 ff. durch $\Sigma a_{ik} x_i x_k$ bezeichnet wird, durch die lineare Substitution

$$\begin{aligned} x_1 &= c_{11} y_1 + \ldots + c_{1n} y_n \\ &\ldots\ldots\ldots \\ x_n &= c_{n1} y_1 + \ldots + c_{nn} y_n \end{aligned}$$

in das Aggregat $p_1 y_1^2 + p_2 y_2^2 + \ldots + p_n y_n^2$ übergeht, so erfolgt die Identität

$$\sum_{ik} a_{ik} (c_{i1} y_1 + \ldots)(c_{k1} y_1 + \ldots) = p_1 y_1^2 + \ldots + p_n y_n^2$$

unter den Bedingungen

$$\sum_{ik} a_{ik} (c_{ir} c_{ks} + c_{is} c_{kr}) = 0 \,, \qquad \sum_{ik} a_{ik} c_{ir} c_{kr} = p_r \,.$$

Setzt man zur Abkürzung

$$g_{is} = a_{i1} c_{1s} + \ldots + a_{in} c_{ns} \,,$$

so erhält man bei der Voraussetzung $a_{ki} = a_{ik}$ zur Bestimmung der Substitution das unzureichende System von $\frac{1}{2}n(n-1)$ Gleichungen

$$c_{1r}g_{1s} + \ldots + c_{nr}g_{ns} = 0 .$$

Aus solchen Grössen c, welche diesem System genügen, bildet man dann

$$c_{1r}g_{1r} + \ldots + c_{nr}g_{nr} = p_r ,$$

und findet

$$g_{1r}x_1 + \ldots + g_{nr}x_n = p_r y_r ,$$

$$p_r y_r^2 = \frac{(g_{1r}x_1 + \ldots + g_{nr}x_n)^2}{g_{1r}c_{1r} + \ldots + g_{nr}c_{1r}} ,$$

so dass nur die Verhältnisse der Substitutionscoefficienten zu einander in Betracht kommen.

Die Determinanten der gegebenen und der transformirten Form sind abgesehn vom Zeichen $\Sigma \pm a_{11} \ldots a_{nn}$ und $p_1 p_2 \ldots p_n$. Wenn nun die Determinante der Substitution den Werth ε hat, so ist (3)

$$p_1 \ldots p_n = \varepsilon^2 \Sigma \pm a_{11} \ldots a_{nn} .$$

Wenn man ferner den Coefficienten des Elements c_{ik} in der Determinante ε durch γ_{ik} bezeichnet, und die Gleichungen

$$\begin{aligned} 0 &= c_{11}g_{1r} + \ldots + c_{n1}g_{nr} \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ p_r &= c_{1r}g_{1r} + \ldots + c_{nr}g_{nr} \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ 0 &= c_{1n}g_{1r} + \ldots + c_{nn}g_{nr} \end{aligned}$$

der Reihe nach mit $\gamma_{i1}, \gamma_{i2}, \ldots$ multiplicirt, so findet man durch Addition

$$p_r \gamma_{ir} = \varepsilon g_{ir}$$

und hiernach wie oben (5)

$$p_1 \ldots p_m \Sigma \pm c_{m+1,m+1} \ldots c_{nn} = \varepsilon \Sigma \pm g_{11} \ldots g_{mm} .$$

11. Die Summe $f = \Sigma a_{ik} x_i y_k$ von n^2 Gliedern, welche dadurch gebildet werden, dass man für i und k alle Numern von 1 bis n setzt, und deren Coefficienten a_{ik} einer Beschränkung nicht unterliegen, ist eine homogene lineare Function sowohl der Variablen $x_1, \ldots, x_n$, als auch der Variablen $y_1, \ldots, y_n$, und heisst deshalb eine **bilineare Form** derselben*).

---

*) Jacobi Crelle J. 53 p. 265. Vergl. Christoffel Crelle J. 63 p. 255.

Bildet man die Differentialquotienten

$$u_i = \frac{\partial f}{\partial x_i} = a_{i1} y_1 + \,.\,.\, + a_{in} y_n$$

$$v_k = \frac{\partial f}{\partial y_k} = a_{1k} x_1 + \,.\,.\, + a_{nk} x_n$$

so hat man die characteristische Gleichung

$$f = u_1 x_1 + \,.\,.\, + u_n x_n = v_1 y_1 + \,.\,.\, + v_n y_n\,.$$

Von der bilinearen Form kann man ein Product einer linearen Function der x mit einer linearen Function der y so ablösen, dass eine bilineare Form von zweimal $n-1$ Variablen übrig bleibt. Unter der Voraussetzung, dass der Coefficient a_{11} nicht verschwindet, dass also in u_1 die Variable y_1, in v_1 die Variable x_1 nicht fehlt, bilde man die bilineare Form

$$f_1 = f - \frac{u_1 v_1}{a_{11}} = \Sigma\, a'_{ik} x_i y_k$$

welche die Variablen x_1, y_1 nicht mehr enthält, weil

$$a'_{ik} = a_{ik} - \frac{a_{i1} a_{1k}}{a_{11}}$$

verschwindet, wenn für i oder k die Numer 1 gesetzt wird. Mittelst der Differentialquotienten

$$u'_i = \frac{\partial f_1}{\partial x_i}\,; \qquad v'_k = \frac{\partial f_1}{\partial y_k}$$

kann ferner unter der Voraussetzung, dass a'_{22} nicht verschwindet, dass also weder y_2 in u'_2 noch x_2 in v'_2 fehlt, die bilineare Form

$$f_2 = f_1 - \frac{u'_2 v'_2}{a'_{22}} = \Sigma\, a''_{ik} x_i y_k$$

gebildet werden, welche auch die Variablen x_2, y_2 nicht mehr enthält, weil der Coefficient

$$a''_{ik} = a'_{ik} - \frac{a'_{i2} a'_{2k}}{a'_{22}}$$

verschwindet, wenn für i oder k die Numer 2 gesetzt wird. Durch fortgesetzte Ausscheidungen der angegebenen Art erhält man die besondere Darstellung

$$\Upsilon = \frac{u_1 v_1}{a_{11}} + \frac{u'_2 v'_2}{a'_{22}} + \frac{u''_3 v''_3}{a''_{33}} + \dots$$

Die Differentiation ergiebt aber

$$u'_i = u_i - \frac{u_1 a_{i1}}{a_{11}}, \qquad v'_k = v_k - \frac{v_1 a_{1k}}{a_{11}},$$

$$u''_i = u'_i - \frac{u'_2 a'_{i2}}{a'_{22}}, \qquad v''_k = v'_k - \frac{v'_2 a'_{2k}}{a'_{22}},$$

$$\dots\dots\dots \qquad \dots\dots\dots$$

mithin ist u'_i eine von y_1 unabhängige homogene lineare Verbindung von u_1 und u_i; u''_i eine von y_1 und y_2 unabhängige homogene lineare Verbindung von u'_2 und u'_i, also auch von u_1, u_2, u_i; u. s. f. In allen diesen Verbindungen hat u_i den Coefficienten 1. Daher kann

$$u^{(m)}_i = C_1 u_1 + \dots + C_m u_m + u_i$$

gesetzt werden. Weil diese Formel von $y_1, \dots, y_m$ unabhängig sein soll, so verschwinden die Coefficienten dieser Grössen, und man hat

$$0 = C_1 a_{11} + \dots + C_m a_{m1} + a_{i1}$$
$$\dots\dots\dots$$
$$0 = C_1 a_{1m} + \dots + C_m a_{mm} + a_{im}$$

folglich (§. 8)

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{m1} & a_{i1} \\ \dots & & & \dots \\ a_{1m} & \dots & a_{mm} & a_{im} \\ u_1 & \dots & u_m & u_i - u^{(m)}_i \end{vmatrix} = 0$$

oder

$$u^{(m)}_i \Sigma \pm a_{11} \dots a_{mm} = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{m1} & a_{i1} \\ \dots & & & \dots \\ a_{1m} & \dots & a_{mm} & a_{im} \\ u_1 & \dots & u_m & u_i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} & u_1 \\ \dots & & & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mm} & u_m \\ a_{i1} & \dots & a_{im} & u_i \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} & a_{1,m+1} y_{m+1} + \dots + a_{1n} y_n \\ \dots & & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mm} & a_{m,m+1} y_{m+1} + \dots + a_{mn} y_n \\ a_{i1} & \dots & a_{im} & a_{i,m+1} y_{m+1} + \dots + a_{in} y_n \end{vmatrix}.$$

Aus $u^{(m)}_i$ wird $v^{(m)}_k$ abgeleitet, indem man u_r durch v_r, und a_{rs} durch a_{sr} ersetzt.

Die Variable y_k hat in $u^{(m)}_i$ den Coefficienten $a^{(m)}_{ik}$, also ist

$$a^{(m)}_{ik} \Sigma \pm a_{11} \ldots a_{mm} = \Sigma \pm a_{11} \ldots a_{mm} a_{ik}$$

$$a^{(m)}_{m+1,m+1} = \frac{\Sigma \pm a_{11} \ldots a_{m+1,m+1}}{\Sigma \pm a_{11} \ldots a_{mm}}.$$

Unter Annahme der Bezeichnungen

$$A_m = \Sigma \pm a_{11} \ldots a_{mm}$$

$$U_m = \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1,m-1} & u_1 \\ . & \ldots & . & . \\ a_{m1} & \ldots & a_{m,m-1} & u_m \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1,m-1} & a_{1m} y_m + \ldots \\ . & \ldots & . & \ldots \\ a_{m1} & \ldots & a_{m,m-1} & a_{mm} y_m + \ldots \end{vmatrix}$$

$$= A_m y_m + \ldots,$$

$$V_m = \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{m-1,1} & v_1 \\ . & \ldots & . & . \\ a_{1m} & \ldots & a_{m-1,m} & v_m \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{m-1,1} & a_{m1} x_m + \ldots \\ . & \ldots & . & \ldots \\ a_{1m} & \ldots & a_{m-1,m} & a_{mm} x_m + \ldots \end{vmatrix}$$

$$= A_m x_m + \ldots,$$

ergiebt sich endlich

$$\frac{u^{(m)}_{m+1} v^{(m)}_{m+1}}{a^{(m)}_{m+1,m+1}} = \frac{U_{m+1} V_{m+1}}{A_m A_{m+1}} = \frac{A_{m+1}}{A_m} x_{m+1} y_{m+1} + \ldots,$$

$$f = \frac{U_1 V_1}{A_1} + \frac{U_2 V_2}{A_1 A_2} + \frac{U_3 V_3}{A_2 A_3} + \ldots$$

Wenn es demnach eine Anordnung der Variablen einer bilinearen Form giebt, bei der die partialen Determinanten $A_1, A_2, A_3, \ldots$ nicht verschwinden, so kann die bilineare Form auf eine bestimmte Weise als Summe von Producten homogener linearer Functionen $U_1 V_1, U_2 V_2, \ldots$ so dargestellt werden, dass U_m und V_m von der $m$ten (und den folgenden) Variablen je einer Schaar abhängen und die vorangehenden Variablen nicht enthalten.

12. Ebenso kann unter den analogen Voraussetzungen die quadratische Form $\Sigma a_{ik} x_i x_k$, deren Coefficienten a_{ik} und a_{ki} gleich sind, auf eine bestimmte Weise als Aggregat von Quadraten homogener linearer Functionen der Variablen so dargestellt werden, dass die $m$te Function von der $m$ten und den folgenden Variablen, aber nicht von den vorangehenden ab-

hängt*). Denn die bilineare Form $f = \Sigma a_{ik} x_i y_k$ geht in die gegebene quadratische Form über, wenn y_k mit x_k, a_{ki} mit a_{ik} zusammenfällt. Versteht man nun unter u_i, u'_i, . . die halben Differentialquotienten (§. 13, 1), so hat man (11)

$$f = \frac{U_1^2}{A_1} + \frac{U_2^2}{A_1 A_2} + . . + \frac{U_n^2}{A_{n-1} A_n}$$

worin $A_m = \Sigma \pm a_{11} \,.\,.\, a_{mm}$ eine nicht verschwindende partiale Determinante der Coefficienten a_{ik} bedeutet, und

$$U_m = \begin{vmatrix} a_{11} & . \; . & a_{1,m-1} & u_1 \\ . & . \; . & . & . \\ a_{m1} & . \; . & a_{m,m-1} & u_m \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & . \; . & a_{1,m-1} & a_{1m} x_m + . \, . \\ . & . \; . & . & . \qquad . \\ a_{m1} & . \; . & a_{m,m-1} & a_{mm} x_m + . \, . \end{vmatrix} .$$

Die Anzahl der Quadrate, welche negative Coefficienten haben, ist der Anzahl der Zeichenwechsel gleich, welche die Reihe

$$1 \,, \quad A_1 \,, \quad A_2 \,, \, . \, . \, . \,, A_n$$

darbietet.

13. Zwei gegebene quadratische Formen der Variablen $x_1 , . . , x_n$

$$\varphi = \Sigma a_{ik} x_i x_k \qquad \psi = \Sigma b_{ik} x_i x_k$$

deren Determinanten nicht verschwinden, können im Allgemeinen durch eine bestimmte lineare Substitution

$$\begin{aligned} x_1 &= c_{11} y_1 + . \, . + c_{1n} y_n \\ &. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ x_n &= c_{n1} y_1 + . \, . + c_{nn} y_n \end{aligned}$$

deren Determinante den Werth ε hat, in die Formen

$$\begin{aligned} \varphi &= p_1 y_1^2 + p_2 y_2^2 + . \, . + p_n y_n^2 \\ \psi &= s_1 p_1 y_1^2 + s_2 p_2 y_2^2 + . \, . + s_n p_n y_n^2 \end{aligned}$$

gebracht werden**). Denn man hat zur Bestimmung der n^2

---

*) Jacobi Crelle J. 53 p. 270 und 282. Diese Transformation der quadratischen Formen war von Gauss theor. combin. observ. 31 (Comm. Gott. V. 1819) angezeigt worden. Einen Beweis derselben findet man bei Brioschi Nouv. Ann. 1856 Juli.

**) Cauchy Exerc. de Math. 4 p. 140. Jacobi Crelle J. 12 p. 1. Weierstrass Berl. Monatsbericht 1858 p. 207 (vergl. Brioschi Ann. di Matem. 1858 Juli und Christoffel Crelle J. 63 p. 255).

Substitutionscoefficienten $\frac{1}{2}n(n-1) + \frac{1}{2}n(n-1) + n$ Gleichungen (10).

Bei dieser Transformation geht die quadratische Form $s\varphi - \psi$ mit der Determinante

$$f(s) = \begin{vmatrix} sa_{11} - b_{11} & . & . & sa_{1n} - b_{1n} \\ . & & . & . \\ sa_{n1} - b_{n1} & . & . & sa_{nn} - b_{nn} \end{vmatrix}$$

in die Form $(s-s_1)p_1 y_1{}^2 + \ldots + (s-s_n)p_n y_n{}^2$ über, deren Determinante

$$(s-s_1) \ldots (s-s_n) p_1 \ldots p_n = \varepsilon^2 f(s)$$

ist (3). Zugleich hat die Determinante $p_1 \ldots p_n$ der transformirten Form φ den Werth $\varepsilon^2 \Sigma \pm a_{11} \ldots a_{nn}$, also ist

$$f(s) = (s-s_1) \ldots (s-s_n) \Sigma \pm a_{11} \ldots a_{nn}$$

d. h. $s_1, \ldots, s_n$ sind die Wurzeln der Gleichung $n$ten Grades $f(s) = 0$. In der That sind $s_1\varphi - \psi$, $s_2\varphi - \psi$, .. quadratische Formen mit verschwindenden Discriminanten und von weniger als n Unbestimmten (§. 13, 10).

Setzt man wie oben (10)

$$g_{ik} = a_{i1}c_{1k} + \ldots + a_{in}c_{nk}, \qquad h_{ik} = b_{i1}c_{1k} + \ldots + b_{in}c_{nk},$$

und bezeichnet man den Coefficienten des Elements c_{ik} in ε durch γ_{ik}, so hat man

$$p_k\gamma_{ik} = \varepsilon g_{ik}, \qquad s_k p_k \gamma_{ik} = \varepsilon h_{ik}$$

folglich $s_k g_{ik} - h_{ik} = 0$ d. h.

$$(s_k a_{i1} - b_{i1})c_{1k} + \ldots + (s_k a_{in} - b_{in})c_{nk} = 0.$$

Indem man hierin für i die Numern 1, 2, .., n setzt, erhält man n Gleichungen, vermöge deren (§. 8, 3)

$$\begin{vmatrix} s_k a_{11} - b_{11} & . & . & s_k a_{1n} - b_{1n} \\ . & . & . & . \\ s_k a_{n1} - b_{n1} & . & . & s_k a_{nn} - b_{nn} \end{vmatrix} = 0,$$

$$c_{1k} : c_{2k} : \ldots : c_{nk} = f(s_k)_{i1} : f(s_k)_{i2} : \ldots : f(s_k)_{in}$$

ist, wenn man den Coefficienten des Elements $sa_{ik} - b_{ik}$ in $f(s)$ durch $f(s)_{ik}$ bezeichnet. Dabei hat man (§. 6, 5)

$$f(s)_{ik} = f(s)_{ki} \qquad f(s_r)_{ik}{}^2 = f(s_r)_{ii} f(s_r)_{kk}$$

und es bestätigt sich, dass s_k eine Wurzel der Gleichung $f(s) = 0$ ist. Aus der Proportion $c_{1k} : c_{2k} : ..$ wird $p_k y_k^2$ gefunden (10), aber nur unter der Voraussetzung, dass s_k eine einfache Wurzel der Gleichung $f(s) = 0$ ist. Wenn s_1 und s_2 conjugirt complex sind, so sind auch $p_1 y_1^2$ und $p_2 y_2^2$ conjugirt complex, mithin φ und ψ durch je n Quadrate darstellbar, welche nicht alle dasselbe Zeichen haben (§. 13, 16). Umgekehrt schliesst man: Wenn eine der Formen φ, ψ definit ist d. h. durch n Quadrate von einerlei Zeichen sich darstellen lässt, und die Gleichung $f(s) = 0$ lauter verschiedene Wurzeln hat, so sind diese Wurzeln real.

Wenn eine der gegebenen Formen definit ist, so hat die Gleichung $f(s) = 0$ nur reale Wurzeln auch dann, wenn dieselben nicht alle von einander verschieden sind (§. 13, 13). Dabei ist eine λfache Wurzel der Gleichung $f(s) = 0$ zugleich eine $(\lambda - 1)$-fache Wurzel der Gleichungen $f(s)_{ik} = 0$, ohne dass die Darstellbarkeit der beiden gegebenen Formen durch die Quadrate derselben n realen linearen Functionen von $x_1, .., x_n$ verloren geht, wie Weierstrass a. a. O. bewiesen hat.

Anmerkung. Wenn die beliebige quadratische Form ψ durch n Quadrate insbesondere mittelst einer orthogonalen Substitution dargestellt werden soll, welche die Form

$$\varphi = x_1^2 + x_2^2 + .. + x_n^2 \quad \text{in} \quad y_1^2 + .. + y_n^2$$

verwandelt, so hat die zu diesem Zwecke aufzulösende Gleichung $f(s) = 0$ nur reale Wurzeln, welche aber nicht nothwendig alle von einander verschieden sind. Auf einer solchen Transformation beruht namentlich die Bestimmung der Hauptaxen von Linien und Flächen zweiten Grades, der mechanischen Hauptaxen eines gegebenen Körpers, der säcularen Störungen von Planeten (Laplace Mém. de Paris 1772, II p. 293 und 362). Die dabei eintretende Realität der Wurzeln der Gleichung $f(s) = 0$ wurde für den dritten Grad von Lagrange (Mém. de Berlin 1773 p. 108) bewiesen, für höhere Grade von Cauchy und Jacobi a. a. O.; auf einem neuen und directen Wege für den dritten Grad von Kummer (Crelle J. 26 p. 268. Vergl. Jacobi Crelle J. 30 p. 46), für höhere Grade von Borchardt Liouv. J. 12 p. 50 — zunächst unter der Voraussetzung, dass alle Wurzeln der Gleichung

$f(s) = 0$ von einander verschieden sind. Die angezeigte Eigenschaft der Gleichung $f(s) = 0$ erkennt man nach Sylvester (Philos. Mag. 1852, II p. 138) durch Entwickelung des Products $f(s)f(-s)$, welches für imaginäre Werthe von s durchaus positiv bleibt (vergl. 9). Die Auflösung des allgemeinen Problems ist tiefer ergründet worden von Weierstrass und Kronecker Berl. Monatsbericht 1868 Mai 18.

§. 15. Die Dreiecksfläche und das Tetraedervolum.

1. Wenn O den Anfang beliebiger coordinirter Axen bedeutet, wenn x, y und x_1, y_1 die mit den Axen parallelen Coordinaten der Puncte A und B sind und die Geraden, auf denen OA und OB liegen, wie die Strecken selbst durch r, r_1 bezeichnet werden, wenn ferner die Dreiecksfläche OAB positiv oder negativ genommen wird, je nachdem der Sinn der Drehung, welcher durch die Ordnung der Puncte O, A, B bestimmt ist, mit dem positiven Sinn der Ebene, in welchem positive Winkel derselben beschrieben werden, übereinstimmt oder nicht übereinstimmt, so ist*)

$$2\,OAB = rr_1 \sin rr_1 = \begin{vmatrix} x & y \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix} \sin xy\,.$$

Beweis. Es ergiebt sich unmittelbar aus der über das Zeichen der Dreiecksfläche gemachten Voraussetzung, dass $rr_1 \sin rr_1$ auch dem Zeichen nach mit $2\,OAB$ übereinstimmt. Man hat aber (§. 3, 4)

$$-r^2 r_1^2 \sin^2 rr_1 = \begin{vmatrix} rr & rr_1 \cos rr_1 \\ rr_1 \cos rr_1 & r_1 r_1 \end{vmatrix}$$

und durch orthogonale Projection

*) Diese Formel ist in einem Theorem Varignon's (Mém. de Paris 1719 p. 66) enthalten, dessen genaue geometrische Darstellung nebst der Bestimmung der Zeichen man in Möbius Statik §. 35 und in des Verf. Elementen der Math. Planimetrie §. 9, 8 findet. In der gegenwärtigen Gestalt kommt die Formel bei Monge vor (J. de l'école polyt. Cah. 15 p. 68), und liegt der Formel für die Fläche eines Polygons zu Grunde, welche Gauss in den Zusätzen zu Schumacher's Uebersetzung von Carnot geom. de position gegeben hat.

$$\begin{aligned} r\cos xr &= x + y\cos xy \\ r\cos yr &= x\cos xy + y \\ r &= x\cos xr + y\cos yr \end{aligned}$$

$$rr_1\cos rr_1 = x_1 r\cos xr + y_1 r\cos yr = xr_1\cos xr_1 + yr_1\cos yr_1 .$$

Nun ist nach der Multiplicationsregel (§. 5, 1)

$$\begin{vmatrix} xr\ \cos xr + yr\ \cos yr & xr_1\cos xr_1 + yr_1\cos yr_1 \\ x_1 r\cos xr + y_1 r\cos yr & x_1 r_1\cos xr_1 + y_1 r_1\cos yr_1 \end{vmatrix}$$
$$= \begin{vmatrix} x & y \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} r\ \cos xr & r\ \cos yr \\ r_1\cos xr_1 & r_1\cos yr_1 \end{vmatrix}$$

und ebenso

$$\begin{vmatrix} r\ \cos xr & r\ \cos yr \\ r_1\cos xr_1 & r_1\cos yr_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & y \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & \cos xy \\ \cos xy & 1 \end{vmatrix}$$

Daher findet man, wenn ε entweder 1 oder -1 ist,

$$rr_1\sin rr_1 = \varepsilon \begin{vmatrix} x & y \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix} \sin xy .$$

Wenn y und x_1 verschwinden, so geht r in x, r_1 in y_1 über. Demnach ist $\varepsilon = 1$.

Anmerkung. Wenn der Punct B dem Puncte A unendlich nahe liegt, so ist

$$r_1 = r + dr , \quad x_1 = x + dx , \quad y_1 = y + dy .$$

Indem man den Winkel xr durch ϑ bezeichnet, erhält man

$$2\,OAB = r^2 d\vartheta = \begin{vmatrix} x & x+dx \\ y & y+dy \end{vmatrix} \sin xy = \begin{vmatrix} x & dx \\ y & dy \end{vmatrix} \sin xy$$

durch Anwendung von §. 3, 6.

2. Wenn das Volum des Tetraeders $OABC$ durch die Kanten OA, OB, OC und deren Winkel unzweideutig ausgedrückt werden soll, so bestimme man willkürlich die positiven Richtungen der Geraden x, y, z, auf denen die Kanten OA, OB, OC liegen, und demgemäss die Zeichen dieser Kanten; ferner bestimme man willkürlich die positive Richtung der Normale z' der Ebene xy, und demgemäss den positiven Sinn dieser Ebene. Dann ist auch dem Zeichen nach

$$2\,OAB = OA\,.\,OB\sin xy ,$$

und der Abstand der Spitze C von der Ebene der Fläche OAB

$$OC \cos zz' ,$$

folglich *)

$$6\, OABC = OA \,.\, OB \,.\, OC \sin xy \cos zz' \,.$$

Wenn zur positiven Richtung von x oder y die entgegengesetzte gewählt wird, so wechseln OA oder OB und $\sin xy$ das Zeichen. Wenn zur positiven Richtung von z die entgegengesetzte gewählt wird, so wechseln OC und $\cos zz'$ das Zeichen. Wenn zur positiven Richtung von z' die entgegengesetzte gewählt wird, so wechseln $\sin xy$ und $\cos zz'$ das Zeichen. Bei jeder Wahl erhält also $OA \,.\, OB \,.\, OC \sin xy \cos zz'$ dasselbe Zeichen.

In gleicher Weise findet man

$$6\, OBAC = OA \,.\, OB \,.\, OC \sin yx \cos zz' \,.$$

Nun ist $\sin yx = -\sin xy$, folglich $OBAC = -OABC$, u. s. w.

3. Der goniometrische Factor, mit welchem das Product der an einer Ecke des Tetraeders liegenden Kanten multiplicirt werden muss, damit man das 6fache Volum des Tetraeders erhält, wird nach v. Staudt (Crelle J. 24 p. 252) der **Sinus der Ecke** genannt und durch $\sin xyz$ bezeichnet, wenn die Kanten auf den Geraden x, y, z liegen. Nach (2) ist

$$\sin xyz = \sin yzx = \,.\,.\, = -\sin yxz = -\sin xzy = \,.\,.$$

und aus sphärisch-trigonometrischen Gründen

$$\sin xyz = \sin xy \sin xy\hat{\ }z = \sin xy \sin yz \sin xy\hat{\ }yz \,,$$

wenn $xy\hat{\ }z$ und $xy\hat{\ }yz$ die mit der Ebene xy von der Geraden z und von der Ebene yz gebildeten Winkel bedeuten. In Folge der Gleichung

$$\cos zx - \cos xy \cos yz = \sin xy \sin yz \cos xy\hat{\ }yz$$

findet man **)

---

*) Vergl. Möbius Statik §. 63 und des Verf. Elem. d. Math. Trigonometrie §. 6, 14.

**) Euler Nov. Comm. Petrop. 4 p. 158. Vergl. des Verf. Elemente der Math. Trigonometrie §. 5, 11.

$$\sin^2 xyz = \sin^2 xy \sin^2 yz - (\cos zx - \cos xy \cos yz)^2$$
$$= 1 - \cos^2 xy - \cos^2 yz - \cos^2 zx + 2\cos xy \cos yz \cos zx$$
$$= 4 \sin\frac{xy+xz+yz}{2} \sin\frac{-xy+xz+yz}{2} \sin\frac{xy-xz+yz}{2} \sin\frac{xy+xz-yz}{2}.$$

Die Grösse $\sin^2 xyz$ liegt zwischen 0 und 1, und erreicht die untere Grenze nur dann, wenn die Geraden x, y, z mit einer Ebene parallel sind, die obere Grenze nur dann, wenn die Geraden normal zu einander sind. Zugleich hat man nach §. 3, 17

$$\sin^2 xyz = \begin{vmatrix} 1 & \cos xy & \cos xz \\ \cos xy & 1 & \cos yz \\ \cos xz & \cos yz & 1 \end{vmatrix}$$

analog der Gleichung

$$\sin^2 xy = \begin{vmatrix} 1 & \cos xy \\ \cos xy & 1 \end{vmatrix}.$$

4. Wenn O den Anfang beliebiger coordinirter Axen bedeutet, wenn x, y, z; x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2 die Coordinaten der Puncte A, B, C bedeuten und die Geraden, auf denen OA, OB, OC liegen, wie diese Strecken selbst durch r, r_1, r_2 bezeichnet werden, so ist auch dem Zeichen nach*)

$$6\, OABC = r r_1 r_2 \sin r r_1 r_2 = \begin{vmatrix} x & x_1 & x_2 \\ y & y_1 & y_2 \\ z & z_1 & z_2 \end{vmatrix} \sin xyz\ .$$

Beweis. Nach (3) ergiebt sich

$$r^2 r_1^2 r_2^2 \sin^2 r r_1 r_2 = \begin{vmatrix} rr & r\, r_1 \cos r r_1 & r\, r_2 \cos r r_2 \\ r r_1 \cos r r_1 & r_1 r_1 & r_1 r_2 \cos r_1 r_2 \\ r r_2 \cos r r_2 & r_1 r_2 \cos r_1 r_2 & r_2 r_2 \end{vmatrix}$$

und durch orthogonale Projection

$$\begin{aligned} r \cos xr &= x && + y \cos xy && + z \cos xz \\ r \cos yr &= x \cos xy && + y && + z \cos yz \\ r \cos zr &= x \cos xz && + y \cos yz && + z \\ r &= x \cos xr && + y \cos yr && + z \cos zr \end{aligned}$$

---

*) Lagrange sur les pyr. 14 (Mém. de l'acad. de Berlin 1773 p. 149). Monge l. c. Möbius l. c.

$$\begin{aligned} r r_1 \cos r r_1 &= x_1 r \cos x r + y_1 r \cos y r + z_1 r \cos z r \\ &= x r_1 \cos x r_1 + y r_1 \cos y r_1 + z r_1 \cos z r_1 \end{aligned}$$

u. s. w. Demnach erhält man unter Anwendung von §. 5, 1 statt der obigen Determinante das Product

$$\begin{vmatrix} x & x_1 & x_2 \\ y & y_1 & y_2 \\ z & z_1 & z_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} r \cos x r & r_1 \cos x r_1 & r_2 \cos x r_2 \\ r \cos y r & r_1 \cos y r_1 & r_2 \cos y r_2 \\ r \cos z r & r_1 \cos z r_1 & r_2 \cos z r_2 \end{vmatrix}$$

und ebenso

$$\begin{vmatrix} r \cos x r & r_1 \cos x r_1 & r_2 \cos x r_2 \\ r \cos y r & r_1 \cos y r_1 & r_2 \cos y r_2 \\ r \cos z r & r_1 \cos z r_1 & r_2 \cos z r_2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} x & x_1 & x_2 \\ y & y_1 & y_2 \\ z & z_1 & z_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & \cos x y & \cos x z \\ \cos x y & 1 & \cos y z \\ \cos x z & \cos y z & 1 \end{vmatrix}$$

Daher ist, wenn ε entweder 1 oder -1 bedeutet,

$$r r_1 r_2 \sin r r_1 r_2 = \varepsilon \begin{vmatrix} x & x_1 & x_2 \\ y & y_1 & y_2 \\ z & z_1 & z_2 \end{vmatrix} \sin x y z \,.$$

Wenn unter den Coordinaten der in Betracht gezogenen Puncte nur x, y_1, z_2 von Null verschieden sind, während die übrigen verschwinden, so fällt r mit x, r_1 mit y, r_2 mit z zusammen und von der Determinante bleibt nur das Anfangsglied übrig (§. 2, 7). Also ist $\varepsilon = 1$.

Anmerkung. Vermöge der Sätze (1) und (4) können die einfachsten der in §. 3, 11 aufgestellten Identitäten geometrisch gedeutet werden.

5. Wenn die Puncte A, B, C in Bezug auf zwei Axen der Ebene ABC durch die Coordinaten x, y; x_1, y_1; x_2, y_2 gegeben sind, so ist*)

$$2\,ABC = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & x_1 & x_2 \\ y & y_1 & y_2 \end{vmatrix} \sin x y \,.$$

*) Diese bekannte Formel und die entsprechende des folg. Art. kommt in dieser Gestalt bei Cayley Cambr. math. J. 2 p. 268, Joachimsthal Crelle J. 40 p. 23 u. A. vor.

Beweis. In Bezug auf ein durch den Anfang A gelegtes System von Axen, welche mit gegebenen Axen einerlei Richtung haben, sind $x_1 - x$, $y_1 - y$; $x_2 - x$, $y_2 - y$ die Coordinaten von B und C, daher ist (1)

$$2ABC = \begin{vmatrix} x_1 - x & x_2 - x \\ y_1 - y & y_2 - y \end{vmatrix} \sin xy \ .$$

Wie in §. 3, 6 erhält man statt dieser Determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x & x_1 - x & x_2 - x \\ y & y_1 - y & y_2 - y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & x_1 & x_2 \\ y & y_1 & y_2 \end{vmatrix} .$$

Anmerkung. So oft man in der Formel ABC zwei Buchstaben permutirt, so vielmal wechselt die Dreiecksfläche das Zeichen. In der That erleidet die Determinante der Coordinaten durch Permutation von zwei Colonnen einen Zeichenwechsel (§. 2, 4). Durch Entwickelung der Determinante erhält man die bekannte Identität $ABC = OBC + OCA + OAB$.

Als Bedingung dafür, dass A auf der Geraden BC liegt, d. h. als Gleichung der Geraden durch B und C ergiebt sich, weil $ABC = 0$,

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & x_1 & x_2 \\ y & y_1 & y_2 \end{vmatrix} = 0 \ .$$

6. Wenn die Puncte A, B, C, D in Bezug auf drei Axen durch die Coordinaten x, y, z; x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2; x_3, y_3, z_3 gegeben sind, so ist

$$6ABCD = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x & x_1 & x_2 & x_3 \\ y & y_1 & y_2 & y_3 \\ z & z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix} \sin xyz \ .$$

Beweis. Legt man durch A ein System von Axen, welche mit den gegebenen Axen einerlei Richtung haben, so sind in Bezug auf dieselben $x_1 - x$, $y_1 - y$, $z_1 - z$; $x_2 - x$, $y_2 - y$, $z_2 - z$; u. s. w. die Coordinaten von B, C, D, daher ist (4)

$$6ABCD = \begin{vmatrix} x_1 - x & x_2 - x & x_3 - x \\ y_1 - y & y_2 - y & y_3 - y \\ z_1 - z & z_2 - z & z_3 - z \end{vmatrix} \sin xyz \ .$$

Durch Transformation der Determinante erhält man

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ x & x_1 - x & x_2 - x & x_3 - x \\ y & y_1 - y & y_2 - y & y_3 - y \\ z & z_1 - z & z_2 - z & z_3 - z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x & x_1 & x_2 & x_3 \\ y & y_1 & y_2 & y_3 \\ z & z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix}.$$

Anmerkung. So oft man in der Formel $ABCD$ zwei Buchstaben permutirt, so vielmal wechselt das Tetraedervolum zugleich mit der dafür gefundenen Determinante das Zeichen.

Unter der Bedingung $ABCD = 0$ liegt A auf der Ebene BCD, mithin ist die Gleichung der Ebene BCD

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x & x_1 & x_2 & x_3 \\ y & y_1 & y_2 & y_3 \\ z & z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix} = 0$$

oder entwickelt

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix} x + \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ z_1 & z_2 & z_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{vmatrix} y + \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & z_3 \end{vmatrix} z = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix}$$

wovon die geometrische Bedeutung unmittelbar wahrzunehmen ist.

7. Die Lage des Punctes P in Bezug auf das Tetraeder $ABCD$ ist durch die Tetraederverhältnisse

$$BCDP : CADP : ABDP : PABC$$

bestimmt*). Die Puncte P, A, B, C, D haben in Bezug auf drei beliebige Axen die Coordinaten x, y, z; x_1, y_1, z_1; u. s. w. Da die Determinante

---

*) Lagrange sur les pyr. 28. Grössen, welche wie diese Tetraeder sich verhalten, werden bei Möbius (baryc. Calcul) als barycentrische Coordinaten des Punctes P in Bezug auf Fundamentalpyramide $ABCD$ angewendet, bei Feuerbach (Untersuchung der dreieckigen Pyramide p. 5) als coordinirte Coefficienten, bei Plücker (Crelle J. 5 p. 1) als Tetraeder-Coordinaten (in der Ebene Dreieck-Coordinaten).

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & . & . & 1 \\ x & x_1 & . & . & x_4 \\ y & y_1 & . & . & y_4 \\ z & z_1 & . & . & z_4 \\ u & u_1 & . & . & u_4 \end{vmatrix} = \mu u + \mu_1 u_1 + \,.\,.\, + \mu_4 u_4$$

verschwindet, wenn die letzte Zeile mit einer andern übereinstimmt, so hat man

$$\begin{aligned} \mu + \mu_1 + \,.\,.\, + \mu_4 &= 0 \\ \mu x + \mu_1 x_1 + \,.\,.\, + \mu_4 x_4 &= 0 \\ \mu y + \mu_1 y_1 + \,.\,.\, + \mu_4 y_4 &= 0 \\ \mu z + \mu_1 z_1 + \,.\,.\, + \mu_4 z_4 &= 0 \end{aligned}$$

Der Punct P erscheint demnach als Schwerpunct der Puncte

$$\mu_1 \,.\, A\,, \qquad \mu_2 \,.\, B\,, \qquad \mu_3 \,.\, C\,, \qquad \mu_4 \,.\, D$$

d. h. der in A, B, C, D befindlichen Massen μ_1, μ_2, μ_3, μ_4, und wird dadurch construirt, dass man je nach gegebenen Verhältnissen die Strecke AB in N, die Strecke NC in O, die Strecke OD in P theilt. Vergl. des Verf. Elem. d. Math., Stereometrie §. 11, 5. Die partialen Determinanten μ, μ_1, .. verhalten sich zu einander wie die Tetraeder $ABCD$, $BCDP$, .. (6), während $ABCD : BCDP = AA_1 : A_1P$, wenn die Gerade AP mit der Ebene BCD den Punct A_1 gemein hat, u. s. w.

Aus den obigen Gleichungen folgt

$$\mu(a + bx + cy + dz) + \,.\,.\, + \mu_4(a + bx_4 + cy_4 + dz_4) = 0$$

eine Gleichung, deren geometrische Bedeutung gefunden wird, indem man die Ebene $a + bx' + cy' + dz' = 0$ vorstellt, welche von den durch P, A, .. parallel mit z gezogenen Geraden in P', A', .. geschnitten wird. Dann ist

$$\begin{aligned} a + bx + cy + dz' &= 0 \\ a + bx + cy + dz &= d(z-z') = d\,.\,P'P \end{aligned}$$

u. s. w., folglich

$$\mu \,.\, P'P + \mu_1 \,.\, A'A + \mu_2 \,.\, B'B + \mu_3 \,.\, C'C + \mu_4 \,.\, D'D = 0\,,$$

wobei unter P', A', .. die Durchschnitte irgend einer Schaar von Parallelen, die man durch P, A, .. gezogen hat, mit einer beliebigen Ebene verstanden werden können.

8. Sind A_1, B_1, C_1 die Mitten von AD, BD, CD, so wird das Tetraeder $ABCD$ von den Ebenen A_1BC, AB_1C, ABC_1 halbirt, und der Schwerpunct P des Tetraeders $ABCD$ liegt auf den genannten Halbirungsebenen, so dass

$$A_1BCP = 0\,, \quad AB_1CP = 0\,, \quad ABC_1P = 0\,.$$

Nun hat A_1 die Coordinaten $\frac{1}{2}(x_1 + x_4)$, $\frac{1}{2}(y_1 + y_1)$, $\frac{1}{2}(z_1 + z_4)$, folglich ist (6)

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ \frac{1}{2}(x_1 + x_4) & x_2 & x_3 & x \\ \frac{1}{2}(y_1 + y_4) & y_2 & y_3 & y \\ \frac{1}{2}(z_1 + z_4) & z_2 & z_3 & z \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & 1 & 1 & 1 \\ \frac{1}{2}x_1 & x_2 & x_3 & x \\ \frac{1}{2}y_1 & y_2 & y_3 & y \\ \frac{1}{2}z_1 & z_2 & z_3 & z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & 1 & 1 & 1 \\ \frac{1}{2}x_4 & x_2 & x_3 & x \\ \frac{1}{2}y_4 & y_2 & y_3 & y \\ \frac{1}{2}z_4 & z_2 & z_3 & z \end{vmatrix} = 0$$

oder $-\mu_1 + \mu_1 = 0$. Ebenso ist $-\mu_4 + \mu_2 = 0$, $-\mu_4 + \mu_3 = 0$, daher $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu_4 = -\frac{1}{4}\mu$ und

$$x = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4}{4}\,, \quad y = \frac{y_1 + y_2 + y_3 + y_4}{4}\,, \quad z = \frac{z_1 + z_1 + z_3 + z_4}{4}$$

d. h. der Schwerpunct des Tetraeders ist die Spitze von 4 gleichen Tetraedern, deren Basen die Flächen des Tetraeders sind, und der Schwerpunct von 4 gleichen Massen, welche in den Ecken des Tetraeders ihre Schwerpuncte haben*).

9. Wenn die Gleichungen der Seiten eines Dreiecks in Bezug auf ein System von zwei Axen gegeben sind, so findet man die Fläche des Dreiecks auf folgende Weise**). Die Coefficienten der Gleichungen seien $a : b : c$, $a_1 : b_1 : c_1$, $a_2 : b_2 : c_2$, d. h. für jeden Punct der ersten Seite, dessen Coordinaten x', y' sind, hat man $a + bx' + cy' = 0$ u. s. w. Die Coordinaten der Eckpuncte x, y; x_1, y_1; x_2, y_2 nebst 3 Hülfsgrössen p, p_1, p_2 sind durch die linearen Systeme

*) Lagrange sur les pyr. 31—35.

**) Joachimsthal Crelle J. 40 p. 23. Zu demselben Resultat und dem entsprechenden des folg. Art. war auf einem andern Wege Minding Crelle J. 5 p. 397 gelangt.

$$\begin{array}{lll} a + b\,x + c\,y = p & a + b\,x_1 + c\,y_1 = 0 & a + b\,x_2 + c\,y_2 = 0 \\ a_1 + b_1 x + c_1 y = 0 & a_1 + b_1 x_1 + c_1 y_1 = p_1 & a_1 + b_1 x_2 + c_1 y_2 = 0 \\ a_2 + b_2 x + c_2 y = 0 & a_2 + b_2 x_1 + c_2 y_1 = 0 & a_2 + b_2 x_2 + c_2 y_2 = p_2 \end{array}$$

bestimmt, welche ausdrücken, dass der Punct (x, y) auf der zweiten und dritten, aber nicht auf der ersten Geraden liegt, u. s. w. Nach §. 5, 6 ist

$$\begin{vmatrix} 1 & x & y \\ 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} p & 0 & 0 \\ 0 & p_1 & 0 \\ 0 & 0 & p_2 \end{vmatrix}$$

Wenn die Determinante der Coefficienten durch R und der Coefficient des Elements a, a_1, a_2 in R durch α, α_1, α_2 bezeichnet wird, so findet man aus den 3 Systemen durch Multiplication mit α, α_1, α_2

$$R = p\alpha\,, \qquad R = p_1\alpha_1\,, \qquad R = p_2\alpha_2$$

Daher ist (§. 2, 7)

$$\begin{vmatrix} p & 0 & 0 \\ 0 & p_1 & 0 \\ 0 & 0 & p_2 \end{vmatrix} = p\,p_1\,p_2 = \frac{R^3}{\alpha\,\alpha_1\,\alpha_2}\,, \qquad \begin{vmatrix} 1 & x & y \\ 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \end{vmatrix} = \frac{R^2}{\alpha\,\alpha_1\,\alpha_2}\,,$$

mithin (5) die gesuchte doppelte Dreiecksfläche $= \dfrac{R^2 \sin x\,y}{\alpha\,\alpha_1\,\alpha_2}$.

Nachdem man auf bekannte Weise die Höhen des Dreiecks, d. h. die Abstände der Puncte (x, y), (x_1, y_1), (x_2, y_2) von der ersten, zweiten, dritten Geraden berechnet hat, findet man die Seiten des Dreiecks, wenn man die gefundene doppelte Dreiecksfläche durch die Höhen dividirt.

Wenn die Determinante der Coefficienten verschwindet, ohne dass die Elemente einer Zeile zu einander der Reihe nach sich verhalten, wie die Elemente einer andern Zeile, so gehen die 3 Geraden durch einen endlich fernen Punct.

10. Wenn die Gleichungen der Flächen eines Tetraeders in Bezug auf ein System von 3 Axen gegeben sind, so wird das Volum des Tetraeders auf dieselbe Weise gefunden, wie die Dreiecksfläche aus den Seiten. Die Coefficienten der Gleichungen seien $a : b : c : d$, $a_1 : b_1 : c_1 : d_1$, $a_2 : b_2 : c_2 : d_2$, $a_3 : b_3 : c_3 : d_3$, d. h. für jeden Punct (x', y', z') der ersten Fläche hat man

$a + bx' + cy' + dz' = 0$ u. s. w. Die Coordinaten der Eckpuncte x, y, z; x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2; x_3, y_3, z_3 nebst den Hülfsgrössen p, p_1, p_2, p_3 sind durch 4 Systeme von je 4 Gleichungen

$$\begin{aligned} a + b\,x + c\,y + d\,z &= p \\ a_1 + b_1 x + c_1 y + d_1 z &= 0 \\ a_2 + b_2 x + c_2 y + d_2 z &= 0 \\ a_3 + b_3 x + c_3 y + d_3 z &= 0 \end{aligned}$$

u. s. w. bestimmt, welche ausdrücken, dass der Punct (x, y, z) auf der zweiten, dritten, vierten, aber nicht auf der ersten Ebene liegt, u. s. w. Dann ist

$$\begin{vmatrix} 1 & x & y & z \\ 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & z_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} p & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p_3 \end{vmatrix}$$

Wenn die Determinante der Coefficienten durch R und der Coefficient, welchen a in R hat, durch α bezeichnet wird, so folgt aus den 4 linearen Systemen

$$R = p\alpha = p_1\alpha_1 = p_2\alpha_2 = p_3\alpha_3$$

folglich

$$pp_1p_2p_3 = \frac{R^4}{\alpha\alpha_1\alpha_2\alpha_3}, \qquad \begin{vmatrix} 1 & x & y & z \\ 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & z_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = \frac{R^3}{\alpha\alpha_1\alpha_2\alpha_3},$$

und das gesuchte 6fache Tetraedervolum $(6) = \dfrac{R^3 \sin xyz}{\alpha\alpha_1\alpha_2\alpha_3}$. Hieraus lassen sich mit Hülfe der Höhen des Tetraeders seine Flächen berechnen.

Wenn die Determinante der Coefficienten verschwindet, ohne dass zwei Zeilen proportionale Elemente enthalten, so gehen die 4 Ebenen durch einen endlich fernen Punct.

§. 16. Producte von Strecken, Dreiecken, Tetraedern.

1. Durch $A, A_1, A_2, ..$ und $B, B_1, B_2, ..$ werden 2 Systeme von Puncten, und durch c_{ik} das Product von 2 Strecken AA_i, BB_k der Geraden r, ϱ mit dem Cosinus des Winkels dieser

Geraden bezeichnet. Um das Product c_{ik} zu berechnen, bestimme man willkürlich die positiven Richtungen der Geraden r, ϱ und demgemäss die Werthe und Zeichen der Strecken und der Cosinus. Wenn als positive Richtung einer Geraden die entgegengesetzte angenommen wird, so wechseln eine Strecke und der Cosinus das Zeichen. Also erhält bei jeder Wahl das Product c_{ik} dasselbe Zeichen.

Sind die Puncte A, A_i, B, B_k durch ihre orthogonalen Coordinaten

$$\begin{matrix} 0 & 0 & 0 & \qquad & \alpha & \beta & \gamma \\ x_i & y_i & z_i & \qquad & \xi_k & \eta_k & \zeta_k \end{matrix}$$

in Bezug auf die Axen x, y, z gegeben, bei denen $\sin xyz = 1$, so findet man durch orthogonale Projection von AA_i und von x_i, y_i, z_i auf die Gerade ϱ

$$AA_i \cos r\varrho = x_i \cos x\varrho + y_i \cos y\varrho + z_i \cos z\varrho$$

folglich

$$AA_i \,.\, BB_k \cos r\varrho = x_i(\xi_k - \alpha) + y_i(\eta_k - \beta) + z_i(\zeta_k - \gamma)$$
$$\cos r\varrho = \cos xr \cos x\varrho + \cos yr \cos y\varrho + \cos zr \cos z\varrho$$

2. Weil das Element $c_{ik} = AA_i \,.\, BB_k \cos r\varrho$ nicht mehr als 3 Glieder hat, so ist nach §. 5, 1

$$\text{(I)} \qquad \begin{vmatrix} c_{11} & . & . & c_{14} \\ . & . & . & . \\ c_{41} & . & . & c_{44} \end{vmatrix} = 0$$

für 2 Systeme von je 5 Puncten, und wenn die Strecken Einheiten sind und unter dieser Voraussetzung c_{ik} durch $\cos_{ik}$ bezeichnet wird,

$$\text{(II)} \qquad \begin{vmatrix} \cos_{11} & . & . & \cos_{14} \\ . & . & . & . \\ \cos_{41} & . & . & \cos_{44} \end{vmatrix} = 0$$

für 2 Systeme von je 4 Geraden.

Nach dem Zusammenfallen des zweiten Systems mit dem ersten ist $c_{ik} = c_{ki}$, und man findet aus der ersten Gleichung den Zusammenhang unter den Strecken, welche 5 Puncte verbinden (vergl. unten 13), während die andre Gleichung der analytischen Geometrie folgende Ausdrücke liefert:

$$\text{(III)} \quad \begin{vmatrix} 1 & \cos xr & \cos yr & \cos zr \\ \cos xr & 1 & \cos xy & \cos xz \\ \cos yr & \cos xy & 1 & \cos yz \\ \cos zr & \cos xz & \cos yz & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\text{(IV)} \quad \begin{vmatrix} \cos r\varrho & \cos x\varrho & \cos y\varrho & \cos z\varrho \\ \cos xr & 1 & \cos xy & \cos xz \\ \cos yr & \cos xy & 1 & \cos yz \\ \cos zr & \cos xz & \cos yz & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Die Gleichung (III) enthält den Zusammenhang unter den von 4 Geraden (Ebenen) gebildeten Winkeln, unter den Seiten und Diagonalen eines sphärischen Vierecks, unter den Flächenwinkeln eines Tetraeders (Carnot Géom. de pos. 350). Wenn insbesondere x, y, z, r die Richtungen der Kanten OA, OB, OC und des Diameters OD der dem Tetraeder $OABC$ umgeschriebenen Kugel bedeuten, wenn $OA = a$, $OB = b$, $OC = c$, $OD = d$, so hat man

$$\frac{\cos xr}{a} = \frac{\cos yr}{b} = \frac{\cos zr}{c} = d$$

$$\begin{vmatrix} d^2 & a & b & c \\ a & 1 & \cos xy & \cos xz \\ b & \cos xy & 1 & \cos yz \\ c & \cos xz & \cos yz & 1 \end{vmatrix} = 0$$

zur Berechnung des Diameter der einem Tetraeder umgeschriebenen Kugel aus den Elementen einer Ecke (Lagrange sur les pyr. 21. Legendre élém. de géom. Note V).

Die Gleichung (IV) dient zur Bestimmung des Winkels von zwei Geraden durch die Winkel, welche dieselben mit den coordinirten Axen bilden. Magnus anal. Geom. des Raumes §. 9 (7). Vergl. einen Aufsatz des Verf. in Crelle J. 46 p. 145.

Wenn alle Puncte auf der Ebene xy liegen, und alle Geraden mit dieser Ebene parallel sind, so hat man

$$\Sigma \pm c_{11}\, c_{22}\, c_{33} = 0 \qquad \Sigma \pm \cos_{11} \cos_{22} \cos_{33} = 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & \cos xr & \cos yr \\ \cos xr & 1 & \cos xy \\ \cos yr & \cos xy & 1 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} \cos r\varrho & \cos x\varrho & \cos y\varrho \\ \cos xr & 1 & \cos xy \\ \cos yr & \cos xy & 1 \end{vmatrix} = 0$$

3. Ferner hat man nach §. 5, 1

$$\begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \xi_1 - \alpha & \xi_2 - \alpha & \xi_3 - \alpha \\ \eta_1 - \beta & \eta_2 - \beta & \eta_3 - \beta \\ \zeta_1 - \gamma & \zeta_2 - \gamma & \zeta_3 - \gamma \end{vmatrix}$$

also mit Rücksicht auf §. 15, 4 und 6

$$\Sigma \pm c_{11} c_{22} c_{33} = 36\, A A_1 A_2 A_3 \,.\, B B_1 B_2 B_3$$

für 2 Systeme von je 4 Puncten, und

$$\Sigma \pm \cos_{11} \cos_{22} \cos_{33} = \sin r_1 r_2 r_3 \sin \varrho_1 \varrho_2 \varrho_3$$

für zwei Systeme von je 3 Geraden *).

Nach dem Zusammenfallen der beiden Tetraeder ist $c_{ik} = c_{ki}$ und man erhält für $36\, A A_1 A_2 A_3^2$ die von Lagrange sur les pyr. 15 gegebene und von Legendre élém. de géom. Note V reproducirte Formel.

Wenn alle Puncte auf der Ebene xy liegen und alle Geraden mit dieser Ebene parallel sind, so bleibt

$$\begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{vmatrix} = 4\, A A_1 A_2 \,.\, B B_1 B_2$$

für 2 Dreiecke einer Ebene und

$$\begin{vmatrix} \cos_{11} & \cos_{12} \\ \cos_{21} & \cos_{22} \end{vmatrix} = \sin r_1 r_2 \sin \varrho_1 \varrho_2$$

für 2 Paare von Geraden, die mit einer Ebene parallel sind. Zufolge dieser Gleichung ist bei 3 beliebigen Winkeln λ, μ, ν einer Ebene

$$\cos(\lambda - \mu) \cos \nu - \cos(\lambda - \nu) \cos \mu = \sin \lambda \sin(\mu - \nu) \,.$$

4. Weiter hat man nach §. 5, 1

$$\begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{vmatrix} = (xy)(\xi\eta) + (xz)(\xi\zeta) + (yz)(\eta\zeta)$$

wobei

$$(xy)(\xi\eta) = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \xi_1 - \alpha & \xi_2 - \alpha \\ \eta_1 - \beta & \eta_2 - \beta \end{vmatrix}$$

---

*) Diese beiden Sätze hat v. Staudt 1842 gegeben Crelle J. 24 p. 252. Der zweite Satz, der in dem besondern Fall $\sin r_1 r_2 r_3 = 1$ früher bei Gauss vorkommt, Disq. gener. circa superficies 2, VI, ist von Cauchy reproducirt worden Exerc. d'Anal. 4 p. 41.

gesetzt ist und das 4fache Product der Projectionen von $A A_1 A_2$ und $B B_1 B_2$ auf die Ebene xy bedeutet. U. s. w. Bezeichnet man durch n und ν die positiven Normalen der Ebenen $A A_1 A_2$ und $B B_1 B_2$, so ist

$$(xy)(\xi\eta) = 4 A A_1 A_2 \,.\, B B_1 B_2 \cos z n \cos z \nu$$

u. s. w. Zugleich ist (1)

$$\cos x n \cos x \nu + \cos y n \cos y \nu + \cos z n \cos z \nu = \cos n \nu$$

folglich *)

$$\Sigma \pm c_{11}\, c_{22} = 4 A A_1 A_2 \,.\, B B_1 B_2 \cos n \nu$$

d. h. gleich dem 4fachen Product dieser Dreiecke mit dem Cosinus des Winkels ihrer Ebenen und gleich der 4fachen Summe von 3 Producten, deren jedes aus den Projectionen der beiden Dreiecke auf eine von 3 coordinirten und zu einander normalen Ebenen gebildet wird.

Ebenso hat man $\Sigma \pm \cos_{11} \cos_{22}$

$$= \begin{vmatrix} \cos x r_1 & \cos x r_2 \\ \cos y r_1 & \cos y r_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \cos x \varrho_1 & \cos x \varrho_2 \\ \cos y \varrho_1 & \cos y \varrho_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \cos x r_1 & \cos x r_2 \\ \cos z r_1 & \cos z r_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \cos x \varrho_1 & \cos x \varrho_2 \\ \cos z \varrho_1 & \cos z \varrho_2 \end{vmatrix}$$

$$+ \begin{vmatrix} \cos y r_1 & \cos y r_2 \\ \cos z r_1 & \cos z r_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \cos y \varrho_1 & \cos y \varrho_2 \\ \cos z \varrho_1 & \cos z \varrho_2 \end{vmatrix}$$

oder weil (§. 15, 1) $2 A A_1 A_2 = A A_1 \,.\, A A_2 \sin r_1 r_2$

$$\Sigma \pm \cos_{11} \cos_{22} = \sin r_1 r_2 \sin \varrho_1 \varrho_2 \cos r_1 r_2 \hat{\ } \varrho_1 \varrho_2$$

für 2 Paare von Geraden oder für 2 Paare von Ebenen, deren Normalen jene Geraden sind **).

5. Das 4fache Product der Dreiecke $A A_1 A_2$, $B B_1 B_2$ mit dem Cosinus des Winkels ihrer Ebenen ist ebensowenig zweideutig als die dafür gegebene Determinante. Nach beliebiger Annahme der positiven Richtungen ihrer Normalen und nach übereinstimmender Annahme des positiven Sinnes jeder Ebene d. h. des Sinnes der Drehung, durch welche positive Winkel und Flächen beschrieben werden, sind die Zeichen der Dreiecke und der Winkel bestimmt, welchen die eine Ebene beschreiben muss, bis dass ihre positive Normale mit der positiven Normale

*) v. Staudt a. a. O.

**) Gauss und v. Staudt a. a. O.

der andern Ebene zusammenfällt. Wenn als die positive Richtung einer Normale die entgegengesetzte angenommen wird, so wechseln zwei Factoren des obigen Products das Zeichen, nämlich ein Dreieck und der Cosinus des Flächenwinkels, weil der Winkel um 180^0 sich ändert; also bleibt das Product unverändert.

Das 4fache Product der Dreiecke AA_1A_2, BB_1B_2 mit dem Cosinus des Flächenwinkels ist $4AA_1A_2 \,.\, NN_1N_2$, wenn man durch NN_1N_2 die Projection von BB_1B_2 auf die Ebene AA_1A_2 bezeichnet. Die aus den Paaren AA_1, AA_2 und NN_1, NN_2 gebildete Determinante $\Sigma \pm c_{11}c_{22}$ ist von der aus den Paaren AA_1, AA_2 und BB_1, BB_2 gebildeten nicht verschieden, weil NN_1 und BB_1 durch dieselben Ebenen auf AA_1 projicirt werden, u. s. w. (v. Staudt).

Die Determinanten

$$\begin{vmatrix} \cos af & \cos ag & \cos ah \\ \cos bf & \cos bg & \cos bh \\ \cos cf & \cos cg & \cos ch \end{vmatrix} = \sin abc \, \sin fgh$$

$$\begin{vmatrix} \cos af & \cos ag \\ \cos bf & \cos bg \end{vmatrix} = \sin ab \, \sin fg \cos ab\hat{\ } fg$$

haben zufolge der angegebenen Werthe die bemerkenswerthe Eigenschaft, dass sie unverändert bleiben, jene, während die gegenseitige Lage der Raumwinkel abc, fgh beliebig verändert wird, diese, während bei unveränderter Grösse des Flächenwinkels $ab\hat{\ }fg$ die gegenseitige Lage der Winkel ab, fg beliebig verändert wird (Cauchy).

6. Wenn man den Coefficienten des Elementes c_{ik} in der Determinante $\Sigma \pm c_{11}c_{22}c_{33}$ durch γ_{ik} bezeichnet, so hat man nach §. 6, 1

$$\Sigma \pm \gamma_{11}\gamma_{22}\gamma_{33} = (\Sigma \pm c_{11}c_{22}c_{33})^2 = (36\,AA_1A_2A_3 \,.\, BB_1B_2B_3)^2$$

Die Elemente $\gamma_{11}, \ldots$ sind Flächenproducte von der in (4) betrachteten Art, nämlich

$$\gamma_{11} = \Sigma \pm c_{22}c_{33} = 4\,AA_2A_3 \,.\, BB_2B_3 \cos_{11}$$
$$\gamma_{12} = \Sigma \pm c_{23}c_{31} = 4\,AA_2A_3 \,.\, BB_3B_1 \cos_{12}$$

u. s. w., wo $\cos_{11}$, $\cos_{12}, \ldots$ die Cosinus der von den Ebenen der Flächen $A A_2 A_3$ und $B B_2 B_3$, $A A_2 A_3$ und $B B_3 B_1$, .. gebildeten Flächenwinkel bedeuten.

Wenn das zweite Tetraeder mit dem ersten zusammenfällt, und wenn die Flächen $2 A A_2 A_3$, $2 A A_3 A_1$, $2 A A_1 A_2$ die Werthe f_1, f_2, f_3 haben, so findet man

$$(6\, A A_1 A_2 A_3)^4 = f_1^2 f_2^2 f_3^2 \begin{vmatrix} 1 & \cos_{12} & \cos_{13} \\ \cos_{12} & 1 & \cos_{23} \\ \cos_{13} & \cos_{23} & 1 \end{vmatrix}$$

$$(6\, A A_1 A_2 A_3)^2 = f_1 f_2 f_3 \sin_{123}\text{*)}$$

wobei $\sin_{123}$ den Sinus der Ecke (§. 15, 3) bedeutet, deren Kanten die positiven Normalen der Ebenen $A A_2 A_3$, $A A_3 A_1$, $A A_1 A_2$ sind, und welche der von den Geraden $A A_1$, $A A_2$, $A A_3$ gebildeten Ecke des Tetraeders so zugeordnet ist, dass die Kugelschnitte der beiden Ecken Polarfiguren sind.

7. Für 3 Richtungen einer Ebene a, b, c hat man

$$(\sin ab + \sin bc + \sin ca)^2 = 8 \begin{vmatrix} 0 & \sin^2 \tfrac{1}{2} ab & \sin^2 \tfrac{1}{2} ac \\ \sin^2 \tfrac{1}{2} ab & 0 & \sin^2 \tfrac{1}{2} bc \\ \sin^2 \tfrac{1}{2} ac & \sin^2 \tfrac{1}{2} bc & 0 \end{vmatrix}$$

und für 4 Richtungen des Raumes (oder Ebenen) a, b, c, d **)

$$(\sin abd + \sin bcd + \sin cad - \sin abc)^2$$

$$= -16 \begin{vmatrix} 0 & \sin^2 \tfrac{1}{2} ab & \sin^2 \tfrac{1}{2} ac & \sin^2 \tfrac{1}{2} ad \\ \sin^2 \tfrac{1}{2} ab & 0 & \sin^2 \tfrac{1}{2} bc & \sin^2 \tfrac{1}{2} bd \\ \sin^2 \tfrac{1}{2} ac & \sin^2 \tfrac{1}{2} bc & 0 & \sin^2 \tfrac{1}{2} cd \\ \sin^2 \tfrac{1}{2} ad & \sin^2 \tfrac{1}{2} bd & \sin^2 \tfrac{1}{2} cd & 0 \end{vmatrix}$$

Beweis. Indem man zwei Axen x, y zu Hülfe nimmt, bei welchen $\sin xy = 1$ ist, erhält man (3)

$$\sin bc = \begin{vmatrix} \cos xb & \cos yb \\ \cos xc & \cos yc \end{vmatrix}$$

u. s. w., folglich

---

*) Diese Gleichung ist von LAGRANGE's Gleichung (sur les pyr. 17) nicht wesentlich verschieden. Vergl. BRETSCHNEIDER Geometrie 677 und des Verf. Elemente der Math., Trigonometrie §. 6, 16.

**) Der plan-trigonometrische Satz ist in den Lehrbüchern anzutreffen. Der entsprechende polyedrometrische Satz ist von JOACHIMSTHAL Crelle J. 40 p. 42 ohne genauere Angabe der Zeichen aufgestellt und bewiesen worden.

$$\sin ab + \sin bc + \sin ca = \begin{vmatrix} 1 & \cos xa & \cos ya \\ 1 & \cos xb & \cos yb \\ 1 & \cos xc & \cos yc \end{vmatrix}$$

$$(\sin ab + \sin bc + \sin ca)^2$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & \cos xa & \cos ya \\ 1 & \cos xb & \cos yb \\ 1 & \cos xc & \cos yc \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & -\cos xa & -\cos ya \\ 1 & -\cos xb & -\cos yb \\ 1 & -\cos xc & -\cos yc \end{vmatrix}$$

Bezeichnet man dieses Product durch $\Sigma \pm h_{11} h_{22} h_{33}$, so ist (§. 5, 6)

$$h_{11} = 1 - \cos^2 xa - \cos^2 ya = 0$$
$$h_{12} = 1 - \cos xa \cos xb - \cos ya \cos yb$$
$$= 1 - \cos ab = 2 \sin^2 \tfrac{1}{2} ab$$

u. s. w. Nach Division von $\Sigma \pm h_{11} h_{22} h_{33}$ durch 2^3 erhält man die erste angegebene Gleichung.

Indem man ferner drei Axen x, y, z gebraucht, bei welchen $\sin xyz = 1$ ist, erhält man (3)

$$\sin abc = \begin{vmatrix} \cos xa & \cos ya & \cos za \\ \cos xb & \cos yb & \cos zb \\ \cos xc & \cos yc & \cos zc \end{vmatrix}$$

u. s. w., folglich

$$\sin abd + \sin bcd + \sin cad - \sin abc$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & \cos xa & \cos ya & \cos za \\ 1 & \cos xb & \cos yb & \cos zb \\ 1 & \cos xc & \cos yc & \cos zc \\ 1 & \cos xd & \cos yd & \cos zd \end{vmatrix}$$

und durch ein dem vorigen analoges Verfahren

$$-(\sin abd + \sin bcd + \sin cad - \sin abc)^2 = \Sigma \pm h_{11} \ldots h_{44}$$

worin

$$h_{11} = 1 - \cos^2 xa - \cos^2 ya - \cos^2 za = 0$$
$$h_{12} = 1 - \cos xa \cos xb - \cos ya \cos yb - \cos za \cos zb$$
$$= 1 - \cos ab = 2 \sin^2 \tfrac{1}{2} ab$$

u. s. w. Die Determinante ist durch 2^4 theilbar.

8. Wenn man durch a, b, c die Geraden bezeichnet, auf denen die Radien OA, OB, OC eines Kreises liegen, durch r

die Länge eines Radius und durch f, g, h die Quadrate der Seiten BC, CA, AB des eingeschriebenen Dreiecks ABC; wenn man beide Seiten der ersten in (7) aufgestellten goniometrischen Gleichungen mit $8r^6$ multiplicirt und bemerkt, dass

$$r^2 \sin ab = 2\,OAB\,, \qquad 4r^2 \sin^2 \tfrac{1}{2} ab = h\,,$$

u. s. w., so erhält man die altbekannte Gleichung

$$(4r\,.\,ABC)^2 = \tfrac{1}{2} \begin{vmatrix} 0 & h & g \\ h & 0 & f \\ g & f & 0 \end{vmatrix} = fgh\,.$$

Wenn man durch a, b, c, d die Geraden bezeichnet, auf denen die Radien OA, OB, OC, OD einer Kugel liegen, durch r die Länge eines Radius, durch f, g, h die Quadrate der Kanten BC, CA, AB, durch f', g', h' die Quadrate der gegenüberliegenden Kanten AD, BD, CD des jener Kugel eingeschriebenen Tetraeders $ABCD$; wenn man beide Seiten der zweiten in (7) aufgestellten Gleichung mit $16r^8$ multiplicirt und erwägt, dass

$$r^3 \sin abd = 6\,OABD\,, \qquad 4r^2 \sin^2 \tfrac{1}{2} ab = h\,,$$

u. s. w., so erhält man

$$(24r\,.\,ABCD)^2 = - \begin{vmatrix} 0 & h & g & f' \\ h & 0 & f & g' \\ g & f & 0 & h' \\ f' & g' & h' & 0 \end{vmatrix}$$

zur Berechnung des Radius der dem Tetraeder umgeschriebenen Kugel aus den Kanten und dem Volum*).

9. Der Abstand der Geraden r_k, welche den Punct N enthält, von der Geraden r_i, welche den Punct M enthält, wird durch den Abstand d des Punctes N von der Ebene MM_iN_k angegeben, wenn MM_i, MN_k mit r_i, r_k parallel sind. Das 6fache Tetraeder MM_iN_kN wird nun sowohl durch $d\,.\,MM_i\,.\,MN_k \sin r_i r_k$ als auch durch $MN\,.\,MM_i\,.\,MM_k \sin r r_i r_k$ ausgedrückt, wobei r die Gerade bedeutet, auf der MN liegt. Daher hat man (3)

*) In diese Form ist die von Jungius (Biographie von Guhrauer 1850 p. 297) und neuerlich von Carnot (Mém. sur la relation . . 12) gefundene Relation durch Joachimsthal l. c. (27) gebracht worden. Eine geometrische Ableitung derselben hat v. Staudt Crelle J. 57 p. 88 gegeben.

$$d \sin r_i r_k = MN \sin r r_i r_k$$

$$d \sin r_i r_k \sin xyz = \begin{vmatrix} MN \cos xr & \cos xr_i & \cos xr_k \\ MN \cos yr & \cos yr_i & \cos yr_k \\ MN \cos zr & \cos zr_i & \cos zr_k \end{vmatrix}$$

Unter der Voraussetzung $\sin xyz = 1$ bezeichne man $d \sin r_i r_k$ durch h_{ik}, und $\cos xr_i$, $\cos yr_i$, $\cos zr_i$ durch a_i, b_i, c_i. Dann ist

$$h_{ik} = \begin{vmatrix} x_k - x_i & a_i & a_k \\ y_k - y_i & b_i & b_k \\ z_k - z_i & c_i & c_k \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_i & a_k & x_k \\ b_i & b_k & y_k \\ c_i & c_k & z_k \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_k & a_i & x_i \\ b_k & b_i & y_i \\ c_k & c_i & z_i \end{vmatrix}$$

$$= a_i \alpha_k + b_i \beta_k + c_i \gamma_k + \alpha_i a_k + \beta_i b_k + \gamma_i c_k$$

mithin $h_{ik} = h_{ki}$, $h_{ii} = 0$, $a_i \alpha_i + b_i \beta_i + c_i \gamma_i = 0$. Hieraus folgt nach §. 3, 6 *)

$$\begin{vmatrix} h_{11} & a_1 & b_1 & c_1 & \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ . & . & . & . & . & . & . \\ h_{17} & a_7 & b_7 & c_7 & \alpha_7 & \beta_7 & \gamma_7 \end{vmatrix} = 0$$

und nach §. 5, 1

$$\Sigma \pm h_{11} \ldots h_{77} = 0$$

$$\Sigma \pm h_{11} \ldots h_{66} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ . & . & . & . & . & . \\ a_6 & b_6 & c_6 & \alpha_6 & \beta_6 & \gamma_6 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \alpha_1 & . & . & a_1 & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ \alpha_6 & . & . & a_6 & . & . \end{vmatrix}$$

$$= - \begin{vmatrix} a_1 & . & . & \alpha_1 & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ a_6 & . & . & \alpha_6 & . & . \end{vmatrix}^2$$

10. Wenn man 4 Gerade des Raumes durch a, b, c, d, und Ebenen, die mit den Paaren ad, bd, cd, bc, ca, ab parallel sind, der Reihe nach durch α, β, γ, α_1, β_1, γ_1 bezeichnet, so folgt aus den Gleichungen (4)

$$\sin ab \sin cd \cos \gamma\gamma_1 = \cos ac \cos bd - \cos bc \cos ad$$
$$\sin bc \sin ad \cos \alpha\alpha_1 = \cos ba \cos cd - \cos ca \cos bd$$
$$\sin ca \sin bd \cos \beta\beta_1 = \cos cb \cos ad - \cos ab \cos cd$$

---

*) Brioschi Crelle J. 50 p. 236.

durch Addition

$$\text{(I)} \qquad \sin ab \sin cd \cos \gamma\gamma_1 + \sin bc \sin ad \cos \alpha\alpha_1 + \sin ca \sin bd \cos \beta\beta_1 = 0$$

weil $\cos ba = \cos ab$ u. s. w. Man bestimmt willkürlich für jede Ebene die positive Normale und den positiven Sinn u. s. w. Dieselbe Gleichung gilt für 4 Ebenen a, b, c, d, indem man die Geraden $ad, \ldots$ durch $\alpha, \ldots$ bezeichnet*). In diesem Falle bestimmt man willkürlich die positiven Richtungen der Geraden, und demgemäss durch Drehungen von einerlei Sinn die Flächenwinkel, deren Kanten die Geraden sind.

Die entsprechende Gleichung für 4 Puncte A, B, C, D ist **)

$$\text{(II)} \qquad AB \,.\, CD \cos \gamma\gamma_1 + BC \,.\, AD \cos \alpha\alpha_1 + CA \,.\, BD \cos \beta\beta_1 = 0$$

wenn durch α, β, γ, α_1, β_1, γ_1 die Geraden bezeichnet werden, auf denen AD, BD, CD, BC, CA, AB liegen. Man hat nämlich durch Projection

$$\begin{aligned} AB \cos \gamma\gamma_1 &= AD \cos \alpha\gamma + DB \cos \beta\gamma \\ BC \cos \alpha\alpha_1 &= BD \cos \beta\alpha + DC \cos \gamma\alpha \\ CA \cos \beta\beta_1 &= CD \cos \gamma\beta + DA \cos \alpha\beta \,. \end{aligned}$$

Indem man diese Gleichungen der Reihe nach mit CD, AD, BD multiplicirt und summirt, erhält man die angegebene Relation, weil $AD = -DA$, u. s. w.

Um den Zusammenhang der Gleichungen (I) und (II) zu erkennen, bezeichne man die Ebenen, auf welchen die Flächen des Tetraeders ABC, ACD, CBD, BAD liegen, der Reihe nach durch d, b, a, c, und die Geraden, auf denen die Kanten AB, $BC, \ldots$ liegen, durch cd, $ad, \ldots$ Dann ist auch dem Zeichen nach (§. 15, 3)

$$\begin{aligned} 6\,ABCD \,.\, CA &= AB \,.\, AC \,.\, CA \,.\, AD \sin cd\hat{}bd \sin bd\hat{}bc \sin db \\ &= 4\,ABC \,.\, ACD \sin bd \end{aligned}$$

und durch Vertauschung

$$6\,BADC \,.\, BD = 4\,BAD \,.\, BDC \sin ca$$

---

*) Joachimsthal Crelle J. 40 p. 45.

**) Carnot mém. sur la relation qui existe etc. 27.

Nun ist $BADC = ABCD$, $BDC = CBD$, also erhält man durch Multiplication, wenn man das Product der Flächen des Tetraeders durch p bezeichnet,

$$9\,ABCD^2 \,.\, CA \,.\, BD = 4\,p \sin ca \sin bd\,,$$

und daher *)

$$\text{(III)} \qquad \frac{9\,ABCD^2}{4\,p} = \frac{\sin ca \sin bd}{CA\,.\,BD} = \frac{\sin ab \sin cd}{AB\,.\,CD} = \frac{\sin bc \sin ad}{BC\,.\,AD}\,.$$

Es kann also von den Gleichungen (I) und (II) eine aus der andern abgeleitet werden.

11. Das Product von zwei Strecken mit dem Cosinus des Winkels ihrer Geraden kann durch die Quadrate der Strecken ausgedrückt werden, welche die Endpuncte der einen Strecke mit den Endpuncten der andern Strecke verbinden. Dabei ergeben sich bemerkenswerthe Formeln für die Producte von Polygonen und Polyedern.

Nach den festgesetzten Bezeichnungen (10) ist

$$2\,AB\,.\,CD \cos \gamma\gamma_1 = 2\,AD\,.\,CD \cos \alpha\gamma - 2\,BD\,.\,CD \cos \beta\gamma$$

Durch Projection des Dreiecks CDA erhält man das System

$$\begin{array}{llll} CD \cos \beta_1\gamma & + DA \cos \alpha\beta_1 & + AC & = 0 \\ CD \cos \alpha\gamma & + DA & + AC \cos \alpha\beta_1 & = 0 \\ CD & + DA \cos \alpha\gamma & + AC \cos \beta_1\gamma & = 0 \end{array}$$

aus demselben durch Multiplication mit AC, AD, $-CD$

$$\begin{aligned} 2\,AD\,.\,CD \cos \alpha\gamma &= AD^2 + CD^2 - AC^2 \\ 2\,BD\,.\,CD \cos \beta\gamma &= BD^2 + CD^2 - BC^2 \end{aligned}$$

und daher **)

$$2\,AB\,.\,CD \cos \gamma\gamma_1 = AD^2 + BC^2 - AC^2 - BD^2$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & AC^2 & AD^2 \\ 1 & BC^2 & BD^2 \end{vmatrix}$$

In der That ist (1)

---

*) Bretschneider Geometrie §. 677.

**) Carnot a. a. O.

$$2x(\xi-\alpha)+2y(\eta-\beta)+2z(\zeta-\gamma)$$
$$=\xi^2+\eta^2+\zeta^2+(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+(z-\gamma)^2$$
$$-\alpha^2-\beta^2-\gamma^2-(x-\xi)^2-(y-\eta)^2-(z-\zeta)^2$$

12. Unter der Voraussetzung

$$d_{ik}=a(x_i-\xi_k)^2+b(y_i-\eta_k)^2+c(z_i-\zeta_k)^2$$
$$=r_i+\varrho_k-2ax_i\xi_k-2by_i\eta_k-2cz_i\zeta_k$$

wobei $r_i=ax_i^2+by_i^2+cz_i^2$, $\varrho_k=a\xi_k^2+b\eta_k^2+c\zeta_k^2$, findet man nach §. 5, 1

$$\Sigma\pm d_{00}d_{11}\,..\,d_{55}=0$$

$$\Sigma\pm d_{00}d_{11}\,..\,d_{44}=\begin{vmatrix} r_0 & 1 & x_0 & y_0 & z_0\\ . & . & . & . & .\\ r_4 & 1 & x_4 & y_4 & z_4\end{vmatrix}\begin{vmatrix} 1 & \varrho_0 & -2a\xi_0 & -2b\eta_0 & -2c\zeta_0\\ . & . & . & . & .\\ 1 & \varrho_4 & -2a\xi_4 & -2b\eta_4 & -2c\zeta_4\end{vmatrix}$$
$$=8abc(r\;1\;x\;y\;z)(\varrho\;1\;\xi\;\eta\;\zeta)$$

wenn durch $(r\;1\;x\;y\;z)$ die Determinante

$$\begin{vmatrix} r_0 & 1 & x_0 & y_0 & z_0\\ . & . & . & . & .\\ r_4 & 1 & x_4 & y_4 & z_4\end{vmatrix}$$

bezeichnet wird, u. s. w., ferner

$$\Sigma\pm d_{00}d_{11}\,..\,d_{33}=(r\;1\;x\;y)(1\quad\varrho\quad-2a\xi\quad-2b\eta)$$
$$+(r\;1\;x\;z)(1\quad\varrho\quad-2a\xi\quad-2c\zeta)$$
$$+(r\;1\;y\;z)(1\quad\varrho\quad-2b\eta\quad-2c\zeta)$$
$$+(r\;x\;y\;z)(1\quad-2a\xi\quad-2b\eta\quad-2c\zeta)$$
$$+(r\;x\;y\;z)(\varrho\quad-2a\xi\quad-2b\eta\quad-2c\zeta)$$
$$=-4ab(r\;1\;x\;y)(\varrho\;1\;\xi\;\eta)-4ac(r\;1\;x\;z)(\varrho\;1\;\xi\;\zeta)$$
$$-4bc(r\;1\;y\;z)(\varrho\;1\;\eta\;\zeta)$$
$$-8abc(r\;x\;y\;z)(1\;\xi\;\eta\;\zeta)-8abc(1\;x\;y\;z)(\varrho\;\xi\;\eta\;\zeta)$$

Diese Formeln vereinfachen sich nach Division durch $r_0\varrho_0$, wenn r_0 und ϱ_0 unendlich werden. Dann hat man

$$\frac{d_{0k}}{r_0}=1\,,\qquad \frac{1}{r_0}=\frac{x_0}{r_0}=\frac{y_0}{r_0}=\frac{z_0}{r_0}=0$$

$$\frac{d_{i0}}{\varrho_0}=1\,,\qquad \frac{1}{\varrho_0}=\frac{\xi_0}{\varrho_0}=\frac{\eta_0}{\varrho_0}=\frac{\zeta_0}{\varrho_0}=0$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & . & . & 1 \\ 1 & d_{11} & . & . & d_{15} \\ . & . & . & . & . \\ 1 & d_{51} & . & . & d_{55} \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & . & . & 1 \\ 1 & d_{11} & . & . & d_{14} \\ . & . & . & . & . \\ 1 & d_{41} & . & . & d_{44} \end{vmatrix} = 8abc \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ . & . & . & . \\ 1 & x_4 & y_4 & z_4 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & \xi_1 & \eta_1 & \zeta_1 \\ . & . & . & . \\ 1 & \xi_4 & \eta_4 & \zeta_4 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & . & 1 \\ 1 & d_{11} & . & d_{13} \\ . & . & . & . \\ 1 & d_{31} & . & d_{33} \end{vmatrix} = -4ab(1\,x\,y)(1\,\xi\,\eta) - 4ac(1\,x\,z)(1\,\xi\,\zeta) \\ - 4bc(1\,y\,z)(1\,\eta\,\zeta)$$

wobei

$$(1\,x\,y) = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix} \text{ u. s. w.}$$

Wenn ξ_k, η_k, ζ_k mit x_k, y_k, z_k zusammenfallen, so ist $d_{ik} = d_{ki}$ und $d_{ii} = 0$.

13. Wenn a, b, c Einheiten sind, so bedeutet d_{ik} das Quadrat der Strecke, welche den Punct A_i des einen Systems mit dem Punct B_k des andern Systems verbindet. Nach (12) hat man für 2mal 5 Puncte des Raumes

$$\text{(I)} \qquad \begin{vmatrix} 0 & 1 & . & . & 1 \\ 1 & d_{11} & . & . & d_{15} \\ . & . & . & . & . \\ 1 & d_{51} & . & . & d_{55} \end{vmatrix} = 0$$

ferner mit Rücksicht auf §. 15, 6

$$\text{(II)} \qquad \begin{vmatrix} 0 & 1 & . & . & 1 \\ 1 & d_{11} & . & . & d_{14} \\ . & . & . & . & . \\ 1 & d_{41} & . & . & d_{44} \end{vmatrix} = 288\, A_1 A_2 A_3 A_4 \cdot B_1 B_2 B_3 B_4$$

und unter Anwendung von (4)

$$(\mathrm{III})\qquad \begin{vmatrix} 0 & 1 & . & 1 \\ 1 & d_{11} & . & d_{13} \\ . & . & & . \\ 1 & d_{31} & . & d_{33} \end{vmatrix} = -16\, A_1 A_2 A_3 \,.\, B_1 B_2 B_3 \cos\varphi$$

wobei φ den Winkel der Dreiecks-Ebenen bedeutet.

Die Gleichung (I) ist unter der Voraussetzung, dass das zweite System mit dem ersten zusammenfällt ($d_{ik} = d_{ki}$, $d_{ii} = 0$), als Gleichung zwischen den Strecken, welche 5 Puncte des Raumes unter einander verbinden, von Cayley Cambr. math. J. 2 p. 268 in der obigen Gestalt ausserhalb des hier gezeigten Zusammenhangs aufgestellt worden. Diese Gleichung kommt in anderer Gestalt bei Lagrange sur les pyr. 19 vor, und ist wiederholt jedoch ohne übersichtliche Resultate von Carnot Geom. de pos. 359, Mém. sur la relation qui existe etc. 58 bearbeitet worden. Vermöge dieser Gleichung ist z. B. d_{15} durch die übrigen Strecken bestimmt, und zwar zweideutig, in Uebereinstimmung mit der Construction, durch welche jene Strecke aus den übrigen gefunden wird.

Die Gleichungen (II) und (III), welche v. Staudt a. a. O. gegeben hat, sind in obige Gestalt durch Sylvester Philos. Mag. 1852, II p. 335 gebracht worden. Dieselben enthalten den von Jungius (Biographie von Guhrauer p. 297) und Euler Nov. Comm. Petrop. 4 p. 158 gegebenen Ausdruck des Tetraedervolums durch die Kanten, sowie den altbekannten Ausdruck der Dreiecksfläche durch die Seiten

$$-16\, A_1 A_2 A_3 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & d_{12} & d_{13} \\ 1 & d_{12} & 0 & d_{23} \\ 1 & d_{13} & d_{23} & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & a & b & c \\ a & 0 & c & b \\ b & c & 0 & a \\ c & b & a & 0 \end{vmatrix}$$

Der letzte Ausdruck entsteht durch Einführung der Werthe $d_{23} = a^2$, $d_{13} = b^2$, $d_{12} = c^2$, indem man jede Zeile mit abc muliplicirt und dann Zeilen und Colonnen dividirt, die zweiten durch bc, die dritten durch ac, die vierten durch ab. Die Gleichung

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & d_{12} & d_{13} & d_{14} \\ . & . & . & . & . \\ 1 & d_{14} & d_{24} & d_{34} & 0 \end{vmatrix} = 0$$

enthält die Bedingung, unter der die Puncte A_1, A_2, A_3, A_4 auf einer Ebene liegen, und stimmt überein mit der Gleichung zwischen den Strecken, welche diese Puncte unter einander verbinden (Jungius und Euler Acta Petrop. 6, 1 p. 3). Unter der Bedingung

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & d_{12} & d_{13} \\ . & . & . & . \\ 1 & d_{13} & d_{23} & 0 \end{vmatrix} = 0$$

liegen die Puncte A_1, A_2, A_3 auf einer Geraden. Bei jeder Lage der 3 Puncte auf einer Geraden verschwindet ein Divisor dieser Determinante (§. 3, 17).

14. Die aus den Elementen d_{ik} gebildeten Determinanten können aus den Determinanten abgeleitet werden, deren Elemente Producte von zwei Strecken mit dem Cosinus des Winkels ihrer Geraden sind. Man hat (4)

$$16\, A_1 A_2 A_3 \,.\, B_1 B_2 B_3 \cos\varphi = \begin{vmatrix} 2c_{22} & 2c_{23} \\ 2c_{32} & 2c_{33} \end{vmatrix}$$

wenn man durch c_{ik} das Product der Strecken $A_1 A_i$, $B_1 B_i$ mit dem Cosinus des Winkels ihrer Geraden bezeichnet. Nun ist (11)

$$2c_{ik} = d_{i1} - d_{11} + d_{1k} - d_{ik}$$

folglich

$$\begin{vmatrix} 2c_{22} & 2c_{23} \\ 2c_{32} & 2c_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & d_{21} - d_{11} + d_{12} - d_{22} & d_{21} - d_{11} + d_{13} - d_{23} \\ 1 & d_{31} - d_{11} + d_{12} - d_{32} & d_{31} - d_{11} + d_{13} - d_{33} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ d_{11} & 1 & d_{11} - d_{12} & d_{11} - d_{13} \\ d_{21} & 1 & d_{21} - d_{22} & d_{21} - d_{23} \\ d_{31} & 1 & d_{31} - d_{32} & d_{31} - d_{33} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & d_{11} & d_{12} & d_{13} \\ 1 & d_{21} & d_{22} & d_{23} \\ 1 & d_{31} & d_{32} & d_{33} \end{vmatrix}$$

Ebenso werden die Determinanten 3ten und 4ten Grades der Elemente c in Determinanten 5ten und 6ten Grades der Elemente d verwandelt.

Aus den bewiesenen Sätzen folgt: das Product von zwei planen Polygonen mit dem Cosinus des Winkels ihrer Ebenen, sowie das Product von zwei Polyedern ist eine ganze Function der Quadrate der Strecken, welche die Eckpuncte der einen Figur mit denen der andern verbinden (v. Staudt a. a. O.).

Die planen Polygonen $A_1 A_2 A_3 A_4 \ldots$, $B_1 B_2 B_3 B_4, \ldots$, haben die Flächen

$$A_1 A_2 A_3 + A_1 A_3 A_4 + \ldots$$
$$B_1 B_2 B_3 + B_1 B_3 B_4 + \ldots$$

Daher ist $A_1 A_2 A_3 A_4 \ldots \times B_1 B_2 B_3 B_4 \ldots \times \cos\varphi$

$$= A_1 A_2 A_3 \,.\, B_1 B_2 B_3 \cos\varphi + A_1 A_3 A_4 \,.\, B_1 B_2 B_3 \cos\varphi + \ldots$$

$$= - \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & d_{11} & d_{12} & d_{13} \\ 1 & d_{21} & d_{22} & d_{33} \\ 1 & d_{31} & d_{32} & d_{33} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & d_{11} & d_{12} & d_{13} \\ 1 & d_{31} & d_{32} & d_{33} \\ 1 & d_{41} & d_{42} & d_{43} \end{vmatrix} - \ldots$$

Eine mehrseitige Pyramide lässt sich aus Tetraedern zusammensetzen, ein Polyeder aus Pyramiden, die einen Eckpunct des Polyeders zur gemeinschaftlichen Spitze haben und deren Basen die Flächen des Polyeders sind. Vergl. des Verf. Elemente der Math., Stereometrie § 8. Demnach kann das Product der Volume von zwei Polyedern als Summe von Producten aus jedesmal zwei Tetraedern, mithin als Summe von Determinanten 5ten Grades der angegebenen Art dargestellt werden.

15. Nach (1) und (11) hat man

$$2 c_{ik} = 2 A A_i \,.\, B B_k \cos r\varrho = A B_k^2 + B A_i^2 - A B^2 - A_i B_k^2$$

Setzt man nun voraus, dass die Puncte B_1, $B_2, \ldots$ auf einer Kugel um das Centrum A liegen, und dass die Puncte A_1, $A_2, \ldots$ auf einer Kugel um das Centrum B liegen, so ist

$$A B_k^2 + B A_i^2 - A B^2 = p$$

eine unveränderliche Grösse, und

$$d_{ik} = A_i B_k^2 = p - 2 c_{ik}$$

ein Ausdruck von 4 Gliedern, so dass man nach §. 5, 1

$$(1) \qquad \Sigma \pm d_{11} \ldots d_{55} = 0$$

findet für 2mal 5 Puncte je einer Kugel. Aus

$$d_{ik} - p = - 2 c_{ik}$$

ergiebt sich ferner

$$\begin{vmatrix} d_{11}-p & . & . & d_{14}-p \\ . & . & . & . \\ d_{41}-p & . & . & d_{44}-p \end{vmatrix} = 0 \quad \begin{vmatrix} d_{11}-p & . & . & d_{13}-p \\ . & . & . & . \\ d_{31}-p & . & . & d_{33}-p \end{vmatrix} = -8\,\Sigma \pm c_{11}\,c_{22}\,c_{33}$$

oder

$$\text{(II)} \quad \begin{vmatrix} 1 & p & . & . & p \\ 1 & d_{11} & . & . & d_{14} \\ . & . & . & . & . \\ 1 & d_{41} & . & . & d_{44} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} d_{11} & . & . & d_{14} \\ . & . & . & . \\ d_{41} & . & . & d_{44} \end{vmatrix} + p \begin{vmatrix} 0 & 1 & . & . & 1 \\ 1 & d_{11} & . & . & d_{14} \\ . & . & . & . & . \\ 1 & d_{41} & . & . & d_{44} \end{vmatrix} = 0$$

$$\text{(III)} \quad \begin{vmatrix} d_{11} & . & d_{13} \\ . & . & . \\ d_{31} & . & d_{33} \end{vmatrix} + p \begin{vmatrix} 0 & 1 & . & 1 \\ 1 & d_{11} & . & d_{13} \\ . & . & . & . \\ 1 & d_{31} & . & d_{33} \end{vmatrix} + 8\,\Sigma \pm c_{11}\,c_{22}\,c_{33} = 0$$

für 2mal 4 und 3 Puncte nebst den Centren umgeschriebener Kugeln.

Demnach ist (13)

$$\Sigma \pm d_{11} \,.\,.\, d_{44} + 288\,p \,.\, A_1 A_2 A_3 A_4 \,.\, B_1 B_2 B_3 B_4 = 0 \text{ *)}$$

und wenn bei zwei Dreiecken einer Ebene die Centren der umgeschriebenen Kreise durch B und A bezeichnet werden,

$$\Sigma \pm d_{11} \,.\, d_{33} = p \,.\, A_1 A_2 A_3 \,.\, B_1 B_1 B_3 \,.$$

Beim Zusammenfallen der beiden Systeme ist $d_{ik} = d_{ki}$, $d_{ii} = 0$, $p = 2AA_1^2$, und man erhält ausser der Gleichung zwischen den Strecken, welche 5 Puncte einer Kugel unter einander verbinden (Cayley Cambr. math. J. 2 p. 268) die oben (8) bewiesenen Gleichungen.

16. Wenn man durch S einen gemeinschaftlichen Punct der beiden Kugeln oder Kreise bezeichnet, so hat man

$$p = AS^2 + BS^2 - AB^2 = 2\,AS \,.\, BS \cos w$$

wobei w den Winkel der Geraden AS, BS d. i. den Winkel der beiden Kugeln oder der beiden auf einer Ebene liegenden Kreise bedeutet. Man erkennt hieraus, dass die Determinante $\Sigma \pm d_{11} \,.\,.\, d_{44}$, deren Elemente die Quadrate der Strecken sind, welche 4 Puncte mit 4 andern Puncten verbinden, dem

---

*) Siebeck Crelle J. 62 p. 151.

Product der beiden Tetraedervolume proportional ist, und übrigens nur von der Grösse und dem Abstand der umgeschriebenen Kugeln abhängt. Sie verschwindet, wenn die beiden Kugeln sich rechtwinkelig schneiden, und insbesondere auch dann, wenn die 4 Puncte des einen Systems auf einem Kreise liegen.

Die Determinante $\Sigma \pm d_{11} \ldots d_{44}$ ist die erste unter den partialen Determinanten 4ten Grades, welche zu der Determinante (13)

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & . & . & 1 \\ 1 & d_{11} & . & . & d_{14} \\ . & . & . & . & . \\ 1 & d_{41} & . & . & d_{44} \end{vmatrix}$$

gehören. Die übrigen partialen Determinanten können aus jener abgeleitet werden; man findet z. B.

$$\begin{vmatrix} 1 & d_{12} & d_{13} & d_{14} \\ . & . & . & . \\ 1 & d_{42} & d_{43} & d_{44} \end{vmatrix} = -288\, A_1 A_2 A_3 A_4 \,.\, B B_2 B_3 B_4$$

weil bei der Vereinigung des Punctes B_1 mit dem Centrum B

$$p = AB^2 + BA_1^{\,2} - AB^2 = d_{11} = d_{21} = d_{31} = d_{41}\,.$$

17. Wenn auf einer Kugel, deren Radius eine Längeneinheit ist, die sphärischen Dreiecke $A_1 A_2 A_3$, $B_1 B_2 B_3$ liegen und im Centrum O dieser Kugel die Puncte A_4, B_4 vereint sind, so hat man

$$d_{14} = d_{24} = d_{34} = d_{41} = d_{42} = d_{43} = 1\,, \quad d_{44} = 0$$

$$d_{ik} = 4 \sin^2 \tfrac{1}{2} A_i B_k = 2 - 2 \cos A_i B_k$$

$$\Sigma \pm d_{11} \ldots d_{44} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & . & . \\ 1 & 2 - 2\cos A_1 B_1 & . & . \\ 1 & 2 - 2\cos A_2 B_1 & . & . \\ 1 & 2 - 2\cos A_3 B_1 & . & . \end{vmatrix} = 4 \begin{vmatrix} 0 & 1 & . & . \\ 1 & \cos A_1 B_1 & . & . \\ 1 & \cos A_2 B_1 & . & . \\ 1 & \cos A_3 B_1 & . & . \end{vmatrix}$$

Nun ist nach (3) $36\, A_1 A_2 A_3 O \,.\, B_1 B_2 B_3 O = \sin A_1 A_2 A_3 \sin B_1 B_2 B_3$

$$= \begin{vmatrix} \cos A_1 B_1 & \cos A_1 B_2 & \cos A_1 B_3 \\ \cos A_2 B_1 & \cos A_2 B_2 & \cos A_2 B_3 \\ \cos A_3 B_1 & \cos A_3 B_2 & \cos A_3 B_3 \end{vmatrix}$$

folglich (15) durch Addition *)

---

*) Sieberck a. a. O.

$$\begin{vmatrix} 2p & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \cos A_1 B_1 & \cos A_1 B_2 & \cos A_1 B_3 \\ 1 & \cos A_2 B_1 & \cos A_2 B_2 & \cos A_2 B_3 \\ 1 & \cos A_3 B_1 & \cos A_3 B_2 & \cos A_3 B_3 \end{vmatrix} = 0$$

Um die Grösse p sphärisch auszudrücken, braucht man die sphärischen Centren P und Q der Kreise $A_1 A_2 A_3$ und $B_1 B_2 B_3$. Die Geraden OP, OQ enthalten die Centren B, A der Kugeln $A_1 A_2 A_3 O$, $B_1 B_2 B_3 O$ und sind Diameter, also ist $\cos PQ$ der Cosinus des von den Geraden AO, BO gebildeten Winkels, mithin

$$p = 2\,AO \,.\, BO \cos PQ\,, \qquad 2p = OP \,.\, OQ \cos PQ\,.$$

Nun ist $OP \cos PA_1 = OA_1 = 1$, $OQ \cos QB_1 = OB_1 = 1$, folglich

$$2p = \frac{\cos PQ}{\cos PA_1 \cos QB_1}\,.$$

Wenn die Kreise $A_1 A_2 A_3$ und $B_1 B_2 B_3$ in R sich schneiden, so hat man

$$\cos PQ = \cos PR \cos RQ + \sin PR \sin RQ \cos QRP\,,$$

$$2p = 1 + \operatorname{tang} PR \operatorname{tang} RQ \cos QRP\,.$$

Bei rechtwinkelig sich schneidenden Kreisen ist $2p = 1$.

§. 17. Polygonometrische und polyedrometrische Relationen.

1. Wenn die Seiten AB, BC, .., MN, NA eines beliebigen Polygons nach willkürlicher Festsetzung der positiven Richtungen der Geraden, auf denen sie liegen, die Werthe a_1, a_2, .., a_n haben, und $\cos_{pi}$ den Cosinus des Winkels bedeutet, welchen die Gerade der $i$ten Seite mit einer beliebigen Geraden bildet, so ist *)

$$a_1 \cos_{p1} + a_2 \cos_{p2} + \,.\,.\, + a_n \cos_{pn} = 0\,.$$

Sind nämlich A_1, B_1, .. die orthogonalen Projectionen von A, B, .. auf eine beliebige Gerade, so hat man

*) Lexell Nov. Comm. Petrop. 19 p. 187. L'Huilier polygonométrie p. 20. Carnot géom. de pos. 254.

$$A_1 B_1 + B_1 C_1 + \ldots + M_1 N_1 + N_1 A_1 = 0$$

unter der Voraussetzung, dass $A_1 B_1 = - B_1 A_1$, u. s. w. Nun ist allgemein $A_1 B_1 = A B \cos_{p1}$, wie auch die Richtung der positiven Strecken auf den Geraden, deren Strecken AB und $A_1 B_1$ sind, angenommen werde, weil bei Vertauschung einer Richtung mit der entgegengesetzten zwei der Grössen $A_1 B_1$, AB, $\cos_{p1}$ das Zeichen wechseln. Durch Substitution der Werthe von $A_1 B_1$, $B_1 C_1$, .. findet man die angegebene Fundamentalgleichung der Polygonometrie.

Wenn umgekehrt $a_1, a_2, \ldots, a_n$ Strecken von gegebener Richtung und Grösse sind, und $\cos_{pi}$ den Cosinus des Winkels bedeutet, welchen die Gerade, auf welcher die $i$te Strecke liegt, mit einer beliebigen Geraden bildet, und die Summe

$$S = a_1 \cos_{p1} + a_2 \cos_{p2} + \ldots + a_n \cos_{pn}$$

verschwindet, wie auch die willkürliche Gerade angenommen werde, so erhält man ein geschlossenes Polygon, wenn man nach willkürlicher Anordnung der Strecken, ohne deren Richtungen zu verändern, mit dem Ende der ersten den Anfang der zweiten, mit dem Ende der zweiten den Anfang der dritten u. s. f. vereint. Gesetzt, das Ende der letzten Strecke fiele mit dem Anfang der ersten nicht zusammen, so würde die Summe S im Allgemeinen nicht verschwinden, was der Voraussetzung widerstreitet.

2. Der Inhalt eines planen Dreiecks ist unzweideutig bestimmt, wenn nicht nur der Sinn, in welchem sein Perimeter zu durchlaufen ist, sondern auch die positive Richtung der Normalen seiner Ebene nebst dem positiven Sinn der Ebene gegeben ist. Der Beurtheiler stelle sich so auf die Ebene, dass ihm die positive Richtung der Normalen aufwärts gehend erscheint; je nachdem nun die durch die Ordnung der Eckpuncte gegebene Drehung mit der Drehung, durch welche positive Winkel und Flächen beschrieben werden, einerlei Sinnes ist oder nicht, wird der Inhalt als positiv oder negativ bezeichnet. In gleicher Weise ist zur unzweideutigen Bestimmung des Inhalts jedes planen Polygons der Sinn seines Perimeters erforderlich.

Bei einer Fläche eines gegebenen Polyeders kann der Sinn ihres Perimeters willkürlich bestimmt werden. Bei jeder mit dieser Fläche durch eine gemeinschaftliche Kante MN verbundenen Fläche des Polyeders wird der Sinn des Perimeters so angenommen, dass die vereinigten Theile der beiden Perimeter einander entgegengesetzt sind, also der eine durch MN, der andre durch NM ausgedrückt wird *). Wenn z. B. eine Fläche des Tetraeders $ABCD$ durch ABC ausgedrückt wird, so sind die übrigen Flächen durch CBD, BAD, ACD auszudrücken. Ist $ABCD$ eine Fläche eines Hexaeders, so sind $DCC'D'$, $CBB'C'$, $BAA'B'$, $ADD'A'$, $D'C'B'A'$ die übrigen Flächen. U. s. f.

Wenn nun die in der angegebenen Weise ausgedrückten Flächen eines Polyeders nach willkürlicher Festsetzung der positiven Richtung der Normalen und des positiven Sinnes einer jeden Ebene die Werthe $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ haben, und wenn durch $\cos_{pi}$ der Cosinus des Winkels bezeichnet wird, welchen die Ebene der $i$ten Fläche mit einer beliebig hinzugefügten Ebene bildet, so ist**)

$$\alpha_1 \cos_{p1} + \alpha_2 \cos_{p2} + \ldots + \alpha_n \cos_{pn} = 0 .$$

Beweis. Man bezeichne die Normalprojectionen der Eckpuncte A, B, C, .. auf die beliebig angenommene Ebene durch A_1, B_1, C_1, ... Die Summe Σ der Projectionen der Polyederflächen besteht aus der Summe aller Dreiecke, welche einen beliebigen Punct O der Projectionsebene zur gemeinschaftlichen Spitze haben, und deren Basen die Seiten der durch Projection der Polyederflächen entstandenen Polygone sind. Die Summe dieser Dreiecke enthält aber zu jedem Dreieck OM_1N_1 auch das entgegengesetzte ON_1M_1, folglich verschwindet sie und mit ihr die Summe Σ. Nun ist die Projection der $i$ten Fläche

$$F_1 G_1 H_1 \ldots = FGH \ldots \cos_{pi} ,$$

also verschwindet die Summe $\alpha_1 \cos_{p1} + \alpha_2 \cos_{p2} + \ldots$

*) Dieses Princip ist von Möbius Statik §. 55 angedeutet, in den Berichten der Sächs. Ges. d. W. 1865 p. 31 als »Gesetz der Kanten« aufgestellt worden. Vergl. des Verf. Elemente der Math., Stereom. §. 8, 16.

**) L'Huilier théorèmes de polyedr. 1799 (Mem. présentés à l'Inst. 1. 1805 p. 264). Carnot l. c. Die Voraussetzungen, unter welchen die Gleichung gültig ist, werden in den angeführten Schriften nicht genau angegeben.

Zusatz. Construirt man auf den Normalen der Flächen des Polyeders je eine Strecke $a_1, a_2, .., a_n$ proportional den Werthen $\alpha_1, \alpha_2, .., \alpha_n$ der Flächen, zu denen die Normalen gehören, so ist zufolge der bewiesenen Gleichung auch

$$a_1 \cos_{p1} + a_2 \cos_{p2} + .. + a_n \cos_{pn} = 0,$$

wo nun unter $\cos_{pi}$ der Cosinus des Winkels verstanden werden kann, den die Gerade, auf der die Strecke a_i liegt, mit der Normale einer beliebigen Ebene, d. h. mit einer beliebigen Geraden bildet. Daher erhält man (1) ein geschlossenes Polygon, wenn man, ohne die Richtungen der Strecken $a_1, a_2, .., a_n$ zu verändern, mit dem Ende der ersten Strecke den Anfang der zweiten, dann mit dem Ende der zweiten den Anfang der dritten u. s. f. vereint. Es giebt also für jedes Polyeder ein zugehöriges Polygon, dessen Seiten und Winkel den Flächen und Flächenwinkeln des Polyeders gleich sind, so dass jeder polygonometrischen Gleichung zwischen den Seiten und Winkeln des Polygons eine polyedrometrische Gleichung zwischen den Flächen und Flächenwinkeln des Polyeders entspricht.

3. Indem man die beliebige Gerade (Ebene) der Reihe nach mit den einzelnen Geraden (Ebenen) der Polygonseiten (Polyederflächen) vereinigt, erhält man das System von linearen Gleichungen (1)

$$\begin{array}{c}
a_1 \cos_{11} + a_2 \cos_{12} + .. + a_n \cos_{1n} = 0 \\
. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\
a_1 \cos_{n1} + a_2 \cos_{n2} + .. + a_n \cos_{nn} = 0
\end{array}$$

worin $\cos_{ii} = 1$, $\cos_{ki} = \cos_{ik}$ ist. Die Determinante dieses Systems

$$\begin{vmatrix} \cos_{11} & . \; . & \cos_{1n} \\ . & . \; . & . \\ \cos_{n1} & . \; . & \cos_{nn} \end{vmatrix}$$

hat die Eigenthümlichkeit, dass alle dazugehörigen partialen Determinanten 4ten und höhern Grades zufolge des §. 16, 2 bewiesenen Satzes Nullen sind. Man kann also aus dem obigen System für $n = 3$ die Proportion der Seiten eines geradlinigen

Dreiecks, für $n = 4$ die Proportion der Seiten eines unebenen geradlinigen Vierecks und der Flächen eines Tetraeders goniometrisch ausdrücken. Dagegen bleibt die Proportion der Seiten eines andern Polygons und der Flächen eines Polyeders unbestimmt.

Wenn die Seiten des Vierecks $OPQR$ auf den Geraden x, y, z, r liegen, so hat man ausser der Gleichung

$$OP \cos px + PQ \cos py + QR \cos pz + RO \cos pr = 0$$

die besondern Gleichungen, welche durch das Zusammenfallen von p mit x, y, z, r sich ergeben, und denen die Werthe (§. 8, 3)

$$OP = \lambda\alpha_1\,, \quad PQ = \lambda\alpha_2\,, \quad QR = \lambda\alpha_3\,, \quad RO = \lambda\alpha_4$$

genügen, wobei (§. 16, 3)

$$\alpha_1 = -\begin{vmatrix} \cos xy & \cos xz & \cos xr \\ \cos yy & \cos yz & \cos yr \\ \cos zy & \cos zz & \cos zr \end{vmatrix} = -\sin xyz \sin yzr$$

$$\alpha_2 = \sin xyz \sin zrx = -\sin xyz \sin zxr$$

u. s. w., und λ beliebig ist. Daher folgt*)

$$OP : PQ : QR : RO = \sin yzr : \sin zxr : \sin xyr : -\sin xyz$$

und die Fundamentalgleichung der räumlichen Goniometrie

$$\sin yzr \cos px + \sin zxr \cos py + \sin xyr \cos pz = \sin xyz \cos pr\,.$$

4. Die Beziehung zwischen 4 Puncten eines Kreises A, B, C, D kann durch die Eigenschaften der Winkel, Strecken, Flächen, welche durch die betrachteten Puncte bestimmt sind, angegeben werden. Nach dem in Euclides' Elementen enthaltenen Theorem ist die Winkeldifferenz $ACB - ADB$ entweder 0 oder 180^0, mithin allgemein**)

$$\text{(I)} \qquad 2(ACB - ADB) = 0$$

wenn die genannten Puncte auf einem Kreise liegen und Winkel von gleichen Zeichen durch Drehungen von einerlei Sinn

---

*) Andere Ausdrücke dieser Proportion enthält der Aufsatz des Verf. Crelle J. 46 p. 150. Der gleichlautende tetraedrometrische Satz von den Flächen eines Tetraeders ist bekannt. Vergl. oben §. 16, 6.

**) Möbius Kreisverwandtschaft §. 14.

beschrieben werden. Der Winkel 360^0 ist gleichbedeutend mit 0.

Nach dem Theorem des PTOLEMÄUS (Almagest I, 9) ist ferner

$$\text{(II)} \qquad \sqrt{p} + \sqrt{q} + \sqrt{r} = 0,$$

wenn die Producte aus den Quadraten der gegenüberliegenden Strecken, welche 4 Kreispuncte A, B, C, D verbinden, durch p, q, r bezeichnet werden. Indem man die Norm des irrationalen Trinomium $= 0$ setzt, findet man die rationale Gleichung zwischen den Quadraten der Strecken, welche durch die genannten Puncte bestimmt sind. Eine der letztern analoge Gleichung giebt es für die Quadrate der Strecken, welche 5 Puncte einer Kugel verbinden.

Endlich kennt man Relationen zwischen 4 Puncten eines Kreises oder 5 Puncten einer Kugel und einem beliebigen andern Puncte, wovon die letztere in einem Theorem FEUERBACH's (Untersuchung der dreieckigen Pyramide p. 15) enthalten ist, welches CAYLEY (Cambr. math. J. II p. 268) und LUCHTERHANDT (Crelle J. 23 p. 375) reproducirt haben. Dieselben Relationen hat MÖBIUS (Crelle J. 26 p. 26) aus barycentrischen Principien abgeleitet. CAYLEY's Verfahren, das auf dem Gebrauch der Determinanten beruht, ist folgendes.

Die Puncte A, B, C, D eines Kreises seien in Bezug auf ein System orthogonaler Axen, dessen Anfang O ist, durch die Coordinaten x, y; x_1, y_1; x_2, y_2; x_3, y_3 gegeben. Man hat, wie bekannt,

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= a + bx + cy \\ x_1^2 + y_1^2 &= a + bx_1 + cy_1 \\ &\cdots\cdots \\ x_3^2 + y_3^2 &= a + bx_3 + cy_3 \end{aligned}$$

folglich (§. 8, 3)

$$\text{(III)} \qquad \begin{vmatrix} x^2 + y^2 & 1 & x & y \\ x_1^2 + y_1^2 & 1 & x_1 & y_1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x_3^2 + y_3^2 & 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Die Entwickelung dieser Determinante nach §. 3, 2 mit Rücksicht auf §. 15, 5 giebt:

$$OA^2 . BCD - OB^2 . CDA + OC^2 . DAB - OD^2 . ABC = 0.$$

Wenn man OP normal zur Kreisebene construirt und die Identität (§. 15, 5)

$$OP^2(BCD - CDA + DAB - ABC) = 0$$

zu der vorigen Gleichung addirt, so kommt

$$\text{(IV)} \qquad PA^2 . BCD - PB^2 . CDA + PC^2 . DAB - PD^2 . ABC = 0 ,$$

worin P irgend einen Punct des Raumes bedeutet. Insbesondere ist, wenn P mit D zusammenfällt,

$$DA^2 . BCD + DB^2 . CAD + DC^2 . ABD = 0 .$$

In gleicher Weise seien die Puncte A, B, C, D, E einer Kugel in Bezug auf ein System orthogonaler Axen durch die Coordinaten x, y, z; u. s. w. gegeben. Aus den Gleichungen

$$x^2 + y^2 + z^2 = a + bx + cy + dz$$

$$. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$

$$x_4^2 + y_4^2 + z_4^2 = a + bx_4 + cy_4 + dz_4$$

folgt

$$\text{(V)} \qquad \begin{vmatrix} x^2 + y^2 + z^2 & 1 & x & y & z \\ . & . & . & . & . \\ x_4^2 + y_4^2 + z_4^2 & 1 & x_4 & y_4 & z_4 \end{vmatrix} = 0 .$$

Die Entwickelung dieser Determinante giebt (§. 15, 6)

$$\text{(VI)} \qquad OA^2 . BCDE + OB^2 . CDEA + OC^2 . DEAB$$
$$+ OD^2 . EABC + OE^2 . ABCD = 0 ,$$

worin O irgend einen Punct des Raumes bezeichnet. Nach den in §. 15, 7 angenommenen Bezeichnungen hat man

$$\mu . OE^2 + \mu_1 . OA^2 + \mu_2 . OB^2 + \mu_3 . OC^2 + \mu_4 . OD^2 = 0$$

d. h. wenn μ_1, μ_2, μ_3, μ_4 die coordinirten Coefficienten von E in Bezug auf die Pyramide $ABCD$ sind, so ist für alle Puncte O auf einer um das Centrum E beschriebenen Kugel $\mu_1 . OA^2 + \mu_2 . OB^2 + \mu_3 . OC^2 + \mu_4 . OD^2$ constant (Feuerbach). Insbesondere ist

$$AB^2 . CDEA + AC^2 . DEAB + AD^2 . EABC + AE^2 . ABCD = 0$$

$$\mu . DE^2 + \mu_1 . DA^2 + \mu_2 . DB^2 + \mu_3 . DC^2 = 0$$

Wenn man die Determinanten (III) und (V) bezüglich mit

$$\begin{vmatrix} 1 & x^2+y^2 & -2x & -2y \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & x_3^2+y_3^2 & -2x_3 & -2y_3 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & x^2+y^2+z^2 & -2x & -2y & -2z \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & x_4^2+y_4^2+z_4^2 & -2x_4 & -2y_4 & -2z_4 \end{vmatrix}$$

multiplicirt, so findet man $\Sigma \pm d_{00} \ldots d_{33}$ und $\Sigma \pm d_{00} \ldots d_{44}$ (§. 5, 4), wobei im ersten Falle

$$\begin{aligned} d_{00} &= x^2+y^2+x^2+y^2-2x^2-2y^2 = 0 \\ d_{01} &= x^2+y^2+x_1^2+y_1^2-2xx_1-2yy_1 = AB^2 \\ d_{02} &= x^2+y^2+x_2^2+y_2^2-2xx_2-2yy_2 = AC^2 \end{aligned}$$

u. s. w., im zweiten Falle

$$\begin{aligned} d_{00} &= x^2+y^2+z^2+x^2+y^2+z^2-2x^2-2y^2-2z^2 = 0 \\ d_{01} &= x^2+y^2+z^2+x_1^2+y_1^2+z_1^2-2xx_1-2yy_1-2zz_1 = AB^2 \end{aligned}$$

u. s. w. Daher ist die oben erwähnte Gleichung zwischen den Strecken, welche 4 Puncte eines Kreises verbinden, folgende (Cayley):

$$\text{(VII)} \quad \begin{vmatrix} 0 & d_{01} & d_{02} & d_{03} \\ d_{01} & 0 & d_{12} & d_{13} \\ d_{02} & d_{12} & 0 & d_{23} \\ d_{03} & d_{13} & d_{23} & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

worin d_{ik} das Quadrat der Strecke vom $i$ten bis zum $k$ten Puncte bedeutet.

Die analoge Gleichung zwischen den Strecken, welche 5 Puncte einer Kugel verbinden, lautet (Cayley):

$$\text{(VIII)} \quad \begin{vmatrix} 0 & d_{01} & d_{02} & d_{03} & d_{04} \\ d_{01} & 0 & d_{12} & d_{13} & d_{14} \\ d_{02} & d_{12} & 0 & d_{23} & d_{24} \\ d_{03} & d_{13} & d_{23} & 0 & d_{34} \\ d_{04} & d_{14} & d_{24} & d_{34} & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Vergl. oben §. 16, 13 und 15.

5. Die gefundenen Relationen (III) bis (VIII) gelten für Puncte einer Linie oder Fläche 2ter Ordnung mit endlichen

Hauptaxen, wenn man jede Strecke nach dem parallelen halben Diameter misst*).

Beweis. Man bezeichne durch O den Anfang der mit den Hauptaxen parallelen Coordinaten, durch $x_1 - x$, $y_1 - y$, $z_1 - z$ und t, u, v die Normalprojectionen der Strecke AB und des mit AB parallel gezogenen halben Diameter MN der Fläche auf die Hauptaxen derselben. Dann ist wegen der Aehnlichkeit der Figuren

$$x_1 - x : y_1 - y : z_1 - z : AB = t : u : v : MN$$

Nun sind t, u, v durch die Gleichung

$$at^2 + bu^2 + cv^2 = 1$$

verbunden, folglich

$$a(x_1 - x)^2 + b(y_1 - y)^2 + c(z_1 - z)^2 = \frac{AB^2}{MN^2}.$$

Wenn nun der Punct x, y, z auf der Fläche 2ter Ordnung liegt, so hat man

$$ax^2 + by^2 + cz^2 = a' + b'x + c'y + d'z$$

u. s. w., wie oben, während an die Stelle von OA, OB, AB,.. deren Verhältnisse zu den halben Diametern der Fläche treten, die mit den Strecken parallel sind.

6. Ein Kegelschnitt zweiten Grades ist durch einen seiner Brennpuncte O und 3 andere Puncte A, B, C bestimmt; daher müssen 4 Puncte eines Kegelschnitts und ein Brennpunct desselben eine gewisse Relation haben. Die Rotationsfläche zweiten Grades, welche durch Rotation eines Kegelschnitts um seine Hauptaxe entsteht, ist durch einen ihrer Brennpuncte O und 4 andere Puncte A, B, C, D bestimmt, so dass eine Relation zwischen 5 Puncten einer solchen Fläche und einem ihrer Brennpuncte bestehen muss. Diese Relationen sind von Möbius (Crelle J. 26 p. 29) angegeben und bewiesen worden.

Man kann dieselben aus dem bekannten Satze ableiten, dass der Radius Vector $OA = r$ eines Kegelschnitts oder einer

---

*) Die Geltung der obigen Sätze für Ellipse und Ellipsoid hat Brioschi Crelle J. 50 p. 236 bemerkt.

Rotationsfläche der angegebenen Art eine lineare Function der Coordinaten x, y oder x, y, z des Punctes A in Bezug auf beliebige Axen ist. Sind x_1, y_1 oder x_1, y_1, z_1 die Coordinaten von B u. s. w., so hat man

$$r = a + bx + cy \qquad r = a + bx + cy + dz$$
$$\ldots \qquad \ldots$$
$$r_3 = a + bx_3 + cy_3 \qquad r_4 = a + bx_4 + cy_4 + dz_4$$

folglich (§. 8, 3)

$$\begin{vmatrix} r & 1 & x & y \\ r_1 & 1 & x_1 & y_1 \\ r_2 & 1 & x_2 & y_2 \\ r_3 & 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix} = 0, \qquad \begin{vmatrix} r & 1 & x & y & z \\ r_1 & 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ . & . & . & . & . \\ r_4 & 1 & x_4 & y_4 & z_4 \end{vmatrix} = 0,$$

d. h. (§. 15, 5. 6)

$$OA \,.\, BCD - OB \,.\, CDA + OC \,.\, DAB - OD \,.\, ABC = 0,$$
$$OA \,.\, BCDE + OB \,.\, CDEA + OC \,.\, DEAB$$
$$+ OD \,.\, EABC + OE \,.\, ABCD = 0.$$

Wenn A, B, C, D auf der Rotationsfläche und zugleich auf einer durch O gehenden Ebene liegen, so ist $ABCD = 0$ und

$$BCDE : -CDAE : DABE : -ABCE$$
$$= BCD : -CDA : DAB : -ABC,$$

folglich

$$OA \,.\, BCD - OB \,.\, CDA + OC \,.\, DAB - OD \,.\, ABC = 0,$$

d. h. die Rotationsfläche wird von einer durch einen ihrer Brennpuncte gelegten Ebene in einer Linie zweiten Grades geschnitten, für welche jener Punct ein Brennpunct ist (Möbius a. a. O.).

7. Die einfachste Relation zwischen 5 Puncten des Raumes, A, B, C, D, E, deren Coordinaten in Bezug auf 3 beliebige Axen x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2 u. s. w. sind, findet man, indem man die Identität (§. 2, 4)

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ 1 & 1 & x_2 & y_2 & z_2 \\ . & . & . & . & . \\ 1 & 1 & x_5 & y_5 & z_5 \end{vmatrix} = 0$$

nach den Elementen der ersten Colonne entwickelt und die gefundenen Determinanten 4ten Grades nach §. 15, 6 deutet,

$$\text{(I)} \qquad BCDE + CDEA + DEAB + EABC + ABCD = 0$$

vergl. §. 15, 7. Wenn man die Volume der einzelnen Tetraeder durch ihre Kanten ausdrückt (§. 16, 13), so erhält man eine irrationale Gleichung, deren rechte Seite Null ist und deren linke Seite die Summe der Quadratwurzeln von 5 Determinanten 5ten Grades ist. Um diese Gleichung zu rationalisiren, hat man das Product aus den 16 Werthen zu bilden, welche die linke Seite vermöge der Zweideutigkeit von 4 unter jenen Quadratwurzeln annehmen kann*). Die linke Seite besitzt aber einen rationalen Divisor, zu dessen Auffindung es genügt, die Gleichung (I) mit einem ihrer Glieder zu multipliciren, weil das Product aus zwei Tetraedern eine rationale Function von den Quadraten der Strecken ist, welche die Eckpuncte des einen Tetraeders mit denen des andern Tetraeders verbinden (§. 16, 13).

Dieser Divisor der Gleichung ist der in §. 16, 13 gegebene, welchen in dieser Gestalt zuerst Cayley (Cambr. math. J. 2 p. 268) direct entwickelt hat. Nach Analogie des in (9) mitgetheilten Verfahrens hat Cayley die Determinante

$$R = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 + u_1^2 & x_1 & y_1 & z_1 & u_1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & x_5^2 + y_5^2 + z_5^2 + u_5^2 & x_5 & y_5 & z_5 & u_5 \end{vmatrix}$$

mit der Determinante

$$-16R = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 + u_1^2 & 1 & -2x_1 & -2y_1 & -2z_1 & -2u_1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x_5^2 + y_5^2 + z_5^2 + u_5^2 & 1 & -2x_5 & -2y_5 & -2z_5 & -2u_5 \end{vmatrix}$$

multiplicirt. Man findet (§. 5, 6) $-16R^2 = \Sigma \pm h_{00} \ldots h_{55}$, worin $h_{ik} = h_{ki}$ und zwar

$$h_{ii} = 0, \qquad h_{ok} = 1$$

$$\begin{aligned} h_{12} &= x_2^2 + x_2^2 + z_2^2 + u_2^2 + x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 + u_1^2 \\ &\quad - 2x_1x_2 - 2y_1y_2 - 2z_1z_2 - 2u_1u_2 \\ &= (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2 + (u_1 - u_2)^2 \end{aligned}$$

*) Vergl. Sylvester Cambr. and Dubl. math. J. 1853 Mai.

u. s. w. Wenn die unbestimmten Grössen $u_1, u_2, .., u_5$ verschwinden, so verschwindet R (§. 3, 3). Versteht man dabei unter x_1, y_1, z_1 die orthogonalen Coordinaten des Punctes A u. s. w., so wird $h_{12} = AB^2$ u. s. w. Bezeichnet man die Quadrate der Strecken vom 1ten zum 2ten, 3ten, .. Puncte wie oben durch $d_{12}, d_{13}, ..$, so hat man die Gleichung

$$\text{(II)} \qquad \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & d_{12} & d_{13} & d_{14} & d_{15} \\ 1 & d_{12} & 0 & d_{23} & d_{24} & d_{25} \\ 1 & d_{13} & d_{23} & 0 & d_{34} & d_{35} \\ 1 & d_{14} & d_{24} & d_{34} & 0 & d_{45} \\ 1 & d_{15} & d_{25} & d_{35} & d_{45} & 0 \end{vmatrix} = 0$$

für die Quadrate der Strecken, welche 5 Puncte des Raumes verbinden.

Diese Determinante nach den Elementen der ersten Zeile entwickelt giebt

$$\delta_{01} + \delta_{02} + \delta_{03} + \delta_{04} + \delta_{05} = 0$$

wenn man die Coefficienten, welche die Elemente der ersten Zeile haben, durch $\delta_{01}, \delta_{02}, ..$ bezeichnet. Bei analoger Bezeichnung ist aber (§. 6, 5)

$$\delta_{01}^2 : \delta_{02}^2 : \delta_{03}^2 : \delta_{04}^2 : \delta_{05}^2 = \delta_{11} : \delta_{22} : \delta_{33} : \delta_{44} : \delta_{55},$$

weil die Determinante verschwindet und $\delta_{ik} = \delta_{ki}$ (§. 3, 13) ist. Folglich hat man bei einer bestimmten Auswahl der Zeichen

$$\sqrt{\delta_{11}} + \sqrt{\delta_{22}} + \sqrt{\delta_{33}} + \sqrt{\delta_{44}} + \sqrt{\delta_{55}} = 0,$$

womit nach §. 16, 13 die Gleichung (I) übereinstimmt.

Auf demselben Wege werden die Gleichungen zwischen den Quadraten der Strecken gefunden, welche 4 Puncte A, B, C, D einer Ebene und 3 Puncte A, B, C einer Geraden verbinden. Es ist nämlich nach den angenommenen Bezeichnungen im ersten Falle

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & d_{12} & d_{13} & d_{14} \\ 1 & d_{12} & 0 & d_{23} & d_{24} \\ 1 & d_{13} & d_{23} & 0 & d_{34} \\ 1 & d_{14} & d_{24} & d_{34} & 0 \end{vmatrix} = 0$$

und bei gehöriger Zeichenbestimmung

$$\sqrt{\delta_{11}} + \sqrt{\delta_{22}} + \sqrt{\delta_{33}} + \sqrt{\delta_{44}} = 0$$

übereinstimmend mit $BCD - CDA + DAB - ABC = 0$ d. i.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & 1 & x_3 & y_3 \\ 1 & 1 & x_4 & y_4 \end{vmatrix} = 0 ;$$

im zweiten Falle

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & d_{12} & d_{13} \\ 1 & d_{12} & 0 & d_{23} \\ 1 & d_{13} & d_{23} & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$\sqrt{\delta_{11}} + \sqrt{\delta_{22}} + \sqrt{\delta_{33}} = 0 ,$$

übereinstimmend mit $AB + BC + CA = 0$ d. i.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & x_1 \\ 1 & 1 & x_2 \\ 1 & 1 & x_3 \end{vmatrix} = 0 .$$

Diese Gleichungen ergeben sich auch aus 7, VII und VIII. Wenn nämlich von 5 Puncten einer Kugel einer unendlich fern ist, so ist z. B.

$$\frac{d_{01}}{d_{01}} = \frac{d_{02}}{d_{01}} = \frac{d_{03}}{d_{01}} = \frac{d_{04}}{d_{01}} = 1$$

und die übrigen 4 Puncte liegen auf einer Ebene. Und wenn von 4 Puncten eines Kreises einer unendlich fern ist, so liegen die übrigen 3 Puncte auf einer Geraden.

8. Lagrange (sur les pyr. 17) hat das grösste Tetraeder untersucht, dessen Flächen gegebene Inhalte besitzen. Nach der in §. 16, 6 angenommenen Bezeichnung hat man

$$V^4 = (6\,A\,A_1\,A_2\,A_3)^4 = \Sigma \pm \gamma_{11}\gamma_{22}\gamma_{33}$$

und nach einer von Lagrange sur les pyr. 12 aufgestellten tetraedrometrischen Gleichung (s. des Verf. Elem. d. Math., Trigonometrie §. 6, 5)

$$4\,A_1\,A_2\,A_3^{\,2} = \gamma_{11} + \gamma_{22} + \gamma_{33} + 2\gamma_{23} + 2\gamma_{31} + 2\gamma_{12} .$$

Also sind γ_{11}, γ_{22}, γ_{33} und $s = \gamma_{23} + \gamma_{31} + \gamma_{12}$ gegebene Grössen und $V^4 = \Sigma \pm \gamma_{11}\gamma_{22}\gamma_{33}$ eine Function von 3 durch eine Gleichung verbundenen Variablen, die ein Maximum werden kann unter den Bedingungen

$$\frac{\partial V^4}{\partial \gamma_{23}} + \mu \frac{\partial s}{\partial \gamma_{23}} = 0, \quad \frac{\partial V^4}{\partial \gamma_{31}} + \mu \frac{\partial s}{\partial \gamma_{31}} = 0, \quad \frac{\partial V^4}{\partial \gamma_{12}} + \mu \frac{\partial s}{\partial \gamma_{12}} = 0.$$

Nun ist $\frac{\partial s}{\partial \gamma_{23}} = 1$ und $\frac{1}{2}\frac{\partial V^4}{\partial \gamma_{23}}$ hat als Coefficient von γ_{23} in $\Sigma \pm \gamma_{11}\gamma_{22}\gamma_{33}$ den Werth $V^4 c_{23}$ (§. 6, 2), u. s. w. Daher ist ein grösstes Tetraeder so beschaffen, dass

$$c_{23} = c_{31} = c_{12}$$

d. h. es gehört zu den besondern Tetraedern, deren gegenüberliegende Kanten normal zu einander sind und deren Höhen sich in einem Punct schneiden*). Denn durch Projection von AA_2A_3 auf AA_1 findet man

$$AA_2 \cos r_1 r_2 + A_2 A_3 \cos r_1 \varrho_1 + A_3 A \cos r_1 r_3 = 0$$

indem man durch r_1, r_2, r_3, ϱ_1 die Geraden bezeichnet, auf denen AA_1, AA_2, AA_3, A_2A_3 liegen. Nun ist

$$AA_1 . AA_2 \cos r_1 r_2 = AA_1 . AA_3 \cos r_1 r_3, \quad AA_2 \cos r_1 r_2 + A_3 A \cos r_1 r_3 = 0$$

folglich $A_2 A_3 \cos r_1 \varrho_1 = 0$.

Zur Berechnung der Elemente des gesuchten Tetraeders dient eine Gleichung 4ten Grades, von der eine positive Wurzel ohne Weiteres erkennbar ist. Es war aber von Lagrange nicht gezeigt worden, dass durch diese Wurzel und nur durch diese ein reales Tetraeder von grösstem Volum bestimmt wird. Diese Discussion ist von Borchardt auf Grund einer neuen und umfassenden Behandlung des ganzen Problems in 2 Abhandlungen (Berl. Acad. 1865 und 1866 gegeben worden. Den folgenden Auszug seiner Arbeit hat Herr Borchardt zur Mittheilung an dieser Stelle zu verfassen die Güte gehabt.

I. Wo es nicht ausdrücklich anders bemerkt ist, sollen im Folgenden a, b Zahlen bedeuten, welche die Werthe 0, 1, 2, 3, 4

---

*) Diese Bemerkung ist von L'Huilier de relatione mutua capacitatis etc. p. 151 gemacht worden. Vergl. des Verf. Elem. d. Math., Stereometrie §. 6, 10.

durchlaufen, i, k Zahlen, welche die Werthe 1, 2, 3, 4 durchlaufen, p, q Zahlen, welche die Werthe 2, 3, 4 durchlaufen. Wenn diese Buchstaben unter Summenzeichen stehen, so ist nach jedem Summationsbuchstaben besonders zu summiren.

Die Quadrate der Kanten eines Tetraeders bezeichne ich mit $(ik) = (ki)$, setze $(ii) = 0$, $(i0) = (0i) = 1$, $(00) = 0$, und nenne R die Determinante 5ter Ordnung der so bestimmten Elemente (ab)

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & (12) & (13) & (14) \\ 1 & (21) & 0 & (23) & (24) \\ 1 & (31) & (32) & 0 & (34) \\ 1 & (41) & (42) & (43) & 0 \end{vmatrix}$$

Die 25 Unterdeterminanten erster Ordnung von R bezeichne ich mit $\varrho_{ab} = \frac{\partial R}{\partial (ab)}$. Dann werden das 6fache Volumen V des Tetraeders und die doppelten Inhalte V_1, V_2, V_3, V_4 seiner Seitenflächen durch die Gleichungen bestimmt (S. oben §. 16, 13)

$$8V^2 = R\,, \qquad -4V_i^2 = \varrho_{ii} = \frac{\partial R}{\partial (ii)}$$

Damit das Tetraeder real sei, ist es nothwendig und hinreichend, dass die 6 Grössen (ik) positiv, die 4 Grössen $\varrho_{ii} = \frac{\partial R}{\partial (ii)}$ negativ und R positiv sei, Bedingungen, welche sich in die eine zusammenfassen lassen, dass die ternäre quadratische Form

$$f = \sum_{ik} (ik)\, y_i y_k \qquad (y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 0)$$

welche nach Elimination von y_1 und unter Einführung der Grössen

$$s_{pq} = (pq) - (p1) - (1q) + (11)$$

die Gestalt annimmt:

$$f = \sum_{pq} s_{pq}\, y_p y_q\,,$$

eine definite negative Form sei, d. h. eine solche, welche für alle Werthe von y_2, y_3, y_4, das System $y_2 = 0$, $y_3 = 0$, $y_4 = 0$ ausgenommen, nur negativer Werthe, mit Ausschluss der Null, fähig ist.

II. Um den Gang der Untersuchung nicht zu unterbrechen, schicke ich einen allgemeinen Satz über quadratische Formen voraus, der später gebraucht wird.

Gesetzt die beiden quadratischen Formen

$$f = \sum_{pq} s_{pq} y_p y_q , \qquad f' = \sum_{p'} \mu_{p'} Y_{p'}^2$$

seien durch die Substitution

$$Y_{p'} = \sum_{p} g_p^{p'} y_p$$

in einander transformirbar, dann gehen gleichzeitig unter Einführung zweier neuen Systeme von je sechs Variablen $y_{pq} = y_{qp}$ und $Y_{pq} = Y_{qp}$ die beiden Formen

$$F = \sum_{pq\,p'q'} s_{pq'} s_{p'q} y_{pq} y_{p'q'} = \sum_{pq\,p'q'} s_{pp'} s_{qq'} y_{pq} y_{p'q'} , \quad F' = \sum_{p'q'} \mu_{p'} \mu_{q'} Y_{p'q'}^2$$

durch die Substitution

$$Y_{p'q'} = \sum_{pq} g_p^{p'} g_q^{q'} y_{pq}$$

in einander über. Die Transformation von f' in f liefert nämlich die identischen Gleichungen

$$s_{pq} = \sum_{p'} \mu_{p'} g_p^{p'} g_q^{p'}$$

und vermittelst dieser Werthe der s_{pq} geht zugleich F' in F über.

Aus diesem Satz, der nicht nur für drei Variabele y_2, y_3, y_4, sondern für jede Anzahl von Variabeln gilt, geht hervor, dass wenn f eine definite Form ist, d. h. wenn die Coefficienten $\mu_{p'}$ alle dasselbe Zeichen haben, auch F eine definite Form sein muss, und zwar diese letztere eine positive.

III. Das Lagrange'sche Maximum-Problem besteht darin, dass R zu einem Maximum zu machen ist, während die 4 Grössen $-\varrho_{ii} = -\frac{\partial R}{\partial (ii)}$ vier gegebenen positiven Constanten c_i gleich werden sollen, welche, wenn c_4 die grösste derselben ist, die Ungleichheit

$$\sqrt{c_1} + \sqrt{c_2} + \sqrt{c_3} > \sqrt{c_4}$$

erfüllen. — Um das Problem in Gleichung zu setzen, empfiehlt es sich, als Variabele, nach welchen differentiirt wird, nicht die ursprünglichen Grössen (ik) sondern die Grössen ϱ_{ik} des adjungirten Systems zu wählen, zwischen welchen die Gleichungen

$$\varrho_{11} + \varrho_{12} + \varrho_{13} + \varrho_{14} = 0$$

bestehen (§. 3, 3). Indem ich aus den 25 Grössen ϱ_{ab} die Determinante

$$P = \Sigma \pm \varrho_{00}\varrho_{11} \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \varrho_{44}$$

und von derselben die Unterdeterminanten der verschiedenen Ordnungen bilde, ergiebt sich

$$P = R^4\,, \quad \frac{\partial P}{\partial \varrho_{00}} = R^3(00) = 0\,, \quad P' = \frac{\partial^2 P}{\partial \varrho_{00}\,\partial \varrho_{11}} = R^2 \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -R^2$$

und mit Benutzung der oben definirten Grössen s_{pq}

$$\frac{\partial P'}{\partial \varrho_{pq}} = \frac{\partial^3 P}{\partial \varrho_{00}\,\partial \varrho_{11}\,\partial \varrho_{pq}} = R\,\Sigma \pm (00)(11)(pq) = -R\,s_{pq}$$

$$\frac{\partial^2 P'}{\partial \varrho_{pq}\,\partial \varrho_{p'q'}} = \frac{\partial^4 P}{\partial \varrho_{00}\,\partial \varrho_{11}\,\partial \varrho_{pq}\,\partial \varrho_{p'q'}} = \Sigma \pm (00)(11)(pq)(p'q') = -(s_{pq}s_{p'q'} - s_{pq'}s_{p'q})$$

Hieraus ergeben sich die vollständigen Differentiale

$$-dP' = d(R^2) = 2R\,dR = R\,\Sigma s_{pq}\,d\varrho_{pq}$$

$$-d^2P' = d^2(R^2) = 2R\,d^2R + 2\,dR^2 = \Sigma\,(s_{pq}s_{p'q'} - s_{pq'}s_{p'q})\,d\varrho_{pq}\,d\varrho_{p'q'}$$

oder

$$(1) \qquad 2\,dR = \Sigma s_{pq}\,d\varrho_{pq}$$

$$(2) \qquad 2\,(R\,d^2R - dR^2) = -\Sigma s_{pq'}\,s_{p'q}\,d\varrho_{pq}\,d\varrho_{p'q'}$$

In den Summationen rechter Hand erhält jede der Zahlen p, q, p', q' die Werthe 2, 3, 4. Man kann aber auch noch den Werth 1 hinzufügen, da $s_{ik} = 0$ ist für $i = 1$ oder $k = 1$. Wenn man in den so erweiterten Summen für s_{ik}, $s_{ik'}$, $s_{i'k}$ ihre durch die Grössen (ik) ausgedrückten Werthe einsetzt und die Relationen $\varrho_{i1} + \varrho_{i2} + \varrho_{i3} + \varrho_{i4} = 0$ benutzt, ergeben sich die symmetrischen Ausdrücke

$$(3) \qquad 2\,dR = \Sigma\,(ik)\,d\varrho_{ik}$$

$$(4) \qquad 2\,(R\,d^2R - dR^2) = -\Sigma\,(ik')(i'k)\,d\varrho_{ik}\,d\varrho_{i'k'}$$

IV. Nach diesen Vorbereitungen ergeben sich die Differentialgleichungen des vorliegenden Problems, indem man die Differentiale von R und von den vier Grössen $c_1 = -\varrho_{11} = \varrho_{12} + \varrho_{13} + \varrho_{14}$, etc. gleich Null setzt. So erhält man

$$0 = 2\,dR = 2(12)\,d\varrho_{12} + 2(13)\,d\varrho_{13} + 2(14)\,d\varrho_{14} + 2(23)\,d\varrho_{23} + 2(24)\,d\varrho_{24} + 2(34)\,d\varrho_{34}$$

$$\begin{aligned}
0 &= d\varrho_{12} + d\varrho_{13} + d\varrho_{14} \\
0 &= d\varrho_{21} + d\varrho_{23} + d\varrho_{24} \\
0 &= d\varrho_{31} + d\varrho_{32} + d\varrho_{34} \\
0 &= d\varrho_{41} + d\varrho_{42} + d\varrho_{43}
\end{aligned}$$

Diese Gleichungen mit $1, -v_1, -v_2, -v_3, -v_4$ multiplicirt und addirt geben eine Summe, in welcher der Coefficient jedes einzelnen Differentials verschwinden muss, daher für i von k verschieden

$$(ik) = \tfrac{1}{2}(v_i + v_k) \tag{5}$$

Hierzu kommen zwei Bedingungen. Erstens muss

$$f = \sum_{pq} s_{pq}\, y_p\, y_q = \sum_{ik} (ik)\, y_i\, y_k$$

oder mit Benutzung von (5)

$$= -\Sigma v_i y_i^2 \qquad (y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 0)$$

eine definite negative Form sein. Zweitens muss $d^2 R$ negativ sein. Da aber für das Maximum bereits $dR = 0$ ist und nach Art. I in die erste Bedingung die Ungleichheit $R > 0$ eingeschlossen ist, so wird die zweite Bedingung erfüllt sein, sobald die rechte Seite von Gl. (2) negativ ist. Die rechte Seite von Gl. (2) geht aber für $d\varrho_{pq} = y_{pq}$ in die quadratische Form $-F$ des Art. II über, welche gleichzeitig mit f eine definite negative Form ist. Die zweite Bedingung ist also durch die erste von selbst erfüllt.

V. Nach Einsetzung der Werthe (5) in die Determinante R erhält dieselbe den Ausdruck

$$R = \begin{vmatrix}
0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
1 & (11) - v_1 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & (22) - v_2 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & (33) - v_3 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & (44) - v_4
\end{vmatrix}$$

wo $(11) = (22) = (33) = (44) = 0$. Hieraus folgen für R und die vier Unterdeterminanten $\varrho_{ii} = -c_i$ die Werthe

$$R = PQ, \qquad c_i = -\varrho_{ii} = -\frac{\partial R}{\partial_{(ii)}} = \frac{P}{v_i}\left(Q - \frac{1}{v_i}\right),$$

wo

$$P = v_1 v_2 v_3 v_4 \qquad Q = \frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2} + \frac{1}{v_3} + \frac{1}{v_4}.$$

Um die vier zwischen den gegebenen Grössen c_i und den unbekannten v_i bestehenden Gleichungen nach den v_i aufzulösen, setze ich

für P positiv	für P negativ
$w_i = \frac{\sqrt{P}}{v_i}$	$\omega_i = \frac{\sqrt{-P}}{v_i}$
$w = \sqrt{P}.\,Q = \Sigma w_i$	$\omega = \sqrt{-P}.\,Q = \Sigma \omega_i$
$z = \frac{1}{4} w^2 = \frac{1}{4} P Q^2$	$\zeta = \frac{1}{4}\omega^2 = -\frac{1}{4} P Q^2 = -z$

Hierdurch gehen die Gleichungen zwischen den v_i und c_i über in

$$w_i(w - w_i) = c_i \qquad\qquad \omega_i(\omega - \omega_i) = -c_i$$

oder   oder

$$(w_i - \tfrac{1}{2} w)^2 = z - c_i \qquad\qquad (\omega_i - \tfrac{1}{2}\omega)^2 = \zeta + c_i$$

Bedeuten e, e_i und ε, ε_i Grössen, welche der positiven oder negativen Einheit gleich sind, so lassen sich die Grössen w, w_i und ω, ω_i so darstellen

$$\tfrac{1}{2} w = e\sqrt{z} \qquad\qquad \tfrac{1}{2}\omega = \varepsilon\sqrt{\zeta}$$

$$w_i = e\sqrt{z} - e e_i \sqrt{z - c_i} \qquad\qquad \omega_i = \varepsilon\sqrt{\zeta} - \varepsilon\varepsilon_i\sqrt{\zeta + c_i}$$

und hieraus geht vermöge der Gleichungen $w = \Sigma w_i$, $\omega = \Sigma \omega_i$ für z oder $\zeta = -z$ die Endgleichung in irrationaler Form hervor:

$$(6) \qquad 2\sqrt{z} - e_1\sqrt{z - c_1} - \ldots - e_4\sqrt{z - c_4} = 0$$

$$2\sqrt{\zeta} - \varepsilon_1\sqrt{\zeta + c_1} - \ldots - \varepsilon_4\sqrt{\zeta + c_4} = 0$$

Hat man hieraus z oder ζ bestimmt, so setze man

$$W = (\sqrt{z} - e_1\sqrt{z - c_1}) \ldots\ldots (\sqrt{z} - e_4\sqrt{z - c_4})$$

$$\Omega = (\sqrt{\zeta + c_1} - \varepsilon_1\sqrt{\zeta}) \ldots\ldots (\sqrt{\zeta + c_4} - \varepsilon_4\sqrt{\zeta})$$

wo Ω für jeden positiven Werth von ζ positiv ist und W für diejenigen positiven Werthe von z, welche grösser als die grösste der Constanten c_i, d. h. grösser als c_4 sind. Unter Einführung des Zeichens

$$\varepsilon' = -\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3\varepsilon_4$$

ergiebt sich jetzt

$$W = P \qquad\qquad \Omega = -\varepsilon' P$$

man kann daher setzen

$$e\sqrt{P} = \sqrt{W} \qquad\qquad -\varepsilon\sqrt{-P} = \sqrt{\varepsilon'\Omega}$$

und erhält demzufolge für v_i, R die Ausdrücke:

$$v_i = \frac{\sqrt{P}}{w_i} = \frac{\sqrt{W}}{\sqrt{z} - e_i\sqrt{z - c_i}} \qquad v_i = \frac{\sqrt{-P}}{\omega_i} = \varepsilon_i \frac{\sqrt{\varepsilon'\Omega}}{\sqrt{\zeta + c_i} - \varepsilon_i\sqrt{\zeta}}$$

$$R = PQ = w\sqrt{P} = 2\sqrt{z}\,\sqrt{W} \qquad R = 2\sqrt{\zeta}\,\sqrt{\varepsilon'\Omega}$$

VI. Die irrationale Gleichung (6) in z oder $\zeta = -z$ wird rational gemacht, indem man die Norm ihrer linken Seite, d. h. das Product der 16 irrationalen Factoren, welche den verschiedenen Werthen der Vorzeichen $e_1 \ldots . e_4$ oder $\varepsilon_1 \ldots . \varepsilon_4$ entsprechen, bildet, und dieses Product, welches ich mit $\Phi(z) = \Phi(-\zeta)$ bezeichne, $= 0$ setzt. Jeder der 16 irrationalen Factoren giebt, nach fallenden Potenzen von z oder ζ geordnet, eine Entwicklung der Form

$$A z^{\frac{1}{2}} + \tfrac{1}{2} B z^{-\frac{1}{2}} + \tfrac{1}{8} C z^{-\frac{3}{2}} \ldots .. \qquad A' \zeta^{\frac{1}{2}} - \tfrac{1}{2} B' \zeta^{-\frac{1}{2}} + \tfrac{1}{8} C' \zeta^{-\frac{3}{2}} \ldots ..$$

wo

$$A = 2 - \Sigma e_i\,,\ B = \Sigma e_i c_i\,,\ C = \Sigma e_i c_i^2 \qquad A' = 2 - \Sigma \varepsilon_i\,,\ B' = \Sigma \varepsilon_i c_i\,,\ C' = \Sigma \varepsilon_i c_i^2$$

In zwölf Factoren ist der Coefficient A (oder A') von der Null verschieden, in denjenigen vier dagegen, in welchen von den vier Vorzeichen e_i oder ε_i eines negativ, die drei anderen positiv sind, ist der Coefficient A (oder A') des ersten Gliedes der Entwicklung $= 0$. Die Norm Φ ist daher in z oder ζ nicht von höherem als dem vierten Grade. Unter den vierten Grad kann Φ nur sinken, wenn in einem der bezeichneten vier Factoren ausser dem Coefficienten des ersten Gliedes der Entwicklung auch der Coefficient des zweiten Gliedes verschwindet. Dies ist nur in einem der 4 Factoren möglich, nämlich in demjenigen, für welchen $e_1 = e_2 = e_3 = +1$, $e_4 = -1$, und in diesem auch nur dann, wenn zwischen den Constanten c_i die Relation

$$c_1 + c_2 + c_3 = c_4$$

besteht. In diesem Fall ist $\Phi(z)$ nur vom dritten Grade.

Die Wurzeln der Gleichung $\Phi(z) = 0$ sind sämmtlich reell und drei derselben immer negativ, entsprechen also positiven Werthen von ζ. Sie gehören den 6 irrationalen Factoren in ζ an, für welche von den vier Zeichen ε_i zwei positiv, zwei negativ sind. Betrachtet man z. B. die beiden Factoren

$$2\sqrt{\zeta} + \sqrt{\zeta + c_1} + \sqrt{\zeta + c_2} - \sqrt{\zeta + c_3} - \sqrt{\zeta + c_4}$$

$$2\sqrt{\zeta} - \sqrt{\zeta + c_1} - \sqrt{\zeta + c_2} + \sqrt{\zeta + c_3} + \sqrt{\zeta + c_4}$$

so ändern sich dieselben von $\zeta = 0$ bis $\zeta = +\infty$ continuirlich. Für $\zeta = 0$ haben sie entgegengesetzte Werthe, wenn dagegen ζ in positivem Sinne über alle Grenzen wächst, werden beide Factoren positiv, einer derselben hat daher eine positive Wurzel $\zeta = \zeta_1$. Auf ähnliche Weise lässt sich die Existenz zweier anderen Wurzeln $\zeta = \zeta_2$, $\zeta = \zeta_3$ nachweisen. Aber diesen drei Wurzeln entsprechen imaginäre Lösungen des Maximum-Problems. Denn für jede derselben ist

$$\varepsilon' = -\varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3 \varepsilon_4 = -1$$

also $\sqrt{\varepsilon' \Omega}$ imaginär, wodurch sämmtliche Grössen v_i und R imaginär werden.

Die jetzt noch übrige vierte Wurzel von $\Phi(z) = 0$ giebt immer eine reelle Lösung des Maximum-Problems. Zu ihrer Bestimmung müssen die beiden Fälle unterschieden werden, in welchen

$$c_4 > c_1 + c_2 + c_3 \quad \text{oder} \quad c_4 < c_1 + c_2 + c_3 .$$

Für den beide Fälle von einander trennenden Grenzfall $c_4 = c_1 + c_2 + c_3$ wissen wir bereits, dass die vierte Wurzel von $\Phi(z) = 0$ unendlich gross ist. In diesem Falle geben die Formeln des vorigen Art.

$$v_1 = \sqrt{\frac{c_2 c_3}{c_1}}, \quad v_2 = \sqrt{\frac{c_1 c_3}{c_2}}, \quad v_3 = \sqrt{\frac{c_1 c_2}{c_3}}, \quad v_4 = 0$$

also

$$(12) = (14) + (24), \quad (13) = (14) + (34), \quad (23) = (24) + (34)$$

d. h. die Ecke im Puncte (4) ist drei-rechtwinklig.

Es sei

$$c_4 > c_1 + c_2 + c_3 ,$$

alsdann genügt der irrationalen Gleichung

$$2\sqrt{\zeta} - \sqrt{\zeta + c_1} - \sqrt{\zeta + c_2} - \sqrt{\zeta + c_3} + \sqrt{\zeta + c_4} = 0$$

eine positive Wurzel $\zeta = \zeta_0$, da die linke Seite für $\zeta = 0$ den negativen Werth $-\sqrt{c_1} - \sqrt{c_2} - \sqrt{c_3} + \sqrt{c_4}$ annimmt, während ihre Entwicklung

$$-\tfrac{1}{2}(c_1+c_2+c_3-c_4)\zeta^{-\frac{1}{2}}+\tfrac{1}{8}(c_1^2+c_2^2+c_3^2-c_4^2)\zeta^{-\frac{3}{2}}\ldots\ldots$$

zeigt, dass sie für hinreichend grosse Werthe von ζ positiv wird. In diesem Fall ist $\varepsilon_1=\varepsilon_2=\varepsilon_3=+1$, $\varepsilon_4=-1$, $\varepsilon'=-\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3\varepsilon_4=+1$, $\varepsilon'\Omega=\Omega$ positiv also $\sqrt{\varepsilon'\Omega}$ reell. Nimmt man den positiven Werth dieser Quadratwurzel, so werden nach den Formeln des vorigen Art. v_1, v_2, v_3 positiv, v_4 negativ, R positiv. Da in

$$-f = v_1y_1^2+v_2y_2^2+v_3y_3^2+v_4y_4^2 \qquad (y_1+y_2+y_3+y_4=0)$$

drei der Multiplicatoren v_i positiv, einer negativ ist, so genügt es, dass die Determinante R von $-f$ positiv sei, damit $-f$ eine definite positive Form sei. Somit ist die Nebenbedingung erfüllt und die Lösung eine reelle.

Es sei zweitens

$$c_4 < c_1+c_2+c_3,$$

man setze

$$\psi(z) = 2\sqrt{z}-\sqrt{z-c_1}-\sqrt{z-c_2}-\sqrt{z-c_3}-\eta\sqrt{z-c_4}$$

wo $\eta=+1$ oder $=-1$, je nachdem

$$\psi(c_4) = 2\sqrt{c_4}-\sqrt{c_4-c_1}-\sqrt{c_4-c_2}-\sqrt{c_4-c_3}$$

positiv oder negativ ist, dann hat $\psi(z)=0$ eine Wurzel $z=z_0$ zwischen $z=c_4$ und $z=+\infty$. In der That die Entwicklung nach fallenden Potenzen von z giebt

$$\text{für } \eta=+1 \qquad \psi(z) = -2z^{\frac{1}{2}}+(c_1+c_2+c_3+c_4)z^{-\frac{1}{2}}\ldots.$$

$$\text{für } \eta=-1 \qquad \psi(z) = \tfrac{1}{2}(c_1+c_2+c_3-c_4)z^{-\frac{1}{2}}+\ldots$$

also machen hinreichend grosse Werthe von z den Ausdruck $\psi(z)$ negativ für $\eta=+1$, positiv für $\eta=-1$, d. h. von entgegengesetztem Zeichen mit η, während er für $z=c_4$ von gleichem Zeichen mit η ist, womit die Existenz der Wurzel $z=z_0$ bewiesen ist.

In diesem Falle werden nach den Formeln des Art. V und für den positiven Werth der Quadratwurzel $\sqrt{W}$ sämmtliche Grössen v_1, v_2, v_3, v_4, R positiv, und es bedarf daher keines Beweises, dass

$$f = -\sum_i v_i y_i^2$$

eine definite negative Form ist.

Druck von Breitkopf und Härtel in Leipzig.