184

Wikstein

Warszawa

THEORIE

DER

DIFFERENZEN

UND

DIFFERENTIALE,

der

gedoppelten Verbindungen, der Producte mit Versetzungen,
der Reihen, der wiederholenden Functionen, der allgemeinsten
Facultäten und der fortlaufenden Brüche,

von

FERD. SCHWEINS,

Dr. der Philosophie, Grossherzoglich Badischem Hofrathe und
ordentlichem öffentlichen Professor der Mathematik an der
Universität zu Heidelberg.

HEIDELBERG
1825.
Verlag der Universitäts-Buchhandlung von C. F. WINTER.

VORREDE.

Die Ideen zur Differentialrechnung, welche Leibnitz am Ende des siebzehnten Jahrhunderts bekannt machte, beschäftigen die Mathematiker noch immer. — Viele Meinungen, nur eine Wahrheit. — Jene gehören den Personen, die zeitlich sind, diese der Sache, die ewig ist; jene der Geschichte, die über ihren Werth oder Unwerth abspricht, diese der Wissenschaft, die leidenschaftlos und dankbar gegen ihre Erweiterer ist. — Hier wird nur die Wissenschaft gegeben.

Diese besteht in Geschäften geleitet von Ideen; sie lehrt, wie solche auszuführen, welche Ordnung dabei zu befolgen, wann Freiheit in der Wahl der Ordnung ist, und wann Geschäfte durch andere ersetzt werden können.

Dieser Grundsatz bestimmt die ganze Behandlungsweise der Differenzen- und Differential-Rechnung. Daher hier die Differenzen in dem grossen Umfange und mit dem Ueberblicke über das grosse Feld der Wahrheiten, der gewonnen; daher das Zerlegen der Differenzen in Factoren, welches nie geschehen, obgleich es die Grundlage der Differentiale ist; daher das mit dem Vervielfachen abwechselnde Differentiiren; daher überhaupt die vielen neuen Untersuchungen in der Differenzen- und Differential-Rechnung. Seite 1—296.

Dieselben Geschäfte oft wiederholt erzeugen immer Verbindungen der Elemente, die denselben Gesetzen huldigen. Zwei Verbindungsweisen behandelt die sechste Abhandlung meiner Analysis; zwei andere werden hier gegeben; beide sind schon bekannt, aber noch nie untersucht. S. 297—432.

Diese Untersuchung ist die Grundlage der Theorie der Entwickelung in Reihen, die hier gegeben wird. Seite 433—548.

Geschäfte nach einer Idee ausgeführt erzeugen einen Algorithmus. Hat jene Gehalt, so wird dieser ihn bewähren; er ist der Ausdruck der Idee. Leibnitz machte den Anfang mit dem Algorithmus der Differenzen und Differentiale. — Mit f(x+h) wird ein Vielfaches von fx vereinigt, und es wird ein höherer Algorithmus hervorgebracht. — Mehrere Functionen, in welchen x verschiedene Zunahmen erhalten, werden mit einander verbunden, — und der Algorithmus wird zur höchsten Allgemeinheit erhoben.

Die Idee wird erweitert. Die Function nimmt die Stelle ihres Elements ein — und erzeugt oft nach mehrmahliger Wiederholung das ursprüngliche Element.

Diese Ideen leiten durch die Theorie der wiederholenden Functionen. Seite 549—610.

Der einfache Algorithmus des Vervielfachens mit gleichen Factoren entstand in der letzten Hälfte des sechszehnten Jahrhunderts. Welche Ideen seit jener Zeit an den Buchstaben geknüpft sind, zeigen die vier ersten Abhandlungen der Analysis.

Die Factoren sind nicht mehr gleich, und wachsen um dieselbe Grösse — die erste Erweiterung der Idee und des Algorithmus des Vervielfachens — die einfachen Facultäten, welche in der fünften Abhandlung der Analysis untersucht sind.

Nicht die Factoren, sondern die Exponenten des Elements in den Factoren nehmen um gleichvielzu — die zweite Erweiterung der Idee — die Exponentialfacultäten in der achten Abhandlung der Analysis.

Allgemeine Functionen, deren Elemente um gleichviel zunehmen, werden vervielfacht — und der Algorithmus wird zur höchsten Allgemeinheit gesteigert — die allgemeinsten Facultäten. Seite 614.

Elemente können auf verschiedene Weise verbunden werden; eine einfache Vorschrift erzeugt einen einfachen, eine zusammengesetzte einen zusammengesetzteren Algorithmus. Hier ist eine Vorschrift gewählt, die jener in der sechsten Abhandlung der Analysis ähnlich ist, und mit ihr unter ein allgemeines Gesetz gestellt werden kann. Dieselben Methoden, welche dort und hier gegeben, sind bei allgemeineren Vorschriften zu wählen. Das Ziel war ein allgemeiner Algorithmus der fortlaufenden Brüche, welcher allen Forderungen genügt. Seite 629.

Dieses sind die Ideen, die ich Jahre lang genährt, und in diesem Werke bearbeitet mittheile.

Heidelberg den 15 August 1825.

Schweins.

THEORIE

DER

UNTERSCHIEDE.

THEORIE

DER

UNTERSCHIEDE.

Erste Abtheilung.

UNTERSCHIEDE ÜBERHAUPT.

§. 1.

Eine Reihe von Elementen in unbestimmter Anzahl, welche nichts Gemeinsames haben, wird vorgestellt durch

$$\ldots\ldots\; U_{-3}\,,\; U_{-2}\,,\; U_{-1}\,,\; U_0\,,\; U_1\,,\; U_2\,,\; U_3\,,\; \ldots\ldots$$

Das Mittelglied ist U_0 oder U, und die angehängte Zahl zeigt bei den übrigen Gliedern an, das wievielte jedes ist, und auf welcher Seite des Mittelgliedes solches steht.

Werden jede zwei auf einander folgende Glieder von einander abgezählt, und

$$U_{-2} - U_{-3} = U_{-3}^{(1)}$$
$$U_{-1} - U_{-2} = U_{-2}^{(1)}$$
$$U_{0} - U_{-1} = U_{-1}^{(1)}$$
$$U_{1} - U_{0} = U_{0}^{(1)}$$
$$U_{2} - U_{1} = U_{1}^{(1)}$$
$$U_{3} - U_{2} = U_{2}^{(1)}$$
$$\cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot$$

gesetzt, so entsteht eine zweite Reihe

$$\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\; U_{-3}^{(1)},\; U_{-2}^{(1)},\; U_{-1}^{(1)},\; U_{0}^{(1)},\; U_{1}^{(1)},\; U_{2}^{(1)},\; U_{3}^{(1)},\;\; \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot$$

Aus dieser Reihe wird eine dritte gebildet, indem jede zwei auf einanderfolgende Glieder von einander abgezählt werden:

$$\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\; U_{-3}^{(2)},\; U_{-2}^{(2)},\; U_{-1}^{(2)},\; U_{0}^{(2)},\; U_{1}^{(2)},\; U_{2}^{(2)},\; U_{3}^{(2)},\;\; \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot$$

so dass

$$U_{-2}^{(1)} - U_{-3}^{(1)} = U_{-3}^{(2)}$$
$$U_{-1}^{(1)} - U_{-2}^{(1)} = U_{-2}^{(2)}$$
$$U_{0}^{(1)} - U_{-1}^{(1)} = U_{-1}^{(2)}$$
$$U_{1}^{(1)} - U_{0}^{(1)} = U_{0}^{(2)}$$
$$U_{2}^{(1)} - U_{1}^{(1)} = U_{1}^{(2)}$$
$$U_{3}^{(1)} - U_{2}^{(1)} = U_{2}^{(2)}$$
$$\cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot$$

Aus dieser kann wieder durch Abzählen je zweier auf einander folgenden Glieder eine vierte und auf gleiche Weise aus jeder vorhergehenden eine folgende neue Reihe gebildet werden.

Wir kehren zu der ersten Reihe zurück. Jede Zahl oder Grösse kann als Unterschied zweier anderer Zahlen betrachtet werden; jedes Glied in ihr lässt sich also ansehen als entstanden durch Abzählen je zweier auf einander folgenden Glieder einer vorhergehenden Reihe

$$\ldots\ldots U^{(-1)}_{-3},\; U^{(-1)}_{-2},\; U^{(-1)}_{-1},\; U^{(-1)}_{0},\; U^{(-1)}_{1},\; U^{(-1)}_{2},\; U^{(-1)}_{3},\; \ldots\ldots$$

so dass

$$\begin{aligned} U^{(-1)}_{-2} - U^{(-1)}_{-3} &= U_{-3} \\ U^{(-1)}_{-1} - U^{(-1)}_{-2} &= U_{-2} \\ U^{(-1)}_{0} - U^{(-1)}_{-1} &= U_{-1} \\ U^{(-1)}_{1} - U^{(-1)}_{0} &= U_{0} \\ U^{(-1)}_{2} - U^{(-1)}_{1} &= U_{1} \\ U^{(-1)}_{3} - U^{(-1)}_{2} &= U_{2} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots \end{aligned}$$

Die Glieder dieser Reihe seien eben so gebildet durch Abzählen der Glieder einer vorhergehenden Reihe

$$\ldots\ldots U^{(-2)}_{-3},\; U^{(-2)}_{-2},\; U^{(-2)}_{-1},\; U^{(-2)}_{0},\; U^{(-2)}_{1},\; U^{(-2)}_{2},\; U^{(-2)}_{3},\; \ldots\ldots$$

Hiedurch entstehen mehrere Reihen, welche folgendes Schema in sich begreift:

. .	. .	. .	. .	. .	. .	. .	. .	. .	. .	. .
. .	$U^{(-4)}_{-4}$	$U^{(-4)}_{-3}$	$U^{(-4)}_{-2}$	$U^{(-4)}_{-1}$	$U^{(-4)}_{0}$	$U^{(-4)}_{1}$	$U^{(-4)}_{2}$	$U^{(-4)}_{3}$	$U^{(-4)}_{4}$	. .
. .	$U^{(-3)}_{-4}$	$U^{(-3)}_{-3}$	$U^{(-3)}_{-2}$	$U^{(-3)}_{-1}$	$U^{(-3)}_{0}$	$U^{(-3)}_{1}$	$U^{(-3)}_{2}$	$U^{(-3)}_{3}$	$U^{(-3)}_{4}$	. .
. .	$U^{(-2)}_{-4}$	$U^{(-2)}_{-3}$	$U^{(-2)}_{-2}$	$U^{(-2)}_{-1}$	$U^{(-2)}_{0}$	$U^{(-2)}_{1}$	$U^{(-2)}_{2}$	$U^{(-2)}_{3}$	$U^{(-2)}_{4}$	. .
. .	$U^{(-1)}_{-4}$	$U^{(-1)}_{-3}$	$U^{(-1)}_{-2}$	$U^{(-1)}_{-1}$	$U^{(-1)}_{0}$	$U^{(-1)}_{1}$	$U^{(-1)}_{2}$	$U^{(-1)}_{3}$	$U^{(-1)}_{4}$	. .
. .	$U^{(0)}_{-4}$	$U^{(0)}_{-3}$	$U^{(0)}_{-2}$	$U^{(0)}_{-1}$	$U^{(0)}_{0}$	$U^{(0)}_{1}$	$U^{(0)}_{2}$	$U^{(0)}_{3}$	$U^{(0)}_{4}$	. .
. .	$U^{(1)}_{-4}$	$U^{(1)}_{-3}$	$U^{(1)}_{-2}$	$U^{(1)}_{-1}$	$U^{(1)}_{0}$	$U^{(1)}_{1}$	$U^{(1)}_{2}$	$U^{(1)}_{3}$	$U^{(1)}_{4}$	. .
. .	$U^{(2)}_{-4}$	$U^{(2)}_{-3}$	$U^{(2)}_{-2}$	$U^{(2)}_{-1}$	$U^{(2)}_{0}$	$U^{(2)}_{1}$	$U^{(2)}_{2}$	$U^{(2)}_{3}$	$U^{(2)}_{4}$	. .
. .	$U^{(3)}_{-4}$	$U^{(3)}_{-3}$	$U^{(3)}_{-2}$	$U^{(3)}_{-1}$	$U^{(3)}_{0}$	$U^{(3)}_{1}$	$U^{(3)}_{2}$	$U^{(3)}_{3}$	$U^{(3)}_{4}$	. .
. .	. .	. .	. .	. .	. .	. .	. .	. .	. .	. .

Jede Horizontalreihe ist durch Abzählen der Glieder der vorhergehenden Reihe entstanden. Wird dieses Geschäft durch ein besonderes Zeichen Δ angekündigt, so sind die Zeichen für die obigen Reihen folgende:

. .	. .	. .	. .	. .	. .	. .	. .	. .
. .	$\Delta^{-4}U_{-3}$	$\Delta^{-4}U_{-2}$	$\Delta^{-4}U_{-1}$	$\Delta^{-4}U_{0}$	$\Delta^{-4}U_{+1}$	$\Delta^{-4}U_{+2}$	$\Delta^{-4}U_{+3}$	. .
. .	$\Delta^{-3}U_{-3}$	$\Delta^{-3}U_{-2}$	$\Delta^{-3}U_{-1}$	$\Delta^{-3}U_{0}$	$\Delta^{-3}U_{+1}$	$\Delta^{-3}U_{+2}$	$\Delta^{-3}U_{+3}$	. .
. .	$\Delta^{-2}U_{-3}$	$\Delta^{-2}U_{-2}$	$\Delta^{-2}U_{-1}$	$\Delta^{-2}U_{0}$	$\Delta^{-2}U_{+1}$	$\Delta^{-2}U_{+2}$	$\Delta^{-2}U_{+3}$	. .
. .	$\Delta^{-1}U_{-3}$	$\Delta^{-1}U_{-2}$	$\Delta^{-1}U_{-1}$	$\Delta^{-1}U_{0}$	$\Delta^{-1}U_{+1}$	$\Delta^{-1}U_{+2}$	$\Delta^{-1}U_{+3}$	. .
. .	$\Delta^{0}U_{-3}$	$\Delta^{0}U_{-2}$	$\Delta^{0}U_{-1}$	$\Delta^{0}U_{0}$	$\Delta^{0}U_{+1}$	$\Delta^{0}U_{+2}$	$\Delta^{0}U_{+3}$	. .
. .	$\Delta^{+1}U_{-3}$	$\Delta^{+1}U_{-2}$	$\Delta^{+1}U_{-1}$	$\Delta^{+1}U_{0}$	$\Delta^{+1}U_{+1}$	$\Delta^{+1}U_{+2}$	$\Delta^{+1}U_{+3}$	. .
. .	$\Delta^{+2}U_{-3}$	$\Delta^{+2}U_{-2}$	$\Delta^{+2}U_{-1}$	$\Delta^{+2}U_{0}$	$\Delta^{+2}U_{+1}$	$\Delta^{+2}U_{+2}$	$\Delta^{+2}U_{+3}$	. .
. .	$\Delta^{+3}U_{-3}$	$\Delta^{+3}U_{-2}$	$\Delta^{+3}U_{-1}$	$\Delta^{+3}U_{0}$	$\Delta^{+3}U_{+1}$	$\Delta^{+3}U_{+2}$	$\Delta^{+3}U_{+3}$	. .
. .	$\Delta^{+4}U_{-3}$	$\Delta^{+4}U_{-2}$	$\Delta^{+4}U_{-1}$	$\Delta^{+4}U_{0}$	$\Delta^{+4}U_{+1}$	$\Delta^{+4}U_{+2}$	$\Delta^{+4}U_{+3}$	. .
. .	. .	. .	. .	. .	. .	. .	. .	. .

Dieses Schema stellt deutlich den Gegenstand vor Augen, womit sich gegenwärtige Abhandlung beschäftigen soll. Vor allem muss hiebei bemerkt werden:

α. dass nur die Glieder verschiedener Reihen von einander abhängig sind, und

β. dass die Glieder einer und derselben Reihe keinen Zusammenhang haben oder nicht von einander abhängig sind.

Nur das erstere ist der Gegenstand dieser Abhandlung; das zweite gestattet eine grosse Freiheit und Mannigfaltigkeit bei den spätern Untersuchungen, und eröffnet ein unendliches Feld für die Anwendung.

Das Gesetz der Bildung jeder Horizontalreihe aus der unmittelbar vorhergehenden Reihe ist gegeben. Nach diesem einfachen Gesetze kann ein Glied A einer Horizontalreihe aus zweien Gliedern a und b der vorhergehenden Reihe, und jedes dieser Glieder a, b aus zweien Gliedern α, β und β, γ einer zweit vorhergehenden Reihe, also A aus dreien Gliedern α, β, γ einer zweit vorhergehenden Reihe gebildet werden. Dieses Wiederholen des gegebenen einfachen Gesetzes führt zwar zu einer zusammengesetzteren Bildungsweise eines Gliedes aus Gliedern entfernter Reihen, lässt aber den Zusammenhang erkennen, in welchem die Glieder entfernter Reihen stehen, und ist zugleich das Mittel, um nachzuspüren, wie irgend ein Glied im Schema aus seinen Elementen, welche entfernt liegen, wieder gebildet werden kann.

Wird hiebei ein gemeinsamer Beziehungspunkt im Schema und zwar U_0 oder U angenommen, und die Horizontalreihe, worin $\Delta^0 U_0$ vorkommt, die Haupthorizontalreihe und die Scheitelreihe von U_0 die Hauptscheitelreihe genannt, so wird das ganze Schema in vier Theile zerlegt, und dadurch zu folgenden Fragen Veranlassung gegeben:

I. wie wird $\Delta^{+n} U$ und $\Delta^{-n} U$ aus den Gliedern der Haupthorizontalreihe und aus anderen Reihen, und

II. wie wird U_{+n} und U_{-n} aus den Gliedern der Hauptscheitelreihe und wie aus anderen Reihen gebildet?

§. 2.

I. Bildung von $\Delta^{+n}U$ *und* $\Delta^{-n}U$

Es ist

$$\begin{aligned}
\Delta^1U_0 &= U_1 - U_0 \\
\Delta^2U_0 &= \Delta^1U_1 - \Delta^1U_0 \\
&= U_2 - U_1 \\
&\qquad - U_1 + U_0 \\
&= U_3 - 2 \,.\, U_1 + U_0
\end{aligned}$$

ferner ist

$$\begin{aligned}
\Delta^3U_0 &= \Delta^2U_1 - \Delta^2U_0 \\
&= U_3 - 2 \,.\, U_2 + \quad U_1 \\
&\qquad - \quad U_2 + 2 \,.\, U_1 - U_0 \\
&= U_3 - 3 \,.\, U_2 + 3 \,.\, U_1 - U_0
\end{aligned}$$

Der Uebergang von dem vorhergehenden

$$\Delta^{n-1}U_0 = U_{n-1} - \frac{(n-1)^{1|-1}}{1^{1|1}} \,.\, U_{n-2} + \frac{(n-1)^{2|-1}}{1^{2|-1}} \,.\, U_{n-3} - \ldots + \ldots .$$

zu dem folgenden Δ^nU_0 besteht in der Vereinigung der Reihen

$$\begin{aligned}
\Delta^nU_0 &= \Delta^{n-1}U_1 - \Delta^{n-1}U_0 \\
&= U_n - (n-1)_1 \,.\, U_{n-1} + (n-1)_2 \,.\, U_{n-2} - (n-1)_3 \,.\, U_{n-3} + \ldots - \ldots\ldots \\
&\qquad - \qquad U_{n-1} + (n-1)_1 \,.\, U_{n-2} - (n-1)_2 \,.\, U_{n-3} + \ldots - \ldots\ldots
\end{aligned}$$

wo wegen der Kürze

$$\frac{(n-1)^{p|-1}}{1^{p|1}} = (n-1)_p$$

gesetzt ist. Wird hiebei berücksichtiget, dass

$$(n-1)_p + (n-1)_{p-1} = (n)_p$$

so entsteht durch diese Vereinigung die Endgleichung

$$1) \qquad \Delta^{n} U_0 = U_n - \frac{n^{1|-1}}{1^{1|1}} \,.\, U_{n-1} + \frac{n^{2|-1}}{1^{2|1}} \,.\, U_{n-2} - \ldots (-)^{n} \,.\, \frac{n^{n|-1}}{1^{n|1}} \,.\, U_0$$

nach welcher $\Delta^{+n} U_0$ aus den Gliedern der Haupthorizontalreihe gebildet wird.

Die Bildungsweise von $\Delta^{-n} U_0$ wird dadurch gewonnen, dass die Gleichungen

$$\begin{aligned} \Delta^{-1} U_0 &= U_{-1} + \Delta^{-1} U_{-1} \\ \Delta^{-1} U_{-1} &= U_{-2} + \Delta^{-1} U_{-2} \\ \Delta^{-1} U_{-2} &= U_{-3} + \Delta^{-1} U_{-3} \\ \Delta^{-1} U_{-3} &= U_{-4} + \Delta^{-1} U_{-4} \\ \ldots & \ldots \ldots \ldots \end{aligned}$$

zusammengezählt werden; es entsteht die Reihe

$$\Delta^{-1} U_0 = U_{-1} + U_{-2} + U_{-3} + U_{-4} + \ldots \ldots$$

Nach demselben Gesetze wird $\Delta^{-2} U_0$ aus den Gliedern der nächsten Horizontalreihe gebildet,

$$\Delta^{-2} U_0 = \Delta^{-1} U_{-1} + \Delta^{-1} U_{-2} + \Delta^{-1} U_{-3} + \Delta^{-1} U_{-4} + \ldots \ldots$$

und so auch wieder jedes Glied dieser Reihe durch die Glieder der Haupthorizontalreihe, nämlich

$$\begin{array}{lllllll} \Delta^{-2} U_0 = & U_{-2} & + U_{-3} & + U_{-4} & + U_{-5} & + \ldots \ldots \ldots \\ & & + U_{-3} & + U_{-4} & + U_{-5} & + \ldots \ldots \ldots \\ & & & + U_{-4} & + U_{-5} & + \ldots \ldots \ldots \\ & & & & + U_{-5} & + \ldots \ldots \ldots \\ & & & & & + \ldots \ldots \ldots \end{array}$$

oder

$$\Delta^{-2} U_0 = 1 \,.\, U_{-2} + 2 \,.\, U_{-3} + 3 \,.\, U_{-4} + 4 \,.\, U_{-5} + \ldots \ldots$$

So wie $\Delta^{-2} U_0$ aus $\Delta^{-1} U_0$ so wird auch jedes folgende Glied $\Delta^{-n} U_0$ aus seinem unmittelbar vorhergehenden Gliede $\Delta^{-(n-1)} U_0$ hergeleitet; ist die Reihe

$$\Delta^{-(n-1)}U_0 = U_{-(n-1)} - \frac{(-n+1)^{1|-1}}{1^{1|1}} . U_{-n} + \frac{(-n+1)^{2|-1}}{1^{2|1}} . U_{-n-1} - \ldots + \ldots (\alpha$$

gewonnen, so besteht der Uebergang zu $\Delta^{-n}U_0$ darin, dass die Glieder der Reihe

$$\Delta^{-n}U_0 = \Delta^{-(n-1)}U_{-1} + \Delta^{-(n-1)}U_{-2} + \Delta^{-(n-1)}U_{-3} + \ldots\ldots$$

durch Reihen ersetzt werden, welche auf dieselbe Weise gebildet sind, als die schon gefundene Reihe α. Es wird hiedurch

$$\begin{array}{llllll}
\Delta^{-n}U_0 = U_{-n} - (-n+1)_1 . & U_{-n-1} + (-n+1)_2 . & U_{-n-2} - (-n+1)_3 . & U_{-n-3} + \ldots & \\
\qquad\qquad + & U_{-n-1} - (-n+1)_1 . & U_{-n-2} + (-n+1)_2 . & U_{-n-3} - \ldots & \\
 & \qquad\qquad + & U_{-n-2} - (-n+1)_1 . & U_{-n-3} + \ldots & \\
 & & \qquad\qquad + & U_{-n-3} - \ldots & \\
 & & & \qquad + \ldots\ldots &
\end{array}$$

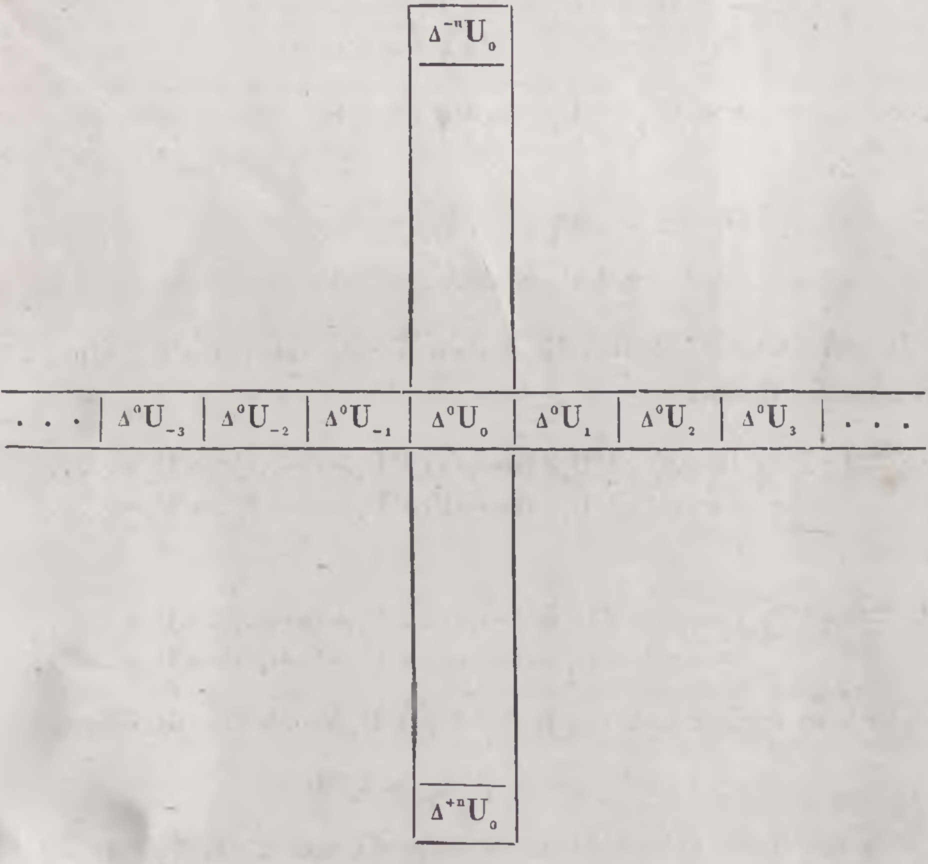
oder, da allgemein

$$1 - (-n+1)_1 + (-n+1)_2 - (-n+1)_3 + \ldots (-)^r (-n+1)_r = (-)^r (-n)_r$$

so wird

$$2) \quad \Delta^{-n}U_0 = U_{-n} - \frac{(-n)^{1|-1}}{1^{1|1}} . U_{-n-1} + \frac{(-n)^{2|-1}}{1^{2|1}} . U_{-n-2} - \frac{(-n)^{3|-1}}{1^{3|1}} . U_{-n-3} + \ldots - \ldots$$

Die Glieder $\Delta^{+n}U_0$ und $\Delta^{-n}U_0$ der Hauptscheitelreihe werden also nach einem und demselben Gesetze aus den Gliedern der Haupthorizontalreihe gebildet.



§. 3.

Das Glied $\Delta^{+n}U_0$ der Hauptscheitelreihe kann auch aus Gliedern des Schemas, welche nach einer andern Richtung liegen, gebildet werden. Es ist nämlich

$$\Delta^1U_0 = - U_0 + U_1 \qquad A$$

$$\Delta^2U_0 = + U_0 - U_1 + \Delta^1U_1 \qquad B$$

Den Uebergang zu dem folgenden Gliede giebt die Gleichung

$$\Delta^3U_0 = - \Delta^2U_0 + \Delta^2U_1$$

an; aber dadurch, dass der erste Theil Δ^2U_0 nach der Gleichung B und der zweite Theil Δ^2U_1 nach der Gleichung A gebildet wird, entsteht eine Bildungsweise, welche von der früheren verschieden ist

$$\begin{aligned}\Delta^3U_0 &= -U_0 + U_1 - \Delta^1U_1 \\ &\qquad\qquad\quad - \Delta^1U_1 + \Delta^1U_2 \\ &= -U_0 + U_1 - 2.\Delta^1U_1 + \Delta^1U_2\end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned}\Delta^3U_0 = &- \Delta^0U_0 - 2.\Delta^1U_1 \\ &+ \Delta^0U_1 + \Delta^1U_2\end{aligned}$$

Dieselbe Gestalt erhalten die Reihen für die Glieder Δ^4U_0, Δ^5U_0, .. Sind nun die Reihen

$$\Delta^{n-2}U_0 = (-)^{n-2}\left(\begin{array}{l}(n-2,0)\,.\,\Delta^0U_0 + (n-2,1)\,.\,\Delta^1U_1 + (n-2,2)\,.\,\Delta^2U_2 + \ldots\ldots \\ -(n-2,0)'.\,\Delta^0U_1 - (n-2,1)'.\,\Delta^1U_2 - (n-2,2)'.\,\Delta^2U_3 - \ldots\ldots\end{array}\right) \quad C$$

und

$$\Delta^{n-1}U_0 = (-)^{n-1}\left(\begin{array}{l}(n-1,0)\,.\,\Delta^0U_0 + (n-1,1)\,.\,\Delta^1U_1 + (n-1,2)\,.\,\Delta^2U_2 + \ldots\ldots \\ -(n-1,0)'.\,\Delta^0U_1 - (n-1,1)'.\,\Delta^1U_2 - (n-1,2)'.\,\Delta^2U_3 - \ldots\ldots\end{array}\right) \quad D$$

gefunden, so ergiebt sich die Reihe für Δ^nU_0 durch die Gleichung

$$\Delta^nU_0 = -\Delta^{n-1}U_0 + \Delta^{n-1}U_1$$

wenn in der Reihe C sowohl die Stellenzahl von Δ als von U um 1 erhöhet, und hievon die Reihe D abgezählt wird; hiedurch entsteht die Reihe

$$\Delta^nU_0 = (-)^{n-2}\left(\begin{array}{l}(n-1,0)\,.\,\Delta^0U_0 + (n-1,1)\,.\,\Delta^1U_1 + (n-1,2)\,.\,\Delta^2U_2 + \ldots\ldots \\ -(n-1,0)'.\,\Delta^0U_1 - (n-1,1)'.\,\Delta^1U_2 - (n-1,2)'.\,\Delta^2U_3 - \ldots\ldots \\ +(n-2,0)\,.\,\Delta^1U_1 + (n-2,1)\,.\,\Delta^2U_2 + (n-2,2)\,.\,\Delta^3U_3 + \ldots\ldots \\ -(n-2,0)'.\,\Delta^1U_2 - (n-2,1)'.\,\Delta^2U_3 - (n-2,2)'.\,\Delta^3U_4 - \ldots\ldots\end{array}\right)$$

Die Reihe für Δ^nU_0 erhält also wieder dieselbe Gestalt:

$$\Delta^nU_0 = (-)^n\left(\begin{array}{l}(n,0)\,.\,\Delta^0U_0 + (n,1)\,.\,\Delta^1U_1 + (n,2)\,.\,\Delta^2U_2 + \ldots\ldots \\ -(n,0)'.\,\Delta^0U_1 - (n,1)'.\,\Delta^1U_2 - (n,2)'.\,\Delta^2U_3 - \ldots\ldots\end{array}\right)$$

und die Vorzahlen ihrer Glieder werden nach folgenden Gleichungen gebildet:

$$\begin{aligned}
(n,0) &= (n-1,0)\\
(n,1) &= (n-1,1) + (n-2,0)\\
(n,2) &= (n-1,2) + (n-2,1)\\
(n,3) &= (n-1,3) + (n-2,2)\\
&\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
(n,0)^1 &= (n-1,0)^1\\
(n,1)^1 &= (n-1,1)^1 + (n-2,0)^1\\
(n,2)^1 &= (n-1,2)^1 + (n-2,1)^1\\
(n,3)^1 &= (n-1,3)^1 + (n-2,2)^1\\
&\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot
\end{aligned}$$

Diese zurücklaufenden führen zu folgenden unabhängigen Bestimmungen:

$$\begin{array}{lcl}
(n,0) = 1 & \text{und} & (n,0)^1 = 1\\
(n,1) = \dfrac{(n-1)^{1|-1}}{1^{2|1}} & & (n,1)^1 = \dfrac{(n-2)^{1|-1}}{1^{1|1}}\\
(n,2) = \dfrac{(n-2)^{2|-1}}{1^{2|1}} & & (n,2)^1 = \dfrac{(n-3)^{2|-1}}{1^{2|1}}\\
(n,3) = \dfrac{(n-3)^{3|-1}}{1^{3|1}} & & (n,3)^1 = \dfrac{(n-4)^{3|-1}}{1^{3|1}}\\
\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot & & \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot
\end{array}$$

Es ist also

$$3)\qquad \Delta^n U_0 = (-)^n \left(\begin{array}{l}
\Delta^0 U_0 + \dfrac{(n-1)^{1|-1}}{1^{1|1}} . \Delta^1 U_1 + \dfrac{(n-2)^{2|-1}}{1^{2|1}} . \Delta^2 U_2 + \dfrac{(n-3)^{3|-1}}{1^{3|1}} . \Delta^3 U_3 + \ldots\\
-\Delta^0 U_1 - \dfrac{(n-2)^{1|-1}}{1^{1|1}}\ \Delta^1 U_2 - \dfrac{(n-3)^{2|-1}}{1^{2|1}}\ \Delta^2 U_3 - \dfrac{(n-4)^{3|-1}}{1^{3|1}}\ \Delta^3 U_4 - \ldots
\end{array}\right).$$

Die Glieder, aus welchen nach vorstehender Vorschrift $\Delta^n U_0$ gebildet werden kann, liegen in der Mitte der Haupthorizontal- und der Hauptscheitelreihe. Bei dieser Gleichung ist zu bemerken, dass alle Vorzahlen, welche auf eine, die $= 0$ ist, folgen, auch $= 0$ gesetzt werden müssen.

$\Delta^0 U_0$	$\Delta^0 U_1$				
	$\Delta^1 U_1$	$\Delta^1 U_2$			
		$\Delta^2 U_2$	$\Delta^2 U_3$		
			$\Delta^3 U_3$	$\Delta^3 U_4$	
				$\Delta^4 U_4$	$\Delta^4 U_5$
$\Delta^n U_0$					

§. 4.

II. Bildung von U_{+n} *und* U_{-n}

Nach dem angenommenen Gesetze ist

$$U_n - U_{n-1} = \Delta' U_{n-1}$$

oder

$$U_n = U_{n-1} + \Delta' U_{n-1}$$

Diese Gleichung giebt an, dass jedes Glied der Haupthorizontalreihe aus zweien Gliedern gebildet werden kann, welche der Hauptscheitelreihe näher liegen. Wird dieser Weg weiter verfolgt, so ergiebt sich Folgendes für $n = 1$

$$U_1 = U_0 + \Delta^1 U_0$$

für n = 2:

$$\begin{aligned} U_2 &= U_1 + \Delta^1 U_1 \\ &= U_0 + \Delta^1 U_0 \\ &\quad + \Delta^1 U_0 + \Delta^2 U_0 \\ &= U_0 + 2 . \Delta^1 U_0 + \Delta^2 U_0 \end{aligned}$$

für n = 3:

$$\begin{aligned} U_3 &= U_2 + \Delta^1 U_2 \\ &= U_0 + 2 . \Delta^1 U_0 + \Delta^2 U_0 \\ &\quad + \Delta^1 U_0 + 2 . \Delta^2 U_0 + \Delta^3 U_0 \\ &= U_0 + 3 . \Delta^1 U_0 + 3 . \Delta^2 U_0 + \Delta^3 U_0 \end{aligned}$$

Der Fortgang der Rechnung bleibt unverändert, mithin auch das Gesetz der Vorzahlen; ist nämlich für U_{n-1} gefunden, dass

$$U_{n-1} = U_0 + \frac{(n-1)^{1|-1}}{1^{1|1}} . \Delta^1 U_0 + \frac{(n-1)^{2|-1}}{1^{2|1}} . \Delta^2 U_0 + \frac{(n-1)^{3|-1}}{1^{3|1}} . \Delta^3 U_0 + \ldots .$$

so gibt die Gleichung

$$U_n = U_{n-1} + \Delta^1 U_{n-1}$$

den Uebergang von dieser zur folgenden Reihe an. Wird nach dieser Vorschrift zu der vorstehenden folgende Reihe gezählt

$$\Delta U_{n-1} = \Delta^1 U_0 + \frac{(n-1)^{1|-1}}{1^{1|1}} . \Delta^2 U_0 + \frac{(n-1)^{2|-1}}{1^{2|1}} \Delta^3 U_0 + \ldots ..$$

und berücksichtiget, dass

$$\frac{(n-1)^{p|-1}}{1^{p|1}} + \frac{(n-1)^{p-1|-1}}{1^{p-1|1}} = \frac{n^{p|-1}}{1^{p|1}}$$

so ergibt sich folgendes allgemeine Gesetz für das bejahte n:

$$4)\quad U_{+n} = U_0 + \frac{n^{1|-1}}{1^{1|1}} \,.\, \Delta^1 U_0 + \frac{n^{2|-1}}{1^{1|1}} \,.\, \Delta^2 U_0 + \frac{n^{3|-1}}{1^{2|1}} \,.\, \Delta^3 U_0 + \ldots\ldots$$

Das Gesetz für das verneinte n wird dadurch herbeigeführt, dass die Gleichungen

$$\begin{aligned} U_{-1} &= U_0 - \Delta^1 U_{-1} \\ -\Delta^1 U_{-1} &= -\Delta^1 U_0 + \Delta^2 U_{-1} \\ +\Delta^2 U_{-1} &= +\Delta^2 U_0 - \Delta^3 U_{-1} \\ -\Delta^3 U_{-1} &= -\Delta^3 U_0 + \Delta^4 U_{-1} \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

zusammengezählt werden,

$$U_{-1} = U_0 - \Delta^1 U_0 + \Delta^2 U_0 - \Delta^3 U_0 + \Delta^4 U_0 - \ldots\ldots$$

So wie U_{-1} aus der nächsten Scheitelreihe zur Rechten dieses Gliedes, so wird auch U_{-2} aus der nächsten Scheitelreihe zur Rechten desselben gebildet, nämlich

$$U_{-2} = U_{-1} - \Delta^1 U_{-1} + \Delta^2 U_{-1} - \Delta^3 U_{-1} + \Delta^4 U_{-1} - \ldots\ldots$$

Nach demselben Gesetze wird wieder statt jedes Gliedes seine nächste Scheitelreihe mit abwechselnden Zeichen eingeführt

$$\begin{aligned} U_{-2} = U_0 &- \Delta^1 U_0 + \Delta^2 U_0 - \Delta^3 U_0 + \ldots\ldots \\ &- \Delta^1 U_0 + \Delta^2 U_0 - \Delta^3 U_0 + \ldots\ldots \\ & + \Delta^2 U_0 - \Delta^3 U_0 + \ldots\ldots \\ & - \Delta^3 U_0 + \ldots\ldots \\ & + \ldots\ldots \end{aligned}$$

oder

$$U_{-2} = 1 \,.\, U_0 - 2 \,.\, \Delta^1 U_0 + 3 \,.\, \Delta^2 U_0 - 4 \,.\, \Delta^3 U_0 + \ldots\ldots$$

Der Weg von dem vorhergehenden zu dem folgenden Gliede ist vorgezeichnet; ist die Reihe für

$$U_{-(n-1)} = U_0 + \frac{(-n+1)^{1|-1}}{1^{1|1}} \cdot \Delta^1 U_0 + \frac{(-n+1)^{2|-1}}{1^{2|1}} \cdot \Delta^2 U_0 + \ldots \quad (E$$

gewonnen, so besteht der Uebergang zu U_{-n} darin, dass die Glieder der Reihe

$$U_{-n} = U_{-(n-1)} - \Delta^1 U_{-(n-1)} + \Delta^2 U_{-(n-1)} - \Delta^3 U_{-(n-1)} + \ldots - \ldots$$

durch Reihen ersetzt werden, welche auf dieselbe Weise gebildet sind als die Reihe E. Es entsteht durch ein gleiches Verfahren wie in §. 2 folgende allgemeine Reihe:

$$5) \quad U_{-n} = \Delta^0 U_0 + \frac{(-n)^{1|-1}}{1^{1|1}} \cdot \Delta^1 U_0 + \frac{(-n)^{2|-1}}{1^{2|1}} \cdot \Delta^2 U_0 + \frac{(-n)^{3|-1}}{1^{3|1}} \cdot \Delta^3 U_0 + \ldots$$

Diese beiden Gleichungen 4 und 5 geben das Gesetz an, nach welchem ein Glied der Haupthorizontalreihe aus den Gliedern der Hauptscheitelreihe gebildet werden kann; dieses Gesetz kann auch in folgenden Zeichen vorgelegt werden:

$$6) \quad U_n = (1 + \Delta)^n \; U_0$$

$\Delta^0 U_{-n}$	$\Delta^0 U_0$	$\Delta^0 U_{+n}$
	$\Delta^1 U_0$	
	$\Delta^2 U_0$	
	$\Delta^3 U_0$	
	$\Delta^4 U_0$	
	$\Delta^5 U_0$	
	. .	

§. 5.

Eine zweite Bildungsweise aus Gliedern, welche nach einer andern Richtung im Schema liegen, ist folgende: Es ist

$$
\begin{aligned}
U_1 &= U_0 + \Delta^1 U_0 \\
\Delta^1 U_0 &= \Delta^1 U_{-1} + \Delta^2 U_{-1} \\
\Delta^2 U_{-1} &= \Delta^2 U_{-2} + \Delta^3 U_{-2} \\
\Delta^3 U_{-2} &= \Delta^3 U_{-3} + \Delta^4 U_{-3} \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}
$$

Durch Zusammenzählen dieser Gleichungen entsteht die Reihe

$$U_1 = U_0 + \Delta^1 U_{-1} + \Delta^2 U_{-2} + \Delta^3 U_{-3} + \Delta^4 U_{-4} + \ldots\ldots$$

sie zeigt, dass ein Glied U_1 durch eine Reihe gebildet werden kann, welche in der Mitte der Haupthorizontal- und der Hauptscheitel-Reihe liegt. Nach demselben Gesetze wird das folgende Glied U_2 gebildet

$$U_2 = U_1 + \Delta^1 U_0 + \Delta^2 U_{-1} + \Delta^3 U_{-2} + \Delta^4 U_{-3} + \ldots\ldots$$

und so auch nach demselben Gesetze jedes Glied dieser Reihe,

$$
\begin{aligned}
U_2 = U_0 &+ \Delta^1 U_{-1} + \Delta^2 U_{-2} + \Delta^3 U_{-3} + \Delta^4 U_{-4} + \ldots\ldots \\
&+ \Delta^1 U_{-1} + \Delta^2 U_{-2} + \Delta^3 U_{-3} + \Delta^4 U_{-4} + \ldots\ldots \\
&\phantom{+ \Delta^1 U_{-1}} + \Delta^2 U_{-2} + \Delta^3 U_{-3} + \Delta^4 U_{-4} + \ldots\ldots \\
&\phantom{+ \Delta^1 U_{-1} + \Delta^2 U_{-2}} + \Delta^3 U_{-3} + \Delta^4 U_{-4} + \ldots\ldots \\
&\phantom{+ \Delta^1 U_{-1} + \Delta^2 U_{-2} + \Delta^3 U_{-3}} + \Delta^4 U_{-4} + \ldots\ldots \\
&\phantom{+ \Delta^1 U_{-1} + \Delta^2 U_{-2} + \Delta^3 U_{-3} + \Delta^4 U_{-4}} + \ldots\ldots
\end{aligned}
$$

oder

$$U_2 = 1 \,.\, U_0 + 2 \,.\, \Delta^1 U_{-1} + 3 \,.\, \Delta^2 U_{-2} + 4 \,.\, \Delta^3 U_{-3} + \ldots\ldots$$

Ist nach diesem Verfahren U_{n-1} in eine Reihe entwickelt

$$U_{n-1} = U_0 - \frac{(-n+1)^{1|-1}}{1^{1|1}} \,.\, \Delta^1 U_{-1} + \frac{(-n+1)^{2|-1}}{1^{2|1}} \,.\, \Delta^2 U_{-2} - \ldots + \ldots\ldots \quad (F$$

so wird das folgende Glied U_n gefunden, wenn in der Reihe

$$U_n = U_{n-1} + \Delta^1 U_{n-2} + \Delta^2 U_{n-3} + \Delta^3 U_{n-4} + \dots\dots$$

für jedes Glied eine Reihe eingeführt wird, welche nach demselben Gesetze wie F gebildet ist, nämlich:

$$\begin{array}{rl} U_n = U_0 - (-n+1)_1 \,.\, \Delta^1 U_{-1} + (-n+1)_2 \,.\, \Delta^2 U_{-2} - (-n+1)_3 \,.\, \Delta^3 U_{-3} + \dots\dots \\ + \quad \Delta^1 U_{-1} - (-n+1)_1 \,.\, \Delta^2 U_{-2} + (-n+1)_2 \,.\, \Delta^3 U_{-3} - \dots\dots \\ + \quad \Delta^2 U_{-2} - (-n+1)_1 \,.\, \Delta^3 U_{-3} + \dots\dots \\ + \quad \Delta^3 U_{-3} - \dots\dots \\ + \dots\dots \end{array}$$

Es entsteht, wenn die Vorzahlen wie in §. 2 vereinigt werden, die Reihe

$$7) \quad U_n = U_0 - \frac{(-n)^{1|-1}}{1^{1|1}} \,.\, \Delta^1 U_{-1} + \frac{(-n)^{2|-1}}{1^{2|1}} \,.\, \Delta^2 U_{-2} - \frac{(-n)^{3|-1}}{1^{3|1}} \,.\, \Delta^3 U_{-3} + \dots - \dots$$

Nach dieser Gleichung wird ein Glied U_n der Haupthorizontalreihe auf der rechten Seite aus den Gliedern

$$U_0\,,\quad \Delta^1 U_{-1}\,,\quad \Delta^2 U_{-2}\,,\quad \Delta^3 U_{-3}\,,\quad \dots\dots$$

welche auf der linken Seite liegen, gebildet. Es ist noch übrig, das Gesetz für U_{-n} aufzusuchen. Es ist

$$U_{-1} = U_0 \;-\; \Delta^1 U_{-1}$$

ſerner ist

$$\begin{aligned} U_{-2} &= U_{-1} - \Delta^1 U_{-2} \\ &= U_0 - \Delta^1 U_{-1} \\ &\quad - \Delta^1 U_{-1} + \Delta^2 U_{-2} \\ &= U_0 - 2 . \Delta^1 U_{-1} + \Delta^2 U_{-2} \end{aligned}$$

eben so ist

$$\begin{aligned} U_{-3} &= U_{-2} - \Delta^1 U_{-3} \\ &= U_0 - 2 . \Delta^1 U_{-1} + \Delta^2 U_{-2} \\ &\quad - \Delta^1 U_{-1} + 2 . \Delta^2 U_{-2} - \Delta^3 U_{-3} \\ &= U_0 - 3 . \Delta^1 U_{-1} + 3 . \Delta^2 U_{-2} - \Delta^3 U_{-3} \end{aligned}$$

Ist die Reihe für $U_{-(n-1)}$ gefunden

$$U_{-(n-1)} = U_0 - \frac{(n-1)^{1|-1}}{1^{1|1}} . \Delta^1 U_{-1} + \frac{(n-1)^{2|-1}}{1^{2|1}} . \Delta^2 U_{-2} - \ldots\ldots$$

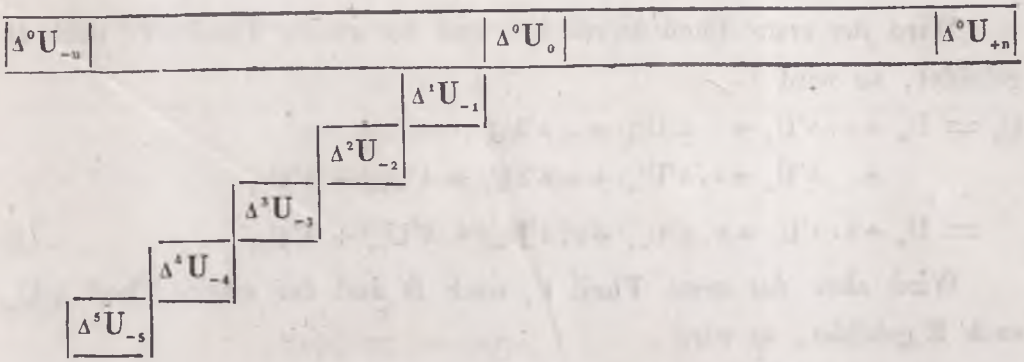
so besteht der Uebergang zu U_{-n} in der Vereinigung der beiden Reihen

$$\begin{aligned} U_{-n} &= U_{-(n-1)} - \Delta^1 U_{-n} \\ &= U_0 - (n-1)_1 . \Delta^1 U_{-1} + (n-1)_2 . \Delta^2 U_{-2} - (n-1)_3 . \Delta^3 U_{-3} + \ldots - \ldots\ldots \\ &\quad - \Delta^1 U_{-1} + (n-1)_1 . \Delta^2 U_{-2} - (n-1)_2 . \Delta^3 U_{-3} + \ldots - \ldots\ldots \end{aligned}$$

wodurch folgende Reihe gewonnen wird

$$8)\quad U_{-n} = U_0 - \frac{n^{1|-1}}{1^{1|1}} . \Delta^1 U_{-1} + \frac{n^{2|-1}}{1^{2|1}} . \Delta^2 U_{-2} - \frac{n^{3|-1}}{1^{3|1}} . \Delta^3 U_{-3} + \ldots - \ldots\ldots$$

Beide Reihen 7 und 8 sind denselben Gesetzen unterworfen; sie geben vereint die Entwickelung eines Gliedes der Haupthorizontalreihe aus Gliedern, welche zur Linken in der Mitte der Horizontal- und der Scheitelreihe liegen.



§. 6.

Die Glieder U_{+n} und U_{-n} können auch durch Glieder gebildet werden, welche der Scheitelreihe näher liegen, als die vorigen. Es ist

$$U_1 = U_0 + \Delta^1 U_0 \qquad \text{(A}$$

und auch

$$U_1 = U_0 + \Delta^1 U_{-1} + \Delta^2 U_{-1} \qquad \text{(B}$$

Ferner ist

$$U_2 = U_1 + \Delta^1 U_1$$

Der erste Theil U_1 kann nach A und der zweite $\Delta^1 U_1$ kann nach B gebildet werden; hiedurch entsteht

$$\begin{aligned} U_2 &= U_0 + \Delta^1 U_0 \\ &\quad + \Delta^1 U_0 + \Delta^2 U_{-1} + \Delta^3 U_{-1} \\ &= U_0 + 2 . \Delta^1 U_0 + \Delta^2 U_{-1} + \Delta^3 U_{-1} \qquad \text{(C} \end{aligned}$$

Der erste Theil U_1 kann auch nach B und der zweite Theil $\Delta^1 U_1$ nach C gebildet werden; es wird hiedurch

$$\begin{aligned} U_2 &= U_0 + \Delta^1 U_{-1} + \Delta^2 U_{-1} \\ &\quad + \Delta^1 U_{-1} + 2 . \Delta^2 U_{-1} + \Delta^3 U_{-2} + \Delta^4 U_{-2} \\ &= U_0 + 2 . \Delta^1 U_{-1} + 3 . \Delta^2 U_{-1} + \Delta^3 U_{-2} + \Delta^4 U_{-2} \qquad \text{(D} \end{aligned}$$

Ferner ist

$$U_3 = U_2 + \Delta^1 U_2$$

ferner ist

$$\begin{aligned} U_{-2} &= U_{-1} - \Delta^1 U_{-2} \\ &= U_0 - \Delta^1 U_{-1} \\ &\qquad - \Delta^1 U_{-1} + \Delta^2 U_{-2} \\ &= U_0 - 2 \,.\, \Delta^1 U_{-1} + \Delta^2 U_{-2} \end{aligned}$$

eben so ist

$$\begin{aligned} U_{-3} &= U_{-2} - \Delta^1 U_{-3} \\ &= U_0 - 2 \,.\, \Delta^1 U_{-1} + \Delta^2 U_{-2} \\ &\qquad - \Delta^1 U_{-1} + 2 \,.\, \Delta^2 U_{-2} - \Delta^3 U_{-3} \\ &= U_0 - 3 \,.\, \Delta^1 U_{-1} + 3 \,.\, \Delta^2 U_{-2} - \Delta^3 U_{-3} \end{aligned}$$

Ist die Reihe für $U_{-(n-1)}$ gefunden

$$U_{-(n-1)} = U_0 - \frac{(n-1)^{1|-1}}{1^{1|1}} \,.\, \Delta^1 U_{-1} + \frac{(n-1)^{2|-1}}{1^{2|1}} \,.\, \Delta^2 U_{-2} - \,.\,.\,.\,.\,.$$

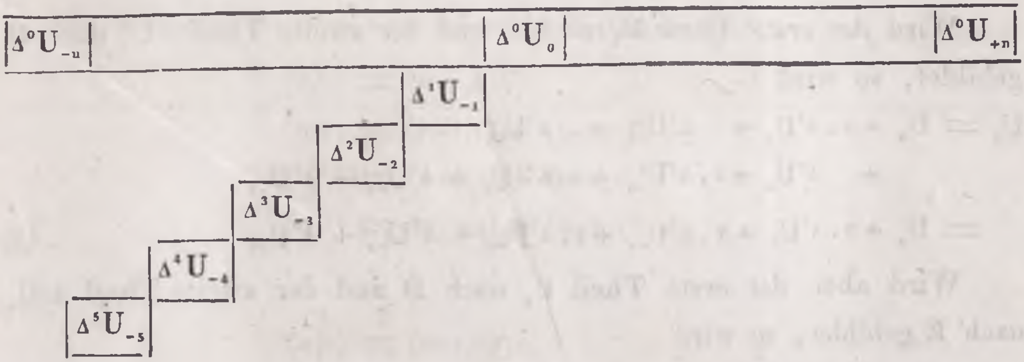
so besteht der Uebergang zu U_{-n} in der Vereinigung der beiden Reihen

$$\begin{aligned} U_{-n} &= U_{-(n-1)} - \Delta^1 U_{-n} \\ &= U_0 - (n-1)_1 \,.\, \Delta^1 U_{-1} + (n-1)_2 \,.\, \Delta^2 U_{-3} - (n-1)_3 \,.\, \Delta^3 U_{-3} + \,.\,.\,.\, - \,.\,.\,.\,.\,. \\ &\qquad - \Delta^1 U_{-1} + (n-1)_1 \,.\, \Delta^2 U_{-2} - (n-1)_2 \,.\, \Delta^3 U_{-3} + \,.\,.\,.\, - \,.\,.\,.\,. \end{aligned}$$

wodurch folgende Reihe gewonnen wird

$$8) \quad U_{-n} = U_0 - \frac{n^{1|-1}}{1^{1|1}} \,.\, \Delta^1 U_{-1} + \frac{n^{2|-1}}{1^{2|1}} \,.\, \Delta^2 U_{-2} - \frac{n^{3|-1}}{1^{3|1}} \,.\, \Delta^3 U_{-3} + \,.\,.\,.\, - \,.\,.\,.\,.$$

Beide Reihen 7 und 8 sind denselben Gesetzen unterworfen; sie geben vereint die Entwickelung eines Gliedes der Haupthorizontalreihe aus Gliedern, welche zur Linken in der Mitte der Horizontal- und der Scheitelreihe liegen.



§. 6.

Die Glieder U_{+n} und U_{-n} können auch durch Glieder gebildet werden, welche der Scheitelreihe näher liegen, als die vorigen. Es ist

$$U_1 = U_0 + \Delta^1 U_0 \qquad (A$$

und auch

$$U_1 = U_0 + \Delta^1 U_{-1} + \Delta^2 U_{-1} \qquad (B$$

Ferner ist

$$U_2 = U_1 + \Delta^1 U_1$$

Der erste Theil U_1 kann nach A und der zweite $\Delta^1 U_1$ kann nach B gebildet werden; hiedurch entsteht

$$\begin{aligned} U_2 &= U_0 + \Delta^1 U_0 \\ &\quad + \Delta^1 U_0 + \Delta^2 U_{-1} + \Delta^3 U_{-1} \\ &= U_0 + 2 . \Delta^1 U_0 + \Delta^2 U_{-1} + \Delta^3 U_{-1} \qquad (C \end{aligned}$$

Der erste Theil U_1 kann auch nach B und der zweite Theil $\Delta^1 U_1$ nach C gebildet werden; es wird hiedurch

$$\begin{aligned} U_2 &= U_0 + \Delta^1 U_{-1} + \Delta^2 U_{-1} \\ &\quad + \Delta^1 U_{-1} + 2 . \Delta^2 U_{-1} + \Delta^3 U_{-2} + \Delta^4 U_{-2} \\ &= U_0 + 2 . \Delta^1 U_{-1} + 3 . \Delta^2 U_{-1} + \Delta^3 U_{-2} + \Delta^4 U_{-2} \qquad (D \end{aligned}$$

Ferner ist

$$U_3 = U_2 + \Delta^1 U_2$$

Es ist folglich

$$9)\quad U_n = U_0 + \frac{n^{1|-1}}{1^{1|1}} . \Delta^1 U_0 + \frac{n^{2|-1}}{1^{2|1}} . \Delta^2 U_{-1} + \frac{(n+1)^{3|-1}}{1^{3|1}} . \Delta^3 U_{-1} + \frac{(n+1)^{4|-1}}{1^{4|1}} . \Delta^4 U_{-2}$$

$$+ \frac{(n+2)^{5|-1}}{1^{5|1}} . \Delta^5 U_{-2} + \frac{(n+2)^{6|-1}}{1^{6|1}} . \Delta^6 U_{-3} + \ldots\ldots$$

und

$$10)\quad U_n = U_0 + \frac{n^{1|-1}}{1^{1|1}} . \Delta^1 U_{-1} + \frac{(n+1)^{2|-1}}{1^{2|1}} . \Delta^2 U_{-1} + \frac{(n+1)^{3|-1}}{1^{3|1}} . \Delta^3 U_{-2} + \frac{(n+2)^{4|-1}}{1^{4|1}} . \Delta^4 U_{-2}$$

$$+ \frac{(n+2)^{5|-1}}{1^{5|1}} . \Delta^5 U_{-3} + \frac{(n+3)^{6|-1}}{1^{6|1}} . \Delta^6 U_{-3} + \ldots\ldots$$

Diese Reihen gelten nicht allein für das bejahte n, sondern auch für das verneinte n; denn es ist

$$U_{-1} = U_0 - \Delta^1 U_{-1} \qquad (A_1$$

und

$$U_{-1} = U_0 - \Delta^1 U_0 + \Delta^2 U_{-1} \qquad (B_1$$

Ferner ist

$$U_{-2} = U_{-1} - \Delta^1 U_{-2}$$

Dieses Glied U_{-2} wird nun auf zwei verschiedene Weisen gebildet, und zwar entweder der erste Theil U_{-1} nach A_1 und der zweite Theil $\Delta^1 U_{-2}$ nach B_1

$$\begin{aligned} U_{-2} &= U_0 - \Delta^1 U_{-1} \\ &\quad - \Delta^1 U_{-1} + \Delta^2 U_{-1} - \Delta^3 U_{-2} \\ &= U_0 - 2 . \Delta^1 U_{-1} + \Delta^2 U_{-1} - \Delta^3 U_{-2} \end{aligned} \qquad (C_1$$

oder der erste Theil U_{-1} nach B_1 und der zweite Theil $\Delta^1 U_{-2}$ nach C_1

$$\begin{aligned} U_{-2} &= U_0 - \Delta^1 U_0 + \Delta^2 U_{-1} \\ &\quad - \Delta^1 U_0 + 2 . \Delta^2 U_{-1} - \Delta^3 U_{-1} + \Delta^4 U_{-2} \\ &= U_0 - 2 . \Delta^1 U_0 + 3 . \Delta^2 U_{-1} - \Delta^3 U_{-1} + \Delta^4 U_{-2} \end{aligned} \qquad (D_1$$

Ferner ist nach C_1 und D_1

$$U_{-3} = U_{-2} - \Delta^1 U_{-3}$$

$$= U_0 - 2.\Delta^1 U_{-1} + \Delta^2 U_{-1} - \Delta^3 U_{-2}$$

$$- \Delta^1 U_{-1} + 2.\Delta^2 U_{-1} - 3.\Delta^3 U_{-2} + \Delta^4 U_{-2} - \Delta^5 U_{-3}$$

$$= U_0 - 3.\Delta^1 U_{-1} + 3.\Delta^2 U_{-1} - 4.\Delta^3 U_{-2} + \Delta^4 U_{-2} - \Delta^5 U_{-3} \qquad (E_1$$

und nach D_1 und E_1

$$U_{-3} = U_0 - 2.\Delta^1 U_0 + 3.\Delta^2 U_{-1} - \Delta^3 U_{-2} + \Delta^4 U_{-2}$$

$$- \Delta^1 U_0 + 3.\Delta^2 U_{-1} - 3.\Delta^3 U_{-1} + 4.\Delta^4 U_{-2} - \Delta^5 U_{-2} + \Delta^6 U_{-3}$$

$$= U_0 - 3.\Delta^1 U_0 + 6.\Delta^2 U_{-1} - 4.\Delta^3 U_{-1} + 5.\Delta^4 U_{-2} - \Delta^5 U_{-2} + \Delta^6 U_{-3} \qquad (F_1$$

Durch ein gleiches Verfahren, welches oben vorgelegt ist, ergeben sich folgende Gesetze für die Bildung des Gliedes U_{-n}:

11) $$U_{-n} = U_0 + \frac{(-n)^{1l-1}}{1^{1l1}} . \Delta^1 U_0 + \frac{(-n)^{2l-1}}{1^{2l1}} . \Delta^2 U_{-1} + \frac{(-n+1)^{3l-1}}{1^{3l1}} . \Delta^3 U_{-1}$$

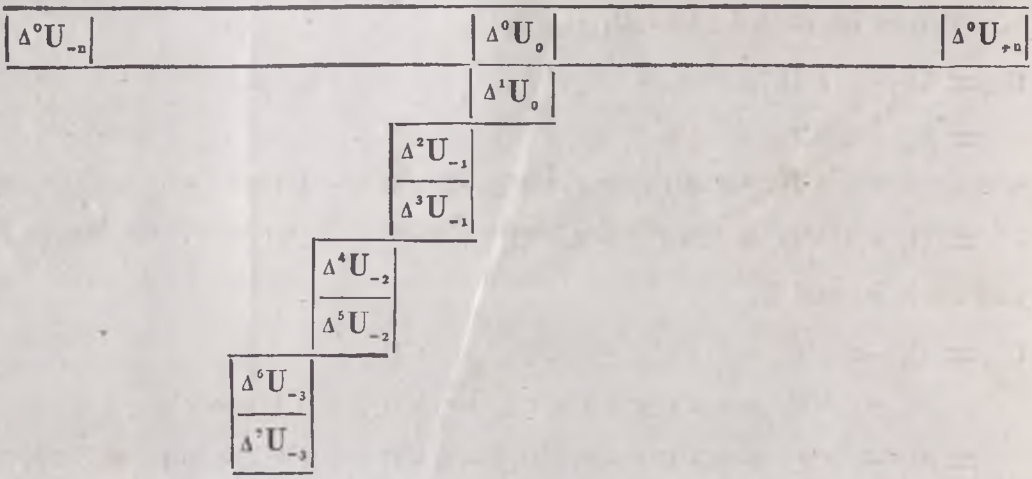
$$+ \frac{(-n+1)^{4l-1}}{1^{4l1}} . \Delta^4 U_{-2} + \frac{(-n+2)^{5l-1}}{1^{5l1}} . \Delta^5 U_{-2} + \frac{(-n+2)^{6l-1}}{1^{6l1}} . \Delta^6 U_{-3} + \ldots$$

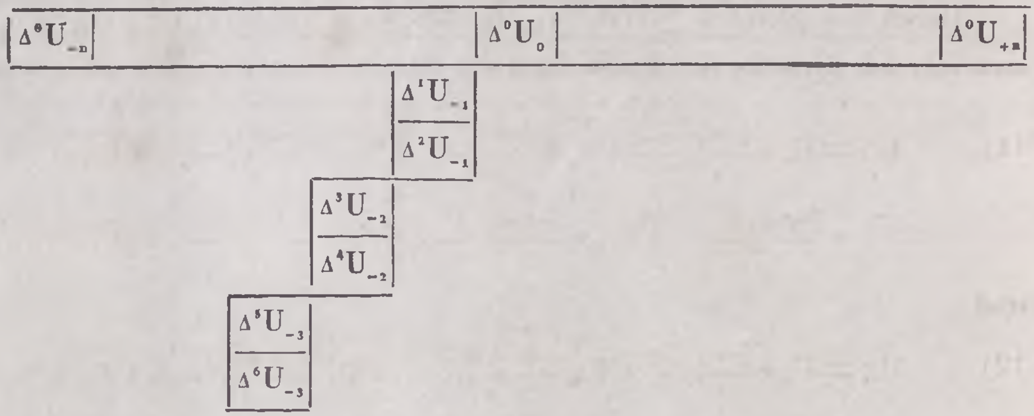
und

12) $$U_{-n} = U_0 + \frac{(-n)^{1l-1}}{1^{1l1}} . \Delta^1 U_{-1} + \frac{(-n+1)^{2l-1}}{1^{2l1}} . \Delta^2 U_{-1} + \frac{(-n+1)^{3l-1}}{1^{3l1}} . \Delta^3 U_{-2}$$

$$+ \frac{(-n+2)^{4l-1}}{1^{4l1}} . \Delta^4 U_{-2} + \frac{(-n+2)^{5l-1}}{1^{5l1}} . \Delta^5 U_{-3} + \frac{(-n+3)^{6l-1}}{1^{6l1}} . \Delta^6 U_{-3} + \ldots$$

Die obigen Reihen 9 und 10 sind also ganz allgemein, und gelten sowohl für das bejahte als verneinte n. Vorzüglich merkwürdig ist bei ihnen die ganz besondere Eigenschaft, dass keine der Reihen unendlich ist, welche Eigenschaft keine von den Reihen, die in dieser Untersuchung vorkommen, besitzt.





§. 7.

Die Glieder U_{+n} und U_{-n} können auch durch Reihen gebildet werden, welche auf der rechten Seite in der Mitte der Horizontal- und der Scheitelreihe liegen. Wird nämlich in der Gleichung 6

$$U_n = \Sigma_q \frac{n^{q|-1}}{1^{q|1}} . \Delta^q U_0$$

nach N 3 statt $\Delta^q U_0$ gesetzt

$$\Delta^q U_0 = \Sigma_p (-)^q \left(\frac{(q-p)^{p|-1}}{1^{p|1}} . \Delta^p U_p - \frac{(q-p-1)^{p|-1}}{1^{p|1}} . \Delta^p U_{p+1} \right)$$

so entsteht die zusammengesetztere Reihe

$$U_n = \Sigma_q \, \Sigma_p \, (-)^q \left(\frac{n^{q|-1}}{1^{q|1}} \cdot \frac{(q-p)^{p|-1}}{1^{p|1}} \cdot \Delta^p U_p - \frac{n^{q|-1}}{1^{q|1}} \cdot \frac{(q-p-1)^{p|-1}}{1^{p|1}} \cdot \Delta^p U_{p+1} \right)$$

welche der Forderung Genüge leistet; ihr kann eine einfachere Gestalt gegeben werden; denn, da der erste Theil verschwindet, so lange q kleiner als 2p, und der zweite Theil Null wird, so lange q kleiner als 2p+1 ist, so ist nach Analysis Seite 207 N. 317

$$\Sigma_q (-)^q \frac{n^{q|-1}}{1^{q|1}} \cdot \frac{(q-p)^{p|-1}}{1^{p|1}} = \frac{n^{2p|-1}}{1^{2p|1}} \cdot \Sigma_s (-)^s \frac{(n-2p)^{s|-1}}{1^{s|1}} \cdot \frac{(p+1)^{s|1}}{(2p+1)^{s|1}} = \frac{(n-p-1)^{p-1|-1}}{1^{p-1|1}}$$

und

$$\Sigma_q (-)^{q+1} \frac{n^{q|-1}}{1^{q|1}} \cdot \frac{(q-p-1)^{p|-1}}{1^{p|1}} = \frac{n^{2p+1|-1}}{1^{2p+1|1}} \cdot \Sigma_s (-)^s \frac{(n-2p-1)^{s|-1}}{1^{s|1}} \cdot \frac{(p+1)^{s|1}}{(2p+2)^{s|1}} = \frac{(n-p-1)^{p|-1}}{1^{p|1}}$$

Das allgemeine Glied der neuen Reihe ist also

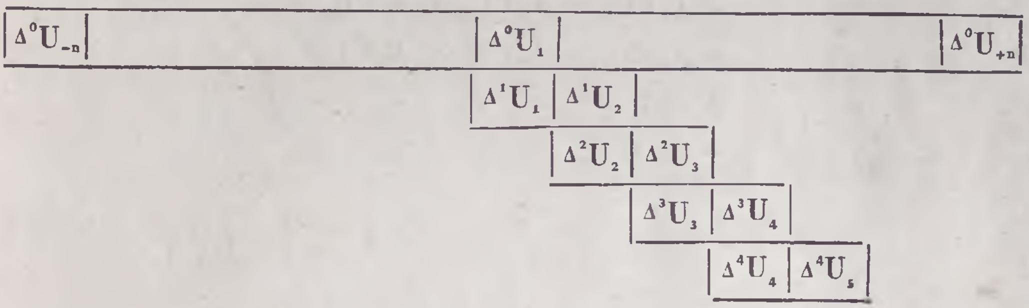
$$\frac{(n-p-1)^{p-1|-1}}{1^{p-1|1}} \cdot \Delta^p U_p + \frac{(n-p-1)^{p|-1}}{1^{p|1}} \cdot \Delta^p U_{p+1}$$

mithin die Reihe selbst

$$13) \qquad U_n = \frac{(n-2)^{0|-1}}{1^{0|1}} \cdot \Delta^1 U_1 + \frac{(n-3)^{1|-1}}{1^{1|1}} \cdot \Delta^2 U_2 + \frac{(n-4)^{2|-1}}{1^{2|1}} \cdot \Delta^3 U_3 + \ldots\ldots$$

$$+ \frac{(n-1)^{0|-1}}{1^{0|1}} \cdot \Delta^0 U_1 + \frac{(n-2)^{1|-1}}{1^{1|1}} \cdot \Delta^1 U_2 + \frac{(n-3)^{2|-1}}{1^{2|1}} \cdot \Delta^2 U_3 + \ldots\ldots$$

Diese Reihe ist ganz allgemein, sie gilt sowohl für das bejahte als verneinte n.



Diese Reihe geht in eine andere über, wenn in ihr

$$\Delta^p U_{p+1} = \Delta^p U_p + \Delta^{p+1} U_p$$

gesetzt wird, es entsteht folgende:

$$14)\quad U_n = \frac{n^{0|-1}}{1^{0|1}}.\Delta^0 U_0 + \frac{(n-1)^{1|-1}}{1^{1|1}}.\Delta^1 U_1 + \frac{(n-2)^{2|-1}}{1^{2|1}}.\Delta^2 U_2 + \frac{(n-3)^{3|-1}}{1^{3|1}}.\Delta^3 U_3 + \ldots$$

$$+ \frac{(n-1)^{0|-1}}{1^{0|1}}.\Delta^1 U_0 + \frac{(n-2)^{1|-1}}{1^{1|1}}.\Delta^2 U_1 + \frac{(n-3)^{2|-1}}{1^{2|1}}.\Delta^3 U_2 + \frac{(n-4)^{3|-1}}{1^{3|1}}.\Delta^4 U_3 + \ldots$$

welche auch sowohl für +n als für −n gilt.

$\Delta^0 U_{-n}$	$\Delta^0 U_0$					$\Delta^0 U_{+n}$
	$\Delta^1 U_0$	$\Delta^1 U_1$				
		$\Delta^2 U_1$	$\Delta^2 U_2$			
			$\Delta^3 U_2$	$\Delta^3 U_3$		
				$\Delta^4 U_3$	$\Delta^4 U_4$	

§. 8.

Aus dieser Untersuchung geht hervor, dass U_n durch Reihen gebildet werden kann, welche nach jeder Richtung im Schema hin liegen. Stirling hat folgende Reihe gefunden:

$$
\begin{aligned}
15)\qquad U_n = {} & A_0\Delta^0 U_0 + A_1\Delta^1 U_0 + A_2\Delta^1 U_{-1} \\
& + A_3\Delta^2 U_{-1} + A_4\Delta^3 U_{-1} + A_5\Delta^3 U_{-2} \\
& + A_6\Delta^4 U_{-2} + A_7\Delta^5 U_{-2} + A_8\Delta^5 U_{-3} \\
& + \ldots\ldots\ldots\ldots \\
& + A_{2n}\Delta^{2n} U_{-n}
\end{aligned}
$$

Δ^0U_{-n}				Δ^0U_0	Δ^0U_{+n}
			Δ^1U_{-1}	Δ^1U_0	
			Δ^2U_{-1}		
		Δ^3U_{-2}	Δ^3U_{-1}		
		Δ^4U_{-2}			
	Δ^5U_{-3}	Δ^5U_{-2}			
	Δ^6U_{-3}				

Es bleibt hier dem Leser überlassen, ob er zur Auffindung der Vorzahlen diese oder eine andere Methode wählen, oder ob er noch nach andern Richtungen, welche oben angegeben sind, $U_{\mp n}$ entwickeln will.

§. 9.

Das Zeichen Δ zeigt den Uebergang von einer Horizontalreihe zu der nächstfolgenden Horizontalreihe an; führen wir für den Uebergang von einem Gliede zu dem nächstfolgenden Gliede derselben Horizontalreihe das Zeichen $\square$ ein, so dass

$$\square^1U_0 = U_1\,, \quad \square^2U_0 = U_2\,, \quad \square^3U_0 = U_3\,, \quad . \; . \; . \; .$$

und

$$\square^{-1}U_0 = U_{-1}\,, \quad \square^{-2}U_0 = U_{-2}\,, \quad \square^{-3}U_0 = U_{-3}\,, \quad . \; . \; . \; .$$

so können wir alle gefundenen Wahrheiten durch folgende einfache Gleichungen bemerkbar machen

16) $$\Delta^{\pm n}U = (\square - 1)^{\pm n}U$$

und

17) $$\square^{\pm n}U = (1 + \Delta)^{\pm n}U$$

denn die Gleichungen 1, 2, 4, 5 werden durch das Binomium in gewöhnlicher Form dargestellt, die Gleichungen 7 und 8 entspringen aus dem Binomium

$$\frac{1}{\Box} = 1 - \frac{\Box - 1}{\Box} = 1 - \frac{\Delta}{\Box}$$

oder

18) $$\Box^{+n} U = \left(1 - \frac{\Delta}{\Box}\right)^{-n} U$$

und

19) $$\Box^{-n} U = \left(1 - \frac{\Delta}{\Box}\right)^{+n} U$$

die Gleichungen 9 und 11 sind die Entwicklung des Binomiums in folgender Form:

20) $$\begin{aligned}(1+x)^n = A_0 & + A_1 \,.\, x^1 \\ & + A_2 \left(\frac{x}{1+x}\right)^1 x^1 + A_3 \left(\frac{x}{1+x}\right)^1 x^2 \\ & + A_4 \left(\frac{x}{1+x}\right)^2 x^2 + A_5 \left(\frac{x}{1+x}\right)^2 x^3 \\ & + A_6 \left(\frac{x}{1+x}\right)^3 x^3 + A_7 \left(\frac{x}{1+x}\right)^3 x^4 \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\end{aligned}$$

10 und 12 in folgender

21) $$\begin{aligned}(1+x)^n = A_0 & + A_1 \left(\frac{x}{1+x}\right)^1 \\ & + A_2 \left(\frac{x}{1+x}\right)^1 x^1 + A_3 \left(\frac{x}{1+x}\right)^2 x^1 \\ & + A_4 \left(\frac{x}{1+x}\right)^2 x^2 + A_5 \left(\frac{x}{1+x}\right)^3 x^2 \\ & + A_6 \left(\frac{x}{1+x}\right)^3 x^3 + A_7 \left(\frac{x}{1+x}\right)^4 x^3 \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\end{aligned}$$

und 13 in folgender Form

22) $$\begin{aligned}(1+x)^n = {} & A_0 (1+x)^1 x^0 + A_1 (1+x)^1 x^1 \\ & + A_2 (1+x)^2 x^1 + A_3 (1+x)^2 x^2 \\ & + A_4 (1+x)^3 x^2 + A_5 (1+x)^3 x^3 \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\end{aligned}$$

und von derselben Form ist die Gleichung 3, welche entsteht, wenn in 22 gesetzt wird $n+1$ statt n und durch $1+x$ gemessen wird. Später bei der Theorie der Reihen und bei den wiederholenden Functionen werden wir auf diesen Gegenstand wieder zurückkommen.

Verschieden von diesen Entwickelungen ist jene, welche aus der allgemeinsten Entwickelung des Binomiums *)

$$\begin{aligned}(a+bx)^n = & \frac{n}{n}.a^n \\ & + \frac{n}{n+h}\cdot\frac{n+h}{1}\cdot a^{n+h-1}.b^1.\frac{x^1}{(a+bx)^{1h}} \\ & + \frac{n}{n+2h}\cdot\frac{(n+2h)(n+2h-1)}{1\,.\,2}\cdot a^{n+2h-2}.b^2.\frac{x^2}{(a+bx)^{2h}} \\ & + \frac{n}{n+3h}\cdot\frac{(n+3h)(n+3h-1)(n+3h-2)}{1\,.\,2\,.\,3}\cdot a^{n+3h-3}.b^3.\frac{x^3}{(a+bx)^{3h}} \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\end{aligned}$$

entspringt, wenn $a=b=1$, $x=\Delta$ also $a+bx=1+\Delta=\square$ und

$$\frac{x^p}{(a+bx)^{ph}} = \Delta^p(1+\Delta)^{-ph} = \Delta^p\square^{-ph}U = \Delta^p U_{-ph}$$

gesetzt wird; es ist

$$\begin{aligned}23)\quad \square^n U = U_n = & \frac{n}{n}.U_0 \\ & + \frac{n}{n+h}\cdot\frac{n+h}{1}\cdot\Delta^1 U_{-h} \\ & + \frac{n}{n+2h}\cdot\frac{(n+2h)(n+2h-1)}{1\,.\,2}\cdot\Delta^2 U_{-2h} \\ & + \frac{n}{n+3h}\cdot\frac{(n+3h)(n+3h-1)(n+3h-2)}{1\,.\,2\,.\,3}\cdot\Delta^3 U_{-3h} \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\end{aligned}$$

wo h sowohl bejaht als verneint sein kann.

---

*) Diese Reihe kann aus der Gleichung 48 Analysis Seite 66 hergeleitet werden.

Wird aber $a = -1$, $b = 1$, $x = \square$ also

$$a+bx = -1 + \square = \Delta$$

und

$$\frac{x^p}{(a+bx)^{-ph}} = \square^p (\square - 1)^{+ph} = \square^p \Delta^{+ph} = \Delta^{ph} U_p$$

gesetzt, so wird

$$24) \qquad \Delta^n U_0 = (-)^n \frac{n}{n} . U_0$$

$$+ (-)^{n-h-1} \frac{n}{n-h} . \frac{n-h}{1} . \Delta^{1h} U_1$$

$$+ (-)^{n-2h-2} \frac{n}{n-2h} . \frac{(n-2h)(n-2h-1)}{1 \;.\; 2} . \Delta^{2h} U_2$$

$$+ (-)^{n-3h-3} \frac{n}{n-3h} . \frac{(n-3h)(n-3h-1)(n-3h-2)}{1 \;.\; 2 \;.\; 3} . \Delta^{3h} U_3$$

$$+ \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots$$

Zweite Abtheilung.

UNTERSCHIEDE DER PRODUCTE.

§. 10.

Statt der Reihe

$$\ldots\ldots U_{-3}\,,\quad U_{-2}\,,\quad U_{-1}\,,\quad U_0\,,\quad U_1\,,\quad U_2\,,\quad U_3\,,\ldots\ldots$$

werde die Reihe der Producte

$$\ldots P_{-3}\cdot Q_{-3}\,,\quad P_{-2}\cdot Q_{-2}\,,\quad P_{-1}\cdot Q_{-1}\,,\quad P_0\cdot Q_0\,,\quad P_1\cdot Q_1\,,\quad P_2\cdot Q_2\,,\quad P_3\cdot Q_3\,,\ldots$$

zu Grunde gelegt, und das Schema aller der Reihen, sowohl jener, welche durch Abzählen je zweier auf einander folgenden Glieder entstehen, als auch derjenigen Reihen, aus welchen die vorgegebene Reihe durch Abzählen je zweier auf einander folgenden Glieder entstanden ist, sei folgendes:

$\Delta^{-4}(P_{-3}Q_{-3})$	$\Delta^{-4}(P_{-2}Q_{-2})$	$\Delta^{-4}(P_{-1}Q_{-1})$	$\Delta^{-4}(P_0Q_0)$	$\Delta^{-4}(P_1Q_1)$	$\Delta^{-4}(P_2Q_2)$	$\Delta^{-4}(P_3Q_3)$	$\Delta^{-4}(P_4Q_4)$
$\Delta^{-3}(P_{-3}Q_{-3})$	$\Delta^{-3}(P_{-2}Q_{-2})$	$\Delta^{-3}(P_{-1}Q_{-1})$	$\Delta^{-3}(P_0Q_0)$	$\Delta^{-3}(P_1Q_1)$	$\Delta^{-3}(P_2Q_2)$	$\Delta^{-3}(P_3Q_3)$	$\Delta^{-3}(P_4Q_4)$
$\Delta^{-2}(P_{-3}Q_{-3})$	$\Delta^{-2}(P_{-2}Q_{-2})$	$\Delta^{-2}(P_{-1}Q_{-1})$	$\Delta^{-2}(P_0Q_0)$	$\Delta^{-2}(P_1Q_1)$	$\Delta^{-2}(P_2Q_2)$	$\Delta^{-2}(P_3Q_3)$	$\Delta^{-2}(P_4Q_4)$
$\Delta^{-1}(P_{-3}Q_{-3})$	$\Delta^{-1}(P_{-2}Q_{-2})$	$\Delta^{-1}(P_{-1}Q_{-1})$	$\Delta^{-1}(P_0Q_0)$	$\Delta^{-1}(P_1Q_1)$	$\Delta^{-1}(P_2Q_2)$	$\Delta^{-1}(P_3Q_3)$	$\Delta^{-1}(P_4Q_4)$
$\Delta^0(P_{-3}Q_{-3})$	$\Delta^0(P_{-2}Q_{-2})$	$\Delta^0(P_{-1}Q_{-1})$	$\Delta^0(P_0Q_0)$	$\Delta^0(P_1Q_1)$	$\Delta^0(P_2Q_2)$	$\Delta^0(P_3Q_3)$	$\Delta^0(P_4Q_4)$
$\Delta^1(P_{-3}Q_{-3})$	$\Delta^1(P_{-2}Q_{-2})$	$\Delta^1(P_{-1}Q_{-1})$	$\Delta^1(P_0Q_0)$	$\Delta^1(P_1Q_1)$	$\Delta^1(P_2Q_2)$	$\Delta^1(P_3Q_3)$	$\Delta^1(P_4Q_4)$
$\Delta^2(P_{-3}Q_{-3})$	$\Delta^2(P_{-2}Q_{-2})$	$\Delta^2(P_{-1}Q_{-1})$	$\Delta^2(P_0Q_0)$	$\Delta^2(P_1Q_1)$	$\Delta^2(P_2Q_2)$	$\Delta^2(P_3Q_3)$	$\Delta^2(P_4Q_4)$
$\Delta^3(P_{-3}Q_{-3})$	$\Delta^3(P_{-2}Q_{-2})$	$\Delta^3(P_{-1}Q_{-1})$	$\Delta^3(P_0Q_0)$	$\Delta^3(P_1Q_1)$	$\Delta^3(P_2Q_2)$	$\Delta^3(P_3Q_3)$	$\Delta^3(P_4Q_4)$
$\Delta^4(P_{-3}Q_{-3})$	$\Delta^4(P_{-2}Q_{-2})$	$\Delta^4(P_{-1}Q_{-1})$	$\Delta^4(P_0Q_0)$	$\Delta^4(P_1Q_1)$	$\Delta^4(P_2Q_2)$	$\Delta^4(P_3Q_3)$	$\Delta^4(P_4Q_4)$

Die vorgegebene Reihe mit allen ihren abgeleiteten Reihen kann als ein besonderer Fall von der ersteren U_0, U_1, U_2, . . . angesehen werden, in so fern ihre Glieder die bestimmte Eigenschaft haben, dass sie Producte sind. Sie kann aber auch zugleich als eine viel allgemeinere Reihe betrachtet werden, indem aus ihr die erstere Reihe U, . . . entspringt, wenn einer ihrer Factoren z. B. $\ldots Q_{-2} = Q_{-1} = Q_0 = Q_1 = Q_2 = \ldots = 1$ gesetzt wird.

In ersterer Hinsicht, wo sie als eine besondere Reihe erscheint, unterwirft sie sich auch allen Wahrheiten, welche in der ersten Abtheilung gefunden worden; es ist nämlich nach N 1 und 2

$$25) \quad \Delta^n (P.Q) = P_n \cdot Q_n - \frac{n^{1|-1}}{1^{1|1}} \cdot P_{n-1} \cdot Q_{n-1} + \frac{n^{2|-1}}{1^{2|1}} \cdot P_{n-2} \cdot Q_{n-2} - \ldots$$

und

$$26) \quad \Delta^{-n} (P.Q) = P_{-n} \cdot Q_{-n} - \frac{(-n)^{1|-1}}{1^{1|1}} \cdot P_{-n-1} \cdot Q_{-n-1} + \frac{(-n)^{2|-1}}{1^{2|1}} \cdot P_{-n-2} \cdot Q_{-n-2} - \ldots + \ldots$$

so wie auch nach 4 und 5

$$27) \quad P_n \cdot Q_n = \Delta^0 (P_0 \cdot Q_0) + \frac{n^{1|-1}}{1^{1|1}} \cdot \Delta^1 (P_0 \cdot Q_0) + \frac{n^{2|-1}}{1^{2|1}} \cdot \Delta^2 (P_0 \cdot Q_0) + \ldots .$$

und nach N 7

$$28) \quad P_n \cdot Q_n = \Delta^0 (P_0 \cdot Q_0) - \frac{(-n)^{1|-1}}{1^{1|1}} \cdot \Delta^1 (P_{-1} \cdot Q_{-1}) + \frac{(-n)^{2|-1}}{1^{2|1}} \cdot \Delta^2 (P_{-2} \cdot Q_{-2}) - . + .$$

sowohl für das $+n$ als $-n$; und so auch nach den übrigen Reihen . . . .

In allen diesen Wahrheiten kommen P und Q immer vereint mit denselben Stellenzahlen vor; der Zweck dieser Untersuchung ist, sowohl $\Delta^n(P.Q)$ als auch $P_n . Q_n$ aus Gliedern zu bilden, welche in den beiden Schemas α und β nach verschiedenen Richtungen liegen.

α)

			$\Delta^{-2}P_0$			
			$\Delta^{-1}P_0$			
. .	$\Delta^0 P_{-2}$	$\Delta^0 P_{-1}$	$\Delta^0 P_0$	$\Delta^0 P_1$	$\Delta^0 P_2$	. .
			$\Delta^1 P_0$			
			$\Delta^2 P_0$			

β)

			$\Delta^{-2}Q_0$			
			$\Delta^{-1}Q_0$			
. .	$\Delta^0 Q_{-2}$	$\Delta^0 Q_{-1}$	$\Delta^0 Q_0$	$\Delta^0 Q_1$	$\Delta^0 Q_2$	. .
			$\Delta^1 Q_0$			
			$\Delta^2 Q_0$			

§. 11.

Zuerst werde in der Gleichung

$$\Delta^n(P_0 \cdot Q_0) = \Sigma_s (-)^s \frac{n^{s|-1}}{1^{s|1}} \cdot P_{n-s} \cdot Q_{n-s}\,, \quad \text{wo } s = 0\,,\ 1\,,\ 2\,,\ \ldots\ldots$$

statt P_{n-s} die Reihe

$$P_{n-s} = \Sigma_h \frac{(n-s)^{h|-1}}{1^{h|1}} \cdot \Delta^h P_0\,, \quad \text{wo } h = 0\,,\ 1\,,\ 2\,,\ \ldots\ldots$$

eingeführt; dadurch entsteht die Reihe

$$\Delta^n(P_0 . Q_0) = \Sigma_s \Sigma_h (-)^s \frac{n^{s|-1}}{1^{s|1}} . \frac{(n-s)^{h|-1}}{1^{h|1}} . \Delta^h P_0 . Q_{n-s}$$

oder, weil

$$\frac{n^{s|-1}}{1^{s|1}} . \frac{(n-s)^{h|-1}}{1^{h|1}} = \frac{n^{h|-1}}{1^{h|1}} . \frac{(n-h)^{s|-1}}{1^{s|1}}$$

die Reihe

$$\Delta^n(P_0 . Q_0) = \Sigma_h \left(\frac{n^{h|-1}}{1^{h|1}} . \Delta^h P_0 . \Sigma_s \left((-)^s \frac{(n-h)^{s|-1}}{1^{s|1}} . Q_{n-s} \right) \right)$$

Wird zuletzt nach N 1

$$\Sigma_s (-)^s \frac{(n-h)^{s|-1}}{1^{s|1}} . Q_{n-s} = \Delta^{n-h} Q_{+h}$$

gesetzt, so wird

$$\Delta^n(P_0 . Q_0) = \Sigma_h \frac{n^{h|-1}}{1^{h|1}} . \Delta^h P_0 . \Delta^{n-h} Q_h$$

oder

29) $$\Delta^n(P_0 . Q_0) = \frac{n^{0|-1}}{1^{0|1}} . \Delta^0 P_0 . \Delta^n Q_0 + \frac{n^{1|-1}}{1^{1|1}} . \Delta^1 P_0 . \Delta^{n-1} Q_1 + \frac{n^{2|-1}}{1^{2|1}} . \Delta^2 P_0 . \Delta^{n-2} Q_2 + \ldots .$$

Diese Reihe gilt nicht allein für das bejahte sondern auch für das verneinte n, denn die Reihe N 1, welche hier zu Grunde gelegt ist, ist ganz allgemein.

§. 12.

Dieselbe Reihe lässt sich auch durch ein ganz anderes Verfahren aufsuchen. Es ist nämlich

$$\Delta(P_0 . Q_0) = P_1 . Q_1 - P_0 . Q_0$$

und, wenn $P_0 . Q_1$ ab- und zugezählt wird

$$\Delta(P ._0 Q_0) = P_1 . Q_1 - P_0 . Q_1 + P_0 . Q_1 - P_0 . Q_0$$

oder

30) $$\Delta(P_0 . Q_0) = P_0 . \Delta^1 Q_0 + \Delta^1 P_0 . Q_1$$

Diese Gleichung enthält das Gesetz, nach welchem die Entwicklung von $\Delta^n(P_0 . Q_0)$ verfolgt werden soll.

Wird von dieser Gleichung der Unterschied genommen

$$\Delta^2(P_0 . Q_0) = \Delta(P_0 . \Delta^1 Q_0 + \Delta P_0 . Q_1) = \Delta(P_0 . \Delta^1 Q_0) + \Delta(\Delta P_0 . Q_1)$$

so müssen die Unterschiede dieser Producte nach der eben erwähnten Vorschrift 30 gebildet werden;

$$\begin{array}{lll} \Delta(P_0 . \Delta^1 Q_0) = & P_0 . \Delta^2 Q_0 + \Delta^1 P_0 . \Delta^1 Q_1 & \\ \Delta(\Delta P_0 . Q_1) = & \qquad\qquad\quad \Delta^1 P_0 . \Delta^1 Q_1 & + \Delta^2 P_0 . Q_2 \end{array}$$

wodurch folgende Gleichung entsteht:

$$\Delta^2(P_0 . Q_0) = \Delta^0 P_0 . \Delta^2 Q_0 + 2 . \Delta^1 P_0 . \Delta^1 Q_1 + \Delta^2 P_0 . \Delta^0 Q_2$$

Der Uebergang von der vorhergehenden zur nachfolgenden Gleichung bleibt unverändert; ist

$$\Delta^{n-1}(P_0 . Q_0) = \Delta^0 P_0 . \Delta^{n-1} Q_0 + \frac{(n-1)^{1|-1}}{1^{1|1}} \Delta^1 P_0 . \Delta^{n-2} Q_1 + \frac{(n-1)^{2|-1}}{1^{2|1}} \Delta^2 P_0 . \Delta^{n-3} Q_2 + \ldots$$

gewonnen, so entsteht dadurch, wenn jedem Producte Δ vorgesetzt, und nach der Vorschrift 30

$$\Delta(\Delta^p P_0 . \Delta^{n-p-1} Q_p) = \Delta^p P_0 . \Delta^{n-p} Q_p + \Delta^{p+1} P_0 . \Delta^{n-p-1} Q_{p+1}$$

eingeführt wird, die nächstfolgende Reihe

$$\Delta^n(P_0 . Q_0) = \Delta^0 P_0 . \Delta^n Q_0 \begin{array}{l|} + \frac{(n-1)^{0|-1}}{1^{0|1}} \\ + \frac{(n-1)^{1|-1}}{1^{1|1}} \end{array} \; \Delta^1 P_0 . \Delta^{n-1} Q_1 \begin{array}{l|} + \frac{(n-1)^{1|-1}}{1^{1|1}} \\ + \frac{(n-1)^{2|-1}}{1^{2|1}} \end{array} \; \Delta^2 P_0 . \Delta^{n-2} Q_2 + \ldots$$

oder da

$$\frac{(n-1)^{m-1|-1}}{1^{m-1|1}} + \frac{(n-1)^{m|-1}}{1^{m|1}} = \frac{n^{m|-1}}{1^{m|1}}$$

die Reihe

31) $$\Delta^n(P_0 . Q_0) = \Delta^0 P_0 . \Delta^n Q_0 + \frac{n^{1|-1}}{1^{1|1}} . \Delta^1 P_0 . \Delta^{n-1} Q_1 + \ldots\ldots$$

Dass diese Reihe auch für das verneinte n gilt, kann auf folgende Weise dargethan werden: In der Gleichung 30, aus welcher die vorstehende Reihe entsprungen ist, werde jedem Producte Δ^{-1} vorgesetzt; es wird, da $\Delta^1 \Delta^{-1} = \Delta^0$ ist,

$$P_0 . Q_0 = \Delta^{-1}(P_0 . \Delta^1 Q_0) + \Delta^{-1}(\Delta^1 P_0 . Q_1)$$

oder wenn $\Delta^{-1}Q$ statt Q gesetzt wird,

32) $$\Delta^{-1}(P_0 . Q_0) = P_0 . \Delta^{-1} Q_0 - \Delta^{-1}(\Delta^1 P_0 . \Delta^{-1} Q_1)$$

Nach dem Gesetze, welches diese Gleichung ausspricht, lassen sich nun mehrere Gleichungen bilden:

$$\begin{aligned}
\Delta^{-1}(P_0 . Q_0) &= P_0 . \Delta^{-1} Q_0 - \Delta^{-1}(\Delta^1 P_0 . \Delta^{-1} Q_1) \\
-\Delta^{-1}(\Delta^1 P_0 . \Delta^{-1} Q_1) &= -\Delta^1 P_0 . \Delta^{-2} Q_1 + \Delta^{-1}(\Delta^2 P_0 . \Delta^{-2} Q_2) \\
+\Delta^{-1}(\Delta^2 P_0 . \Delta^{-2} Q_2) &= \Delta^2 P_0 . \Delta^{-3} Q_2 - \Delta^{-1}(\Delta^3 P_0 . \Delta^{-3} Q_3) \\
-\Delta^{-1}(\Delta^3 P_0 . \Delta^{-3} Q_3) &= -\Delta^3 P_0 . \Delta^{-4} Q_3 + \Delta^{-1}(\Delta^4 P_0 . \Delta^{-4} Q_4) \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

welche durch Zuzählen folgende Reihe erzeugen:

$$\Delta^{-1}(P_0 . Q_0) = P_0 . \Delta^{-1} Q_0 - \Delta^1 P_0 . \Delta^{-2} Q_1 + \Delta^2 P_0 . \Delta^{-3} Q_2 - \Delta^3 P_0 . \Delta^{-4} Q_3 + ..-...$$

Der Uebergang von Δ^{-1} zu Δ^{-2} besteht darin, dass jedem Producte Δ^{-1} vorgesetzt, und jedes Product nach demselben Gesetze, welches in dieser Gleichung liegt, in eine Reihe entwickelt wird, nämlich

$$\begin{aligned}
\Delta^{-2}(P_0 . Q_0) = P_0 . \Delta^{-2} Q_0 &- \Delta^1 P_0 . \Delta^{-3} Q_1 + \Delta^2 P_0 . \Delta^{-4} Q_2 - \ldots\ldots \\
&- \Delta^1 P_0 . \Delta^{-3} Q_1 + \Delta^2 P_0 . \Delta^{-4} Q_2 - \ldots\ldots \\
&\qquad\qquad\qquad\quad + \Delta^2 P_0 . \Delta^{-4} Q_2 - \ldots\ldots \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad - \ldots\ldots \\
= P_0 . \Delta^{-2} Q_0 &- 2 . \Delta^1 P_0 . \Delta^{-3} Q_1 + 3 . \Delta^2 P_0 . \Delta^{-4} Q_2 - \ldots\ldots
\end{aligned}$$

Das Verfahren bleibt unverändert, und führt zuletzt zu der allgemeinen Gleichung

$$33)\quad \Delta^{-n}(P_0.Q_0) = \Delta^0 P_0.\Delta^{-n}Q_0 + \frac{(-n)^{1|-1}}{1^{1|1}}\Delta^1 P_0.\Delta^{-n-1}Q_1 + \frac{(-n)^{2|-1}}{1^{2|1}}\Delta^2 P_0.\Delta^{-n-2}Q_2 + \ldots$$

welche auch in der obigen N 29, die auf einem andern Wege gefunden worden, enthalten ist.

Diese Reihe gibt zuerst Taylor; den speciellen Fall, wenn $n = 1$ ist, gibt, nur in anderer Form, Condorcet in seinem *Essai sur l'Application de l'Analyse à la probabilité des décisions p.* 163.

§. 13.

Die Gleichung 32 ist noch einer andern Umformung fähig: wenn nämlich $\Delta^{-1}P_0$ statt P und $\Delta^1 Q_{-1}$ statt Q gesetzt wird, so geht die Gleichung 32 über in

$$34)\qquad \Delta^{-1}(P_0 . Q_0) = \Delta^{-1}P_0 . Q_{-1} - \Delta^{-1}(\Delta^{-1}P_0 . \Delta^1 Q_{-1})$$

Nach dieser Gleichung können mehrere gebildet werden:

$$\begin{aligned}
\Delta^{-1}(P_0 . Q_0) &= \Delta^{-1}P_0 . Q_{-1} - \Delta^{-1}(\Delta^{-1}P_0 . \Delta^1 Q_{-1}) \\
-\Delta^{-1}(\Delta^{-1}P_0 . \Delta^1 Q_{-1}) &= -\Delta^{-2}P_0 . \Delta^1 Q_{-2} + \Delta^{-1}(\Delta^{-2}P_0 . \Delta^2 Q_{-2}) \\
+\Delta^{-1}(\Delta^{-2}P_0 . \Delta^2 Q_{-2}) &= +\Delta^{-3}P_0 . \Delta^2 P_{-3} - \Delta^{-1}(\Delta^{-3}P_0 . \Delta^3 Q_{-3}) \\
-\Delta^{-1}(\Delta^{-3}P_0 . \Delta^3 Q_{-3}) &= -\Delta^{-4}P_0 . \Delta^3 Q_{-4} + \Delta^{-1}(\Delta^{-4}P_0 . \Delta^4 Q_{-4}) \\
+\ldots\ldots &= +\ldots\ldots - \ldots\ldots
\end{aligned}$$

welche durch Zuzählen zu folgender Reihe führen:

$$\Delta^{-1}(P_0 . Q_0) = \Delta^{-1}P_0 . Q_{-1} - \Delta^{-2}P_0.\Delta^1 Q_{-2} + \Delta^{-3}P_0.\Delta^2 Q_{-3} - \Delta^{-4}P_0.\Delta^3 Q_{-4} + \ldots - \ldots$$

Auf gleiche Weise wie im vorigen §. wird diese Wahrheit zu einer grösseren Allgemeinheit erhoben; die Reihe, die entsteht, ist

$$35)\ \Delta^{-n}(P_0 . Q_0) = \Delta^{-n} P_0 . Q_{-n} + \frac{(-n)^{1|-1}}{1^{1|1}} . \Delta^{-n-1} P_0 . \Delta^1 Q_{-n-1} + \frac{(-n)^{2|-1}}{1^{2|1}} . \Delta^{-n-2} P_0 . \Delta^2 Q_{-n-2} + \ldots$$

welche auch schon in der allgemeinen Gleichung 31 enthalten ist; denn sie entsteht, wenn in jener das letzte Glied zu dem ersten gemacht und $-n$ statt n gesetzt wird.

§. 14.

Die sämmtlichen hier gefundenen Wahrheiten entspringen aus dem Binomium, und es ist, wenn sich $\Box_p, \Delta_p$ auf den Factor P, und $\Box_q, \Delta_q$ auf Q beziehen, nach N 25 und 26

$$36)\qquad \Delta^n (P . Q) = (\Box_p \Box_q - 1)^n PQ$$

und nach 27 und 28

$$37)\qquad \Box^n (P . Q) = (1 + \Delta_{p,q})^n PQ$$

und da

$$\Delta_{p,q} = \Box_p \Box_q - 1 = (1 + \Delta_p)(1 + \Delta_q) - 1 = \Delta_p \Delta_q + \Delta_p + \Delta_q = \Delta_p (\Delta_q + 1) + \Delta_q = \Delta_p \Box_q + \Delta_q$$

so ist

$$38)\qquad \Delta^n (P . Q) = (\Delta_p \Box_q + \Delta_q)^n PQ$$

welches auch mit den Reihen 29, 31, 33, 35 übereinstimmt.

§. 15.

Ausser diesen allgemeinen Reihen, welche für jedes n gelten, lassen sich für ein bestimmtes n und zwar für $n = -1$ besondere Reihen entwickeln. Das Verfahren ist ganz eigenthümlicher Art, und besteht in Folgendem. Es sei

$$\Delta^{-1}(P_0 . Q_0) = P_0 . A$$

gleich einem Producte, wovon ein Factor P_0 angenommen und der andere Factor A gesucht wird. Wird Δ^{-1} durch Δ^1 aufgehoben, so ist nach 30

$$P.Q = \Delta(A.P) = A.\Delta P + \Delta A.P_1$$

Es wird

$$A = \frac{P.Q}{\Delta P} + B$$

angenommen, und B bestimmt durch die Gleichung

$$0 = B.\Delta P + P_1.\Delta\left(\frac{P.Q}{\Delta P}\right) + P_1.\Delta B$$

Es wird

$$B = -\frac{P_1}{\Delta P}.\Delta\left(\frac{P.Q}{\Delta P}\right) + C$$

angenommen, und C bestimmt durch die Gleichung

$$0 = C.\Delta P - P_1.\Delta\left(\frac{P_1}{\Delta P}.\Delta\left(\frac{P.Q}{\Delta P}\right)\right) + P_1.\Delta C$$

Ferner wird

$$C = \frac{P_1}{\Delta P}.\Delta\left(\frac{P_1}{\Delta P}.\Delta\left(\frac{P.Q}{\Delta P}\right)\right) + D$$

angenommen, und D bestimmt durch die Gleichung

$$0 = D.\Delta P + P_1.\Delta\left(\frac{P_1}{\Delta P}.\Delta\left(\frac{P_1}{\Delta P}.\Delta\left(\frac{P.Q}{\Delta P}\right)\right)\right) + P_1.\Delta D$$

Wird wieder

$$D = -\frac{P_1}{\Delta P}.\Delta\left(\frac{P_1}{\Delta P}.\Delta\left(\frac{P_1}{\Delta P}.\Delta\left(\frac{P.Q}{\Delta P}\right)\right)\right) + E$$

angenommen, so ist E durch eine neue Gleichung zu bestimmen. Die Gleichungen, durch welche A, B, C, D, E, ... bestimmt werden, befolgen ein gemeinsames Gesetz, und erzeugen folgende Reihe:

$$39)\quad \Delta^{-1}(P.Q) = P.\left(\frac{P.Q}{\Delta P} - \frac{P_1}{\Delta P}.\Delta\left(\frac{P.Q}{\Delta P}\right) + \frac{P_1}{\Delta P}.\Delta\left(\frac{P_1}{\Delta P}.\Delta\left(\frac{P.Q}{\Delta P}\right)\right) - \frac{P_1}{\Delta P}.\Delta\left(\frac{P_1}{\Delta P}.\Delta\left(\frac{P_1}{\Delta P}.\Delta\left(\frac{P.Q}{\Delta P}\right)\right)\right) + \ldots\ldots\ldots - \ldots\ldots\ldots \right)$$

Diese Reihe würde Euler (Differentialrechnung 2r Th. 7s Cap. §. 190 — 196, Uebersetzung Seite 223 — 229) durch sein Verfahren erhalten haben, wenn er die Idee der Annäherung nicht zu Grunde gelegt hätte. Die folgenden Reihen erscheinen hier zuerst.

§. 16.

Die Gestalt der Reihe hängt von der Gestalt der Gleichung ab, welche unmittelbar aus der Grundgleichung

$$\Delta^{-1}(P.Q) = P.A$$

hergeleitet wird. Wird, nachdem Δ^{-1} durch Δ^{1} aufgehoben ist, der Gleichung folgende Gestalt gegeben

$$P.Q = \Delta(P.A) = P.\Delta A + \Delta P.A_1$$

so wird auch, obgleich das Verfahren der Herleitung dasselbe bleibt, die daraus entspringende Reihe eine andere Gestalt gewinnen. Wird

$$A_1 = \frac{P.Q}{\Delta P} + B$$

also

$$A = \frac{P_{-1} . Q_{-1}}{\Delta P_{-1}} + B_{-1}$$

angenommen, so wird B bestimmt durch die Gleichung

$$0 = P . \Delta B_{-1} + P . \Delta\left(\frac{P_{-1} . Q_{-1}}{\Delta P_{-1}}\right) + \Delta P . B$$

und wird

$$B = -\frac{P}{\Delta P} . \Delta\left(\frac{P_{-1} . Q_{-1}}{\Delta P_{-1}}\right) + C$$

also

$$B_{-1} = -\frac{P_{-1}}{\Delta P_{-1}} . \Delta\left(\frac{P_{-2} . Q_{-2}}{\Delta P_{-2}}\right) + C_{-1}$$

angenommen, so wird C bestimmt durch die Gleichung

$$0 = P . \Delta C_{-1} - P . \Delta\left(\frac{P_{-1}}{\Delta P_{-1}} . \Delta\left(\frac{P_{-2} . Q_{-2}}{\Delta P_{-2}}\right)\right) + \Delta P . C$$

Wird ferner

$$C = + \frac{P}{\Delta P} . \Delta\left(\frac{P_{-1}}{\Delta P_{-1}} . \Delta\left(\frac{P_{-2} . Q_{-2}}{\Delta P_{-2}}\right)\right) + D$$

also

$$C_{-1} = + \frac{P_{-1}}{\Delta P_{-1}} . \Delta\left(\frac{P_{-2}}{\Delta P_{-2}} . \Delta\left(\frac{P_{-3} . Q_{-3}}{\Delta P_{-3}}\right)\right) + D_{-1}$$

gesetzt, so wird D wieder durch eine Gleichung bestimmt, welche dieselbe Gestalt hat, als die vorigen für B und C. Der Uebergang vom vorhergehenden zum folgenden befolgt ein unveränderliches Gesetz, woraus folgende Reihe hervorgeht:

$$
\begin{aligned}
40)\quad \Delta^{-1}(P.Q) = P.\Bigg(& \frac{P_{-1}.Q_{-1}}{\Delta P_{-1}} \\
& - \frac{P_{-1}}{\Delta P_{-1}}.\Delta\left(\frac{P_{-2}.Q_{-2}}{\Delta P_{-2}}\right) \\
& + \frac{P_{-1}}{\Delta P_{-1}}.\Delta\left(\frac{P_{-2}}{\Delta P_{-2}}.\Delta\left(\frac{P_{-3}.Q_{-3}}{\Delta P_{-3}}\right)\right) \\
& - \frac{P_{-1}}{\Delta P_{-1}}.\Delta\left(\frac{P_{-2}}{\Delta P_{-2}}.\Delta\left(\frac{P_{-3}}{\Delta P_{-3}}.\Delta\left(\frac{P_{-4}.Q_{-4}}{\Delta P_{-4}}\right)\right)\right) \\
& + \;.\;.\;.\;.\;-\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; \Bigg)
\end{aligned}
$$

§. 17.

Diese beiden Reihen sind aus der Gleichung

$$\Delta^{-1}(P.Q) = P.A$$

entsprungen. Wird statt dieser die Gleichung

$$\Delta^{-1}(P.Q) = \Delta^{-1}P.A$$

zu Grunde gelegt, so ergeben sich durch ein gleiches Verfahren zwei andere Reihen.

Durch das Aufheben des Δ^{-1} vermittelst Δ^{1} entsteht die Gleichung

$$P.Q = \Delta(\Delta^{-1}P.A) = A.P + \Delta A.\Delta^{-1}P_1$$

Wird

$$A = Q + B$$

angenommen, so wird B bestimmt durch die Gleichung

$$0 = B.P + \Delta Q.\Delta^{-1}P_1 + \Delta B.\Delta^{-1}P_1$$

Die Annahme von

$$B = -\frac{\Delta^{-1}P_1}{P}.\Delta Q + C$$

zieht die Gleichung

$$0 = C.P - \Delta^{-1}P_1 . \Delta\left(\frac{\Delta^{-1}P_1}{P} . \Delta Q\right) + \Delta C . \Delta^{-1}P_1$$

nach sich; die Annahme von

$$C = + \frac{\Delta^{-1}P_1}{P} . \Delta\left(\frac{\Delta^{-1}P_1}{P} . \Delta Q\right) + D$$

die Gleichung

$$0 = D.P + \Delta^{-1}P_1 . \Delta\left(\frac{\Delta^{-1}P_1}{P} . \Delta\left(\frac{\Delta^{-1}P_1}{P} . \Delta Q\right)\right) + \Delta D . \Delta^{-1}P_1$$

und die Annahme von

$$D = - \frac{\Delta^{-1}P_1}{P} . \Delta\left(\frac{\Delta^{-1}P_1}{P} . \Delta\left(\frac{\Delta^{-1}P_1}{P} . \Delta Q\right)\right) + E$$

eine ähnliche Gleichung nach sich. Die Rechnung behält den einmal angenommenen Charakter, und die Reihe, welche sie erzeugt, ist

$$41)\quad \Delta^{-1}(P.Q) = \Delta^{-1}P . \left(\begin{aligned} & + Q \\ & - \frac{\Delta^{-1}P_1}{P} . \Delta Q \\ & + \frac{\Delta^{-1}P_1}{P} . \Delta\left(\frac{\Delta^{-1}P_1}{P} . \Delta Q\right) \\ & - \frac{\Delta^{-1}P_1}{P} . \Delta\left(\frac{\Delta^{-1}P_1}{P} . \Delta\left(\frac{\Delta^{-1}P_1}{P} . \Delta Q\right)\right) \\ & + \frac{\Delta\text{-}{}^{1}P_1}{P} . \Delta\left(\frac{\Delta^{-1}P_1}{P} . \Delta\left(\frac{\Delta^{-1}P_1}{P} . \Delta\left(\frac{\Delta^{-1}P_1}{P} . \Delta Q\right)\right)\right) \\ & - \,.\;.\;.\;.\;.\; + \,.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;. \end{aligned} \right)$$

§. 18.

Eine zweite Reihe entsteht, wenn der ersten Gleichung eine andere Gestalt gegeben wird; denn wird

$$P.Q = \Delta(\Delta^{-1}P.A) = \Delta^{-1}P.\Delta A + P.A_1$$

gesetzt, so entsteht durch die Annahme von

$$A_1 = Q + B$$

oder

$$A = Q_{-1} + B_{-1}$$

die Gleichung

$$0 = B.P + \Delta^{-1}P.\Delta Q_{-1} + \Delta^{-1}P.\Delta B_{-1}$$

durch die Annahme von

$$B = -\frac{\Delta^{-1}P}{P}.\Delta Q_{-1} + C$$

oder

$$B_{-1} = -\frac{\Delta^{-1}P_{-1}}{P_{-1}}.\Delta Q_{-2} + C_{-1}$$

die Gleichung

$$0 = C.P - \Delta^{-1}P.\Delta\left(\frac{\Delta^{-1}P_{-1}}{P_{-1}}.\Delta Q_{-2}\right) + \Delta^{-1}P.\Delta C_{-1}$$

und durch die Annahme von

$$C = \frac{\Delta^{-1}P}{P}.\Delta\left(\frac{\Delta^{-1}P_{-1}}{P_{-1}}.\Delta Q_{-2}\right) + D$$

oder

$$C_{-1} = \frac{\Delta^{-1}P_{-1}}{P_{-1}}.\Delta\left(\frac{\Delta^{-1}P_{-2}}{P_{-2}}.\Delta Q_{-3}\right) + D_{-1}$$

die Gleichung

$$0 = D.P + \Delta^{-1}P.\Delta\left(\frac{\Delta^{-1}P_{-1}}{P_{-1}}.\Delta\left(\frac{\Delta^{-1}P_{-2}}{P_{-2}}.\Delta Q_{-3}\right)\right) + \Delta^{-1}P.\Delta D_{-1}$$

u. s. w. Die Reihe, welche hiedurch erzeugt wird, ist

$$42)\quad \Delta^{-2}(P.Q) = \Delta^{-1}P.\Bigg(+Q_{-1} \\ - \frac{\Delta^{-1}P_{-1}}{P_{-1}}.\Delta Q_{-2} \\ + \frac{\Delta^{-1}P_{-1}}{P_{-1}}.\Delta\left(\frac{\Delta^{-1}P_{-2}}{P_{-2}}.\Delta Q_{-3}\right) \\ - \frac{\Delta^{-1}P_{-1}}{P_{-1}}.\Delta\left(\frac{\Delta^{-1}P_{-2}}{P_{-2}}.\Delta\left(\frac{\Delta^{-1}P_{-3}}{P_{-3}}.\Delta Q_{-4}\right)\right) \\ + \;.\;.\;.\;-\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;\Bigg)$$

§. 19.

Andere Reihen entstehen, wenn

$$\Delta A = \frac{PQ}{P_1} + B \text{ in §. 15}$$

$$\Delta A = Q + B \text{ in §. 16}$$

$$\Delta A = \frac{PQ}{\Delta^{-1}P_1} + B \text{ in §. 17 und}$$

$$\Delta A = \frac{PQ}{\Delta^{-1}P} + B \text{ in §. 18}$$

gesetzt werden.

§. 20.

In besonderen Fällen erhalten diese Reihen eine einfachere Gestalt; ist z. B.

$$\ldots\; Q_{-2} = Q_{-1} = Q_0 = Q_1 = Q_2 = \;.\;.\;.\;.\; = 1$$

so wird aus N. 39

$$43)\quad \Delta^{-} P = P.\left(\begin{aligned} & \frac{P}{\Delta P} \\ & - \frac{P_1}{\Delta P} . \Delta \left(\frac{P}{\Delta P} \right) \\ & + \frac{P_1}{\Delta P} . \Delta \left(\frac{P_1}{\Delta P} . \Delta \left(\frac{P}{\Delta P} \right) \right) \\ & - \frac{P_1}{\Delta P} . \Delta \left(\frac{P_1}{\Delta P} . \Delta \left(\frac{P_1}{\Delta P} . \Delta \left(\frac{P}{\Delta P} \right) \right) \right) \\ & + \ldots - \ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right)$$

und aus N. 40

$$44)\quad \Delta^{-1} P = P.\left(\begin{aligned} & \frac{P_{-1}}{\Delta P_{-1}} \\ & - \frac{P_{-1}}{\Delta P_{-1}} . \Delta \left(\frac{P_{-2}}{\Delta P_{-2}} \right) \\ & + \frac{P_{-1}}{\Delta P_{-1}} . \Delta \left(\frac{P_{-2}}{\Delta P_{-2}} . \Delta \left(\frac{P_{-3}}{\Delta P} \right) \right) \\ & - \ldots + \ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right)$$

Dritte Abtheilung.

UNTERSCHIEDE AUF GLEICHE WEISE GEBILDETER FUNCTIONEN.

Zerlegen der Unterschiede in Factoren überhaupt.

§. 21.

Die Untersuchung, welche in den beiden ersten Abtheilungen in der grössten Allgemeinheit erhalten wurde, gehe jetzt über zu Functionen, die auf gleiche Weise gebildet sind, und sich nur durch verschiedene Grundgrössen unterscheiden. Diese sind, wie bekannt, die Grundlage der Differentialrechnung; aber bevor wir zu dieser merkwürdigen Rechnung übergehen, wollen wir diese Functionen einer Untersuchung unterwerfen, welche bisher die Mathematiker ganz übergangen haben.

Der Gegenstand der Untersuchung ist die Reihe

$$\ldots f(x-3h),\ f(x-2h),\ f(x-h),\ fx,\ f(x+h),\ f(x+2h),\ f(x+3h),\ \ldots$$

oder, wenn die Zunahme der Grundgrösse durch Δx bezeichnet wird

$$\ldots f(x-2\Delta x),\ f(x-1\Delta x),\ fx,\ f(x+\Delta x),\ f(x+2\Delta x),\ \ldots$$

Die Untersuchung bleibt nicht bei dem einzelnen Falle stehen, wo die Function nur aus einer Grundgrösse gebildet wird; sie dehnt sich auf Functionen von mehreren Grundgrössen aus, als

$$\ldots f(x_1-2\Delta x_1, x_2-2\Delta x_2),\; f(x_1-\Delta x_1, x_2-\Delta x_2),\; f(x_1, x_2),\; f(x_1+\Delta x_1, x_2+\Delta x_2), \ldots$$

und

$$\ldots f(x_1-\Delta x_1, x_2-\Delta x_2, x_3-\Delta x_3),\; f(x_1, x_2, x_3),\; f(x_1+\Delta x_1, x_2+\Delta x_2, x_3+\Delta x_3), \ldots$$

u. s. w.

Wird die Zunahme der Grundgrösse durch $\Box$ angekündigt, so ist die Bezeichnung der Glieder der Hauptreihe folgende:

$$\ldots\; \Box^{-3} fx,\quad \Box^{-2} fx,\quad \Box^{-1} fx,\quad \Box^{0} fx,\quad \Box^{1} fx,\quad \Box^{2} fx,\quad \Box^{3} fx,\; \ldots$$

und sind in der Function mehrere Grundgrössen,

$$\ldots \Box^{-2}_{x1} \Box^{-2}_{x2} f(x_1, x_2),\; \Box^{-1}_{x1} \Box^{-1}_{x2} f(x_1, x_2),\; f(x_1, x_2),\; \Box^{1}_{x1} \Box^{1}_{x2} f(x_1, x_2),\; \Box^{2}_{x1} \Box^{2}_{x2} f(x_1, x_2), \ldots$$

oder auch

$$\ldots \Box^{-4}_{x1.x2} f(x_1, x_2),\; \Box^{-2}_{x1\;x2} f(x_1, x_2),\; f(x_1, x_2),\; \Box^{2}_{x1,x2} f(x_1, x_2),\; \Box^{4}_{x1,x2} f(x_1, x_2), \ldots$$

und so auch, wenn mehrere Grundgrössen vorhanden sind.

§. 22.

Der Unterschied $f(x+h) - fx$ lässt sich immer in zwei Factoren zerlegen, wovon der eine Factor h die Zunahme von der Grundgrösse x, und der andere Factor eine Function von x und h ist, so dass

$$45)\quad \Delta fx = \frac{f(x+h) - fx}{h} . h \text{ oder } = \frac{f(x+\Delta x) - fx}{\Delta x} . \Delta x \text{ oder } = \frac{\Delta fx}{\Delta x} . \Delta x$$

Diese Behauptung bewährt sich bei allen einfachen Functionen, deren Begriffe die Analysis entwickelt hat, und auch bei allen Functionen ,welche aus diesen einfachen Functionen zusammen gesetzt sind.

Diese Wahrheit ist die Grundlage dieser Untersuchung über Unterschiede und der spätern über Differentiale, oder vielmehr die ganze

Untersuchung besteht in einem stäten Zerlegen der Unterschiede in zwei Factoren, wovon immer ein Factor die Zunahme der Grundgrösse ist.

Bei einer Grundgrösse und bei einer einfachen Function ist dieses Zerlegen des Unterschiedes in Factoren keinen Schwierigkeiten unterworfen. Kommen aber mehrere Grundgrössen, sogar doppelte, drei und mehrfache Functionen, oder Functionen von Functionen vor, so sind bei diesem Zerlegen in Factoren gewisse Gesetze zu befolgen. Unsere Aufgabe besteht jetzt darin:

α) dass wir die Gesetze oder Vorschriften aufsuchen, welche angeben, wie ein oder wie mehrere Geschäfte auszuführen sind,

β) dass wir untersuchen, ob vorgeschriebene Geschäfte in einer andern Ordnung vorgenommen, und

γ) ob sie sogar durch andere Geschäfte ersetzt werden können.

§. 23.

Wenn die Function zwei oder mehrere Grundgrössen x, y, . . . enthält, und wenn von ihr zuerst der Unterschied in Hinsicht x und dann in Hinsicht y genommen werden soll, so sind die Geschäfte und die Zeichen folgende.

Der Unterschied in Hinsicht x ist

$$f(x+\Delta x,\ y) - f(x,\ y)$$

wird hierin der Factor Δx gesondert,

$$\frac{f(x+\Delta x,\ y) - f(x,\ y)}{\Delta x} \,.\, \Delta x$$

so muss, wenn in diesem y um Δy wächst, Vorstehendes abgezählt, und der Factor Δy gesondert werden

$$\frac{\frac{f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x, y+\Delta y)}{\Delta x} \,.\, \Delta x - \frac{f(x+\Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x} \,.\, \Delta x}{\Delta y} \,.\, \Delta y = P$$

oder in Zeichen

$$\frac{\Delta_y\left(\frac{\Delta_x f(x, y)}{\Delta x} \cdot \Delta x\right)}{\Delta y} \cdot \Delta y = P$$

wo das Ganze durch P vorgestellt wird.

Da das Abzählen, Vervielfachen und Messen in willkührlicher Ordnung vorgenommen werden können, so kann auch bei den Geschäften, welche durch P vorgestellt sind, folgende Ordnung gewählt werden

$$\frac{f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y + \Delta y) - f(x + \Delta x, y) + f(x, y)}{\Delta x \cdot \Delta y} \cdot \Delta x \cdot \Delta y = P$$

oder auch folgende:

$$\frac{\frac{f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x + \Delta x, y)}{\Delta y} \cdot \Delta y - \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y} \cdot \Delta y}{\Delta x} \cdot \Delta x = P$$

oder in andern Zeichen dargestellt

$$\frac{\frac{\Delta_y f(x + \Delta x, y)}{\Delta y} \cdot \Delta y - \frac{\Delta_y f(x, y)}{\Delta y} \cdot \Delta y}{\Delta x} \cdot \Delta x = P$$

oder

$$\frac{\Delta_x\left(\frac{\Delta_y f(x, y)}{\Delta y} \cdot \Delta y\right)}{\Delta x} \cdot \Delta x = P$$

Es ist also

$$\frac{\Delta_y\left(\frac{\Delta_x f(x, y)}{\Delta x} \cdot \Delta x\right)}{\Delta y} \cdot \Delta y = \frac{\left(\frac{\Delta_y f(x, y)}{\Delta y} \cdot \Delta y\right)}{\Delta x} \cdot \Delta x$$

Oder in Worten: Bei dem Zerlegen der Unterschiede in Factoren ist es gleichgültig, ob zuerst der Unterschied in Hinsicht x und dann in Hinsicht y, oder zuerst in Hinsicht y und dann in Hinsicht x genommen wird. Wir wollen diese Wahrheit durch folgende Zeichen festhalten:

46) $$\frac{\Delta_y \Delta_x f(x, y)}{\Delta y \,.\, \Delta x} \,.\, \Delta x \,.\, \Delta y = \frac{\Delta_x \Delta_y f(x, y)}{\Delta x \,.\, \Delta y} \,.\, \Delta y \,.\, \Delta x$$

Diese Wahrheit ist ganz allgemein, und erstreckt sich auf jede Anzahl veränderlicher Grundgrössen.

§. 24.

Diese Freiheit in der Wahl der Ordnung der Geschäfte musste vor allem festgestellt werden, denn sie bringt Beweglichkeit und Leben in die Untersuchung, welche ohne sie bald in einigen unabänderlichen Vorschriften erstarren würde.

Diese Aufeinanderfolge der Geschäfte ist nicht zu verwechseln mit dem Falle, wo in Hinsicht der beiden Grundgrössen x und y zu gleicher Zeit der Unterschied genommen, oder was dasselbe ist, wenn x und y zu gleicher Zeit wachsen, und davon die ursprüngliche Function abgezählt, und wenn dann dieser Unterschied

$$\Delta f(x, y) = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y)$$

in Factoren zerlegt werden soll.

Bei dieser Zerlegung ist eine Hülfsgrösse $f(x, y + \Delta y)$ nothwendig, wird diese zu und abgezählt ,

$$\Delta f(x, y) = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y + \Delta y) + f(x, y + \Delta y) - f(x, y)$$

so ist eine Trennung des Factors Δx und Δy möglich, nämlich:

47) $$\Delta f(x, y) = \frac{\Delta_x f(x, y + \Delta y)}{\Delta x} \,.\, \Delta x + \frac{\Delta_y f(x, y)}{\Delta y} \,.\, \Delta y$$

Dieses Resultat ist in zweifacher Beziehung zu beachten; erstens dass der Unterschied auch theilweise, nämlich zuerst bei $f(x, y + \Delta y)$ in Hinsicht x und dann bei $f(x,y)$ in Hinsicht y genommen, und zweitens, dass durch dieses theilweise Verfahren eine Trennung der Factoren bewirkt werden kann.

Wäre $f(x + \Delta x, y)$ zu- und abgezählt, so würde

$$48) \qquad \Delta f(x, y) = \frac{\Delta_y f(x + \Delta x, y)}{\Delta y} . \Delta y + \frac{\Delta_x f(x, y)}{\Delta x} . \Delta x$$

entstanden sein, welches von dem vorigen nicht verschieden ist.

§. 25.

Ehe wir zu Functionen mehrerer veränderlicher Grundgrössen übergehen, verfolgen wir vorerst die höheren Unterschiede der Function mit zweien veränderlichen Grundgrössen. Der zweite Unterschied ist eigentlich nach 1 der ersten Abtheilung

$$\Delta^2 f(x, y) = f(x + 2\Delta x, y + 2\Delta y) - 2 f(x + \Delta x, y + \Delta y) + f(x, y)$$

Da aber die Trennung der Factoren Δx und Δy sowohl bei dem Δ^2 und noch mehr bei $\Delta^3, \ldots \Delta^n$ grosse Weitläufigkeiten veranlassen würde, so wählen wir einen andern Weg; wir nehmen den Unterschied von dem ersten Unterschiede, und erhalten dadurch

$$\Delta^2 f(x, y) = \Delta \left(\frac{\Delta_x f(x, y + \Delta y)}{\Delta x} . \Delta x + \frac{\Delta_y f(x, y)}{\Delta y} . \Delta y \right) \qquad (Q$$

Hiebei müssen wir die Vorschrift befolgen, welche die Gleichung 47 angiebt, nämlich y um Δy wachsen lassen, und in Hinsicht x den Unterschied nehmen

$$\frac{\Delta \left(\frac{\Delta f(x, y + 2\Delta y)}{\Delta x} . \Delta x \right)}{\Delta x} . \Delta x + \frac{\Delta \left(\frac{\Delta f(x, y + \Delta y)}{\Delta y} . \Delta y \right)}{\Delta x} . \Delta x$$

oder

$$\frac{\Delta^2 f(x, y + 2\Delta y)}{(\Delta x)^2} . (\Delta x)^2 + \frac{\Delta^2 f(x, y + \Delta y)}{\Delta y . \Delta x} . \Delta y . \Delta x$$

und dann wieder von der ungeänderten Function Q den Unterschied in Hinsicht y nehmen

$$\frac{\Delta\left(\frac{\Delta f(x,\,y+\Delta y)}{\Delta x}\,.\,\Delta x\right)}{\Delta y}\,.\,\Delta y + \frac{\Delta\left(\frac{\Delta f(x,y)}{\Delta y}\,.\,\Delta y\right)}{\Delta y}\,.\,\Delta y$$

oder

$$\frac{\Delta^2 f(x,\,y+\Delta y)}{\Delta x\,.\,\Delta y}\,.\,\Delta x\,.\,\Delta y + \frac{\Delta^2 f(x,\,y)}{(\Delta y)^2}\,.\,(\Delta y)^2$$

und zuletzt alles durch Zuzählen vereinigen; es entsteht, da nach 46

$$\frac{\Delta^2 f(x,\,y+\Delta y)}{\Delta y\,.\,\Delta x}\,.\,\Delta y\,.\,\Delta x = \frac{\Delta^2 f(x,\,y+\Delta y)}{\Delta x\,.\,\Delta y}\,.\,\Delta x\,.\,\Delta y$$

die Gleichung

$$49)\ \Delta^2 f(x,y) = \frac{\Delta^2 f(x,y+2\Delta y)}{(\Delta x)^2}.\,(\Delta x)^2 + 2.\,\frac{\Delta^2 f(x,y+\Delta y)}{\Delta x\,.\,\Delta y}\,.\,\Delta x\,.\,\Delta y + \frac{\Delta^2 f(x,y)}{(\Delta y)^2}\,.\,(\Delta y)^2$$

worin die Trennung der Factoren Δx und Δy vollendet ist. Der Uebergang von dem vorhergehenden zum nächsten Unterschiede besteht überhaupt in Folgendem. Ist der $(n-1)$te Unterschied gefunden

$$\begin{aligned}\Delta^{n-1} f(x,y) = {} & \frac{\Delta^{n-1} f(x,\,y+(n-1)\,\Delta y)}{(\Delta x)^{n-1}}\,.\,(\Delta x)^{n-1} \\ & + \frac{(n-1)^{1|-1}}{1^{1|1}}\,.\,\frac{\Delta^{n-1} f(x,y+(n-2)\Delta y)}{(\Delta x)^{n-2}.\,(\Delta y)^1}\,.\,(\Delta x)^{n-2}.\,(\Delta y)^1 \\ & + \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ & + \frac{(n-1)^{p|-1}}{1^{1|1}}\,.\,\frac{\Delta^{n-1} f(x,y+(n-p-1)\Delta y)}{(\Delta x)^{n-p-1}\,.\,(\Delta y)^p}.\,(\Delta x)^{n-p-1}\,.\,(\Delta y)^p \\ & + \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ & + \frac{(n-1)^{n-1|-1}}{1^{n-1|1}}.\,\frac{\Delta^{n-1} f(x,y)}{(\Delta y)^{n-1}}.\,(\Delta y)^{n-1}\end{aligned}$$

so wird von jedem Theile der vorstehenden Gleichung der Unterschied in Hinsisht x und y nach der Vorschrift 47 genommen; nach dieser ist

$$\Delta f(x,y+(n-p-1)\Delta y) = \frac{\Delta f(x,y+(n-p)\Delta y)}{\Delta x}.\,\Delta x + \frac{\Delta f(x,y+(n-p-1)\Delta y)}{\Delta y}.\,\Delta y$$

also

$$\Delta\left(\frac{\Delta^{n-1}f(x,y+(n-p-1)\Delta y)}{(\Delta x)^{n-p-1}.(\Delta y)^{p}}.(\Delta x)^{n-p-1}.(\Delta y)^{p}\right)=\frac{\Delta^{n}f(x,y+(n-p)\Delta y)}{(\Delta x)^{n-p}.(\Delta y)^{p}}.(\Delta x)^{n-p}(\Delta y)^{p}$$
$$+\frac{\Delta^{n}f(x,y+(n-p-1)\Delta y)}{(\Delta x)^{n-p-1}.(\Delta y)^{p+1}}.(\Delta x)^{n-p-1}(\Delta y)^{p+1}.$$

Wird nun in dieser Gleichung $p=0, 1, 2, \ldots, n-1$ gesetzt, so entsteht eine Reihe, deren allgemeines Glied

$$\left(\frac{(n-1)^{s|-1}}{1^{s|1}}+\frac{(n-1)^{s-1|-1}}{1^{s-1|1}}\right).\frac{\Delta^{n}f(x,y+(n-s)\Delta y)}{(\Delta x)^{n-s}(\Delta y)^{s}}.(\Delta x)^{n-s}.(\Delta y)^{s}=$$
$$\frac{n^{s|-1}}{1^{s|1}}.\frac{\Delta^{n}f(x,y+(n-s)\Delta y)}{(\Delta x)^{n-s}.(\Delta y)^{s}}.(\Delta x)^{n-s}.(\Delta y)^{s}$$

ist; die Reihe selbst ist

$$50)\quad \Delta^{n} f(x,y)=\frac{n^{0|-1}}{1^{0|1}}.\frac{\Delta_x^{n} f(x,y+n\,\Delta y)}{(\Delta x)^{n}}.(\Delta x)^{n}$$
$$+\frac{n^{1|-1}}{1^{1|1}}.\frac{\Delta_x^{n-1}\,\Delta_y^{1} f(x,y+(n-1)\,\Delta y)}{(\Delta x)^{n-1}.(\Delta y)^{1}}.(\Delta x)^{n-1}.(\Delta y)^{1}$$
$$+\frac{n^{2|-1}}{1^{2|1}}.\frac{\Delta_x^{n-2}\,\Delta_y^{2} f(x,y+(n-2)\,\Delta y)}{(\Delta x)^{n-2}.(\Delta y)^{2}}.(\Delta x)^{n-2}(\Delta y)^{2}$$
$$+\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.$$
$$+\frac{n^{n|-1}}{1^{n|1}}.\frac{\Delta_x^{0}\,\Delta_y^{n}\,f(x,y)}{(\Delta x)^{0}.(\Delta y)^{n}}.(\Delta x)^{0}.(\Delta y)^{n}$$

In dieser Gleichung ist die Trennung der Factoren vollendet; soll diese nicht vorgenommen werden, so sind die Zeichen folgende:

$$51)\quad \Delta^{n} f(x,y)=\frac{n^{0|-1}}{1^{0|1}}.\Delta_x^{n}\Delta_y^{0}f(x,y+n\,\Delta y)$$
$$+\frac{n^{1|-1}}{1^{1|1}}.\Delta_x^{n-1}\,\Delta_y^{1} f(x,y+(n-1)\,\Delta y)$$
$$+\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.$$
$$+\frac{n^{n|-1}}{1^{n|1}}.\Delta_x^{0}\,\Delta_y^{n}\,f(x,y)$$

oder auch

$$52)\quad \Delta^n f(x,y) = \left(\frac{n^{0|-1}}{1^{0|1}} . \Delta_x^n \Delta_y^0 \Box_y^n + \frac{n^{1|-1}}{1^{1|1}} . \Delta_x^{n-1} \Delta_y^1 \Box_y^{n-1} + \frac{n^{2|-1}}{1^{2|1}} . \Delta_x^{n-2} \Delta_y^2 \Box_y^{n-2} + \ldots \right.$$

$$\left. \ldots\ldots + \frac{n^{n|-1}}{1^{n|1}} . \Delta_x^0 \Delta_y^n \Box_y^0 \right) f(x,y)$$

oder

$$53)\qquad \Delta^n f(x,y) = (\Delta_x \Box_y + \Delta_y)^n f(x,y)$$

§. 26.

Wir gehen zu einer Function mehrerer veränderlicher Grundgrössen $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_m$ über, welche sich zu gleicher Zeit verändern, vorgestellt durch

$$f(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_m)$$

und nehmen hievon den Unterschied

$$\Delta f(x_1, x_2, \ldots, x_m) = f(x_1 + \Delta x_1, x_2 + \Delta x_2, \ldots, x_m + \Delta x_m) - f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$$

Wir wollen dieses Geschäft theilweise vornehmen, und zählen desshalb mehrere Hülfsgrössen zu und ab, wodurch der Werth des Ganzen nicht gestört wird, nämlich:

$$\Delta f(x_1, x_2, \ldots, x_m) =$$

$$= f(x_1 + \Delta x_1, x_2 + \Delta x_2, \ldots, x_m + \Delta x_m) - f(x_1, x_2 + \Delta x_2, x_3 + \Delta x_3, \ldots, x_m + \Delta x_m)$$

$$+ f(x_1, x_2 + \Delta x_2, x_3 + \Delta x_3, \ldots, x_m + \Delta x_m) - f(x_1, x_2, x_3 + \Delta x_3, \ldots, x_m + \Delta x_m)$$

$$+ f(x_1, x_2, x_3 + \Delta x_3, \ldots, x_m + \Delta x_m) - f(x_1, x_2, x_3, x_4 + \Delta x_4, \ldots, x_m + \Delta x_m)$$

$$+ \cdots\cdots\cdots\cdots - \cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$+ f(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{m-1}, x_m, + \Delta x_m) - f(x_1, x_3, x_3, \ldots, x_m)$$

Durch Trennung der Factoren erhalten wir die Gleichung

$$
\begin{aligned}
54)\quad \Delta \cdot f(x_1, \ldots, x_m) = {} & \frac{\Delta f(x_1, x_2 + \Delta x_2, x_3 + \Delta x_3, \ldots, x_m + \Delta x_m)}{\Delta x_1} . \Delta x_1 \\
& + \frac{\Delta f(x_1, x_2, x_3 + \Delta x_3, \ldots\ldots, x_m + \Delta x_m)}{\Delta x_2} . \Delta x_2 \\
& + \frac{\Delta f(x_1, x_2, x_3, x_4 + \Delta x_4, \ldots, x_m + \Delta x_m)}{\Delta x_3} . \Delta x_3 \\
& + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
& + \frac{\Delta f(x_1, \ldots, x_p, x_{p+1} + \Delta x_{p+1}, \ldots, x_m + \Delta x_m)}{\Delta x_p} . \Delta x_p \\
& + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
& + \frac{\Delta f(x_1, \ldots\ldots\ldots\ldots, x_{m-1}, x_m + \Delta x_m)}{\Delta x_{m-1}} . \Delta x_{m-1} \\
& + \frac{\Delta f(x_1, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, x_m)}{\Delta x_m} . \Delta x_m
\end{aligned}
$$

welche zeigt, wie zu verfahren ist, wenn der oben bemerkte Unterschied theilweise genommen werden soll, und wenn zugleich die Factoren Δx_1, Δx_2, . . . Δx_m gesondert sein sollen. *)

Der zweite Unterschied von $f(x_1, \ldots, x_m)$ wird eben so aus dem ersten Unterschiede gebildet, wie der erste Unterschied aus der ursprünglichen Function selbst; wir finden allgemein, dass

---

*) Die Formel, welche Wronski in seiner Philosophie der Mathematik Seite 116 gibt, ist unrichtig, denn nach ihm soll sein, wenn

$$f(x_1, x_2, .., x_m) = f$$

gesetzt wird,

$$\Delta f(x_1, x_2, .., x_m) = \left(\frac{\Delta f}{\Delta x_1}\right) \cdot \Delta x_1 + \left(\frac{\Delta f}{\Delta x_2}\right) \cdot \Delta x_2 + \ldots \left(\frac{\Delta f}{\Delta x_m}\right) \cdot \Delta x_m$$

55) $$\Delta^n f(x_1, x_2, \ldots, x_m) = \Sigma \frac{1^{n|1}}{1^{\nu 1|1} \cdot 1^{\nu 2|1} \cdot 1^{\nu 3|1} \ldots\ldots 1^{\nu m|1}} \cdot$$

$$\frac{\Delta^n f(x_1, x_2 + \delta 1 . \Delta x_2, x_3 + \delta 2 . \Delta x_3, \ldots, x_m + \delta(m-1) . \Delta x_m)}{(\Delta x_1)^{\nu 1} . (\Delta x_2)^{\nu 2} . (\Delta x_3)^{\nu 3} \ldots . (\Delta x_m)^{\nu m}} . (\Delta x_1)^{\nu 1} . (\Delta x_2)^{\nu 2} \ldots (\Delta x_m)^{\nu m}$$

wo $\nu 1$, $\nu 2$, ..., νm alle mögliche Werthe 0, 1, 2, 3, ..., n erhalten, jedoch so, dass

$$\nu 1 + \nu 2 + \nu 3 + \ldots . + \nu m = n$$

und

$$\delta 1 = \nu 1$$
$$\delta 2 = \nu 1 + \nu 2$$
$$\delta 3 = \nu 1 + \nu 2 + \nu 3$$
$$\ldots\ldots\ldots$$
$$\delta(m-1) = \nu 1 + \nu 2 + \nu 3 + \ldots . + \nu(m-1)$$

Die Gründe für diese Gesetze liegen in 54; ihre Entwicklung soll hier dem Leser überlassen bleiben.

Ist z. B. $n = 2$, und $m = 4$

$2 = \nu 1 + \nu 2 + \nu 3 + \nu 4$ und

0	0	0	2	$\delta 1 = 0$,	$\delta 2 = 0$,	$\delta 3 = 0$
0	0	1	1	0	0	1
0	0	2	0	0	0	2
0	1	0	1	0	1	1
0	1	1	0	0	1	2
0	2	0	0	0	2	2
1	0	0	1	1	1	1
1	0	1	0	1	1	2
1	1	0	0	1	2	2
2	0	0	0	2	2	2

und also

$$\begin{aligned}\Delta^2 f(x_1, x_2, x_3, x_4) = 1^{2|1} \Bigg(& \frac{\Delta^2 f(x_1, x_2, x_3, x_4)}{1^{2|1} . (\Delta x_4)^2} . (\Delta x_4)^2 \\ & + \frac{\Delta^2 f(x_1, x_2, x_3, x_4 + \Delta x_4)}{1^{1|1} . 1^{1|1} . \Delta x_3 . \Delta x_4} . \Delta x_3 . \Delta x_4 \\ & + \frac{\Delta^2 f(x_1, x_2, x_3, x_4 + 2\Delta x_4)}{1^{2|1} . (\Delta x_3)^2} . (\Delta x_3)^2 \\ & + \frac{\Delta^2 f(x_1, x_2, x_3 + \Delta x_3, x_4 + \Delta x_4)}{1^{1|1} . 1^{1|1} . \Delta x_2 . \Delta x_4} . \Delta x_2 . \Delta x_4 \\ & + \frac{\Delta^2 f(x_1, x_2, x_3 + \Delta x_3, x_4 + 2\Delta x_4)}{1^{1|1} . 1^{1|1} . \Delta x_2 . \Delta x_3} . \Delta x_2 . \Delta x_3 \\ & + \frac{\Delta^2 f(x_1, x_2, x_3 + 2\Delta x_3, x_4 + 2\Delta x_4)}{1^{2|1} . (\Delta x_2)^2} . (\Delta x_2)^2 \\ & + \frac{\Delta^2 f(x_1, x_2 + \Delta x_2, x_3 + \Delta x_3, x_4 + \Delta x_4)}{1^{1|1} . 1^{1|1} . \Delta x_1 . \Delta x_4} . \Delta x_1 . \Delta x_4 \\ & + \frac{\Delta^2 f(x_1, x_2 + \Delta x_2, x_3 + \Delta x_3, x_4 + 2\Delta x_4)}{1^{1|1} . 1^{1|1} . \Delta x_1 . \Delta x_3} . \Delta x_1 . \Delta x_3 \\ & + \frac{\Delta^2 f(x_1, x_2 + \Delta x_2, x_3 + 2\Delta x_3, x_4 + 2\Delta x_4)}{1^{1|1} . 1^{1|1} . \Delta x_1 . \Delta x_2} . \Delta x_1 . \Delta x_2 \\ & + \frac{\Delta^2 f(x_1, x_2 + 2\Delta x_2, x_3 + 2\Delta x_3, x_4 + 2\Delta x_4)}{1^{2|1} . (\Delta x_1)^2} . (\Delta x_1)^2 \Bigg)\end{aligned}$$

§. 27.

Diese Bildungsweise 55 ist ganz vollständig, denn sie beziehet sich auf jedes einzelne Element, welches in der Function vorkommt. Wir gehen zu einer Bildungsweise über, welche vermeidet, bis zu den einzelnen Elementen hinabzusteigen, und grösseren Spielraum in Hinsicht der ferneren Ausführung gestattet. Es ist

$$\Delta f(x_1, \ldots, x_m) = f(\square x_1, \square x_2, \ldots, \square x_m) - f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$$

und wenn die Hülfsgrösse

$$f(x_1, \ldots, x_p, \square x_{p+1}, \square x_{p+2}, \ldots, \square x_m)$$

zu- und abgezählt wird

$$\Delta f(x_1,\ldots,x_m) = f(\square x_1,\ldots,\square x_m) - f(x_1,\ldots,x_p,\ \square x_{p+1},\ldots,\square x_m)$$
$$+ f(x_1,\ldots,x_p,\ \square x_{p+1},\ldots,\square x_m) - f(x_1,\ldots,x_m)$$

oder in andern Zeichen

$$56)\quad \Delta f(x_1,\ldots,x_m) =$$
$$\Delta_{1,2\ldots,p} f(x_1,\ldots,x_p,\ \square x_{p+1},\ldots,\square x_m) + \Delta_{p+1,\ldots,m} f(x_1,\ldots,x_m)$$

wo $\Delta_{1,\ldots,p}$ den Unterschied von der vorgesetzten Function bedeutet, wenn in ihr die p ersten Elemente sich verändern, und $\Delta_{p+1,\ldots,m}$ den Unterschied in Hinsicht der übrigen Elemente; hingegen $\Delta_{1,2,\ldots,m}$ oder Δ den Unterschied in Hinsicht aller Grundgrössen.

Wird nach dieser Vorschrift von der vorstehenden Gleichung der Unterschied in Hinsicht aller Elemente genommen, und

$$\Delta f(x_1,\ldots,x_p,\ \square x_{p+1},\ldots,\square x_m) = \Delta_{1,\ldots,p} f(x_1,\ldots,x_p,\ \square^2 x_{p+1},\ldots,\square^2 x_m)$$
$$+ \Delta_{p+1,\ldots,m} f(x_1,\ldots,x_p,\ \square x_{p+1},\ldots,\square x_m)$$

gesetzt, so wird

$$57)\quad \Delta^2 f(x_1,\ldots,x_m) = \Delta^2_{1,\ldots,p}\, f(x_1,\ldots,x_p,\ \square^2 x_{p+1},\ldots,\square^2 x_m)$$
$$+2.\Delta^1_{1,\ldots,p}\,\Delta^1_{p+1,\ldots,m}\, f(x_1,\ldots,x_p,\ \square^1 x_{p+1},\ldots,\square^1 x_m)$$
$$+ \Delta^2_{p+1,\ldots,m}\, f(x_1,\ldots\ldots\ldots,x_m)$$

Allgemein ergiebt sich auf diesem Wege folgende Bildungsweise:

$$58)\quad \frac{\Delta^n f(x_1,\ldots,x_m)}{n|1} = \frac{\Delta^n_{1,\ldots,p}\,\Delta^0_{p+1,\ldots,m}\, f(x_1,\ldots,x_p,\ \square^n x_{p+1},\ldots,\square^n x_m)}{1^{n|1}\,.\,1^{0|1}}$$
$$+ \frac{\Delta^{n-1}_{1,\ldots,p}\,\Delta^1_{p+1,\ldots,m}\, f(x_1,\ldots,x_p,\ \square^{n-1} x_{p+1},\ldots,\square^{n-1} x_m)}{1^{n-1|1}\,.\,1^{1|1}}$$
$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$+ \frac{\Delta^{n-q}_{1,\ldots,p}\,\Delta^q_{p+1,\ldots,m}\, f(x_1,\ldots,x_p,\ \square^{n-q} x_{p+1},\ldots,\square^{n-q} x_m)}{1^{n-q|1}\,.\,1^{q|1}}$$
$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$+ \frac{\Delta^0_{1,\ldots,p}\,\Delta^n_{p+1,\ldots,m}\, f(x_1,\ldots,x_p,\ \square^0 x_{p+1},\ldots,\square^0 x_m)}{1^{0|1}\,.\,1^{n|1}}$$

Summe der Reihen bestehend aus Unterschieden verbunden mit willkürlichen Factoren.

§. 28.

Bevor wir in dieser Untersuchung weiter gehen, wollen wir die Unterschiede mit Factoren verbinden, und hiebei eben so verfahren, wie es in der neunten Abhandlung meiner Analysis geschehen ist; setzen wir nämlich in vorstehender Gleichung $n-1$ statt n, nehmen von dieser Gleichung den Unterschied $\Delta_{p+1,\ldots,m}$ in Hinsicht der $m-p$ letzten Elemente, vervielfachen die Gleichung 58 mit a_1, und die neue Gleichung mit b_1, und zählen beide Gleichungen zusammen, so entsteht die Gleichung

$$\begin{aligned}
59)\quad & a_1 \,.\, \frac{1}{1^{n|1} \,.\, 1^{0|1}} \,.\, \Delta^{n}_{1,\ldots,p}\,\Delta^{0}_{p+1,\ldots,m}\, f(x_1,\ldots,x_p,\Box^{n}x_{p+1},\ldots,\Box^{n}x_m) \\
& + (a_1 + 1b_1) \,.\, \frac{1}{1^{n-1|1}\; 1^{1|1}} \,.\, \Delta^{n-1}_{1,\ldots,p}\,\Delta^{1}_{p+1,\ldots,m}\, f(x_1,\ldots,x_p,\Box^{n-1}x_{p+1},\ldots,\Box^{n-1}x_m) \\
& + (a_1 + 2b_1) \,.\, \frac{1}{1^{n-2|1}\; 1^{2|1}} \,.\, \Delta^{n-2}_{1,\ldots,p}\,\Delta^{2}_{p+1,\ldots,m}\, f(x_1,\ldots,x_p,\Box^{n-2}x_{p+1},\ldots,\Box^{n-2}x_m) \\
& + \;. \\
& + (a_1 + nb_1) \,.\, \frac{1}{1^{0|1} \,.\, 1^{n|1}} \,.\, \Delta^{0}_{1,\ldots,p}\,\Delta^{n}_{p+1,\ldots,m}\, f(x_1,\ldots,x_p,\Box^{0}x_{p+1},\ldots,\Box^{0}x_m) \\
& = a_1 \,.\, \frac{1}{1^{n|1}}\, \Delta^{n}_{1,\ldots,m}\, f(x_1,\ldots,x_m) + b_1 \,.\, \frac{1}{1^{n-1|1}} \,.\, \Delta^{n-1}_{1,\ldots,m}\,\Delta^{1}_{p+1,\ldots,m} f(x_1,\ldots,x_m)
\end{aligned}$$

Bei dieser Reihe wiederholen wir dasselbe Geschäft, setzen $n-1$ statt n, und $a_1 + b_1$ statt a_1, nehmen von dieser Reihe den Unterschied $\Delta_{p+1,\ldots,m}$, vervielfachen die Reihe, welche hiedurch entsteht, mit b_2 und die Reihe 59 mit a_2 und zählen beide Reihen zusammen; wir erhalten

$$60)\quad (a_1+0b_1)(a_2+0b_2)\cdot\frac{1}{1^{n|1}\cdot 1^{0|1}}\cdot\Delta^{n}_{1,..,p}\,\Delta^{0}_{p+1,..,m}\,f(x_1,..,x_p,\,\Box^{n}x_{p+1},..,\,\Box^{n}x_m)$$

$$+(a_1+1b_1)(a_2+1b_2)\cdot\frac{1}{1^{n-1|1}\cdot 1^{1|1}}\cdot\Delta^{n-1}_{1,..,p}\,\Delta^{1}_{p+1,..,m}\,f(x_1,..,x_p,\Box^{n-1}x_{p+1},..,\Box^{n-1}x_m)$$

$$+(a_1+2b_1)(a_2+2b_2)\cdot\frac{1}{1^{n-2|1}\cdot 1^{2|1}}\cdot\Delta^{n-2}_{1,..,p}\,\Delta^{2}_{p+1,..,m}\,f(x_1,..,x_p,\,\Box^{n-2}x_{p+1},..,\Box^{n-2}x_m)$$

$$+\;\cdot$$

$$+(a_1+nb_1)(a_2+nb_2)\cdot\frac{1}{1^{0|1}\cdot 1^{n|1}}\cdot\Delta^{0}_{1,..,p}\,\Delta^{n}_{p+1,..,m}\,f(x_1,..,x_p,\,\Box^{0}x_{p+1},..,\,\Box^{0}x_m)$$

$$=(a_1+0b_1)(a_2+0b_2)\cdot\frac{\Delta^{n}_{1,\ldots,m}f(x_1,\ldots,x_m)}{1^{n|1}}$$

$$+\left.\begin{matrix}(a_2+0b_2)\,b_1\\(a_1+1b_1)\,b_2\end{matrix}\right|\frac{\Delta^{n-1}_{1,\ldots,m}\Delta^{1}_{p+1,\ldots,m}f(x_1,\ldots,x_m)}{1^{n-1|1}}$$

$$+\;b_1\cdot b_2\cdot\frac{\Delta^{-n2}_{1,\ldots,m}\Delta^{2}_{p+1,\ldots,m}f(x_1,\ldots,x_m)}{1^{n-2|1}}$$

Wir setzen wieder in dieser Reihe

$n-1$ statt n

a_1+b_1 statt a_1

a_2+b_2 statt a_2

nehmen von der Reihe, welche hiedurch entsteht, den Unterschied $\Delta_{p+1,\ldots,m}$, vervielfachen diese Reihe mit b_3 und die Reihe 60 mit a_3, und vereinigen beide durch Zuzählen; wir erhalten

$$61)\quad (a_1+0b_1)(a_2+0b_2)(a_3+0b_3)\cdot\frac{1}{1^{n|1}\cdot 1^{0|1}}\cdot\Delta^{n}_{1,..,p}\Delta^{0}_{p+1,..,m}f(x_1,..,x_1,\Box^{n}x_{p+1},..,\Box^{n}x_m)$$

$$+(a_1+1b_1)(a_2+1b_2)(a_3+1b_3)\cdot\frac{1}{1^{n-1|1}\cdot 1^{1|1}}\cdot\Delta^{n-1}_{1,..,p}\Delta^{1}_{p+1,..,m}f(x_1,..,x_p,\Box^{n-1}x_{p+1},..\Box^{n-1}x_m)$$

$$+(a_1+2b_1)(a_2+2b_2)(a_3+2b_3)\cdot\frac{1}{1^{n-2|1}\cdot 1^{2|1}}\cdot\Delta^{n-2}_{1,..,p}\Delta^{2}_{p+1,..,m}f(x_1,..,x_p,\Box^{n-2}x_{p+1},..\Box^{n-2}x_m)$$

$$+\;\cdot$$

$$+(a_1+nb_1)(a_2+nb_2)(a_3+nb_3)\cdot\frac{1}{1^{0|1}\cdot 1^{n|1}}\cdot\Delta^{0}_{1,..,p}\Delta^{n}_{p+1,..,m}f(x_1,..,x_p,\Box^{0}x_{p+1},..,\Box^{0}x_m)$$

$$= (a_1 + ob_1)(a_2 + ob_2)(a_3 + ob_3) \cdot \frac{\Delta^n_{1,\ldots,m}\ \Delta^0_{p+1,\ldots,m} f(x_1,\ldots,x_m)}{1^{n|1}}$$

$$+ \left.\begin{array}{l} (a_2 + ob_2)(a_3 + ob_3)\, b_1 \\ (a_1 + 1b_1)(a_3 + ob_3)\, b_2 \\ (a_1 + 1b_1)(a_2 + 1b_2)\, b_3 \end{array}\right| \frac{\Delta^{n-1}_{1,\ldots,m}\ \Delta^1_{p+1,\ldots,m} f(x_1,\ldots,x_m)}{1^{n-1|1}}$$

$$+ \left.\begin{array}{l} (a_3 + ob_3)\, b_1\, b_2 \\ (a_2 + 1b_2)\, b_1\, b_3 \\ (a_1 + 2b_1)\, b_2\, b_3 \end{array}\right| \frac{\Delta^{n-2}_{1,\ldots,m}\ \Delta^2_{p+1,\ldots,m} f(x_1,\ldots,x_m)}{1^{n-2|1}}$$

$$+ b_1\, b_2\, b_3 \cdot \frac{\Delta^{n-3}_{1,\ldots,m}\ \Delta^3_{p+1,\ldots,m} f(x_1,\ldots,x_m)}{1^{n-3|1}}$$

Das gleiche Verfalhren führt zu folgender Reihe

$$62)\quad (a_1+0b_1)(a_2+0b_2)(a_3+0b_3)(a_4+0b_4) \cdot \frac{\Delta^n_{1,\ldots,p}\Delta^0_{p+1,\ldots,m} f(x_1,\ldots,x_p, \Box^n x_{p+1},\ldots,\Box^n x_m)}{1^{n|1} \cdot 1^{0|1}}$$

$$+ (a_1+1b_1)(a_2+1b_2)(a_3+1b_3)(a_4+1b_4) \cdot \frac{\Delta^{n-1}_{1,\ldots,p}\Delta^1_{p+1,\ldots,m} f(x_1,\ldots,x_p, \Box^{n-1} x_{p+1},\ldots,\Box^{n-1} x_m)}{1^{n-1|1} \cdot 1^{1|1}}$$

$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$+ (a_1+nb_1)(a_2+nb_2)(a_3+nb_3)(a_4+nb_4) \cdot \frac{\Delta^0_{1,\ldots,p}\Delta^n_{p+1,\ldots,m} f(x_1,\ldots,x_p, \Box^0 x_{p+1},\ldots,\Box^0 x_m)}{1^{0|1} \cdot 1^{n|1}}$$

$$= (a_1+0b_1)(a_2+0b_2)(a_3+0b_3)(a_4+0b_4) \cdot \frac{\Delta^n_{1,\ldots,m}\Delta^0_{p+1,\ldots,m} f(x_1,\ldots,x_m)}{1^{n|1}}$$

$$+ \left.\begin{array}{l|l|l|l} a_2 + 0b_2 & a_3 + 0b_3 & a_4 + 0b_4 & b_1 \\ a_1 + 1b_1 & a_3 + 0b_3 & a_4 + 0b_4 & b_2 \\ a_1 + 1b_1 & a_2 + 1b_2 & a_4 + 0b_4 & b_3 \\ a_1 + 1b_1 & a_2 + 1b_2 & a_3 + 1b_3 & b_4 \end{array}\right| \frac{\Delta^{n-1}_{1,\ldots,m}\ \Delta^1_{p+1,\ldots,m} f(x_1,\ldots,x_m)}{1^{n-1|1}}$$

$$+ \left.\begin{array}{l|l|l} a_3 + 0b_3 & a_4 + 0b_4 & b_1 b_2 \\ a_2 + 1b_2 & a_4 + 0b_4 & b_1 b_3 \\ a_1 + 2b_1 & a_4 + 0b_4 & b_2 b_3 \\ a_2 + 1b_2 & a_3 + 1b_3 & b_1 b_4 \\ a_1 + 2b_1 & a_3 + 1b_3 & b_2 b_4 \\ a_1 + 2b_1 & a_2 + 2b_2 & b_3 b_4 \end{array}\right| \frac{\Delta^{n-2}_{1,\ldots,m}\ \Delta^2_{p+1,\ldots,m} f(x_1,\ldots,x_m)}{1^{n-2|1}}$$

$$+\begin{array}{l|l} a_4 + 0b_4 \,|\, b_1 b_2 b_3 & \dfrac{\Delta^{n-3}_{1,\ldots,m}\,\Delta^{3}_{p+1,\ldots,m}\,f(x_1,\ldots,x_m)}{1^{n-3|1}} \\ a_3 + 1b_3 \,|\, b_1 b_2 b_4 & \\ a_2 + 2b_2 \,|\, b_1 b_3 b_4 & \\ a_1 + 3b_1 \,|\, b_2 b_3 b_4 & \end{array}$$

$$+ \quad b_1 b_2 b_3 b_4 \,.\, \frac{\Delta^{n-4}_{1,\ldots,m}\,\Delta^{4}_{p+1,\ldots,m}\,f(x_1,\ldots,x_m)}{1^{n-4|1}}$$

so wie auch zu der Reihe

$$63)\quad (a_1 + 0b_1)(a_2 + 0b_2)(a_3 + 0b_3)(a_4 + 0b_4)(a_5 + 0b_5)\,.\,\frac{\Delta^{n}_{1,\ldots,p}\,\Delta^{0}_{p+1,\ldots,m}\,f(x_1,\ldots,x_p,\Box^{n}x_{p+1},\ldots,\Box^{n}x_m)}{1^{n|1}\,.\,1^{0|1}}$$

$$+\ (a_1 + 1b_1)(a_2 + 1b_2)(a_3 + 1b_3)(a_4 + 1b_4)(a_5 + 1b_5)\,.\,\frac{\Delta^{n-1}_{1,\ldots,p}\,\Delta^{1}_{p+1,\ldots,m}\,f(x_1,\ldots,x_p,\Box^{n-1}x_{p+1},\ldots,\Box^{n-1}x_m)}{1^{n-1|1}\,.\,1^{1|1}}$$

$$+\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$+\ (a_1 + nb_1)(a_2 + nb_2)(a_3 + nb_3)(a_4 + nb_4)(a_5 + nb_5)\,.\,\frac{\Delta^{0}_{1,\ldots,p}\,\Delta^{n}_{p+1,\ldots,m}\,f(x_1,\ldots,x_p,\Box^{0}x_{p+1},\ldots,\Box^{0}x_m)}{1^{0|1}\,.\,1^{n|1}}$$

$$= a_1 + 0b_1 \,|\, a_2 + 0b_2 \,|\, a_3 + 0b_3 \,|\, a_4 + 0b_4 \,|\, a_5 + 0b_5 \,.\, \frac{\Delta^{n}_{1,\ldots,m}\,\Delta^{0}_{p+1,\ldots,m}\,f(x_1,\ldots,x_m)}{1^{n|1}}$$

$$+\begin{array}{l|l} a_2 + 0b_2 \,|\, a_3 + 0b_3 \,|\, a_4 + 0b_4 \,|\, a_5 + 0b_5 \,|\, b_1 & \dfrac{\Delta^{n-1}_{1,\ldots,m}\,\Delta^{1}_{p+1,\ldots,m}\,f(x_1,\ldots,x_m)}{1^{n-1|1}} \\ a_1 + 1b_1 \,|\, a_3 + 0b_3 \,|\, a_4 + 0b_4 \,|\, a_5 + 0b_5 \,|\, b_2 & \\ a_1 + 1b_1 \,|\, a_2 + 1b_2 \,|\, a_4 + 0b_4 \,|\, a_5 + 0b_5 \,|\, b_3 & \\ a_1 + 1b_1 \,|\, a_2 + 1b_2 \,|\, a_3 + 1b_3 \,|\, a_5 + 0b_5 \,|\, b_4 & \\ a_1 + 1b_1 \,|\, a_2 + 1b_2 \,|\, a_3 + 1b_3 \,|\, a_4 + 1b_4 \,|\, b_5 & \end{array}$$

$$+\left.\begin{array}{l}
a_3+0b_3 \mid a_4+0b_4 \mid a_5+0b_5 \mid b_1\,b_2 \\
a_2+1b_2 \mid a_4+0b_4 \mid a_5+0b_5 \mid b_1\,b_3 \\
a_1+2b_1 \mid a_4+0b_4 \mid a_5+0b_5 \mid b_2\,b_3 \\
a_2+1b_2 \mid a_3+1b_3 \mid a_5+0b_5 \mid b_1\,b_4 \\
a_1+2b_1 \mid a_3+1b_3 \mid a_5+0b_5 \mid b_2\,b_4 \\
a_1+2b_1 \mid a_2+2b_2 \mid a_5+0b_5 \mid b_3\,b_4 \\
a_2+1b_2 \mid a_3+1b_3 \mid a_4+1b_4 \mid b_1\,b_5 \\
a_1+2b_1 \mid a_3+1b_3 \mid a_4+1b_4 \mid b_2\,b_5 \\
a_1+2b_1 \mid a_2+2b_2 \mid a_4+1b_4 \mid b_3\,b_5 \\
a_1+2b_1 \mid a_2+2b_2 \mid a_3+2b_3 \mid b_4\,b_5
\end{array}\right| \frac{\Delta^{n-2}_{1,\ldots,m}\,\Delta^{2}_{p+1,\ldots,m}\,f(x_1,\ldots,x_m)}{1^{n-2|1}}$$

$$+\left.\begin{array}{l}
a_4+0b_4 \mid a_5+0b_5 \mid b_1\,b_2\,b_3 \\
a_3+1b_3 \mid a_5+0b_5 \mid b_1\,b_2\,b_4 \\
a_2+2b_2 \mid a_5+0b_5 \mid b_1\,b_3\,b_4 \\
a_1+3b_1 \mid a_5+0b_5 \mid b_2\,b_3\,b_4 \\
a_3+1b_3 \mid a_4+1b_4 \mid b_1\,b_2\,b_5 \\
a_2+2b_2 \mid a_4+1b_4 \mid b_1\,b_3\,b_5 \\
a_1+3b_1 \mid a_4+1b_4 \mid b_2\,b_3\,b_5 \\
a_2+2b_2 \mid a_3+2b_3 \mid b_1\,b_4\,b_5 \\
a_1+3b_1 \mid a_3+2b_3 \mid b_2\,b_4\,b_5 \\
a_1+3b_1 \mid a_2+3b_2 \mid b_3\,b_4\,b_5
\end{array}\right| \frac{\Delta^{n-3}_{1,\ldots,m}\,\Delta^{3}_{p+1,\ldots,m}\,f(x_1,\ldots,x_m)}{1^{n-3|1}}$$

$$+\left.\begin{array}{l}
a_5+0b_5 \mid b_1\,b_2\,b_3\,b_4 \\
a_4+1b_4 \mid b_1\,b_2\,b_3\,b_5 \\
a_3+2b_3 \mid b_1\,b_2\,b_4\,b_5 \\
a_2+3b_2 \mid b_1\,b_3\,b_4\,b_5 \\
a_1+4b_1 \mid b_2\,b_3\,b_4\,b_5
\end{array}\right| \frac{\Delta^{n-4}_{1,\ldots,m}\,\Delta^{4}_{p+1,\ldots,m}\,f(x_1,\ldots,x_m)}{1^{n-4|1}}$$

$$+\quad b_1\,b_2\,b_3\,b_4\,b_5\,.\,\frac{\Delta^{n-5}_{1,\ldots,m}\,\Delta^{5}_{p+1,\ldots,m}\,f(x_1,\ldots,x_m)}{1^{n-5|1}}$$

Die Vorzahlen sind aus dreifach in einander verschlungenen geordneten Verbindungen mit und auch ohne Wiederholungen zusammengesetzt; die Vorzahl von $\Delta^{n-2}_{1,\dots,m}\,\Delta^{2}_{p+1,\dots,m}$ hat folgende Verbindungen:

und $\begin{array}{ccc}a&a&a\\ b&b&b\end{array}$ b b und die Vorzahlen von b b b sind

3 4 5	1 2	0 0 0
2 4 5	1 3	1 0 0
1 4 5	2 3	2 0 0
2 3 5	1 4	1 1 0
1 3 5	2 4	2 1 0
1 2 5	3 4	2 2 0
2 3 4	1 5	1 1 1
1 3 4	2 5	2 1 1
1 2 4	3 5	2 2 1
1 2 3	4 5	2 2 2
A	B	C

und in der Vorzahl von $\Delta^{n-3}_{1,\dots,m}\,\Delta^{3}_{p+1,\dots,m}$ kommen folgende Verbindungen vor:

und $\begin{array}{cc}a&a\\ b&b\end{array}$ b b b und die Vorzahlen von b b sind

4 5	1 2 3	0 0
3 5	1 2 4	1 0
2 5	1 3 4	2 0
1 5	2 3 4	3 0
3 4	1 2 5	1 1
2 4	1 3 5	2 1
1 4	2 3 5	3 1
2 3	1 4 5	2 2
1 3	2 4 5	3 2
1 2	3 4 5	3 3
A	B	C

Bei den geordneten Verbindungen ohne Wiederholungen wird mit dem höchsten Elemente und bei jenen mit Wiederholungen mit dem niedrigsten Elemente angefangen, und zwar

bei A oben zur Rechten
bei B unten zur Rechten und
bei C oben zur Rechten.

Diese Ordnung ist nicht gleichgültig. Die Grössen a und b sind ganz willkührlich, sie können sogar Functionen von x und y sein.

Das allgemeine Gesetz für die Bildung der Vorzahlen ergibt sich auf folgende Weise: es sei

$$64)\quad (a_1+q\,b_1)\,(a_2+q\,b_2)\,(a_3+q\,b_3)\,\ldots\ldots(a_m+q\,b_m) = (a_1+q\,b_1)_m$$

und

$$\begin{aligned}
65)\quad & (a_1+0b_1)_m\,.\,\frac{\Delta^n_{1,\ldots,p}\,\Delta^0_{p+1,\ldots,m}\,f(x_1,\ldots,x_p,\square^n x_{p+1},\ldots,\square^n x_m)}{1^{n|1}\,.\,1^{0|1}}\\
+\, & (a_1+1b_1)_m\,.\,\frac{\Delta^{n-1}_{1,\ldots,p}\,\Delta^1_{p+1,\ldots,m}\,f(x_1,\ldots,x_p,\square^{n-1} x_{p+1},\ldots,\square^{n-1} x_m)}{1^{n-1|1}\,.\,1^{1|1}}\\
+\, & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
+\, & (a_1+qb_1)_m\,.\,\frac{\Delta^{n-q}_{1,\ldots,p}\,\Delta^q_{p+1,\ldots,m}\,f(x_1,\ldots,x_p,\square^{n-q} x_{p+1},\ldots,\square^{n-q} x_m)}{1^{n-q|1}\,.\,1^{q|1}}\\
+\, & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
+\, & (a_1+nb_1)_m\,.\,\frac{\Delta^0_{1,\ldots,p}\,\Delta^n_{p+1,\ldots,m}\,f(x_1,\ldots,x_p,\square^0 x_{p+1},\ldots,\square^0 x_m)}{1^{0|1}\,.\,1^{n|1}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
= & A_{(m,0)}\,.\,\frac{\Delta^n_{1,\ldots,m}\,\Delta^0_{p+1,\ldots,m}\,f(x_1,\ldots,x_m)}{1^{n|1}}\\
+ & A_{(m,1)}\,.\,\frac{\Delta^{n-1}_{1,\ldots,m}\,\Delta^1_{p+1,\ldots,m}\,f(x_1,\ldots,x_m)}{1^{n-1|1}}\\
+ & A_{(m,2)}\,.\,\frac{\Delta^{n-2}_{1,\ldots,m}\,\Delta^2_{p+1,\ldots,m}\,f(x_1,\ldots,x_m)}{1^{n-2|1}}\\
+ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
+ & A_{(m,m)}\,.\,\frac{\Delta^{n-m}_{1,\ldots,m}\,\Delta^m_{p+1,\ldots,m}\,f(x_1,\ldots,x_m)}{1^{n-m|1}}
\end{aligned}$$

Wird nun nach dem obigen Verfahren

$n-1$ statt n

$a_1 + b_1$ statt a_1

$a_2 + b_2$ statt a_2

. . . .

$a_m + b_m$ statt a_m

$A'_{(m,q)}$ statt $A_{(m,q)}$

gesetzt, von der neuen Reihe der Unterschied $\Delta_{p+1,\ldots,m}$ genommen, diese Reihe mit b_{m+1} und die Reihe 65 mit a_{m+1} vervielfacht, und werden beide Reihen zusammengezählt, so ergibt sich folgende allgemeine zurücklaufende Bildungsweise:

66)
$$\begin{aligned}
A_{(m+1,0)} &= a_{m+1} A_{(m,0)} \\
A_{(m+1,1)} &= a_{m+1} A_{(m,1)} + b_{m+1} A'_{(m,0)} \\
A_{(m+1,2)} &= a_{m+1} A_{(m,2)} + b_{m+1} A'_{(m,1)} \\
A_{(m+1,3)} &= a_{m+1} A_{(m,3)} + b_{m+1} A'_{(m,2)} \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots \\
A_{(m+1,m+1)} &= \qquad\qquad\qquad b_{m+1} A'_{(m,m)}
\end{aligned}$$

wo $A'_{(m,q)}$ aus $A_{(m,q)}$ entspringt, wenn in diesem $a_1 + b_1$, $a_2 + b_2$, $a_3 + b_3 \ldots$, $a_m + b_m$ statt $a_1, a_2, \ldots, a_m$ gesetzt wird.

§. 29.

Ist

$$a_1 = a,\ a_2 = a + b,\ a_3 = a + 2b, \ldots,\ a_m = a + (m-1)\,b$$

und

$$b_1 = b_2 = b_3 = \ldots = b_m = b$$

so ergibt sich aus der zurücklaufenden Bildungsweise 66 folgende Gleichung

67) $$a^{m|b} \cdot \frac{\Delta^{n}_{1,\ldots,p}\,\Delta^{0}_{p+1,\ldots,m}\, f(x_1,\ldots,x_p,\Box^{n}x_{p+1},\ldots,\Box^{n}x_m)}{1^{n|1}\cdot 1^{0|1}}$$

$$+\ (a+b)^{m|b} \cdot \frac{\Delta^{n-1}_{1,\ldots,p}\,\Delta^{1}_{p+1,\ldots,m}\, f(x_1,\ldots,x_p,\Box^{n-1}x_{p+1},\ldots,\Box^{n-1}x_m)}{1^{n-1|1}\cdot 1^{1|1}}$$

$$+\ (a+2b)^{m|b} \cdot \frac{\Delta^{n-2}_{1,\ldots,p}\,\Delta^{2}_{p+1,\ldots,m}\, f(x_1,\ldots,x_p,\Box^{n-2}x_{p+1},\ldots,\Box^{n-2}x_m)}{1^{n-2|1}\cdot 1^{2|1}}$$

$$+\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$

$$+\ (a+nb)^{m|b} \cdot \frac{\Delta^{0}_{1,\ldots,p}\,\Delta^{n}_{p+1,\ldots,m}\, f(x_1,\ldots,x_p,\Box^{0}x_{p+1},\ldots,\Box^{0}x_m)}{1^{0|1}\cdot 1^{n|1}}$$

$$= \qquad a^{m|b} \cdot b^{0} \cdot \frac{\Delta^{n}_{1,\ldots,m}\,\Delta^{0}_{p+1,\ldots,m}\, f(x_1,\ldots,x_m)}{1^{n|1}}$$

$$+\ \frac{m^{1|-1}}{1^{1|1}} \cdot (a+b)^{m-1|b} \cdot b^{1} \cdot \frac{\Delta^{n-1}_{1,\ldots,m}\,\Delta^{1}_{p+1,\ldots,m}\, f(x_1,\ldots,x_m)}{1^{n-1|1}}$$

$$+\ \frac{m^{2|-1}}{1^{2|1}} \cdot (a+2b)^{m-2|b} \cdot b^{2} \cdot \frac{\Delta^{n-2}_{1,\ldots,m}\,\Delta^{2}_{p+1,\ldots,m}\, f(x_1,\ldots,x_m)}{1^{n-2|1}}$$

$$+\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$

$$+\ \frac{m^{m|-1}}{1^{m|1}} \cdot (a+mb)^{0|b} \cdot b^{m} \cdot \frac{\Delta^{n-m}_{1,\ldots,m}\,\Delta^{m}_{p+1,\ldots,m}\, f(x_1,\ldots,x_m)}{1^{n-m|1}}$$

§. 30.

Ist aber

$$a_1 = a_2 = a_3 = \ldots = a_m = a$$

und

$$b_1 = b_2 = b_3 = \ldots = b_m = b$$

so ist

$$68)\quad a^m \,.\, \frac{\Delta^n_{1,\ldots,p}\,\Delta^0_{p+1,\ldots,m}\, f(x_1,\ldots,x_p,\Box^n x_{p+1},\ldots,\Box^n x_m)}{1^{n|1}\,.\,1^{0|1}}$$

$$+\ (a+1b)^m \,.\, \frac{\Delta^{n-1}_{1,\ldots,p}\,\Delta^1_{p+1,\ldots,m}\, f(x_1,\ldots,x_p,\Box^{n-1} x_{p+1},\ldots,\Box^{n-1} x_m)}{1^{n-1|1}\,.\,1^{n|1}}$$

$$+\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$+\ (a+nb)^m \,.\, \frac{\Delta^0_{1,\ldots,p}\,\Delta^n_{p+1,\ldots,m}\, f(x_1,\ldots,x_p,\Box^0 x_{p+1},\ldots,\Box^0 x_m)}{1^{0|1}\,.\,1^{n|1}}$$

$$=\ A_{(m,0)} \,.\, \frac{\Delta^n_{1,\ldots,m}\,\Delta^0_{p+1,\ldots,m}\, f(x_1,\ldots,x_m)}{1^{n|1}}$$

$$+\ A_{(m,1)} \,.\, \frac{\Delta^{n-1}_{1,\ldots,m}\,\Delta^1_{p+1,\ldots,m}\, f(x_1,\ldots,x_m)}{1^{n-1|1}}$$

$$+\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$+\ A_{(m,m)} \,.\, \frac{\Delta^{n-m}_{1,\ldots,m}\,\Delta^m_{p+1,\ldots,m}\, f(x_1,\ldots,x_m)}{1^{n-m|1}}$$

und die zurücklaufende Bildungsweise dieser Vorzahlen

$$69)\qquad A_{(m,q)} = a \,.\, A_{(m-1,q)} + b \,.\, A'_{(m-1,q-1)}$$

Diese lässt sich in eine andere verwandeln, wenn

$$m = q-1,\ q,\ q+1,\ q+2,\ \ldots\ldots$$

und

$$A_{(q-2,q)} = A_{(q-2,q-1)} = 0$$

gesetzt, und die dadurch entstehenden Gleichungen zusammengezählt werden; es ensteht die Gleichung

$$70)\ A_{(m,q)} = b\,(a^{m-q} A'_{q-1,q-1} + a^{m-q-1}\, A'_{q,q-1} + a^{m-q-2} A'_{q+1,q-1} + \ldots + a^0 A'_{m-1,q-1})$$

nach welcher sich die Vorzahlen obiger Reihe leicht finden lassen, denn wird

71) $a^m = \beta\,(a, m)_0$

$$a^{m-1}.\beta(a+b,0)_0+a^{m-2}.\beta(a+b,1)_0+a^{m-3}.\beta(a+b,2)_0+\ldots+a^0.\beta(a+b,m-1)_0=\beta(a,m-1)_1$$

$$a^{m-2}.\beta(a+b,0)_1+a^{m-3}.\beta(a+b,1)_1+a^{m-4}.\beta(a+b,2)_1+\ldots+a^0.\beta(a+b,m-2)_1=\beta(a,m-2)_2$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$a^{m-p}.\beta(a+b,0)_{p-1}+a^{m-p-1}.\beta(a+b,1)_{p-1}+a^{m-p-2}.\beta(a+b,2)_{p-1}+\ldots+a^0.\beta(a+b,m-p)_{p-1}=$$
$$\beta(a,m-p)_p$$

gesetzt, so ist

72)
$$\begin{aligned}
A_{m,0} &= b^0 \,.\, \beta\,(a,m)_0\\
A_{m,1} &= b^1 \,.\, \beta\,(a,m-1)_1\\
A_{m,2} &= b^2 \,.\, \beta\,(a,m-2)_2\\
&\ldots\ldots\ldots\\
A_{m,q} &= b^q \,.\, \beta\,(a,m-q)_q
\end{aligned}$$

Es entstehen hiedurch die geordneten Verbindungen mit Wiederholungen aus den Elementen $a+0b$, $a+1b$, $a+2b$, $a+3b, \ldots,$ so dass

73)
$$\begin{aligned}
& a^m \,.\, \frac{\Delta^n_{1,\ldots,p}\,\Delta^0_{p+1,\ldots,m}\,f(x_1,\ldots,x_p,\Box^n x_{p+1},\ldots,\Box^n x_m)}{1^{n|1}\,.\,1^{0|1}}\\
+\;& (a+b)^m.\frac{\Delta^{n-1}_{1,\ldots,p}\,\Delta^1_{p+1,\ldots,m}\,f(x_1,\ldots,x_p,\Box^{n-1}x_{p+1},\ldots,\Box^{n-1}x_m)}{1^{n-1|1}\,.\,1^{1|1}}\\
+\;& \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
+\;& (a+nb)^m.\frac{\Delta^0_{1,\ldots,p}\,\Delta^n_{p+1,\ldots,m}\,f(x_1,\ldots,x_p,\Box^0 x_{p+1},\ldots,\Box^0 x_m)}{1^{0|1}\,.\,1^{n|1}}\\
=\;& [a+0b]^{(m)}\;.\,b^0.\frac{\Delta^n_{1,\ldots,m}\,\Delta^0_{p+1,\ldots,m}\,f(x_1,\ldots,x_m)}{1^{n|1}}\\
+\;& [a+0b,\ a+1b]^{(m-1)}.\,b^1.\frac{\Delta^{n-1}_{1,\ldots,m}\,\Delta^1_{p+1,\ldots,m}\,f(x_1,\ldots,x_m)}{1^{n-1|1}}\\
+\;& [a+0b,\ a+1b,\ a+2b]^{(m-2)}.\,b^2.\frac{\Delta^{n-2}_{1,\ldots,m}\,\Delta^2_{p+1,\ldots,m}\,f(x_1,\ldots,x_m)}{1^{n-2|1}}\\
+\;& \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
+\;& [a+0b,a+1b,..,a+mb]^{(m-m)}.\,b^m.\frac{\Delta^{n-m}_{1,\ldots,m}\,\Delta^m_{p+1,\ldots,m}\,f(x_1,\ldots,x_m)}{1^{n-m|1}}
\end{aligned}$$

Unterschiede der Functionen von Functionen

§. 31.

Wir gehen zu Functionen von Functionen über, und zerlegen ihre Unterschiede, welche durch die Zunahme ihrer Grundgrössen entstehen, in Factoren.

Bedeuten $f^{(1)}$, $f^{(2)}$, $f^{(3)}$, ... verschiedene Functionen, so ist

$$\Delta f^{(2)}(f^{(1)}x) = f^{(2)}\left(f^{(1)}(x + \Delta x)\right) - f^{(2)}(f^{(1)}x)$$

oder weil

$$f^{(1)}(x + \Delta x) = f^{(1)}x + \Delta f^{(1)}x$$

so ist

$$\Delta f^{(2)}(f^{(1)}x) = f^{(2)}(f^{(1)}x + \Delta f^{(1)}x) - f^{(2)}(f^{(1)}x)$$

Dieser Unterschied lässt sich in zwei Factoren zerlegen, wovon ein Factor $\Delta f^{(1)}x$ ist, und es ist

$$\Delta f^{(2)}(f^{(1)}x) = \frac{f^{(2)}(f^{(1)}x + \Delta f^{(1)}x) - f^{(2)}(f^{(1)}x)}{\Delta f^{(1)}x} . \Delta f^{(1)}x$$

Dieser Factor $\Delta f^{(1)}x$ besteht aus zwei Factoren, wovon der eine die Zunahme der Grundgrösse x ist, und es ist

$$\Delta f^{(1)}x = \frac{f^{(1)}(x + \Delta x) - f^{(1)}x}{\Delta x} . \Delta x$$

Es ist folglich

74) $$\Delta f^{(2)}(f^{(1)}x) = \frac{f^{(2)}(f^{(1)}x + \Delta f^{(1)}x) - f^{(2)}(f^{(1)}x)}{\Delta f^{(1)}x} . \frac{f^{(1)}(x + \Delta x) - f^{(1)}x}{\Delta x} . \Delta x$$

Das ganze Geschäft besteht also in folgenden zweien voneinander gesonderten Geschäften. Man behandelt die untergeordnete Function $f^{(1)}x$ als eine einfache Grösse, lässt diese um $\Delta f^{(1)}x$ wachsen, zählt $f^{(2)}(f^{(1)}x)$ ab, und zerlegt den Unterschied in zwei Factoren, wovon der eine Factor $\Delta f^{(1)}x$ ist. Das zweite Geschäft besteht in dem Zerlegen dieses Factors $\Delta f^{(1)}x$ in zwei Factoren, wovon der eine Factor die Zunahme Δx der Grundgrösse ist.

Bei einer dreifachen Function $f^{(3)}\big(f^{(2)}(f^{(1)}x)\big)$ wird in dem Unterschiede

$$\Delta f^{(3)}\big(f^{(2)}(f^{(1)}x)\big) = f^{(3)}\big(f^{(2)}(f^{(1)}(x + \Delta x))\big) - f^{(3)}\big(f^{(2)}(f^{(1)}x)\big)$$

gesetzt

$$f^{(2)}\big(f^{(1)}(x + \Delta x)\big) = f^{(2)}(f^{(1)}x) + \Delta f^{(2)}(f^{(1)}x)$$

und nun der Unterschied in zwei Factoren zerlegt, wovon ein Factor $\Delta f^{(2)}(f^{(1)}x)$ ist

$$\Delta f^{(3)}\big(f^{(2)}(f^{(1)}x)\big) = \frac{f^{(3)}\big(f^{(2)}(f^{(1)}x) + \Delta f^{(2)}(f^{(1)}x)\big) - f^{(3)}\big(f^{(2)}(f^{(1)}x)\big)}{\Delta f^{(2)}(f^{(1)}x)} . \Delta f^{(2)}(f^{(1)}x)$$

Dieser Factor $\Delta f^{(2)}(f^{(1)}x)$ wird wieder wie oben in Factoren zerlegt; es ist also

$$75) \quad \Delta f^{(3)}\big(f^{(2)}(f^{(1)}x)\big) = \frac{f^{(3)}\big(f^{(2)}(f^{(1)}x) + \Delta f^{(2)}(f^{(1)}x)\big) - f^{(3)}\big(f^{(2)}(f^{(1)}x)\big)}{\Delta f^{(2)}(f^{(1)}x)} .$$

$$. \frac{f^{(2)}(f^{(1)}x + \Delta f^{(1)}x) - f^{(2)}(f^{(1)}x)}{\Delta f^{(1)}x} .$$

$$. \frac{f^{(1)}(x + \Delta x) - f^{(1)}x}{\Delta x} . \Delta x$$

oder in andern Zeichen ist

76) $$\Delta f^{(2)}(f^{(1)}x) = \frac{\Delta f^{(2)}(f^{(1)}x)}{\Delta f^{(1)}x} . \frac{\Delta f^{(1)}x}{\Delta x} . \Delta x$$

$$\Delta f^{(3)}\left(f^{(2)}(f^{(1)}x)\right) = \frac{\Delta f^{(3)}\left(f^{(2)}(f^{(1)}x)\right)}{\Delta f^{(2)}(f^{(1)}x)} . \frac{\Delta f^{(2)}(f^{(1)}x)}{\Delta f^{(1)}x} . \frac{\Delta f^{(1)}x}{\Delta x} . \Delta x$$

und so auch, wenn mehrere untergeordnete Functionen gegeben sind.

Soll der Unterschied von einem Producte zusammengesetzter Functionen gesucht werden, z. B. von

$$f^{(1)}(x) \;.\; f(\varphi y)$$

so ist nach 48

$$\Delta\left(f^{(1)}(x) . f(\varphi y)\right) = f^{(1)}(x + \Delta x) . \Delta_y f(\varphi y) + f(\varphi y) . \Delta_x f^{(1)}x$$

und wenn $\Delta_y\, f(\varphi y)$ in seine Factoren zerlegt wird

77) $$\Delta\left(f^{(1)}(x) . f(\varphi y)\right) = f^{(1)}(x+\Delta x) . \frac{\Delta f(\varphi y)}{\Delta \varphi y} . \frac{\Delta \varphi y}{\Delta y} . \Delta y + \frac{\Delta f^{(1)}x}{\Delta x} . \Delta x . f(\varphi y)$$

oder wenn nach 47

$$\Delta\left(f^{(1)}(x) . f(\varphi y)\right) = f\left(\varphi(y + \Delta y)\right) . \Delta_x f^{(1)}x + f^{(1)}x . \Delta_y f(\varphi y)$$

gesetzt wird, so ist auch

78) $$\Delta\left(f^{(1)}(x) . f(\varphi y)\right) = f\left(\varphi(y + \Delta y)\right) . \frac{\Delta f^{(1)}x}{\Delta x} . \Delta x + f^{(1)}(x) . \frac{\Delta f(\varphi y)}{\Delta \varphi y} . \frac{\Delta \varphi y}{\Delta y} . \Delta y$$

§. 32.

Indem wir zu den spätern Unterschieden der Functionen von Functionen übergehen, legen wir uns den einfachsten Fall in folgenden Zeichen vor:

$$z = f\left(\varphi(x)\right)$$

oder, wenn wir

$$\varphi x = y$$

setzen, in den Zeichen

$$z = f(y)$$

Der erste Unterschied ist

$$\frac{\Delta z}{\Delta x} = \frac{\Delta f(\varphi x)}{\Delta \varphi x} \cdot \frac{\Delta \varphi x}{\Delta x} = \frac{\Delta f y}{\Delta y} \cdot \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

und nach 77 der zweite Unterschied

$$\frac{\Delta^2 z}{(\Delta x)^2} = \frac{\Delta^2 f y}{(\Delta y)^2} \cdot \frac{\Delta \varphi x}{\Delta x} \cdot \frac{\Delta \varphi (x + \Delta x)}{\Delta x} + \frac{\Delta^1 f y}{\Delta y} \cdot \frac{\Delta^2 \varphi x}{(\Delta x)^2}$$

Sowohl bei diesen als bei den spätern Unterschieden lassen sich die Producte, welche durch die vielen Geschäfte entstehen, auf folgende Weise ordnen:

$$79)\quad \frac{\Delta^n f(y)}{(\Delta x)^n} = \frac{\Delta^n f y}{(\Delta y)^n} . (\varphi x)_{n,1} + \frac{\Delta^{n-1} f y}{(\Delta y)^{n-1}} . (\varphi x)_{n,2} + \frac{\Delta^{n-2} f y}{(\Delta y)^{n-2}} . (\varphi x)_{n,3} + \cdots + \frac{\Delta^0 f y}{(\Delta y)^0} . (\varphi x)_{n,n+1}$$

Der Uebergang von n zu n + 1 erzeugt die zurücklaufende Bildungsweise der Vorzahlen $(\varphi x)_{n,1}, \ldots\ldots$, und dieser Uebergang besteht darin, dass von jedem Theile dieser Reihe der Unterschied genommen wird und zwar nach der Vorschrift 77 oder nach der Gleichung

$$\frac{\Delta}{\Delta x}\left(\frac{\Delta^{n-q} f y}{(\Delta y)^{n-q}} \cdot (\varphi x)_{n,q+1}\right) = \frac{\Delta^{n-q+1} f y}{(\Delta y)^{n-q+1}} \cdot \frac{\Delta \varphi x}{\Delta x} \cdot \varphi (x + \Delta x)_{n,q+1} + \frac{\Delta^{n-q} f y}{(\Delta y)^{n-q}} \cdot \frac{\Delta (\varphi x)_{n,q+1}}{\Delta x}$$

Den (n + 1)ten Unterschied gibt nach diesem folgende Reihe an

$$\begin{aligned}
\frac{\Delta^{n+1} f(y)}{(\Delta x)^{n+1}} = {} & \frac{\Delta^{n+1} f y}{(\Delta y)^{n+1}} \cdot \frac{\Delta \varphi x}{\Delta x} \cdot \left(\varphi (x + \Delta x)_{n,1} \right) \\
& + \frac{\Delta^n f y}{(\Delta y)^n} \cdot \left(\frac{\Delta \varphi x}{\Delta x} \cdot \varphi (x + \Delta x)_{n,2} + \frac{\Delta \varphi (x)_{n,1}}{\Delta x} \right) \\
& + \frac{\Delta^{n-1} f y}{(\Delta y)^{n-1}} \cdot \left(\frac{\Delta \varphi x}{\Delta x} \cdot \varphi (x + \Delta x)_{n,3} + \frac{\Delta \varphi (x)_{n,2}}{\Delta x} \right) \\
& + \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
& + \frac{\Delta^1 f y}{(\Delta y)^1} \cdot \left(\frac{\Delta \varphi x}{\Delta x} \cdot \varphi (x + \Delta x)_{n,n+1} + \frac{\Delta \varphi (x)_{n,n}}{\Delta x} \right) \\
& + \frac{\Delta^0 f y}{(\Delta y)^0} \cdot \left(\qquad \frac{\Delta (\varphi x)_{n,n+1}}{\Delta x} \right)
\end{aligned}$$

Die zurücklaufende Bildungsweise der obigen Vorzahlen ist also

80)
$$\varphi(x)_{n+1,1} = \frac{\Delta\varphi x}{\Delta x} . \varphi(x + \Delta x)_{n,1}$$

$$\varphi(x)_{n+1,2} = \frac{\Delta\varphi x}{\Delta x} . \varphi(x + \Delta x)_{n,2} + \frac{\Delta\varphi(x)_{n,1}}{\Delta x}$$

$$\varphi(x)_{n+1,3} = \frac{\Delta\varphi x}{\Delta x} . \varphi(x + \Delta x)_{n,3} + \frac{\Delta\varphi(x)_{n,2}}{\Delta x}$$

. . . .

$$\varphi(x)_{n+1,q} = \frac{\Delta\varphi x}{\Delta x} . \varphi(x + \Delta x)_{n,q} + \frac{\Delta\varphi(x)_{n,q-1}}{\Delta x} .$$

. . . .

$$\varphi(x)_{n+1,n+2} = \frac{\Delta\varphi(x)_{n,n+1}}{\Delta x}$$

Aus dieser lässt sich folgende unabhängige Bildungsweise herleiten; es ist

$$\frac{\Delta^0 f y}{(\Delta x)^0} = f y$$

also

81) $(\varphi x)_{0,1} = 1$, und daher $(\varphi x)_{1,2} = 0$, $(\varphi x)_{2,3} = 0, \ldots,$ und $(\varphi x)_{n,n+1} = 0$

ferner ist

82)
$$(\varphi x)_{1,1} = \frac{\Delta\varphi x}{\Delta x}$$

$$(\varphi x)_{2,1} = \frac{\Delta\varphi x}{\Delta x} . \frac{\Delta\varphi(x+\Delta x)}{\Delta x}$$

$$(\varphi x)_{3,1} = \frac{\Delta\varphi x}{\Delta x} . \frac{\Delta\varphi(x+\Delta x)}{\Delta x} . \frac{\Delta\varphi(x+2\Delta x)}{\Delta x}$$

. . . .

$$(\varphi x)_{n,1} = \frac{\Delta\varphi x}{\Delta x} . \frac{\Delta\varphi(x+\Delta x)}{\Delta x} . \frac{\Delta\varphi(x+2\Delta x)}{\Delta x} \ldots\ldots \frac{\Delta\varphi(x+(n-1)\Delta x)}{\Delta x}$$

ferner ist

$$83)\;(\varphi x)_{2,2}=\frac{\Delta^1}{\Delta x^1}\left(\frac{\Delta\varphi x}{\Delta x}\right)$$

$$(\varphi x)_{3,2}=\frac{\Delta^0}{\Delta x^0}\left(\frac{\Delta\varphi x}{\Delta x}\cdot\frac{\Delta^1}{\Delta x^1}\left(\frac{\Delta\varphi(x+\Delta x)}{\Delta x}\right)\right)$$

$$+\frac{\Delta^1}{\Delta x^1}\left(\frac{\Delta\varphi x}{\Delta x}\cdot\frac{\Delta^0}{\Delta x^0}\left(\frac{\Delta\varphi(x+\Delta x)}{\Delta x}\right)\right)$$

$$(\varphi x)_{4,2}=\frac{\Delta^0}{\Delta x^0}\left(\frac{\Delta\varphi x}{\Delta x}\cdot\frac{\Delta^0}{\Delta x^0}\left(\frac{\Delta\varphi(x+\Delta x)}{\Delta x}\cdot\frac{\Delta^1}{\Delta x^1}\left(\frac{\Delta\varphi(x+2\Delta x)}{\Delta x}\right)\right)\right)$$

$$+\frac{\Delta^0}{\Delta x^0}\left(\frac{\Delta\varphi x}{\Delta x}\cdot\frac{\Delta^1}{\Delta x^1}\left(\frac{\Delta\varphi(x+\Delta x)}{\Delta x}\cdot\frac{\Delta^0}{\Delta x^0}\left(\frac{\Delta\varphi(x+2\Delta x)}{\Delta x}\right)\right)\right)$$

$$+\frac{\Delta^1}{\Delta x^1}\left(\frac{\Delta\varphi x}{\Delta x}\cdot\frac{\Delta^0}{\Delta x^0}\left(\frac{\Delta\varphi(x+\Delta x)}{\Delta x}\cdot\frac{\Delta^0}{\Delta x^0}\left(\frac{\Delta\varphi(x+2\Delta x)}{\Delta x}\right)\right)\right)$$

$$(\varphi x)_{5,2}=\frac{\Delta^0}{\Delta x^0}\left(\frac{\Delta\varphi x}{\Delta x}\cdot\frac{\Delta^0}{\Delta x^0}\left(\frac{\Delta\varphi(x+\Delta x)}{\Delta x}\cdot\frac{\Delta^0}{\Delta x^0}\left(\frac{\Delta\varphi(x+2\Delta x)}{\Delta x}\cdot\frac{\Delta^1}{\Delta x^1}\left(\frac{\Delta\varphi(x+3\Delta x)}{\Delta x}\right)\right)\right)\right)$$

$$+\frac{\Delta^0}{\Delta x^0}\left(\frac{\Delta\varphi x}{\Delta x}\cdot\frac{\Delta^0}{\Delta x^0}\left(\frac{\Delta\varphi(x+\Delta x)}{\Delta x}\cdot\frac{\Delta^1}{\Delta x^1}\left(\frac{\Delta\varphi(x+2\Delta x)}{\Delta x}\cdot\frac{\Delta^0}{\Delta x^0}\left(\frac{\Delta\varphi(x+3\Delta x)}{\Delta x}\right)\right)\right)\right)$$

$$+\frac{\Delta^0}{\Delta x^0}\left(\frac{\Delta\varphi x}{\Delta x}\cdot\frac{\Delta^1}{\Delta x^1}\left(\frac{\Delta\varphi(x+\Delta x)}{\Delta x}\cdot\frac{\Delta^0}{\Delta x^0}\left(\frac{\Delta\varphi(x+2\Delta x)}{\Delta x}\cdot\frac{\Delta^0}{\Delta x^0}\left(\frac{\Delta\varphi(x+3\Delta x)}{\Delta x}\right)\right)\right)\right)$$

$$+\frac{\Delta^1}{\Delta x^1}\left(\frac{\Delta\varphi x}{\Delta x}\cdot\frac{\Delta^0}{\Delta x^0}\left(\frac{\Delta\varphi(x+\Delta x)}{\Delta x}\cdot\frac{\Delta^0}{\Delta x^0}\left(\frac{\Delta\varphi(x+2\Delta x)}{\Delta x}\cdot\frac{\Delta^0}{\Delta x^0}\left(\frac{\Delta\varphi(x+3\Delta x)}{\Delta x}\right)\right)\right)\right)$$

u. s. w. Die Stellenzahlen sind die Zerfällungen der Summe 1 in ein oder zwei oder drei, oder vier oder mehrere Elemente.

Ferner ist

84)
$$(\varphi x)_{3,3} = \frac{\Delta^2}{\Delta x^2}\left(\frac{\Delta \varphi x}{\Delta x}\right)$$

$$(\varphi x)_{4,3} = \frac{\Delta^0}{\Delta x^0}\left(\frac{\Delta \varphi x}{\Delta x} \cdot \frac{\Delta^2}{\Delta x^2}\left(\frac{\Delta \varphi(x + \Delta x)}{\Delta x}\right)\right)$$
$$+ \frac{\Delta^1}{\Delta x^1}\left(\frac{\Delta \varphi x}{\Delta x} \cdot \frac{\Delta^1}{\Delta x^1}\left(\frac{\Delta \varphi(x + \Delta x)}{\Delta x}\right)\right)$$
$$+ \frac{\Delta^2}{\Delta x^2}\left(\frac{\Delta \varphi x}{\Delta x} \cdot \frac{\Delta^0}{\Delta x^0}\left(\frac{\Delta \varphi(x + \Delta x)}{\Delta x}\right)\right)$$

$$(\varphi x)_{5,3} = \frac{\Delta^0}{\Delta x^0}\left(\frac{\Delta \varphi x}{\Delta x} \cdot \frac{\Delta^0}{\Delta x^0}\left(\frac{\Delta \varphi(x + \Delta x)}{\Delta x} \cdot \frac{\Delta^2}{\Delta x^2}\left(\frac{\Delta \varphi(x + 2\Delta x)}{\Delta x}\right)\right)\right)$$
$$+ \frac{\Delta^0}{\Delta x^0}\left(\frac{\Delta \varphi x}{\Delta x} \cdot \frac{\Delta^1}{\Delta x^1}\left(\frac{\Delta \varphi(x + \Delta x)}{\Delta x} \cdot \frac{\Delta^1}{\Delta x^1}\left(\frac{\Delta \varphi(x + 2\Delta x)}{\Delta x}\right)\right)\right)$$
$$+ \frac{\Delta^0}{\Delta x^0}\left(\frac{\Delta \varphi x}{\Delta x} \cdot \frac{\Delta^2}{\Delta x^2}\left(\frac{\Delta \varphi(x + \Delta x)}{\Delta x} \cdot \frac{\Delta^0}{\Delta x^0}\left(\frac{\Delta \varphi(x + 2\Delta x)}{\Delta x}\right)\right)\right)$$
$$+ \frac{\Delta^1}{\Delta x^1}\left(\frac{\Delta \varphi x}{\Delta x} \cdot \frac{\Delta^0}{\Delta x^0}\left(\frac{\Delta \varphi(x + \Delta x)}{\Delta x} \cdot \frac{\Delta^1}{\Delta x^1}\left(\frac{\Delta \varphi(x + 2\Delta x)}{\Delta x}\right)\right)\right)$$
$$+ \frac{\Delta^1}{\Delta x^1}\left(\frac{\Delta \varphi x}{\Delta x} \cdot \frac{\Delta^1}{\Delta x^1}\left(\frac{\Delta \varphi(x + \Delta x)}{\Delta x} \cdot \frac{\Delta^0}{\Delta x^0}\left(\frac{\Delta \varphi x(x + 2\Delta x)}{\Delta x}\right)\right)\right)$$
$$+ \frac{\Delta^2}{\Delta x^2}\left(\frac{\Delta \varphi x}{\Delta x} \cdot \frac{\Delta^0}{\Delta x^0}\left(\frac{\Delta \varphi(x + \Delta x)}{\Delta x} \cdot \frac{\Delta^0}{\Delta x^0}\left(\frac{\Delta \varphi(x + 2\Delta x)}{\Delta x}\right)\right)\right)$$

Die Stellenzahlen von $\frac{\Delta}{\Delta x}$ sind die Zerfällungen von 2 in ein, zwei, drei . . . . mehrere Elemente als

2

0 2
1 1
2 0

0 0 2
0 1 1
0 2 0
1 0 1
1 1 0
2 0 0

0 0 0 2 u. s. w.
0 0 1 1
0 0 2 0
0 1 0 1
0 1 1 0
0 2 0 0
1 0 0 1
1 0 1 0
1 1 0 0
2 0 0 0

Ferner ist

85) $$(\varphi x)_{4,4} = \frac{\Delta^3}{\Delta x^3}\left(\frac{\Delta \varphi x}{\Delta x}\right)$$

$$\begin{aligned}(\varphi x)_{6,4} = & \frac{\Delta^0}{\Delta x^0}\left(\frac{\Delta \varphi x}{\Delta x} \cdot \frac{\Delta^3}{\Delta x^3}\left(\frac{\Delta \varphi(x + \Delta x)}{\Delta x}\right)\right) \\ & + \frac{\Delta^1}{\Delta x^1}\left(\frac{\Delta \varphi x}{\Delta x} \cdot \frac{\Delta^2}{\Delta x^2}\left(\frac{\Delta \varphi(x + \Delta x)}{\Delta x}\right)\right) \\ & + \frac{\Delta^2}{\Delta x^2}\left(\frac{\Delta \varphi x}{\Delta x} \cdot \frac{\Delta^1}{\Delta x^1}\left(\frac{\Delta \varphi(x + \Delta x)}{\Delta x}\right)\right) \\ & + \frac{\Delta^3}{\Delta x^3}\left(\frac{\Delta \varphi x}{\Delta x} \cdot \frac{\Delta^0}{\Delta x^0}\left(\frac{\Delta \varphi(x + \Delta x)}{\Delta x}\right)\right)\end{aligned}$$

Die Stellenzahlen von $\frac{\Delta}{\Delta x}$ in $(\varphi x)_{6,4}$ sind die Zerfällungen von 3 in drei Elemente, nämlich

$$(\varphi x)_{6,4} = \frac{\Delta^0}{\Delta x^0}\left(\frac{\Delta\varphi x}{\Delta x}\cdot\frac{\Delta^0}{\Delta x^0}\left(\frac{\Delta\varphi(x+\Delta x)}{\Delta x}\cdot\frac{\Delta^3}{\Delta x^3}\left(\frac{\Delta\varphi(x+2\Delta x)}{\Delta x}\right)\right)\right)$$

0	1	2
0	2	1
0	3	0
1	0	2
1	1	1
1	2	0
2	0	1
2	1	0
3	0	0

und so ergeben sich bei $(\varphi x)_{7,4}$ die Zerfällungen von 3 in 4 Elemente, nämlich

0	0	0	3
0	0	1	2
0	0	2	1
0	0	3	0
0	1	0	2
0	1	1	1
0	1	2	0
0	2	0	1
0	2	1	0
0	3	0	0
1	0	0	2
1	0	1	1
1	0	2	0
1	1	0	1
1	1	1	0
1	2	0	0
2	0	0	1
2	0	1	0
2	1	0	0
3	0	0	0

§. 33.

Die Unterschiede der obigen Function

$$z = f(\varphi x) = f y$$

lassen sich noch auf eine zweite Art entwickeln; denn es ist der erste Unterschied

$$\frac{\Delta z}{\Delta x} = \frac{\Delta f y}{\Delta y} \cdot \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

und nach 78 der folgende Unterschied

$$\frac{\Delta^2 f y}{(\Delta x)^2} = \frac{\Delta^1 f(y + \Delta y)}{\Delta y} \cdot \frac{\Delta^2 y}{(\Delta x)^2} + \frac{\Delta^2 f y}{(\Delta y)^2} \cdot \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2$$

Hiedurch erhalten die spätern Unterschiede folgende Gestalt:

$$86) \quad \frac{\Delta^n f y}{(\Delta x)^n} = \frac{\Delta^n f y}{(\Delta y)^n} \cdot (\varphi x)'_{n,0} + \frac{\Delta^{n-1} f(y + \Delta y)}{(\Delta y)^{n-1}} \cdot (\varphi x)'_{n,1} + \frac{\Delta^{n-2} f(y + 2\Delta y)}{(\Delta y)^{n-2}} \cdot (\varphi x)'_{n,2} + \ldots$$

$$\ldots + \frac{\Delta^{n-q} f(y + q\Delta y)}{(\Delta y)^{n-q}} \cdot (\varphi x)'_{n,q} + \ldots . + \frac{\Delta^0 f(y + n\Delta y)}{(\Delta y)^0} \cdot (\varphi x)'_{n,n}$$

Das zurücklaufende Bildungsgesetz dieser Vorzahlen ergiebt sich durch den nächsten Unterschied, der nach folgender Vorschrift genommen wird

$$\frac{\Delta}{\Delta x}\left(\frac{\Delta^{n-q} f(y+q\Delta y)}{(\Delta y)^{n-q}} \cdot (\varphi x)'_{n,q}\right)$$

$$= \frac{\Delta^{n-q} f(y+(q+1)\Delta y)}{(\Delta y)^{n-q}} \cdot \frac{\Delta(\varphi x)'_{n,q}}{\Delta x} + \frac{\Delta^{n-q+1} f(y+q\Delta y)}{(\Delta y)^{n-q+1}} \cdot \frac{\Delta\varphi x}{\Delta x} \cdot (\varphi x)'_{n,q}$$

Wird in dieser Gleichung $q = 0, 1, \ldots, n$ gesetzt, so wird

$$\frac{\Delta^{n+1} f y}{(\Delta x)^{n+1}} = \frac{\Delta^{n+1} f y}{(\Delta y)^{n+1}} \cdot \frac{\Delta \varphi x}{\Delta x} \cdot (\varphi x)'_{n,0}$$

$$+ \frac{\Delta^{n} f(y + \Delta y)}{(\Delta y)^{n}} \cdot \left(\frac{\Delta(\varphi x)'_{n,0}}{\Delta x} + \frac{\Delta \varphi x}{\Delta x} \cdot (\varphi x)'_{n,1}\right)$$

$$+ \frac{\Delta^{n-1} f(y + 2\Delta y)}{(\Delta y)^{n-1}} \cdot \left(\frac{\Delta(\varphi x)'_{n,1}}{\Delta x} + \frac{\Delta \varphi x}{\Delta x} \cdot (\varphi x)'_{n,2}\right)$$

$$+ \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot$$

$$+ \frac{\Delta^{0} f(y + (n+1)\Delta y)}{(\Delta y)^{0}} \cdot \left(\frac{\Delta(\varphi x)'_{n,n}}{\Delta x}\right)$$

Die zurücklaufende Bildungsweise der obigen Vorzahlen ist also

87)
$$(\varphi x)'_{n+1,0} = \frac{\Delta \varphi x}{\Delta x} \cdot (\varphi x)'_{n,0}$$

$$(\varphi x)'_{n+1,1} = \frac{\Delta \varphi x}{\Delta x} \cdot (\varphi x)'_{n,1} + \frac{\Delta(\varphi x)'_{n,0}}{\Delta x}$$

$$(\varphi x)'_{n+1,2} = \frac{\Delta \varphi x}{\Delta x} \cdot (\varphi x)'_{n,2} + \frac{\Delta(\varphi x)'_{n,1}}{\Delta x}$$

$$\cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot$$

$$(\varphi x)'_{n+1,q} = \frac{\Delta \varphi x}{\Delta x} \cdot (\varphi x)'_{n,q} + \frac{\Delta(\varphi x)'_{n,q-1}}{\Delta x}$$

$$\cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot$$

$$(\varphi x)'_{n+1,n+1} = \frac{\Delta(\varphi x)'_{n,n}}{\Delta x}$$

Die unabhängige Bildungsweise, zu welcher die zurücklaufende führt, ist:

88) $$(\phi x)'_{0,0} = 1,\ (\phi x)'_{1,1} = (\phi x)'_{2,2} = \dots\dots = (\phi x)'_{n,n} = 0$$

ferner ist

89) $$(\phi x)'_{1,0} = \frac{\Delta\,\phi x}{\Delta x},\ (\phi x)'_{2,0} = \left(\frac{\Delta\,\phi x}{\Delta x}\right)^2, \dots, (\phi x)'_{n,0} = \left(\frac{\Delta\,\phi x}{\Delta x}\right)^n$$

ferner

90) $$(\phi x)'_{2,1} = \frac{\Delta^1}{\Delta x^1}\left(\frac{\Delta\,\phi x}{\Delta x}\right)$$

$$(\phi x)'_{3,1} = \frac{\Delta^0}{\Delta x^0}\left(\frac{\Delta\,\phi x}{\Delta x}\cdot\frac{\Delta^1}{\Delta x^1}\left(\frac{\Delta\,\phi x}{\Delta x}\right)\right)$$

$$+\frac{\Delta^1}{\Delta x^1}\left(\frac{\Delta\,\phi x}{\Delta x}\cdot\frac{\Delta^0}{\Delta x^0}\left(\frac{\Delta\,\phi x}{\Delta x}\right)\right)$$

$$(\phi x)'_{4,1} = \frac{\Delta^0}{\Delta x^0}\left(\frac{\Delta\,\phi x}{\Delta x}\cdot\frac{\Delta^0}{\Delta x^0}\left(\frac{\Delta\,\phi x}{\Delta x}\cdot\frac{\Delta^1}{\Delta x^1}\left(\frac{\Delta\,\phi x}{\Delta x}\right)\right)\right)$$

$$+\frac{\Delta^0}{\Delta x^0}\left(\frac{\Delta\,\phi x}{\Delta x}\cdot\frac{\Delta^1}{\Delta x^1}\left(\frac{\Delta\,\phi x}{\Delta x}\cdot\frac{\Delta^0}{\Delta x^0}\left(\frac{\Delta\,\phi x}{\Delta x}\right)\right)\right)$$

$$+\frac{\Delta^1}{\Delta x^1}\left(\frac{\Delta\,\phi x}{\Delta x}\cdot\frac{\Delta^0}{\Delta x^0}\left(\frac{\Delta\,\phi x}{\Delta x}\cdot\frac{\Delta^0}{\Delta x^0}\left(\frac{\Delta\,\phi x}{\Delta x}\right)\right)\right)$$

u. s. w.; ferner ist

91) $$(\varphi x)'_{3,2} = \frac{\Delta^2}{\Delta x^2}\left(\frac{\Delta\varphi x}{\Delta x}\right)$$

$$(\varphi x)'_{4,2} = \frac{\Delta^0}{\Delta x^0}\left(\frac{\Delta\varphi x}{\Delta x}\cdot\frac{\Delta^2}{\Delta x^2}\left(\frac{\Delta\varphi x}{\Delta x}\right)\right)$$

$$+ \frac{\Delta^1}{\Delta x^1}\left(\frac{\Delta\varphi x}{\Delta x}\cdot\frac{\Delta^1}{\Delta x^1}\left(\frac{\Delta\varphi x}{\Delta x}\right)\right)$$

$$+ \frac{\Delta^2}{\Delta x^2}\left(\frac{\Delta\varphi x}{\Delta x}\cdot\frac{\Delta^0}{\Delta x^0}\left(\frac{\Delta\varphi x}{\Delta x}\right)\right)$$

$$(\varphi x)'_{5,2} = \frac{\Delta^0}{\Delta x^0}\left(\frac{\Delta\varphi x}{\Delta x}\cdot\frac{\Delta^0}{\Delta x^0}\left(\frac{\Delta\varphi x}{\Delta x}\cdot\frac{\Delta^2}{\Delta x^2}\left(\frac{\Delta\varphi x}{\Delta x}\right)\right)\right)$$

0	1	1
0	2	0
1	0	1
1	1	0
2	0	0

Hier entstehen die Zerfällungen von 2 in mehrere Elemente. Ferner ist

92) $$(\varphi x)'_{4,3} = \frac{\Delta^3}{\Delta x^3}\left(\frac{\Delta\varphi x}{\Delta x}\right)$$

$$(\varphi x)'_{5,3} = \frac{\Delta^0}{\Delta x^0}\left(\frac{\Delta\varphi x}{\Delta x}\cdot\frac{\Delta^3}{\Delta x^3}\left(\frac{\Delta\varphi x}{\Delta x}\right)\right)$$

1	2
2	1
3	0

$$(\varphi x)'_{6,3} = \frac{\Delta^0}{\Delta x^0}\left(\frac{\Delta\varphi x}{\Delta x}\cdot\frac{\Delta^0}{\Delta x^0}\left(\frac{\Delta\varphi x}{\Delta x}\cdot\frac{\Delta^3}{\Delta x^3}\left(\frac{\Delta\varphi x}{\Delta x}\right)\right)\right)$$

0	1	2
0	2	1
0	3	0
1	0	2
1	1	1
1	2	0
2	0	1
2	1	0
3	0	0

Allgemein ergibt sich folgendes Gesetz:

$$93)\ (\varphi x)'_{n,q} = \Sigma\frac{\Delta^{\nu 1}}{\Delta x^{\nu 1}}\Big(_{n-q}\frac{\Delta\varphi x}{\Delta x}\cdot\frac{\Delta^{\nu 2}}{\Delta x^{\nu 2}}\Big(_{n-q+1}\frac{\Delta\varphi x}{\Delta x}\cdot\frac{\Delta^{\nu 3}}{\Delta x^{\nu 3}}\Big(_{n-q+2}\frac{\Delta\varphi x}{\Delta x}\cdots\frac{\Delta^{\nu(n-q+1)}}{\Delta x^{\nu(n-q+1)}}\Big(_{2}\frac{\Delta\varphi x}{\Delta x}\cdot\frac{\Delta^{\nu(n-q)}}{\Delta x^{\nu(n-q)}}\Big(_{1}\frac{\Delta\varphi x}{\Delta x}\Big)_{1}\cdots\Big)_{n-q}$$

wo

$$\nu 1 + \nu 2 + \nu 3 + \ldots\ldots + \nu(n-q) = q$$

und $\nu 1$, $\nu 2$, ..., $\nu(n-q)$ alle Werthe von 0, 1, ... bis q annehmen können.

§. 34.

Wir gehen zu einem andern Falle über, wo in der Function ausser dem y, welches eine Function von x ist

$$y = \varphi x$$

auch noch die Grundgrösse x vorkommt

$$z = f(x, y) = f(x, \varphi x)$$

Der erste Unterschied ist nach 48

$$94)\qquad \frac{\Delta\, f(x,y)}{\Delta x} = \frac{\Delta_x\, f(x,y)}{\Delta x} + \frac{\Delta\,\varphi x}{\Delta x}\cdot\frac{\Delta_y\, f(x+\Delta x, y)}{\Delta y}$$

Der zweite und jeder folgende wird nach dieser Vorschrift aus dem unmittelbar vorhergehenden Unterschiede hergeleitet; es ist

$$95)\quad \frac{\Delta^2 f(x,y)}{(\Delta x)^2} = \frac{\Delta_x^2 f(x,y)}{\Delta x^2}$$

$$+ \frac{\Delta_x^0}{\Delta x^0}\left(\frac{\Delta \varphi x}{\Delta x} \cdot \frac{\Delta_x^1}{\Delta x^1}\left(\frac{\Delta_y^1 f(x+\Delta x, y)}{\Delta y}\right)\right)$$

$$+ \frac{\Delta_x^1}{\Delta x^1}\left(\frac{\Delta \varphi x}{\Delta x} \cdot \frac{\Delta_x^0}{\Delta x^0}\left(\frac{\Delta_y^1 f(x+\Delta x, y)}{\Delta y}\right)\right)$$

$$+ \frac{\Delta_x^0}{\Delta x^0}\left(\frac{\Delta \varphi x}{\Delta x} \cdot \frac{\Delta_x^0}{\Delta x^0}\left(\frac{\Delta \varphi(x+\Delta x)}{\Delta x} \cdot \frac{\Delta_x^0}{\Delta x^0}\left(\frac{\Delta_y^2 f(x+2\Delta x, y)}{\Delta y^2}\right)\right)\right)$$

und

$$96)\ \frac{\Delta^3 f(x,y)}{(\Delta x)^3} = \frac{\Delta_x^3 f(x,y)}{\Delta x^3}$$

$$+ \frac{\Delta_x^0}{\Delta x^0}\left(\frac{\Delta \varphi x}{\Delta x} \cdot \frac{\Delta_x^2}{\Delta x^2}\left(\frac{\Delta_y^1 f(x+\Delta x,y)}{\Delta y}\right)\right)$$

$$+ \frac{\Delta_x^1}{\Delta x^1}\left(\frac{\Delta \varphi x}{\Delta x} \cdot \frac{\Delta_x^1}{\Delta x^1}\left(\frac{\Delta_y^1 f(x+\Delta x,y)}{\Delta y}\right)\right)$$

$$+ \frac{\Delta_x^2}{\Delta x^2}\left(\frac{\Delta \varphi x}{\Delta x} \cdot \frac{\Delta_x^0}{\Delta x^0}\left(\frac{\Delta_y^1 f(x+\Delta x,y)}{\Delta y}\right)\right)$$

$$+ \frac{\Delta_x^0}{\Delta x^0}\left(\frac{\Delta \varphi x}{\Delta x} \cdot \frac{\Delta_x^0}{\Delta x^0}\left(\frac{\Delta \varphi(x+\Delta x)}{\Delta x} \cdot \frac{\Delta_x^1}{\Delta x^1}\left(\frac{\Delta_y^2 f(x+2\Delta x,y)}{\Delta y^2}\right)\right)\right)$$

$$+ \frac{\Delta_x^0}{\Delta x^0}\left(\frac{\Delta \varphi x}{\Delta x} \cdot \frac{\Delta_x^1}{\Delta x^1}\left(\frac{\Delta \varphi(x+\Delta x)}{\Delta x} \cdot \frac{\Delta_x^0}{\Delta x^0}\left(\frac{\Delta_y^2 f(x+2\Delta x,y)}{\Delta y^2}\right)\right)\right)$$

$$+ \frac{\Delta_x^1}{\Delta x^1}\left(\frac{\Delta \varphi x}{\Delta x} \cdot \frac{\Delta_x^0}{\Delta x^0}\left(\frac{\Delta \varphi(x+\Delta x)}{\Delta x} \cdot \frac{\Delta_x^0}{\Delta x^0}\left(\frac{\Delta_y^2 f(x+2\Delta x,y)}{\Delta y^2}\right)\right)\right)$$

$$+ \frac{\Delta_x^0}{\Delta x^0}\left(\frac{\Delta \varphi x}{\Delta x} \cdot \frac{\Delta_x^0}{\Delta x^0}\left(\frac{\Delta \varphi(x+\Delta x)}{\Delta x} \cdot \frac{\Delta_x^0}{\Delta x^0}\left(\frac{\Delta \varphi(x+2\Delta x)}{\Delta x} \cdot \frac{\Delta_x^0}{\Delta x^0}\left(\frac{\Delta_y^3 f(x+3\Delta x,y)}{\Delta y^3}\right)\right)\right)\right)$$

Das Gesetz der Bildung, welches hier sichtbar ist, findet auch bei dem vierten und jedem folgenden Unterschiede statt; so ist

$$97)\qquad \frac{\Delta^4 f(x,y)}{(\Delta x)^4} = \frac{\Delta_x^4}{\Delta x^4}\left(\frac{\Delta_y^0 f(x,y)}{\Delta y^0}\right)$$

$$+ \frac{\Delta_x^0}{\Delta x^0}\left(\frac{\Delta\varphi x}{\Delta x}\cdot\frac{\Delta_x^3}{\Delta x^3}\left(\frac{\Delta_y^1 f(x+\Delta x,y)}{\Delta y^1}\right)\right)$$

$$\begin{array}{lll} + & 1 & 2 \\ + & 2 & 1 \\ + & 3 & 0 \end{array}$$

$$+ \frac{\Delta_x^0}{\Delta x^0}\left(\frac{\Delta\varphi x}{\Delta x}\cdot\frac{\Delta_x^0}{\Delta x^0}\left(\frac{\Delta\varphi(x+\Delta x)}{\Delta x}\cdot\frac{\Delta_x^2}{\Delta x^2}\left(\frac{\Delta_y^2 f(x+2\Delta x,y)}{\Delta y^2}\right)\right)\right)$$

$$\begin{array}{llll} + & 0 & 1 & 1 \\ + & 0 & 2 & 0 \\ + & 1 & 0 & 1 \\ + & 1 & 1 & 0 \\ + & 2 & 0 & 0 \end{array}$$

$$+ \frac{\Delta_x^0}{\Delta x^0}\left(\frac{\Delta\varphi x}{\Delta x}\cdot\frac{\Delta_x^0}{\Delta x^0}\left(\frac{\Delta\varphi(x+\Delta x)}{\Delta x}\cdot\frac{\Delta_x^0}{\Delta x^0}\left(\frac{\Delta\varphi(x+2\Delta x)}{\Delta x}\cdot\frac{\Delta_x^1}{\Delta x^1}\left(\frac{\Delta_y^3 f(x+3\Delta x,y)}{\Delta y^3}\right)\right)\right)\right)$$

$$\begin{array}{lllll} + & 0 & 0 & 1 & 0 \\ + & 0 & 1 & 0 & 0 \\ + & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

$$+ \frac{\Delta_x^0}{\Delta x^0}\left(\frac{\Delta\varphi x}{\Delta x}\cdot\frac{\Delta_x^0}{\Delta x^0}\left(\frac{\Delta\varphi(x+\Delta x)}{\Delta x}\cdot\frac{\Delta_x^0}{\Delta x^0}\left(\frac{\Delta\varphi(x+2\Delta x)}{\Delta x}\cdot\frac{\Delta_x^0}{\Delta x^0}\left(\frac{\Delta\varphi(x+3\Delta x)}{\Delta x}\cdot\frac{\Delta_x^0}{\Delta x^0}\left(\frac{\Delta_y^4 f(x+4\Delta x,y)}{\Delta y^4}\right)\right)\right)\right)\right)$$

§. 35.

Wird aber hiebei nach 47 die Gleichung

$$98)\qquad \frac{\Delta f(x,y)}{\Delta x} = \frac{\Delta_x f(x,y+\Delta y)}{\Delta x} + \frac{\Delta\varphi x}{\Delta x}\cdot\frac{\Delta_y f(x,y)}{\Delta y}$$

zu Grunde gelegt, so nehmen auch die spätern Unterschiede eine etwas veränderte Gestalt an; nämlich

99) $$\frac{\Delta^2 f(x,y)}{\Delta x^2} = \frac{\Delta_x^2}{\Delta x^2}\left(\frac{\Delta_y^0 f(x,y+2\Delta y)}{\Delta y^0}\right)$$

$$+ \frac{\Delta_x^0}{\Delta x^0}\left(\frac{\Delta\varphi x}{\Delta x}\cdot\frac{\Delta_x^1}{\Delta x^1}\left(\frac{\Delta_y^1 f(x,y+\Delta y)}{\Delta y}\right)\right)$$

$$+ \frac{\Delta_x^1}{\Delta x^1}\left(\frac{\Delta\varphi x}{\Delta x}\cdot\frac{\Delta_x^0}{\Delta x^0}\left(\frac{\Delta_y^1 f(x,y+\Delta y)}{\Delta y}\right)\right)$$

$$+ \frac{\Delta_x^0}{\Delta x^0}\left(\frac{\Delta\varphi x}{\Delta x}\cdot\frac{\Delta_x^0}{\Delta x^0}\left(\frac{\Delta\varphi x}{\Delta x}\cdot\frac{\Delta_x^0}{\Delta x^0}\left(\frac{\Delta_y^2 f(x,y)}{\Delta y^2}\right)\right)\right)$$

und so auch der dritte Unterschied

100) $$\frac{\Delta^3 f(x,y)}{\Delta x^3} = \frac{\Delta_x^3}{\Delta x^3}\left(\frac{\Delta_y^0 f(x,y+3\Delta y)}{\Delta y^0}\right)$$

$$+ \frac{\Delta_x^0}{\Delta x^0}\left(\frac{\Delta\varphi x}{\Delta x}\cdot\frac{\Delta_x^2}{\Delta x^2}\left(\frac{\Delta_y^1 f(x,y+2\Delta y)}{\Delta y}\right)\right)$$

$$+ \quad 1 \qquad\qquad 1$$

$$+ \quad 2 \qquad\qquad 0$$

$$+ \frac{\Delta_x^0}{\Delta x^0}\left(\frac{\Delta\varphi x}{\Delta x}\cdot\frac{\Delta_x^0}{\Delta x^0}\left(\frac{\Delta\varphi x}{\Delta x}\cdot\frac{\Delta_x^1}{\Delta x^1}\left(\frac{\Delta_y^2 f(x,y+\Delta y)}{\Delta y^2}\right)\right)\right)$$

$$+ \quad 0 \qquad\qquad 1 \qquad\qquad 0$$

$$+ \quad 1 \qquad\qquad 0 \qquad\qquad 0$$

$$+ \frac{\Delta_x^0}{\Delta x^0}\left(\frac{\Delta\varphi x}{\Delta x}\cdot\frac{\Delta_x^0}{\Delta x^0}\left(\frac{\Delta\varphi x}{\Delta x}\cdot\frac{\Delta_x^0}{\Delta x^0}\left(\frac{\Delta\varphi x}{\Delta x}\cdot\frac{\Delta_x^0}{\Delta x^0}\left(\frac{\Delta_y^3 f(x,y)}{\Delta y^3}\right)\right)\right)\right)$$

§. 36.

Sind die beiden Grössen x und y als Factoren von einander gesondert, als

$$z = fy \,.\, f_1 x, \text{ wo } y = \varphi x$$

so sind die Unterschiede nach §. 34

$$101)\quad \frac{\Delta(fy \,.\, f_1 x)}{\Delta x} = fy \,.\, \frac{\Delta_x f_1 x}{\Delta x} + \frac{\Delta_y fy}{\Delta y} \,.\, \frac{\Delta_x \varphi x}{\Delta x} \,.\, f_1(x + \Delta x)$$

$$102)\quad \frac{\Delta^2(fy \,.\, f_1 x)}{\Delta x^2} = fy \,.\, \frac{\Delta_x^2 f_1 x}{\Delta x^2}$$

$$+ \frac{\Delta_y^1 fy}{\Delta y} \,.\, \begin{array}{|l} \frac{\Delta_x^0}{\Delta x^0}\left(\frac{\Delta\varphi x}{\Delta x} \,.\, \frac{\Delta_x^1}{\Delta x^1}\Big(f_1(x+\Delta x)\Big)\right) \\ \frac{\Delta_x^1}{\Delta x^1}\left(\frac{\Delta\varphi x}{\Delta x} \,.\, \frac{\Delta_x^0}{\Delta x^0}\Big(f_1(x+\Delta x)\Big)\right) \end{array}$$

$$+ \frac{\Delta_y^2 fy}{\Delta y^2} \,.\, \frac{\Delta_x^0}{\Delta x^0}\left(\frac{\Delta\varphi x}{\Delta x} \,.\, \frac{\Delta_x^0}{\Delta x^0}\left(\frac{\Delta\varphi(x+\Delta x)}{\Delta x} \,.\, \frac{\Delta_x^0}{\Delta x^0}\Big(f_1(x+2\Delta x)\Big)\right)\right)$$

und

$$103)\, \frac{\Delta^3(fy.f_1 x)}{\Delta x^3} = fy.\frac{\Delta_x^3 f_1 x}{\Delta x^3}$$

$$+ \frac{\Delta^1 fy}{\Delta y^1} \begin{array}{|ll} \frac{\Delta_x^0}{\Delta x^0} & \Big(\frac{\Delta\varphi x}{\Delta x} . \frac{\Delta_x^2}{\Delta x^2}\Big(f_1(x+\Delta x)\Big)\Big) \\ 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{array}$$

$$+ \frac{\Delta^2 fy}{\Delta y^2} \begin{array}{|lll} \frac{\Delta_x^0}{\Delta x^0} & \Big(\frac{\Delta\varphi x}{\Delta x} . \frac{\Delta_x^0}{\Delta x^0} & \Big(\frac{\Delta\varphi(x+\Delta x)}{\Delta x} . \frac{\Delta_x^1}{\Delta x^1}\Big(f_1(x+2\Delta x)\Big)\Big)\Big) \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{array}$$

$$+ \frac{\Delta^3 fy}{\Delta y^3} . \frac{\Delta_x^0}{\Delta x^0}\left(\frac{\Delta\varphi x}{\Delta x} . \frac{\Delta_x^0}{\Delta x^0}\left(\frac{\Delta\varphi(x+\Delta x)}{\Delta x} . \frac{\Delta_x^0}{\Delta x^0}\left(\frac{\Delta\varphi(x+2\Delta x)}{\Delta x} . \frac{\Delta_x^0}{\Delta x^0}\Big(f_1(x+3\Delta x)\Big)\right)\right)\right)$$

12*

oder nach §. 35

$$104)\quad \frac{\Delta^1(fy\,.\,f_1x)}{\Delta x} = f(y+\Delta y)\,.\,\frac{\Delta_x f_1 x}{\Delta x} + \frac{\Delta_y fy}{\Delta y}\,.\,\frac{\Delta\varphi x}{\Delta x}\,.\,f_1x$$

$$105)\quad \frac{\Delta^2(fy.\,f_1x)}{\Delta x^2} = f(y+2\Delta y)\,.\,\frac{\Delta_x^2\, f_1\, x}{\Delta x^2}$$

$$+\frac{\Delta_y^1 f(y+\Delta y)}{\Delta y}\left|\begin{array}{l} \frac{\Delta_x^0}{\Delta x^0}\left(\frac{\Delta\varphi x}{\Delta x}.\frac{\Delta_x^1}{\Delta x^1}(f_1x)\right) \\ \\ +\frac{\Delta_x^1}{\Delta x^1}\left(\frac{\Delta\varphi x}{\Delta x}.\frac{\Delta_x^0}{\Delta x^0}(f_1x)\right) \end{array}\right.$$

$$+\frac{\Delta_y^2\, f(y)}{\Delta y^2}.\frac{\Delta_x^0}{\Delta x^0}\left(\frac{\Delta\varphi x}{\Delta x}.\frac{\Delta_x^0}{\Delta x^0}\left(\frac{\Delta\varphi x}{\Delta x}.\frac{\Delta_x^0}{\Delta x^0}(f_1x)\right)\right)$$

und

$$106)\quad \frac{\Delta^3(fy.\,f_1x)}{\Delta x^3} = f(y+3\Delta y)\,.\,\frac{\Delta_x^3 f_1 x}{\Delta x^3}$$

$$+\frac{\Delta_y f(y+2\Delta y)}{\Delta y}\left|\begin{array}{lll} \frac{\Delta_x^0}{\Delta x^0}\left(\frac{\Delta\varphi x}{\Delta x}.\right. & \left.\frac{\Delta_x^2}{\Delta x^2}(f_1x)\right) & \\ \\ \quad 1 & \quad 1 & \\ \\ \quad 2 & \quad 0 & \end{array}\right.$$

$$+\frac{\Delta_y^2 f(y+\Delta y)}{\Delta y^2}\left|\begin{array}{lll} \frac{\Delta_x^0}{\Delta x^0}\left(\frac{\Delta\varphi x}{\Delta x}.\right. & \frac{\Delta_x^0}{\Delta x^0}\left(\frac{\Delta\varphi x}{\Delta x}.\right. & \left.\left.\frac{\Delta_x^1}{\Delta x^1}(f_1x)\right)\right) \\ \\ \quad 0 & \quad 1 & \quad 0 \\ \\ \quad 1 & \quad 0 & \quad 0 \end{array}\right.$$

$$+\frac{\Delta_y^3\, f(y)}{\Delta y^3}.\frac{\Delta_x^0}{\Delta x^0}\left(\frac{\Delta\varphi x}{\Delta x}.\frac{\Delta_x^0}{\Delta x^0}\left(\frac{\Delta\varphi x}{\Delta x}.\frac{\Delta_x^0}{\Delta x^0}\left(\frac{\Delta\varphi x}{\Delta x}.\frac{\Delta_x^0}{\Delta x^0}(f_1x)\right)\right)\right)$$

u. s. w.

Unterschiede der Functionen, welche durch unentwickelte Gleichungen gegeben sind.

§. 37.

Die Zeichen, welche für unentwickelte Gleichungen gewählt werden, sind

107) $$f(y, x) = o$$

Die Grössen y und x bestimmen sich gegenseitig. Wird x als Grundelement angenommen, so ist y eine Function von x, oder

$$y = \varphi x$$

und dann sind die Zeichen obiger Gleichung

108) $$f(\varphi x, x) = o$$

Von der Zunahme des Grundelements x hängt auch die Zunahme der Function von x oder die Zunahme von y oder von φx ab. Ist h die Zunahme von x, so wird die Zunahme von φx durch die Gleichung

$$f(\varphi(x + h), x + h) = f(\varphi x + \Delta \varphi x, x + h) = o$$

bestimmt. Erhält x nochmals eine Zunahme h, so wird die zweite Zunahme, welche φx hiedurch erhält, durch die Gleichung

$$f(\varphi(x + 2h), x + 2h) = f(\varphi x + 2\Delta \varphi x + \Delta^2 \varphi x, x + 2h) = o$$

bestimmt.

Hieraus ist deutlich, dass, wenn x um Δx, um $2\Delta x$, um $3\Delta x$, ... wächst, die Function y dadurch die Zunahme Δy, $\Delta^2 y$, $\Delta^3 y$, ... erhält, welche durch folgende Gleichungen bestimmt werden:

109) $$f(y,x)=0$$
$$f(y+\Delta^1 y,x+\Delta x)=0$$
$$f(y+2\Delta^1 y+\Delta^2 y,x+2\Delta x)=0$$
$$f(y+3\Delta^1 y+3\Delta^2 y+\Delta^3 y,\ x+3\Delta x)=0$$
$$f(y+4\Delta^1 y+6\Delta^2 y+4\Delta^3 y+\Delta^4 y,\ x+4\Delta x)=0$$
. . . .

Durch die erste wird y, durch die zweite $\Delta^1 y$, durch die dritte $\Delta^2 y, \ldots\ldots$ bestimmt.

Durch Ab- und Zuzählen können aus diesen Gleichungen andere hergeleitet werden; es geben die beiden ersteren folgende:

$$f(y+\Delta y,\ x+\Delta x)-f(y,x)=0$$

oder

110) $$\Delta^1 f(y,x)=0$$

die drei ersten geben

$$f(y+2\Delta^1 y+\Delta^2 y,\ x+2\Delta x)-2f(y+\Delta y,\ x+\Delta x)+f(y,x)=0$$

oder

$$f\Big(\varphi(x+2\Delta x),\ x+2\Delta x\Big)-2f\Big(\varphi(x+\Delta x),\ x+\Delta x\Big)+f(\varphi x,x)=0$$

oder

111) $$\Delta^2 f(y,x)=0$$

und die vier ersten geben

$$\left.\begin{array}{l} f(y+3\Delta^1 y+3\Delta^2 y+\Delta^3 y,\ x+3\Delta x)\\ -3f(y+2\Delta^1 y+\Delta^2 y,\ x+2\Delta x)\\ +3f(y+\Delta^1 y,\ x+\Delta x)\\ -f(y,x)\end{array}\right| =0$$

oder

$$f\Big(\varphi(x+3\Delta x),x+3\Delta x\Big)-3f\Big(\varphi(x+2\Delta x),x+2\Delta x\Big)+3f\Big(\varphi(x+\Delta x),x+\Delta x\Big)-f(\varphi x,x)=0$$

oder

112) $$\Delta^3 f(y, x) = 0$$

und allgemein, ist

$$f(y, x) = 0$$

so ist auch

113) $$\Delta^n f(y, x) = 0$$

§. 38.

Unser Geschäft besteht in dem Trennen dieser Zunahmen $\Delta^1 y$, $\Delta^2 y$, $\Delta^3 y, \ldots.$ von den übrigen Factoren, in welche die Unterschiede von $f(y, x)$ zerlegt werden können. Zählen wir desshalb zu der Gleichung

$$f(y + \Delta y, x + \Delta x) - f(y,x) = 0$$

die identische Gleichung

$$- f(y, x + \Delta x) + f(y, x + \Delta x) = 0$$

so erhalten wir folgende

$$f(y + \Delta y, x + \Delta x) - f(y, x + \Delta x) + f(y, x + \Delta x) - f(y, x) = 0$$

Die beiden ersten Theile geben den Unterschied von $f(y, x + \Delta x)$ in Hinsicht y, und wird dieser in zwei Factoren

$$\frac{\Delta_y f(y, x + \Delta x)}{\Delta y} \cdot \Delta y$$

zerlegt, und weil y eine Function von x ist, der Unterschied Δy in die beiden Factoren

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} \cdot \Delta x$$

so wie auch $f(y, x + \Delta x) - f(y, x)$ der Unterschied von $f(y, x)$ in Hinsicht x in die beiden Factoren

$$\frac{\Delta_x f(y ; x)}{\Delta x} \cdot \Delta x$$

so wird

$$\left(\frac{\Delta_y f(y, x + \Delta x)}{\Delta y} \cdot \frac{\Delta y}{\Delta x} + \frac{\Delta_x f(y, x)}{\Delta x}\right) . \Delta x = 0$$

Da Δx eine willkührliche Grösse ist, so kann dieses Product nicht wegen des Factors Δx, sondern nur wegen des andern Factors verschwinden; es ist daher

114) $$\frac{\Delta_y f(y, x + \Delta x)}{\Delta y} \cdot \frac{\Delta y}{\Delta x} + \frac{\Delta_x f(y, x)}{\Delta x} = 0$$

Wird aber zu der obersten Gleichung die identische Gleichung

$$- f(y + \Delta y, x) + f(y + \Delta y, x) = 0$$

gezählt, so ergiebt sich aus denselben Gründen die Gleichung

115) $$\frac{\Delta_y f(y, x)}{\Delta y} \cdot \frac{\Delta y}{\Delta x} + \frac{\Delta_x f(y + \Delta y, x)}{\Delta x} = 0$$

In den Theilen dieser beiden Gleichungen 114 und 115 nämlich in

$$\frac{\Delta_y f(y, x + \Delta x)}{\Delta y}, \quad \frac{\Delta_y f(y, x)}{\Delta y}, \quad \frac{\Delta_x f(y + \Delta y, x)}{\Delta x}$$

kommt zwar Δy vor, aber nicht mehr als einzelner Factor, sondern nur als eine Grösse, welche durch Zu- oder Abzählen mit y verbunden ist. Es sind also alle Theile, welche in diesen beiden Gleichungen vorkommen, da Δy eine Function von x ist, nur Functionen von y und von x. Wird daher in diesen Gleichungen eine Sonderung von $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ vorgenommen, so erscheint dieser Bruch als eine Function von y und x, und wird auf folgende Weise gebildet und bezeichnet

116) $$\frac{\Delta y}{\Delta x} = - \frac{\dfrac{\Delta_x f(y, x)}{\Delta x}}{\dfrac{\Delta_y f(y, x + \Delta x)}{\Delta y}} = F(y, x)$$

oder auch

117) $$\frac{\Delta y}{\Delta x} = - \frac{\dfrac{\Delta_x f(y + \Delta y, x)}{\Delta x}}{\dfrac{\Delta_y f(y, x)}{\Delta y}} = F(y, x)$$

Die höhern Unterschiede können nun, da y eine Function von x ist,

$$\frac{\Delta^{n+1} y}{\Delta x^{n+1}} = \frac{\Delta^n F(y, x)}{\Delta x^n}$$

nach §. 34 oder 35 gebildet werden.

§. 39.

Der besondere Fall, wo die Grössen y und x gesondert sind, ist wichtig; er sei durch die Gleichung

118) $$fy - \varphi x = o \quad \text{oder } fy = \varphi x$$

gegeben. Es ist nach 114

$$- \frac{\Delta_x f(y, x)}{\Delta x} = \frac{\Delta_x \varphi x}{\Delta x} = \frac{\Delta \varphi x}{\Delta x}$$

und

$$\frac{\Delta_y f(y, x + \Delta x)}{\Delta y} = \frac{\Delta_y fy}{\Delta y} = \frac{\Delta fy}{\Delta y}$$

und also

119) $$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\frac{\Delta \varphi x}{\Delta x}}{\frac{\Delta f y}{\Delta y}}$$

§. 40.

Ist sogar $\varphi x = x$ und

120) $$f y = x$$

so ist

121) $$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \left(\frac{\Delta f y}{\Delta y}\right)^{-1}$$

Die höhern Unterschiede lassen sich mit Leichtigkeit nehmen, denn

$$\frac{\Delta^2 y}{\Delta x^2} = \frac{\Delta}{\Delta x}\left(\frac{\Delta f y}{\Delta y}\right)^{-1} = \frac{\Delta}{\Delta y}\left(\frac{\Delta f y}{\Delta y}\right)^{-1} \cdot \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

und wird statt $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ der vorige Werth eingeführt, so wird

$$\frac{\Delta^2 y}{\Delta x^2} = \left(\frac{\Delta f y}{\Delta y}\right)^{-1} \cdot \frac{\Delta}{\Delta y}\left(\frac{\Delta f y}{\Delta y}\right)^{-1}$$

Wird von diesem wieder der Unterschied in Hinsicht x genommen, so muss

$$\frac{\Delta}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta x} \cdot \frac{\Delta}{\Delta y} = \left(\frac{\Delta f y}{\Delta y}\right)^{-1} \cdot \frac{\Delta}{\Delta y}$$

gesetzt werden, wodurch

$$\frac{\Delta^3 y}{\Delta x^3} = \left(\frac{\Delta f y}{\Delta y}\right)^{-1} \cdot \frac{\Delta}{\Delta y}\,{}_2\!\left(\left(\frac{\Delta f y}{\Delta y}\right)^{-1} \cdot \frac{\Delta}{\Delta y}\,{}_1\!\left(\left(\frac{\Delta f y}{\Delta y}\right)^{-1}\right)_1\right)_2$$

entsteht; und allgemein, wird

$$122)\qquad \left(\frac{\Delta\, f y}{\Delta y}\right)^{-1} = Y^{-1}$$

gesetzt, so ist

$$123)\ \frac{\Delta^n y}{\Delta x^n} = Y^{-1} \cdot \frac{\Delta}{\Delta y}\Bigg(_{n-1} Y^{-1} \cdot \frac{\Delta}{\Delta y}\Big(_{n-2} Y^{-1} \cdot \frac{\Delta}{\Delta y}\Big(_{n-3} Y^{-1} \ldots\ldots \frac{\Delta}{\Delta y}\big(_{1} Y^{-1} \big)_{1} \ldots\Big)_{n-3} \Big)_{n-2} \Bigg)_{n-1}$$

Unterschiede bestimmter Functionen.

§. 41.

Der Unterschied von A. B. C ist

124) $$\Delta (A \cdot B \cdot C) = (A + \Delta A) \cdot (B + \Delta B) \cdot (C + \Delta C) - A \cdot B \cdot C$$

und wenn das Vervielfachen auf die einzelnen Elemente ausgedehnt wird

125) $$\begin{aligned} \Delta (A \cdot B \cdot C) = {} & A \cdot B \cdot \Delta C + A \cdot \Delta B \cdot \Delta C + \Delta A \cdot \Delta B \cdot \Delta C \\ & + A \cdot \Delta B \cdot C + \Delta A \cdot B \cdot \Delta C \\ & + \Delta A \cdot B \cdot C + \Delta A \cdot \Delta B \cdot C \end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned} = {} & \Delta^0 A \cdot \Delta^0 B \cdot \Delta^1 C + \Delta^0 A \cdot \Delta^1 B \cdot \Delta^1 C + \Delta^1 A \cdot \Delta^1 B \cdot \Delta^1 C \\ & + \Delta^0 A \cdot \Delta^1 B \cdot \Delta^0 C + \Delta^1 A \cdot \Delta^0 B \cdot \Delta^1 C \\ & + \Delta^1 A \cdot \Delta^0 B \cdot \Delta^0 C + \Delta^1 A \cdot \Delta^1 B \cdot \Delta^0 C \end{aligned}$$

und allgemein ist

126) $$\begin{aligned} \Delta (A_1 \cdot A_2 \cdot A_3 \cdots A_n) = {} & \mathfrak{Z} (\Delta^0 A_1 \ldots\ldots \Delta^0 A_{n-1} \cdot \Delta^1 A_n) \\ & + \mathfrak{Z} (\Delta^0 A_1 \ldots\ldots \Delta^0 A_{n-2} \cdot \Delta^1 A_{n-1} \cdot \Delta^1 A_n) \\ & + \mathfrak{Z} (\Delta^0 A_1 \ldots\ldots \Delta^0 A_{n-3} \cdot \Delta^1 A_{n-2} \cdot \Delta^1 A_{n-1} \cdot \Delta^1 A_n) \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + \mathfrak{Z} (\Delta^1 A_1 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \Delta^1 A_n) \end{aligned}$$

wo $\mathfrak{Z}$ alle möglichen Versetzungen der oberen Stellenzahlen von Δ bedeutet.

§. 42.

Wenn die Factoren des Products um gleichviel zunehmen,

$$x\,(x+1\,h)\,(x+2\,h)\;\ldots\ldots\ldots\;(x+(m-1)\,h)$$

so gewinnt dieses so eben gezeigte Geschäft nichts an Einfachheit, wenn nicht die Zunahme von x bei dem Unterschiede - nehmen gleich ist der Zunahme der Factoren, oder wenn nicht

$$\Delta x = h$$

In diesem Falle lassen sich die Unterschiede sehr einfach darstellen; es ist nämlich

127) $\Delta\, x^{p|h} = p\,.\,h\,.\,(x+h)^{p-1|h}$ wenn $\Delta x = h$

und

128) $\Delta\, x^{-p|h} = -\,p\,.\,h\,(x+h)^{-p-1|h}$ wenn $\Delta x = h$

und allgemein

129) $\Delta^{n}\, x^{p|h} = p^{n|-1}\,.\,h^{n}\,.\,(x+n\,h)^{p-n|h}$ wenn $\Delta x = h$

wo p und h jeden Werth annehmen.

Ausser diesen Gleichungen 127, 128, 129, welche schon bekannt sind, theilen wir noch einige mit, die wir sonst noch nirgends gefunden, wovon wir aber bei andern Untersuchungen häufigen Gebrauch gemacht haben; es sind folgende:

130) $\Delta^{1}\, x^{p|-h} = p\,.\,h\,.\,x^{p-1|-h}$ wenn $\Delta x = h$

131) $\Delta^{1}\, x^{-p|-h} = -\,p\,.\,h\,.\,x^{-p-1|-h}$ wenn $\Delta x = h$

und allgemein

132) $\Delta^{n}\, x^{p|-h} = p^{n|-1}\,.\,h^{n}\,.\,x^{p-n|-h}$ wenn $\Delta x = h$

eben so ist

133) $\Delta^{1}\left(A^{p+x|h}B^{q-x|-k}\left(\frac{k}{h}\right)^{x}\right) = \left((A+p\,h)\frac{k}{h} - (B-(q-1)k)\right|.\,A^{p+x|h}B^{q-x-1|-k}\left(\frac{k}{h}\right)^{x}$ für $\Delta x = 1$

und allgemein

$$134)\ \Delta^n \left(A^{p+x|h}\, B^{q-x|-k} \left(\frac{k}{h}\right)^x\right) = M^{n|-k}\, A^{p+x|h}\, B^{q-x-n|-k} \left(\frac{k}{h}\right)^x \qquad \text{wenn} \quad \Delta x = 1$$

wo

$$M = \left(A + p\,h\right) \frac{k}{h} - \left(B - (q-1)\,k\right)$$

§. 43.

Sind die Factoren gleich, so können die Unterschiede nach N. 1 gebildet werden, nämlich, wenn h die Zunahme von x ist:

$$135)\quad \Delta^n x^m = \left(x + n\,h\right)^m - \frac{n^{1|-1}}{1^{1|1}} \cdot \left(x + (n-1)\,h\right)^m$$

$$+ \frac{n^{2|-1}}{1^{2|1}} \cdot \left(x + (n-2)\,h\right)^m - \ldots (-)^n \frac{n^{n|-1}}{1^{n|1}} \cdot (x + 0\,h)^m$$

oder, wenn die Binomien in Producte von x und n, n − 1, n−2, ... nach der Vorschrift

$$(x + q\,h)^m = x^m + \frac{m^{1|-1}}{1^{1|1}} \cdot x^{m-1} q^1 h^1 + \frac{m^{2|-1}}{1^{2|1}} \cdot x^{m-2} q^2 h^2 + \ldots$$

aufgelöst werden, so wird

$$\Delta^n x^m = \frac{m^{0|-1}}{1^{0|1}} . x^m h^0 . \left(\frac{n^{0|-1}}{1^{0|1}} \cdot n^0 - \frac{n^{1|-1}}{1^{1|1}} \cdot (n-1)^0 + \;.\;.\;.\; (-)^n \frac{n^{n|-1}}{1^{n|1}} \cdot 0^n\right)$$

$$+ \frac{m^{1|-1}}{1^{1|1}} \cdot x^{m-1} h^1 . \left(\frac{n^{0|-1}}{1^{0|1}} \cdot n^1 - \frac{n^{1|-1}}{1^{1|1}} . (n-1)^1 + \;.\;.\;.\; (-)^n \frac{n^{n|-1}}{1^{n|1}} \cdot 0^1\right)$$

$$+ \;.$$

$$+ \frac{m^{m|-1}}{1^{m|1}} . x^0 h^m . \left(\frac{n^{0|-1}}{1^{0|1}} . n^m - \frac{n^{1|-1}}{1^{1|1}} \cdot (n-1)^m + \;.\;.\;.\; (-)^n \frac{n^{n|-1}}{1^{n|1}} \cdot 0^m\right)$$

Es ist aber nach unserer Analysis N. 632, 633, 645

$$\frac{n^{0|-1}}{1^{0|1}} \cdot n^{n-p} - \frac{n^{1|-1}}{1^{1|1}} \cdot (n-1)^{n-p} + \ldots\ldots (-)^{n} \frac{n^{n|-1}}{1^{n|1}} \cdot 0^{n-p} = 0$$

$$\frac{n^{0|-1}}{1^{0|1}} \cdot n^{n} - \frac{n^{1|-1}}{1^{1|1}} \cdot (n-1)^{n} + \ldots\ldots (-)^{n} \frac{n^{n|-1}}{1^{n|1}} \cdot 0^{n} = 1^{n|1}$$

$$\frac{n^{0|-1}}{1^{0|1}} \cdot n^{n+q} - \frac{n^{1|-1}}{1^{1|1}} \cdot (n-1)^{n+q} + \ldots\ldots (-)^{n} \frac{n^{n|-1}}{1^{n|1}} . 0^{n+q} = 1^{n|1} . [1,2,3,\ldots,n]^{(q)}$$

folglich der nte Unterschied von x^m, wenn m eine ganze bejahete Zahl ist,

$$136)\ \Delta^{n} x^{m} = 1^{n|1} . h^{n} . \left(\begin{aligned} & \frac{m^{n|-1}}{1^{n|1}} \cdot x^{m-n}\ h^{0} . [1, 2, \ldots, n]^{(0)} \\ + & \frac{m^{n+1|-1}}{1^{n+1|1}} \cdot x^{m-n-1}\ h^{1} . [1, 2, \ldots, n]^{(1)} \\ + & \frac{m^{n+2|-1}}{1^{n+2|1}} \cdot x^{m-n-2}\ h^{2} . [1, 2, \ldots, n]^{(2)} \\ + & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ + & \frac{m^{m|-1}}{1^{m|1}} \cdot x^{0}\ h^{m-n} . [1, 2, \ldots, n]^{(m-n)} \end{aligned} \right)$$

Eine zweite Entwicklung des nten Unterschiedes von x^m, welche bisher noch nicht bekannt war, ist folgende:

Es werde nach der Analysis N. 298 und 303 sowohl x^m als x^{-m} durch Producte ersetzt, in welchen die Factoren gleichen Unterschied $\Delta x = h$ haben, nämlich

$$\begin{aligned} x^{+m} = x^{m|h} & - [1, 2, \ldots, m-1]^{(1)} . h^{1} . x^{m-1|h} \\ & + [1, 2, \ldots, m-2]^{(2)} . h^{2} . x^{m-2|h} \\ & - [1, 2, \ldots, m-3]^{(3)} . h^{3} . x^{m-3|h} \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots \\ & (-)^{m-1} [1]^{(m-1)} . h^{m-1} . x^{1|h} \end{aligned} \qquad \alpha)$$

und

$$\begin{aligned} x^{-m} = x^{-mlh} &- (1,2,\ldots,m)^{(1)} \,.\, h^1 \,.\, x^{-m-1lh} \\ &+ (1,2,\ldots,m+1)^{(2)} \,.\, h^2 \,.\, x^{-m-2lh} \\ &- (1,2,\ldots,m+2)^{(3)} \,.\, h^3 \,.\, x^{-m-3lh} \\ &+ \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;. \end{aligned} \qquad \beta)$$

und nun nach 127 und 128 der nte Unterschied von diesen Producten genommen; es ergeben sich dadurch folgende Reihen

$$\begin{aligned} 137)\quad \Delta^n x^{+m} = {} & [1,2,\ldots,m]^{(0)} \,.\, \qquad m^{nl-1} \,.\, h^n \,.\, (x+nh)^{m-nlh} \\ & - [1,2,\ldots,m-1]^{(1)} \,.\, (m-1)^{nl-1} \,.\, h^{n+1} \,.\, (x+nh)^{m-n-1lh} \\ & + [1,2,\ldots,m-2]^{(2)} \,.\, (m-2)^{nl-1} \,.\, h^{n+2} \,.\, (x+nh)^{m-n-2lh} \\ & - \;.\;.\;.\;.\;.\;.\; + \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;. \\ & (-)^{m-n} [1,2,\ldots,n]^{(m-n)} \,.\, n^{nl-1} \,.\, h^m \,.\, (x+nh)^{0lh} \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} 138)\quad \Delta^n x^{-m} = (-)^n \Bigg(& \qquad\qquad m^{nl1} \,.\, h^n \,.\, (x+nh)^{-m-nlh} \\ & - (1,2,\ldots,m)^{(1)} \,.\, \qquad (m+1)^{nl1} \,.\, h^{n+1} \,.\, (x+nh)^{-m-n-1lh} \\ & + (1,2,\ldots,m+1)^{(2)} \,.\, (m+2)^{nl1} \,.\, h^{n+2} \,.\, (x+nh)^{-m-n-2lh} \\ & - (1,2,\ldots,m+2)^{(3)} \,.\, (m+3)^{nl1} \,.\, h^{n+3} \,.\, (x+nh)^{-m-n-3lh} \\ & + \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;. \\ & - \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;. \Bigg) \end{aligned}$$

Wird aber in den beiden Entwicklungen α und β

$$-h \text{ statt } h$$

gesetzt, so ergeben sich nach 132 folgende Vorschriften für den *n* ten Unterschied von x^{+m} und x^{-m}:

$$\begin{aligned} 139)\qquad \Delta^{n}x^{+m} = {} & [1,2,\ldots,m]^{(0)} \,.\, m^{n|-1} \,.\, h^{n} \,.\, x^{m-n|-h} \\ & + [1,2,\ldots,m-1]^{(1)} \,.\, (m-1)^{n|-1} \,.\, h^{n+1} \,.\, x^{m-n-1|-h} \\ & + [1,2,\ldots,m-2]^{(2)} \,.\, (m-2)^{n|-1} \,.\, h^{n+2} \,.\, x^{m-n-2|-h} \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + [1,2,\ldots,n]^{(m-n)} \,.\, n^{n|-1} \,.\, h^{m} \,.\, x^{0|-h} \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} 140)\qquad \Delta^{n}x^{-m} = (-)^{n} \Big(& \qquad\qquad\qquad m^{n|1} \,.\, h^{n} \,.\, x^{-m-n|-h} \\ & + (1,2,\ldots,m)^{(1)} \,.\, (m+1)^{n|1} \,.\, h^{n+1} \,.\, x^{-m-n-1|-h} \\ & + (1,2,\ldots,m+1)^{(2)} \,.\, (m+2)^{n|1} \,.\, h^{n+2} \,.\, x^{-m-n-2|-h} \\ & + (1,2,\ldots,m+2)^{(3)} \,.\, (m+3)^{n|1} \,.\, h^{n+3} \,.\, x^{-m-n-3|-h} \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \Big) \end{aligned}$$

Diese vier Gleichungen 137, 138, 139, 140 verdienen um desto grössere Aufmerksamkeit, je grösser der Nutzen ist, den sie bei vielen Untersuchungen gewähren.

§. 44.

Die Unterschiede von dem Producte

$$(x + a_1)\ (x + a_2)\ (x + a_3)\ \ldots\ (x + a_m) = P$$

worin die Factoren nicht gleich sind, können auf die vorigen zurückgebracht werden, wenn nach Auflösung desselben in einfachere Producte

$$x^{m} \,.\, (a_1,\ldots,a_m)^{(0)} + x^{m-1} \,.\, (a_1,\ldots,a_m)^{(1)} + \ldots + x^{0} \,.\, (a_1,\ldots,a_m)^{(m)}$$

der nte Unterschied von x^m, x^{m-1}, ..., x^n nach einer der obigen Vorschriften genommen wird; wählen wir unter ihnen 136, so erhalten wir folgende Gleichung

$$141)\quad \Delta^{n}(x+a_{1})(x+a_{2})\ldots\ldots(x+a_{m})=$$

$$=1^{n|1}\,h^{n}\,(P_{m-n}\,.\,x^{m-n}+P_{m-n-1}\,.\,x^{m-n-1}+P_{m-n-2}\,.\,x^{m-n-2}+\ldots+P_{0}\,.\,x^{0})$$

wo die Vorzahlen, wenn

$$(a_{1},\,a_{2},\ldots,\,a_{m})^{(q)}=A_{m}^{(q)}$$

und

$$[1,\;2,\ldots,\;n]^{(p)}=E_{n}^{(p)}$$

gesetzt wird, auf folgende Weise gebildet werden:

$$142)\; P_{m-n}=\frac{m^{n|-1}}{1^{n|1}}\cdot A_{m}^{(0)}\cdot E_{n}^{(0)}$$

$$P_{m-n-1}=\frac{m^{n+1|-1}}{1^{n+1|1}}\cdot A_{m}^{(0)}\cdot E_{n}^{(1)}\,.\,h^{1}+\frac{(m-1)^{n|-1}}{1^{n|1}}\cdot A_{m}^{(1)}\cdot E_{n}^{(0)}$$

$$P_{m-n-2}=\frac{m^{n+2|-1}}{1^{n+2|1}}\cdot A_{m}^{(0)}\cdot E_{n}^{(2)}\,.h^{2}+\frac{(m-1)^{n+1|-1}}{1^{n+1|1}}\cdot A_{m}^{(1)}\cdot E_{n}^{(1)}\,.h^{1}+\frac{(m-2)^{n|-1}}{1^{n|1}}\cdot A_{m}^{(2)}\cdot E_{n}^{(0)}$$

. . . .

$$P_{0}=\frac{m^{m|-1}}{1^{m|1}}\cdot A_{m}^{(0)}\cdot E_{n}^{(m-n)}\,.h^{m-n}+\frac{(m-1)^{m-1|-1}}{1^{m-1|1}}\cdot A_{m}^{(1)}\cdot E_{n}^{(m-n-1)}\,.h^{m-n-1}+\ldots+\frac{n^{n|-1}}{1^{n|1}}\cdot A_{m}^{(m-n)}\cdot E_{n}^{(0)}$$

§. 45.

Wenn das veränderliche Element als obere Stellenzahl erscheint, so nehmen die Unterschiede eine einfache Gestalt an; es ist nämlich

$$\Delta A^{x}=A^{x+h}-A^{x}$$

oder

$$143)\qquad \Delta A^{x}=A^{x}\,.\,(A^{h}-1)$$

und allgemein

$$144)\qquad \Delta^{n}A^{x}=A^{x}\,.\,(A^{h}-1)^{n}$$

§. 46.

Diese Einfachheit behalten die Unterschiede bei, auch dann noch, wenn diese Exponentialgrössen in Verbindung vorkommen; es ist

$$\Delta\,(A^{ax+b} - A^{-ax-b}) = A^{a(x+h)+b} - A^{-a(x+h)-b} - A^{ax+b} + A^{-ax-b}$$

und wenn diese in Factoren aufgelöst werden

145) $$\Delta\,(A^{ax+b} - A^{-ax-b}) = (A^{a(x+\frac{1}{2}h)+b} + A^{-a(x+\frac{1}{2}h)-b})\;(A^{\frac{1}{2}ah} - A^{-\frac{1}{2}ah})$$

und eben so auch

146) $$\Delta\,(A^{ax+b} + A^{-ax-b}) = (A^{a(x+\frac{1}{2}h)+b} - A^{-a(x+\frac{1}{2}h)-b})\;(A^{\frac{1}{2}ah} - A^{-\frac{1}{2}ah})$$

Nach diesen beiden Vorschriften können die spätern Unterschiede mit Leichtigkeit gebildet werden. Ist

$$A = e$$

so ist nach der vierten Abhandlung der Analysis

147) $$\Delta\left(\frac{\psi\,(ax+b)}{\delta^{ax+b}}\right) = 2\,.\,\frac{\varphi\,(a(x+\frac{1}{2}h)+b)}{\delta^{a(x+\frac{1}{2}h)+b}}\,.\,\frac{\psi\,(\frac{1}{2}ah)}{\delta^{\frac{1}{2}ah}}$$

und

148) $$\Delta\left(\frac{\varphi\,(ax+b)}{\delta^{ax+b}}\right) = 2\,.\,i^{2}\,.\,\frac{\psi\,(a\,(x+\frac{1}{2}h)+b)}{\delta^{a(x+\frac{1}{2}h)+b}}\,.\,\frac{\psi\,(\frac{1}{2}ah)}{\delta^{\frac{1}{2}ah}}$$

und allgemein

149) $$\Delta^{2n}\left(\frac{\psi\,(ax+b)}{\delta^{ax+b}}\right) = 2^{2n}\,.\,i^{2n}\,.\,\frac{\psi(a(x+nh)+b)}{\delta^{a(x+nh)+b}}\,.\left(\frac{\psi\,\frac{1}{2}\,ah}{\delta^{\frac{1}{2}ah}}\right)^{2n}$$

150) $$\Delta^{2n+1}\left(\frac{\psi\,(ax+b)}{\delta^{ax+b}}\right) = 2^{2n+1}\,.\,i^{2n}\,.\,\frac{\varphi\,(a\,(x+\frac{2n+1}{2}h)+b)}{\delta^{a(x+\frac{2n+1}{2}h)+b}}\,.\left(\frac{\psi\frac{1}{2}\,ah}{\delta^{\frac{1}{2}ah}}\right)^{2n+1}$$

und

151) $$\Delta^{2n}\left(\frac{\varphi\,(ax+b)}{\delta^{ax+b}}\right) = 2^{2n}\,.\,i^{2n}\,.\,\frac{\varphi\,(a(x+nh)+b)}{\delta^{a(x+nh)+b}}\,.\left(\frac{\psi\frac{1}{2}\,ah}{\delta^{\frac{1}{2}ah}}\right)^{2n}$$

152) $$\Delta^{2n+1}\left(\frac{\varphi(ax+b)}{\delta^{ax+b}}\right) = 2^{2n+1}\,.\,i^{2(n+1)}\,.\,\frac{\psi(a(x+\frac{2n+1}{2}h)+b)}{\delta^{a(x+\frac{2n+1}{2}h)+b}}\,.\left(\frac{\psi\frac{1}{2}\,ah}{\delta^{\frac{1}{2}ah}}\right)^{2n+1}$$

und wenn $i = \sqrt{-1}$, so ist

153) $\Delta^{2n} \sin(ax + b) = (-)^n \; 2^{2n} \; . \sin \Big(a(x + nh) + b \Big) \; . (\sin\tfrac{1}{2}ah)^{2n}$

154) $\Delta^{2n+1} \sin(ax + b) = (-)^n \; 2^{2n+1} \; . \cos \Big(a(x + \tfrac{2n+1}{2} h) + b \Big) \; . (\sin\tfrac{1}{2}ah)^{2n+1}$

155) $\Delta^{2n} \cos(ax + b) = (-)^n \; 2^{2n} \; . \cos \Big(a(x + nh) + b \Big) \; . (\sin\tfrac{1}{2}ah)^{2n}$

156) $\Delta^{2n+1} \cos(ax + b) = (-)^{n+1} \; 2^{2n+1} \; . \sin \Big(a(x + \tfrac{2n+1}{2} h) + b \Big) \; . (\sin\tfrac{1}{2}ah)^{2n+1}$

oder wenn auf das gerade oder ungerade n keine Rücksicht genommen werden soll

157) $\Delta^n \sin(ax + b) = 2^n . \sin \Big(\tfrac{n}{2} . \pi + a(x + \tfrac{n}{2} h) + b \Big) \; . (\sin\tfrac{1}{2}ah)^n$

und

158) $\Delta^n \cos(ax + b) = 2^n \; . \cos \Big(\tfrac{n}{2} . \pi + a(x + \tfrac{n}{2} h) + b \Big) \; . (\sin\tfrac{1}{2}ah)^n$

§. 47.

Die Unterschiede der Logarithmen lassen sich nicht in dieser Einfachheit angeben; es ist

159) $$\Delta^n \lg(ax + b) = \lg(ax + b + na\Delta x) - \frac{n^{1|-1}}{1^{1|1}} . \lg(ax + b + (n-1)a\Delta x)$$
$$+ \frac{n^{2|-1}}{1^{2|1}} . \lg(ax + b + (n-2)a\Delta x) - \ldots (-)^n . \frac{n^{n|-1}}{1^{n|1}} . \lg(ax + b + 0a\Delta x)$$

Diese Reihe ist vieler Umformungen fähig; zählen wir von ihr

$$0 = (1-1)^n . \lg(ax + b) = \Big(1 - \frac{n^{1|-1}}{1^{1|1}} + \frac{n^{2|-1}}{1^{2|1}} - \ldots \Big) . \lg(ax + b)$$

ab, so geht sie in folgende über:

160) $$\Delta^n \lg(ax + b) = \lg\Big(1 + \frac{na\Delta x}{ax + b}\Big) - \frac{n^{1|-1}}{1^{1|1}} . \lg\Big(1 + \frac{(n-1)a\Delta x}{ax + b}\Big)$$
$$+ \frac{n^{2|-1}}{1^{2|1}} . \lg\Big(1 + \frac{(n-2)a\Delta x}{ax + b}\Big) - \ldots + \ldots\ldots$$

diese wieder durch Entwicklung der Logarithmen in Reihen nach der Vorschrift

$$\lg(1+y) = \frac{y}{1} - \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3} - \ldots$$

in folgende Reihe

$$161)\, \Delta^n \lg(ax+b) = \frac{1}{1}\left(\frac{n^{0|-1}}{1^{0|1}} \cdot n^1 - \frac{n^{1|-1}}{1^{1|1}} \cdot (n-1)^1 + \frac{n^{2|-1}}{1^{2|1}} \cdot (n-2)^1 - \ldots\right) \cdot \left(\frac{a\,\Delta x}{ax+b}\right)^1$$
$$- \frac{1}{2}\left(\frac{n^{0|-1}}{1^{0|1}} \cdot n^2 - \frac{n^{1|-1}}{1^{1|1}} \cdot (n-1)^2 + \frac{n^{2|-1}}{1^{2|1}} \cdot (n-2)^2 - \ldots\right) \cdot \left(\frac{a\,\Delta x}{ax+b}\right)^2$$
$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$+ (-)^{q-1} \cdot \frac{1}{q} \cdot \left(\frac{n^{0|-1}}{1^{0|1}} \cdot n^q - \frac{n^{1|-1}}{1^{1|1}} \cdot (n-1)^q + \frac{n^{2|-1}}{1^{2|1}} \cdot (n-2)^q - \ldots\right) \cdot \left(\frac{a\,\Delta x}{ax+b}\right)^q$$
$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

und diese wieder nach dem, was schon in §. 43 vorgekommen ist, in die Reihe

$$162)\, \Delta^n \lg(ax+b) = 1^{n|1} \cdot \left((-)^{n-1} \cdot \frac{1}{n} \cdot [1, 2, \ldots, n]^{(0)} \cdot \left(\frac{a\,\Delta x}{ax+b}\right)^n \right.$$
$$+ (-)^n \cdot \frac{1}{n+1} \cdot [1, 2, \ldots, n]^{(1)} \cdot \left(\frac{a\,\Delta x}{ax+b}\right)^{n+1}$$
$$+ (-)^{n+1} \cdot \frac{1}{n+2} \cdot [1, 2, \ldots, n]^{(2)} \cdot \left(\frac{a\,\Delta x}{ax+b}\right)^{n+2}$$
$$+ (-)^{n+2} \cdot \frac{1}{n+3} \cdot [1, 2, \ldots, n]^{(3)} \cdot \left(\frac{a\,\Delta x}{ax+b}\right)^{n+3}$$
$$\left. + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \right)$$

Diese Umformungen können wir noch weiter verfolgen; wir setzen

$$\frac{\Delta x}{ax+b+\Delta x} = y$$

und

$$\frac{a\ \Delta x}{ax+b} = a \times \frac{\dfrac{\Delta x}{ax+b+\Delta x}}{1-\dfrac{\Delta x}{ax+b+\Delta x}} = \frac{a\ .\ y}{1-y}$$

und

$$\left(\frac{a\ \Delta x}{ax+b}\right)^{n+q} = a^{n+q}\ .\ y^{n+q}\ .\ (1-y)^{-n-q}$$

$$= a^{n+q}\ .\ \left(y^{n+q} - \frac{(-n-q)^{1|-1}}{1^{1|1}}\ .\ y^{n+q+1} + \frac{(-n-q)^{2|-1}}{1^{2|1}}\ .\ y^{n+q+2} - \ldots.\right)$$

und

$$q = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ .\ .\ .\ .\ .\ .$$

Die Reihe 162 geht hiedurch in eine andere über

163) $$\Delta^n \lg(ax+b) = (-)^{n-1} A_0 \cdot \left(\frac{h}{ax+b+h}\right)^n + (-)^n A_1 \cdot \left(\frac{h}{ax+b+h}\right)^{n+1} + (-)^{n+1} A_2 \cdot \left(\frac{h}{ax+b+h}\right)^{n+2} + \ldots.$$

deren Vorzahlen nach folgenden Gesetzen gebildet werden:

164) $$\frac{A_0}{1^{n|1}} = \frac{(-n)^{0|-1}}{n\ .\ 1^{0|1}} \cdot [1,\ 2,\ ..,\ n]^{(0)}\ .\ a^n$$

$$\frac{A_1}{1^{n|1}} = \frac{(-n)^{1|-1}}{n\ .\ 1^{1|1}} \cdot [1,\ 2,\ ..,\ n]^{(0)}\ .\ a^n + \frac{(-n-1)^{0|-1}}{(n+1)\ .1^{0|1}} \cdot [1,2,..,n]^{(1)}\ .\ a^{n+1}$$

. . . .

und allgemein

165) $$\frac{A_p}{1^{n|1}} = \frac{(-n)^{p|-1}}{n\ .\ 1^{p|1}} \cdot [1,2,\ldots,n]^{(0)}\ .\ a^n$$

$$+ \frac{(-n-1)^{p-1|-1}}{(n+1)\ .\ 1^{p-1|1}} \cdot [1,2,\ldots,n]^{(1)}\ .\ a^{n+1}$$

$$+ \frac{(-n-2)^{p-2|-1}}{(n+2)\ .\ 1^{p-2|1}} \cdot [1,2,\ldots,n]^{(2)}\ .\ a^{n+2}$$

$$+ \ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .$$

$$+ \frac{(-n-p)^{0|-1}}{(n+p)\ .\ 1^{0|1}} \cdot [1,2,\ldots,n]^{(p)}\ .\ a^{n+p}$$

§. 48.

Der Unterschied jeder Function kann auf den Unterschied ihres Logarithmen zurückgebracht werden; es ist

$$\Delta fx = f(x+h) - fx = e^{lg:f(x+h)} - e^{lg:fx} = e^{lg:fx + \Delta lg:fx} - e^{lg:fx} =$$
$$= e^{lg:fx} . (e^{\Delta lg:fx} - 1)$$

folglich wenn fx statt $e^{lg:fx}$ gesetzt wird

166) $$\Delta fx = fx . (e^{\Delta lg:fx} - 1)$$

§. 49.

Zusammengesetztere Fälle werden auf die einfacheren zurückgeführt; ist z. B.

$$\Delta^n \, (x^{p|-h} . \varphi x)$$

zu entwickeln, so ist nach dem Frühern

$$\frac{\Delta^n (x^{p|-h} . \varphi x)}{1^{n|1}} = \frac{\Delta^0 x^{p|-h}}{1^{0|1}} . \frac{\Delta^n \varphi x}{1^{n|1}} \qquad \text{wo } \Delta x = h$$
$$+ \frac{\Delta^1 x^{p|-h}}{1^{1|1}} . \frac{\Delta^{n-1} \varphi(x+h)}{1^{n-1|1}}$$
$$+ \frac{\Delta^2 x^{p|-h}}{1^{2|1}} . \frac{\Delta^{n-2} \varphi(x+2h)}{1^{n-2|1}}$$
$$+ \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; .$$
$$+ \frac{\Delta^n x^{p|-h}}{1^{n|1}} . \frac{\Delta^0 \varphi(x+nh)}{1^{0|1}}$$

und nach 132

$$\Delta^q x^{p|-h} = p^{q|-1} . h^n . x^{p-q|-h}$$

folglich

$$167)\ \frac{\Delta^n(x^{p|-h}\cdot\varphi x)}{1^{n|1}} = \frac{p^{0|-1}}{1^{0|1}}\cdot h^0 \cdot x^{p|-h}\cdot\frac{\Delta^n\varphi x}{1^{n|1}} \qquad \text{wo } \Delta x = h$$

$$+ \frac{p^{1|-1}}{1^{1|1}}\cdot h^1 \cdot x^{p-1|-h}\cdot\frac{\Delta^{n-1}\varphi(x+h)}{1^{n-1|1}}$$

$$+ \frac{p^{2|-1}}{1^{2|1}}\cdot h^2 \cdot x^{p-2|-h}\cdot\frac{\Delta^{n-2}\varphi(x+2h)}{1^{n-2|1}}$$

$$+ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$

$$+ \frac{p^{q|-1}}{1^{q|1}}\cdot h^q \cdot x^{p-q|-h}\cdot\frac{\Delta^{n-q}\varphi(x+qh)}{1^{n-q|1}}$$

$$+ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$

$$+ \frac{p^{n|-1}}{1^{n|1}}\cdot h^n \cdot x^{p-n|-h}\cdot\frac{\Delta^{0}\varphi(x+nh)}{1^{0|1}}$$

§. 50.

Eben so finden wir den nten Unterschied des Products

$$a^x \cdot f y$$

Legen wir bei ihm die Gleichung

$$\Delta^n\varphi(x, y) = \Sigma\,\frac{n^{q|-1}}{1^{q|1}}\cdot\Delta_x^{n-q}\,\Delta_y^q\,\varphi\big(x, y + (n-q)\,\Delta y\big)$$

und

$$\Delta_x^{n-q}\,a^x = a^x\cdot(a^h-1)^{n-q}$$

zu Grunde, so finden wir, dass

$$168)\ \Delta^n(a^x\cdot f y) = a^x\Bigg(\frac{n^{0|-1}}{1^{0|1}}\cdot(a^h-1)^n\cdot\Delta^0 f(y+n\,\Delta y) \qquad \text{wo } \Delta x = h$$

$$+ \frac{n^{1|-1}}{1^{1|1}}\cdot(a^h-1)^{n-1}\cdot\Delta^1 f(y+(n-1)\Delta y)$$

$$+ \frac{n^{2|-1}}{1^{2|1}}\cdot(a^h-1)^{n-2}\cdot\Delta^2 f(y+(n-2)\,\Delta y)$$

$$+ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\Bigg)$$

oder auch, wenn das letzte zum ersten Gliede gemacht wird

$$= a^x \left(\frac{n^{0|-1}}{1^{0|1}} \,.\, (a^h-1)^0 \,.\, \Delta^n \; fy \qquad\qquad \text{wo } \Delta x = h \right.$$

$$+ \frac{n^{1|-1}}{1^{1|1}} \,.\, (a^h-1)^1 \,.\, \Delta^{n-1} f(y+\Delta y)$$

$$+ \frac{n^{2|-1}}{1^{2|1}} \,.\, (a^h-1)^2 \,.\, \Delta^{n-2} f(y+2\Delta y)$$

$$\left. + \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;. \right)$$

oder gehen wir von der Gleichung

$$\Delta^n \varphi(x, y) = \Sigma \frac{n^{q|-1}}{1^{q|1}} \,.\, \Delta_x^q \; \Delta_y^{n-q} \; f(x+(n-q)h, y)$$

aus, so wird

$$169)\; \Delta^n (a^x . fy) = a^x \left(\frac{n^{0|-1}}{1^{0|1}} \,.\, a^{nh} \quad .\, (a^h-1)^0 \,.\, \Delta^n fy \qquad\qquad \text{wo } \Delta x = h \right.$$

$$+ \frac{n^{1|-1}}{1^{1|1}} \,.\, a^{(n-1)h} \,.\, (a^h-1)^1 \,.\, \Delta^{n-1} fy$$

$$+ \frac{n^{2|-1}}{1^{2|1}} \,.\, a^{(n-2)h} \,.\, (a^h-1)^2 \,.\, \Delta^{n-2} fy)$$

$$\left. + \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;. \right)$$

Alle diese Reihen gelten auch, wenn n verneint ist, und sind besonders dann nützlich, wenn $n = -1$

THEORIE

DER

DIFFERENTIALE.

15 *

THEORIE
DER
DIFFERENTIALE.

Erste Abtheilung.

I. DIFFERENTIIREN ÜBERHAUPT.

§. 51.

Wenn die Grundgrösse x einer Function fx eine Zunahme Δx erhält, und die ursprüngliche Function von dieser $f(x + \Delta x)$ abgezählt wird, so verschwindet, wenn die Zunahme $\Delta x = 0$ gesetzt wird, auch immer der Unterschied $f(x + \Delta x) - fx$, aber nicht wegen des Factors

$$\frac{f(x + \Delta x) - fx}{\Delta x} \text{ oder } \frac{\Delta fx}{\Delta x}$$

sondern wegen des andern Factors Δx, der von ihm getrennt ist. Wir wollen diesen besondern Fall festhalten, und durch die Vertauschung des Unterschiedes (Differenz) gegen Differential und des Buchstabens Δ gegen *d* bemerkbar machen, so dass

$$d fx = \frac{d fx}{dx} . dx$$

Das Differential ist also immer $= 0$, und $d\,\mathrm{x}$ ist das Zeichen einer früher vorhandenen Grösse $\Delta\mathrm{x}$, womit reelle Geschäfte gemacht sind, welche aber nach Vollendung dieser Geschäfte in ihr Nichts zurückgetreten ist.

Nicht der Factor, welcher verschwunden, sondern jener Factor, welcher durch Abzählen und Messen und durch Vernichtung der Zunahme $\Delta\mathrm{x}$ entstanden ist, kann einer fernern Untersuchung unterworfen werden.

Wird bei den spätern oder höhern Unterschieden nach vollendetem Messen oder nach vorgenommener Trennung der Factoren die Zunahme der Grundgrösse $= 0$ gesetzt, so entstehen die höhern Differentiale

$$\frac{d^2\,\mathrm{fx}}{(d\mathrm{x})^2}\,.\,(d\mathrm{x})^2\,,\;\frac{d^3\,\mathrm{fx}}{(d\mathrm{x})^3}\,.\,(d\mathrm{x})^3\;,\;\ldots\,.$$

Geschieht dieses bei mehreren Grundgrössen, so gilt auch hier in dem besondern Falle, was im allgemeinen bei den Unterschieden bewiesen ist, nämlich dass die Ordnung im Differentiiren in Hinsicht des Resultats gleichgültig ist, oder in Zeichen:

$$\frac{d\left(\frac{d\,\mathrm{f(x,y)}}{d\mathrm{x}}\right)}{d\mathrm{y}} = \frac{d\left(\frac{d\,\mathrm{f(x,y)}}{d\mathrm{y}}\right)}{d\mathrm{x}}$$

oder

170) $$\frac{d^2\,\mathrm{f(x,y)}}{d\mathrm{y}\,.\,d\mathrm{x}} = \frac{d^2\,\mathrm{f(x,y)}}{d\mathrm{x}\,.\,d\mathrm{y}}$$

Dadurch, dass die Zunahmen der Grundgrössen besondere Werthe erhalten, verlieren die Wahrheiten, welche in der ersten Abhandlung gefunden sind, nichts an ihrer Gültigkeit, und in dem ganz besondern Falle, wo diese Zunahmen $= 0$ gesetzt werden, werden nur die Zeichen geändert. Nach diesem ist daher, für die höhern Differentiale von einer Function mit zweien veränderlichen Grössen f(x, y) nach N. 50

$$171)\ \frac{d^n f(x,y)}{1^{n|1}} = \frac{d^0\, d^n\, f(x,\ y)}{1^{0|1}.1^{n|1} dy^0.dx^n} . dy^0.dx^n + \frac{d^1\, d^{n-1} f(x,y)}{1^{1|1}.1^{n-1|1}.dy^1.dx^{n-1}} .dy^1.dx^{n-1}$$

$$+ \frac{d^2\, d^{n-2}\, f(x,\ y)}{1^{2|1}.1^{n-2|1}.dy^2.dx^{n-2}}.dy^2.dx^{n-2} + \ldots + \frac{d^n\, d^0\, f(x,\ y)}{1^{n|1}.1^{0|1}.dy^n.dx^0}.dy^n.dx^0$$

oder auch ohne Trennung der Factoren

$$172)\ \frac{d^n\, f(x,y)}{1^{n|1}} = \frac{d_y^0\, d_x^n\, f(x,y)}{1^{0|1}.1^{n|1}} + \frac{d_y^1\, d_x^{n-1}\, f(x,y)}{1^{1|1}.1^{n-1|1}}$$

$$+ \frac{d_y^2 d_x^{n-2} f(x,y)}{1^{2|1}.1^{n-2|1}} + \ldots + \frac{d_y^n\, d_x^0\, f(x,y)}{1^{n|1}.1^{0|1}}$$

und bei Functionen mehrerer veränderlicher Grössen nach N. 54

$$173)\ d f(x_1, x_2, \ldots, x_m) =$$

$$\frac{d f(x_1, \ldots, x_m)}{d x_1} . d x_1 + \frac{d f(x_1, \ldots, x_m)}{d x_2} . d x_2 + \ldots + \frac{d f(x_1, \ldots, x_m)}{d x_m} . d x_m$$

und für die höhern Differentiale von Functionen mehrerer veränderlicher Grundgrössen nach N. 55

$$174)\ d^n f(x_1, \ldots, x_m) =$$

$$1^{n|1} . \Sigma \frac{d_1^{n1}\, d_2^{n2} \ldots . d_m^{nm}\, f(x_1, \ldots., x_m)}{1^{n1|1}\, 1^{n2|1} \ldots 1^{n(m)|1} (dx_1)^{n1} (dx_2)^{n2} \ldots (dx_m)^{nm}} . (dx_1)^{n1} (dx_2)^{n2} \ldots (dx_m)^{nm}$$

oder, wenn die Factoren, welche verschwinden, von den übrigen nicht getrennt werden

$$175)\ d^n f(x_1,\ x_2, \ldots, x_m) = 1^{n|1} . \Sigma \frac{d_1^{n1}\ d_2^{n2}\ d_1^{n3} \ldots d_m^{n(m)} f(x_1,\ x_2, \ldots, x_m)}{1^{n1|1} . 1^{n2|1} . 1^{n3|1} \ldots . 1^{n(m)|1}}$$

wo $n1 + n2 + n3 + \ldots + n(m) = n$ und $n1, n2, \ldots, n(m)$ alle Werthe $0, 1, 2, \ldots\ldots$ annehmen können.

Diese Geschäfte können auf verschiedene Weise angegeben werden, z. B.

176) $$d^n f(x_1, x_2, \ldots, x_m) = (d_1 + d_2 + \ldots + d_m)^n f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$$

oder

177) $$d^n f(x_1, x_2, \ldots, x_m) = 1^{n|1} . C(n, m) . f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$$

$$\begin{array}{l} \frac{d_1^0}{1^{0|1}}, \frac{d_1^1}{1^{1|1}}, \frac{d_1^2}{1^{2|1}}, \ldots\ldots \\ \frac{d_2^0}{1^{0|1}}, \frac{d_2^1}{1^{1|1}}, \frac{d_2^2}{1^{2|1}}, \ldots\ldots \\ \frac{d_3^0}{1^{0|1}}, \frac{d_3^1}{1^{1|1}}, \frac{d_3^2}{1^{2|1}}, \ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}$$

wo $C(n, m)$ alle möglichen Verbindungen aus den untergesetzten Elementen zu m Elementen zur Summe n bedeutet; es ist z. B.

$$d^2 f(x_1, x_2, x_3) = 1^{2|1} \left| \begin{array}{ccc} \frac{d_1^0}{1^{0|1}} & \frac{d_2^0}{1^{0|1}} & \frac{d_3^2}{1^{2|1}} \\ \frac{d_1^0}{1^{0|1}} & \frac{d_2^1}{1^{1|1}} & \frac{d_3^1}{1^{1|1}} \\ \frac{d_1^0}{1^{0|1}} & \frac{d_2^2}{1^{2|1}} & \frac{d_3^0}{1^{0|1}} \\ \frac{d_1^1}{1^{1|1}} & \frac{d_2^0}{1^{0|1}} & \frac{d_3^1}{1^{1|1}} \\ \frac{d_1^1}{1^{1|1}} & \frac{d_2^1}{1^{1|1}} & \frac{d_3^0}{1^{0|1}} \\ \frac{d_1^2}{1^{2|1}} & \frac{d_2^0}{1^{0|1}} & \frac{d_3^0}{1^{0|1}} \end{array} \right| . f(x_1, x_2, x_3)$$

oder auch

178) $$d^n f(x_1, x_2, \ldots, x_m) = 1^{n|1} . (D_1 . D_2 . D_3 \ldots . D_m) f(n+1) . f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$$

wo

$$D_1 = \frac{d_1^0}{1^{0|1}} + \frac{d_1^1}{1^{1|1}} + \frac{d_1^2}{1^{2|1}} + \ldots.$$

$$D_2 = \frac{d_2^0}{1^{0|1}} + \frac{d_2^1}{1^{1|1}} + \frac{d_2^2}{1^{2|1}} + \ldots.$$

$$D_3 = \frac{d_3^0}{1^{0|1}} + \frac{d_3^1}{1^{1|1}} + \frac{d_3^2}{1^{2|1}} + \ldots$$

. . . .

Durch diese Gleichungen 174, ..., 178 ist die unabhängige Bildungsweise angegeben; die Geschäfte, welche sie vorschreibt, können auch theilweise vorgenommen werden, denn nach der Gleichung 58 ist

$$179)\quad \frac{d^n f(x_1, \ldots, x_m)}{1^{n|1}} = \frac{d^0_{1,2,\ldots,p}\, d^n_{p+1,\ldots,m}\, f(x_1, \ldots, x_p, x_{p+1}, \ldots, x_m)}{1^{0|1} \,.\, 1^{n|1}}$$

$$+ \frac{d^1_{1,2,\ldots,p}\, d^{n-1}_{p+1,\ldots,m}\, f(x_1, \ldots, x_p, x_{p+1}, \ldots, x_m)}{1^{1|1} \,.\, 1^{n-1|1}}$$

$$+ \frac{d^2_{1,2,\ldots,p}\, d^{n-2}_{p+1,\ldots,m}\, f(x_1, \ldots, x_p, x_{p+1}, \ldots, x_m)}{1^{2|1} \,.\, 1^{n-2|1}}$$

$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$+ \frac{d^u_{1,2,\ldots,p}\, d^0_{p+1,\ldots,m}\, f(x_1, \ldots, x_p, x_{p+1}, \ldots, x_m)}{1^{n|1} \,.\, 1^{0|1}}$$

wo $d_{1,2,\ldots,p}$ das Differential von der gegebenen Function in Hinsicht der Grundgrössen $x_1, x_2, \ldots, x$ und so auch $d_{p+1,\ldots,m}$ das Differential in Hinsicht $x_m, x_{m-1}, \ldots, x_{m-p}$ bedeutet, oder wenn wegen der Kürze f statt $f(x_1, \ldots, x_p, x_{p+1}, \ldots, x_m)$ gesetzt wird

$$d_{1,2,\ldots,p}\, f = \frac{df}{dx_1} \,.\, dx_1 + \frac{df}{dx_2} \,.\, dx_2 + \ldots. + \frac{df}{dx_p} \,.\, dx_p$$

und

$$d_{p+1,\ldots,m}\, f = \frac{df}{dx_{p+1}} \,.\, dx_{p+1} + \frac{df}{dx_{p+2}} \,.\, dx_{p+2} + \ldots. + \frac{df}{dx_m} \,.\, dx_m$$

II. Differentiale verbunden mit Producten.

§. 52.

Werden auch hier, wie bei den Unterschieden in §. 28 die verschiedenen Differentiale von $f(x_1, \ldots, x_m)$ mit Producten verbunden, die entstehen, wenn in dem Producte

$$180) \qquad (a_1 + qb_1)(a_2 + qb_2)\ldots\ldots(a_m + qb_m) = (a_1 + qb_1)_m$$

$0, 1, 2, 3, \ldots, n$ statt q gesetzt werden, so ergibt sich die Reihe

$$181) \qquad (a_1 + 0b_1)_m \cdot \frac{d^n_{1,\ldots,p}\ d^0_{p+1,\ldots,m}\ f(x_1, \ldots, x_p, x_{p+1}, \ldots, x_m)}{1^{n|1} \cdot 1^{0|1}}$$

$$+ (a_1 + 1b_1)_m \cdot \frac{d^{n-1}_{1,\ldots,p}\ d^1_{p+1,\ldots,m}\ f(x_1, \ldots, x_p, x_{p+1}, \ldots, x_m)}{1^{n-1|1} \cdot 1^{1|1}}$$

$$+ (a_1 + 2b_1)_m \cdot \frac{d^{n-2}_{1,\ldots,p}\ d^2_{p+1,\ldots,m}\ f(x_1, \ldots, x_p, x_{p+1}, \ldots, x_m)}{1^{n-2|1} \cdot 1^{2|1}}$$

$$+ \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot$$

$$+ (a_1 + nb_1)_m \cdot \frac{d^0_{1,\ldots,p}\ d^n_{p+1,\ldots,m}\ f(x_1, \ldots, x_p, x_{p+1}, \ldots, x_m)}{1^{0|1} \cdot 1^{n|1}}$$

$$= A_{(m,0)} \cdot \frac{d^n_{1,\ldots,m} d^0_{p+1,\ldots,m} f(x_1,\ldots,x_m)}{1^{n|1}} + A_{(m,1)} \frac{d^{n-1}_{1,\ldots,m}\ d^1_{p+1,\ldots,m} f(x_1,\ldots,x_m)}{1^{n-1|1}}$$

$$+ A_{(m,2)} \cdot \frac{d^{n-2}_{1,\ldots,m} d^2_{p+1,\ldots,m} f(x_1,\ldots,x_m)}{1^{n-2|1}} + \ldots + A_{(m,m)} \frac{d^{n-m}_{1,\ldots,m}\ d^m_{p+1,\ldots,m} f(x_1,\ldots,x_m)}{1^{n-m|1}}$$

in welcher die Vorzahlen dieselbe zurücklaufende und auch dieselbe unabhängige Bildungsweise befolgen, welche in §. 28 gefunden sind.

In dem besondern Falle, wo die Factoren der Producte um gleichviel zunehmen, oder wo

$$(a_1 + qb_1)_m = (a + qb)^{m|b}$$

ist, nimmt auch die Bildungsweise der Vorzahlen in obiger Reihe eine einfachere Form an; es ist

$$182)\qquad \begin{aligned} & a^{m|b} \,.\, \frac{d^{n}_{1,\ldots,p}\; d^{0}_{p+1,\ldots,m}\; f(x_1,\ldots,x_m)}{1^{n|1} \,.\, 1^{0|1}} \\ & + (a+1b)^{m|b} \,.\, \frac{d^{n-1}_{1,\ldots,p}\; d^{1}_{p+1,\ldots,m}\; f(x_1,\ldots,x_m)}{1^{n-1|1} \,.\, 1^{1|1}} \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + (a+nb)^{m|b} \,.\, \frac{d^{0}_{1,\ldots,p}\; d^{n}_{p+1,\ldots,m}\; f(x_1,\ldots,x_m)}{1^{0|1} \,.\, 1^{n|1}} \\ = & \frac{m^{0|-1}}{1^{0|1}} \,.\, a^{m|b} \,.\, b^{0} \,.\, \frac{d^{n}_{1,\ldots,m}\; d^{0}_{p+1,\ldots,m}\; f(x_1,\ldots,x_m)}{1^{n|1}} \\ & + \frac{m^{1|-1}}{1^{1|1}} \,.\, (a+1b)^{m-1|b} \,.\, b^{1} \,.\, \frac{d^{n-1}_{1,\ldots,m}\; d^{1}_{p+1,\ldots,m}\; f(x_1,\ldots,x_m)}{1^{n-1|1}} \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + \frac{m^{m|-1}}{1^{m|1}} \,.\, (a+mb)^{0|b} \,.\, b^{m} \,.\, \frac{d^{n-m}_{1,\ldots,m}\; d^{m}_{p+1,\ldots,m}\; f(x_1,\ldots,x_m)}{1^{n-m|1}} \end{aligned}$$

und wenn die Factoren der Producte gleich sind, oder wenn

$$(a_1 + qb_1)_m = (a + qb)^{m}$$

so entsteht die Reihe

$$183)\qquad \begin{aligned} & a^{m} \,.\, \frac{d^{n}_{1,\ldots,p}\; d^{0}_{p+1,\ldots,m}\; f(x_1,\ldots,x_m)}{1^{n|1} \,.\, 1^{0|1}} \\ & + (a+1b)^{m} \,.\, \frac{d^{n-1}_{1,\ldots,p}\; d^{1}_{p+1,\ldots,m}\; f(x_1,\ldots,x_m)}{1^{n-1|1} \,.\, 1^{1|1}} \\ & + (a+2b)^{m} \,.\, \frac{d^{n-2}_{1,1,\ldots,p}\; d^{2}_{p+1,\ldots,m}\; f(x_1,\ldots,x_m)}{1^{n-2|1} \,.\, 1^{2|1}} \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + (a+nb)^{m} \,.\, \frac{d^{0}_{1,\ldots,p}\; d^{n}_{p+1,\ldots,m}\; f(x_1,\ldots,x_m)}{1^{0|1} \,.\, 1^{n|1}} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
= \quad & [a + 0b]^{(m)} . b^{0} . \frac{d^{n}_{1,\ldots,m} \; d^{0}_{p+1,\ldots,m} \; f(x_{1},\ldots,x_{m})}{1^{n|1}} \\
+ \quad & [a + 0b,\ a + 1b]^{(m-1)} . b^{1} . \frac{d^{n-1}_{1,\ldots,m} \; d^{1}_{p+1,\ldots,m} \; f(x_{1},\ldots,x_{m})}{1^{n-1|1}} \\
+ \quad & [a + 0b,\ a + 1b,\ a + 2b]^{(m-2)} . b^{2} . \frac{d^{n-2}_{1,\ldots,m} \; d^{2}_{p+1,\ldots,m} \; f(x_{1},\ldots,x_{m})}{1^{n-2|1}} \\
+ \quad & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
+ \quad & [a+0b, a+1b, \ldots, a+mb]^{(m-m)} . b^{m} . \frac{d^{n-m}_{1,\ldots,m} \; d^{m}_{p+1,\ldots,m} \; f(x_{1},\ldots,x_{m})}{1^{n-m|1}}
\end{aligned}
$$

III. Differentiiren der Producte.

§. 53.

Von dieser grossen Allgemeinheit gehen wir zu dem Falle über, worin die verschiedenen Grundgrössen x_1, x_2, x_3, ..., von einander getrennt, aber doch wieder als Factoren in demselben Producte mit einander verbunden sind. Wir erhalten aus 173

$$184)\quad d(f^{(1)}x_1 . f^{(2)}x_2 . f^{(3)}x_3 \ldots f^{(m)}x_m) = \begin{array}{l} f^{(2)}x_2 . f^{(3)}x_3 . f^{(4)}x_4 \ldots . f^{(m)}x_m . df^{(1)}x_1 \\ + f^{(1)}x_1 . f^{(3)}x_3 . f^{(4)}x_4 \ldots . f^{(m)}x_m . df^{(2)}x_2 \\ + f^{(1)}x_1 . f^{(2)}x_2 . f^{(4)}x_4 \ldots . f^{(m)}x_m . df^{(3)}x_3 \\ + \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;. \\ + f^{(1)}x_1 . f^{(2)}x_2 . f^{(3)}x_3 \ldots . f^{(m-1)}x_{m-1} . df^{(m)}x_m \end{array}$$

und allgemein aus §. 51

$$185)\, d^n(f^{(1)}x_1 . f^{(2)}x_2 . f^{(3)}x_3 \ldots f^{(m)}x_m) = 1^{n|1} . \Sigma \frac{d^{n1}f^{(1)}x_1 . d^{n2}f^{(2)}x_2 . d^{n3}f^{(3)}x_3 \ldots . d^{n(m)}f^{(m)}x_m}{1^{n1|1} . 1^{n2|1} . 1^{n3|1} \ldots\ldots 1^{n(m)|1}}$$

$$\text{wo} \quad n1 + n2 + \ldots\ldots + n(m) = n$$

$$186) \qquad \text{oder} \qquad = 1^{n|1} . C(n, m)$$

$$\left(\begin{array}{l} \frac{d^0 f^{(1)}x_1}{1^{0|1}}, \frac{d^1 f^{(1)}x_1}{1^{1|1}}, \frac{d^2 f^{(1)}x_1}{1^{2|1}}, \ldots . \\ \frac{d^0 f^{(2)}x_2}{1^{0|1}}, \frac{d^1 f^{(2)}x_2}{1^{1|1}}, \frac{d^2 f^{(2)}x_2}{1^{2|1}}, \ldots . \\ \frac{d^0 f^{(3)}x_3}{1^{0|1}}, \frac{d^1 f^{(3)}x_3}{1^{1|1}}, \frac{d^2 f^{(3)}x_3}{1^{2|1}}, \ldots . \\ .\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;. \end{array} \right)$$

187) oder $= 1^{n|1} . (D_1 . D_2 . D_3 \dots . D_m) \mathfrak{f}(n+1)$

$$\text{wo} \quad D_1 = \frac{d^0 f^{(1)} x_1}{1^{0|1}} + \frac{d^1 f^{(1)} x_1}{1^{1|1}} + \frac{d^2 f^{(1)} x_1}{1^{2|1}} + \dots .$$

$$D_2 = \frac{d^0 f^{(2)} x_2}{1^{0|1}} + \frac{d^1 f^{(2)} x_2}{1^{1|1}} + \frac{d^2 f^{(2)} x_2}{1^{2|1}} + \dots .$$

$$D_3 = \frac{d^0 f^{(3)} x_3}{1^{0|1}} + \frac{d^1 f^{(3)} x_3}{1^{1|1}} + \frac{d^2 f^{(3)} x_3}{1^{2|1}} + \dots .$$

. . . .

Der besondere Fall, wo das Product nur aus zwei Factoren besteht, kommt oft vor, und ist

188) $$\frac{d^n (fx . f_1 y)}{1^{n|1}} = \frac{d^n f x}{1^{n|1}} . \frac{d^0 f_1 y}{1^{0|1}} + \frac{d^{n-1} fx}{1^{n-1|1}} . \frac{d^1 f_1 y}{1^{1|1}} + \dots + \frac{d^0 fx}{1^{0|1}} . \frac{d^n f_1 y}{1^{n|1}}$$

§. 54.

Sind die Functionen $f^{(1)}$, $f^{(2)}$, $f^{(3)}$, ... nicht verschieden, und auch die Grundgrössen x_1, x_2, x_3, ... gleich, so erhalten wir den einfachsten Fall

189) $d (fx)^m = m . (fx)^{m-1} . d fx$

und ganz allgemein

190) $$d^n (fx)^m = 1^{n|1} . \Sigma \frac{d^{n1} fx . d^{n2} fx . d^{n3} fx \dots . d^{n(m)} fx}{1^{n1|1} . 1^{n2|1} . 1^{n3|1} \dots . 1^{n(m)|1}}$$

$$\text{wo} \quad n1 + n2 + \dots + n(m) = n$$

191) oder $$= 1^{n|1} . C(n,m) \left(\frac{d^0 fx}{1^{0|1}}, \frac{d^1 fx}{1^{1|1}}, \frac{d^2 fx}{1^{2|1}}, \dots \right)$$

192) oder $$= 1^{n|1} . \left(\frac{d^0 fx}{1^{0|1}} + \frac{d^1 fx}{1^{1|1}} + \frac{d^2 fx}{1^{2|1}} + \dots \right)^m \mathfrak{f}(n+1)$$

Diese Gleichungen, welche die Bildungsweise des nten Differentials von $(fx)^m$ angeben, gelten jedoch nur für den Fall, wenn m eine ganze bejahte Zahl ist.

Wenn m keine ganze bejahte Zahl ist, so lässt sich das erste Differential von $(fx)^m$ oder y^m aus dem ersten Unterschiede

$$\frac{\Delta(y^m)}{\Delta y} = \frac{(y + \Delta y)^m - y^m}{\Delta y} = \frac{m}{1} . y^{m-1} + \frac{m(m-1)}{1 . 2} . y^{m-2} . (\Delta y)^1 + \dots$$

leicht finden; es ist

$$193) \qquad \frac{d(y^m)}{dy} = m . y^{m-1} \text{ oder } d(fx)^m = m . (fx)^{m-1} . dfx$$

was auch m immer sein mag; allein ihre höhern Differentiale können erst später folgen, da ihre Bildungsweise Mehreres voraussetzt.

§. 55.

Durch das Zerfällen von m in zwei oder mehrere Theile, welches der Grundgedanke im Obigen ist, können früher vollbrachte Geschäfte zu spätern benutzt werden; so ist nach N. 188

$$194) \quad \frac{d^n (fx)^{a1+a2}}{1^{n|1}} =$$

$$\frac{d^n (fx)^{a1}}{1^{n|1}} . \frac{d^0 (fx)^{a2}}{1^{0|1}} + \frac{d^{n-1} (fx)^{a1}}{1^{n-1|1}} . \frac{d^1 (fx)^{a2}}{1^{1|1}} + \dots + \frac{d^0 (fx)^{a1}}{1^{0|1}} . \frac{d^n (fx)^{a2}}{1^{n|1}}$$

Dieses Zurückführen des *n* ten Differentials von $(fx)^{a1+a2+a3+\dots}$ auf die Differentiale von $(fx)^{a1}$, $(fx)^{a2}$, $(fx)^{a3}$, ... lässt sich auf folgende Weise weiter verfolgen. Es ist, wenn X statt fx gesetzt wird

$$\frac{d^n X^{a1+a2}}{1^{n|1}} = \frac{d^n \left((X^{a1})^{\frac{a1+a2}{a1}}\right)}{1^{n|1}} = \frac{d^{n-1} d \left((X^{a1})^{\frac{a1+a2}{a1}}\right)}{1^{n|1}}$$

$$= \frac{a1 + a2}{a1} . \frac{d^{n-1} \left((X^{a1})^{\frac{a1+a2}{a1} - 1} . dX^{a1}\right)}{1^{n|1}} = \frac{a1 + a2}{a1} . \frac{1}{n} . \frac{d^{n-1} (X^{a2} . dX^{a1})}{1^{n-1|1}}$$

und nach N. 188

$$\frac{d^nX^{a1+a2}}{1^{n|1}} = \frac{a1+a2}{a1}\cdot\frac{1}{n}\cdot\left(\frac{d^nX^{a1}}{1^{n-1|1}}\cdot\frac{d^0X^{a2}}{1^{0|1}} + \frac{d^{n-1}X^{a1}}{1^{n-2|1}}\cdot\frac{d^1X^{a2}}{1^{1|1}} + \ldots + \frac{d^1X^{a1}}{1^{0|1}}\cdot\frac{d^{n-1}X^{a2}}{1^{n-1|1}}\right)$$

oder

$$195)\quad \frac{d^nX^{a1+a2}}{1^{n|1}} = \frac{a1+a2}{a1}\cdot X^{a2}\cdot\frac{d^nX^{a1}}{1^{n|1}} + \frac{a1+a2}{a1}\cdot\Sigma\frac{p}{n}\cdot\frac{d^pX^{a1}}{1^{p|1}}\cdot\frac{d^qX^{a2}}{1^{q|1}}$$

wo p und q alle Werthe von 1, 2, 3, ... erhalten, jedoch so dass

$$n = p + q$$

Wird in dieser Gleichung $a2 + a3$ statt $a2$ gesetzt, so muss

$$\frac{d^qX^{a2+a3}}{1^{q|1}} \text{ statt } \frac{d^qX^{a2}}{1^{q|1}}$$

und

$$\frac{d^qX^{a2+a3}}{1^{q|1}} = \frac{a2+a3}{a3}\cdot X^{a3}\cdot\frac{d^qX^{a2}}{1^{q|1}} + \frac{a2+a3}{a2}\cdot\Sigma\frac{r}{q}\,\frac{d^rX^{a2}}{1^{r|1}}\cdot\frac{d^sX^{a3}}{1^{s|1}}$$

gesetzt werden, und statt r und s die Werthe 1, 2, .. und zwar so, dass

$$r + s = q$$

Wird dieser Werth in die obige Gleichung eingeführt, so wird

$$\frac{d^nX^{a1+a2+a3}}{1^{n|1}} = \frac{a1+a2+a3}{a1}\cdot X^{a2+a3}\cdot\frac{d^nX^{a1}}{1^{n|1}}$$

$$+ \frac{a1+a2+a3}{a1}\cdot\Sigma\left(\frac{p}{n}\cdot\frac{d^pX^{a1}}{1^{p|1}}\cdot\frac{a2+a3}{a2}\cdot X^{a3}\cdot\frac{d^qX^{a2}}{1^{q|1}}\right)$$

$$+ \frac{a1+a2+a3}{a1}\cdot\Sigma\left(\frac{p}{n}\cdot\frac{d^pX^{a1}}{1^{p|1}}\cdot\frac{a2+a3}{a2}\cdot\Sigma\left(\frac{r}{q}\cdot\frac{d^rX^{a2}}{1^{r|1}}\cdot\frac{d^sX^{a3}}{1^{s|1}}\right)\right)$$

Da nun $p + q = p + r + s = n$ und $q = n - p$ ist, so lässt sich diese Gleichung auch auf folgende Weise darstellen:

$$196)\qquad \frac{d^nX^{a1+a2+a3}}{1^{n|1}} = \frac{a1+a2+a3}{a1}\,.\,X^{a2+a3}\,.\,\frac{d^nX^{a1}}{1^{n|1}}$$

$$+\ \frac{(a1+a2+a3)(a2+a3)}{a1\quad .\quad a2}\,.X^{a3}\,.\,\Sigma_{(p,q)}\left(\frac{p}{n}\,.\,\frac{d^pX^{a1}}{1^{p|1}}\,.\,\frac{d^qX^{a2}}{1^{q|1}}\right)$$

$$+\ \frac{(a1+a2+a3)(a2+a3)(a3)}{a1\quad .\quad a2\quad .\,a3}\ .\ \Sigma_{(p,r,s)}\left(\frac{p\ .\ r}{n.(n-p)}\,.\,\frac{d^pX^{a1}}{1^{p|1}}\,.\,\frac{d^rX^{a2}}{1^{r|1}}\,.\,\frac{d^sX^{a3}}{1^{s|1}}\right)$$

wo $p + q = n$ und $p + r + s = n$, und jede der Grössen p, q, r, s die Werthe 1, 2, 3, ... annehmen kann.

So wie von X^{a1+a2} zu $X^{a1+a2+a3}$, so gehen wir von diesem zu $X^{a1+a2+a3+a4}$ über; wir setzen in der letztgefundenen Gleichung $a3 + a4$ statt $a3$; also nach N. 195

$$\frac{d^sX^{a3+a4}}{1^{s|1}} = \frac{a3+a4}{a3}.X^{a4}\,.\,\frac{d^sX^{a3}}{1^{s|1}} + \frac{a3+a4}{a3}\ .\ \Sigma_{(t,u)}\ \frac{t}{s}\,.\,\frac{d^tX^{a3}}{1^{t|1}}\,.\,\frac{d^uX^{a4}}{1^{u|1}}$$

wo t und u die Werthe 1, 2, ... annehmen können, jedoch so, dass

$$t + u = s = n - p - r$$

mithin den letzten Factor in dem letzten Gliede der Gleichung 196

$$\Sigma_{(p,r,s)}\frac{p\ .\ r}{n(n-p)}\,.\,\frac{d^pX^{a1}}{1^{p|1}}\,.\,\frac{d^rX^{a2}}{1^{r|1}}\,.\,\frac{d^sX^{a3}}{1^{s|1}} = \Sigma_{(p,r,s)}\left(\frac{p\ .\ r}{n(n-p)}\,.\,\frac{d^pX^{a1}}{1^{p|1}}\,.\,\frac{d\ X^{a2}}{1^{r|1}}\,.\,\frac{a3+a4}{a3}\,.X^{a4}\,.\,\frac{d^sX^{a3}}{1^{s|1}}\right)$$

$$+\ \Sigma_{(p,r,s)}\left(\frac{p\ .\ r}{n(n-p)}\ .\ \frac{d^pX^{a1}}{1^{p|1}}\ .\ \frac{d^rX^{a2}}{1^{r|1}}\ .\ \frac{a3+a4}{a3}\,.\,\Sigma_{(t,u)}\left(\frac{t}{s}\,.\,\frac{d^tX^{a3}}{1^{t|1}}\ .\ \frac{d^uX^{a4}}{1^{u|1}}\right)\right)$$

$$=\ \frac{a3+a4}{a3}\ .\ X^{a4}\ .\ \Sigma_{(p,r,s)}\left(\frac{p\ .\ r}{n(n-p)}\ .\ \frac{d^pX^{a1}}{1^{p|1}}\ .\ \frac{d^rX^{a2}}{1^{r|1}}\ .\ \frac{d^sX^{a3}}{1^{s|1}}\right)$$

$$+\ \frac{a3+a4}{a3}\,.\,\Sigma_{(p,r,t,u)}\left(\frac{p\ .\ r\ .\ t}{n(n-p)(n-p-r)}\,.\,\frac{d^pX^{a1}}{1^{p|1}}\,.\,\frac{d^rX^{a2}}{1^{r|1}}\,.\,\frac{d^tX^{a3}}{1^{t|1}}\ .\ \frac{d^uX^{a4}}{1^{u|1}}\right)$$

Wird dieser Werth in die Gleichung 196 eingeführt, und in dieser Gleichung statt $a3$ gesetzt $a3 + a4$, so ergibt sich, wenn wir

$$\frac{(a1+\ldots+ap)(a2+\ldots+ap)\ldots.(aq+\ldots+ap)}{a1\ .\ a2\ .\ .\ .\ .\ .\ aq} = M_{(p,q)}$$

setzen, folgende Bildungsweise

197) $$\frac{d^nX^{a1+a2+a3+a4}}{1^{n|1}} = M_{(4,1)} \cdot X^{a2+a3+a4} \cdot \frac{d^nX^{a1}}{1^{n|1}}$$
$$+ M_{(4,2)} \cdot X^{a3+a4} \cdot \Sigma_{(p,q)} \cdot \left(\frac{p}{n} \cdot \frac{d^pX^{a1}}{1^{p|1}} \cdot \frac{d^qX^{a2}}{1^{q|1}}\right)$$
$$+ M_{(4,3)} \cdot X^{a4} \cdot \Sigma_{(p,r,s)} \cdot \left(\frac{p\,.\,r}{n(n-p)} \cdot \frac{d^pX^{a1}}{1^{p|1}} \cdot \frac{d^rX^{a2}}{1^{r|1}} \cdot \frac{d^sX^{a3}}{1^{s|1}}\right)$$
$$+ M_{(4,4)} \cdot \Sigma_{(p,r,t,u)} \left(\frac{p\,.\,r\,.\,t}{n(n-p)\ (n-p-r)} \cdot \frac{d^pX^{a1}}{1^{p|1}} \cdot \frac{d^rX^{a2}}{1^{r|1}} \cdot \frac{d^tX^{a3}}{1^{t|1}} \cdot \frac{d^uX^{a4}}{1^{u|1}}\right)$$

wo
$$\begin{aligned} n &= p + q \\ &= p + r + s \\ &= p + r + t + u \end{aligned}$$

sein muss, und p, q, r, s, t, u = 1, 2, 3, ... sein kann.

Wir finden auf diesem Wege ferner, dass

198) $$\frac{d^nX^{a1+a2+a3+a4+a5}}{1^{n|1}} = M_{(5,1)} \cdot X^{a2+a3+a4+a5} \cdot \frac{d^nX^{a1}}{1^{n|1}}$$
$$+ M_{(5,2)} \cdot X^{a3+a4+a5} \cdot \Sigma_{(n1,n2)} \left(\frac{n1}{n} \cdot \frac{d^{n1}X^{a1}}{1^{n1|1}} \cdot \frac{d^{n1}X^{a2}}{1^{n2|1}}\right)$$
$$+ M_{(5,3)} \cdot X^{a4+a5} \cdot \Sigma_{(n1,n2,n3)} \left(\frac{n1\,.\,n2}{n(n-n1)} \cdot \frac{d^{n1}X^{a1}}{1^{n1|1}} \cdot \frac{d^{n2}X^{a2}}{1^{n2|1}} \cdot \frac{d^{n3}X^{a3}}{1^{n3|1}}\right)$$
$$+ M_{(5,4} \cdot X^{a5}\ \Sigma_{(n1,n2,n3,n4)} \left(\frac{n1\,.\,n2\,.\,n3}{n(n-n1)(n-n1-n2)} \cdot \frac{d^{n1}X^{a1}}{1^{n1|1}} \cdot \frac{d^{n2}X^{a2}}{1^{n2|1}} \cdot \frac{d^{n3}X^{a3}}{1^{n3|1}} \cdot \frac{d^{n4}\,.X^{a4}}{1^{n4|1}}\right)$$
$$+ M_{(5,5)} \cdot \Sigma_{n1,\ldots(n5} \left(\frac{n1\,.\,n2\,.\,n3\,.\,n4}{n(n-n1)(n-n1-n2)(n-n1-n2-n3)} \cdot \frac{d^{n1}X^{a1}}{1^{n1|1}} \cdot \frac{d^{n2}X^{a2}}{1^{n2|1}} \cdot \ldots \cdot \frac{d^{n5}\ X^{a5}}{1^{n5|1}}\right)$$

wo
$$\begin{aligned} n &= n1 + n2 \\ &= n1 + n2 + n3 \\ &= n1 + n2 + n3 + n4 \\ &= n1 + n2 + n3 + n4 + n5 \end{aligned}$$

und jede dieser Grössen $n1$, $n2$, . . die Werthe 1, 2, 3, . . . erhalten kann.

Allgemein finden wir, wenn wir

$$\frac{n1 \;.\; n2 \;.\; . \;.\; . \;.\; . \;.\; . \;.\; n(q-1)}{n(n-n1)(n-n1-n2)\ldots(n-n1-n2-\ldots-n(q-2))} = N_{q-1}$$

setzen, die Reihe

$$199)\quad \frac{d^n X^{a1+\ldots+ap}}{1^{n|1}} = M_{(p,1)} . X^{a2+\ldots+ap} . \Sigma_n N_1 . \frac{d^n X^{a1}}{1^{n|1}}$$

$$n = n$$

$$+ M_{(p,2)} . X^{a3+\ldots+ap} . \Sigma_{n1,n2} N_2 . \frac{d^{n1} X^{a1}}{1^{n1|1}} . \frac{d^{n2} X^{a2}}{1^{n2|1}}$$

$$n1 + n2 = n$$

$$+ M_{(p,3)} . X^{a4+\ldots+ap} . \Sigma_{n1,n2,n3} N_3 . \frac{d^{n1} X^{a1}}{1^{n1|1}} . \frac{d^{n2} X^{a2}}{1^{n2|1}} . \frac{d^{n3} X^{a3}}{1^{n3|1}}$$

$$n1 + n2 + n3 = n$$

$$+ \;.\; . \;.\; . \;.\; . \;.\; . \;.\; . \;.\; . \;.\; . \;.\; . \;.\; .$$

$$+ M_{(p,p-1)} . X^{ap} . \Sigma_{n1,\ldots,n(p-1)} N_{p-1} . \frac{d^{n1} X^{a1}}{1^{n1|1}} . \frac{d^{n2} X^{a2}}{1^{n2|1}} \ldots\ldots\ldots \frac{d^{n(p-1)} X^{a(p-1)}}{1^{n(p-1)|1}}$$

$$n1 + n2 + \ldots + n(p-1) = n$$

$$+ M_{(p,p)} . X^0 . \Sigma_{n1,\ldots,n(p)} N_p . \frac{d^{n1} X^{a1}}{1^{n1|1}} . \frac{d^{n2} X^{a2}}{1^{n2|1}} \ldots\ldots\ldots \frac{d^{np} X^{ap}}{1^{n(p)|1}}$$

$$n1 + n2 + \ldots + n(p) = n$$

Der Uebergang von

$$d^n X^{a1+\ldots+ap} \quad \text{zu} \quad d^n X^{a1+\ldots+a(p+1)}$$

besteht, da in den (p-1) ersten Gliedern dieser Reihe unter dem Σ kein $a(p)$ vorkommt, darin, dass in den Vorzahlen des Σ in allen Gliedern $ap + a(p+1)$ statt ap und nur im letzten Gliede

$$\frac{d^{np} \quad X^{ap+a(p+1)}}{1^{np|1}} \text{ statt } \frac{d^{np} X^{ap}}{1^{np|1}}$$

gesetzt, und dieser Factor nach N. 195 weiter behandelt wird, welches Geschäft oben auseinander gesetzt ist.

Diese Gleichung 199 findet zuerst **Wronski** in seiner Phil. de la T. Seite 260 N. 340, aber auf einem sehr mühvollen Wege von Seite 248 bis 260. Der Weg, welchen wir hier eingeschlagen haben, ist sehr verschieden von jenem des Herrn **Wronski**.

§. 56.

Wenn die verschiedenen veränderlichen Elemente in verschiedenen Factoren von einander getrennt vorkommen, so gibt die Gleichung 179 das theilweise Verfahren beim Differentiiren an, oder in allgemeinerer Form, wenn willkührliche Grössen damit verbunden werden, die Gleichung 181, nämlich

$$
\begin{aligned}
200) \qquad & (a_1 + 0b_1)_m \cdot \frac{d^n f(x_1, \ldots, x_p)}{1^{n|1}} \cdot \frac{d^0 f_1(y_1, \ldots, y_q)}{1^{0|1}} \\
& + (a_1 + 1b_1)_m \cdot \frac{d^{n-1} f(x_1, \ldots, x_p)}{1^{n-1|1}} \cdot \frac{d^1 f_1(y_1, \ldots, y_q)}{1^{1|1}} \\
& + (a_1 + 2b_1)_m \cdot \frac{d^{n-2} f(x_1, \ldots, x_p)}{1^{n-2|1}} \cdot \frac{d^2 f_1(y_1, \ldots, y_q)}{1^{2|1}} \\
& + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
& + (a_1 + nb_1)_m \cdot \frac{d^0 f(x_1, \ldots, x_p)}{1^{0|1}} \cdot \frac{d^n f_1(y_1, \ldots, y_q)}{1^{n|1}} \\
= A_{(m,0)} \cdot & \frac{d^n \big(f(x_1,\ldots,x_p).d^0 f_1(y_1,\ldots,y_q)\big)}{1^{n|1}} + A_{(m,1)} \cdot \frac{d^{n-1} \big(f(x_1,\ldots,x_p).d^1 f_1(y_1,\ldots,y_q)\big)}{1^{n-1|1}} \\
+ A_{(m,2)} \cdot & \frac{d^{n-2} \big(f(x_1,..,x_p).d^2 f_1(y_1,..,y_q)\big)}{1^{n-2|1}} + \ldots + A_{(m,m)} \cdot \frac{d^{n-m} \big(f(x_1,..,x_p).d^m f_1(y_1,..,y_q)\big)}{1^{n-m|1}}
\end{aligned}
$$

wo die Vorzahlen wie in §. 28 bestimmt werden.

Ist

201) $$(a_1 + sb_1)_m = (a + sb)^{m|b}$$

so ist

$$A_{(m,s)} = \frac{m^{s|-1}}{1^{s|1}} \cdot (a + sb)^{m-s|b}$$

und ist

202) $$(a_1 + sb_1)_m = (a + sb)^m$$

so ist

$$A_{(m,s)} = [a + 0b,\ a + 1b,\ a + 2b, \ldots,\ a + sb]^{(m-s)} \cdot b^s$$

Der einfachste Fall von diesen allgemeinen Gleichungen findet statt bei $m = 1$, nämlich

203) $$\begin{aligned} & a \cdot \frac{d^n f(x_1, x_2, \ldots, x_p)}{1^{n|1}} \cdot \frac{d^0 f_1(y_1, y_2, \ldots, y_q)}{1^{0|1}} \\ & + (a + 1b) \cdot \frac{d^{n-1} f(x_1, x_2, \ldots, x_p)}{1^{n-1|1}} \cdot \frac{d^1 f_1(y_1, y_2, \ldots, y_q)}{1^{1|1}} \\ & + (a + 2b) \cdot \frac{d^{n-2} f(x_1, x_2, \ldots, x_p)}{1^{n-2|1}} \cdot \frac{d^2 f_1(y_1, y_2, \ldots, y_q)}{1^{2|1}} \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + (a + nb) \cdot \frac{d^0 f(x_1, x_2, \ldots, x_p)}{1^{0|1}} \cdot \frac{d^n f_1(y_1, y_2, \ldots, y_q)}{1^{n|1}} \\ = {} & a \cdot \frac{d^n \left(f(x_1,\ldots,x_p) \cdot f_1(y_1,\ldots,y_q)\right)}{1^{n|1}} + b \cdot \frac{d^{n-1} \left(f(x_1,\ldots,x_p) \cdot f_1(y_1,\ldots,y_q)\right)}{1^{n-1|1}} \end{aligned}$$

Zweite Abtheilung.

I. DIFFERENTIIREN MIT ABWECHSELNDEM VERVIELFACHEN ODER MESSEN.

§. 57.

Mit dem Differentiiren wollen wir noch ein anderes Geschäft und zwar das Vervielfachen verbinden, so dass die beiden Geschäfte Differentiiren und Vervielfachen mit einander abwechseln z. B.

$$Z\,.\,d\Big(_{4}Z\,.\,d\Big(_{3}Z\,.\,d\big(_{2}Z\,.\,d\big(_{1}X\,.Y\big)_{1}\big)_{2}\Big)_{3}\Big)_{4}$$

Wir geben hier zuerst eine Theorie dieser Producte oder eine Theorie der mit dem Vervielfachen abwechselnden Differentiale, und glauben hiedurch der Wissenschaft einen nicht unwichtigen Dienst zu erweisen, indem wir ein Feld anbauen, was bisher noch keiner versuchte, aber eine Menge neuer Wahrheiten hervorbringt, die für Entwicklung und Summirung der Reihen von der grössten Wichtigkeit sind.

Es sei

204)
$$f(x_1, x_2, \ldots, x_p) = X$$
$$f_1(y_1, y_2, \ldots, y_q) = Y$$
$$f_2(z_1, z_2, \ldots, z_r) = Z$$

und

205)
$$Z . dX = (Z . d)^1 X$$
$$Z . d\Big(_2 Z . d\big(_1 X\big)_1\Big)_2 = (Z . d)^2 X$$
$$Z . d\Bigg(_3 Z . d\Big(_2 Z . d\big(_1 X\big)_1\Big)_2\Bigg)_3 = (Z . d)^3 X$$
$$. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$

Wir legen nun das Product X.Y zu Grunde, differentiiren und vervielfachen mit Z

$$Z . d(X . Y) = (Z . dX) \times Y + X \times (Z . dY)$$

und wiederholen diese Geschäfte mehrmalen in derselben Ordnung

$$Z.d\big(Z.d(X.Y)\big) = Z.d\big(Z.d(X)\big) \times Y + 2.Zd(X) \times Z.d(Y) + X \times Z.d\big(Z.d(Y)\big)$$

und

$$Z.d\Big(Z.d\big(Z.d(X.Y)\big)\Big) = Z.d\Big(Z.d\big(Z.d(X)\big)\Big) \times Y + 3.Z.d\big(Z.d(X)\big) \times Z.d(Y)$$
$$+ 3.Z.d(X) \times Z.d\big(Z.d(Y)\big) + X \times Z.d \; Z.d\big(Z.d(Y)\big)\Big)$$

oder

$$(Z . d)^1 (X . Y) = (Z . d)^1 X \times (Z . d)^0 Y + (Z . d)^0 X \times (Z . d)^1 Y$$
$$(Z . d)^2 (X . Y) = (Z.d)^2 X \times (Z.d)^0 Y + 2.(Z.d)^1 X \times (Z.d)^1 Y + (Z.d)^0 X \times (Z.d)^2 Y$$

Das Gesetz der Vorzahlen ist jenes des Binomiums, und es ist

$$(Z . d)^{n-1} (X . Y) = (Z . d)^{n-1} X \times (Z . d)^0 Y + \frac{(n-1)^{1|-1}}{1^{1|1}} . (Z . d)^{n-2} X \times (Z . d)^1 Y$$
$$+ \frac{(n-1)^{2|-1}}{1^{2|1}} . (Z.d)^{n-3} X \times (Z.d)^2 Y + \ldots + \frac{(n-1)^{n-1|-1}}{1^{n-1|1}} . (Z.d)^0 X \times (Z.d)^{n-1} Y$$

Der Uebergang vom Vorhergehenden zum Folgenden besteht darin, dass in jedem Gliede jeder Factor mit $Z d$ verbunden wird, während der andere Factor unverändert bleibt, und dass jede zwei zusammengehörigen zahlen nach der Vorschrift

$$\frac{(n-1)^{p|-1}}{1^{p|1}} + \frac{(n-1)^{p+1|-1}}{1^{p+1|1}} = \frac{n^{p+1|-1}}{1^{p+1|1}}$$

vereinigt werden. Es ist daher ganz allgemein

$$206) \qquad \begin{aligned}(Z.d)^n (X.Y) = {} & \frac{n^{0|-1}}{1^{0|1}}.(Z.d)^n X \times (Z.d)^0 Y \\ & + \frac{n^{1|-1}}{1^{1|1}}.(Z.d)^{n-1} X \times (Z.d)^1 Y \\ & + \frac{n^{2|-1}}{1^{2|1}}.(Z.d)^{n-2} X \times (Z.d)^2 Y \\ & + \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;. \\ & + \frac{n^{n|-1}}{1^{n|1}}.(Z.d)^0 X \times (Z.d)^n Y\end{aligned}$$

Untersuchungen, welche viel später folgen, veranlassten mich zu dem Versuche, $(Z.d)^n (X.Y)$ in die einfacheren Differentiale

$$(Z.d)^1X,\ (Z.d)^2X,\ (Z.d)^3X, \ldots \text{ und } (Z.d)^1Y,\ (Z.d)^2Y,\ (Z.d)^3Y, \ldots$$

zu zerlegen, welcher, wie diese Gleichung zeigt, zu dem glücklichsten Resultate führte. Der Fall, wenn $Z = 1$, ist längst bekannt, aber dieser gehört nicht hieher; denn in ihm ist das mit dem Differentiiren abwechselnde Vervielfachen ganz aufgehoben, welches doch der Hauptgedanke dieser zuerst aufgestellten Wahrheit ist. Es ist bekannt, dass bei Summirungen der Reihen und auch bei Entwicklung der Functionen in Reihen, (unter andern bei Paoli) Differentiale wie

$$Z.d\underset{n}{(}Z.d\underset{n-1}{(}Z.d\underset{n-2}{(}\ldots\ldots Z.d\underset{1}{(}X.Y\underset{1}{)}\ldots\ldots\underset{n}{)}$$

vorkommen; es hat aber noch keiner unternommen, diese zusammengesetzte in einfachere Differentiale zu zerlegen, geschweige eine vollständige Theorie derselben aufzustellen.

Mehrere Wahrheiten beim Differentiiren, welche entstehen, wenn in den folgenden allgemeinsten Gleichungen, die sich auf diese Hauptwahrheit 206 stützen, $Z = 1$ gesetzt wird, und wovon mehrere bekannt sind, übergehen wir, weil mit der allgemeinsten Wahrheit auch alle darin begriffenen speziellen Fälle bewiesen sind.

Diese Wahrheit kann auch in folgenden Zeichen vorgelegt werden

207) $$(Z.d)^n (X.Y) = \left|(Z.d) X + (Z.d) Y^{n}\right|$$

oder in folgenden Zeichen

208) $$\frac{(Z.d)^n (X.Y)}{1^{n|1}} = \Sigma \frac{(Z.d)^a X}{1^{a|1}} . \frac{(Z.d)^b Y}{1^{b|1}} \qquad \text{wo } a + b = n$$

Gehen wir zu Producten mehrerer Factoren über und setzen

$$U = f_3 (u_1, u_2, \ldots, u_s)$$

und $Y.U$ statt Y, also auch

$$\Sigma \frac{(Z.d)^c Y}{1^{c|1}} . \frac{(Z.d)^e U}{1^{e|1}}, \text{ wo } c + e = b, \text{ statt } \frac{(Z.d)^b Y}{1^{b|1}}$$

so finden wir, dass

209) $$\frac{(Z.d)^n (X.Y.U)}{1^{n|1}} = \Sigma \frac{(Z.d)^a X}{1^{a|1}} . \frac{(Z.d)^c Y}{1^{c|1}} . \frac{(Y.d)^e U}{1^{e|1}} \text{ wo } a + c + e = n$$

und allgemein finden wir, wenn

210) $$\begin{aligned} f_1 (x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \ldots, x_{p_1}^{(1)}) &= f_1 \\ f_2 (x_1^{(2)}, x_2^{(2)}, \ldots, x_{p_2}^{(2)}) &= f_2 \\ \ldots\ldots&\ldots\ldots \\ f_m (x_1^{(m)}, x_2^{(m)}, \ldots, x_{p_m}^{(m)}) &= f_m \\ \varphi (z_1, z_2, \ldots, z_q) &= Z \end{aligned}$$

gesetzt wird, dass

$$211)\quad \frac{(Z.d)^n(f_1.f_2.f_3\ldots f_m)}{1^{n|1}} = \Sigma\, \frac{(Z.d)^{\nu 1}f_1}{1^{\nu 1|1}} \cdot \frac{(Z.d)^{\nu 2}f_2}{1^{\nu 2|1}} \cdot \frac{(Z.d)^{\nu 3}f_3}{1^{\nu 3|1}} \;\ldots\; \frac{(Z.d)^{\nu(m)}f_m}{1^{\nu(m)|1}}$$

$$\text{wo } \nu 1 + \nu 2 + \nu 3 \ldots + \nu m = n$$

oder

$$212)\quad = \frac{1}{1^{n|1}} \cdot \left((Z.d)f_1 + (Z.d)f_2 + (Z.d)f_3 + \ldots + (Z.d)f_m{}^n\right)$$

wo die Stellenzahlen nicht über f sondern über $(Z.d)$ gesetzt werden müssen

oder

$$213)\quad \frac{(Z.d)^n(f_1.f_2\ldots f_m}{1^{n|1}} = C(n,m)$$

aus den Elementen der verschiedenen Reihen

$$D_1 = \frac{(Z.d)^0 f_1}{1^{0|1}}, \frac{(Z.d)^1 f_1}{1^{1|1}}, \frac{(Z.d)^2 f_1}{1^{2|1}}, \ldots.$$

$$D_2 = \frac{(Z.d)^0 f_2}{1^{0|1}}, \frac{(Z.d)^1 f_2}{1^{1|1}}, \frac{(Z.d)^2 f_2}{1^{2|1}}, \ldots.$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$D_m = \frac{(Z.d)^0 f_m}{1^{0|1}}, \frac{(Z.d)^1 f_m}{1^{1|1}}, \frac{(Z.d)^2 f_m}{1^{2|1}}, \ldots.$$

oder

$$214)\quad = (D_1 \cdot D_2 \cdot D_3 \ldots . D_m)\, f(n+1)$$

Setzen wir in diesen Gleichungen $Z = 1$, so erhalten wir diejenigen, welche in der zweiten Abtheilung gefunden sind.

§. 58.

Kehren wir wieder zu dem Producte aus zweien Factoren X und Y bestehend zurück, wo

$$X = f_1(x_1, x_2, \ldots)$$
$$Y = f_2(y_1, y_2, \ldots)$$
$$Z = f_3(z_1, z_2, \ldots)$$

ist, und vervielfachen die Gleichung

$$\frac{(Z.d)^n(X.Y)}{1^{n|1}} = \Sigma\,\frac{(Z.d)^{n-p}X}{1^{n-p|1}} \cdot \frac{(Z.d)^pY}{1^{p|1}} \qquad \text{wo } p = 0, 1, \ldots, n$$

mit a und die Gleichung

$$\frac{(Z.d)^{n-1}(X.Z.dY)}{1^{n-1|1}} = \Sigma\,\frac{(Z.d)^{n-1-q}X}{1^{n-1-q|1}} \cdot \frac{(Z.d)^{q+1}Y}{1^{q|1}} \quad \text{wo } q = 0, 1, \ldots, n-1$$

welche aus jener entspringt, wenn $Z.dY$ statt Y eingeführt wird, mit b, und zählen beide Gleichungen zusammen, so erhalten wir folgende

$$215)\quad a\,.\,\frac{(Z.d)^n\,(X.Y)}{1^{n|1}} + b\,.\,\frac{(Z.d)^{n-1}\,(X.Z.dY)}{1^{n-1|1}} =$$

$$= a\,.\,\frac{(Z.d)^nX}{1^{n|1}} \cdot \frac{(Z.d)^0Y}{1^{0|1}} + (a+1b)\,.\,\frac{(Z.d)^{n-1}X}{1^{n-1|1}} \cdot \frac{(Z.d)^1Y}{1^{1|1}}$$

$$+ (a+2b)\,.\,\frac{(Z.d)^{n-2}X}{1^{n-2|1}} \cdot \frac{(Z.d)^2Y}{1^{2|1}} + \ldots + (a+nb).\,\frac{(Z.d)^0X}{1^{0|1}} \cdot \frac{(Z.d)^nY}{1^{n|1}}$$

wo a und b ganz nach Willkühr angenommen werden können.

Wir gehen von dieser allgemeinsten Gleichung zu einer weniger allgemeinen, aber wegen der Folgerungen, zu welchen ihre Eigenthümlichkeiten Veranlassung geben, desto fruchtbareren Gleichung über, und setzen

$$X = X^p \text{ und } Y = X^q$$

also

$$X.Z.dY = q.Z.X^{p+q-1}.dX = \frac{q}{p+q}.Z.d(X^{p+q})$$

Die Gleichung, welche hieraus hervorgeht, ist:

$$216)\quad \left(a+\frac{nbq}{p+q}\right)\cdot\frac{(Z.d)^n(X^{p+q})}{1^{n|1}} = \begin{aligned}[t] & a\cdot\frac{(Z.d)^nX^p}{1^{n|1}}\cdot\frac{(Z.d)^0X^q}{1^{0|1}} \\ & +(a+1b)\cdot\frac{(Z.d)^{n-1}X^p}{1^{n-1|1}}\cdot\frac{(Z.d)^1X^q}{1^{1|1}} \\ & +(a+2b)\cdot\frac{(Z.d)^{n-2}X^p}{1^{n-2|1}}\cdot\frac{(Z.d)^2X^q}{1^{2|1}} \\ & +\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;. \\ & +(a+nb)\cdot\frac{(Z.d)^0X^p}{1^{0|1}}\cdot\frac{(Z.d)^nX^q}{1^{n|1}} \end{aligned}$$

Diese Gleichung erfüllt zwei verschiedene Zwecke, einen, um aus den Differentialen von X^p und X^q, in welchen das Differentiiren mit dem Vervielfachen abwechselt, die Differentiale von X^{p+q} zusammen zu setzen, und den andern, indem sie gestattet, in besondern Fällen für die Grössen a und b, welche nach Willkühr angenommen werden können, solche Werthe zu wählen, dass eine vortheilhaftere Bildungsweise hervorgebracht werden kann.

Wird diese Willkühr der Grössen a und b aufgehoben, und angenommen, dass

$$a = -\frac{bnq}{p+q}$$

so entspringt aus dieser Gleichung folgende zurücklaufende Bildungsweise:

$$217)\quad \begin{aligned}[t] & (nq-0(p+q))\cdot\frac{(Z.d)^n\,X^p}{1^{n|1}}\cdot\frac{(Z.d)^0X^q}{1^{0|1}} \\ & +(nq-1(p+q))\cdot\frac{(Z.d)^{n-1}X^p}{1^{n-1|1}}\cdot\frac{(Z.d)^1X^q}{1^{1|1}} \\ & +(nq-2(p+q))\cdot\frac{(Z.d)^{n-2}X^p}{1^{n-2|1}}\cdot\frac{(Z.d)^2X^q}{1^{2|1}} \\ & +\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;. \\ & +(nq-n(p+q))\cdot\frac{(Z.d)^0\,X^p}{1^{0|1}}\cdot\frac{(Z.d)^nX^q}{1^{n|1}} = 0 \end{aligned}$$

§. 59.

Diese zurücklaufende macht hier den Uebergang zu der allgemeinen unabhängigen Bildungsweise; wird nämlich in ihr $q = 1$ gesetzt, und diese mit einer ihr verwandten Gleichung in der Analysis N. 38 Seite 60

$$\begin{aligned}
&(n-0(p+1)) \,.\, P^p\mathfrak{t}(n+1) \,.\, \frac{(Z\,.\,d)^0X}{1^{0|1}} \\
&+ (n-1(p+1)) \,.\, P^p\mathfrak{t}n \,.\, \frac{(Z\,.\,d)^1X}{1^{1|1}} \\
&+ (n-2(p+1)) \,.\, P^p\mathfrak{t}(n-1) \,.\, \frac{(Z\,.\,d)^2X}{1^{2|1}} \\
&+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&+ (n-n(p+1)) \,.\, P^p\mathfrak{t}1 \,.\, \frac{(Z\,.\,d)^nX}{1^{n|1}} = 0
\end{aligned}$$

wo $P = \left(\frac{(Z\,.\,d)^0X}{1^{0|1}}, \frac{(Z\,.\,d)^1X}{1^{1|1}}, \frac{(Z\,.\,d)^2X}{1^{2|1}}, \ldots\ldots\right)$

durch Abzählen verbunden, so entsteht durch diese Vereinigung der beiden Gleichungen eine dritte

$$\begin{aligned}
&(n-0(p+1)) \,.\, \frac{(Z\,.\,d)^0X}{1^{0|1}} \,.\, \left(\frac{(Z\,.\,d)^nX^p}{1^{n|1}} - P^p\mathfrak{t}(n+1)\right) \\
&+ (n-1(p+1)) \,.\, \frac{(Z\,.\,d)^1X}{1^{1|1}} \,.\, \left(\frac{(Z\,.\,d)^{n-1}X^p}{1^{n-1|1}} - P^p\mathfrak{t}n\right) \\
&+ (n-2(p+1)) \,.\, \frac{(Z\,.\,d)^2X}{1^{2|1}} \,.\, \left(\frac{(Z\,.\,d)^{n-2}X^p}{1^{n-2|1}} - P^p\mathfrak{t}(n-1)\right) \\
&+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&+ (n-n(p+1)) \,.\, \frac{(Z\,.\,d)^nX}{1^{n|1}} \,.\, \left(\frac{(Z\,.\,d)^0X^p}{1^{0|1}} - P^p\mathfrak{t}1\right) = 0
\end{aligned}$$

welche, da

$$\frac{(Z\,d)^0X^p}{1^{0|1}} = X^p = P^p\mathfrak{t}1$$

ist, zu folgenden Gleichungen führt

$$\frac{(Z\,.\,d)^1 X^p}{1^{1|1}} = P^p\,\mathfrak{f}2 \quad \text{wenn} \quad n = 1 \text{ gesetzt wird}$$

$$\frac{(Z\,.\,d)^2 X^p}{1^{2|1}} = P^p\,\mathfrak{f}3 \qquad n = 2$$

$$\frac{(Z\,.\,d)^3 X^p}{1^{3|1}} = P^p\,\mathfrak{f}4 \qquad n = 3$$

und allgemein zu der Gleichung

218) $$\frac{(Z\,.\,d)^n X^p}{1^{n|1}} = P^p\,\mathfrak{f}(n+1)$$

wo

$$X = f_1(x_1, x_2, \ldots), \quad Z = f_2(z_1, z_2, \ldots)$$

und

$$P = \left(\frac{(Z\,.\,d)^0 X}{1^{0|1}}, \frac{(Z\,.\,d)^1 X}{1^{1|1}}, \frac{(Z\,.\,d)^2 X}{1^{2|1}}, \ldots\right)$$

welche, da p in den obigen Gleichungen ganz allgemein ist, die unabhängige Bildungsweise für jede mögliche Potenz von X angibt.

Die Geschäfte, welche diese wenigen Zeichen vorstellen, können nun entweder nach der Vorschrift 30 der Analysis Seite 49 ausgeführt werden, nämlich

219) $$\frac{(Z\,.\,d)^n X^p}{1^{n|1}} = 1^{p|1} \cdot \left(\frac{X^p}{1^{p|1}} \cdot \frac{U^0\mathfrak{f}(n+1)}{1^{0|1}} + \frac{X^{p-1}}{1^{p-1|1}} \cdot \frac{U^1\mathfrak{f}n}{1^{1|1}} + \frac{X^{p-2}}{1^{p-2|1}} \cdot \frac{U^2\mathfrak{f}(n-1)}{1^{2|1}} + \ldots\ldots + \frac{X^{p-n}}{1^{p-n|1}} \cdot \frac{U^n\mathfrak{f}1}{1^{n|1}} \right)$$

wo

$$U = \left(\frac{(Z\,.\,d)^1 X}{1^{1|1}}, \frac{(Z\,.\,d)^2 X}{1^{2|1}}, \frac{(Z\,.\,d)^3 X}{1^{3|1}}, \ldots\ldots\right)$$

oder

$$220)\qquad \frac{(Z\,.\,d)^n X^p}{1^{n|1}} = \frac{p^{0|-1}}{1^{0|1}}\,.\,X^p\,.\,C(n,0) + \frac{p^{1|-1}}{1^{1|1}}\,.\,X^{p-1}\,.\,C(n,1)$$

$$+ \frac{p^{2|-1}}{1^{2|1}}\,.\,X^{p-2}\,.\,C(n,2) + \ldots\ldots + \frac{p^{n|-1}}{1^{n|1}}\,.\,X^{p-n}\,.\,C(n,n)$$

aus den Elementen

$$\frac{(Z\,.\,d)^1 X}{1^{1|1}},\ \frac{(Z\,.\,d)^2 X}{1^{2|1}},\ \frac{(Z\,.\,d)^3 X}{1^{3|1}},\ \ldots\ldots$$

oder nach der Vorschrift 31 der Analysis Seite 53, nämlich

$$221)\qquad \frac{(Z\,.\,d)^n X^p}{1^{n|1}} = p^{n+1|-1}\,.\left(\frac{1}{p-n}\,.\,\frac{X^{p-n}}{1^{0|1}}\,.\,\frac{P^n\,f(n+1)}{1^{n|1}} \right.$$

$$- \frac{1}{p-n+1}\,.\,\frac{X^{p-n+1}}{1^{1|1}}\,.\,\frac{P^{n-1}\,f(n+1)}{1^{n-1|1}}$$

$$+ \frac{1}{p-n+2}\,.\,\frac{X^{p-n+2}}{1^{2|1}}\,.\,\frac{P^{n-2}\,f(n+1)}{1^{n-2|1}}$$

$$- \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.$$

$$\left. (-)^n\,.\,\frac{1}{p}\,.\,\frac{X^p}{1^{n|1}}\,.\,\frac{P^0\,f(n+1)}{1^{0|1}} \right)$$

wo P die obige Bedeutung (in 218) hat.

§. 60.

Diese Bildungsweise, welche 218 angibt, erstreckt sich auch auf die mit dem Vervielfachen verbundenen Differentiale von Producten, welche aus gleichen und ungleichen Factoren zusammengesetzt sind; denn ist

$$f(x_1,\ x_2,\ x_3,\ \ldots\ldots) = Z$$

$$f_1(x_1^{(1)},\ x_2^{(1)},\ x_3^{(1)},\ \ldots\ldots) = f_1$$

$$f_2(x_1^{(2)},\ x_2^{(2)},\ x_3^{(2)},\ \ldots\ldots) = f_2$$

$$f_3(x_1^{(3)},\ x_2^{(3)},\ x_3^{(3)},\ \ldots\ldots) = f_3$$

$$.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.$$

so ist nach 206

$$\frac{(Z.d)^n(f_1^{\nu_1}.f_2^{\nu_2})}{1^{n|1}} = \frac{(Z.d)^0 f_1^{\nu_1}}{1^{0|1}} . \frac{(Z.d)^n f_2^{\nu_2}}{1^{n|1}} + \ldots + \frac{(Z.d)^n f_1^{\nu_1}}{1^{n|1}} . \frac{(Z.d)^0 f_2^{\nu_2}}{1^{0|1}}$$

und

$$(P^{\nu_1} . Q^{\nu_2})\mathfrak{f}(n+1) = P^{\nu_1}\mathfrak{f}1 . Q^{\nu_2}\mathfrak{f}(n+1) + \ldots . + P^{\nu_1}\mathfrak{f}(n+1) . Q^{\nu_2}\mathfrak{f}1$$

wo

$$P = \left(\frac{(Z.d)^0 f_1}{1^{0|1}}, \frac{(Z.d)^1 f_1}{1^{1|1}}, \frac{(Z.d)^2 f_1}{1^{2|1}}, \ldots .\right)$$

und

$$Q = \left(\frac{(Z.d)^0 f_2}{1^{0|1}}, \frac{(Z.d)^1 f_2}{1^{1|1}}, \frac{(Z.d)^2 f_2}{1^{2|1}}, \ldots .\right)$$

Da nun nach 218 je zwei entsprechende Producte dieser beiden Gleichungen gleich sind, so ist auch

222) $$\frac{(Z.d)^n(f_1^{\nu_1}.f_2^{\nu_2})}{1^{n|1}} = (P^{\nu_1}.Q^{\nu_2})\,\mathfrak{f}(n+1)$$

Verfolgen wir diesen Weg weiter, und verbinden die beiden Gleichungen

$$\frac{(Z.d)^n(f_1^{\nu_1}.f_2^{\nu_2}.f_3^{\nu_3})}{1^{n|1}} = \frac{(Z.d)^0(f_1^{\nu_1}.f_2^{\nu_2})}{1^{0|1}} . \frac{(Z.d)^n f_3^{\nu_3}}{1^{n|1}} + \ldots + \frac{(Z.d)^n(f_1^{\nu_1}.f_2^{\nu_2})}{1^{n|1}} . \frac{(Z.d)^0 f_3^{\nu_3}}{1^{0|1}}$$

und

$$(P^{\nu_1}.Q^{\nu_2}.R^{\nu_3})\mathfrak{f}(n+1) = (P^{\nu_1}.Q^{\nu_2})\mathfrak{f}1 . R^{\nu_3}\mathfrak{f}(n+1) + \ldots + (P^{\nu_1}.Q^{\nu_2})\mathfrak{f}(n+1) . R^{\nu_3}\mathfrak{f}1$$

wo

$$R = \left(\frac{(Z.d)^0 f_3}{1^{0|1}}, \frac{(Z.d)^1 f_3}{1^{1|1}}, \ldots .\right)$$

so finden wir, dass

223) $$\frac{(Z.d)^n(f_1^{\nu_1}.f_2^{\nu_2}.f_3^{\nu_3})}{1^{n|1}} = (P^{\nu_1}.Q^{\nu_2}.R^{\nu_3})\,\mathfrak{f}(n+1)$$

Zuletzt kommen wir zu der allgemeinen und merkwürdigen Gleichung

$$224)\qquad \frac{(Z.d)^n(f_1^{\nu 1}.f_2^{\nu 2}.f_3^{\nu 3}\ldots f_m^{\nu(m)})}{1^{n|1}} = (P_1^{\nu 1}.P_2^{\nu 2}.P_3^{\nu 3}\ldots P_m^{\nu m})\,\mathfrak{f}(n+1)$$

wo

$$P_1 = \left(\frac{(Z.d)^0 f_1}{1^{0|1}}, \frac{(Z.d)^1 f_1}{1^{1|1}}, \frac{(Z.d)^2 f_1}{1^{2|1}}, \ldots\ldots\right)$$

. . . .

$$P_m = \left(\frac{(Z.d)^0 f_m}{1^{0|1}}, \frac{(Z.d)^1 f_m}{1^{1|1}}, \frac{(Z.d)^2 f_m}{1^{2|1}}, \ldots\ldots\right)$$

wo $\nu 1$, $\nu 2$, ... , νm jede mögliche Grösse vertreten.

Von dieser allgemeinen Wahrheit, welche sich über das zweifache Geschäft, nämlich **Differentiiren** und **abwechselndes Vervielfachen**, erstreckt, fand **Rothe** zuerst einen ganz speziellen Fall, in welchem das Vervielfachen aufgehoben, also $Z = 1$ ist, und f_1, f_2, . . . nur Functionen von einer Grundgrösse x, und $\nu 1$, $\nu 2$, . . . nur ganze bejahte Zahlen sind, und zwar vermittelst der Reihen, im **Archiv der Mathematik** 1r Bd. Seite 228 vom Jahr 1794. J. Fr. **Pfaff** erweiterte ihn dadurch, dass er ihn für alle möglichen Werthe von $\nu 1$, $\nu 2$, . . . in den **Combi. Samml.** 2r Th. Seite 157 bewies.

In der grossen Allgemeinheit, wo das Differentiiren mit dem Vervielfachen abwechselt, erscheint die Wahrheit 224 hier zuerst.

§. 61.

Diese gemeinschaftliche Bildungsweise der mit dem Vervielfachen abwechselnden Differentiale und der Glieder eines Polynomiums bei jedem möglichen Exponenten und bei jeder beliebigen Anzahl der Elemente ist aus der Gleichung 216 entsprungen, und ist eine der Hauptwahrheiten der ganzen Untersuchung. Dieses veranlasst zu der Gleichung 216 wieder zurück zu kehren, um ihr die grösste Allgemeinheit zu geben, welcher sie fähig ist. In ihr sind die Exponenten p und q unverändert, wir wollen diese zu- und abnehmen lassen, und uns die Gleichung in allgemeinerer Gestalt vorlegen, und fragen, wie müssen $\varphi 0$, $\varphi 1, \ldots, \varphi n$, Fn beschaffen sein, dass

$$\frac{(Z.d)^0 X^p}{1^{0|1}} \cdot \frac{(Z.d)^n X^q}{1^{n|1}} \cdot \varphi 0 + \frac{(Z.d)^1 X^{p+c}}{1^{1|1}} \cdot \frac{(Z.d)^{n-1} X^{q-c}}{1^{n-1|1}} \cdot \varphi 1$$

$$+ \frac{(Z.d)^2 X^{p+2c}}{1^{2|1}} \cdot \frac{(Z.d)^{n-2} X^{q-2c}}{1^{n-2|1}} \cdot \varphi 2 + \ldots + \frac{(Z.d)^n X^{p+nc}}{1^{n|1}} \cdot \frac{(Z.d)^0 X^{q-nc}}{1^{0|1}} \varphi n$$

$$= \frac{(Z.d)^n X^{p+q}}{1^{n|1}} \cdot Fn$$

Eine fast gleiche Aufgabe haben wir in der Analysis Seite 61 gelöst, und dort die Eigenschaften der begleitenden Factoren $\varphi 0$, $\varphi 1$, $\varphi 2, \ldots$ gefunden. Es ist nicht nöthig, das Verfahren beim Aufsuchen dieser Grössen, so lehrreich es auch ist, hier nochmals zu wiederholen; wir setzen Leser voraus, welche unsere Analysis kennen, und nehmen diese Grössen an, nämlich

$$\varphi n = \frac{a + nb}{(p + nc)(q - nc)}$$

worauf in der vorgelegten Gleichung nur noch Fn zu bestimmen ist.

Zur Erleichterung der Untersuchung sei

$$\frac{(Z.d)^n X^r}{1^{n|1}} = X_n^r$$

Setzen wir nun $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$, so wird

$$X_0^{p+q} F0 = X_0^p X_0^q \varphi 0$$

$$X_1^{p+q} F1 = X_0^p X_1^q \varphi 0 + X_1^{p+c} X_0^{q-c} \varphi 1$$

$$X_2^{p+q} F2 = X_0^p X_2^q \varphi 0 + X_1^{p+c} X_1^{q-c} \varphi 1 + X_2^{p+2c} X_0^{q-2c} \varphi 2$$

. . . .

$$X_n^{p+q} Fn = X_0^p X_n^q \varphi 0 + X_1^{p+c} X_{n-1}^{q-c} \varphi 1 + X_2^{p+2c} X_{n-2}^{q-2c} \varphi 2 + \ldots + X_n^{p+nc} X_0^{q-nc} \varphi n$$

Wir vervielfachen diese Gleichungen nach ihrer Folge mit

$$q X_n^{-q+nc},\ (q-c) X_{n-1}^{-q+nc},\ (q-2c) X_{n-2}^{-q+nc},\ \ldots\ldots,\ (q-nc) X_0^{-q+nc}$$

zählen alle Gleichungen zusammen, und setzen nach 217

$$(q-sc)\,X_0^{q-sc}\,X_{n-s}^{-q+nc} + (q-sc-c)\,X_1^{q-sc}\,X_{n-s-1}^{-q+nc} + \ldots + (q-nc)\,X_{n-s}^{q-sc}\,X_0^{-q+nc} = 0$$

Wir erhalten dadurch die Gleichung

$$\begin{aligned} &q\,X_0^{p+q}\,X_n^{-q+nc}.F0 + (q-c)\,X_1^{p+q}\,X_{n-1}^{-q+nc}.F1 \\ &+ (q-2c)\,X_2^{p+q}\,X_{n-2}^{-q+nc}.F2 + \ldots + (q-nc)\,X_n^{p+q}\,X_0^{-q+nc}.Fn \\ &= (q-nc)X_n^{p+nc}\,X_0^{q-nc}\,X_0^{-q+nc} = \frac{a+nb}{p+nc}.X_n^{p+nc} \end{aligned}$$

welche, wenn sie mit der Gleichung

$$\left(\frac{a}{p}+0\,.\,\frac{bp-ac}{p(p+q)}\right) X_0^{p+q}\,X_n^{-q+nc} + \left(\frac{a}{p}+1\,.\,\frac{bp-ac}{p(p+q)}\right) X_1^{p+q}\,X_{n-1}^{-q+nc} + \ldots$$

$$+\left(\frac{a}{p}+n\,.\,\frac{bp-ac}{p(p+q)}\right) X_n^{p+q}\,X_0^{-q+nc} = \frac{a+nb}{p+nc}.X_n^{p+nc}$$

die nach 216 gebildet ist, durch Abzählen verbunden wird, folgende erzeugt:

$$\begin{aligned} &\left(\frac{a}{p}+0.\frac{bp-ac}{p(p+q)}-q.F0\right).X_0^{p+q}.X_n^{-q+nc} \\ &+\left(\frac{a}{p}+1.\frac{bp-ac}{p(p+q)}-(q-c).F1\right).X_1^{p+q}X_{n-1}^{-q+nc} \\ &+\left(\frac{a}{p}+2.\frac{bp-ac}{p(p+q)}-(q-2c).F2\right).X_2^{p+q}.X_{n-2}^{-q+nc} \\ &+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &+\left(\frac{a}{p}+n.\frac{bp-ac}{p(p+q)}-(q-nc).Fn\right).X_n^{p+q}.X_0^{-q+nc} = 0 \end{aligned}$$

und, wenn $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$, gesetzt wird, zu den Werthen von F0, F1, F2, ... führt,

$$F_0 = \frac{a}{p \cdot q}$$

$$F_1 = \frac{a}{p(q-c)} + \frac{1(bp-ac)}{p(p+q)(q-c)}$$

$$F_2 = \frac{a}{p(q-2c)} + \frac{2(bp-ac)}{p(p+q)(q-2c)}$$

. . . .

$$F_n = \frac{a}{p(q-nc)} + \frac{n(bp-ac)}{p(p+q)(q-nc)}$$

Es ist folglich

$$\begin{aligned} 225) \quad & \frac{a}{p \cdot q} \cdot \frac{(Z.d)^0 X^p}{1^{0|1}} \cdot \frac{(Z.d)^n X^q}{1^{n|1}} \\ & + \frac{a+1b}{(p+c)(q-c)} \cdot \frac{(Z.d)^1 X^{p+c}}{1^{1|1}} \cdot \frac{(Z.d)^{n-1} X^{q-c}}{1^{n-1|1}} \\ & + \frac{a+2b}{(p+2c)(q-2c)} \cdot \frac{(Z.d)^2 X^{p+2c}}{1^{2|1}} \cdot \frac{(Z.d)^{n-2} X^{q-2c}}{1^{n-2|1}} \\ & + \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \\ & + \frac{a+nb}{(p+nc)(q-nc)} \cdot \frac{(Z.d)^n X^{p+nc}}{1^{n|1}} \cdot \frac{(Z.d)^0 X^{q-nc}}{1^{0|1}} \\ & = \frac{a(p+q)+n(bp-ac)}{p(p+q)(q-nc)} \cdot \frac{(Z.d)^n X^{p+q}}{1^{n|1}} \, . \end{aligned}$$

wo

$$X = f(x_1, \; x_2, \; x_3, \ldots .)$$

und

$$Z = f_1(z_1, \; z_2, \; z_3, \ldots .)$$

§. 62.

Der Reihe, welche wir uns oben vorlegten, geben wir eine grössere Allgemeinheit dadurch, dass wir den verschiedenen Potenzen von X noch zwei willkührliche Functionen U und Y zugesellen. Die viel allgemeinere Aufgabe ist jetzt folgende:

Wie müssen $\varphi 0$, $\varphi 1$, $\varphi 2, \ldots,$ beschaffen sein, damit die Geschäfte, welche die Zeichen

$$\frac{(Z.d)^0(X^p.U)}{1^{0|1}}\cdot\frac{(Z.d)^n(X^q.Y)}{1^{n|1}}\cdot\varphi 0+\frac{(Z.d)^1(X^{p+c}.U)}{1^{1|1}}\cdot\frac{(Z.d)^{n-1}(X^{q-c}.Y)}{1^{n-1|1}}\cdot\varphi 1$$

$$+\frac{(Z.d)^2(X^{p+2c}.U)}{1^{2|1}}\cdot\frac{(Z.d)^{n-2}(X^{q-2c}.Y)}{1^{n-2|1}}\cdot\varphi 2+..+\frac{(Z.d)^n(X^{p+nc}U)}{1^{n|1}}\cdot\frac{(Z.d)^0(X^{q-nc}Y)}{1^{0|1}}\cdot\varphi n=F$$

$$Z = f(z_1, z_2, z_3, \ldots)$$
$$X = f_1(x_1, x_2, x_3, \ldots)$$
$$U = f_2(u_1, u_2, u_3, \ldots)$$
$$Y = f_3(y_1, y_2, y_3, \ldots)$$

angeben, durch andere Geschäfte ersetzt werden können?

Wir zerlegen den ersten Factor jedes dieser Producte nach 206 in seine Bestandtheile, und zwar so, dass

$$\frac{(Z.d)^h(X^{p+hc}.U)}{1^{h|1}}=$$

$$\frac{(Z.d)^h X^{p+hc}}{1^{h|1}}\cdot\frac{(Z.d)^0 U}{1^{0|1}}+\frac{(Z.d)^{h-1}X^{p+hc}}{1^{h-1|1}}\cdot\frac{(Z.d)^1 U}{1^{1|1}}+..+\frac{(Z.d)^0 X^{p+hc}}{1^{0|1}}\cdot\frac{(Z.d)^h U}{1^{h|1}}$$

Durch dieses Zerlegen und durch die Sonderung der Differentiale des U von den übrigen Factoren geht die vorgegebene Reihe in folgende über

$$F=\left(\frac{(Z.d)^0X^p}{1^{0|1}}\cdot\frac{(Z.d)^n(X^q.Y)}{1^{n|1}}.\varphi 0+\ldots+\frac{(Z.d)^nX^{p+nc}}{1^{n|1}}\cdot\frac{(Z.d)^0(X^{q-nc}.Y)}{1^{0|1}}.\varphi n\right)\cdot\frac{(Z.d)^0U}{1^{0|1}}$$

$$+\;.$$

$$+\left(\frac{(Z.d)^0X^{p+sc}}{1^{0|1}}\cdot\frac{(Z.d)^{n-s}(X^{q-sc}.Y)}{1^{n-s|1}}.\varphi s+\ldots+\frac{(Z.d)^{n-s}X^{p+nc}}{1^{n-s|1}}\cdot\frac{(Z.d)^0(X^{q-nc}Y)}{1^{0|1}}.\varphi n\right)\frac{(Z.d)^sU}{1^{s|1}}$$

$$+\;.$$

$$+\left(\frac{(Z.d)^0X^{p+nc}}{1^{0|1}}\cdot\frac{(Z.d)^0(X^{q-nc}.Y)}{1^{0|1}}.\varphi n\right)\cdot\frac{(Z.d)^nU}{1^{n|1}}$$

Die Producte, aus welchen die Vorzahl von $\frac{(Z.d)^sU}{1^{s|1}}$ besteht, können in zweien Fällen durch ein einziges Differential ersetzt werden.

Zuerst finden wir durch Vergleichung derselben mit der Gleichung 225, dass dieser Zweck erreicht werden kann, wenn

$$\varphi s = \frac{a + s b}{(p+sc)(q-sc)} \quad \text{und} \quad Y = 1$$

angenommen wird. Die Reihe, welche hiedurch entsteht, ist

$$
\begin{aligned}
226)\quad & \frac{a}{p \cdot q} \cdot \frac{(Z \cdot d)^0 (X^p \cdot U)}{1^{0|1}} \cdot \frac{(Z \cdot d)^n X^q}{1^{n|1}} \\
& + \frac{a + 1b}{(p+c)(q-c)} \cdot \frac{(Z \cdot d)^1 (X^{p+c} \cdot U)}{1^{1|1}} \cdot \frac{(Z \cdot d)^{n-1} X^{q-c}}{1^{n-1|1}} \\
& + \frac{a + 2b}{(p+2c)(q-2c)} \cdot \frac{(Z \cdot d)^2 (X^{p+2c} \cdot U)}{1^{2|1}} \cdot \frac{(Z \cdot d)^{n-2} X^{q-2c}}{1^{n-2|1}} \\
& + \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \\
& + \frac{a + nb}{(p+nc)(q-nc)} \cdot \frac{(Z \cdot d)^n (X^{p+nc} \cdot U)}{1^{n|1}} \cdot \frac{(Z \cdot d)^0 X^{q-nc}}{1^{0|1}} = \\
= \quad & \frac{1}{(p+q)(q-nc)} \cdot \Big(\frac{A + 0 \cdot B}{p + 0 \cdot c} \cdot \frac{(Z \cdot d)^n X^{p+q}}{1^{n|1}} \cdot \frac{(Z \cdot d)^0 U}{1^{0|1}} \\
& + \frac{A + 1 \cdot B}{p + 1 \cdot c} \cdot \frac{(Z . d)^{n-1} X^{p+q}}{1^{n-1|1}} \cdot \frac{(Z \cdot d)^1 U}{1^{1|1}} \\
& + \frac{A + 2 \cdot B}{p + 2 \cdot c} \cdot \frac{(Z . d)^{n-2} X^{p+q}}{1^{n-2|1}} \cdot \frac{(Z \cdot d)^2 U}{1^{2|1}} \\
& + \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \\
& + \frac{A + n \cdot B}{p + n \cdot c} \cdot \frac{(Z \cdot d)^0 X^{p+q}}{1^{0|1}} \cdot \frac{(Z \cdot d)^n U}{1^{n|1}} \Big)
\end{aligned}
$$

wo

$$A = a\,(p+q) + n\,(bp - ac)$$

und

$$B = bq + ac$$

Bevor wir zu dem andern Falle übergehen, ist es nöthig von diesem ersten einen ganz untergeordneten Fall zu erwähnen, in welchem die sämmtlichen Producte, welche nach dem Gleichheitszeichen folgen, durch ein einziges Differential dargestellt werden können; dieses geschieht nämlich, wenn

$$bp = ac$$

also

$$A = a(p + q) \text{ und } B = \frac{ac}{p}(p + q)$$

Die vorstehende Gleichung geht dadurch in folgende über

227)
$$\begin{aligned}
&\frac{1}{q-0c} \cdot \frac{(Z.d)^0 (X^p.U)}{1^{0|1}} \cdot \frac{(Z.d)^n X^q}{1^{n|1}} \\
&+ \frac{1}{q-1c} \cdot \frac{(Z.d)^1 (X^{p+c}.U)}{1^{1|1}} \cdot \frac{(Z.d)^{n-1} X^{q-c}}{1^{n-1|1}} \\
&+ \frac{1}{q-2c} \cdot \frac{(Z.d)^2 (X^{p+2c}.U)}{1^{2|1}} \cdot \frac{(Z.d)^{n-2} X^{q-2c}}{1^{n-2|1}} \\
&+ \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \\
&+ \frac{1}{q-nc} \cdot \frac{(Z.d)^n (X^{p+nc}.U)}{1^{n|1}} \cdot \frac{(Z.d)^0 X^{q-nc}}{1^{0|1}} \\
&= \frac{1}{q-nc} \cdot \frac{(Z.d)^n (X^{p+q}.U)}{1^{n|1}}
\end{aligned}$$

Der zweite Fall, in welchem sämmtliche Producte, aus welchen die Vorzahl von $\frac{(Z.d)^s U}{1^{s|1}}$ besteht, durch ein einziges Differential ersetzt werden können, ergibt sich aus der Vergleichung dieser Vorzahl mit der so eben gefundenen Reihe 227; wir finden, dass, wenn wir

$$\varphi s = \frac{1}{p + sc}$$

annehmen, die genannte Vorzahl durch

$$\frac{1}{p + sc} \cdot \frac{(Z.d)^{n-s} (X^{p+q}.Y)}{1^{n-s|1}}$$

ersetzt werden kann, wodurch folgende Gleichung entsteht.

228)
$$\frac{1}{p}\cdot\frac{(Z.d)^0(X^p.U)}{1^{0|1}}\cdot\frac{(Z.d)^n(X^q.Y)}{1^{n|1}}$$
$$+\frac{1}{p+c}\cdot\frac{(Z.d)^1(X^{p+c}.U)}{1^{1|1}}\cdot\frac{(Z.d)^{n-1}(X^{q-c}.Y)}{1^{n-1|1}}$$
$$+\frac{1}{p+2c}\cdot\frac{(Z.d)^2(X^{p+2c}.U)}{1^{2|1}}\cdot\frac{(Z.d)^{n-2}(X^{q-2c}.Y)}{1^{n-2|1}}$$
$$+\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.$$
$$+\frac{1}{p+nc}\cdot\frac{(Z.d)^n(X^{p+nc}.U)}{1^{n|1}}\cdot\frac{(Z.d)^0(X^{q-nc}.Y)}{1^{0|1}}$$
$$=\frac{1}{p}\cdot\frac{(Z.d)^0U}{1^{0|1}}\cdot\frac{(Z.d)^n(X^{p+q}.Y)}{1^{n|1}}$$
$$+\frac{1}{p+c}\cdot\frac{(Z.d)^1U}{1^{1|1}}\cdot\frac{(Z.d)^{n-1}(X^{p+q}.Y)}{1^{n-1|1}}$$
$$+\frac{1}{p+2c}\cdot\frac{(Z.d)^2U}{1^{2|1}}\cdot\frac{(Z.d)^{n-2}(X^{p+q}.Y)}{1^{n-2|1}}$$
$$+\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.$$
$$+\frac{1}{p+nc}\cdot\frac{(Z.d)^nU}{1^{n|1}}\cdot\frac{(Z.d)^0(X^{p+q}.Y)}{1^{0|1}}$$

Joh. Fr. Pfaff findet im 2ten Bande des mathemat. Archivs Seite 67 zuerst auf einem von unserm ganz verschiedenen Wege einen sehr speciellen Fall unserer Gleichung, welcher ensteht, wenn $q = -p$, $m = m1 = m2 = 1$ und $Z = 1$, also das abwechselnde Vervielfachen aufgehoben ist.

§. 63.

Diese Producte sind von den veränderlichen Factoren

$$\frac{1}{p}\,,\;\frac{1}{p+c}\,,\;\frac{1}{p+2c}\,,\;\frac{1}{p+3c}\,,\;.\;.\;.\;.$$

begleitet. Bevor wir zu andern Producten übergehen, wollen wir noch die Frage lösen: Können die Producte, worin die Stellenzahlen von $(Z.d)$ und von X abwechselnd steigen und fallen, durch andere ersetzt werden, wenn diese Factoren nicht vorhanden sind?

Die vorgelegte Reihe der Producte ist

$$\frac{(Z.d)^{0}(U.X^{p})}{1^{0|1}}\cdot\frac{(Z.d)^{n}(Y.X^{q})}{1^{n|1}}+\frac{(Z.d)^{1}(U.X^{p+c})}{1^{1|1}}\cdot\frac{(Z.d)^{n-1}(Y.X^{q-c})}{1^{n-1|1}}$$

$$+\frac{(Z.d)^{2}(U.X^{p+2c})}{1^{2|1}}\cdot\frac{(Z.d)^{n-2}(Y.X^{q-2c})}{1^{n-2|1}}+\ldots+\frac{(Z.d)^{n}(U.X^{p+nc})}{1^{n|1}}\cdot\frac{(Z.d)^{0}(Y.X^{q-nc})}{1^{0|1}}=$$

$$=\Sigma(n,\ p,\ q,\ U)$$

Wird der erste Factor jedes dieser Producte in zwei Theile zerlegt,

$$(Z.d)^{s}(U.X^{p+sc})=(Z.d)^{s-1}\big(X^{sc}.Z.d(U.X^{p})\big)+s.\,c.\,(Z.d)^{6-1}(U.X^{p+sc-1}.Z.dX)$$

so zerfällt dadurch die vorgegebene Reihe in zwei Theile:

$$\frac{U.X^{p}}{1^{0|1}}\cdot\frac{(Z.d)^{n}(Y.X^{q})}{1^{n|1}}$$

$$+\frac{(Z.d)^{0}\big(X^{c}.Z.d(U.X^{p})\big)}{1^{1|1}}\cdot\frac{(Z.d)^{n-1}(Y.X^{q-c})}{1^{n-1|1}}$$

$$+\frac{(Z.d)^{1}\big(X^{2c}.Z.d(U.X^{p})\big)}{1^{2|1}}\cdot\frac{(Z.d)^{n-2}(Y.X^{q-2c})}{1^{n-2|1}}$$

$$+\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$+\frac{(Z.d)^{n-1}\big(X^{nc}.Z.d(U.X^{p})\big)}{1^{n|1}}\cdot\frac{(Z.d)^{0}(Y.X^{q-nc})}{1^{0|1}}$$

$$+\,c\left|\begin{array}{l}\dfrac{(Z.d)^{0}(U.X^{p+c-1}.Z.dX)}{1^{0|1}}\cdot\dfrac{(Z.d)^{n-1}(Y.X^{q-c})}{1^{n-1|1}}\\[2ex] +\dfrac{(Z.d)^{1}(U.X^{p+2c-1}.Z.dX)}{1^{1|1}}\cdot\dfrac{(Z.d)^{n-2}(Y.X^{q-2c})}{1^{n-2|1}}\\[2ex] +\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\[2ex] +\dfrac{(Z.d)^{n-1}(U.X^{p+nc-1}.Z.dX)}{1^{n-1|1}}\cdot\dfrac{(Z.d)^{0}(Y.X^{q-nc})}{1^{0|1}}\end{array}\right.$$

Der erste Theil dieser Reihe entsteht, wenn in der Reihe 228

$$n = n-1,\ q = q-c,\ p = c$$

und

$$U = Z.d\,(U.X^p)$$

gesetzt wird; alle Geschäfte, welche zur Bildung dieses Theils vorgenommen werden sollen, können ersetzt werden durch folgende:

$$\frac{(Z.d)^n\,(U.Y.X^{p+q})}{1^{n|1}}$$

Der zweite Theil der Reihe entspringt aus der vorgegebenen Reihe, wenn

$$n = n-1,\ p = p+c,\ q = q-c$$

und

$$U = U.X^{-1}.Z.dX$$

gesetzt wird. Wir erhalten hiedurch eine zurücklaufende Bildungsweise,

$$\Sigma\,(n, p, q, U) = \frac{(Z.d)^n\,(U.Y.X^{p+q})}{1^{n|1}} + c.\Sigma(n-1, p+c, q-c, U.X^{-1}.Z.dX)$$

welche den Weg bezeichnet, der zum Ziele führt; bilden wir nach ihr folgende Gleichungen

$$c.\Sigma(n-1,\ p+c,\ q-c,\ U.X^{-1}.Z.dX) = c.\frac{(Z.d)^{n-1}\,(U.Y.X^{p+q-1}.Z.dX)}{1^{n-1|1}}$$

$$+c^2.\Sigma\,(n-2, p+2c, q-2c, U.X^{-2}.Z^2.(dX)^2)$$

$$c^2.\Sigma\,(n-2, p+2c, q-2c, U.X^{-2}.Z^2.(dX)^2) = c^2.\frac{(Z.d)^{n-2}(U.Y.X^{p+q-2}.Z^2.(dX)^2)}{1^{n-2|1}}$$

$$+c^3.\Sigma\,(n-3, p+3c, q-3c, U.X^{-3}.Z^3.(dX)^3)$$

. . . .

$$c^n.\Sigma(0, p+nc, q-nc, U.X^{-n}.Z^n.(dX)^n) = c^n.\frac{(Z.d)^0\,(U.Y.X^{p+q-n}.Z^n.(dX)^n)}{1^{0|1}}$$

und zählen diese zusammen, so bleibt auf einer Seite nur $\Sigma\,(n, p, q, U)$, und es entsteht die Gleichung

229) $$\begin{aligned}
&\frac{(Z.d)^0\,(U.X^p)}{1^{0|1}}\cdot\frac{(Z.d)^n\,(Y.X^q)}{1^{n|1}}\\
+&\frac{(Z.d)^1\,(U.X^{p+c})}{1^{1|1}}\cdot\frac{(Z.d)^{n-1}\,(Y.X^{q-c})}{1^{n-1|1}}\\
+&\frac{(Z.d)^2\,(U.X^{p+2c})}{1^{2|1}}\cdot\frac{(Z.d)^{n-2}\,(Y.X^{q-2c})}{1^{n-2|1}}\\
+&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
+&\frac{(Z.d)^n\,(U.X^{p+nc})}{1^{n|1}}\cdot\frac{(Z.d)^0\,(Y.X^{q-nc})}{1^{0|1}}=\\
=&\frac{c^0.(Z.d)^n\,(U.Y.X^{p+q}.(Z.dX)^0)}{1^{n|1}}\\
+&\frac{c^1.(Z.d)^{n-1}\,(U.Y.X^{p+q-1}.(Z.dX)^1)}{1^{n-1|1}}\\
+&\frac{c^2.(Z.d)^{n-2}\,(U.Y.X^{p+q-2}.(Z.dX)^2)}{1^{n-2|1}}\\
+&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
+&\frac{c^n.(Z.d)^0\,(U.Y.X^{p+q-n}.(Z.dX)^n)}{1^{0|1}}
\end{aligned}$$

wo Z, X, U, Y willkührliche Funktionen von mehreren verschiedenen Elementen sind, welches auch oben schon angemerkt ist.

Einen sehr speciellen Fall unserer Gleichung hat zuerst Joh. Fr. Pfaff im zweiten Bande des mathematischen Arhivs Seite 71 gefunden, wo ausserdem, dass das abwechselnde Vervielfachen darin nicht vorkommt, noch q = - p ist, welche Grössen hier ganz willkürlich sind.

II. Fortsetzung der Untersuchung über die mit dem Vervielfachen abwechselnden Differentiale.

§. 64.

Die Stellenzahlen von (Z.d) oder der mit dem Vervielfachen abwechselnden Differentiale, deren Gesetze die vorhergehende Untersuchung vorgeführt hat, steigen und fallen um dieselbe Grösse. Wir wollen diese Stellenzahlen unveränderlich annehmen, und zuerst den einfachsten, aber auch zugleich sehr allgemeinen Fall wählen. Es werden zur Abkürzung folgende Zeichen gewählt:

$$X = f\;(x_1,\ x_2,\ x_3,\ \ldots\ldots)$$

$$X_1 = f_1\;(x'_1,\ x'_2,\ x'_3,\ \ldots\ldots)$$

$$U = f_2\;(u_1,\ u_2,\ u_3,\ \ldots\ldots)$$

$$Z = f_3\;(z_1,\ z_2,\ z_3,\ \ldots\ldots)$$

und

$$230)\quad \frac{X_1^0 \times (Z.d)^m\,(U.X^0)}{1^{0|1}\,.\,1^{n|1}} + \frac{X_1^1 \times (Z.d)^m\,(U.X^{1h})}{1^{1|1}\,.\,1^{n-1|1}} + \frac{X_1^2 \times (Z.d)^m\,(U.X^{2h})}{1^{2|1}\,.\,1^{n-2|1}} + \ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots + \frac{X_1^n \times (Z.d)^m\,(U.X^{nh})}{1^{n|1}\,.\,1^{0|1}} = \varphi\,(n,\ m,\ U)$$

Die Aufgabe ist: Die Geschäfte, welche durch diese Zeichen angegeben sind, durch andere zu ersetzen.

Wir kennen zwei Wege, welche zum Ziele führen; der erste besteht in dem Zerlegen des einen Factors in zwei Theile

$$Z.d\,(U.X^{sh}) = X^{sh}.Z.dU + s.U.X^{(s-1)h}.Z.dX^h$$

oder

$$(Z.d)^m\,(U.X^{sh}) = (Z.d)^{m-1}(X^{sh}.Z.dU) + s.(Z.d)^{m-1}(U.X^{(s-1)h}.Z.dX^h)$$

Hiedurch wird die vorgegebene Reihe in zwei Reihen zerfällt,

$$\varphi(n, m, U) = \frac{X_1^0 \times (Z.d)^{m-1}(X^0.Z.d\,U)}{1^{0|1}\;.\;1^{n|1}}$$

$$\begin{array}{ll|l}
+\dfrac{X_1^1 \times (Z.d)^{m-1}(X^{1h}.Z.dU)}{1^{1|1}\;.\;1^{n-1|1}} & +X_1 & \dfrac{X_1^0 \times (Z.d)^{m-1}(U.X^{0h}\;.\;Z.dX^h)}{1^{0|1}\;.\;1^{n-1|1}} \\
+\dfrac{X_1^2 \times (Z.d)^{m-1}(X^{2h}.Z.dU)}{1^{2|1}\;.\;1^{n-2|1}} & & +\dfrac{X_1^1 \times (Z.d)^{m-1}(U.X^{1h}\;.\;Z.d\,X^h)}{1^{1|1}\;.\;1^{n-2|1}} \\
+\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;. & & +\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;. \\
+\dfrac{X_1^n \times (Z.d)^{m-1}(X^{nh}.Z.dU)}{1^{n|1}\;.\;1^{0|1}} & & +\dfrac{X_1^{n-1} \times (Z.d)^{m-1}(U.X^{(n-1)h}.Z.dX^h)}{1^{n-1|1}\;.\;1^{0|1}}
\end{array}$$

welche beide dieselbe Gestalt haben wie die vorgegebene Reihe; denn die erste dieser beiden Reihen entspringt aus $\varphi(n, m, U)$, wenn

$$m = m-1 \text{ und } U = Z.d\,U$$

und die andere, wenn

$$n = n-1,\; m = m-1 \text{ und } U = U.Z.d\,X^h$$

gesetzt wird. Wir erhalten durch dieses Zerlegen eine zurücklaufende Bildungsweise

231) $\varphi(n, m, U) = \varphi(n, m-1, Z.dU) + X_1 \times \varphi(n-1, m-1, U.Z.dX^h)$

welche auf den Anfang der Zahlenreihe 0, 1, 2, ..., m oder auf $\varphi(n, 0, U)$ hinweiset.

Dieser Anfang besteht in einer bekannten Reihe und ist

232) $\varphi(n, 0, U) = \dfrac{X_1^0 . U . X^{0h}}{1^{0|1} . 1^{n|1}} + \dfrac{X_1^1 . U . X^{1h}}{1^{1|1} . 1^{n-1|1}} + \ldots\ldots + \dfrac{X_1^n . U . X^{nh}}{1^{n|1} . 1^{0|1}} =$

$$= \frac{1}{1^{n|1}} . U . (1 + X_1 \;.\; X^h)^n$$

Gehen wir zu m = 1, 2, 3, ... über, so finden wir nach der obigen Vorschrift, dass

$\varphi(n, 1, U) = \varphi(n, 0, Z.dU) + X_1 \times \varphi(n-1, 0, U.Z.dX^h)$

oder dass

233) $$\varphi(n, 1, U) = \frac{1}{1^{n|1}} \cdot (1+X_1 X^h)^n \; Z.d\, U$$

$$+ \frac{1}{1^{n-1|1}} \cdot (1+X_1 X^h)^{n-1} . X_1 . U . Z . d\, X^h$$

und dass überhaupt die vorgegebene Reihe $\varphi(n, m, U)$ in folgende neue Reihe übertragen werden kann:

234) $$\frac{X_1^0 \times (Z.d)^m (U.X^{0h})}{1^{0|1} . 1^{n|1}} + \frac{X_1^1 \times (Z.d)^m (U.X^{1h})}{1^{1|1} . 1^{n-1|1}}$$

$$+ \frac{X_1^2 \times (Z.d)^m (U.X^{2h})}{1^{2|1} . 1^{n-2|1}} + .. + \frac{X_1^n \times (Z.d)^m (U.X^{nh})}{1^{n|1} . 1^{0|1}}$$

$$= \frac{1}{1^{n|1}} . X_1^0 . (1+X_1 . X^h)^n . \varphi(m,U)_0 + \frac{1}{1^{n-1|1}} . X_1^1 . (1+X_1 . X^h)^{n-1} . \varphi(m,U)_1$$

$$+ \frac{1}{1^{n-2|1}} . X_1^2 . (1+X_1 . X^h)^{n-2} . \varphi(m,U)_2 + \ldots + \frac{1}{1^{n-m|1}} . X_1^m . (1+X_1 . X^h)^{n-m} . \varphi(m,U)_m$$

in welcher die begleitenden Factoren nach folgendem Gesetze gebildet werden müssen:

235) $$\begin{aligned}
\varphi(m,U)_0 &= \varphi(m-1, Z.d\,U)_0 \\
\varphi(m,U)_1 &= \varphi(m-1, Z.d\,U)_1 + \varphi(m-1, U.Z.d\,X^h)_0 \\
\varphi(m,U)_2 &= \varphi(m-1, Z.d\,U)_2 + \varphi(m-1, U.Z.d\,X^h)_1 \\
\varphi(m,U)_3 &= \varphi(m-1, Z.d\,U)_3 + \varphi(m-1, U.Z.d\,X^h)_2 \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\varphi(m,U)_{m-1} &= \varphi(m-1, Z.d\,U)_{m-1} + \varphi(m-1, U.Z.d\,X^h)_{m-2} \\
\varphi(m,U)_m &= \qquad\qquad\qquad\qquad \varphi(m-1, U.Z.d\,X^h)_{m-1}
\end{aligned}$$

Aus dieser zurücklaufenden lässt sich die unabhängige Bildungsweise herleiten; zu dieser können wir aber auf einem andern Wege gelangen, den wir auch versuchen müssen.

§. 65.

Bei dem zweiten Verfahren gehen wir von der Reihe aus

$$\frac{A^0 \times (Z.d)^m (U.X^{0h})}{1^{0|1} \,.\, 1^{n|1}} + \frac{A^1 \times (Z.d)^m (U.X^{1h})}{1^{1|1} \,.\, 1^{n-1|1}} + \frac{A^2 \times (Z.d)^m (U.X^{2h})}{1^{2|1} \,.\, 1^{n-2|1}} + \ldots\ldots$$

$$= (Z.d)^m \left(\frac{A^0 . U . X^{0h}}{1^{0|1} . 1^{n|1}} + \frac{A^1 . U . X^{1h}}{1^{1|1} . 1^{n-1|1}} + \frac{A^2 . U . X^{2h}}{1^{2|1} . 1^{n-2|1}} + \ldots\ldots. \right)$$

$$= \frac{(Z.d)^m \left(U . (1 + A . X^h)^n \right)}{1^{n|1}}$$

in welcher A eine beständige Grösse ist.

Die vorgegebene Reihe 230 entspringt aus dieser, wenn nach dem Differentiiren $A = X_1$ gesetzt wird.

Zur Abkürzung wird

$$1 + A . X^h = V$$

angenommen; es wird $(Z . d)^m (U . V^n)$ nach der Vorschrift 206 in Differentiale der einzelnen Factoren aufgelöst,

$$\frac{(Z.d)^m (U.V^n)}{1^{n|1}} = \frac{1^{m|1}}{1^{n|1}} \left(\frac{(Z.d)^m U}{1^{m|1}} \,.\, \frac{(Z.d)^0 V^n}{1^{0|1}} + \ldots. + \frac{(Z.d)^0 U}{1^{0|1}} \,.\, \frac{(Z.d)^m V^n}{1^{m|1}} \right)$$

und so ferner die Differentiale von V^n in die Differentiale von V nach der Vorschrift 220, nämlich

$$\frac{(Z.d)^s V^n}{1^{s|1}} = \frac{n^{0|-1}}{1^{0|1}} . V^n . C(s,0) + \frac{n^{1|-1}}{1^{1|1}} . V^{n-1} . C(s,1) + \ldots. + \frac{n^{s|-1}}{1^{s|1}} . V^{n-s} . C(s,s)$$

$$\left(\frac{(Z.d)^1 V}{1^{1|1}}, \frac{(Z.d)^2 V}{1^{2|1}}, \frac{(Z.d)^3 V}{1^{3|1}}, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \right)$$

oder, weil

$$(Z . d)^1 V = A \times (Z . d)^1 X^h$$

$$(Z . d)^2 V = A \times (Z . d)^2 X^h$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

also auch

$$C(s,1) = A^1 \cdot C(s,1) = X_1^1 \cdot C(s,1)$$

$$\left(\frac{(Z.d)^1 V}{1^{1|1}}, \ldots\right) \qquad , \left(\frac{(Z.d)^1 X^h}{1^{1|1}}, \ldots\ldots\ldots\right)$$

$$C(s,2) = A^2 \cdot C(s,2) = X_1^2 \cdot C(s,2)$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$C(s,s) = A^s \cdot C(s,s) = X_1^s \cdot C(s,s)$$

nach der Vorschrift

$$\frac{(Z.d)^s V^n}{1^{s|1}} = \frac{n^{0|-1}}{1^{0|1}} V^n C(s,0) + \frac{n^{1|-1}}{1^{1|1}} V^{n-1} X_1^1 C(s,1) + \ldots + \frac{n^{s|-1}}{1^{s|1}} V^{n-s} X_1^s C(s,s)$$

$$\left(\frac{(Z.d)^1 X^h}{1^{1|1}}, \frac{(Z.d)^2 X^h}{1^{2|1}}, \frac{(Z.d)^3 X^h}{1^{3|1}}, \ldots\ldots\ldots\right)$$

Werden nun alle diese Geschäfte vorgenommen, und die Producte nach den Potenzen von V oder von $(1 + X_1 \cdot X^h)$ geordnet, so entsteht die Reihe 234, in welcher die begleitenden Factoren nach folgendem Gesetze gebildet werden.

236)
$$\varphi(m, U)_s = m^{m-s|-1} \cdot \left(\frac{(Z.d)^{m-s} U}{1^{m-s|1}} \cdot C(s,s) + \frac{(Z.d)^{m-s-1} U}{1^{m-s-1|1}} \cdot C(s+1,s) + \frac{(Z.d)^{m-s-2} U}{1^{m-s-2|1}} \cdot C(s+2,s) + \ldots\ldots\ldots + \frac{(Z.d)^0 U}{1^{0|1}} \cdot C(m,s) \right)$$

$$\left(\frac{(Z.d)^1 X^h}{1^{1|1}}, \frac{(Z.d)^2 X^h}{1^{2|1}}, \ldots\right).$$

Diese unabhängige Bildungsweise ist dieselbe, welche wir aus der zurücklaufenden 235 würden erhalten haben, wenn wir dieselbe weiter verfolgt hätten.

§. 66.

Beide Reihen, sowohl die vorgegebene 230 als jene 234, in welche sie verwandelt ist, sind ganz allgemein und gelten für jeden Werth von n; sie haben verschiedene Formen, und eben diese Verschiedenheit in den Formen ist sehr nützlich, denn oft ist die Natur einer Reihe leichter aus der andern Reihe, welche sich nur durch die Form von ihr unterscheidet, zu erkennen. Ist z. B.

$$X_1 = - X^{-h}$$

und n eine ganze bejahte Zahl und grösser als m, oder ist

$$m = n - p$$

so verschwinden alle Glieder der zweiten Reihe, und dieses Verschwinden der zweiten Reihe veroffenbaret uns, dass der Werth der ersten $= 0$, oder dass

237) $$\frac{(Z.d)^{n-p}(U.X^{0h})}{1^{0|1}.1^{n|1}.X^{0h}} - \frac{(Z.d)^{n-p}(U.X^{1h})}{1^{1|1}.1^{n-1|1}.X^{1h}} + \frac{(Z.d)^{n-p}(U.X^{2h})}{1^{2|1}.1^{n-2|1}.X^{2h}} - \ldots (-)^n . \frac{(Z.d)^{n-p}(U.X^{nh})}{1^{n|1}.1^{0|1}.X^{nh}} = 0$$

Ist aber $m = n$, so verschwindet sie nicht, und die zweite Reihe gibt wenige Geschäfte an, durch welche die erste zu ersetzen ist, oder es ist

238) $$\frac{(Z.d)^{n}(U.X^{0h})}{1^{0|1}.1^{n|1}.X^{0h}} - \frac{(Z.d)^{n}(U.X^{1h})}{1^{1|1}.1^{n-1|1}.X^{1h}} + \frac{(Z.d)^{n}(U.X^{2h})}{1^{2|1}.1^{n-2|1}.X^{2h}} - \ldots (-)^n . \frac{(Z.d)^{n}(U.X^{nh})}{1^{n|1}.1^{0|1}.X^{nh}} =$$

$$= (-)^n . U . \left(\frac{h.Z.dX}{X}\right)^n$$

Ist U eine beständige Grösse, so verschwinden von der zweiten Reihe viele Producte, und es bleiben nur folgende übrig

$$239)\quad \frac{X_1^0 \times (Z.d)^m X^{0h}}{1^{0l_1} . 1^{nl_1}} + \frac{X_1^1 \times (Z.d)^m X^{1h}}{1^{1l_1} . 1^{n-1l_1}} + \frac{X_1^2 \times (Z.d)^m X^{2h}}{1^{2l_1} . 1^{n-2l_1}} + \ldots + \frac{X_1^n \times (Z.d)^m X^{nh}}{1^{nl_1} . 1^{0l_1}}$$

$$= \frac{m^{m-1l-1}}{1^{n-1l_1}} \cdot X_1^1 \cdot (1 + X_1 \cdot X^h)^{n-1} \cdot C(m,\ 1)$$

$$+ \frac{m^{m-2l-1}}{1^{n-2l_1}} \cdot X_1^2 \cdot (1 + X_1 \cdot X^h)^{n-2} \cdot C(m,\ 2)$$

$$+ \frac{m^{m-3l-1}}{1^{n-3l_1}} \cdot X_1^3 \cdot (1 + X_1 \cdot X^h)^{n-3} \cdot C(m,\ 3)$$

$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$+ \frac{m^{0l-1}}{1^{n-ml_1}} \cdot X_1^m \cdot (1 + X_1 \cdot X^h)^{n-m} \cdot C(m, m)$$

$$\left(\frac{(Z.d)^1 X^h}{1^{1l_1}}, \frac{(Z.d)^2 X^h}{1^{2l_1}}, \ldots.\right)$$

§. 67.

Von der einfachen gehen wir zu einer zusammengesetzten Reihe über. Es sei

$$X = f(x_1, x_2, x_3, \ldots)$$
$$X_1 = f_1(x_1^1, x_2^1, x_3^1, \ldots)$$
$$U = f_2(u_1, u_2, u_3, \ldots)$$
$$U_1 = f_3(u_1^{(1)}, u_2^{(1)}, u_3^{(1)}, \ldots)$$
$$Z = f_4(z_1, z_2, z_3, \ldots)$$
$$Z_1 = f_5(z_1^{(1)}, z_2^{(1)}, z_3^{(1)}, \ldots)$$

und

$$240)\quad \frac{X_1^0 \times (Z_1.d)^p (U_1.X^0) \times (Z.d)^m (U.X^0)}{1^{0l_1} . 1^{nl_1}} + \frac{X_1^1 \times (Z_1.d)^p (U_1.X^{-1}) \times (Z.d)^m (U.X^1)}{1^{1l_1} . 1^{n-1l_1}}$$

$$+ \frac{X_1^2 \times (Z_1.d)^p (U_1.X^{-2}) \times (Z.d)^m (U.X^2)}{1^{2l_1} . 1^{n-2l_1}} + \ldots + \frac{X_1^n \times (Z_1.d)^p (U_1 X^{-n}) \times (Z.d)^m (U.X^n)}{1^{nl_1} . 1^{0l_1}} =$$

$$= \psi(n,\ p,\ U_1,\ U)$$

Das Verfahren, diese Reihe in eine andere zu übertragen, ist wieder das vorige; es wird der neue Factor in zwei Theile zerlegt,

$$(Z_1 . d)^p (U_1 . X^{-s}) = (Z_1 . d)^{p-1} (X^{-s} . Z_1 . dU_1) - s . (Z_1 . d)^{p-1} (X^{-s-1} . U_1 . Z_1 . dX)$$

und dadurch die vorgegebene Reihe in zwei andere,

$$\begin{aligned}
\psi(n, p, U_1, U) = {} & \frac{X_1^0 \times (Z_1 . d)^{p-1} (X^0 . Z_1 . dU_1) \times (Z . d)^m (U . X^0)}{1^{0|1} . 1^{n|1}} \\
& + \frac{X_1^1 \times (Z_1 . d)^{p-1} (X^{-1} . Z_1 . dU_1) \times (Z . d)^m (U . X^1)}{1^{1|1} . 1^{n-1|1}} \\
& + \frac{X_1^2 \times (Z_1 . d)^{p-1} (X^{-2} . Z_1 . dU_1) \times (Z . d)^m (U . X^2)}{1^{2|1} . 1^{n-2|1}} \\
& + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
& + \frac{X_1^n \times (Z_1 . d)^{p-1} (X^{-n} . Z_1 . dU_1) \times (Z . d)^m (U . X^n)}{1^{n|1} . 1^{0|1}} \\
- X_1 \Bigg| & \frac{X_1^0 \times (Z_1 . d)^{p-1} (X^{-2} . U_1 . Z_1 . dX) \times (Z . d)^m (U . X^1)}{1^{0|1} . 1^{n-1|1}} \\
& + \frac{X_1^1 \times (Z_1 . d)^{p-1} (X^{-3} . U_1 . Z_1 . dX) \times (Z . d)^m (U . X^2)}{1^{1|1} . 1^{n-2|1}} \\
& + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
& + \frac{X_1^{n-1} \times (Z_1 . d)^{p-1} (X^{-n-1} . U_1 . Z_1 . dX) \times (Z . d)^m (U . X^n)}{1^{n-1|1} . 1^{0|1}}
\end{aligned}$$

wovon die erste aus der vorgegebenen entsteht, wenn

$$p = p-1, \quad U_1 = Z_1 . dU_1$$

und die zweite, wenn

$$n = n-1, p = p-1$$

und

$$U_1 = X^{-2} . U_1 . Z_1 . dX, \quad U = U . X^{1}$$

gesetzt wird. Es entsteht hiedurch die zurücklaufende Bildungsweise

241) $\psi(n, p, U_1, U) = \psi(n, p-1, Z_1\, dU_1, U) - X_1 . \psi(n-1, p-1, X^{-2} U_1 Z_1\, dX, U X)$

Die Reihe, auf welche diese Gleichung zurückweiset, ist

$$\psi(n,\ o,\ U_1,\ U) = U_1\ \left(\left(\frac{X_1}{X}\right)^0 \cdot \frac{(Z.d)^m (U.X^0)}{1^{0|1} . 1^{n|1}} + \ldots + \left(\frac{X_1}{X}\right)^n \cdot \frac{(Z.d)^m (U.X^n)}{1^{n|1} . 1^{0|1}}\right)$$

Wir haben sie schon in den vorigen §§. untersucht; sie entsteht, wenn

$$X_1 = \frac{X_1}{X}$$

gesetzt wird. Bezeichnen wir diese Reihe mit $\varphi(n,\ m,\ U)$, und setzen

$$242)\quad \left(\frac{X_1}{X}\right)^0 \cdot \frac{(Z.d)^m (U.X^0)}{1^{0|1} . 1^{n|1}} + \ldots\ldots + \left(\frac{X_1}{X}\right)^n \cdot \frac{(Z.d)^m (U.X^n)}{1^{n|1} . 1^{0|1}}$$

$$= \varphi\ (n,\ m,\ U)$$

$$= \frac{1}{1^{n|1}} \cdot \left(\frac{X_1}{X}\right)^0 \cdot (1+X_1)^n \cdot \varphi(m,\ U)_0 + \ldots + \frac{1}{1^{n-m|1}} \cdot \left(\frac{X_1}{X}\right)^m (1+X_1)^{n-m}\,\varphi(m,U)_m$$

wo $\varphi(m,\ U)_0$, $\varphi(m,\ U)_1, \ldots\ldots, \varphi(m,\ U)_m$ nach 236 gebildet werden müssen, so geben folgende Gleichungen den Weg an, der zum Ziele führt:

$$243)\ \psi(n,0,U_1,U) = U_1 . \varphi(n,m,U)$$

$$\psi(n,1,U_1,U) = \psi(n,0,\ Z_1\ dU_1,U) - X_1\ .\ \psi(n-1,\ 0,\ X^{-2}\,U_1\,Z_1\ d\,X,\ U\,X)$$

$$\psi(n,2,U_1,U) = \psi(n,1,\ Z_1\ dU_1,U) - X_1\ .\ \psi(n-1,1,X^{-2}\,U_1\,Z_1\,d\,X,\ U\,X)$$

u. s. w.

Die Endgleichung erhält folgende Form,

$$244)\ \psi(n,\ p,\ U_1,\ U) = X_1^0 \times \varphi(n,\ m,\ U.X^0) \times \psi(p,\ U_1)_0$$

$$- X_1^1 \times \varphi(n-1,\ m,\ U.X^1) \times \psi(p,\ U_1)_1$$

$$+ X_1^2 \times \varphi(n-2,\ m,\ U.X^2) \times \psi(p,\ U_1)_2$$

$$- \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$(-)^p\,X_1^p \times \varphi(n-p,m,\ U.X^p) \times \psi(p,U_1)_p$$

deren Vorzahlen folgendes Gesetz befolgen:

245)
$$\psi(p, U_1)_0 = \psi(p-1, Z_1\, dU_1)_0$$
$$\psi(p, U_1)_1 = \psi(p-1, Z_1\, dU_1)_1 + \psi(p-1, U_1\, X^{-2} Z_1\, dX)_0$$
$$\psi(p, U_1)_2 = \psi(p-1, Z_1\, dU_1)_2 + \psi(p-1, U_1\, X^{-2} Z_1\, dX)_1$$
$$\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot$$
$$\psi(p, U_1)_s = \psi(p-1, Z_1\, dU_1)_s + \psi(p-1, U_1\, X^{-2} Z_1\, dX)_{s-1}$$
$$\cdot\;\cdot$$
$$\psi(p, U_1)_{p-1} = \psi(p-1, Z_1\, dU_1)_{p-1} + \psi(p-1, U_1\, X^{-2} Z_1^{3}\, dX)_{p-2}$$
$$\psi(p, U_1)_p = \qquad\qquad\qquad\qquad \psi(p-1, U_1\, X^{-2} Z_1\, dX)_{p-1}$$

oder

246)
$$\psi(p\,,\,U_1)_s = p^{p-s|-1} \cdot \Bigg(\frac{(Z_1\,.\,d)^{p-s}U_1}{1^{p-s|1}} \,.\, C(s\,,\,s)$$
$$+ \frac{(Z_1\,.\,d)^{p-s-1}\,U_1}{1^{p-s-1|1}} \,.\, C(s+1, s)$$
$$+ \frac{(Z_1\,.\,d)^{p-s-2}\,U_1}{1^{p-s-2|1}} \,.\, C(s+2, s)$$
$$+ \;.\;\;.\;\;.\;\;.\;\;.\;\;.\;\;.\;\;.\;\;.$$
$$+ \frac{(Z_1\,.\,d)^{0}\;\;U_1}{1^{0|1}} \,.\, C(p\,,\,s) \Bigg)$$
$$\left(\begin{array}{ccccccc} \dfrac{(Z_1\,.\,d)^0\;\;Y}{1^{1|1}} & , & \dfrac{(Z_1\,.\,d)^1\;\;Y}{1^{2|1}} & , & \dfrac{(Z_1\,.\,d)^2\;\;Y}{1^{3|1}} & , & \ldots\ldots \end{array} \right)$$
$$\begin{array}{ccc} 1 & \qquad\qquad 2 & \qquad\qquad 3 \end{array}$$

wo

$$Y = Z_1\,.\,X^{-2}\,.\,dX$$

Die vorgegebene Reihe lässt sich also in eine andere übertragen:

247)
$$\frac{X_1^0 \times (Z_1 . d)^p (U_1 . X^0) \times (Z . d)^m (U . X^0)}{1^{0|1} . 1^{n|1}}$$
$$+ \frac{X_1^1 \times (Z_1 . d)^p (U_1 . X^{-1}) \times (Z . d)^m (U . X^1)}{1^{1|1} . 1^{n-1|1}}$$
$$+ \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; .$$
$$+ \frac{X_1^n \times (Z_1 . d)^p (U_1 . X^{-n}) \times (Z . d)^m (U . X^n)}{1^{n|1} . 1^{0|1}} =$$
$$= A_0 \times \frac{1}{1^{n|1}} . X_1^0 . (1 + X_1)^n$$
$$+ A_1 \times \frac{1}{1^{n-1|1}} . X_1^1 . (1 + X_1)^{n-1}$$
$$+ \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; .$$
$$+ A_{p+m} \times \frac{1}{1^{n-p-m|1}} . X_1^{p+m} . (1 + X_1)^{n-p-m}$$

wo die Vorzahlen A_0, A_1, A_2, ... nach folgendem Gesetze

248)
$$A_s = X^{-s} \times \psi(p, U_1)_0 \times \varphi(m, U . X^0)_s$$
$$- X^{-s+1} \times \psi(p, U_1)_1 \times \varphi(m, U . X^1)_{s-1}$$
$$+ \; . \; . \; . \; . \; - \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; .$$
$$(-)^s X^0 \times \psi(p, U_1)_s \times \varphi(m, U . X^s)_0$$

und die Factoren dieser Producte nach den Vorschriften 236, 242, 246 gebildet werden müssen.

§. 68.

So wie bei der einfachen Reihe 230, so lässt sich auch bei der zusammengesetzteren Reihe 240 die Natur derselben oft viel leichter durch die andere Reihe, welche sich nur in der Form von ihr unterscheidet, erkennen; ist z. B. n eine ganze bejahte Zahl und grösser als m + p oder ist

$$n = p + m + q$$

und ist $X_1 = -1$, so ist nach 247

249)
$$\frac{(Z_1 . d)^p (U_1 . X^0) \times (Z . d)^m (U . X^0)}{1^{0|1} . 1^{p+m+q|1}}$$
$$- \frac{(Z_1 . d)^p (U_1 . X^{-1}) \times (Z . d)^m (U . X^1)}{1^{1|1} . 1^{p+m+q-1|1}}$$
$$+ \frac{(Z_1 . d)^p (U_1 . X^{-2}) \times (Z . d)^m (U . X^2)}{1^{2|1} . 1^{p+m+q-2|1}}$$
$$- \dots\dots + \dots\dots\dots\dots$$
$$(-)^{p+m+q} \frac{(Z_1 . d)^p (U_1 . X^{-p-m-q}) \times (Z . d)^m (U . X^{p+m+q})}{1^{p+m+q|1} . 1^{0|1}} = 0$$

Ist aber

$$n = p + m \text{ und } X_1 = -1$$

so verschwindet die Reihe nicht, und es ist

250)
$$\frac{(Z_1 . d)^p (U_1 . X^0) \times (Z . d)^m (U . X^0)}{1^{0|1} . 1^{p+m|1}}$$
$$- \frac{(Z_1 . d)^p (U_1 . X^{-1}) \times (Z . d)^m (U . X^1)}{1^{1|1} . 1^{p+m-1|1}}$$
$$+ \frac{(Z_1 . d)^p (U_1 . X^{-2}) \times (Z . d)^m (U . X^2)}{1^{2|1} . 1^{p+m-2|1}}$$
$$- \dots\dots + \dots\dots\dots\dots$$
$$(-)^{p+m} \frac{(Z_1 .)^p (U_1 . X^{-p-m}) \times (Z . d)^m (U . X^{p+m})}{1^{p+m|1} . 1^{0|1}}$$
$$= (-)^m U_1 . U \times \left(\frac{Z_1 . dX}{X}\right)^p \times \left(\frac{Z . dX}{X}\right)^m$$

Heben wir das abwechselnde Vervielfachen auf, und setzen $Z = 1$ und $Z_1 = 1$, so entstehen aus unsern allgemeinen Reihen 234 und 247 zwei ganz specielle Reihen

$$\frac{d^{n-p} (U X^0)}{1^{0|1} . 1^{n|1} . X^0} - \frac{d^{n-p} (U X^1)}{1^{1|1} . 1^{n-1|1} . X^1} + \dots - \dots (-)^n \frac{d^{n-p} (U X^n)}{1^{n|1} . 1^{0|1} . X^n} = 0$$

und

$$\frac{d^{p}(U_{1}X^{0}) \;.\; d^{m}(UX^{0})}{1^{0|1} \;.\; 1^{p+m+q|1}} - \frac{d^{p}(U_{1}X^{-1}) \;.\; d^{m}(UX^{1})}{1^{1|1} \;.\; 1^{p+m+q-1|1}}$$

$$+ \ldots - \ldots (-)^{p+m+q} \frac{d^{p}(U_{1}X^{-p-m-q}) \;.\; d^{m}(UX^{p+m+q})}{1^{p+m+q|1} \;.\; 1^{0|1}} = 0$$

Die erste dieser beiden speciellen Reihen hat **Lexell** in den Nov. comment. Aca. Petrop. Tom. XVI Seite 230, und die letzte J. F. **Pfaff** in seinen Disquis. analyt. Seite 248 zuerst mitgetheilt.

Ausser diesen beiden speciellen Fällen, in welchen nicht allein das abwechselnde Vervielfachen aufgehoben, sondern auch noch den allgemeinen Grössen X, X_1, h, bestimmte Werthe und den Grössen p und m bestimmte Relationen gegeben werden, findet man bei den Mathematikern nichts, was hieher gehört, und es werden sowohl die allgemeine Reihe 234 und die noch allgemeinere Reihe 247 mit ihren zurücklaufenden und unabhängigen Bildungsweisen 235, 236, 243, 246, 248 als auch die speciellen Reihen 237, 238, 249, 250 hier zuerst bekannt gemacht.

Auch hat unser Verfahren in dieser allgemeinsten Untersuchung nichts mit demjenigen gemeinsam, welches **Lexell** und **Pfaff** bei den erwähnten ganz speciellen Fällen befolgt haben.

III. Verbindungen zu bestimmten Summen aus den mit dem Vervielfachen abwechselnden Differentialen und zwar aus den Elementen:

$$\frac{(Z\,.\,d)^{q}\,X}{1^{q|1}}\;,\;\frac{(Z\,.\,d)^{q+1}\,X}{1^{q+1|1}}\;,\;\frac{(Z\,.\,d)^{q+2}\,X}{1^{q+2|1}}\;,\;.\;.\;.\;.$$

§. 69.

Es sei

$$X = f\,(x_1\,,\,x_2\,,\,x_3\,,\,.\,.\,.\,)$$
$$Z = f_1\,(z_1\,,\,z_2\,,\,z_3\,,\,.\,.\,.\,)$$

und

$$\frac{(Z\,.\,d)^{q}X}{1^{q|1}} = X_q$$

Es ist

$$Z\,.\,d\,C(n,1) = Z\,.\,dX_n = (n+1)\cdot\frac{(Z\,.\,d)^{n+1}X}{1^{n+1|1}} = (n+1)\,X_{n+1} = (n+1)\,.\,C(n+1,1)$$

ferner ist

$$C(n,2) = X_q\,.\,X_{n-q} + X_{q+1}\,.\,X_{n-q-1} + X_{q+2}\,.\,X_{n-q-2} + \ldots + X_{n-q}\,.\,X_q$$

und

$$Z.dC\,(n,2) = (n-q+1).\,X_q.X_{n-q+1} + \left.\begin{matrix}q+1\\n-q\end{matrix}\right|.X_{q+1}.X_{n-q} + \left.\begin{matrix}q+2\\n-q-1\end{matrix}\right|.\,X_{q+2}\,.\,X_{n-q-1} + \ldots.$$
$$\ldots + \left.\begin{matrix}n-q\\q+1\end{matrix}\right|.\,X_{n-q}\,.\,X_{q+1} + (n-q+1)\,.\,X_{n-q+1}\,.\,X_q$$
$$= (n+1)\,.\,(X_q\,.\,X_{n-q+1} + X_{q+1}.\,X_{n-q} + \ldots + X_{n-q+1}\,.\,X_q) - 2q\,.\,X_q\,.\,X_{n-q+1}$$

oder in andern Zeichen

$$Z\,.\,d\,C(n,2) = (n+1)\,.\,C(n+1,2) - 2\,.\,q\,.\,X_q\,.\,C(n-q+1,\;1)$$

Auf gleiche Weise ergiebt sich das vervielfachte Differential von $C(n, 3)$, $C(n, 4)$, . . .

$$Z . d\, C(n, 3) = (n+1) . C(n+1, 3) - 3 . q . X_q . C(n-q+1, 2)$$

$$Z . d\, C(n, 4) = (n+1) . C(n+1, 4) - 4 . q . X_q . C(n-q+1, 3)$$

. . . .

Bei dem Uebergange von der Gleichung

$$Z . d\, C(n, p-1) = (n+1)\, C(n+1, p-1) - (p-1)\, q\, X_q . C(n-q+1, p-2) \qquad (\alpha$$

zu der nächstfolgenden wird die zurücklaufende Bildungsweise von $C(n,p)$ oder die Gleichung

$$\begin{aligned} C(n, p) = {} & X_q . C(n-q, p-1) \\ & + X_{q+1} . C(n-q-1, p-1) \\ & + \ldots\ldots\ldots \\ & + X_{n-(p-1)q} . C((p-1)q, p-1) \end{aligned}$$

zu Grunde gelegt, und diese Gleichung nach vorstehender Vorschrift α differentiirt

$$\begin{aligned} Z\, d\, C(n,p) = {} & X_q \Big((n-q+1)\, C(n-q+1, p-1) - (p-1)\, q\, X_q C(n-2q+1, p-2)\Big) \\ & \qquad + (q+1)\, X_{q+1}\, C(n-q, p-1) \\ & + X_{q+1} \Big((n-q)\, C(n-q, p-1) - (p-1)\, q\, X_q\, C(n-2q, p-2)\Big) \\ & \qquad + (q+2)\, X_{q+2}\, C(n-q-1, p-1) \\ & + X_{q+2} \Big((n-q-1)\, C(n-q-1, p-1) - (p-1)\, q\, X_q\, C(n-2q-1, p-2)\Big) \\ & \qquad + (q+3)\, X_{q+3}\, C(n-q-2, p-1) \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ + X_{n-(p-1)q} & \Big(\big((p-1)q+1\big)\, C\big((p-1)q+1, p-1\big) - (p-1)\, q\, X_q\, C\big((p-2)q+1, p-2\big)\Big) \\ & + \big(n-(p-1)q+1\big)\, X_{n-(p-1)q+1}\, C\big((p-1)q, p-1\big) \end{aligned}$$

oder, wenn die Producte auf eine andere Weise gruppirt werden,

$$\mathbf{Z} . d\, C(n, p) =$$

$$(n+1) \Big(X_q C(n-q+1, p-1) + X_{q+1} C(n-q, p-1) + \ldots . + X_{n-(p-1)q+1}\ C\big((p-1)q, p-1\big) \Big)$$

$$-(p-1)q\ X_q \Big(X_q C(n-2q+1, p-2) + X_{q+1} C(n-2q, p-2) + \ldots + X_{n-(p-1)q}\, C\big((p-2)q+1, p-2\big) \Big)$$

$$-\ q\ X_q\ C(n-q+1,\ p-1)\ -\ (p-1)\, q\ X_{n-(p-1)q+1}\ \ C\big((p-1)\, q,\ p-1\big)$$

Die erste eingeklammerte Reihe ist

$$= C(n+1,\ p)$$

die zweite eingeklammerte Reihe ist

$$= C(n-q+1, p-1) - X_{n-(p-1)q+1}\ .\ C\big((p-2)\, q, p-2\big)$$

und weil

$$C\big((p-1)q, p-1\big) = X_q\ .\ C\big((p-2)\, q,\ p-2\big)$$

so ist die dritte Horizontalreihe

$$= -\ q\ .\ X_q\ .\ C(n-q+1,\ p-1) - (p-1)\, q\ .\ X_q\ .\ X_{n-(p-1)q+1}\ \ .\ C\big((p-2)\, q, p-2\big)$$

Werden alle drei Horizontalreihen vereinigt, so entsteht die Gleichung

251) $$(\mathbf{Z}.d)\ C(n, p) = (n+1)\ C(n+1, p) - pq\ C(n-q+1, p-1)\ .\ \frac{(\mathbf{Z}.d)^q\, X}{1^{q|1}}$$

$$\left(\frac{(\mathbf{Z}\, .\, d)^q\, X}{1^{q|1}},\ \frac{(\mathbf{Z}\, .\, d)^{q+1}\, X}{1^{q+1|1}},\ \frac{(\mathbf{Z}\, .\, d)^{q+2}\, X}{1^{q+2|1}},\ .\ .\ .\ .\ . \right)$$

Kramp hat in seiner allgemeinen Arithmetik Seite 280 den ganz speciellen Fall hievon, wo $q = 1$ und wenn das Differentiiren nicht mit dem Vervielfachen abwechselt, also wo $Z = 1$ ist, angegeben, nämlich

252) $$d\, C(n,p) = (n+1)\ .\ C(n+1,\ p)\ -\ p\ .\ C(n,\ p-1)\ .\ d X$$

$$\left(\frac{d^1\, X}{1^{1|1}},\ \frac{d^2\, X}{1^{2|1}},\ \frac{d^3\, X}{1^{3|1}},\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ . \right)$$

Die allgemeine Gleichung 251 erscheint hier zuerst; auch hat der

Beweis, der hier für diese allgemeine Gleichung gegeben wird, nichts gemein mit jenem des Herrn **Kramp** für den ganz speciellen Fall.

§. 70.

Diese Allgemeinheit kann gesteigert und das Gefundene als Vorbereitung zu dem noch Höheren betrachtet werden. Das Höhere geben folgende Zeichen an

$$\left(\frac{(Z.d)^q\,X}{1^{q|1}}\;,\;\frac{(Z.d)^{q+1}\,X}{1^{q+1|1}}\;,\;\frac{(Z.d)^{q+2}\,X}{1^{q+2|1}}\;,\;\ldots\right)^n \mathrm{fm} = P^n\,\mathrm{fm}$$

Wir wollen das Differential von dieser Grösse suchen, in welcher n jede mögliche Zahl vorstellt.

Bei dieser allgemeinsten Aufgabe legen wir die Bildungsweise des Polynomiums unserer **Analysis** N. 29, Seite 49 zu Grunde, nämlich

$$P^n\,\mathrm{f}(m+1) = \frac{n^{o|-1}}{1^{o|1}}\cdot X_q^n\cdot C(m,\,o) + \frac{n^{1|-1}}{1^{1|1}}\cdot X_q^{n-1}\cdot C(m+q,\,1)$$

$$+\ldots+\frac{n^{s|-1}}{1^{s|1}}\cdot X_q^{n-s}\cdot C(m+sq,\,s)+\ldots+\frac{n^{m|-1}}{1^{m|1}}\cdot X_q^{n-m}\cdot C(m+mq,m)$$

$$\left(X_{q+1}\;,\;X_{q+2}\;X_{q+3}\;,\;\ldots\ldots\ldots\ldots\right)$$

differentiiren diese Gleichung, und setzen nach N. 251

$$Z.d\,C(m+sq,s) = (m+sq+1)\,C(m+sq+1,s) - s(q+1)\,C\left(m+(s-1)q,\,s-1\right)X_{q+1}$$

und

$$Z.d\left(\frac{n^{s|-1}}{1^{s|1}}\,X_q^{n-s}\,C(m+sq,\,s)\right) = \frac{n^{s+1|-1}}{1^{s+1|1}}\,(s+1)\;(q+1)\;X_q^{n-s-1}\;X_{q+1}\,C(m+sq\,,\,s)$$

$$-\frac{n^{s|-1}}{1^{s|1}}\,s\;(q+1)\;X_q^{n-s}\;X_{q+1}\;C\left(m+(s-1)\,q,\,s-1\right)$$

$$+\frac{n^{s|-1}}{1^{s|1}}\,(m+s\,q+1)\;X_q^{n-s}\;C(m+s\,q+1,\,s)$$

Es entstehen hiedurch drei Reihen von Producten, wovon sich viele gegenseitig zernichten und nur folgende übrig bleiben:

$$\begin{aligned}
Z.d\,P^n\,\mathfrak{f}(m+1) = {} & \frac{n^{m+1|-1}}{1^{m+1|1}}\,.\,(m+1)\,.\,(q+1)\,.\,X_q^{n-m-1}\,.\,X_{q+1}\,.\,C\,(m+mq,m) \\
& + \frac{n^{0|-1}}{1^{0|1}}\,.\,(m+1)\,.\,X_q^n\,.\,C\,(m+1,\,0) \\
& + \frac{n^{1|-1}}{1^{1|1}}\,.\,(m+1+q)\,.\,X_q^{n-1}\,.\,C\,(m+1+q,\,1) \\
& + \frac{n^{2|-1}}{1^{2|1}}\,.\,(m+1+2q)\,.\,X_q^{n-2}\,.\,C\,(m+1+2q,2) \\
& + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
& + \frac{n^{m|-1}}{1^{m|1}}\,.\,(m+1+mq)\,.\,X_q^{n-m}\,.\,C\,(m+1+mq,\,m) \\
& \left(X_{q+1}\,,\ X_{q+2}\,,\ X_{q+3}\,,\ \ldots\ldots\ldots\right)
\end{aligned}$$

Wird nun noch

$$\frac{n^{s|-1}}{1^{s|1}}\,.\,(m+1+sq) = \frac{n^{s|-1}}{1^{s|1}}\,.\,(m+1+nq) - n\,.\,q\,.\,\frac{(n-1)^{s|-1}}{1^{s|1}}$$

$$\frac{n^{m+1|-1}}{1^{m+1|1}}\,.\,(q+1)\,.\,(m+1) = \frac{n^{m+1|-1}}{1^{m+1|1}}\,.\,(m+1+nq) - n\,.\,q\,.\,\frac{(n-1)^{m+1|-1}}{1^{m+1|1}}$$

und

$$X_{q+1}\,.\,C(m+m\,q,\ m) = C\left((m+1)\ (q+1),\ m+1\right)$$

gesetzt, so zerfällt dadurch die worstehende Reihe in zwei Reihen

$$\begin{aligned}
Z.d\,P^n\,\mathfrak{f}(m+1) = (m+1+nq)\,\Big(& \frac{n^{0|-1}}{1^{0|1}}\,X_q^n\ C\,(m+1,\,0) \\
& + \frac{n^{1|-1}}{1^{1|1}}\,X_q^{n-1}\ C\,(m+1+q,\,1) \\
& + \frac{n^{2|-1}}{1^{2|1}}\,X_q^{n-2}\ C\,(m+1+2q,\,2) \\
& + \frac{n^{3|-1}}{1^{3|1}}\,X_q^{n-3}\ C\,(m+1+3q,\,3) \\
& + \ldots\ldots\ldots\ldots \\
& + \frac{n^{m+1|-1}}{1^{m+1|1}}\,X_q^{n-m-1}\ C\,\left((m+1)\,(q+1),\ m+1\right)\Big)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
- n\, q\, X_q \Big(& \frac{(n-1)^{0|-1}}{1^{0|1}} \quad X_q^{n-1}\; C(m+1,\, 0) \\
& + \frac{(n-1)^{1|-1}}{1^{1|1}} \quad X_q^{n-2}\; C(m+1+q,\, 1) \\
& + \frac{(n-1)^{2|-1}}{1^{2|1}} \quad X_q^{n-3}\; C(m+1+2q,\, 2) \\
& + \frac{(n-1)^{3|-1}}{1^{3|1}} \quad X_q^{n-4}\; C(m+1+3q,\, 3) \\
& + \;.\;\;.\;\;.\;\;.\;\;.\;\;.\;\;.\;\;.\;\;.\;\;. \\
& + \frac{(n-1)^{m+1|-1}}{1^{m+1|1}} \quad X_q^{n-m-2}\; C\Big((m+1)\;(q+1),\; m+1\Big)\Big)
\end{aligned}$$

wovon die erste $= P^n f(m+2)$ und die zweite $= P^{n-1} f(m+2)$; es ist folglich

$$253) \qquad Z\,.\,d P^n f(m+1) = (m+1+nq)\,.\,P^n f(m+2) - n\,.\,q\,.\,P^{n-1} f(m+2) \cdot \frac{(Z\,.\,d)^q X}{1^{q|1}}$$

wo

$$P = \left(\frac{(Z\,.\,d)^q\; X}{1^{q|1}} \,,\; \frac{(Z\,.\,d)^{q+1}\; X}{1^{q+1|1}} \,,\; \frac{(Z\,.\,d)^{q+2}\; X}{1^{q+2|1}} \,,\; .\;.\;.\;.\;. \right)$$

und X und Z die oben angegebene Bedeutung haben, und n jede mögliche Grösse bedeutet.

IV. Das mit dem Vervielfachen abwechselnde Differentiiren durch Hülfe einer andern Function.

§. 71.

Sind Z, Y, U verschiedene Functionen mehrerer unter sich unabhängiger Grössen

$$Z = f_1(z_1, z_2, z_3, \ldots\ldots)$$
$$Y = f_2(y_1, y_2, y_3, \ldots\ldots)$$
$$U = f_3(u_1, u_2, u_3, \ldots\ldots)$$

so ist

$$254)\quad \begin{aligned} \frac{1}{1^{n|1}}(Z.d)^n U = & \frac{1}{1^{0|1}}\cdot C(n,0)\cdot\left(\frac{d}{dY}\right)^0 U & = & \frac{1}{1^{0|1}}\cdot Q^0\mathfrak{f}(n+1)\cdot\left(\frac{d}{dY}\right)^0 U \\ & + \frac{1}{1^{1|1}}\cdot C(n,1)\cdot\left(\frac{d}{dY}\right)^1 U & & + \frac{1}{1^{1|1}}\cdot Q^1\,\mathfrak{f}\,n\cdot\left(\frac{d}{dY}\right)^1 U \\ & + \frac{1}{1^{2|1}}\cdot C(n,2)\cdot\left(\frac{d}{dY}\right)^2 U & & + \frac{1}{1^{2|1}}\cdot Q^2\mathfrak{f}(n-1)\cdot\left(\frac{d}{dY}\right)^2 U \\ & + \ldots\ldots\ldots & & + \ldots\ldots\ldots \\ & + \frac{1}{1^{p|1}}\cdot C(n,p)\cdot\left(\frac{d}{dY}\right)^p U & & + \frac{1}{1^{p|1}}\cdot Q^p\mathfrak{f}(n-p+1)\cdot\left(\frac{d}{dY}\right)^p U \\ & + \ldots\ldots\ldots & & + \ldots\ldots\ldots \\ & + \frac{1}{1^{n|1}}\cdot C(n,n)\cdot\left(\frac{d}{dY}\right)^n U & & + \frac{1}{1^{n|1}}\cdot Q^n\,\mathfrak{f}\,1\cdot\left(\frac{d}{dY}\right)^n U \end{aligned}$$

$$Q = \left(\frac{(Z.d)^1\,Y}{1^{1|1}}, \frac{(Z.d)^2\,Y}{1^{2|1}}, \frac{(Z.d)^3\,Y}{1^{3|1}}, \ldots\ldots\right)$$

Wir machen diese Gleichung hier zuerst bekannt; sie gehört zu denjenigen Gleichungen, welche uns bei vielen Untersuchungen die wichtigsten Dienste geleistet haben.

Man überzeugt sich von ihrer Wahrheit durch den allgemeinen Uebergang von n zu n + 1; es ist nämlich

$$\frac{1}{1^{n+1|1}} \cdot (Z.d)^{n+1} U = \frac{1}{n+1} \cdot Z.d\left(\Sigma \frac{1}{1^{p|1}} \cdot C(n,p) \cdot \left(\frac{d}{dY}\right)^{p} U\right)$$

$$p = 0, 1, 2, \ldots, n$$

$$= \frac{1}{n+1} \cdot \Sigma \frac{1}{1^{p|1}} \left(Z.dC(n,p) \cdot \left(\frac{d}{dY}\right)^{p} U + C(n,p).Z.d\left(\frac{d}{dY}\right)^{p} U\right)$$

ferner

$$Z.d\left(\frac{d}{dY}\right)^{p} U = Z.dY \, . \left(\frac{d}{dY}\right)^{p+1} U$$

und nach 251

$$Z.d\,C(n,p) = (n+1) \, . \, C(n+1, p) - p \, . \, C(n, p-1) \, . \, Z.dY$$

folglich

$$\frac{1}{1^{n+1|1}} \cdot (Z.d)^{n+1} U = \frac{1}{n+1} \cdot \Sigma \frac{1}{1^{p|1}} \cdot \Bigg((n+1) \, . \, C(n+1,p) \cdot \left(\frac{d}{dY}\right)^{p} U$$

$$- p \, . \, C(n, p-1) \, . \, Z.dY \, . \left(\frac{d}{dY}\right)^{p} U$$

$$+ C(n,p) \, . \, Z.dY \cdot \left(\frac{d}{dY}\right)^{p+1} U\Bigg)$$

Setzt man nun p = 0, 1, 2, ..., n, so erhält man die Gleichung

$$\frac{1}{1^{n+1|1}} \cdot (Z.d)^{n+1} U = \Sigma \frac{1}{1^{p|1}} \cdot C(n+1, p) \cdot \left(\frac{d}{dY}\right)^{p} U$$

$$p = 0, 1, 2, 3, \ldots, n+1$$

welche mit der obigen 254 vollkommen übereinstimmt.

Dritte Abtheilung.

I. DIFFERENTIIREN DER FUNCTIONEN VON FUNCTIONEN SOWOHL OHNE ALS MIT ABWECHSELNDEM VERVIELFACHEN.

§. 72.

Das Differential von $f_2(f_1 x)$, von $f_3\big(f_2(f_1 x)\big)$, u. s. w. ist nach der früheren Untersuchung über die Trennung der Factoren bei den Unterschieden §. 31, nachdem die Zunahme der Grundgrösse = 0 gesetzt ist,

$$255)\qquad d f_2(f_1 x) = \frac{d f_2(f_1 x)}{d f_1 x} \cdot \frac{d f_1 x}{dx} \cdot d x$$

$$d f_3\big(f_2(f_1 x)\big) = \frac{d f_3\big(f_2(f_1 x)\big)}{d f_2(f_1 x)} \cdot \frac{d f_2(f_1 x)}{d f_1 x} \cdot \frac{d f_1 x}{dx} \cdot d x$$

u. s. w., und von $f_1 x \times f(\varphi y)$

$$256)\quad d\big(f_1 x \times f(\varphi y)\big) = f_1 x \times \frac{df(\varphi y)}{d\varphi y} \cdot \frac{d\varphi y}{dy} \cdot dy + f(\varphi y) \times \frac{df_1 x}{dx} \cdot d x$$

Die höheren Differentiale befolgen dieselben Gesetze, welche bei den Unterschieden §. 32 gefunden sind; ist nämlich

$$X = f(\varphi x)$$

oder, wenn $y = \varphi x$ gesetzt wird,

$$X = fy$$

so ist nach 79

$$257)\quad \frac{d^n fy}{dx^n} = \frac{d^n fy}{dy^n}(\varphi x)_{n,1} + \frac{d^{n-1} fy}{dy^{n-1}}(\varphi x)_{n,2} + \frac{d^{n-2} fy}{dy^{n-2}}(\varphi x)_{n,3} + \ldots + \frac{d^0 fy}{dy^0}(\varphi y)_{n,n+1}$$

und die zurücklaufende Bildungsweise dieser Vorzahlen nach N. 80

$$258)\quad \begin{aligned}
(\varphi x)_{n+1,1} &= \frac{d\varphi x}{dx} \cdot (\varphi x)_{n,1} \\
(\varphi x)_{n+1,2} &= \frac{d\varphi x}{dx} \cdot (\varphi x)_{n,2} + \frac{d(\varphi x)_{n,1}}{dx} \\
(\varphi x)_{n+1,3} &= \frac{d\varphi x}{dx} \cdot (\varphi x)_{n,3} + \frac{d(\varphi x)_{n,2}}{dx} \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
(\varphi x)_{n+1,q} &= \frac{d\varphi x}{dx} \cdot (\varphi x)_{n,q} + \frac{d(\varphi x)_{n,q-1}}{dx} \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
(\varphi x)_{n+1,n+2} &= \quad 0 \quad + \frac{d(\varphi x)_{n,n+1}}{dx}
\end{aligned}$$

Die unabhängige Bildungsweise dieser Vorzahlen ist nach N. 81

$$259)\quad (\varphi x)_{0,1} = 1,\ (\varphi x)_{1,2} = (\varphi x)_{2,3} = (\varphi x)_{3,4} = \ldots = (\varphi x)_{n,n+1} = 0$$

ferner nach 82

$$260)\quad (\varphi x)_{n,1} = \left(\frac{dy}{dx}\right)^n$$

und nach 83

261) $$(\varphi x)_{2,2} = \frac{d^1}{dx^1} \cdot \left(\frac{dy}{dx}\right)$$

$$(\varphi x)_{3,2} = \frac{d^0}{dx^0}\left(\frac{dy}{dx} \cdot \frac{d^1}{dx^1}\left(\frac{dy}{dx}\right)\right)$$

$$+ \frac{d^1}{dx^1}\left(\frac{dy}{dx} \cdot \frac{d^0}{dx^0}\left(\frac{dy}{dx}\right)\right)$$

$$(\varphi x)_{4,2} = \frac{d^0}{dx^0}\left(\frac{dy}{dx} \cdot \frac{d^0}{dx^0}\left(\frac{dy}{dx} \cdot \frac{d^1}{dx^1}\left(\frac{dy}{dx}\right)\right)\right)$$

$$+ \frac{d^0}{dx^0}\left(\frac{dy}{dx} \cdot \frac{d^1}{dx^1}\left(\frac{dy}{dx} \cdot \frac{d^0}{dx^0}\left(\frac{dy}{dx}\right)\right)\right)$$

$$+ \frac{d^1}{dx^1}\left(\frac{dy}{dx} \cdot \frac{d^0}{dx^0}\left(\frac{dy}{dx} \cdot \frac{d^0}{dx^0}\left(\frac{dy}{dx}\right)\right)\right)$$

$$(\varphi x)_{5,2} = \frac{d^0}{dx^0}\left(\frac{dy}{dx} \cdot \frac{d^0}{dx^0}\left(\frac{dy}{dx} \cdot \frac{d^0}{dx^0}\left(\frac{dy}{dx} \cdot \frac{d^1}{dx^1}\left(\frac{dy}{dx}\right)\right)\right)\right)$$

0	0	1	0
0	1	0	0
1	0	0	0

u. s. w. ferner nach 84

262) $$(\varphi x)_{3,3} = \frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{dy}{dx}\right)$$

$$(\varphi x)_{4,3} = \frac{d^0}{dx^0}\left(\frac{dy}{dx}\cdot\frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{dy}{dx}\right)\right)$$

$$+\frac{d^1}{dx^1}\left(\frac{dy}{dx}\cdot\frac{d^1}{dx^1}\left(\frac{dy}{dx}\right)\right)$$

$$+\frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{dy}{dx}\cdot\frac{d^0}{dx^0}\left(\frac{dy}{dx}\right)\right)$$

$$(\varphi x)_{5,3} = \frac{d^0}{dx^0}\left(\frac{dy}{dx}\cdot\frac{d^0}{dx^0}\left(\frac{dy}{dx}\cdot\frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{dy}{dx}\right)\right)\right)$$

$$+\frac{d^0}{dx^0}\left(\frac{dy}{dx}\cdot\frac{d^1}{dx^1}\left(\frac{dy}{dx}\cdot\frac{d^1}{dx^1}\left(\frac{dy}{dx}\right)\right)\right)$$

$$+\frac{d^0}{dx^0}\left(\frac{dy}{dx}\cdot\frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{dy}{dx}\cdot\frac{d^0}{dx^0}\left(\frac{dy}{dx}\right)\right)\right)$$

$$+\frac{d^1}{dx^1}\left(\frac{dy}{dx}\cdot\frac{d^0}{dx^0}\left(\frac{dy}{dx}\cdot\frac{d^1}{dx^1}\left(\frac{dy}{dx}\right)\right)\right)$$

$$+\frac{d^1}{dx^1}\left(\frac{dy}{dx}\cdot\frac{d^1}{dx^1}\left(\frac{dy}{dx}\cdot\frac{d^0}{dx^0}\left(\frac{dy}{dx}\right)\right)\right)$$

$$+\frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{dy}{dx}\cdot\frac{d^0}{dx^0}\left(\frac{dy}{dx}\cdot\frac{d^0}{dx^0}\left(\frac{dy}{dx}\right)\right)\right)$$

$$(\varphi x)_{6,3} = \frac{d^0}{dx^0}\left(\frac{dy}{dx}\cdot\frac{d^0}{dx^0}\left(\frac{dy}{dx}\cdot\frac{d^0}{dx^0}\left(\frac{dy}{dx}\cdot\frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{dy}{dx}\right)\right)\right)\right)$$

0	0	1	1
0	0	2	0
0	1	0	1
0	1	1	0
0	2	0	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	0
2	0	0	0

und nach 85

263) $$(\varphi x)_{4,4} = \frac{d^3}{dx^3}\left(\frac{dy}{dx}\right).$$

$$\begin{aligned}(\varphi x)_{5,4} &= \frac{d^0}{dx^0}\left(\frac{dy}{dx}\cdot\frac{d^3}{dx^3}\left(\frac{dy}{dx}\right)\right)\\ &+ \frac{d^1}{dx^1}\left(\frac{dy}{dx}\cdot\frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{dy}{dx}\right)\right)\\ &+ \frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{dy}{dx}\cdot\frac{d^1}{dx^1}\left(\frac{dy}{dx}\right)\right)\\ &+ \frac{d^3}{dx^3}\left(\frac{dy}{dx}\cdot\frac{d^0}{dx^0}\left(\frac{dy}{dx}\right)\right)\end{aligned}$$

$$(\varphi x)_{6,4} = \frac{d^0}{dx^0}\left(\frac{dy}{dx}\cdot\frac{d^0}{dx^0}\left(\frac{dy}{dx}\cdot\frac{d^3}{dx^3}\left(\frac{dy}{dx}\right)\right)\right)$$

0	1	2
0	2	1
0	3	0
1	0	2
1	1	1
1	2	0
2	0	1
2	1	0
3	0	0

u. s. w.

Werden überhaupt alle Zerfällungen der Zahl n in m Elemente auf die Weise, wie eben gezeigt ist, durch den Buchstaben $\mathfrak{L}$ vorgestellt, und zwar durch

$$\mathfrak{L}\left(\frac{d^0}{dx^0}\left(\frac{dy}{dx}\cdot\frac{d^0}{dx^0}\left(\frac{dy}{dx}\cdot\frac{d^0}{dx^0}\left(\frac{dy}{dx}\cdots\cdots\frac{d^n}{dx^n}\left(\frac{dy}{dx}\right)_1\cdots\right)_{m-2}\right)_{m-1}\right)_m\right)$$

so ist

$$264)\ (\phi x)_{n,q+1}=\mathfrak{L}\left(\frac{d^0}{dx^0}\left(\frac{dy}{dx}\cdot\frac{d^0}{dx^0}\left(\frac{dy}{dx}\cdots\frac{d^0}{dx^0}\left(\frac{dy}{dx}\cdot\frac{d^q}{dx^q}\left(\frac{dy}{dx}\right)_1\right)_2\cdots\right)_{n-q-1}\right)_{n-q}\right)$$

und

$$265)\ \frac{d^n fy}{dx^n} = \frac{d^n fy}{dy^n} \times \mathfrak{L}\left(\frac{d^0}{dx^0}\left({}_{n}\frac{dy}{dx}\cdot\frac{d^0}{dx^0}\left({}_{n-1}\frac{dy}{dx}\cdots\frac{d^0}{dx^0}\left({}_{2}\frac{dy}{dx}\cdot\frac{d^0}{dx^0}\left({}_{1}\frac{dy}{dx}\right)_{1}\right)_{2}\cdots\right)_{n-1}\right)_{n}\right)$$

$$+\frac{d^{n-1} fy}{dy^{n-1}} \times \mathfrak{L}\left(\frac{d^0}{dx^0}\left({}_{n-1}\frac{dy}{dx}\cdot\frac{d^0}{dx^0}\left({}_{n-2}\frac{dy}{dx}\cdots\frac{d^0}{dx^0}\left({}_{2}\frac{dy}{dx}\cdot\frac{d^1}{dx^1}\left({}_{1}\frac{dy}{dx}\right)_{1}\right)_{2}\cdots\right)_{n-2}\right)_{n-1}\right).$$

$$+\frac{d^{n-2} fy}{dy^{n-2}} \times \mathfrak{L}\left(\frac{d^0}{dx^0}\left({}_{n-2}\frac{dy}{dx}\cdot\frac{d^0}{dx^0}\left({}_{n-3}\frac{dy}{dx}\cdots\frac{d^0}{dx^0}\left({}_{2}\frac{dy}{dx}\cdot\frac{d^2}{dx^2}\left({}_{1}\frac{dy}{dx}\right)_{1}\right)_{2}\cdots\right)_{n-3}\right)_{n-2}\right)$$

$$+ \;.$$

$$+\frac{d^{n-q} fy}{dy^{n-q}} \times \mathfrak{L}\left(\frac{d^0}{dx^0}\left({}_{n-q}\frac{dy}{dx}\cdot\frac{d^0}{dx^0}\left({}_{n-q-1}\frac{dy}{dx}\cdots\frac{d^0}{dx^0}\left({}_{2}\frac{dy}{dx}\cdot\frac{d^q}{dx^q}\left({}_{1}\frac{dy}{dx}\right)_{1}\right)_{2}\cdots\right)_{n-q-1}\right)_{n-q}\right)$$

$$+ \;.$$

$$+\frac{d^2 fy}{dy^2} \times \mathfrak{L}\left(\frac{d^0}{dx^0}\left({}_{2}\frac{dy}{dx}\cdot\frac{d^{n-2}}{dx^{n-2}}\left({}_{1}\frac{dy}{dx}\right)_{1}\right)_{2}\right)$$

$$+\frac{d^1 fy}{dy^1} \times \mathfrak{L}\left(\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\left({}_{1}\frac{dy}{dx}\right)_{1}\right)$$

Diese unabhängige Bildungsweise erscheint hier zuerst, und steht wenigstens keiner andern an wissenschaftlichem Interesse nach.

Diejenige unabhängige Bildungsweise, welche schon allgemein bekannt ist, ist folgende

$$266)\quad \frac{d^n\, fy}{1^{n|1} \cdot (dx)^n} = \begin{aligned} & C(n,0) \cdot \frac{d^0\, fy}{1^{0|1}\, dy^0} \\ & + C(n,1) \cdot \frac{d^1\, fy}{1^{1|1}\, dy^1} \\ & + C(n,2) \cdot \frac{d^2\, fy}{1^{2|1}\, dy^2} \\ & + \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \\ & + C(n,n) \cdot \frac{d^n\, fy}{1^{n|1}\, dy^n} \end{aligned} = \begin{aligned} & Q^0\, \mathfrak{f}(n+1) \cdot \frac{d^0\, fy}{1^{0|1}\, dy^0} \\ & + Q^1\, \mathfrak{f}n \cdot \frac{d^1\, fy}{1^{1|1}\, dy^1} \\ & + Q^2\, \mathfrak{f}(n-1) \cdot \frac{d^2\, fy}{1^{2|1}\, dy^2} \\ & + \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \\ & + Q^n\, \mathfrak{f}1 \cdot \frac{d^n\, fy}{1^{n|1}\, dy^n} \end{aligned}$$

wo

$$Q = \left(\frac{d^1 y}{1^{1|1}\, dx^1}, \frac{d^2 y}{1^{2|1}\, dx^2}, \frac{d^3 y}{1^{3|1}\, dx^3}, \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \right)$$

Für diese Wahrheit, welche immer vermittelst der Reihen bewiesen wurde, können wir hier zwei neue Wege angeben; wir können zu ihr gelangen, wenn wir von der zurücklaufenden Bildungsweise 257 ausgehen und dabei unsere Gleichung 251 oder 253 benutzen; oder wir können, was am schnellsten zum Ziele führt, von unserer allgemeinsten Gleichung 254 Anwendung machen, denn diese Gleichung 266 ist eigentlich nur ein sehr specieller Fall von unserer Gleichung 254, aus welcher sie entsteht, wenn das abwechselnde Vervielfachen aufgehoben, oder wenn

$$Z = 1$$

und wenn U als Function einer Grösse y und diese als Function einer Grundgrösse x angenommen wird.

Ist die Natur der Function fy gegeben, so kann nach vorstehenden Gleichungen die Bildungsweise für den besondern Fall näher bestimmt werden. Ist z. B.

erstens

$$fy = y^m$$

so ist

$$\frac{d^q(y^m)}{1^{q|1}dy^q} = \frac{m^{q|-1}}{1^{q|1}} \cdot y^{m-q}$$

und

$$267)\quad \frac{d^n(y^m)}{1^{n|1}dx^n} = \frac{m^{0|-1}}{1^{0|1}} \cdot y^m \cdot C(n,0) + \frac{m^{1|-1}}{1^{1|1}} \cdot y^{m-1} \cdot C(n,1)$$

$$+ \frac{m^{2|-1}}{1^{2|1}} \cdot y^{m-2} \cdot C(n,2) + \ldots + \frac{m^{n|-1}}{1^{n|1}} \cdot y^{m-n} \cdot C(n,n)$$

oder

$$268)\quad = \frac{m^{0|-1}}{1^{0|1}} \cdot y^m \cdot U^0 \mathfrak{f}(n+1) + \frac{m^{1|-1}}{1^{1|1}} \cdot y^{m-1} \cdot U^1 \mathfrak{f}n$$

$$+ \frac{m^{2|-1}}{1^{2|1}} \cdot y^{m-2} \cdot U^2 \mathfrak{f}(n-1) + \ldots + \frac{m^{n|-1}}{1^{n|1}} \cdot y^{m-n} \cdot U^n \mathfrak{f}1$$

wo

$$U = \left(\frac{d^1y}{1^{1|1}dx^1}, \frac{d^2y}{1^{2|1}dx^2}, \frac{d^3y}{1^{3|1}dx^3}, \ldots\ldots\ldots\right)$$

Ist zweitens

$$fy = \lg(a+by)$$

so ist

$$\frac{d^q \lg(a+by)}{1^{q|1}dy^q} = (-)^{q-1}\ 1^{q-1|1} \cdot b^q \cdot (a+by)^{-q}$$

und

$$269)\quad \frac{d^n \lg(a+by)}{1^{n|1}dx^n} = \frac{1}{1}\cdot\left(\frac{b}{a+by}\right)^1 \cdot U^1 \mathfrak{f}n - \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{b}{a+by}\right)^2 \cdot U^2 \mathfrak{f}(n-1)$$

$$+ \frac{1}{3}\cdot\left(\frac{b}{a+by}\right)^3 \cdot U^3 \mathfrak{f}(n-2) - \ldots + \ldots (-)^{n-1}\frac{1}{n} \cdot \left(\frac{b}{a+by}\right)^n \cdot U^n \mathfrak{f}1$$

wo

$$U = \left(\frac{d^1y}{1^{1|1}dx^1}, \frac{d^2y}{1^{2|1}dx^2}, \ldots\ldots\right)$$

Ist drittens

$$y = a + a_1 x^1 + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots\ldots$$

so ist für den besondern Fall, wenn nach dem Differentiiren $x = 0$ gesetzt werden soll,

$$\frac{d^1 y}{1^{1|1} dx^1} = a_1 \;,\; \frac{d^2 y}{1^{2|1} dx^2} = a_2 \;,\; \frac{d^3 y}{1^{3|1} dx^3} = a_3 \;,\; \ldots$$

und

$$270) \quad \left(\frac{d^n fy}{1^{n|1} dx^n}\right)_{x=0} = \frac{d^0 fy}{1^{0|1} dy^0} \cdot C(n,0) + \frac{d^1 fy}{1^{1|1} dy^1} \cdot C(n,1)$$

$$+ \frac{d^2 fy}{1^{2|1} dy^2} \cdot C(n,2) + \ldots + \frac{d^n fy}{1^{n|1} dy^n} \cdot C(n,n)$$

$$(a_1, \; a_2, \; a_3, \; \ldots\ldots\ldots\ldots)$$

§. 73.

Die Gleichung 266 ist nur ein sehr specieller Fall von unserer allgemeinsten Gleichung 254, in welcher Z, Y, U nach Willkühr angenommen werden können. Wir wollen hier zwei allgemeine Fälle erwähnen, und zwar, wenn U eine Function von Y, und dann, wenn Y eine Function von U ist; die Gleichungen hiefür sind

$$271) \quad \frac{1}{1^{n|1}} \cdot (Z.d)^n fy = \frac{1}{1^{0|1}} \cdot C(n,0) \cdot \left(\frac{d}{dy}\right)^0 fy$$

$$+ \frac{1}{1^{1|1}} \cdot C(n,1) \cdot \left(\frac{d}{dy}\right)^1 fy$$

$$+ \frac{1}{1^{2|1}} \cdot C(n,2) \cdot \left(\frac{d}{dy}\right)^2 fy$$

$$+ \ldots\ldots\ldots$$

$$+ \frac{1}{1^{n|1}} \cdot C(n,n) \cdot \left(\frac{d}{dy}\right)^n fy$$

$$\left(\frac{(Z.d)^1 y}{1^{1|1}}, \; \frac{(Z.d)^2 y}{1^{2|1}}, \; \ldots\ldots\right)$$

und

272)
$$\begin{aligned}\frac{1}{1^{n|1}} \cdot (Z.d)^n\, y = {} & \frac{1}{1^{0|1}} \cdot C(n,0) \cdot \left(\frac{d}{d fy}\right)^0 y \\ & + \frac{1}{1^{1|1}} \cdot C(n,1) \cdot \left(\frac{d}{d fy}\right)^1 y \\ & + \frac{1}{1^{2|1}} \cdot C(n,2) \cdot \left(\frac{d}{d fy}\right)^2 y \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + \frac{1}{1^{n|1}} \cdot C(n,n) \cdot \left(\frac{d}{d fy}\right)^n y \\ & \left(\frac{(Z.d)^1 fy}{1^{1|1}}, \frac{(Z.d)^2 fy}{1^{2|1}}, \ldots\ldots\right)\end{aligned}$$

wo Z und y Functionen mehrerer verschiedener veränderlicher Grössen sind.

Beide Gleichungen sind in einer und derselben 254 als einzelne Fälle enthalten; die eine löset die umgekehrte Aufgabe der andern.

Sind U und Y Functionen einer und derselben Grösse, so ist

273)
$$\begin{aligned}\frac{1}{1^{n|1}} \cdot (Z.d)^n\, fy = {} & \frac{1}{1^{0|1}} \cdot C(n,0) \cdot \left(\frac{d}{d\varphi y}\right)^0 fy \\ & + \frac{1}{1^{1|1}} \cdot C(n,1) \cdot \left(\frac{d}{d\varphi y}\right)^1 fy \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + \frac{1}{1^{n|1}} \cdot C(n,n) \cdot \left(\frac{d}{d\varphi y}\right)^n fy \\ & \left(\frac{(Z.d)^1 \varphi y}{1^{1|1}}, \frac{(Z.d)^2 \varphi y}{1^{2|1}}, \ldots\ldots\right)\end{aligned}$$

wo φy und fy willkührliche Functionen von y sind.

Heben wir das mit Z abwechselnde Vervielfachen auf, setzen desshalb $Z = 1$, und

$$fy = y \text{ und } \varphi y = \mathrm{lg}:\, y$$

so wird

$$274)\quad \frac{d^n y}{1^{n|1}} = y \cdot \left(\frac{1}{1^{0|1}} \cdot C(n, 0) + \frac{1}{1^{1|1}} \cdot C(n, 1) + \ldots + \frac{1}{1^{n|1}} \cdot C(n, n) \right)$$

$$\left(\frac{d^1(\lg : y)}{1^{1|1}},\ \frac{d^2(\lg : y)}{1^{2|1}},\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ . \right)$$

Diesen ganz speciellen Fall findet zuerst **Rothe** (im Archiv der Math. 1r Bd. Seite 432—435) aber auf einem ganz verschiedenen Wege.

§. 74.

Wir legen uns eine zusammengesetztere Function in folgenden Zeichen vor

$$X = f(x, \varphi x) = f(x, y)$$

wo in der Function f ausser dem y, welches eine Function von x ist, noch die veränderliche Grundgrösse x vorkommt.

Es ist nach dem Früheren §. 35

$$275)\quad \frac{df(x, y)}{dx} = \frac{d_x f(x, y)}{dx} + \frac{dy}{dx} \cdot \frac{d_y f(x, y)}{dy}$$

Nach dieser Vorschrift können die spätern Differentiale mit Leichtigkeit gebildet werden; sie sind folgende:

$$276)\quad \frac{d^2 f(x, y)}{dx^2} = \frac{d_x^2}{dx^2} \left(\frac{d_y^0 f(x, y)}{dy^0} \right)$$

$$+ \frac{d_x^0}{dx^0} \left(\frac{dy}{dx} \cdot \frac{d_x^1}{dx^1} \left(\frac{d_y^1 f(x, y)}{dy^1} \right) \right)$$

$$+ \frac{d_x^1}{dx^1} \left(\frac{dy}{dx} \cdot \frac{d_x^0}{dx^0} \left(\frac{d_y^1 f(x, y)}{dy^1} \right) \right)$$

$$+ \frac{d_x^0}{dx^0} \left(\frac{dy}{dx} \cdot \frac{d_x^0}{dx^0} \left(\frac{dy}{dx} \cdot \frac{d_x^0}{dx^0} \left(\frac{d_y^2 f(x, y)}{dy^2} \right) \right) \right)$$

ferner ist

$$277)\quad \frac{d^3 f(x,y)}{dx^3} = \frac{d^3_x}{dx^3}\left(\frac{d^0_y f(x,y)}{dy^0}\right)$$

$$+ \frac{d^0_x}{dx^0}\left(\frac{dy}{dx}\cdot\frac{d^2_x}{dx^2}\left(\frac{d^1_y f(x,y)}{dy^1}\right)\right)$$

$$+ \frac{d^1_x}{dx^1}\left(\frac{dy}{dx}\cdot\frac{d^1_x}{dx^1}\left(\frac{d^1_y f(x,y)}{dy^1}\right)\right)$$

$$+ \frac{d^2_x}{dx^2}\left(\frac{dy}{dx}\cdot\frac{d^0_x}{dx^0}\left(\frac{d^1_y f(x,y)}{dy^1}\right)\right)$$

$$+ \frac{d^0_x}{dx^0}\left(\frac{dy}{dx}\cdot\frac{d^0_x}{dx^0}\left(\frac{dy}{dx}\cdot\frac{d^1_x}{dx^1}\left(\frac{d^2_y f(x,y)}{dy^2}\right)\right)\right)$$

$$+ \frac{d^0_x}{dx^0}\left(\frac{dy}{dx}\cdot\frac{d^1_x}{dx^1}\left(\frac{dy}{dx}\cdot\frac{d^0_x}{dx^0}\left(\frac{d^2_y f(x,y)}{dy^2}\right)\right)\right)$$

$$+ \frac{d^1_x}{dx^1}\left(\frac{dy}{dx}\cdot\frac{d^0_x}{dx^0}\left(\frac{dy}{dx}\cdot\frac{d^0_x}{dx^0}\left(\frac{d^2_y f(x,y)}{dy^2}\right)\right)\right)$$

$$+ \frac{d^0_x}{dx^0}\left(\frac{dy}{dx}\cdot\frac{d^0_x}{dx^0}\left(\frac{dy}{dx}\cdot\frac{d^0_x}{dx^0}\left(\frac{dy}{dx}\cdot\frac{d^0_x}{dx^0}\left(\frac{d^3_y f(x,y)}{dy^3}\right)\right)\right)\right)$$

und allgemein, wenn die Stellen, worauf sich das Zerfällungszeichen $\mathfrak{L}$ beziehet, mit einem Puncte bezeichnet werden:

$$278)\quad \frac{d^{n}f(x,y)}{dx^{n}} = \mathfrak{L}\left(\frac{d_x^{n\cdot}}{dx^{n\cdot}}\,{}_{0}\!\left(\frac{d_y^{0}f(x,y)}{dy^{0}}\right)_{0}\right)$$

$$+\,\mathfrak{L}\left(\frac{d_x^{n-1\cdot}}{dx^{n-1\cdot}}\,{}_{1}\!\left(\frac{dy}{dx}\cdot\frac{d_x^{0\cdot}}{dx^{0\cdot}}\,{}_{0}\!\left(\frac{d_y^{1}f(x,y)}{dy^{1}}\right)_{0}\right)_{1}\right)$$

$$+\,\mathfrak{L}\left(\frac{d_x^{n-2\cdot}}{dx^{n-2\cdot}}\,{}_{2}\!\left(\frac{dy}{dx}\cdot\frac{d_x^{0\cdot}}{dx^{0\cdot}}\,{}_{1}\!\left(\frac{dy}{dx}\cdot\frac{d_x^{0\cdot}}{dx^{0\cdot}}\,{}_{0}\!\left(\frac{d_y^{2}f(x,y)}{dy^{2}}\right)_{0}\right)_{1}\right)_{2}\right)$$

$$+\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.$$

$$+\,\mathfrak{L}\left(\frac{d_x^{n-q\cdot}}{dx^{n-q\cdot}}\,{}_{q}\!\left(\frac{dy}{dx}\cdot\frac{d_x^{0\cdot}}{dx^{0\cdot}}\,{}_{q-1}\!\left(\frac{dy}{dx}\cdots\cdots\frac{d_x^{0\cdot}}{dx^{0\cdot}}\,{}_{0}\!\left(\frac{d_y^{q}f(x,y)}{dy^{q}}\right)_{0}\cdots\right)_{q-1}\right)_{q}\right)$$

$$+\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.$$

$$+\,\mathfrak{L}\left(\frac{d_x^{0\cdot}}{dx^{0\cdot}}\,{}_{n}\!\left(\frac{dy}{dx}\cdot\frac{d_x^{0\cdot}}{dx^{0\cdot}}\,{}_{n-1}\!\left(\frac{dy}{dx}\cdots\cdots\frac{d_x^{0\cdot}}{dx^{0\cdot}}\,{}_{0}\!\left(\frac{d_y^{n}f(x,y)}{dy^{n}}\right)_{0}\cdots\right)_{n-1}\right)_{n}\right)$$

und wenn die Geschäfte, welche hier angezeigt sind, vorgenommen werden:

$$279)\quad \frac{d^{2}f(x,y)}{1^{2|1}dx^{2}} = C(0,0)\,\frac{d_x^{2}f(x,y)}{1^{2|1}dx^{2}} + C(1,0)\,\frac{d_x^{1}f(x,y)}{1^{1|1}dx^{1}} + C(2,0)\,\frac{d_x^{0}f(x,y)}{1^{0|1}dx^{0}}$$

$$+\,C(1,1)\,\frac{d_x^{1}}{dx^{1}}\left(\frac{d_y^{1}f(x,y)}{1^{1|1}dy^{1}}\right) + C(2,1)\,\frac{d_x^{0}}{dx^{0}}\left(\frac{d_y^{1}f(x,y)}{1^{1|1}dy^{1}}\right)$$

$$+\,C(2,2)\,\frac{d_x^{0}}{dx^{0}}\left(\frac{d_y^{2}f(x,y)}{1^{2|1}dy^{2}}\right)$$

$$\left(\frac{d^{1}y}{1^{1|1}dx^{1}},\ \frac{d^{2}y}{1^{2|1}dx^{2}},\ \frac{d^{3}y}{1^{3|1}dx^{3}},\ .\;.\;.\;.\;.\right)$$

ferner ist

$$280)\ \frac{d^3\,f(x,y)}{1^{3|1}\,dx^3} =$$

$$C(0,0)\,\frac{d_x^3 f(x,y)}{1^{3|1}dx^3} + C(1,0)\,\frac{d_x^2 f(x,y)}{1^{2|1}dx^2} + C(2,0)\,\frac{d_x^1 f(x,y)}{1^{1|1}dx^1} + C(3,0)\,\frac{d_x^0 f(x,y)}{1^{0|1}dx^0}$$

$$+ C(1,1)\,\frac{d_x^2}{1^{2|1}dx^2}\left(\frac{d_y^1 f(x,y)}{1^{1|1}dy^1}\right) + C(2,1)\,\frac{d_x^1}{1^{1|1}dx^1}\left(\frac{d_y^1 f(x,y)}{1^{1|1}dy^1}\right) + C(3,1)\,\frac{d_x^0}{1^{0|1}dx^0}\left(\frac{d_y^1 f(x,y)}{1^{1|1}dy^1}\right)$$

$$+ C(2,2)\,\frac{d_x^1}{1^{1|1}dx^1}\left(\frac{d_y^2 f(x,y)}{1^{2|1}dy^2}\right) + C(3,2)\,\frac{d_x^0}{1^{0|1}dx^0}\left(\frac{d_y^2 f(x,y)}{1^{2|1}dy^2}\right)$$

$$+ C(3,3)\,\frac{d_x^0}{1^{0|1}dx^0}\left(\frac{d_y^3 f(x,y)}{1^{3|1}dy^3}\right)$$

$$\left(\frac{d^1y}{1^{1|1}dx^1}, \frac{d^2y}{1^{2|1}dx^2}, \frac{d^3y}{1^{3|1}dx^3}, \ldots\ldots\right)$$

nach welchen sich leicht die allgemeine Gleichung für $d^n f(x, y)$ bilden lässt.

§. 75.

Es sei

$$Z_1 = fZ$$
$$Z_2 = f_1 Z_1$$
$$Z_3 = f_2 Z_2$$

Das erste Differential ist schon in §. 71 angegeben, und ist

$$dZ_3 = \frac{dZ_3}{dZ_2} \cdot \frac{dZ_2}{dZ_1} \cdot \frac{dZ_1}{dZ} \cdot dZ \text{ oder } \frac{dZ_3}{dZ} = \frac{dZ_3}{dZ_2} \cdot \frac{dZ_2}{dZ_1} \cdot \frac{dZ_1}{dZ}$$

Gehen wir zu den höhern Differentialen über, so finden wir, dass

$$\frac{d^2Z_2}{dZ^2} = \frac{dZ_3}{dZ_2} \cdot \frac{dZ_2}{dZ_1} \cdot \frac{d\left(\frac{dZ_1}{dZ}\right)}{dZ}$$

$$+ \frac{dZ_3}{dZ_2} \cdot \frac{d\left(\frac{dZ_2}{dZ_1}\right)}{dZ} \cdot \frac{dZ_1}{dZ}$$

$$+ \frac{d\left(\frac{dZ_3}{dZ_2}\right)}{dZ} \cdot \frac{dZ_2}{dZ_1} \cdot \frac{dZ_1}{dZ}$$

Es ist aber

$$\frac{d\left(\frac{dZ_1}{dZ}\right)}{dZ} = \frac{d^2Z_1}{dZ^2}$$

$$\frac{d\left(\frac{dZ_2}{dZ_1}\right)}{dZ} = \frac{d^2Z_2}{dZ_1^2} \cdot \frac{dZ_1}{dZ}$$

$$\frac{d\left(\frac{dZ_3}{dZ_2}\right)}{dZ} = \frac{d^2Z_3}{dZ_2^2} \cdot \frac{dZ_2}{dZ_1} \cdot \frac{dZ_1}{dZ}$$

folglich

281)
$$\frac{d^2Z_3}{dZ^2} = \frac{dZ_3}{dZ_2} \cdot \frac{dZ_2}{dZ_1} \cdot \frac{d^2Z_1}{dZ^2}$$

$$+ \frac{dZ_3}{dZ_2} \cdot \frac{d^2Z_2}{dZ_1^2} \cdot \left(\frac{dZ_1}{dZ}\right)^2$$

$$+ \frac{d^2Z_3}{dZ_2^2} \cdot \left(\frac{dZ_2}{dZ_1}\right)^2 \cdot \left(\frac{dZ_1}{dZ}\right)^2$$

und allgemein ist

$$282)\ \frac{d^nZ_3}{1^{n|1}.dZ^n} = \frac{d^0Z_3}{1^{0|1}.dZ_2^0}.C(n,0)+\frac{d^1Z_3}{1^{1|1}.dZ_2^1}.C(n,1)+\frac{d^2Z_3}{1^{2|1}.dZ_2^2}.C(n,2)+\ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots+\frac{d^nZ_3}{1^{n|1}.dZ_2^n}.C(n,n)$$

$$\left(\frac{d^1Z_2}{1^{1|1}.dZ^1},\ \frac{d^2Z_2}{1^{2|1}.dZ^2},\ \frac{d^3Z_2}{1^{3|1}.dZ^3},\ \ldots\ldots\ldots\right)$$

wo

$$\frac{d^1Z_2}{1^{1|1}.dZ^1} = \frac{d^1Z_2}{1^{1|1}.dZ_1}.C(1,1)$$

$$\frac{d^2Z_2}{1^{2|1}.dZ^2} = \frac{d^1Z_2}{1^{1|1}.dZ_1^1}.C(2,1)+\frac{d^2Z_2}{1^{2|1}.dZ_1^2}.C(2,2)$$

$$\frac{d^3Z_2}{1^{3|1}.dZ^3} = \frac{d^1Z_2}{1^{1|1}.dZ_1^1}.C(3,1)+\frac{d^2Z_2}{1^{2|1}.dZ_1^2}.C(3,2)+\frac{d^3Z_2}{1^{3|1}.dZ_1^3}.C(3,3)$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\left(\frac{d^1Z_1}{1^{1|1}.dZ^1},\ \frac{d^2Z_1}{1^{2|1}.dZ^2},\ \frac{d^3Z_1}{1^{3|1}.dZ^3},\ \ldots\ldots\ldots\right)$$

§. 76.

Es sei

$$y_1 = \varphi_1(x_1),\ y_2 = \varphi_2(x_2),\ y_3 = \varphi_3(x_3),\ \ldots\ldots$$

Man sucht die verschiedenen Differentiale von

$$X = f(y_1, y_2, y_3, \ldots, y_m)$$

Es ist

$$\frac{d^hX}{1^{h|1}dx_1^h} = \frac{d^0X}{1^{0|1}dy_1^0}C(h,0)_1+\frac{d^1X}{1^{1|1}dy_1^1}C(h,1)_1+\frac{d^2X}{1^{2|1}dy_1^2}C(h,2)_1+\ldots+\frac{d^hX}{1^{h|1}dy_1^h}C(h,h)_1$$

$$\left(\frac{d^1y_1}{1^{1|1}dx_1},\ \frac{d^2y_1}{1^{2|1}dx_1^2},\ \frac{d^3y_1}{1^{3|1}dx_1^3},\ \ldots\ldots\ldots\right)$$

oder

$$= \Sigma_q\left(C(h,q)_1.\ \frac{d^qX}{1^{q|1}dy_1^q}\right)$$

ferner ist

$$\frac{d^{k+h}X}{1^{k|1}1^{h|1}\,dx_2^k dx_1^h} = \frac{d^k}{1^{k|1}\,dx_2^k}\left(\Sigma_q C(h,q)_1 \cdot \frac{d^q X}{1^{q|1}dy_1^q}\right) = \Sigma_q\, C(h,q)_1 \frac{d^k}{1^{k|1}\,dx_2^k}\left(\frac{d^q X}{1^{q|1}dy_1^q}\right)$$

$$= \Sigma_q \left(C(h,q)_1\, \Sigma_p \left(C(k,p)_2 \frac{d^{q+p}X}{1^{q|1}.1^{p|1}.dy_1^q.dy_2^p}\right)\right)$$

wo $C(k,p)_2$ aus $\frac{d^1 y_2}{1^{1|1}.dx_2^1}$, $\frac{d^2 y_2}{1^{2|1}.dx_2^2}$, $\frac{d^3 y_2}{1^{3|1}.dx_2^3}$, . . . gebildet wird,

oder es ist

$$\frac{d^{k+h}X}{1^{k|1}.1^{h|1}.dx_2^k.dx_1^h} = \Sigma_{q,p}\left(C(h,q)_1 \cdot C(k,p)_2 \cdot \frac{d^{q+p}X}{1^{q|1}.1^{p|1}.dy_1^q.dy_2^p}\right)$$

und allgemein ist

283) $$\frac{d^{n1+n2+n3+\ldots+n(m)} f(y_1, y_2, y_3, \ldots, y_m)}{1^{n1|1}\,1^{n2|1}\,1^{n3|1} \ldots 1^{n(m)|1} . dx_1^{n1}\, dx_2^{n2}\, dx_3^{n3} \ldots dx_m^{n(m)}} =$$

$$= \Sigma_{p1,p2,\ldots,pm} \frac{d^{p1} d^{p2} \ldots d^{p(m)} f(y_1, y_2, \ldots, y_m)}{1^{p1|1} 1^{p2|1} \ldots 1^{p(m)|1}\, dy_1^{p1}\, dy_2^{p2} \ldots dy_m^{p(m)}}\; C(n1,p1)_1\, C(n2,p2)_2 \ldots$$

$$\ldots C(n(m), p(m))_m$$

wo dem

p1 alle Werthe von 0, 1, ... bis n1
p2 . . . . 0, 1, ... n2
. . . .
p(m) . . . . 0, 1, ... n(m)

gegeben und

$C(n1, p1)_1$ aus $\frac{d^1 y_1}{1^{1|1}.dx_1}$, $\frac{d^2 y_1}{1^{2|1}.dx_1^2}$, ...

$C(n2, p2)_2$ aus $\frac{d^1 y_2}{1^{1|1}.dx_2}$, $\frac{d^2 y_2}{1^{2|1}.dx_2^2}$, ...

. . . .

$C(n(m), p(m))_m$ aus $\frac{d^1 y_m}{1^{1|1}.dx_m^1}$, $\frac{d^2 y_m^2}{1^{2|1}.dx_m^2}$, ...

gebildet werden müssen.

Diese Bildungsweise kann man auch auf folgende Art angeben

$$284)\ \frac{d^{n1+n2+\ldots+n(m)}f(y_1,y_2,\ldots,y_m)}{1^{n1|1}1^{n2|1}\ldots1^{n(m)|1}\,.\,dx_1^{n1}\,dx_2^{n2}\ldots dx_m^{n(m)}} =$$

$$= \left(C(n1,0)_1\,.\,\frac{d^0}{1^{0|1}\,dy_1^0} + C(n1,1)_1\,.\,\frac{d^1}{1^{1|1}\,dy_1^1} + \ldots. + C(n1,n1)_1\,.\,\frac{d^{n1}}{1^{n1|1}\,dy_1^{n1}}\right)$$

$$\times \left(C(n2,0)_2\,.\,\frac{d^0}{1^{0|1}\,dy_2^0} + C(n2,1)_2\,.\,\frac{d^1}{1^{1|1}\,dy_2^1} + \ldots. + C(n2,n2)_2\,.\,\frac{d^{n2}}{1^{n2|1}\,dy_2^{n2}}\right)$$

$$\times\ .$$

$$\times \left(C(n(m),0)_m\,.\,\frac{d^0}{1^{0|1}.dy_m^0} + C(n(m),1)_m\,.\,\frac{d^1}{1^{1|1}.dy_m^1} + \ldots.\right.$$

$$\left.\ldots. + C(n(m),n(m))_m\,.\,\frac{d^{n(m)}}{1^{n(m)|1}.dy_m^{n(m)}}\right).\,f(y_1,y_2,\ldots,y_m)$$

Soll nun von der Function $f(y_1, y_2, .\,., y_m)$ das *n*te Differential überhaupt genommen werden, ohne dass es bestimmt wird, wie oft in Hinsicht x_1 oder $x_2, \ldots$, so lässt sich seine Bildungsweise jetzt leicht angeben, nämlich

$$285)\ \frac{d^n f(y_1,y_2,\ldots,y_m)}{1^{n|1}}$$

$$= \Sigma_{n1,n2,\ldots,n(m)}\,\frac{d^{n1}d^{n2}\ldots.d^{n(m)}f(y_1,y_2,\ldots,y_m)}{1^{n1|1}1^{n2|1}\ldots1^{n(m)|1}\,dx_1^{n1}\,dx_2^{n2}\ldots.dx_m^{n(m)}}\,dx_1^{n1}\ dx_2^{n2}\ \ldots.\ dx_m^{n(m)}$$

wo $n1, n2, \ldots., n(m)$ alle möglichen Werthe von $0, 1, \ldots$ bis n erhalten, und zwar so, dass

$$n1 + n2 + .\ .\ . + n(m) = n$$

oder auch

$$286)\ \frac{d^n f(y_1,y_2,\ldots,y_m)}{1^{n|1}} =$$

$$\Sigma_n\,\Sigma_{p1}\frac{d^{p1+p2+\ldots+p(m)}f(y_1,\ldots,y_m)}{1^{p1|1}\,1^{p2|1}\ldots1^{p(m)|1}\,dy_1^{p1}\,dy_2^{p2}\ldots dy_m^{p(m)}}C(n1,p1)_1\,C(n2,p2)_2\ldots\ldots C(n(m),p(m))_m\,.$$

$$dx_1^{n1}\ dx_2^{n2}\ \ldots.\ dx_m^{n(m)}$$

wo

$$n1 + n2 + \ldots + n(m) = n$$

und

$p1, p2, \ldots, p(m)$ alle Werthe von 0, 1, 2, ... bis $n1, n2, \ldots, n(m)$ erhält.

Einen ähnlichen aber nicht denselben Fall entwickelt Wronski Phil. de la T. Seite 131 bis 134

§. 77.

Es sei y eine Function mehrerer veränderlicher Grössen,

$$y = \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_p)$$

Man sucht das *n*te Differential von f(y)

Es ist

$$\frac{d^n fy}{1^{n|1}} = \Sigma_q \frac{d^q fy}{1^{q|1} dy^q} \cdot C(n,q) \quad \text{wo } q = 0, 1, \ldots, n, \text{ und}$$

$$C(n,q) = \Sigma \left(\frac{d^1 y}{1^{1|1}}\right)^{q1} \cdot \left(\frac{d^2 y}{1^{2|1}}\right)^{q2} \cdot \left(\frac{d^3 y}{1^{3|1}}\right)^{q3} \ldots \left(\frac{d^{n-q+1} y}{1^{n-q+1|1}}\right)^{q(n-q+1)}$$

wo $q1, q2, q3, \ldots$ alle Werthe von 0, 1, 2, ... erhalten, so dass

$$q1 + q2 + \ldots + q(n-q+1) = q$$

$$1 . q1 + 2 . q2 + \ldots + (n-q+1) . q(n-q+1) = n$$

folglich

$$287) \quad \frac{d^n fy}{1^{n|1}} = \Sigma_q \left(\frac{d^q fy}{1^{q|1} dy^q} \; \Sigma \left(\left(\frac{d^1 y}{1^{1|1}}\right)^{q1} \left(\frac{d^2 y}{1^{2|1}}\right)^{q2} \ldots \left(\frac{d^{n-q+1} y}{1^{n-q+1|1}}\right)^{q(n-q+1)}\right)\right)$$

wo zugleich

$$\frac{d^s y}{1^{s|1}} = \Sigma \frac{d^s \varphi(x_1, \ldots, x_p)}{1^{s1|1} 1^{s2|1} \ldots 1^{s(p)|1} dx_1^{s1} dx_2^{s2} \ldots dx_p^{s(p)}} dx_1^{s1} dx_2^{s2} \ldots dx_p^{s(p)}$$

und

$$s1 + s2 + \ldots + s(p) = s$$

§. 78.

Es sei

$$
\begin{aligned}
y_1 &= \varphi_1(x_1\,,\ x_2\,,\ \ldots\ldots,\ x_p)\\
y_2 &= \varphi_2\ (x_1\,,\ x_2\,,\ \ldots\ldots,\ x_p)\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
y_m &= \varphi_m(x_1\,,\ x_2\,,\ \ldots\ldots,\ x_p)
\end{aligned}
$$

Man sucht das *n* te Differential von $f(y_1\,,\ y_2\,,\ \ldots,\ y_m)$

Es ist

$$\frac{d^n f(y_1,\ldots,y_m)}{1^{n|1}} = \Sigma\ \frac{d_{y1}^{n1}\, d_{y2}^{n2} \ldots. d_{ym}^{n(m)} f(y_1,\ldots,y_m)}{1^{n1|1}.1^{n2|1}\ldots.1^{n(m)|1}}$$

und

$$\frac{d_{y1}^{n1}\ldots.d_{ym}^{n(m)} f(y_1,..,y_m)}{1^{n1|1}\ldots1^{n(m)|1}} = \Sigma \frac{d^a\ f(y_1,..,y_m)}{1^{a1|1}..1^{a(m)|1}\, dy_1^{a1}..\,dy_m^{a(m)}}\ C(n1,\,a1)_1\ C(n2,\,a2)_2\ \ldots.$$

$$\ldots.\ C(n(m),\,a(m))_m$$

also

$$288)\ \ \frac{d^n f(y_1,\ldots,y_m)}{1^{n|1}}$$

$$= \Sigma_n\ \Sigma_a\ \frac{d^a f(y_1,..,y_m)}{1^{a1|1}1^{a2|1}..1^{a(m)|1}\,dy_1^{a1}\,dy_2^{a2}..dy_m^{a(m)}}\ C(n1,a1)_1 C(n2,a2)_2 \ldots C(n(m),a(m))_m$$

wo

$$C(nq,aq)_q = \Sigma \left(\frac{d^1 y_q}{1^{1|1}}\right)^{aq,1} \left(\frac{d^2 y_q}{1^{2|1}}\right)^{aq,2} \left(\frac{d^3 y_q}{1^{3|1}}\right)^{aq,3} \ldots. \left(\frac{d^{n(q)-a(q)+1}\ y_q}{1^{n(q)-a(q)+1|1}}\right)^{aq,n(q)-a(q)+1}$$

und

$$\frac{d^s y_q}{1^{s|1}} = \Sigma \frac{d^s \varphi_q(x_1, x_2,\ldots,x_p)}{1^{s1|1}1^{s2|1}\ldots1^{s(p)|1}\,dx_1^{s1}\,dx_2^{s2}\ldots dx_p^{s(p)}}\ (dx_1)^{s1}\,(dx_2)^{s2}\ldots(dx_p)^{s(p)}$$

wo

$$
\begin{aligned}
n1 + n2 + \ldots\ldots + n(m) &= n\\
a1 + a2 + \ldots\ldots + a(m) &= a
\end{aligned}
$$

sein muss, aber

$$a \;=\; 0,\ 1,\ 2,\ \ldots\ldots,\ \text{bis}\ n$$

$$a1 \;=\; 0,\ 1,\ 2,\ \ldots\ldots,\ \text{bis}\ n1$$

$$a2 \;=\; 0,\ 1,\ 2,\ \ldots\ldots,\ \text{bis}\ n2$$

. . . .

$$a(m) \;=\; 0,\ 1,\ 2,\ \ldots\ldots,\ \text{bis}\ n(m)$$

gesetzt werden, und wo

$$aq,1 + aq,2 + \ldots\ldots + aq,\ nq-aq+1 \;=\; aq$$

$$1.(aq,1) + 2.(aq,2) + \ldots\ldots + (nq-aq+1).(aq,\ nq-aq+1) = nq$$

und

$$s1 + s2 + s3 + \ldots\ldots + s(p) = s$$

sein muss.

Vierte Abtheilung.

VERSCHIEDENE ORDNUNG DES DIFFERENTIIRENS BEI PRODUCTEN SOWOHL OHNE ALS MIT ABWECHSELNDEM VERVIELFACHEN.

§. 79.

Ist x eine Function von den unter sich unabhängigen Elementen a, b, c,

$$x = \pi\,(a,\ b,\ c)$$

und sind $\varphi_1 x$, $\varphi_2 x$, $\varphi_3 x$ Functionen von x oder von Grössen, unter welchen auch x, nur nicht a, oder b oder c vorkommen, so ist immer

$$289)\quad \frac{d_x\varphi_1 x}{da}\cdot\frac{d_x\varphi_2 x}{db}\cdot\frac{d_x\varphi_3 x}{dc} = \frac{d_x\varphi_1 x}{da}\cdot\frac{d_x\varphi_2 x}{dc}\cdot\frac{d_x\varphi_3 x}{db} =$$

$$= \frac{d_x\varphi_1 x}{db}\cdot\frac{d_x\varphi_2 x}{da}\cdot\frac{d_x\varphi_3 x}{dc} = \frac{d_x\varphi_1 x}{db}\cdot\frac{d_x\varphi_2 x}{dc}\cdot\frac{d_x\varphi_3 x}{da} =$$

$$= \frac{d_x\varphi_1 x}{dc}\cdot\frac{d_x\varphi_2 x}{da}\cdot\frac{d_x\varphi_3 x}{db} = \frac{d_x\varphi_1 x}{dc}\cdot\frac{d_x\varphi_2 x}{db}\cdot\frac{d_x\varphi_3 x}{da}$$

denn jedesmal entsteht das Product

$$\frac{d_x\varphi_1 x}{dx}\cdot\frac{d_x\varphi_2 x}{dx}\cdot\frac{d_x\varphi_3 x}{dx}\cdot\frac{dx}{da}\cdot\frac{dx}{db}\cdot\frac{dx}{dc}$$

Diese Wahrheit ist wohl zu unterscheiden von der schon bekannten

$$\frac{d^3 fx}{da\,.\,db\,.\,dc}=\frac{d^3 fx}{da\,.\,dc\,.\,db}=\frac{d^3 fx}{db\,.\,da\,.\,dc}=\,.\;.\;.\;.\;.$$

welche wir schon früher 170 mitgetheilt haben. Dasselbe gilt von den folgenden Wahrheiten.

Ferner ist bei der obigen Voraussetzung

290) $$\frac{d_x}{db}\left(\varphi_2 x\cdot\frac{d_x}{da}(\varphi_1 x)\right)=\frac{d_x}{da}\left(\varphi_2 x\cdot\frac{d_x}{db}(\varphi_1 x)\right)$$

Denn

$$\frac{d_x}{db}\left(\varphi_2 x\cdot\frac{d_x}{da}\;(\varphi_1 x)\right)=\varphi_2 x\cdot\frac{d_x^2\varphi_1 x}{db\;da}+\frac{d_x\varphi_2 x}{db}\cdot\frac{d_x\varphi_1 x}{da}$$

und

$$\frac{d_x}{da}\left(\varphi_2 x\cdot\frac{d_x}{db}(\varphi_1 x)\right)=\varphi_2 x\cdot\frac{d_x^2\varphi_1 x}{da\;db}+\frac{d_x\varphi_2 x}{da}\cdot\frac{d_x\varphi_1 x}{db}$$

Beide führen also nach 289 zu demselben Resultate.

Wir verfolgen diesen Gegenstand weiter, vervielfachen die Gleichung 290 mit $\varphi_3 x$ und differentiiren solche in Hinsicht c

$$\frac{d_x}{dc}\left(\varphi_3 x\cdot\frac{d_x}{db}\left(\varphi_2 x\cdot\frac{d_x}{da}(\varphi_1 x)\right)\right)=\frac{d_x}{dc}\left(\varphi_3 x\cdot\frac{d_x}{da}\left(\varphi_2 x\cdot\frac{d_x}{db}(\varphi_1 x)\right)\right)$$

Stellen wir diese Gleichung durch

$$(c,\,b,\,a)\;=\;(c,\,a,\,b) \qquad (\alpha$$

dar, so geht aus ihr hervor, dass das zweite und dritte Element sich verwechseln lassen.

Wir setzen in der Gleichung 290

$$\varphi_3 x \text{ statt } \varphi_1 x$$

und $$\varphi_2 x\cdot\frac{d_x\varphi_1 x}{dc} \text{ statt } \varphi_1 x$$

wir erhalten dadurch folgende

$$\frac{d_x}{db}\left(\varphi_3 x\cdot\frac{d_x}{da}\left(\varphi_2 x\cdot\frac{d_x}{dc}(\varphi_1 x)\right)\right) = \frac{d_x}{da}\left(\varphi_3 x\cdot\frac{d_x}{db}\left(\varphi_2 x\cdot\frac{d_x}{dc}(\varphi_1 x)\right)\right)$$

oder

$$(b, a, c) = (a, b, c) \qquad (\beta$$

Das erste und zweite Element lassen sich also verwechseln.

Aus dieser Gleichung β entsteht, wenn nach α das zweite und dritte Element verwechselt werden, folgende:

$$(b, c, a) = (a, c, b)$$

woraus sich ergibt, dass auch das erste und das dritte Element verwechselt werden können.

Es lassen sich also das erste und zweite
erste und dritte
zweite und dritte Element

mithin lassen sich alle Elemente versetzen. Hieraus geht folgende Wahrheit hervor:

291) Wenn x eine Function von dreien voneinander unabhängigen Grössen a, b, c, ist, so behält

$$\frac{d_x}{dc}\left(\varphi_3 x\cdot\frac{d_x}{db}\left(\varphi_2 x\cdot\frac{d_x}{da}(\varphi_1 x)\right)\right)$$

denselben Werth, welche Versetzungen mit den Elementen a, b, c auch vorgenommen werden mögen.

Nach diesem ist es leicht, diese Wahrheit auf jede mögliche Anzahl der Elemente auszudehnen, wir gewinnen dadurch folgende allgemeine Wahrheit:

292) Ist x eine Function von mehreren unter sich unabhängigen Grössen $a_1, a_2, \ldots, a_n$

$$x = \pi(a_1, a_2, \ldots\ldots, a_n)$$

und sind $\varphi_1 x$, $\varphi_2 x$, ... Functionen von x, so können in

$$\frac{d_x}{da_n}\left(_{n}\varphi_n x \cdot \frac{d_x}{da_{n-1}}\left(_{n-1}\varphi_{n-1} x \ldots \frac{d_x}{da_1}\left(_{1}\varphi_1 x\right)_1 \ldots\ldots\right)_{n-1}\right)_n$$

da_1, da_2, ..., da_n nach Willkühr versetzt werden, ohne dass der Werth des Ganzen verändert wird.

§. 80.

Die obige Wahrheit 289 gilt auch, wenn mehrere veränderliche Grössen x_1, x_2, ... zu Grunde liegen; ist nämlich

293) $$x_1 = \pi_1(a, b)$$
$$x_2 = \pi_2(a, b)$$

so ist

294) $$\frac{d_{x1,x2}\varphi_1(x_1,x_2)}{da} \cdot \frac{d_{x1,x2}\varphi_2(x_1,x_2)}{db} = \frac{d_{x1,x2}\varphi_1(x_1,x_2)}{db} \cdot \frac{d_{x1,x2}\varphi_2(x_1,x_2)}{da}$$

denn das Product

$$\left(\frac{d_{x1}\varphi_1(x_1,x_2)}{dx_1}\;\frac{dx_1}{da} + \frac{d_{x2}\varphi_1(x_1,x_2)}{dx_2}\;\frac{dx_2}{da}\right)\left(\frac{d_{x1}\varphi_2(x_1,x_2)}{dx_1}\;\frac{dx_1}{db} + \frac{d_{x2}\varphi_2(x_1,x_2)}{dx_2}\;\frac{dx_2}{db}\right)$$

wird nicht gestört, wenn a und b verwechselt werden.

Aus diesem Grunde können wir allgemein Folgendes behaupten:

295) Wenn
$$x_1 = \pi_1(a_1, a_2, \ldots, a_n)$$
$$x_2 = \pi_2(a_1, a_2, \ldots, a_n)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$x_m = \pi_m(a_1, a_2, \ldots, a_n)$$

oder x_1, x_2, ..., x_m Functionen von den unter sich unabhängigen Elementen sind, so können in dem Producte

$$\frac{d_{x_1,\ldots,x_m}\varphi_1(x_1,\ldots,x_m)}{da_1} \cdot \frac{d_{x_1,\ldots,x_m}\varphi_2(x_1,\ldots,x_m)}{da_2} \cdots\cdots \frac{d_{x_1,\ldots,x_m}\varphi_m(x_1,\ldots,x_m)}{da_m}$$

die Elemente a_1, a_2, . . . , a_m nach Willkühr versetzt werden, ohne dass der Werth des Products geändert wird.

Aus diesem können wir gleich wie in §. 79 unmittelbar folgern:

296) Bei den Voraussetzungen in 295 ist bei dem Differentiiren mit abwechselndem Vervielfachen

$$\frac{d_{x_1,\ldots,x_m}}{da_n}\Bigg(\varphi_n(x_1,\ldots x_m)\frac{d_{x_1,\ldots,x_m}}{da_{n-1}}\Bigg(\varphi_{n-1}(x_1,\ldots,x_m)\ldots\ldots\frac{d_{x_1,\ldots,x_m}}{da_1}\Bigg(\varphi_1(x_1,\ldots,x_m)\Bigg)_1\ldots\Bigg)_{n-1}\Bigg)_n$$

jede willkührliche Ordnung der Elemente a_1, a_2, . . . gestattet, ohne dass der Werth des Ganzen gestört wird.

Diese Freiheit in der Wahl der Ordnung der Elemente bei Producten sowohl wenn jeder Factor des Products differentiirt wird, wie in N. 289 und 295, als wenn das Differentiiren mit dem Vervielfachen abwechselt wie in 291, 292, 296, wird hier zuerst behauptet und bewiesen. Von ihr hangen wichtige Untersuchungen ab, wie der weitere Verfolg lehren wird; denn diese Freiheit ist der eigentliche Grund, dass oft zusammengesetzte Vorshriften von weitläufigen Differentiationen in die einfachsten Gesetze sich auflösen lassen, und wir machen auf sie um desto mehr aufmerksam, da sie bis jetzt nicht bekannt war.

Fünfte Abtheilung.

UEBERTRAGEN DER DIFFERENTIALE AUF ANDERE ELEMENTE.

§. 81.

Es ist, wenn h beständig ist,

$$\frac{d\,\mathrm{f}(\mathrm{x}+\mathrm{h})}{d\mathrm{x}} = \frac{d\,\mathrm{f}(\mathrm{x}+\mathrm{h})}{d(\mathrm{x}+\mathrm{h})} \cdot \frac{d(\mathrm{x}+\mathrm{h})}{d\mathrm{x}} = \frac{d\,\mathrm{f}(\mathrm{x}+\mathrm{h})}{d(\mathrm{x}+\mathrm{h})}$$

und, wenn x beständig ist

$$\frac{d\,\mathrm{f}(\mathrm{x}+\mathrm{h})}{d\mathrm{h}} = \frac{d\,\mathrm{f}(\mathrm{x}+\mathrm{h})}{d(\mathrm{x}+\mathrm{h})} \cdot \frac{d(\mathrm{x}+\mathrm{h})}{d\mathrm{h}} = \frac{d\,\mathrm{f}(\mathrm{x}+\mathrm{h})}{d(\mathrm{x}+\mathrm{h})}$$

mithin

297) $$\frac{d\,\mathrm{f}(\mathrm{x}+\mathrm{h})}{d\mathrm{x}} = \frac{d\,\mathrm{f}(\mathrm{x}+\mathrm{h})}{d\mathrm{h}}$$

Es ist also gleichgültig, ob f(x + h) in Hinsicht h oder in Hinsicht x differentiirt wird. Dieses gilt nun nicht allein vom ersten, sondern auch von jedem höhern Differentiale; denn, wenn die Ordnung im Differentiiren geändert wird, so entsteht

$$\frac{d^2 f(x+h)}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{d\,f(x+h)}{dx}\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{d\ f(x+h)}{dh}\right)$$

$$= \frac{d}{dh}\left(\frac{d\,f(x+h)}{dx}\right) = \frac{d}{dh}\left(\frac{d\ f(x+h)}{dh}\right) = \frac{d^2\ f(x+h)}{dh^2}$$

und überhaupt ist

$$\frac{d^{n-1}\,f(x+h)}{dx^{n-1}} = \frac{d^{n-1} f(x+h)}{dh^{n-1}}$$

gefunden, so besteht der Uebergang zum *n* ten Differentiale in folgenden Veränderungen

$$\frac{d^n\ f(x+h)}{dx^n} = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^{n-1} f(x+h)}{dh^{n-1}}\right) = \frac{d^{n-1}}{dh^{n-1}}\left(\frac{df(x+h)}{dx}\right) = \frac{d^{n-1}}{dh^{n-1}}\left(\frac{d\ f(x+h)}{dh}\right)$$

es ist also allgemein

298) $$\frac{d^n\ f(x+h)}{dx^n} = \frac{d^n\ f(x+h)}{dh^n}$$

Nach dieser Gleichung ist

$$\frac{d^m\ f(x+h)}{dx^n\,.\,dh^{m-n}} = \frac{d^m\,f(x+h)}{dx^m} = \frac{d^m\ f(x+h)}{dx^p\,.\,dh^{m-p}}$$

und folglich

299) $$\frac{d^n\ f(x+h)}{dx^p\,.\,dh^q} = \frac{d^n f(x+h)}{dx^{p1}\,.\,dh^{q1}}$$

wenn nur $p + q = n = p^1 + q^1$

Eine grössere Ausdehnung erhält vorstehende Gleichung, wenn dieses Uebertragen auf ein fremdes Element auf Functionen mehrerer veränderlicher Grössen angewendet wird; es ist

$$\frac{d^n}{dx_1^n}\left(\frac{d^m f(x_1+h_1, x_2+h_2)}{dx_2^m}\right) = \frac{d^n}{dx_1^n}\left(\frac{d^m\ f(x_1+h_1, x_2+h_2)}{dh_2^m}\right) = \frac{d^n d^m\ f(x_1+h_1,\ x_2+h_2)}{dh_1^n\,.\,dh_2^m}$$

Die Wahrheit 299 ist also nicht auf eine bestimmte Anzahl der Elemente eingeschränkt, und es ist ganz allgemein

300) $$\frac{d^{n1+n2+\ldots+n(p)} f(x_1+h_1, x_2+h_2, .., x_p+h_p)}{(dx_1)^{n1} . (dx_2)^{n2} \ldots . (dx_p)^{n(p)}} = \frac{d^{n1+n2+\ldots+n(p)} f(x_1+h_1, x_2+h_2, .., x_p+h_p)}{(dh_1)^{n1} . (dh_2)^{n2} \ldots . (dh_p)^{n(p)}}$$

§. 82.

Wird f(x + h) in zwei Theile zerlegt, in fx und in die Zunahme Δfx, welche dadurch entsteht, dass x um h wächst,

$$f(x+h) = fx + \Delta fx = fx + \frac{\Delta fx}{h} \cdot h$$

Wird ferner hievon das *n* te Differential in Hinsicht h genommen

$$\frac{d^n f(x+h)}{dh^n} = \frac{d^n fx}{dh^n} + \frac{d^n}{dh^n}\left(\frac{\Delta fx}{h} \cdot h\right)$$

und

$$\frac{d^n f(x+h)}{dh^n} = \frac{d^n f(x+h)}{dx^n}, \quad \frac{d^n fx}{dh^n} = 0$$

so wie auch

$$\frac{d^n}{dh^n}\left(\frac{\Delta fx}{h} \cdot h\right) = \frac{d^n}{dh^n}\left(\frac{\Delta fx}{h}\right) \cdot \frac{d^0 h}{dh^0} + \frac{n}{1} \cdot \frac{d^{n-1}}{dh^{n-1}}\left(\frac{\Delta fx}{h}\right) \cdot \frac{d^1 h}{dh}$$

gesetzt, so wird, weil die folgenden Glieder wegen $d^2h^1 = 0$, $d^3h^1 = 0$, . . . verschwinden,

301) $$\frac{d^n f(x+h)}{1^{n|1} dx^n} = \frac{d^{n-1}}{1^{n-1|1} \; dh^{n-1}}\left(\frac{\Delta fx}{h}\right) + h \cdot \frac{d^n}{1^{n|1} dh^n}\left(\frac{\Delta fx}{h}\right)$$

Diese Gleichung zeigt, wie das *n* te Differential von f(x + h) in Hinsicht x durch Differentiale von $\frac{\Delta fx}{h}$ in Hinsicht h ersetzt werden kann.

Wird noch m mal in Hinsicht x differentiirt, und zugleich die Ordnung der Geschäfte verändert, so kann dieses auf folgende Art angezeigt werden:

$$302)\quad \frac{d^{n+m}f(x+h)}{1^{n|1}\,dx^{n+m}} = \frac{d^{n+m-1}}{1^{n-1|1}\,dh^{n-1}\,dx^m}\left(\frac{\Delta\, fx}{h}\right) + h\,.\,\frac{d^{n+m}}{1^{n|1}\,dh^n\,dx^m}\left(\frac{\Delta\, fx}{h}\right)$$

oder

$$= \frac{d^{n-1}}{1^{n-1|1}\,dh^{n-1}}\left(\frac{\Delta}{h}\left(\frac{d^m fx}{dx^m}\right)\right) + h\,.\,\frac{d^n}{1^{n|1}\,dh^n}\left(\frac{\Delta}{h}\left(\frac{d^m fx}{d\,x^m}\right)\right)$$

§. 83.

Dieses Uebertragen eines Differentials in Hinsicht x auf das Differential in Hinsicht h vom Unterschiede der gegebenen Function kann bei Functionen mehrerer veränderlicher Grössen weiter fortgeführt werden. Es ist nach 301

$$\frac{d^n f(x_1+h_1,x_2)}{1^{n|1}\,dx_1^n} = \frac{1}{1^{n-1|1}}\,\frac{d^{n-1}}{dh_1^{n-1}}\left(\frac{\Delta_{x1} f(x_1,x_2)}{h_1}\right) + h_1\,\frac{1}{1^{n|1}}\,\frac{d^n}{dh_1^n}\left(\frac{\Delta_{x1} f(x_1,x_2)}{h_1}\right)$$

also auch, wenn x_2+h_2 statt x_2 gesetzt, und von dieser Gleichung das *m* te Differential in Hinsicht x_2 genommen wird,

$$\frac{d^{n+m}f(x_1+h_1,x_2+h_2)}{1^{n|1}\,1^{m|1}\,dx_1^n\,dx_2^m} =$$

$$\frac{1}{1^{n-1|1}}\,\frac{d^{n-1}}{dh_1^{n-1}}\left(\frac{\Delta_{x1}}{h_1}\left(\frac{d^m f(x_1,x_2+h_2)}{1^{m|1}\,dx_2^m}\right)\right) + h_1\,\frac{1}{1^{n|1}}\,\frac{d^n}{dh_1^n}\left(\frac{\Delta_{x1}}{h_1}\left(\frac{d^m f(x_1,x^2+h_2)}{1^{m|1}\,dx_2^m}\right)\right)$$

Es ist aber

$$\frac{d^m f(x_1,x_2+h_2)}{1^{m|1}\,dx_2^m} = \frac{1}{1^{m-1|1}}\,\frac{d^{m-1}}{dh_2^{m-1}}\left(\frac{\Delta_{x2} f(x_1,x_2)}{h_2}\right) + h_2\,\frac{1}{1^{m|1}}\,\frac{d^m}{dh_2^m}\left(\frac{\Delta_{x2} f(x_1,x_2)}{h_2}\right)$$

folglich

$$\begin{aligned}303)\quad \frac{d^{n+m}f(x_1+h_1,x_2+h_2)}{1^{n|1}\,1^{m|1}\,dx_1^n\,dx_2^m} &= \frac{1}{1^{n-1|1}\,1^{m-1|1}}\,.\,\frac{d^{n+m-2}}{dh_1^{n-1}\,dh_2^{m-1}}\left(\frac{\Delta_{x1}\,\Delta_{x2}\,f(x_1,x_2)}{h_1\,h_2}\right)\\
&+ \frac{h_1}{1^{n|1}\,1^{m-1|1}}\,.\,\frac{d^{n+m-1}}{dh_1^n\,dh_2^{m-1}}\left(\frac{\Delta_{x1}\,\Delta_{x2}\,f(x_1,x_2)}{h_1\,h_2}\right)\\
&+ \frac{h_2}{1^{n-1|1}\,1^{m|1}}\,.\,\frac{d^{n+m-1}}{dh_1^{n-1}\,dh_2^m}\left(\frac{\Delta_{x1}\,\Delta_{x2}\,f(x_1,x_2)}{h_1\,h_2}\right)\\
&+ \frac{h_1\,.\,h_2}{1^{n|1}\,1^{m|1}}\,.\,\frac{d^{n+m}}{dh_1^n\,dh_2^m}\left(\frac{\Delta_{x1}\,\Delta_{x2}\,f(x_1,x_2)}{h_1\,h_2}\right)\end{aligned}$$

Diese Bildungsweise kann auch auf folgende Art angegeben werden:

$$304)\left(1+\frac{h_1}{n}\frac{d}{dh_1}+\frac{h_2}{m}\frac{d}{dh_2}+\frac{h_1\,h_2}{n\;m}\frac{d^2}{dh_1\,dh_2}\right)\frac{d^{n+m-2}}{1^{n-1|1}1^{m-1|1}dh_1^{n-1}dh_2^{m-1}}\left(\frac{\Delta_{x1}\Delta_{x2}\,f(x_1,x_2)}{h_1\;h_2}\right)$$

oder auch durch folgende Zeichen

$$305)\quad\left(1+\frac{h_1}{n}\frac{d}{dh_1}\right)\left(1+\frac{h_2}{m}\frac{d}{dh_2}\right)\frac{d^{n+m-2}}{1^{n-1|1}1^{m-1|1}dh_1^{n-1}dh_2^{m-1}}\left(\frac{\Delta_{x1}\Delta_{x2}\,f(x_1,x_2)}{h_1\;h_2}\right)$$

Bei Functionen von dreien veränderlichen Grössen ist

$$306.)\quad\frac{d^{n+m+p}f(x_1+h_1,x_2+h_2,x_3+h_3)}{1^{n|1}.\,1^{m|1}.\,1^{p|1}.\,dx_1^n.\,dx_2^m.\,dx_3^p}=$$

$$\left(1+\frac{h_1}{n}\frac{d}{dh_1}\right)\left(1+\frac{h_2}{m}\frac{d}{dh_2}\right)\left(1+\frac{h_3}{p}\frac{d}{dh_3}\right)\frac{d^{n+m-3}}{1^{n-1|1}1^{m-1|1}1^{p-1|1}dh_1^{n-1}dh_2^{m-1}dh_3^{p-1}}\left(\frac{\Delta_{x1}\Delta_{x2}\Delta_{x3}f(x_1,x_2,x_3)}{h_1\;h_2\;h_3}\right)$$

und allgemein

$$307)\quad\frac{d^{n1+n2+\ldots.+n(m)}\;f(x_1+h_1,x_2+h_2,\ldots,x_m+h_m)}{1^{n1|1}.1^{n2|1}\ldots.1^{n(m)|1}.dx_1^{n1}.dx_2^{n2}\ldots dx_m^{n(m)}}=\left(1+\frac{h_1}{n1}\frac{d}{dh_1}\right)\ldots\ldots.$$

$$\ldots.\left(1+\frac{h_m}{n(m)}\frac{d}{dh_m}\right)\frac{d^{n1+n2+\ldots+n(m)-m}}{1^{n1-1|1}\ldots1^{n(m)-1|1}dh_1^{n1-1}dh_2^{n2-1}\ldots dh_m^{n(m)-1}}\left(\frac{\Delta_{x1}\,\Delta_{x2}\ldots\Delta_{xm}\,f(x_1,\ldots,x_m)}{h_1\,.\,h_2\ldots..h_m}\right)$$

§. 84.

Wir kehren zu dem einfacheren Falle, zu einer Function von einer veränderlichen Grösse wieder zurück, setzen in der Gleichung 302 n − s statt n, und geben ihr folgende Gestalt

$$\frac{d^{n-s}}{1^{n-s|1}dh^{n-s}}\left(\frac{d^m f(x+h)}{dx^m}\right)=\frac{d^{n-s-1}}{1^{n-s-1|1}dh^{n-s-1}}\left(\frac{\Delta}{h}\left(\frac{d^m fx}{dx^m}\right)\right)+h\frac{d^{n-s}}{1^{n-s|1}dh^{n-s}}\left(\frac{\Delta}{h}\left(\frac{d^m fx}{dx^m}\right)\right)$$

vervielfachen sie mit

$$(a+sb)\,\frac{d^s\,\varphi\,(h,x)}{1^{s|1}\,dh^s}$$

und machen diese Gleichung dadurch zu einer Grundlage von dreien Reihen

$$\Sigma(a+sb)\frac{d^{n-s}}{1^{n-s|1}\,dh^{n-s}}\left(\frac{d^m f(x+h)}{dx^m}\right)\frac{d^s\varphi(h,x)}{1^{s|1}\,dh^s} =$$

$$\Sigma(a+sb)\frac{d^{n-s-1}}{1^{n-s-1|1}\,dh^{n-s-1}}\left(\frac{\Delta}{h}\left(\frac{d^m fx}{dx^m}\right)\right)\frac{d^s\varphi(h,x)}{1^{s|1}\,dh^s}+h\Sigma(a+sb)\frac{d^{n-s}}{1^{n-s|1}\,dh^{n-s}}\left(\frac{\Delta}{h}\left(\frac{d^m fx}{dx^m}\right)\right)\frac{d^s\varphi(h,x)}{1^{s|1}\,dh^s}$$

welche entstehen, wenn $s = 0, 1, 2, \ldots, n-1$ gesetzt wird. Summiren wir diese Reihen, so erhalten wir nach 203 folgende Gleichung

$$308)\quad a\frac{d^n}{1^{n|1}\,dh^n}\left(\varphi(h,x)\frac{d^m f(x+h)}{dx^m}\right)+b\frac{d^{n-1}}{1^{n-1|1}.\,dh^{n-1}}\left(\frac{d\varphi(h,x)}{dh}\frac{d^m f(x+h)}{dx^m}\right)$$

$$-(a+nb)\frac{d^n\varphi(h,x)}{1^{n|1}\,dh^n}\frac{d^m f(x+h)}{dx^m} =$$

$$= a\frac{d^{n-1}}{1^{n-1|1}\,dh^{n-1}}\left(\varphi(h,x)\frac{d^m}{dx^m}\left(\frac{\Delta fx}{h}\right)\right)+b\frac{d^{n-2}}{1^{n-2|1}\,dh^{n-2}}\left(\frac{d\varphi(h,x)}{dh}\frac{d^m}{dx^m}\left(\frac{\Delta fx}{h}\right)\right)$$

$$+h\left(a\frac{d^n}{1^{n|1}\,dh^n}\left(\varphi(h,x)\frac{d^m}{dx^m}\left(\frac{\Delta fx}{h}\right)\right)+b\frac{d^{n-1}}{1^{n-1|1}\,dh^{n-1}}\left(\frac{d\varphi(h,x)}{dh}\frac{d^m}{dx^m}\left(\frac{\Delta fx}{h}\right)\right)\right.$$

$$\left.-(a+nb)\frac{d^n\varphi(h,x)}{1^{n|1}\,dh^n}\frac{d^m}{dx^m}\left(\frac{\Delta fx}{h}\right)\right)$$

Bilden wir nun nach dieser Gleichung zwei andere, so dass in einer $a = 1$, $b = 0$ und in der andern $a = n+1$, $b = -1$, $n = n+1$, $m = m-1$ ist, zählen dann diese beiden Gleichungen von einander ab, so gewinnen wir folgende:

$$309)\quad \frac{d^n\varphi(h,x)}{1^{n|1}.\,dh^n}\cdot\frac{d^mf(x+h)}{dx^m}=$$

$$=(n+1)\,\frac{d^n}{1^{n|1}.\,dh^n}\left(\varphi(h,x)\cdot\frac{d^{m-1}}{dx^{m-1}}\left(\frac{\Delta fx}{h}\right)\right)-\frac{d^{n-1}}{1^{n-1|1}.\,dh^{n-1}}\left(\varphi(h,x)\cdot\frac{d^m}{dx^m}\left(\frac{\Delta fx}{h}\right)\right)$$

$$-\frac{d^{n-1}}{1^{n-1|1}.\,dh^{n-1}}\left(\frac{d\varphi(h,x)}{dh}\,\frac{d^{m-1}}{dx^{m-1}}\left(\frac{\Delta fx}{h}\right)\right)$$

$$+h\left(\frac{d^n}{1^{n|1}.\,dh^n}\left(\varphi(h,x)\cdot\frac{d^m}{dh\,.\,dx^{m-1}}\left(\frac{\Delta fx}{h}\right)\right)-\frac{d^n}{1^{n|1}.\,dh^n}\left(\varphi(h,x)\cdot\frac{d^m}{dx^m}\left(\frac{\Delta fx}{h}\right)\right)\right.$$

$$\left.+\frac{d^n\varphi(h,x)}{1^{n|1}.\,dh^n}\cdot\frac{d^m}{dx^m}\left(\frac{\Delta fx}{h}\right)\right)$$

wo $\frac{d}{dx}$ dem $\frac{\Delta}{h}$ vorhergehen oder nachfolgen kann.

Dieser Gleichung kann eine andere Gestalt gegeben werden, wenn

$$(n+1)\cdot\frac{d^n}{1^{n|1}.\,dh^n}\left(\varphi(h,x)\cdot\frac{d^{m-1}}{dx^{m-1}}\left(\frac{\Delta fx}{h}\right)\right)=$$

$$\frac{d^n}{1^{n|1}.\,dh^n}\left(\varphi(h,x)\cdot\frac{d^{m-1}}{dx^{m-1}}\left(\frac{\Delta fx}{h}\right)\right)+\frac{d^{n-1}}{1^{n-1|1}\,dh^{n-1}}\left(\frac{d}{dh}\left(\varphi(h,x)\cdot\frac{d^{m-1}}{dx^{m-1}}\left(\frac{\Delta fx}{h}\right)\right)\right)$$

und

$$\frac{d}{dh}\left(\varphi(h,x)\,\frac{d^{m-1}}{dx^{m-1}}\left(\frac{\Delta fx}{h}\right)\right)=\varphi(h,x)\,\frac{d^m}{dh\,dx^{m-1}}\left(\frac{\Delta fx}{h}\right)+\frac{d\varphi(h,x)}{dh}\,\frac{d^{m-1}}{dx^{m-1}}\left(\frac{\Delta fx}{h}\right)$$

gesetzt wird, nämlich

$$310)\ \frac{d^n\varphi(h,x)}{1^{n|1}.dh^n}\cdot\frac{d^m f(x+h)}{dx^m}=$$

$$=\frac{d^n}{1^{n|1}.dh^n}\left(\varphi(h,x).\frac{d^{m-1}}{dx^{m-1}}\left(\frac{\Delta fx}{h}\right)\right)-\frac{d^{n-1}}{1^{n-1|1}.dh^{n-1}}\left(\varphi(h,x).\frac{d^m}{dx^m}\left(\frac{\Delta fx}{h}\right)\right)$$

$$+\frac{d^{n-1}}{1^{n-1|1}.dh^{n-1}}\left(\varphi(h,x).\frac{d^m}{dh.dx^{m-1}}\left(\frac{\Delta fx}{h}\right)\right)$$

$$+h\left(\frac{d^n}{1^{n|1}.dh^n}\left(\varphi(h,x).\frac{d^m}{dh.dx^{m-1}}\left(\frac{\Delta fx}{h}\right)\right)-\frac{d^n}{1^{n|1}.dh^n}\left(\varphi(h,x).\frac{d^m}{dx^m}\left(\frac{\Delta fx}{h}\right)\right)\right.$$

$$\left.+\frac{d^n\varphi(h,x)}{1^{n|1}.dh^n}.\frac{d^m}{dx^m}\left(\frac{\Delta fx}{h}\right)\right)$$

§. 85.

Alle diese Gleichungen 301, ... , 310 sind ganz allgemein und erscheinen hier zuerst; wir müssen, um ihren Nutzen zu zeigen, zu ganz speciellen Fällen übergehen, wovon einige wenige schon bei **Wronski** und **Burmann** vorkommen. Wir setzen zu diesem Zwecke nach dem Differentiiren $h = 0$ und erhalten aus 302

$$311)\ \frac{d^{n+m}fx}{1^{n|1}.dx^{n+m}}=\frac{d^{n+m-1}}{1^{n-1|1}.dh^{n-1}.dx^m}\left(\frac{\Delta fx}{h}\right)_{h=0}=\frac{d^{n-1}}{1^{n-1|1}.dh^{n-1}}\left(\frac{\Delta}{h}\left(\frac{d^m fx}{dx^m}\right)\right)_{h=0}$$

Setzt man hierin $m = 0$, so ergibt sich die Gleichung, welche **Wronski** Phil. de la T. II. Seite 43 N. 177 und Seite 46 N. 180 findet.

Aus 307 wird

$$312)\ \frac{d^{n1+n2+\ldots+n(m)}f(x_1,x_2,\ldots,x_m)}{1^{n1|1}.1^{n2|1}\ldots1^{n(m)|1}.dx_1^{n1}.dx_2^{n2}\ldots dx_m^{n(m)}}=$$

$$=\frac{1}{1^{n1-1|1}.1^{n2-1|1}\ldots1^{n(m)-1|1}}.\frac{d^{n1+n2+\ldots+n(m)-m}}{dh_1^{n1-1}.dh_2^{n2-1}\ldots dh_m^{n(m)-1}}\left(\frac{\Delta_{x1}\Delta_{x2}\ldots\Delta_{xm}f(x_1,x_2,\ldots,x_m)}{h_1.h_2.\ldots.h_m}\right)$$

wenn $h_1 = 0$, $h_2 = 0$, . . . , $h_m = 0$ gesetzt wird,
oder wenn $h_1 = h_2 = \ldots . = h_m$ ist

$$313)\quad \frac{d^{n1+n2+\ldots+n(m)}\,f(x_1,\;x_2,\;\ldots,\;x_m)}{1^{n1|1}\,1^{n2|1}\ldots1^{n(m)|1}\,dx_1^{n1}\,dx_2^{n2}\ldots dx_m^{n(m)}}$$

$$= \frac{d^{n1+n2+\ldots+n(m)-m}}{1^{n1-1|1}\,1^{n2-1|1}\ldots1^{n(m)-1|1}(dh)^{n1+n2+\ldots+n(m)-m}}\left(\frac{\Delta_{x1}\Delta_{xm}\ldots\Delta_{x2}\;f(x_1,\;x_2,\ldots,x_m)}{h^m}\right)_{h=0}$$

Aus 310 wird

$$314)\quad \frac{d^m fx}{dx^m}\cdot\left(\frac{d^n\varphi(h,x)}{1^{n|1}\,.\,dh^n}\right)_{h=0} = \left(\frac{d^n}{1^{n|1}\,.\,dh^n}\left(\varphi(h,x)\,.\,\frac{d^{m-1}}{dx^{m-1}}\left(\frac{\Delta fx}{h}\right)\right)\right)_{h=0}$$

$$-\left(\frac{d^{n-1}}{1^{n-1|1}\,.\,dh^{n-1}}\left(\varphi(h,x)\,.\;\frac{d^m}{dx^m}\left(\frac{\Delta fx}{h}\right)\right)\right)_{h=0}$$

$$+\left(\frac{d^{n-1}}{1^{n-1|1}\,.\,dh^{n-1}}\left(\varphi(h,\,x)\,.\,\frac{d^m}{dh.dx^{m-1}}\left(\frac{\Delta fx}{h}\right)\right)\right)_{h=0}$$

§. 86.

Gehen wir zu noch speciellern Fällen über, und setzen $m = 1$ und

$$\varphi(h,\,x) = F(x+h)\,.\,\left(\frac{\Delta\,fx}{h}\right)^{m-1}$$

so wird aus 314

$$315)\quad \frac{d\,fx}{dx}\cdot\left(\frac{d^n}{dh^n}\left(F(x+h)\,.\,\left(\frac{\Delta\,fx}{h}\right)^{m-1}\right)\right)_{h=0} =$$

$$= \frac{d^{n-1}}{dh^{n-1}}\left(\frac{m+n}{m}\,F\,(x+h)\,\frac{d}{dh}\left(\frac{\Delta fx}{h}\right)^m + \frac{dF(x+h)}{dh}\left(\frac{\Delta fx}{h}\right)^m - \frac{n}{m}\,F\,(x+h)\,\frac{d}{dx}\left(\frac{\Delta fx}{h}\right)^m\right)_{h=0}$$

und setzen wir hierin $F\,(x + h) = 1$, so gewinnen wir erst die Gleichung

$$316)\quad \frac{dfx}{dx}\cdot\left(\frac{d^n}{dh^n}\left(\frac{\Delta fx}{h}\right)^{m-1}\right)_{h=0} = \left(\frac{m+n}{m}\cdot\frac{d^n}{dh^n}\left(\frac{\Delta fx}{h}\right)^m - \frac{n}{m}\cdot\frac{d^n}{dh^{n-1}.\,dx}\left(\frac{\Delta fx}{h}\right)^m\right)_{h=0}$$

welche Wronski (Phil. de la T. II. Seite 47 N. 182) findet.

Wird aber in 315, m = − n gesetzt, und berücksichtiget, dass

$$\frac{dF(x+h)}{dh} = \frac{dF(x+h)}{dx}$$

so erhalten wir die Gleichung

$$317)\quad \frac{dfx}{dx}\cdot\frac{d^n}{dh^n}\left(F(x+h)\cdot\left(\frac{\Delta fx}{h}\right)^{-n-1}\right)_{h=0} = \frac{d^n}{dh^{n-1}\,dx}\left(F(x+h)\cdot\left(\frac{\Delta fx}{h}\right)^{-n}\right)_{h=0}$$

und setzen wir sogar F (x + h) = 1, so entsteht die ganz specielle Gleichung

$$318)\quad \frac{dfx}{dx}\cdot\left(\frac{d^n}{dh^n}\left(\frac{\Delta fx}{h}\right)^{-n-1}\right)_{h=0} = \left(\frac{d^n}{dh^{n-1}\,dx}\cdot\left(\frac{\Delta fx}{h}\right)^{-n}\right)_{h=0}$$

welche Wronski Seite 48 N. 183 findet.

Da F (x + h) willkührlich ist, so kann in der Gleichung 317 statt F(x + h) auch gesetzt werden

$$\frac{dF(x+h)}{dh} \quad\text{oder}\quad \frac{dF(x+h)}{dx} = F(x+h)^{(1)}$$

Hiedurch entsteht die Gleichung

$$319)\quad \frac{dfx}{dx}\cdot\frac{d^n}{dh^n}\left(F(x+h)^{(1)}\cdot\left(\frac{\Delta fx}{h}\right)^{-n-1}\right)_{h=0} = \frac{d^n}{dh^{n-1}.\,dx}\left(F(x+h)^{(1)}\cdot\left(\frac{\Delta fx}{h}\right)^{-n}\right)_{h=0}$$

welche Wronski Seite 51 N. 186 findet.

Hieraus wird die Wichtigkeit der allgemeinen Gleichung 314 erhellen, da die bis jetzt bekannten Gleichungen, welche mit eben so vielen weitläufigen Beweisen versehen wurden, nur ganz specielle Fälle von ihr sind.

§. 87.

Geben wir der Gleichung 319 eine andere Gestalt

$$\frac{dx}{dfx}\cdot\frac{d^n}{dh^{n-1}dx}\left(F(x+h)^{(1)}\cdot\left(\frac{h}{\Delta fx}\right)^n\right)_{h=0}=\frac{d^n}{dh^n}\left(F(x+h)^{(1)}\cdot\left(\frac{h}{\Delta fx}\right)^{n+1}\right)_{h=0}$$

so gibt sie, wenn $n = 0, 1, 2, \ldots$ gesetzt wird, Veranlassung zu folgender Reihe von Gleichungen: für $n = 0$ ist

$$\frac{dx}{dfx}\cdot\frac{dFx}{dx} = F(x+h)^{(1)}\cdot\left(\frac{h}{\Delta fx}\right)^1_{h=0}$$

also wenn in Hinsicht x differentiirt, mit $\frac{dx}{dfx}$ vervielfacht, und in der obigen Gleichung $n = 1$ gesetzt wird

$$\frac{dx}{dfx}\cdot\frac{d}{dx}\left(\frac{dx}{dfx}\cdot\frac{dFx}{dx}\right)=\frac{dx}{dfx}\cdot\frac{d}{dx}\left(F(x+h)^{(1)}\cdot\left(\frac{h}{\Delta fx}\right)^1\right)_{h=0}=\frac{d^1}{dh^1}\left(F(x+h)^{(1)}\left(\frac{h}{\Delta fx}\right)^2\right)_{h=0}$$

Wird wieder in Hinsicht x differentiirt, mit $\frac{dx}{dfx}$ vervielfacht, und in der obigen Gleichung $n = 2$ gesetzt, so entsteht die Gleichung

$$\frac{dx}{dfx}\cdot\frac{d}{dx}\left(\frac{dx}{dfx}\cdot\frac{d}{dx}\left(\frac{dx}{dfx}\cdot\frac{dFx}{dx}\right)\right)=\frac{dx}{dfx}\cdot\frac{d^2}{dh\,dx}\left(F(x+h)^{(1)}\left(\frac{h}{\Delta fx}\right)^2\right)_{h=0}$$

$$=\frac{d^2}{dh^2}\left(F(x+h)^{(1)}\left(\frac{h}{\Delta fx}\right)^3\cdot\right)_{h=0}$$

Werden diese Geschäfte, nämlich das Differentiiren in Hinsicht x und das Vervielfachen mit $\frac{dx}{dfx}$, *n* mal wiederholt, und zugleich die obige Gleichung zu Hülfe genommen, so ergibt sich die allgemeine Gleichung

$$320)\quad \frac{d}{dfx}\Bigl(_{n}\frac{d}{dfx}\Bigl(_{n-1}\frac{d}{dfx}\cdots\Bigl(_{2}\frac{d}{dfx}\Bigl(Fx\Bigr)_{1}\cdots\Bigr)_{1}\Bigr)_{n}=\frac{d^{n-1}}{dh^{n-1}}\left(F(x+h)^{(1)}\cdot\left(\frac{h}{\Delta fx}\right)^n\right)_{h=0}$$

oder wenn $x_1 - x$ statt h und dx_1 statt dh gesetzt wird,

321) $$\frac{d}{dfx}\left(_{n}\frac{d}{dfx}\left(_{n-1}\frac{d}{dfx}\cdots\left(_{2}\frac{d}{dfx}\left(_{1}Fx\right)_{1}\cdots\right)_{n}\right.\right.= \frac{d^{n-1}}{dx_1{}^{n-1}}\left(\left(\frac{x_1-x}{fx_1-fx}\right)^n\cdot\frac{dFx_1}{dx_1}\right)_{x_1\,x}$$

welche Wahrheit **Burmann** Seite 35 und 36 zuerst gefunden hat.

§. 88.

Ehe wir weiter gehen, wollen wir das Verhalten der Differentiale der höhern Unterschiede oder von $\Delta^n fx$ in Hinsicht h und in Hinsicht x untersuchen, wir werden wieder zu Resultaten gelangen, welche bis jetzt unbekannt waren. Es ist

$$\Delta^n fx = \Sigma(-)^q\,\frac{n^{q|-1}}{1^{q|1}}\cdot f(x+(n-q)h)$$

wo $q = 0, 1, 2, \ldots, n$

und wenn $x + (n-q)\,h = y$ gesetzt wird

$$\frac{dfy}{dh} = \frac{dfy}{dy}\cdot\frac{dy}{dh} = (n-q)\cdot\frac{dfy}{dx}$$

$$\frac{d^2fy}{dh^2} = (n-q)\cdot\frac{d}{dx}\left(\frac{d}{dh}(fy)\right) = (n-q)^2\cdot\frac{d^2fy}{dx^2}$$

. . . .

$$\frac{d^pfy}{dh^p} = (n-q)^p\,\frac{d^pfy}{dx^p}$$

mithin

$$\frac{d^p(\Delta^n fx)}{dh^p} = \Sigma(-)^q\cdot\frac{n^{q|-1}}{1^{q|1}}\cdot\frac{d^pfy}{dh^p} = \Sigma(-)^q\cdot\frac{n^{q|-1}}{1^{q|1}}\cdot(n-q)^p\,\frac{d^pfy}{dx^p}$$

oder

322) $$\frac{d^p(\Delta^n fx)}{dh^p} = n^p\cdot\frac{d^pf(x+nh)}{dx^p} - (n-1)^p\cdot\frac{n^{1|-1}}{1^{1|1}}\,\frac{d^pf(x+(n-1)h)}{dx^p}$$
$$+(n-2)^p\cdot\frac{n^{2|-1}}{1^{2|1}}\cdot\frac{d^pf(x+(n-2)h)}{dx^p} - \ldots (-)^{n-1}1^p\cdot\frac{n^{n-1|-1}}{1^{n-1|1}}\,\frac{d^pf(x+h)}{dx^p}$$

In dem Falle, wenn nach dem Differentiiren $h = 0$ gesetzt wird, ist

$$323)\quad \left(\frac{d^p(\Delta^n fx)}{dh^p}\right)_{h=0} = \left(n^p - (n-1)^p \frac{n^{1|-1}}{1^{1|1}} + (n-2)^p \frac{n^{2|-1}}{1^{2|1}} - \ldots (-)^{n-1}\, 1^p . \frac{n^{n-1|-1}}{1^{n-1|1}}\right) . \frac{d^p fx}{dx^p}$$

oder nach unserer Analysis Seite 353 N. 645

$$324)\quad \left(\frac{d^p(\Delta^n fx)}{dh^p}\right)_{h=0} = 1^{n|1} . [1, 2, 3, \ldots, n]^{(p-n)} . \frac{d^p fx}{dx^p}$$

So lange also p kleiner als n ist, verschwindet die Function oder

$$325)\quad \left(\frac{d^{n-s}(\Delta^n fx)}{dh^{n-s}}\right)_{h=0} = 0$$

$$326)\quad \left(\frac{d^n(\Delta^n fx)}{dh^n}\right)_{h=0} = 1^{n|1} . \frac{d^n fx}{dx^n}$$

und

$$327)\quad \left(\frac{d^{n+q}(\Delta^n fx)}{dh^{n+q}}\right)_{h=0} = 1^{n|1} . [1, 2, \ldots, n]^{(q)}\ \frac{d^{n+q} fx}{dx^{n+q}}$$

§. 89.

Vermittelst dieser Gleichungen lassen sich mehrere Differentiale in Hinsicht eines Elements in Differentiale in Hinsicht eines ganz fremden Elements mit Leichtigkeit übertragen. Wir nehmen deshalb mehrere Hauptaufgaben, welche wir schon in einer frühern Abtheilung behandelt haben, nochmals vor.

Es sei

$$y = \varphi x$$

man sucht das *n*te Differential von fy in Hinsicht x.

Es ist nach 311

$$\frac{d^q y}{1^{q|1} . dx^q} = \frac{d^q \varphi x}{1^{q|1} . dx^q} = \left(\frac{d^{q-1}}{1^{q-1|1} . dh^{q-1}}\left(\frac{\Delta\, \varphi x}{h}\right)\right)_{h=0}$$

folglich

$$328)\quad C(n,p)\left(\underset{1}{\frac{d^1 y}{1^{1|1}.dx^1}},\ \underset{2}{\frac{d^2 y}{1^{2|1}.dx^2}},\ \underset{}{\ldots}\right) = C(n-p,p)\left(\underset{0}{\frac{d^0}{1^{0|1}.dh^0}\left(\frac{\Delta\varphi x}{h}\right)},\ \underset{1}{\frac{d^1}{1^{1|1}.dh^1}\left(\frac{\Delta\varphi x}{h}\right)},\ \ldots\right)_{h=0}$$

mithin nach 266

$$329)\quad \frac{d^n fy}{1^{n|1}.dx^n} = \frac{d^0 fy}{1^{0|1}.dy^0}.C(n,0) = \frac{d^0 fy}{1^{0|1}.dy^0}.U^0 f(n+1)$$

$$+ \frac{d^1 fy}{1^{1|1}.dy^1}.C(n-1,1) \qquad + \frac{d^1 fy}{1^{1|1}.dy^1}.U^1\ f\,n$$

$$+ \frac{d^2 fy}{1^{2|1}.dy^2}.C(n-2,2) \qquad + \frac{d^2 fy}{1^{2|1}.dy^2}.U^2 f(n-1)$$

$$+ \ldots\ldots \qquad + \ldots\ldots$$

$$+ \frac{d^n fy}{1^{n|1}.dy^n}.C(0,n) \qquad + \frac{d^n fy}{1^{n|1}.dy^n}.U^n\ f\,1$$

wo

$$U = \left(\frac{d^0}{1^{0|1}\,dh^0}\left(\frac{\Delta\varphi x}{h}\right), \frac{d^1}{1^{1|1}\,dh^1}\left(\frac{\Delta\varphi x}{h}\right), \frac{d^2}{1^{2|1}\,dh^2}\left(\frac{\Delta\varphi x}{h}\right), \ldots\ldots\right)$$

Diese Bildungsweise gibt auch Wronski Seite 67 N. 201.

Von dieser können wir zu einer andern Bildungsweise übergehen; es ist nämlich nach Gleichung 191

$$330)\quad \frac{d^{n-p}}{1^{n-p|1}.dh^{n-p}}\left(\frac{\Delta\varphi x}{h}\right)^p = C(n-p,p)\left(\frac{d^0}{1^{0|1}.dh^0}\left(\frac{\Delta\varphi x}{h}\right), \frac{d^1}{1^{1|1}.dh^1}\left(\frac{\Delta\varphi x}{h}\right), \ldots\right)$$

folglich

331) $$\frac{d^n \mathrm{fy}}{1^{n|1}\,dx^n} = \left(\frac{d^0 \mathrm{fy}}{1^{0|1}\,dy^0} \cdot \frac{d^n}{1^{n|1}\,dh^n} \left(\frac{\Delta\varphi x}{h}\right)^0 + \frac{d^1 \mathrm{fy}}{1^{1|1}\,dy^1} \cdot \frac{d^{n-1}}{1^{n-1|1}\,dh^{n-1}} \left(\frac{\Delta\varphi x}{h}\right)^1 + \ldots\ldots \right.$$

$$\left. \ldots\ldots\ldots + \frac{d^n \mathrm{fy}}{1^{n|1}\,dy^n} \cdot \frac{d^0}{1^{0|1}\,dh^0} \left(\frac{\Delta\varphi x}{h}\right)^n \right)_{h=0}$$

Diese Bildungsweise gibt Wronski Seite 63 N. 198.

§. 90.

Es sei

332) $$y_1 = \varphi_1 x_1\,,\quad y_2 = \varphi_2 x_2\,,\quad y_3 = \varphi_3 x_3\,,\ \ldots\ldots$$

man sucht das $n$te Differential von $f(y_1, y_2, y_3, \ldots, y_m)$

Wir setzen

$$\frac{\Delta_{x1}\varphi_1 x_1}{h} = H_1\,,\quad \frac{\Delta_{x2}\varphi_2 x_2}{h} = H_2\,,\quad \frac{\Delta_{x3}\varphi_3 x_3}{h} = H_3\,,\ldots\ldots\ldots$$

und erhalten nach N. 283

333) $$\frac{d^{n1+n2+\ldots+n(m)} f(y_1, y_2, \ldots, y_m)}{1^{n1|1}1^{n2|1}\ldots1^{n(m)|1}\,dx_1^{n1}\,dx_2^{n2}\ldots dx_m^{n(m)}} =$$

$$\Sigma \frac{d^{p1+p2+\ldots+p(m)} f(y_1, y_2, \ldots, y_m)}{1^{p1|1}1^{p2|1}\ldots1^{p(m)|1}\,dy_1^{p1}\ldots dy_m^{p(m)}}\, C(n1-p1,p1)_1\, C(n2-p2,p2)_2 \ldots C(n(m)-p(m),p(m))_m$$

wo dem $p1,\ p2,\ \ldots\ldots,\ p(m)$ alle Werthe von $0,\ 1,\ 2,\ \ldots\ldots,$ bis $n1,\ n2,\ \ldots\ldots,\ n(m)$ gegeben und

$$C(\ldots)_1 \text{ aus } \left(\frac{d^0 H_1}{1^{0|1}\,dh^0}\right)_{h=0},\ \left(\frac{d^1 H_1}{1^{1|1}\,dh^1}\right)_{h=0},\ \ldots\ldots\ldots$$

$$C(\ldots)_2 \text{ aus } \left(\frac{d^0 H_2}{1^{0|1}\,dh^0}\right)_{h=0},\ \left(\frac{d^1 H_2}{1^{1|1}\,dh^1}\right)_{h=0},\ \ldots\ldots\ldots$$

. . . .

$$C(\ldots.)_m \text{ aus } \left(\frac{d^0 H_m}{1^{0|1}\,dh^0}\right)_{h=0},\ \left(\frac{d^1 H_m}{1^{1|1}\,dh^1}\right)_{h=0},\ \ldots\ldots\ldots$$

gebildet werden.

Oder auch nach 331

$$334)\quad \frac{d^{n1+n2+..+n(m)}f(y_1,\ldots,y_m)}{1^{n1|1}\ldots 1^{n(m)|1}\,dx_1^{n1}\ldots dx_m^{n(m)}} =$$

$$\Sigma\,\frac{d^{p1+p2+..+p(m)}f(y_1,\ldots,y_m)}{1^{p1|1}\ldots 1^{p(m)|1}\,dy_1^{p1}\ldots dy_m^{p(m)}}\cdot\frac{d^{n1-p1}H_1^{p1}}{1^{n1-p1|1}\,dh^{n1-p1}}\cdot\frac{d^{n2-p2}H_2^{p2}}{1^{n2-p2|1}\,dh^{n2-p2}}\cdots\frac{d^{n(m)-p(m)}H_m^{p(m)}}{1^{n(m)-p(m)|1}\,dh^{n(m)-p(m)}}$$

wo p 1, p 2, . . . die vorigen Werthe erhalten.

Das vollständige *n*te Differential von $f(y_1, \ldots, y_m)$ wird jetzt eben so gefunden, nämlich

$$335)\quad \frac{d^n f(y_1,\ldots,y_m)}{1^{n|1}} = \Sigma\,\frac{d^{p1+p2+\ldots+p(m)}f(y_1,\ldots,y_m)}{1^{p1|1}\ldots\ldots 1^{p(m)|1}\,dy_1^{p1}\ldots\ldots dy_m^{p(m)}}.C(n1-p1,p1)_1.C(n2-p2,p2)_2$$

$$\ldots\ldots\ldots C(n(m)-p(m),p(m))_m\cdot(dx_1)^{n1}(dx_2)^{n2}\ldots\ldots(dx_m)^{n(m)},\ h=0$$

oder

$$336)\ = \Sigma\,\frac{d^{p1+\ldots\ldots+p(m)}f(y_1,\ldots,y_m)}{1^{p1|1}\ldots 1^{p(m)|1}\cdot dy_1^{p1}\ldots dy_m^{p(m)}}\cdot\frac{d^{n1-p1}H_1^{p1}\,d^{n2-p2}H_2^{p2}\ldots d^{n(m)-p(m)}H_m^{p(m)}}{1^{n1-p1|1}\,1^{n2-p2|1}\ldots 1^{n(m)-p(m)|1}\,(dh)^{n-(p1+p2+..+p(m))}}$$

$$\times(dx_1)^{n1}(dx_2)^{n2}\ldots(dx_m)^{n(m)},\ h=0$$

wo

$$n1 + n2 + \ldots\ldots + n(m) = n$$

und

$$p1 = 0, 1, 2, \ldots\ldots, n1$$
$$p2 = 0, 1, 2, \ldots\ldots, n2$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$p(m) = 0, 1, 2, \ldots\ldots, n(m)$$

Während p1, p2, ..., p(m) dieselben bleiben, können n1, n2, ..., n(m) sich verändern, und es kann für dasselbe $p1$ sein $n1-p1 = 0, 1, 2, \ldots$ bis $n1-p1$

$p2 \qquad n2-p2 = 0, 1, 2, \ldots$ bis $n2-p2$

$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$p(m) \qquad n(m)-p(m) = 0, 1, 2, \ldots$ bis $n(m)-p(m)$

Es kann also für dieselben $p1, p2, \ldots, p(m)$ gesetzt werden

$$\Sigma \frac{d^{n1-p1} H_1^{p1} \,.\, d^{n2-p2} H_2^{p2} \ldots\ldots d^{n(m)-p(m)} H_m^{p(m)}}{1^{n1-p1|1} \,.\, 1^{n2-p2|1} \ldots 1^{n(m)-p(m)|1} \,.\, (dh)^{n1-p1+n2-p2+\ldots+n(m)-p(m)}}$$

$$= \frac{d^{n1+n2+\ldots+n(m)-p1-p2-\ldots-p(m)} (H_1^{p1} \,.\, H_2^{p2} \ldots\ldots H_m^{p(m)})}{1^{n1+n2+\ldots+n(m)-p1-p2-\ldots-p(m)|1} \,.\, (dh)^{n1+\ldots+n(m)-p1-\ldots-p(m)}}$$

$$= \frac{d^{n-r} (H_1^{p1} \,.\, H_2^{p2} \,.\, H_3^{p3} \,.\,.\,.\, H_m^{p(m)})}{1^{n-r|1} \,.\, (dh)^{n-r}}$$

und folglich die Bildungsweise des *n*ten Differentials auf folgende Art angegeben werden

$$337)\quad \frac{d^n f(y_1,\ldots,y_m)}{1^{n|1}} = \Sigma \frac{d^r f(y_1,\ldots,y_m)}{1^{p1|1} 1^{p2|1} \ldots 1^{p(m)|1}\, dy_1^{p1} dy_2^{p2} \ldots dy_m^{pm}} \times \frac{d^{n-r}(H_1^{p1} H_2^{p2} \ldots H_m^{pm})}{1^{n-r|1} (dh)^{n-r}}$$
$$\times (dx_1)^{n1} (dx_2)^{n2} \ldots (dx_m)^{n(m)},\ h = 0$$

wo

$$\begin{array}{lcl}
n1 + n2 + \dots + n(m) & = & n \\
p1 & = & 0, 1, 2, \dots, n1 \\
p2 & = & 0, 1, 2, \dots, n2 \\
\dots & & \\
p(m) & = & 0, 1, 2, \dots, n(m) \\
r & = & p1 + p2 + \dots + p(m) \\
r & = & 0, 1, 2, \dots, n \\
n1 & = & 0, 1, \dots, n \\
n2 & = & 0, 1, \dots, n \\
\dots & & \\
n(m) & = & 0, 1, \dots, n
\end{array}$$

gesetzt werden muss.

Diese Bildungsweise gibt Wronski Seite 137 N. 252.

Sechste Abtheilung.

I. DIFFERENTIIREN DER FUNCTIONEN, WELCHE DURCH UNENTWICKELTE GLEICHUNGEN GEGEBEN SIND.

§. 91.

Ist

338) $$f(y, x) = 0$$

die Gleichung, welche angibt, dass y eine Function von x ist, so ist nach der frühern Untersuchung über die Unterschiede §. 37, wenn Δx also auch Δy verschwindet,

339) $$d^1 f(y, x) = 0, \; d^2 f(y, x) = 0, \; d^3 f(y, x) = 0, \; \ldots$$

und nach §. 38

340) $$\frac{d_y f(y, x)}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} + \frac{d_x f(y, x)}{dx} = 0$$

und

341) $$\frac{dy}{dx} = - \frac{d_x f(y, x)}{dx} : \frac{d_y f(y, x)}{dy}$$

Wenn diese angezeigten Differentiationen vorgenommen werden, so entsteht eine Function von y und von x, welche auf folgende Art bezeichnet werden mag

342) $$\frac{dy}{dx} = f_1(y, x)$$

§. 92.

Nachdem $\frac{dy}{dx}$ gefunden ist, kann eine Aufgabe von viel grösserem Umfange mit Leichtigkeit gelöset werden; nämlich

Es sei y eine Function von x und durch die Gleichung

$$f(y, x) = 0$$

gegeben; man bilde die höheren Differentiale einer andern Function von y nämlich von Fy.

Es ist nur nöthig die Gleichung 342 mit $\frac{d\,Fy}{dy}$ zu vervielfachen, es entsteht dadurch

$$\frac{dFy}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = f_1(y, x) \cdot \frac{dFy}{dy}$$

mithin, wenn

343) $$\frac{dFy}{dy} = F_1(y)$$

gesetz wird,

344) $$\frac{dFy}{dx} = f_1(y, x) \,.\, F_1 y = f_2(y, x)$$

Die höheren Differentiale von der Function Fy können jetzt nach früheren Vorschriften §. 74 gebildet werden.

§. 93.

Hat die vorgegebene Gleichung eine besondere Form wie

345) $$fy - \varphi x = 0 \quad \text{oder} \quad fy = \varphi x$$

in welcher y und x gesondert sind, so ist

346) $$\frac{dy}{dx} = \frac{d\varphi x}{dx} : \frac{dfy}{dy}$$

Sollen nun die höheren Differentiale von Fy gebildet werden, so ist

$$\frac{dFy}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{d\varphi x}{dx} \times \frac{\frac{dFy}{dy}}{\frac{dfy}{dy}}$$

oder wenn

347) $$\frac{d\varphi x}{dx} = \varphi_1 x \quad \text{und} \quad \frac{dFy}{dy} : \frac{dfy}{dy} = F_1 y$$

gesetzt wird,

348) $$\frac{dFy}{dx} = \varphi_1 x . F_1 y$$

Diese Gleichung unterscheidet sich dadurch von 344, dass hier x und y in zweien verschiedenen Functionen von einander getrennt sind.

§. 94.

Der einfachste Fall, wo

349) $$fy = x$$

ist, und die höheren Differentiale von Fy gebildet werden sollen, mag hier besonders gewürdigt werden. Es ist

350) $$\frac{dy}{dx} = \left(\frac{dfy}{dy}\right)^{-1} = \frac{dy}{dfy}$$

mithin

351) $$\frac{dFy}{dx} = \frac{dFy}{dy} \cdot \left(\frac{dfy}{dy}\right)^{-1} = \frac{dFy}{dfy}$$

oder wenn

352) $$\left(\frac{d\,\mathrm{f}y}{dy}\right)^{-1} = \mathrm{f}_1 y \quad \text{und} \quad \frac{d\,\mathrm{F}y}{dy} = \mathrm{F}_1 y$$

gesetzt wird,

353) $$\frac{d\,\mathrm{F}y}{dx} = \mathrm{f}_1 y\,.\,\mathrm{F}_1 y$$

Die höheren Differentiale von Fy sind nach diesem folgende:

$$\frac{d^2\,\mathrm{F}y}{dx^2} = \frac{dy}{dx}\cdot\frac{d(\mathrm{f}_1 y\,.\,\mathrm{F}_1 y)}{dy} = \mathrm{f}_1 y\,.\,\frac{d}{dy}(\mathrm{f}_1 y\,.\,\mathrm{F}_1 y)$$

$$\frac{d^3\mathrm{F}y}{dx^3} = \frac{dy}{dx}\cdot\frac{d}{dy}\left(\mathrm{f}_1 y\cdot\frac{d}{dy}\left(\mathrm{f}_1 y\,.\,\mathrm{F}_1 y\right)\right) = \mathrm{f}_1 y\cdot\frac{d}{dy}\left(\mathrm{f}_1 y\cdot\frac{d}{dy}\left(\mathrm{f}_1 y\,.\,\mathrm{F}_1 y\right)\right)$$

und allgemein

354) $$\frac{d^n\mathrm{F}y}{dx^n} = \left(\mathrm{f}_1 y\cdot\frac{d}{dy}\right)^{n-1}(\mathrm{f}_1 y\,.\,\mathrm{F}_1 y) = \left(\frac{d}{d\,\mathrm{f}y}\right)^{n-1}\left(\frac{d\,\mathrm{F}y}{d\,\mathrm{f}y}\right)$$

Dieses mit dem Vervielfachen abwechselnde Differential des Products $\mathrm{f}_1 y\,.\,\mathrm{F}_1 y$ lässt sich nach 206 in folgende einfachere Differentiale auflösen:

355) $$\frac{d^n\,\mathrm{F}y}{1^{n|1}.(dx)^n} = \frac{1}{n}\left(\frac{1}{1^{0|1}}\left(\mathrm{f}_1 y\cdot\frac{d}{dy}\right)^0 \mathrm{f}_1 y\cdot\frac{1}{1^{n-1|1}}\left(\mathrm{f}_1 y\cdot\frac{d}{dy}\right)^{n-1}\mathrm{F}_1 y\right.$$
$$+\frac{1}{1^{1|1}}\left(\mathrm{f}_1 y\cdot\frac{d}{dy}\right)^1 \mathrm{f}_1 y\cdot\frac{1}{1^{n-2|1}}\left(\mathrm{f}_1 y\cdot\frac{d}{dy}\right)^{n-2}\mathrm{F}_1 y$$
$$+\frac{1}{1^{2|1}}\left(\mathrm{f}_1 y\cdot\frac{d}{dy}\right)^2 \mathrm{f}_1 y\cdot\frac{1}{1^{n-3|1}}\left(\mathrm{f}_1 y\,\frac{d}{dy}\right)^{n-3}\mathrm{F}_1 y$$
$$+\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.$$
$$+\frac{1}{1^{n-1|1}}\left(\mathrm{f}_1 y.\frac{d}{dy}\right)^{n-1} \mathrm{f}_1 y\cdot\frac{1}{1^{0|1}}\left(\mathrm{f}_1 y\cdot\frac{d}{dy}\right)^0\mathrm{F}_1 y$$

oder auch auf folgende Art behandeln:

Zuerst werden die Differentiale $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, $\frac{d^3y}{dx^3}$, ... gebildet und zwar

356)
$$\frac{d^1 y}{1^{1|1} . dx} = \frac{1}{1^{1|1}} . f_1 y$$

$$\frac{d^2 y}{1^{2|1} . dx^2} = \frac{1}{1^{2|1}} . \left(f_1 y . \frac{d}{dy}\right)^1 f_1 y$$

$$\frac{d^3 y}{1^{3|1} . dx^3} = \frac{1}{1^{3|1}} . \left(f_1 y . \frac{d}{dy}\right)^2 f_1 y$$

$$\frac{d^4 y}{1^{4|1} . dx^4} = \frac{1}{1^{4|1}} . \left(f_1 y . \frac{d}{dy}\right)^3 f_1 y$$

$$. \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; .$$

und dann das *n*te Differential von F y entweder nach der Vorschrift

357)
$$\frac{d^n Fy}{1^{n|1} dx^n} = \frac{d^0 Fy}{1^{0|1} dy^0} . C(n, 0) + \frac{d^1 Fy}{1^{1|1} dy^1} . C(n, 1) + \ldots + \frac{d^n Fy}{1^{n|1} dy^n} . C(n, n)$$
$$\left(\frac{d^1 y}{1^{1|1} dx^1}, \frac{d^2 y}{1^{2|1} dx^2}, \frac{d^3 y}{1^{3|1} dx^3}, \ldots \ldots \right)$$

oder weil

$$\frac{d^n Fy}{1^{n|1} dx^n} = \frac{1}{n} . \frac{d^{n-1}(f_1 y . F_1 y)}{1^{n-1|1} . dx^{n-1}}$$

ist, nach folgender Vorschrift:

358)
$$\frac{d^n Fy}{1^{n|1} dx^n} = \frac{1}{n} . \left(\frac{d^0(f_1 y . F_1 y)}{1^{0|1} . dy^0} . C(n-1, 0) + \frac{d^1(f_1 y . F_1 y)}{1^{1|1} dy^1} . C(n-1, 1)\right.$$
$$\left. + \frac{d^2(f_1 y . F_1 y)}{1^{2|1} . dy^2} . C(n-1, 2) + \ldots + \frac{d^{n-1}(f_1 y . F_1 y)}{1^{n-1|1} . dy^{n-1}} . C(n-1, n-1)\right)$$
$$\left(\frac{d^1 y}{1^{1|1} dx^1}, \frac{d^2 y}{1^{2|1} dx^2}, \frac{d^3 y}{1^{3|1} dx^3}, \ldots \ldots \right)$$

II. Uebertragen der Differentiale in Hinsicht eines Elements auf Differentiale in Hinsicht eines fremden Elements bei Functionen, welche durch unentwickelte Gleichungen gegeben sind.

§. 95.

Es sei y eine Function von x und durch die Gleichung

359) $$fy = x$$

gegeben, man sucht die Differentiale von Fy in Hinsicht x.

Zu der Auflösung dieser Aufgabe nehmen wir die Gleichung 319 zu Hülfe, nämlich, wenn k die Zunahme von y ist,

$$\left(\frac{dfy}{dy}\right)^{-1} \cdot \frac{d^n}{dk^{n-1}dy}\left(\frac{dF(y+k)}{dk} \cdot \left(\frac{\Delta fy}{k}\right)^{-n}\right)_{k=0} = \frac{d^n}{dk^n}\left(\frac{dF(y+k)}{dk} \cdot \left(\frac{\Delta fy}{k}\right)^{-n-1}\right)_{k=0}$$

Ferner ist nach 351

$$\frac{dFy}{dx} = \frac{dFy}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = \left(\frac{dfy}{dy}\right)^{-1} \cdot \frac{dFy}{dy}$$

oder wenn

$$\frac{dFy}{dy} = \left(\frac{dF(y+k)}{dk}\right)_{k=0}$$

gesetzt wird,

$$\frac{dFy}{dx} = \left(\frac{dfy}{dy}\right)^{-1} \cdot \left(\frac{dF(y+k)}{dk}\right)_{k=0}$$

Wird nun in der obigen Hülfsgleichung $n = 0$ gesetzt, so wird

$$\frac{dFy}{dx} = \frac{d^0}{dk^0}\left(\frac{dF(y+k)}{dk} \cdot \left(\frac{\Delta fy}{k}\right)^{-1}\right)_{k=0}$$

Hiedurch ist die Rechnung eingeleitet; gehen wir zu dem zweiten Differentiale über, so finden wir

$$\frac{d^2Fy}{dx^2} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{d}{dy}\left(\frac{dFy}{dx}\right) = \left(\frac{dfy}{dy}\right)^{-1} \cdot \frac{d^1}{dk^0 dy}\left(\frac{dF(y+k)}{dk} \cdot \left(\frac{\Delta fy}{k}\right)^{-1}\right)_{k=0}$$

und folglich, wenn in der obigen Hülfsgleichung $n = 1$ gesetzt wird

$$\frac{d^2Fy}{dx^2} = \frac{d^1}{dk^1}\left(\frac{dF(y+k)}{dk} \cdot \left(\frac{\Delta fy}{k}\right)^{-2}\right)_{k=0}$$

Ueberhaupt, ist

$$\frac{d^{n-1}Fy}{dx^{n-1}} = \frac{d^{n-2}}{dk^{n-2}}\left(\frac{dF(y+k)}{dk} \cdot \left(\frac{\Delta fy}{k}\right)^{-n+1}\right)_{k=0}$$

gefunden, so besteht der Uebergang zum *n*ten Differentiale in Folgendem:

$$\frac{d^nFy}{dx^n} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{d}{dy}\left(\frac{d^{n-1}Fy}{dx^{n-1}}\right) = \left(\frac{dfy}{dy}\right)^{-1} \cdot \frac{d^{n-1}}{dk^{n-2}\,dy}\left(\frac{dF(y+k)}{dk} \cdot \left(\frac{\Delta fy}{k}\right)^{-n+1}\right)_{k=0}$$

Wird nun in der obigen Hülfsgleichung $n-1$ statt n gesetzt, so ergibt sich folgende allgemeine Bildungsweise

360) $$\frac{d^nFy}{dx^n} = \frac{d^{n-1}}{dk^{n-1}}\left(\frac{dF(y+k)}{dk} \cdot \left(\frac{\Delta fy}{k}\right)^{-n}\right)_{k=0}$$

welche auch **Wronski** Phil. d. l. Te. Seite 53 N. 189 gibt.

Von dieser können wir zu einer andern Bildungsweise übergehen. Setzen wir nämlich

$$y + k = y_1 \quad \text{also} \quad k = y_1 - y \quad \text{und} \quad dk = dy_1$$

so wie auch

$$\frac{dF(y+k)}{dk} = \frac{dF(y_1)}{dy_1}$$

und

$$\frac{\Delta fy}{k} = \frac{f(y+k) - fy}{k} = \frac{f(y_1) - f(y)}{y_1 - y}$$

so erhalten wir folgende merkwürdige Bildungsweise

$$361)\qquad \frac{d^n\,Fy}{dx^n} = \frac{d^{n-1}}{dy_1^{n-1}}\left(\left(\frac{y_1-y}{fy_1-fy}\right)^n \cdot \frac{dF(y_1)}{dy_1}\right)_{y_1=y}$$

welche Bürmann zuerst im Jahre 1803 bekannt gemacht hat.

§. 96.

Ist die Gleichung

$$fy = x$$

gegeben, und ist

$$362)\qquad y = \varphi x$$

die umgekehrte Function, so lässt sich der einzelne Fall

$$\frac{d^n(y^m)}{dx^n} \quad \text{oder} \quad \frac{d^n(\varphi x)^m}{dx^n}$$

leicht aus der Gleichung 360 herleiten; es ist nämlich

$$Fy = y^m$$

und

$$\frac{dF(y+k)}{dk} = \frac{d(y+k)^m}{dk} = m(y+k)^{m-1}$$

und folglich

$$363)\qquad \frac{d^n(y^m)}{dx^n} \text{ oder } \frac{d^n(\varphi x)^m}{dx^n} = m \cdot \frac{d^{n-1}}{dk^{n-1}}\left((y+k)^{m-1} \,.\, \left(\frac{\Delta\, fy}{k}\right)^{-n}\right)_{k=0}$$

Diese Gleichung findet Wronski P. d. l. T. II. Seite 229 N. 312.

III. Uebertragen der Differentiale in Hinsicht eines Elements auf Differentiale in Hinsicht eines andern Elements, welches sich in den gegebenen Gleichungen befindet.

§. 97.

Es sei

364) $$\varphi x = f(a + b \cdot \pi x)$$

In dieser Gleichung ist x sowohl von a als von b abhängig, die beiden Elemente a und b selbst sind von einander unabhängig.

Wird zur Abkürzung

$$a + b \cdot \pi x = y$$

gesetzt, und das Differential in Hinsicht a genommen

$$\left(\frac{d\varphi x}{dx} - b \cdot \frac{d\pi x}{dx} \cdot \frac{d\,f y}{dy}\right) \cdot \frac{dx}{da} = \frac{d\,f y}{dy}$$

und auch in Hinsicht b

$$\left(\frac{d\,\varphi x}{d\,x} - b \cdot \frac{d\,\pi\,x}{dx} \cdot \frac{d\,f\,y}{dy}\right) \cdot \frac{d\,x}{d\,b} = \pi x \cdot \frac{d\,f\,y}{dy}$$

und werden diese beiden Gleichungen mit einander verbunden, so wird

365) $$\frac{d\,x}{d\,b} = \pi x \cdot \frac{d\,x}{d\,a}$$

Nach dieser Gleichung lässt sich das Differential von x in Hinsicht b auf jenes in Hinsicht a übertragen. Dieses gilt aber nicht allein vom Differentiale von x sondern auch vom Differentiale von ψx, welches eine Function von x und andern beständigen Grössen ist; denn wird die vorstehende Gleichung mit $\frac{d\,\psi x}{dx}$ vervielfacht, so wird

$$\frac{d\,\psi x}{dx} \cdot \frac{dx}{db} = \pi x \cdot \frac{d\,\psi x}{dx} \cdot \frac{dx}{da}$$

oder

366) $$\frac{d\,\psi x}{db} = \pi x \cdot \frac{d\,\psi x}{da}$$

Die Function ψx ist ganz allgemein, nur darf sie keine Differentiale von x oder kein $\frac{dx}{da}$ enthalten, denn

$$\frac{d}{db}\,\psi\left(x, \frac{dx}{da}\right) = \frac{d\psi\left(x, \frac{dx}{da}\right)}{dx} \cdot \frac{dx}{db} + \frac{d\psi\left(x, \frac{dx}{da}\right)}{d\left(\frac{dx}{da}\right)} \cdot \frac{d^2\left(\frac{dx}{da}\right)}{db}$$

Da nun

$$\frac{d\left(\frac{dx}{da}\right)}{db} = \frac{d}{da}\left(\frac{dx}{db}\right) = \frac{d}{da}\left(\pi x \cdot \frac{dx}{da}\right)$$

aber nicht

$$\frac{d\left(\frac{dx}{da}\right)}{db} = \pi x \cdot \frac{d}{da}\left(\frac{dx}{da}\right)$$

ist, so kann auch statt $\frac{d}{db}\psi\left(x, \frac{dx}{da}\right)$ nie gesetzt werden

$$\pi x \cdot \frac{d}{da}\psi\left(x, \frac{dx}{da}\right)$$

Wollen wir auch zu den höheren Differentialen von ψx in Hinsicht b übergehen, so zeigt uns diese Bemerkung, welchem Wege wir ausweichen müssen. Wir nehmen daher eine frühere allgemeine Wahrheit 290 zu Hülfe; nach dieser ist, weil x eine Function von zweien unter sich unabhängigen Grössen a und b ist, auch bei Producten eine Verwechselung der Elemente a und b gestattet, und es ist

$$\frac{d}{db}\left((\pi x)^{n} \cdot \frac{d}{da}(\psi x)\right) = \frac{d}{da}\left((\pi x)^{n} \cdot \frac{d}{db}(\psi x)\right)$$

Wird diese allgemeine Wahrheit mit der obigen 366 verbunden, so entspringt daraus folgende

$$\frac{d}{db}\left((\pi x)^{n} \cdot \frac{d}{da}(\psi x)\right) = \frac{d}{da}\left((\pi x)^{n+1} \cdot \frac{d\psi x}{da}\right)$$

wodurch der Weg zu den höheren Differentialen von ψx in Hinsicht b gebahnt ist, denn

$$\frac{d^2\psi x}{db^2} = \frac{d}{db}\left((\pi x)^{1} \cdot \frac{d\psi x}{da}\right) = \frac{d}{da}\left((\pi x)^{2} \cdot \frac{d\psi x}{da}\right)$$

$$\frac{d^3\psi x}{db^3} = \frac{d}{db}\left(\frac{d}{da}\left((\pi x)^{2} \cdot \frac{d\psi x}{da}\right)\right) = \frac{d}{da}\left(\frac{d}{db}\left((\pi x)^{2}\, \frac{d\psi x}{da}\right)\right) = \frac{d^2}{da^2}\left((\pi x)^{3} \cdot \frac{d\psi x}{da}\right)$$

Ueberhaupt ist

$$\frac{d^{n-1}\psi x}{db^{n-1}} = \frac{d^{n-2}}{da^{n-2}}\left((\pi x)^{n-1} \cdot \frac{d\psi x}{da}\right)$$

gefunden, so ist

$$\frac{d^{n}\psi x}{db^{n}} = \frac{d^{n-2}}{da^{n-2}}\left(\frac{d}{db}\left((\pi x)^{n-1} \cdot \frac{d\psi x}{da}\right)\right)$$

und nach der obigen Gleichung

$$367)\qquad \frac{d^{n}\psi x}{db^{n}} = \frac{d^{n-1}}{da^{n-1}}\left((\pi x)^{n} \cdot \frac{d\psi x}{da}\right)$$

§. 98.

Wir legen eine Aufgabe von grösserem Umfange vor

$$368)\,\varphi x = f\Big(_{m+1}\, a\,\pi x + f_1\Big(_{m}\, a_1\pi_1 x + f_2\Big(\, a_2\pi_2 x + \ldots + f_{m-1}\Big(_{2}\, a_{m-1}\pi_{m-1} x + f_m\big(_{1}\, a_m\pi_m x\big)_1\Big)_2 \ldots\Big)_{m+1}$$

und fragen: wie können die Differentiale irgend einer Function von x in Hinsicht der Elemente $a_1, a_2, \ldots, a_m$ auf die Differentiale in Hinsicht a übertragen werden?

Zur Vereinfachung der Rechnung werde gesetzt

369)
$$\begin{aligned}
a\,\pi\,x + f_1\;{}_{m}\!\left(a_1\,\pi_1\,x + \ldots\ldots + f_m\left({}_1a_m\,\pi_m\,x\right)_1 \ldots\ldots\right)_m &= X \\
a_1\,\pi_1\,x + f_2\;{}_{m-1}\!\left(a_2\,\pi_2\,x + \ldots\ldots + f_m\left({}_1a_m\,\pi_m\,x\right)_1 \ldots\right)_{m-1} &= X_1 \\
a_2\,\pi_2\,x + f_3\;{}_{m-2}\!\left(a_3\,\pi_3\,x + \ldots\ldots + f_m\left({}_1a_m\,\pi_m\,x\right)_1 \ldots\right)_{m-2} &= X_2 \\
a_3\,\pi_3\,x + f_4\;{}_{m-3}\!\left(a_4\,\pi_4\,x + \ldots\ldots + f_m\left({}_1a_m\,\pi_m\,x\right)_1 \ldots\right)_{m-3} &= X_3 \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
a_{m-1}\,\pi_{m-1}\,x + f_m\left({}_1a_m\,\pi_m\,x\right)_1 &= X_{m-1} \\
a_m\,\pi_m\,x &= X_m
\end{aligned}$$

Es ist

$$\frac{d_{ap}\,fX}{da_p} = \frac{dfX}{dX} \cdot \frac{df_1X_1}{dX_1} \cdot \frac{df_2X_2}{dX_2} \;\ldots\ldots\; \frac{df_pX_p}{dX_p} \cdot \pi_p\,x$$

und

$$\frac{d\varphi x}{dx} \cdot \frac{dx}{da_p} = \frac{dfX}{dx} \cdot \frac{dx}{da_p} + \frac{d_{ap}\,fX}{da_p}$$

folglich wenn zur Abkürzung

370)
$$\frac{df_w\,X_w}{dX_w} = X^{(w)}$$

gesetzt wird

$$\frac{dx}{da_p} \cdot \frac{d}{dx}\,(\varphi x - fX) = X^{(0)} \,.\, X^{(1)} \ldots\ldots X^{(p)} \,.\, \pi_p\,x$$

Nach diesem ist also

$$\frac{dx}{da}\cdot\frac{d}{dx}(\varphi x - fX) = X^{(0)}\,\pi x$$

$$\frac{dx}{da_1}\cdot\frac{d}{dx}(\varphi x - fX) = X^{(0)}.X^{(1)}.\pi_1 x$$

$$\frac{dx}{da_2}\cdot\frac{d}{dx}(\varphi x - fX) = X^{(0)}.X^{(1)}.X^{(2)}.\pi_2 x$$

$$\frac{dx}{da_3}\cdot\frac{d}{dx}(\varphi x - fX) = X^{(0)}.X^{(1)}.X^{(2)}.X^{(3)}.\pi_3 x$$

. . . .

$$\frac{dx}{da_m}\cdot\frac{d}{dx}(\varphi x - fX) = X^{(0)}.X^{(1)}.X^{(2)}.X^{(3)}\ldots\ldots X^{(m)}.\pi_m x$$

Werden nun je zwei aufeinanderfolgende Gleichungen mit einander verbunden, so entstehen die Gleichungen

371)
$$\frac{dx}{da_1} = X^{(1)}\cdot\frac{\pi_1 x}{\pi x}\cdot\frac{dx}{da}$$

$$\frac{dx}{da_2} = X^{(2)}\cdot\frac{\pi_2 x}{\pi_1 x}\cdot\frac{dx}{da_1} = X^{(1)}\cdot X^{(2)}\cdot\frac{\pi_2 x}{\pi x}\cdot\frac{dx}{da}$$

$$\frac{dx}{da_3} = X^{(3)}\cdot\frac{\pi_3 x}{\pi_2 x}\cdot\frac{dx}{da_2} = X^{(1)}.X^{(2)}.X^{(3)}\cdot\frac{\pi_3 x}{\pi x}\cdot\frac{dx}{da}$$

. . . .

$$\frac{dx}{da_m} = X^{(m)}.\frac{\pi_m x}{\pi_{m-1} x}\cdot\frac{dx}{da_{m-1}} = X^{(1)}.X^{(2)}.X^{(3)}\ldots.X^{(m)}\cdot\frac{\pi_m x}{\pi x}\cdot\frac{dx}{da}$$

welche eine grössere Allgemeinheit erhalten, wenn sie mit $\frac{d\,\psi x}{dx}$ vervielfacht werden,

$$372)\quad \frac{d\psi x}{da_1} = X^{(1)} \cdot \frac{\pi_1 x}{\pi x} \cdot \frac{d\psi x}{da}$$

$$\frac{d\psi x}{da_2} = X^{(1)} . X^{(2)} \cdot \frac{\pi_2 x}{\pi x} \cdot \frac{d\psi x}{da}$$

$$\frac{d\psi x}{da_3} = X^{(1)} . X^{(2)} . X^{(3)} \cdot \frac{\pi_3 x}{\pi x} \cdot \frac{d\psi x}{da}$$

$$. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$

$$\frac{d\psi x}{da_m} = X^{(1)} . X^{(2)} . X^{(3)} \dots X^{(m)} \frac{\pi_m x}{\pi x} \cdot \frac{d\psi x}{da}$$

wo ψx eine Function von x und beständigen Grössen ist, und kein $\frac{dx}{da}$ enthält.

Werden die höheren Differentiale

$$\frac{d^n \psi x}{da_p}, \frac{d^n \psi x}{da_q}, \dots\dots, \frac{d^{n1+n2+\dots\dots} \psi x}{(da_{p1})^{n1} . (da_{p2})^{n2} \dots\dots}$$

auf Differentiale in Hinsicht a übertragen, so zeigen sich verwickeltere Gesetze.

§. 99.

In dem besondern Falle, wo $f_1 = f_2 = f_3 = . . = f_m$ die erste Potenz bedeutet, wird 1 an ihre Stelle gesetzt; die Aufgabe wird dadurch einfacher, nämlich: Es sei

$$373)\quad \varphi x = f(a \pi x + a_1 \pi_1 x + a_2 \pi_2 x + \dots . + a_m \pi_m x)$$

man übertrage die Differentiale von ψx in Hinsicht $a_1, a_2, \dots, a_m$ auf Differentiale von ψx in Hinsicht a.

Die Auflösung liegt in folgenden Gleichungen

374)
$$\frac{d\psi x}{da_1} = \frac{\pi_1 x}{\pi x} \cdot \frac{d\psi x}{da}$$
$$\frac{d\psi x}{da_2} = \frac{\pi_2 x}{\pi x} \cdot \frac{d\psi x}{da}$$
$$\frac{d\psi x}{da_3} = \frac{\pi_3 x}{\pi x} \cdot \frac{d\psi x}{da}$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$\frac{d\psi x}{da_m} = \frac{\pi_m x}{\pi x} \cdot \frac{d\psi x}{da}$$

welche nach 371 gebildet sind.

In diesem Falle befolgen auch die höheren Differentiale wieder ein einfaches Gesetz, worauf wir bei der allgemeinsten Aufgabe 368 verzichten mussten; es ist nämlich nach 290

$$\frac{d}{da_p}\left(F\,x \,.\, \frac{d\psi x}{da}\right) = \frac{d}{da}\left(F\,x \,.\, \frac{d\psi x}{d\,a_p}\right)$$

folglich

$$\frac{d^2\psi x}{da_p^2} = \frac{d}{da_p}\left(\frac{\pi_p x}{\pi x} \cdot \frac{d\psi x}{da}\right) = \frac{d}{da}\left(\frac{\pi_p x}{\pi x} \cdot \frac{d\psi x}{da_p}\right) = \frac{d}{da}\left(\left(\frac{\pi_p x}{\pi x}\right)^2 \cdot \frac{d\psi x}{da}\right)$$

ferner

$$\frac{d^3\psi x}{da_p^3} = \frac{d}{da} \cdot \frac{d}{da_p}\left(\left(\frac{\pi_p x}{\pi x}\right)^2 \cdot \frac{d\psi x}{da}\right) = \frac{d^2}{da^2}\left(\left(\frac{\pi_p x}{\pi x}\right)^3 \cdot \frac{d\psi x}{da}\right)$$

und allgemein

375)
$$\frac{d^n\psi x}{da_p^n} = \frac{d^{n-1}}{da^{n-1}}\left(\left(\frac{\pi_p x}{\pi x}\right)^n \cdot \frac{d\psi x}{da}\right)$$

Ferner ist

$$\frac{d^{n+q}\psi x}{da_p^n\, da_s^q} = \frac{d^{n-1}}{da^{n-1}} \; \frac{d^q}{da_s^q}\left(\left(\frac{\pi_p x}{\pi x}\right)^n \frac{d\psi x}{da}\right)$$

und nach denselben Grundsätzen

$$\frac{d^q}{da_s^q}\left(\left(\frac{\pi_p x}{\pi x}\right)^n \cdot \frac{d\psi x}{da}\right) = \frac{d^q}{da^q}\left(\left(\frac{\pi_p x}{\pi x}\right)^n \cdot \left(\frac{\pi_s x}{\pi x}\right)^q \cdot \frac{d\psi x}{da}\right)$$

folglich

376) $$\frac{d^{n+q}\psi x}{da_p^n \cdot da_s^q} = \frac{d^{n+q-1}}{da^{n+q-1}}\left(\left(\frac{\pi_p x}{\pi x}\right)^n \cdot \left(\frac{\pi_s x}{\pi x}\right)^q \cdot \frac{d\psi x}{da}\right)$$

und allgemein ist

377) $$\frac{d^{n1+n2+\ldots+n(q)}\psi x}{da_{p1}^{n1} \cdot da_{p2}^{n2} \ldots da_{p(q)}^{n(q)}} =$$

$$= \frac{d^{n1+n2+\ldots+n(q)-1}}{(da)^{n1+n2+\ldots+n(q)-1}}\left(\left(\frac{\pi_{p1} x}{\pi x}\right)^{n1} \cdot \left(\frac{\pi_{p2} x}{\pi x}\right)^{n2} \ldots \left(\frac{\pi_{p(q)} x}{\pi x}\right)^{n(q)} \cdot \frac{d\psi x}{da}\right)$$

Aus dieser Untersuchung geht hervor, dass bei diesem Uebertragen der Differentiale die Function f keinen Einfluss hat.

§. 100.

Dieses Uebertragen der Differentiale auf andere Elemente findet auch statt bei Functionen mehrerer veränderlicher Grössen; es sei, z. B.

378) $$\varphi(x, x_1) = f\left(a \cdot \pi(x, x_1) + b \cdot \pi_1(x, x_1)\right)$$

und

$$\varphi_{.}(x, x_1) = f_1\left(a_1 \cdot \gamma(x, x_1) + b_1 \cdot \gamma_1(x, x_1)\right)$$

man übertrage die Differentiale von $\psi(x, x_1)$ in Hinsicht b, b_1 auf Differentiale von $\psi(x, x_1)$ in Hinsicht a und a_1.

Wegen der Kürze wird statt

$$\varphi(x, x_1),\ \pi(x, x_1),\ \pi_1(x, x_1),\ \varphi_1(x, x_1),\ \gamma(x, x_1),\ \gamma_1(x, x_1)$$

gesetzt

$$\varphi\ ,\quad \pi\ ,\quad \pi_1\ ,\quad \varphi_1\ ,\quad \gamma\ ,\quad \gamma_1$$

also

$$\varphi \;=\; f(a\;.\;\pi + b\;.\;\pi_1)$$
$$\varphi_1 \;=\; f_1(a_1 .\, .\;\gamma + b_1\;.\;\gamma_1)$$

Die Elemente a, b und a_1, b_1 sind von einander unabhängig, eben so auch x, x_1 voneinander unabhängig aber Functionen von a, b, a_1, b_1.

Wird in der ersten Gleichung nur x allein als veränderlich angenommen, so ist nach 367

$$\frac{d_x \psi(x, x_1)}{db} = \frac{\pi_1}{\pi} . \frac{d_x\; \psi(x, x_1)}{da}$$

und wenn nur x_1 veränderlich ist

$$\frac{d_{x1}\; \psi(x, x_1)}{db} = \frac{\pi_1}{\pi} . \frac{d_{x1}\; \psi(x, x_1)}{da}$$

beide Gleichungen durch Zuzählen vereint

$$\frac{d_x \psi(x, x_1)}{db} + \frac{d_{x1}\; \psi(x, x_1)}{db} = \frac{\pi_1}{\pi} . \left(\frac{d_x\; \psi(x, x_1)}{da} + \frac{d_{x1}\; \psi(x, x_1)}{da}\right)$$

geben das vollständige Differential von $\psi(x, x_1)$

379) $$\frac{d\,\psi(x, x_1)}{db} = \frac{\pi_1 (x, x_1)}{\pi\,(x, x_1)} . \frac{d\,\psi(x, x_1)}{da}$$

wo sowohl x als x_1 veränderlich ist. Eben so ist bei der zweiten Gleichung

380) $$\frac{d\,\psi(x, x_1)}{db_1} = \frac{\gamma_1(x, x_1)}{\gamma(x, x_1)} . \frac{d\;\psi(x, x_1)}{da_1}$$

oder, wenn wir wegen der Kürze

$$\psi(x, x_1) = \psi \quad , \quad \frac{\pi_1}{\pi} = u \quad , \quad \frac{\gamma_1}{\gamma} = u_1$$

setzen,

381) $$\frac{d\psi}{d\,b} = u \cdot \frac{d\psi}{d\;a} \quad \text{und} \quad \frac{d\;\psi}{d\,b_1} = u_1 \cdot \frac{d\psi}{da_1}$$

Wollen wir zu den höheren Differentialen übergehen, so haben wir die Willkühr in der Ordnung des Differentiirens zu berücksichtigen, welche nach 290 bei von einander unabhängigen Elementen gestattet ist; nach ihr können wir

$$\frac{d}{db}\left(u^m\ \frac{d\psi}{da}\right) = \frac{d}{da}\left(u^m\ \frac{d\psi}{db}\right) = \frac{d}{da}\left(u^{m+1}\ \frac{d\psi}{da}\right)$$

setzen. Diese Verwechselung bahnt uns den Weg zu den höheren Differentialen, nämlich zu

$$\frac{d^2\psi}{db^2} = \frac{d}{db}\left(u\ .\ \frac{d\psi}{da}\right) = \frac{d}{da}\left(u^2\ .\ \frac{d\psi}{da}\right)$$

$$\frac{d^3\psi}{db^3} = \frac{d}{da}\ \frac{d}{db}\left(u^2\ \frac{d\psi}{da}\right) = \frac{d^2}{da^2}\left(u^3\ \frac{d\psi}{da}\right)$$

und allgemein zu

$$\frac{d^n\psi}{db^n} = \frac{d^{n-1}}{da^{n-1}}\left(u^n\ \frac{d\psi}{da}\right)$$

es ist also

382) $$\frac{d^n\psi(x, x_1)}{db^n} = \frac{d^{n-1}}{da^{n-1}}\left(\left(\frac{\pi_1(x, x_1)}{\pi(x, x_1)}\right)^n . \frac{d\psi(x, x_1)}{da}\right)$$

und eben so auch

383) $$\frac{d^n\psi(x,x_1)}{db_1^n} = \frac{d^{n-1}}{da_1^{n-1}}\left(\left(\frac{\gamma_1(x, x_1)}{\gamma(x,x_1)}\right)^n . \frac{d\psi(x,x_1)}{da_1}\right)$$

Nach diesen beiden Vorschriften können die höheren Differentiale in Hinsicht b oder b_1 durch Differentiale in Hinsicht a oder a_1 ersetzt werden. Es ist noch übrig, die Differentiale in Hinsicht b und b_1 zugleich in Differentiale zu übertragen, bei welchen die Elemente a und a_1 zu Grunde gelegt sind. Es ist

$$\frac{d^{n+m}\psi}{db^n . db_1^m} = \frac{d^{n-1}}{d\,a^{n-1}}\ \frac{d^m}{d\,b_1^m}\left(u^n\ .\ \frac{d\psi}{da}\right)$$

Die Auflösung der vorgelegten Aufgabe beruhet also auf dem *m*ten Differentiale

$$\frac{d^m}{db_1^m}\left(u^n\,.\,\frac{d\psi}{d\,a}\right)$$

und dieses wieder ganz auf der Willkühr in der Ordnung des Differentiirens, welches wir in 290 zuerst gezeigt haben. Fangen wir bei m = 1 an, so ergibt sich durch diese Verwechselung der Elemente

$$\frac{d}{db_1}\left(u^n\,\frac{d\psi}{d\,a}\right) = \frac{d}{da}\left(u^n\,\frac{d\psi}{db_1}\right) = \frac{d}{da}\left(u^n\,.\,u_1\,.\,\frac{d\psi}{da_1}\right) = \frac{d}{da_1}\left(u^n\,.\,u_1\,.\,\frac{d\psi}{da}\right)$$

und bei m = 2

$$\frac{d^2}{db_1^2}\left(u^n\,\frac{d\psi}{d\,a}\right) = \frac{d}{da_1}\,\frac{d}{db_1}\left(u^n\,.\,u_1\,.\,\frac{d\psi}{d\,a}\right) = \frac{d}{da_1}\,\frac{d}{da}\left(u^n\,.\,u_1\,.\,\frac{d\psi}{db_1}\right)$$

$$= \frac{d}{da_1}\,\frac{d}{da}\left(u^n\,.\,u_1^2\,.\,\frac{d\psi}{da_1}\right) = \frac{d^2}{da_1^2}\left(u^n\,.\,u_1^2\,.\,\frac{d\psi}{da}\right)$$

und allgemein

$$\frac{d^m}{db_1^m}\left(u^n\,\frac{d\psi}{da}\right) = \frac{d^m}{da_1^m}\left(u^n\,.\,u_1^m\,.\,\frac{d\psi}{da}\right)$$

oder

$$= \frac{d^{m-1}}{da_1^{m-1}}\,.\,\frac{d}{da}\left(u^n\,.\,u_1^n\,.\,\frac{d\psi}{da_1}\right)$$

Es ist folglich

384) $$\frac{d^{n+m}\psi(x,x_1)}{db^n\,.\,db_1^m} = \frac{d^{n+m-1}}{da^{n-1}.da_1^m}\left(\left(\frac{\pi_1(x,x_1)}{\pi(x,x_1)}\right)^n\,.\left(\frac{\gamma_1(x,x_1)}{\gamma(x,x_1)}\right)^m\,.\;\frac{d\psi(x,x_1)}{da}\right)$$

oder

$$= \frac{d^{n+m-1}}{da^n.da_1^{m-1}}\left(\left(\frac{\pi_1(x,x_1)}{\pi(x,x_1)}\right)^n\,.\left(\frac{\gamma_1(x,x_1)}{\gamma(x,x_1)}\right)^m\,.\;\frac{d\psi(x,x_1)}{da_1}\right)$$

Eben so können bei den dreien Gleichungen von der Gestalt

$$\varphi(x, x_1, x_2) = f\left(a\,\pi(x, x_1, x_2) + b\ \ \pi_1(x, x_1, x_2)\right)$$
$$\varphi_1(x, x_1, x_2) = f_1\left(a_1\gamma(x, x_1, x_2) + b_1\gamma_1(x, x_1, x_2)\right)$$
$$\varphi_2(x, x_1, x_2) = f_2\left(a_2\lambda(x, x_1, x_2) + b_2\ \lambda_1(x, x_1, x_2)\right)$$

die Differentiale von $\psi(x,\ x_1,\ x_2)$ in Hinsicht b, b_1, b_2 in Differentiale übertragen werden, bei welchen die Elemente a, a_1, a_2 zu Grunde liegen.

Zu diesem Uebertragen der Differentiale auf Differentiale mit andern veränderlichen Elementen hat uns zuerst die Entwickelung der Functionen in Reihen von Lambert *), Laplace **), Lagrange ***), Veranlassung gegeben, und zwar zu jenen in §. 97 und §. 100, denn §. 98 und §. 99 erscheinen hier zuerst. Man wird in den Schriften dieser Mathematiker andere Wege finden, wodurch sie zum Ziele gelangen, als derjenige ist, den wir hier eingeschlagen haben; aber es wird auch aus unserer Untersuchung deutlich hervorgehen, dass diese Entwickelungen ganz auf der Willkühr in der Wahl der Ordnung beim Differentiiren in (§. 79) beruhen.

---

*) Siehe die Schriften der Berliner Akademie vom Jahre 1770 Seite 225.

**) Die Schriften der französischen Akademie vom Jahre 1777 Seite 99.

***) Theorie der Functionen.

Siebente Abtheilung.

HÖHERE DIFFERENTIALE EINIGER BESTIMMTER FUNCTIONEN.

§. 101.

Bei den bekannten Fällen

$$\frac{d^n \sin:(ax+b)}{dx^n} = a^n \,.\, \sin:\left(\frac{n}{2}\,.\,\pi + ax + b\right)$$

$$\frac{d^n \cos:(ax+b)}{dx^n} = a^n \,.\, \cos:\left(\frac{n}{2}\,.\,\pi + ax + b\right)$$

$$\frac{d^n a^x}{dx^n} = a^x.(\lg:a)^n$$

wollen wir nicht verweilen; es genügt hier, sie erwähnt, und bemerkt zu haben, dass sie sich unmittelbar aus 157, 158 und 162 ergeben. Wir eilen zu umfassenderen und bis jetzt noch nicht gelösten Aufgaben, welche wir in folgenden Zeichen vorlegen und in derselben Ordnung lösen wollen:

$$\text{I.}\quad \frac{d^m}{dx^m}\left((a+bx)^p \,.\left(A+B\,.\,(a+bx)^q\right)^n\right)$$

$$\text{II.}\quad \frac{d^m}{dx^m}\left((a+bx)^p \,.\left(M+N\,.\,\lg\,(a+bx)\right)^n\right)$$

$$\text{III.}\quad \frac{d^m}{dx^m}\left(a^{px}\,.\,(A+B\,.\,a^{qx})^n\right)$$

$$\text{IV.}\quad \frac{d^m}{dx^m}\left(a_1+x,\, a_2+x\,,\ldots\ldots,\, a_p+x\right)^{(n)}$$

$$\text{und}\quad \frac{d^m}{dx^m}\left[a_1+x,\, a_2+x\,,\ldots.,\, a_p+x\right]^{(n)}$$

$$\text{V.}\quad \frac{d^m}{dx^m}\left(\frac{1}{(a_1+x)(a_2+x)\ldots..(a_p+x)}\right)$$

$$\text{VI.}\quad \frac{d^m}{dx^m}\left[\frac{1}{a_1+x},\, \frac{1}{a_2+x},\, \ldots\,.\,,\, \frac{1}{a_p+x}\right]^{(n)}$$

$$\text{VII.}\quad d\underset{n}{\Bigg(}u_n\,.\,d\underset{n-1}{\Bigg(}u_{n-1}.d\underset{n-2}{\Bigg(}u_{n-2}\ldots\ldots.d\underset{2}{\Big(}u_2.d\underset{1}{\big(}u_1\,.\,z\underset{1}{\big)}\underset{2}{\Big)}\;\ldots.\underset{n}{\Bigg)}$$

Von allen diesen allgemeinen Aufgaben sind nur zwei sehr specielle Fälle von I. und VII. bekannt, die an ihrem Orte werden bemerkbar gemacht werden.

I. Höhere Differentiale des Binomiums

$$\left((a+bx)^p.(A+B(a+bx)^q)^n\right)$$

---

§. 102.

Es ist

385) $$\frac{d^1}{dx}\left((a+bx)^p.(A+B(a+bx)^q)^n\right) = p.b.(a+bx)^{p-1}.(A+B(a+bx)^q)^n$$
$$+ n.q.b.B(a+bx)^{p+q-1}.(A+B(a+bx)^q)^{n-1}$$

Nach dieser Vorschrift lassen sich die spätern Differentiale bilden; sie nehmen folgende allgemeine Gestalt an:

386) $$\frac{d^m}{dx^m}\left((a+bx)^p.(A+B(a+bx)^q)^n\right) =$$
$$= \alpha(m,1).n^{0|-1}.(qB)^0.b^m.(a+bx)^{p+0q-m}.(A+B(a+bx)^q)^n$$
$$+ \alpha(m,2).n^{1|-1}.(qB)^1.b^m(a+bx)^{p+1q-m}.(A+B(a+bx)^q)^{n-1}$$
$$+ \alpha(m,3).n^{2|-1}.(qB)^2.b^m(a+bx)^{p+2q-m}.(A+B(a+bx)^q)^{n-2}$$
$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$+ \alpha(m,m+1).n^{m|-1}.(qB)^m.b^m.(a+bx)^{p+m\cdot q-m}.(A+B(a+bx)^q)^{n-m}$$

Die Bildungsweise der Vorzahlen $\alpha(m,1)$, $\alpha(m,2)$, $\alpha(m,3)$, ... ergibt sich durch das Differentiiren der Reihe für $m-1$ in Hinsicht x, nämlich

$$387)\quad \begin{aligned} \mathfrak{a}(m, 1) &= (p + 0\,q-m + 1) \,.\, \mathfrak{a}(m-1, 1) \\ \mathfrak{a}(m, 2) &= (p + 1\,q-m + 1) \,.\, \mathfrak{a}(m-1, 2) + \mathfrak{a}(m-1, 1) \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \mathfrak{a}(m, s+1) &= (p + s q-m + 1) \,.\, \mathfrak{a}(m-1, s+1) + \mathfrak{a}(m-1, s) \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \mathfrak{a}(m, m+1) &= \qquad\qquad 0 \qquad\qquad + \mathfrak{a}(m-1, m) = 1 \end{aligned}$$

Nach dieser zurücklaufenden Bildungsweise erhalten wir folgende Differentiale:

$$388)\quad \frac{d^2}{dx^2}\Big((a+bx)^p.(A+B(a+bx)^q)^n\Big) =$$

$$= (p+0\,q-0)\ (p+0\,q-1)\ b^2\ (a+bx)^{p+0q-2}\ (A+B(a+bx)^q)^n$$

$$+ \left| \begin{matrix} p+0\ q-0 \\ p+1\ q-1 \end{matrix} \right| n^{1|-1}(qB)^1 b^2 (a+bx)^{p+1q-2} (A+B(a+bx)^q)^{n-1}$$

$$+ n^{2|-1}(qB)^2 b^2 (a+bx)^{p+2q-2}\ (A+B(a+bx)^q)^{n-2}$$

ferner

$$389)\quad \frac{d^3}{dx^3}\Big((a+bx)^p(A+B(a+bx)^q)^n\Big) =$$

$$= \quad (p+0q-0)\,(p+0q-1)\,(p+0q-2)\,b^3(a+bx)^{p+0q-3}\,(A+B(a+bx)^q)^n$$

$$+ \left| \begin{array}{c|c} p+0\ q-0 & p+0\ q-1 \\ p+0\ q-0 & p+1\ q-2 \\ p+1\ q-1 & p+1\ q-2 \end{array} \right| n^{1|-1}(qB)^1 b^3 (a+bx)^{p+1q-3} (A+B(a+bx)^q)^{n-1}$$

$$+ \left| \begin{matrix} p+0\ q-0 \\ p+1\ q-1 \\ p+2\ q-2 \end{matrix} \right|\ n^{2|-1}(qB)^2\ b^3\ (a+bx)^{p+2q-3}\ (A+B(a+bx)^q)^{n-2}$$

$$+ \ n^{3|-1}(qB)^3 b^3 (a+bx)^{p+3q-3} (A+B(a+bx)^q)^{n-3}$$

und

$$390)\quad \frac{d^4}{dx^4}\Big((a+bx)^p.(A+B(a+bx)^q)^n\Big) =$$

$$= (p+0q-0)(p+0q-1)(p+0q-2)(p+0q-3)b^4(a+bx)^{p+0q-4}(A+B(a+bx)^q)^n$$

$$+ \left|\begin{array}{c|c|c} p+0q-0 & p+0q-1 & p+0q-2 \\ p+0q-0 & p+0q-1 & p+1q-3 \\ p+0q-0 & p+1q-2 & p+1q-3 \\ p+1q-1 & p+1q-2 & p+1q-3 \end{array}\right| n^{1|-1}(qB)^1 b^4 (a+bx)^{p+1q-4}(A+B(a+bx)^q)^{n-1}$$

$$+ \left|\begin{array}{c|c} p+0q-0 & p+0q-1 \\ p+0q-0 & p+1q-2 \\ p+1q-1 & p+1q-2 \\ p+0q-0 & p+2q-3 \\ p+1q-1 & p+2q-3 \\ p+2q-2 & p+2q-3 \end{array}\right| n^{2|-1}(qB)^2 b^4 (a+bx)^{p+2q-4}(A+B(a+bx)^q)^{n-2}$$

$$+ \left|\begin{array}{c} p+0\,q-0 \\ p+1\,q-1 \\ p+2\,q-2 \\ p+3\,q-3 \end{array}\right| n^{3|-1}(qB)^3 b^4 (a+bx)^{p+3q-4}(A+B(a+bx)^q)^{n-3}$$

$$+ n^{4|-1}(qB)^4 b^4 (a+bx)^{p+4q-4}(A+B(a+bx)^q)^{n-4}$$

§. 103.

Die obige zurücklaufende Bildungsweise 387, aus welcher die vorstehenden Differentiale entsprungen sind, lässt sich auch in eine andere verwandeln, durch welche eine Summirung der Producte in den Vorzahlen oft leichter herbeigeführt werden kann. Wird nämlich $s-1$ statt s und $m+s$ statt m gesetzt,

$$\mathfrak{a}(m+s,\ s) = (p-m+(s-1)(q-1)).\mathfrak{a}(m+s-1,\ s) + \mathfrak{a}(m+s-1,\ s-1)$$

und hierin $s = 1, 2, 3, \ldots\ldots$

$$
\begin{aligned}
a(m+1,\ 1) &= (p-m+0(q-1)) \cdot a(m,1) + a(m,0)\\
a(m+2,\ 2) &= (p-m+1(q-1)) \cdot a(m+1,2) + a(m+1,1)\\
a(m+3,\ 3) &= (p-m+2(q-1)) \cdot a(m+2,3) + a(m+2,2)\\
&\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\\
a(m+s,\ s) &= (p-m+(s-1)(q-1)) \cdot a(m+s-1,s) + a(m+s-1,\ s-1)
\end{aligned}
$$

so entsteht durch Zuzählen dieser Gleichungen folgende zurücklaufende Bildungsweise:

$$
\begin{aligned}
391)\qquad a(m+s,s) = &\ (p-m+0(q-1) \cdot a(m,1)\\
&+ (p-m+1(q-1)) \cdot a(m+1,2)\\
&+ (p-m+2(q-1)) \cdot a(m+2,3)\\
&+ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\\
&+ (p-m+(s-1)(q-1)) \cdot a(m+s-1,s)
\end{aligned}
$$

In dieser Gleichung setzen wir m = 0, 1, 2, 3, ... und summiren die Reihen, welche hiedurch entstehen, nach der Gleichung 509 unserer Analysis Seite 305, nämlich nach der Vorschrift:

$$
\begin{aligned}
&(p-h-1+u(q-1)) \cdot \frac{1^{h+u+1|1}}{1^{h+u+1|1}} && = (p-h-1+u(q-1)) \cdot \frac{(s+h+1)^{h+u+2|-1}}{1^{h+u+2|1}}\\
&+ (p-h-1+(a+1)(q-1)) \cdot \frac{2^{h+u+1|1}}{1^{h+u+1|1}} && \quad + (h+u+2) \cdot (q-1) \cdot \frac{(s+h+1)^{h+u+3|-1}}{1^{h+u+3|1}}\\
&+ (p-h-1+(u+2)(q-1)) \cdot \frac{3^{h+a+1|1}}{1^{h+u+1|1}}\\
&+ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\\
&+ (p-h-1+(s-1)(q-1)) \cdot \frac{(s-u)^{h+u+1|1}}{1^{h+u+1|1}}
\end{aligned}
$$

Wir erhalten hiedurch für die Vorzahlen der Gleichung 386 eine Bildungsweise, welche die Gleichung angibt:

$$392)\qquad a(s+h,s) = N_1^{(h)}.(q-1)^0 . \frac{(s+h)^{h+1|-1}}{1^{h+1|1}} + N_2^{(h)}.(q-1)^1 . \frac{(s+h)^{h+2|-1}}{1^{h+2|1}}$$

$$+ N_3^{(h)}.(q-1)^2 . \frac{(s+h)^{h+3|-1}}{1^{h+3|1}} + \ldots + N_{h+2}^{(h)}.(q-1)^{h+1} . \frac{(s+h)^{2h+2|-1}}{1^{2h+2|1}}$$

deren Vorzahlen $N_1^{(h)}$, $N_2^{(h)}$, ... folgendes Gesetz befolgen:

$$393)\qquad \begin{aligned}
N_1^{(h)} &= (p-h+0(q-1)) . N_1^{(h-1)} \\
N_2^{(h)} &= (p-h+1(q-1)) . N_2^{(h-1)} + (h+1) . N_1^{(h-1)} \\
N_3^{(h)} &= (p-h+2(q-1)) . N_3^{(h-1)} + (h+2) . N_2^{(h-1)} \\
&. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\
N_v^{(h)} &= (p-h+(v-1)(q-1)) . N_v^{(h-1)} + (h+v-1) . N_{v-1}^{(h-1)} \\
&. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\
N_{h+2}^{(h)} &= \qquad 0 \qquad + (2h+1) . N_{h+1}^{(h-1)}
\end{aligned}$$

Werden aber die Reihen, welche sich bei der Bildungsweise nach 391 ergeben, nach der Gleichung 515 Anal. Seite 308 summirt, nämlich nach

$$\begin{aligned}
&(k+0(q-1)) . \frac{1^{n|1}}{1^{n|1}} && = (k-(n+1)(q-1)) . \frac{s^{n+1|1}}{1^{n+1|1}} \\
&+ (k+1(q-1)) . \frac{2^{n|1}}{1^{n|1}} && + (n+1)(q-1) . \frac{s^{n+2|1}}{1^{n+2|1}} \\
&+ . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . && \\
&+ (k+(s-1)(q-1)) . \frac{s^{n|1}}{1^{n|1}} &&
\end{aligned}$$

so nimmt $a(s+h, s)$ folgende Gestalt an:

$$394)\quad a(s+h,s) = P_1^{(h)} . \frac{s^{h+1|1}}{1^{h+1|1}} + P_2^{(h)}.(q-1)^1 . \frac{s^{h+2|1}}{1^{h+2|1}} + P_3^{(h)} . (q-1)^2 . \frac{s^{h+3|1}}{1^{h+3|1}} + \ldots .$$

$$\ldots\ldots + P_{h+2}^{(h)}.(q-1)^{h+1} . \frac{s^{2h+2|1}}{1^{2h+2|1}}$$

wo

$$
\begin{aligned}
395)\quad P_1^{(h)} &= (p - h - (h+1)(q-1)) \,.\, P_1^{(h-1)} \\
P_2^{(h)} &= (p - h - (h+2)\,(q-1)) \,.\, P_2^{(h-1)} + (h+1) \,.\, P_1^{(h-1)} \\
P_3^{(h)} &= (p - h - (h+3)\,(q-1)) \,.\, P_3^{(h-1)} + (h+2) \,.\, P_2^{(h-1)} \\
&\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\
P_v^{(h)} &= (p - h - (h+v)\,(q-1)) \,.\, P_v^{(h-1)} + (h+v-1) \,.\, P_{v-1}^{(h-1)} \\
&\cdot\;\cdot \\
P_{h+2}^{(h)} &= \qquad\qquad 0 \qquad\qquad + (2h+1) \,.\, P_{h+1}^{(h-1)}
\end{aligned}
$$

Da nun $P_1^{(0)} = p-q+1$ und $P_2^{(0)} = 1$, so lassen sich die übrigen aus ihnen herleiten.

Werden zuletzt die Reihen nach der Gleichung 520 Anal. Seite 310 summirt, nämlich nach

$$
\begin{aligned}
&(u + v\,k) \,.\, \frac{1^{n|1}}{1^{n|1}} && = && (u + v\,k) \,.\, \frac{s^{n+2|1}}{1^{n+2|1}} \\
&+ (u + (v+1)k) \,.\, \frac{2^{n|1}}{1^{n|1}} && && + ((n-v+1)k-u) \,.\, \frac{(s-1)^{n+2|1}}{1^{n+2|1}} \\
&+ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\
&+ (u+(s+v-1)\,k) \,.\, \frac{s^{n|1}}{1^{n|1}}
\end{aligned}
$$

so gowinnen die Vorzahlen der Reihe 386 eine andere Gestalt,

$$
\begin{aligned}
396)\quad \alpha(s+h,s) = Q_1^{(h)}\,\frac{s^{2h+2|1}}{1^{2h+2|1}} + Q_2^{(h)}\,\frac{(s-1)^{2h+2|1}}{1^{2h+2|1}} + Q_2^{(h)}\,\frac{(s-2)^{2h+2|1}}{1^{2h+2|1}} + \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\
\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot + Q_{h+2}^{(h)}\,\frac{(s-h-1)^{2h+2|1}}{1^{2h+2|1}}
\end{aligned}
$$

wo

$$397)\quad \begin{aligned}
Q_1^{(h)} &= (p-h+0(q-1))\,.\,Q_1^{(h-1)}\\
Q_2^{(h)} &= (p-h+1(q-1))\,.\,Q_2^{(h-1)} + ((2h+2-1)(q-1)-p+h)\,.\,Q_1^{(h-1)}\\
Q_3^{(h)} &= (p-h+2(q-1))\,.\,Q_3^{(h-1)} + ((2h+2-2)(q-1)-p+h)\,.\,Q_2^{(h-1)}\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
Q_v^{(h)} &= (p-h+(v-1)(q-1))\,.\,Q_v^{(h-1)} + ((2h+2-v+1)(q-1)-p+h)\,.\,Q_{v-1}^{(h-1)}\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
Q_{h+2}^{(h)} &= \qquad 0 \qquad + ((h+1)(q-1)-p+h)\,.\,Q_{h+1}^{(h-1)}
\end{aligned}$$

und wo

$$Q_1^{(0)} = p \text{ und } Q_2^{(0)} = -p+q-1$$

§. 104.

Von der Form des ersten Differentials hängt die Form der spätern Differentiale ab; geben wir dem ersten Differentiale die Gestalt,

$$398)\quad \frac{d}{dx}\left((a+bx)^p\,(A+B(a+bx)^q)^n\right) = (p+nq)\,b\,(a+bx)^{p-1}(A+B(a+bx)^q)^n$$
$$- nq\; b\; A(a+bx)^{p-1}\,(A+B(a+bx)^q)^{n-1}$$

so geht sie auch auf die spätern Differentiale über, nämlich

$$399)\quad \frac{d^m}{dx^m}\left((a+bx)^p\,.\,(A+B(a+bx)^q)^n\right) =$$
$$\begin{aligned}
= (a+bx)^{p-m}\Big(&c(m,1)\,.\,n^{0|-1}\,.\,(qA)^0\,.\,b^m\,.\,(A+B(a+bx)^q)^n\\
&-c(m,2)\,.\,n^{1|-1}\,.\,(qA)^1\,.\,b^m\,.\,(A+B(a+bx)^q)^{n-1}\\
&+c(m,3)\,.\,n^{2|-1}\,.\,(qA)^2\,.\,b^m\,.\,(A+B(a+bx)^q)^{n-2}\\
&-\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&(-)^m\,c(m,m+1)\,.\,n^{m|-1}\,.\,(qA)^m.\,b^m.\,(A+B(a+bx)^q)^{n-m}\Big)
\end{aligned}$$

wo die Vorzahlen folgendes Gesetz befolgen:

$$
\begin{aligned}
400)\qquad c(m,1) &= (p-m+1+nq)\,.\,c(m-1,1)\\
c(m,2) &= (p-m+1+(n-1)q)\,.\,c(m-1,2)+c(m-1,1)\\
c(m,3) &= (p-m+1+(n-2)q)\,.\,c(m-1,3)+c(m-1,2)\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
c(m,s+1) &= (p-m+1+(n-s)q)\,.\,c(m-1,s+1)+c(m-1,s)\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
c(m,m+1) &= \qquad\qquad 0 \qquad\qquad +c(m-1,m)=1
\end{aligned}
$$

Nach diesen Vorschriften erhalten wir die höhern Differentiale, und zwar

$$
401)\quad \frac{d^2}{dx^2}\Big((a+bx)^p.\big(A+B(a+bx)^q\big)^n\Big) = (a+bx)^{p-2}\times
$$

$$
\begin{aligned}
\Big((p-0+nq-0q)\ (p-1+nq-0q)\,n^{0|-1}\,(qA)^0\,b^2\,(A+B(a+bx)^q)^n\\
-\begin{vmatrix} p-0+nq-0q \\ p-1+nq-1q \end{vmatrix} n^{1|-1}\,(qA)^1\,b^2\,(A+B(a+bx)^q)^{n-1}\\
+\ n^{2|-1}\ (qA)^2\,b^2\,(A+B(a+bx)^q)^{n-2}\Big)
\end{aligned}
$$

ferner

$$
402)\quad \frac{d^3}{dx^3}\Big((a+bx)^p\big(A+B(a+bx)^q\big)^n\Big) = (a+bx)^{p-3}\,b^3\times
$$

$$
\begin{aligned}
\Big((p-0+nq-0q)(p-1+nq-0q)(p-2+nq-0q)n^{0|-1}(qA)^0\,(A+B(a+bx)^q)^n\\
-\begin{vmatrix} p-0+nq-0q & p-1+nq-0q \\ p-0+nq-0q & p-2+nq-1q \\ p-1+nq-1q & p-2+nq-1q \end{vmatrix} n^{1|-1}(qA)^1\ (A+B\,(a+bx)^q)^{n-1}\\
+\begin{vmatrix} p-0+nq-0q \\ p-1+nq-1q \\ p-2+nq-2q \end{vmatrix} n^{2|-1}\,(qA)^2\ (A+B\ (a+bx)^q\,)^{n-2}\\
-\ n^{3|-1}\,(qA)^3\ (A+B\ (a+bx)^q\,)^{n-3}\Big)
\end{aligned}
$$

und eben so auch

$$403)\quad \frac{d^4}{dx^4}\left((a+bx)^p.\left(A+B(a+bx)^q\right)^n\right) = (a+bx)^{p-4}\,b^4\times$$

$$\Big((p-0+nq-0q)(p-1+nq-0q)(p-2+nq-0q)(p-3+nq-0q)\left(A+B(a+bx)^q\right)^n$$

$$-\left|\begin{array}{c|c|c} p-0+nq-0q & p-1+nq-0q & p-2+nq-0q \\ p-0+nq-0q & p-1+nq-0q & p-3+nq-1q \\ p-0+nq-0q & p-2+nq-1q & p-3+nq-1q \\ p-1+nq-1q & p-2+nq-1q & p-3+nq-1q \end{array}\right| n^{1|-1}(qA)^1\left(A+B(a+bx)^q\right)^{n-1}$$

$$+\left|\begin{array}{c|c} p-0+nq-0q & p-1+nq-0q \\ p-0+nq-0q & p-2+nq-1q \\ p-1+nq-1q & p-2+nq-1q \\ p-0+nq-0q & p-3+nq-2q \\ p-1+nq-1q & p-3+nq-2q \\ p-2+nq-2q & p-3+nq-2q \end{array}\right| n^{2|-1}(qA)^2\left(A+B(a+bx)^q\right)^{n-2}$$

$$-\left|\begin{array}{c} p-0+nq-0q \\ p-1+nq-1q \\ p-2+nq-2q \\ p-3+nq-3q \end{array}\right| n^{3|-1}(qA)^3\left(A+B(a+bx)^q\right)^{n-3}$$

$$+\;n^{4|-1}(qA)^4\left(A+B(a+bx)^q\right)^{n-4}\Big)$$

§. 105.

Die zurücklaufende Bildungsweise 400 lässt sich auch in eine andere verwandeln,

$$\begin{aligned} 404)\quad c(s+h,\,s) = {} & (p+nq-h-0(q+1))\,.\,c(h,\,1) \\ & +\;(p+nq-h-1(q+1))\,.\,c(h+1,\,2) \\ & +\;(p+nq-h-2(q+1))\,.\,c(h+2,\,3) \\ & +\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;. \\ & +\;(p+nq-h-(s-1)(q+1))\,.\,c(h+s-1,\,s) \end{aligned}$$

und diese durch Summirung der Reihen nach der Gleichung 509 Anal. Seite 305 in folgende:

405) $$c(s+h,s) = R_1^{(h)}\,\frac{s^{h+1|1}}{1^{h+1|1}}\cdot(q+1)^0 - R_2^{(h)}\cdot\frac{(s-1)^{h+2|1}}{1^{h+2|1}}\cdot(q+1)^1$$
$$+ R_3^{(h)}\cdot\frac{(s-2)^{h+3|1}}{1^{h+3|1}}\cdot(q+1)^2 - \ldots (-)^{h+1} R_{h+2}^{(h)}\frac{(s-h-1)^{2h+2|1}}{1^{2h+2|1}}\cdot(q+1)^{h+1}$$

wo

406) $$\begin{aligned}
R_1^{(h)} &= (p+nq-h-0(q+1)).R_1^{(h-1)}\\
R_2^{(h)} &= (p+nq-h-1(q+1)).R_2^{(h-1)} + (h+1).R_1^{(h-1)}\\
R_3^{(h)} &= (p+nq-h-2(q+1)).R_3^{(h-1)} + (h+2).R_2^{(h-1)}\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
R_v^{(h)} &= (p+nq-h-(v-1)(q+1)).R_v^{(h-1)} + (h+v-1).R_{v-1}^{(h-1)}\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
R_{h+2}^{(h)} &= \qquad 0 \qquad + (2h+1).R_{h+1}^{(h-1)}
\end{aligned}$$

und

$$R_1^{(0)} = p + n\,q \text{ und } R_2^{(0)} = 1$$

Durch Summirung der Reihen, welche aus 404 entstehen, gewinnt man nach 515 Anal. Seite 308 folgende Bildungsweise:

407) $$c(s+h,s) = U_1^{(h)}\cdot\frac{s^{h+1|1}}{1^{h+1|1}}\cdot(q+1)^0 - U_2^{(h)}\cdot\frac{s^{h+2|1}}{1^{h+2|1}}\cdot(q+1)^1$$
$$+ U_3^{(h)}\cdot\frac{s^{h+3|1}}{1^{h+3|1}}\cdot(q+1)^2 - \ldots\ldots (-)^{h+1}\cdot U_{h+2}^{(h)}\,\frac{s^{2h+2|1}}{1^{2h+2|1}}\cdot(q+1)^{h+1}$$

wo

408)
$$U_1^{(h)} = (p+nq-h+(h+1)(q+1)) \,.\, U_1^{(h-1)}$$
$$U_2^{(h)} = (p+nq-h+(h+2)(q+1)) \,.\, U_2^{(h-1)} + (h+1) \,.\, U_1^{(h-1)}$$
$$U_3^{(h)} = (p+nq-h+(h+3)(q+1)) \,.\, U_3^{(h-1)} + (h+2) \,.\, U_2^{(h-1)}$$
$$\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot$$
$$U_v^{(h)} = (p+nq-h+(h+v)(q+1).)U_v^{h-1} + (h+v-1) \,.\, U_{v-1}^{(h-1)}$$
$$\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot$$
$$U_{h+2}^{(h)} = \quad 0 \quad + (2h+1) \,.\, U_{h+1}^{(h-1)}$$

Eben so kann durch die Summirungsweise 520 Anal. Seite 310 eine andere Bildungsweise von $\alpha(s+h, s)$ hervorgebracht werden.

Da

$$(a+bx)^p (A+B(a+bx)^q)^n = (a+bx)^{p+nq} (B+A(a+bx)^{-q})^n$$

so hätten alle diese Gleichungen in den §§. 104, 105 aus jenen in §§. 102, 103 hergeleitet werden können, wenn $p+nq$ statt p und $-q$ statt q gesetzt, und A und B vertauscht worden wären.

§. 106.

Wird dem ersten Differentiale die Gestalt

409) $$\frac{d}{dx}\left((a+bx)^p \,.\, \left(A+B(a+bx)^q\right)^n\right) =$$
$$= \left(A+B(a+bx)^q\right)^{n-1} \left(p\,b\,A\,(a+bx)^{p-1} + (p+nq)\,b\,B\,(a+bx)^{p+q-1}\right)$$

gegeben, so ist jene der spätern Differentiale

$$410)\quad \frac{d^m}{dx^m}\left((a+bx)^p\left(A+B\,(a+b\,x)^q\right)^n\right)=$$

$$\begin{aligned}=\left(A+B\,(a+bx)^q\right)^{n-m}b^m.\Big(\;&\mathfrak{e}(m,1)\;.\;A^m\;.\;B^0\;.\;(a+bx)^{p+0q-m}\\
&+\mathfrak{e}(m,2)\;.\;A^{m-1}\;.\;B^1\;.\;(a+bx)^{p+1q-m}\\
&+\mathfrak{e}(m,3)\;.\;A^{m-2}\;.\;B^2\;.\;(a+bx)^{p+2q-m}\\
&+\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\\
&+\mathfrak{e}(m,m+1)\;.\;A^0\;.\;B^m\;.\;(a+bx)^{p+mq-m}\Big)\end{aligned}$$

wo die Vorzahlen folgendes Gesetz befolgen:

$$\begin{aligned}411)\;\mathfrak{e}(m,1)&=(p+0q-m+1)\;.\;\mathfrak{e}(m-1,1)\\
\mathfrak{e}(m,2)&=(p+1q-m+1)\;.\;\mathfrak{e}(m-1,2)+(p+(n-m+1)q-m+1)\;.\;\mathfrak{e}(m-1,1)\\
\mathfrak{e}(m,3)&=(p+2q-m+1)\;.\;\mathfrak{e}(m-1,3)+(p+(n-m+2)q-m+1)\;.\;\mathfrak{e}(m-1,2)\\
\mathfrak{e}(m,4)&=(p+3q-m+1)\;.\;\mathfrak{e}(m-1,4)+(p+(n-m+3)q-m+1)\;.\;\mathfrak{e}(m-1,3)\\
&.\;.\\
\mathfrak{e}(m,v+1)&=(p+vq-m+1)\;.\;\mathfrak{e}(m-1,v+1)+(p+(n-m+v)q-m+1)\;.\;\mathfrak{e}(m-1,v)\\
&.\;.\\
\mathfrak{e}(m,m+1)&=\qquad\qquad 0\qquad\qquad+(p+n\,q-m+1)\;.\;\mathfrak{e}(m-1,m)\end{aligned}$$

Die nächsten Differentiale sind daher

$$412)\quad \frac{d^2}{dx^2}\left((a+bx)^p.\left(A+B\,(a+bx)^q\right)^n\right)=\left(A+B(a+bx)^q\right)^{n-2}b^2\times$$

$$\begin{aligned}\times\Big(&(p+0q-0)\,(p+0q-1)\;A^2\,B^0\,(a+bx)^{p+0q-2}\\
&+\left|\begin{array}{c|c}p+0q-0 & p-1+nq-1q\\ p+1q-1 & p-0+nq-0q\end{array}\right|A^1\,B^1(a+bx)^{p+1q-2}\\
&+(p-0+nq-0q)\,(p-1+nq-0q)\;A^0\,B^2\,(a+bx)^{p+2q-2}\Big)\end{aligned}$$

und

$$413)\quad \frac{d^3}{dx^3}\Big((a+bx)^p.\big(A+B(a+bx)^q\big)^n\Big)=\big(A+B(a+bx)^q\big)^{n-3}b^3\times$$

$$\times\Big((p+0q-0)\,(p+0q-1)\,(p+0q-2)\,.\,A^3\,B^0\,.\,(a+bx)^{p+0q-3}$$

$$+\left|\begin{array}{c|c|c} p+0q-0 & p+0q-1 & p-2+nq-2q \\ p+0q-1 & p+1q-2 & p-1+nq-1q \\ p+1q-1 & p+1q-2 & p-0+nq-0q \end{array}\right| A^2.\,B^1\,.\,(a+bx)^{p+1q-3}$$

$$+\left|\begin{array}{c|c|c} p+0q-0 & p-1+nq-1q & p-2+nq-1q \\ p+1q-1 & p-0+nq-0q & p-2+nq-1q \\ p+2q-2 & p-0+nq-0q & p-1+nq-0q \end{array}\right| A^1\,.\,B^2\,.\,(a+bx)^{p+2q-3}$$

$$+\,(p-0+nq-0q)\,(p-1+nq-0q)\,(p-2+nq-0q)\;A^0\,B^3\,(a+bx)^{p+3q-3}\Big)$$

§. 107.

Die höheren Differentiale des vorgegebenen doppelten Binomiums können auch nach 188 dadurch gebildet werden, dass die beiden Hauptfactoren jeder für sich einzeln differentiirt werden; es ist

$$\frac{d^m}{dx^m}\Big((a+bx)^p\,\big(A+B(a+bx)^q\big)^n\Big)=1^{m|1}\,\Sigma\,\frac{d^v(a+bx)^p}{1^{v|1}dx^v}\quad\frac{d^{m-v}\big(A+B(a+bx)^q\big)^n}{1^{m-v|1}dx^{m-v}}$$

und

$$\frac{d^v\,(a+bx)^p.}{1^{v|1}\;dx^v}\;=\;\frac{p^{v|1}}{1^{v|1}}\;b^v(a+bx)^{p-v}$$

folglich

414) $$\frac{d^m}{dx^m}\Big((a+bx)^p . \big(A+B(a+bx)^q\big)^n\Big) =$$

$$= 1^m \,.\, \Big(\frac{p^{0|-1}}{1^{0|1}} . b^0 . (a+bx)^p . \frac{d^m(A+B\,(a+bx)^q)^n}{1^{m|1}\,dx^m}$$

$$+ \frac{p^{1|-1}}{1^{1|1}} . b^1 . (a+bx)^{p-1} . \frac{d^{m-1}(A+B(a+bx)^q)^n}{1^{m-1|1}\,dx^{m-1}}$$

$$+ \frac{p^{2|-1}}{1^{2|1}} . b^2 . (a+bx)^{p-2} . \frac{d^{m-2}(A+B(a+bx)^q)^n}{1^{m-2|1}\,dx^{m-2}}$$

$$+ \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.$$

$$+ \frac{p^{m|-1}}{1^{m|1}} . b^m . (a+bx)^{p-m} . \frac{d^0(A+B(a+bx)^q)^n}{1^{0|1}\,dx^0}\Big)$$

Sind nun nach den vorigen Methoden die Differentiale für den Fall $p = 0$ gefunden, so kann das fernere Geschäft nach dieser Vorschrift fortgesetzt werden.

§. 108.

Wir haben für das *m* te Differential

$$\frac{d^m}{dx^m}\Big((a+bx)^p . \big(A+B\,(a+bx)^q\big)^n\Big)$$

vier verschiedene Hauptformen 386, 399, 410, 414 gefunden und für jede der beiden ersten auch mehrere Bildungsweisen und zwar

für 386 die zurücklaufenden Bildungsweisen 387 und 391, wovon die letztere dadurch, dass die Reihen, welche durch sie entstehen, nach dreien verschiedenen Vorschriften summirt werden, die Vorzahlen auch in eben so vielen Gestalten 392, 394, 396 erscheinen lässt;

für 399 die zurücklaufenden Bildungsweisen 400 und 404; letztere erzeugt auf gleiche Art wie vorhin 391 drei verschiedene Formen der Vorzahlen, wovon hier nur zwei 405, 407 angegeben sind.

Für 410 ist nur eine zurücklaufende Bildungsweise 411 angegeben und

414 kann eben so viele Formen veranlassen, als für den speciellen Fall

$$\frac{d^m}{dx^m}\left(\left(A+B(a+bx)^q\right)^n\right)$$

möglich sind.

So lange die Untersuchung in dieser grossen Allgemeinheit gehalten wird, hat keine der Formen 386, 399, 410, 414 und auch keine ihrer so eben angegebenen eigenthümlichen Bildungsweisen vor der andern Vorzug, nur in speciellen Fällen gewinnt die eine vor der andern eine grössere Wichtigkeit, und zwar nur dann, wenn in dem bestimmten Falle die Natur des höhern Differentials durch sie leichter als durch andere erkannt werden kann.

§. 109.

Gehen wir jetzt zu besondern Fällen über, und wählen hiezu

$$p = o, \text{ und } q = 2$$

so wird nach 393

$$N_v^{(h)} = (v-h-1)\ N_v^{(h-1)} + (v+h-1)\ N_{v-1}^{(h-1)}$$

da nun $N_1^{(o)} = o$ und $N_2^{(o)} = 1$ ist, so finden wir aus dieser zurücklaufenden folgende unabhängige Bildungsweise:

$$N_{h+2}^{(h)} = 1.3.5.7.\ldots.(2h+1) = 1^{h+1|2}$$

Diese einfache Bildungsweise lässt zugleich erkennen, dass, so lange v kleiner als $h+2$, auch $N_v^{(h)} = o$ ist; es ist also

$$a(s+h, s) = \frac{1^{h+1|2}.(s+h)^{2h+2|-1}}{1^{2h+2|1}}$$

oder

$$a(m, s) = 1^{m-s+1|2}.\frac{m^{2(m-s+1)|-1}}{1^{2(m-s+1)|1}}$$

mithin

$$415)\quad \frac{d^m}{dx^m}\left(A+B\,(a+bx)^2\right)^n =$$

$$= 1^{0|2} . n^{m|-1} . \frac{m^{0|-1}}{1^{0|1}} . (2B)^m . b^m . (a+bx)^m . (A+B\,(a+bx)^2)^{n-m}$$

$$+ 1^{1|2} . n^{m-1|-1} . \frac{m^{2|-1}}{1^{2|1}} . (2B)^{m-1} . b^m . (a+bx)^{m-2} . (A+B(a+bx)^2)^{n-m+1}$$

$$+ 1^{2|2} . n^{m-2|-1} . \frac{m^{4|-1}}{1^{4|1}} . (2B)^{m-2} . b^m . (a+bx)^{m-4} . (A+B(a+bx)^2)^{n-m+2}$$

$$+ \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.$$

$$+ 1^{s|2} . n^{m-s|-1} . \frac{m^{2s|-1}}{1^{2s|1}} . (2B)^{m-s} . b^m . (a+bx)^{m-2s} . (A+B(a+bx)^2)^{n-m+s}$$

$$+ \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.$$

Ferner finden wir nach der dritten Entwickelung in §. 106, dass

$$e\,(m,\, m-s+1) = 1^{m|1} . \frac{n^{s|-1}}{1^{s|1}} . \frac{(2n-2s)^{m-2s|-1}}{1^{m-2s|1}}$$

welches sich, wenn $m+1$ statt m gesetzt wird, durch eine leichte Rechnung bewährt; nach diesem ist das *m*te Differential

$$416)\quad \frac{d^m}{dx^m}\left(A+B\,(a+bx)^2\right)^n =$$

$$= (A+B\,(a+bx)^2\,)^{n-m} . b^m . 1^{m|1} . \Big(\frac{n^{0|-1}}{1^{0|1}} . \frac{(2n)^{m|-1}}{1^{m|1}} . A^0 . B^m . (a+bx)^m$$

$$+ \frac{n^{1|-1}}{1^{1|1}} . \frac{(2n-2)^{m-2|-1}}{1^{m-2|1}} . A^1 . B^{m-1} . (a+bx)^{m-2}$$

$$+ \frac{n^{2|-1}}{1^{2|1}} . \frac{(2n-4)^{m-4|-1}}{1^{m-4|1}} . A^2 . B^{m-2} . (a+bx)^{m-4}$$

$$+ \frac{n^{3|-1}}{1^{3|1}} . \frac{(2n-6)^{m-6|-1}}{1^{m-6|1}} . A^3 . B^{m-3} . (a+bx)^{m-6}$$

$$+ \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\Big)$$

Dieses sind die beiden speciellen Reihen, welche schon bekannt sind, und welche wir in §. 101 erwähnten; es ist nämlich die Reihe 415 zuerst von **Euler** in seiner **Differentialrechnung** ohne Beweis, und die Reihe 416 von **Lagrange** (in den Mem. de l'Académie à Berlin für das Jahr 1772 Seite 213) gefunden, und zwar auf einem von den unsrigen ganz verschiedenen Wege, in einer Form, welche entsteht, wenn

$$A = \alpha - \frac{\beta^2}{4\gamma}, \quad B = \frac{\gamma}{b^2} \text{ und } a = \frac{b}{2} \cdot \frac{\beta}{\gamma}$$

gesetzt werden.

II. Höhere Differentiale des zusammengesetzten Binomiums

$$(a+bx)^p \,.\, (M+N\,.\,\lg:(a+bx))^n$$

---

§. 110.

Es ist

$$417)\quad \frac{d}{dx}\Big((a+bx)^p \,.\, \big(M+N\,.\,\lg:(a+bx)\big)^n\Big) =$$

$$= b\,.\,(a+bx)^{p-1}\,.\,\Big(p\,.\,\big(M+N\,.\,\lg:(a+bx)\big)^n + n\,.\,N\,.\,\big(M+N\,.\,\lg:(a+bx)\big)^{n-1}\Big)$$

Die höhern Differentiale erhalten hiedurch die Gestalt:

$$418)\quad \frac{d^m}{dx^m}\Big((a+bx)^p \,.\, \big(M+N\,.\,\lg:(a+bx)\big)^n\Big) =$$

$$\begin{aligned}
= b^m\,.\,(a+bx)^{p-m}\,.\,\Big(&\mathfrak{g}(m,1)\,.\,n^{0|-1}\,.\,N^0\,.\,(M+N\,.\,\lg:(a+bx))^n \\
&+ \mathfrak{g}(m,2)\,.\,n^{1|-1}\,.\,N^1\,.\,(M+N\,.\,\lg:(a+bx))^{n-1} \\
&+ \mathfrak{g}(m,3)\,.\,n^{2|-1}\,.\,N^2\,.\,(M+N\,.\,\lg:(a+bx))^{n-2} \\
&+ \ldots\ldots\ldots\ldots \\
&+ \mathfrak{g}(m,s+1)\,.\,n^{s|-1}\,.\,N^s\,.\,(M+N\,.\,\lg:(a+bx))^{n-s} \\
&+ \ldots\ldots\ldots\ldots \\
&+ \mathfrak{g}(m,m+1)\,.\,n^{m|-1}\,.\,N^m\,.\,(M+N\,.\,\lg:(a+bx))^{n-m}\Big)
\end{aligned}$$

Wird das nächste Differential genommen, so erhält man die Bildungsweise der Vorzahlen, nämlich

$$
\begin{aligned}
419)\qquad & g(m,1) = (p-m+1)\,.\,g(m-1,1) \\
& g(m,2) = (p-m+1)\,.\,g(m-1,2) + g(m-1,1) \\
& g(m,3) = (p-m+1)\,.\,g(m-1,3) + g(m-1,2) \\
& \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
& g(m,s) = (p-m+1)\,.\,g(m-1,s) + g(m-1,s-1) \\
& \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
& g(m,m+1) = \qquad 0 \qquad + g(m-1,m) = 1
\end{aligned}
$$

Aus dieser zurücklaufenden ergibt sich unmittelbar die unabhängige Bildungsweise, welche in den geordneten Verbindungen ohne Wiederholungen aus den Elementen $p, p-1, p-2, \ldots, p-m+1$ besteht, und durch folgende Zeichen ausgedrückt wird:

$$420)\qquad g(m,s) = (p, p-1, p-2, \ldots, p-m+1)^{(m-s+1)}$$

Es ist also

$$
\begin{aligned}
421)\qquad & \frac{d^m}{dx^m}\Big((a+bx)^p\,.\,\big(M+N\,.\,\lg:(a+bx)\big)^n\Big) = b^m\,.\,(a+bx)^{p-m} \times \\
& \times \Big((p,p-1,p-2,\ldots,p-m+1)^{(m)}\,.\,n^{0|-1}\,.\,N^0\,.\,(M+N\,.\,\lg:(a+bx))^n \\
& + (p,p-1,p-2,\ldots,p-m+1)^{(m-1)}\,.\,n^{1|-1}\,.\,N^1\,.\,(M+N\,.\,\lg:(a+bx))^{n-1} \\
& + (p,p-1,p-2,\ldots,p-m+1)^{(m-2)}\,.\,n^{2|-1}\,.\,N^2\,.\,(M+N\,.\,\lg:(a+bx))^{n-2} \\
& + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
& + (p,p-1,p-2,\ldots,p-m+1)^{(0)}\,.\,n^{m|-1}\,.\,N^m\,.\,(M+N\,.\,\lg:(a+bx))^{n-m}\Big)
\end{aligned}
$$

§. 111.

In dem besonderen Falle, wo $p = 0$ ist, werden die geordneten Verbindungen ohne Wiederholungen aus den Zahlen 1, 2, 3, ... , m−1 gebildet, und die Zeichen wechseln ab, nämlich

422) $$\frac{d^m}{dx^m}\Big(M+N\,.\,\lg:(a+bx)\Big)^n =$$

$$= \frac{b^m}{(a+bx)^m}\cdot\Big((-)^{m-1}(1,2,3,\ldots,m-1)^{(m-1)}\,.\,n^{1|-1}.N^1.(M+N\,.\,\lg:(a+bx))^{n-1}$$

$$+(-)^{m-2}(1,2,3,\ldots,m-1)^{(m-2)}\,.\,n^{2|-1}.N^2.(M+N\,.\,\lg:(a+bx))^{n-2}$$

$$+(-)^{m-3}(1,2,3,\ldots,m-1)^{(m-3)}\,.\,n^{3|-1}.N^3.(M+N\,.\,\lg:(a+bx))^{n-3}$$

$$+\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.$$

$$+(-)^0(1,2,3,\ldots,m-1)^{(0)}\,.\,n^{m|-1}\,.N^m.(M+N\,.\,\lg:(a+bx))^{n-m}\Big)$$

Nach diesem ist z. B.

$$\frac{d^6}{dx^6}\Big(M+N\,.\,\lg:(a+bx)\Big)^n = \Big(\frac{b}{a+bx}\Big)^6.\Big(-1.2.3.4.5.n.\,N^1.\,(M+N\,.\,\lg:(a+bx))^{n-1}$$

$$+\left|\begin{array}{l} 1\,.\,2\,.\,3\,.\,4 \\ 1\,.\,2\,.\,3\,.\,5 \\ 1\,.\,2\,.\,4\,.\,5 \\ 1\,.\,3\,.\,4\,.\,5 \\ 2\,.\,3\,.\,4\,.\,5 \end{array}\right| .\,n\,(n-1)\,.\,N^2\,.\,(M+N\,.\,\lg:(a+bx))^{n-2}$$

$$-\left|\begin{array}{l} 1\,.\,2\,.\,3 \\ 1\,.\,2\,.\,4 \\ 1\,.\,2\,.\,5 \\ 1\,.\,3\,.\,4 \\ 1\,.\,3\,.\,5 \\ 1\,.\,4\,.\,5 \\ 2\,.\,3\,.\,4 \\ 2\,.\,3\,.\,5 \\ 2\,.\,4\,.\,5 \\ 3\,.\,4\,.\,5 \end{array}\right| .\,n(n-1)\,(n-2).N^3.(M+N.\lg:(a+bx))^{n-3}$$

$$+\left|\begin{array}{c}1\,.\,2\\1\,.\,3\\1\,.\,4\\1\,.\,5\\2\,.\,3\\2\,.\,4\\2\,.\,5\\3\,.\,4\\3\,.\,5\\4\,.\,5\end{array}\right| .\, n\,(n-1)\,(n-2)\,(n-3)\,.\,N^4\,.\,(M+N\,.\,\lg:(a+bx))^{n-4}$$

$$-\left|\begin{array}{c}1\\2\\3\\4\\5\end{array}\right| .\, n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4).N^5.(M+N.\lg:(a+bx))^{n-5}$$

$$+\,n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)\,.\,N^6\,.\,(M+N\,.\,\lg:(a+bx))^{n-6}\Big)$$

§. 112.

Nach der Entwickelung dieses besonderen Falles, wo $p = 0$ ist, ist jetzt auch eine zweite Entwickelung der allgemeinen vorgegebenen Formel möglich, denn nach 188 ist

$$\frac{d^m}{dx^m}\Big((a+bx)^p.\,\big(M+N.\lg:(a+bx)\big)^n\Big) = 1^{m|1}.\,\Sigma\,\frac{d^s(a+bx)^p}{1^{s|1}\ dx^s}\cdot\frac{d^{m-s}(M+N.\lg:(a+bx))^n}{1^{m-s|1}\ dx^{m-s}}$$

folglich, wenn die Differentiale nach der Gleichung 422 gebildet werden, so ist die Bildungsweise der Vorzahlen der allgemeinen Reihe 418 folgende:

$$423)\; g(m,m+1) = \frac{p^{0|-1}}{1^{0|1}} \cdot (1, 2, 3, \ldots, m-1)^{(0)}$$

$$g(m, m) = -\frac{p^{0|-1}}{1^{0|1}} \cdot (1, 2, 3, \ldots, m-1)^{(1)} + \frac{p^{1|-1}}{1^{1|1}} \cdot m^{1|-1} (1, 2, 3, \ldots, m-2)^{(0)}$$

$$g(m, m-1) = +\frac{p^{0|-1}}{1^{0|1}} \cdot (1, 2, 3, \ldots, m-1)^{(2)} - \frac{p^{1|-1}}{1^{1|1}} \cdot m^{1|-1} . (1, 2, 3, \ldots, m-2)^{(1)}$$

$$+ \frac{p^{2|-1}}{1^{2|1}} \cdot m^{2|-1} . (1, 2, 3, \ldots, m-3)^{(0)}$$

. . . .

$$g(m,m-s+1) = (-)^s \left(\frac{p^{0|-1}}{1^{0|1}} \cdot m^{0|-1} . (1,2,\ldots,m-1)^{(s)} - \frac{p^{1|-1}}{1^{1|1}} \cdot m^{1|-1} . (1,2,\ldots,m-2)^{(s-1)} \right.$$

$$\left. + \frac{p^{2|-1}}{1^{2|1}} . m^{2|-1} . (1, 2, \ldots, m-3)^{(s-2)} - \ldots + \ldots (-)^{(s)} \frac{p^{s|-1}}{1^{s|1}} . m^{s|-1} . (1,2,\ldots,m-s-1)^{(0)} \right)$$

. . . .

$$g(m, 1) = + \frac{p^{m|-1}}{1^{m|1}} \cdot m^{m|-1}$$

Auf gleiche Weise können die Differentiale von der allgemeineren Formel

$$(A + Bx)^p . \left(M + N . \lg : (a + bx)\right)^n$$

gebildet werden.

III. Höhere Differentiale von dem zusammengesetzten Binomium

$$a^{px} \,.\, (A + B\,a^{qx})^n$$

---

§. 113.

Das erste Differential ist

$$424)\qquad \frac{d}{dx}\Big(a^{px}.(A + B\,a^{qx})^n\Big) = \lg : a \times \Big(p \,.\, a^{px}.\,(A + Ba^{qx})^n + n\,.\,q\,.\,B\,.\,a^{(p+q)x}\,.\,(A+Ba^{qx})^{n-1}\Big)$$

und von ihm erhalten die späteren Differentiale ihre Form, nämlich

$$425)\ \frac{d^m}{dx^m}.\Big(\,a^{px}\,.\,(A + Ba^{qx})^n\,\Big) =$$

$$\begin{aligned} = (\lg : a)^m.\Big(\; & f(m, 1).n^{0|-1}\,.\,(qB)^0.a^{px} \quad .(A+Ba^{qx})^n \\ & + f(m, 2).n^{1|-1}\,.\,(qB)^1.a^{(p+q)x}.(A+Ba^{qx})^{n-1} \\ & + f(m, 3).n^{2|-1}\,.\,(qB)^2.a^{(p+2q)x}.(A+Ba^{qx})^{n-2} \\ & + f(m, 4).n^{3|-1}\,.\,(qB)^3.a^{(p+3q)x}.(A+Ba^{qx})^{n-3} \\ & + \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;. \\ & + f(m,m+1).n^{m|-1}.(qB)^m.a^{(p+mq)x}.(A+Ba^{qx})^{n-m}\Big) \end{aligned}$$

Wird das nächste Differential genommen, so ergeben sich die Gleichungen

$$
\begin{aligned}
426)\quad & f(m,1) = p \, . \, f(m-1,1) \\
& f(m,2) = (p+q) . f(m-1,2) + f(m-1,1) \\
& f(m,3) = (p+2q) . f(m-1,3) + f(m-1,2) \\
& \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
& f(m,s) = (p+(s-1)q) . f(m-1,s) + f(m-1,s-1) \\
& \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
& f(m,m+1) = \qquad 0 \qquad + f(m-1,m)
\end{aligned}
$$

welche die zurücklaufende Bildungsweise der Vorzahlen dieser Reihe angeben, und zu folgender unabhängigen führen:

$$427)\quad f(m,s+1) = [p+0q,\ p+1q,\ p+2q, \ldots,\ p+sq]^{(m-s)}$$

Es ist folglich

$$
\begin{aligned}
428)\quad & \frac{d^m}{dx^m}\left(a^{px} . (A + Ba^{qx})^n\right) = (\lg : a)^m \times \\
& \times \Big([p+0q]^{(m)} . n^{0|-1} . (qB)^0 . a^{px} . (A+Ba^{qx})^n \\
& + [p+0q, p+1q]^{(m-1)} . n^{1|-1} . (qB)^1 . a^{(p+1q)x} . (A+Ba^{qx})^{n-1} \\
& + [p+0q, p+1q, p+2q]^{(m-2)} . n^{2|-1} . (qB)^2 . a^{(p+2q)x} . (A+Ba^{qx})^{n-2} \\
& + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
& + [p+0q, p+1q, p+2q, \ldots, p+mq]^{(0)} . n^{m|-1} . (qB)^m . a^{(p+mq)x} . (A+Ba^{qx})^{n-m}\Big)
\end{aligned}
$$

§. 114.

Eine andere Form des ersten Differentials

$$
\begin{aligned}
429)\quad & \frac{d}{dx}\left(a^{px} . (A+Ba^{qx})^n\right) = \\
& = (\lg : a) . a^{px} . \left((p+nq)\,(A+Ba^{qx})^n - n\,q\,A\,(A+Ba^{qx})^{n-1}\right)
\end{aligned}
$$

geht auch auf die höheren Differentiale über, und es wird

$$430)\ \frac{d^m}{dx^m}\left(a^{px}.(A+Ba^{qx})^n\right) = (\lg:a)^m.a^{px}.\left(\mathfrak{h}(m,1).n^{0|-1}.(qA)^0.(A+Ba^{qx})^n\right.$$
$$-\mathfrak{h}(m,2).n^{1|-1}.(qA)^1.(A+Ba^{qx})^{n-1}$$
$$+\mathfrak{h}(m,3).n^{2|-1}.(qA)^2.(A+Ba^{qx})^{n-2}$$
$$-\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .$$
$$\left.(-)^m\mathfrak{h}(m,m+1).n^{m|-1}.(qA)^m.(A+Ba^{qx})^{n-m}\right)$$

Durch das Differentiiren dieser Reihe nach der Vorschrift, welche im ersten Differentiale 429 liegt, gewinnen wir die zurücklaufende Bildungsweise ihrer Vorzahlen, welche durch folgende Gleichungen angegeben wird:

$$431)\ \begin{array}{lclcl}
\mathfrak{h}(m,\ 1) & = & (p+nq-0q)\ .\ \mathfrak{h}(m-1,\ 1) & & \\
\mathfrak{h}(m,\ 2) & = & (p+nq-1q)\ .\ \mathfrak{h}(m-1,\ 2) & + & \mathfrak{h}(m-1,\ 1) \\
\mathfrak{h}(m,\ 3) & = & (p+nq-2q)\ .\ \mathfrak{h}(m-1,\ 3) & + & \mathfrak{h}(m-1,\ 2) \\
. & . & .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ . & . & .\ .\ . \\
\mathfrak{h}(m,s+1) & = & (p+nq-sq)\ .\ \mathfrak{h}(m-1,s+1) & + & \mathfrak{h}(m-1,\ s) \\
. & . & .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ . & . & .\ .\ . \\
\mathfrak{h}(m,m+1) & = & 0 & + & \mathfrak{h}(m-1,m)
\end{array}$$

und aus diesen die unabhängige Bildungsweise

$$432)\ \mathfrak{h}(m,s+1) = [p+nq-0q,\ p+nq-1q,\ p+nq-2q,\ \ldots,\ p+nq-sq]^{m-1)}$$

Es ist daher

$$433)\quad \frac{d^m}{dx^m}\left(a^{px}.(A+B\,a^{qx})^n\right)=(\lg:a)^m\,.\,a^{px}\times\Big([p+nq-0q]^{(m)}.n^{0l-1}.(qA)^0.\,(A+B\,a^{qx})^n$$

$$-\ [p+nq-0q,p+nq-1q]^{(m-1)}.n^{1l-1}.(qA)^1.(A+Ba^{qx})^{n-1}$$

$$+\ [p+nq-0q,p+nq-1q,p+nq-2q]^{(m-2)}.n^{2l-1}.(qA)^2.(A+Ba^{qx})^{n-2}$$

$$-\ [p+nq-0q,p+nq-1q,p+nq-2q,p+nq-3q]^{(m-3)}.n^{3l-1}.(qA)^3.(A+Ba^{qx})^{n-3}$$

$$+\ \cdot$$

$$(-)^m\ [p+nq-\ \ q,\,p+nq-1q,\,p+nq-2q\,,\ldots,\,p+nq-mq]^{(0)}\,.\,n^{ml-1}.(qA)^m.(A+Ba^{qx})^{n-m}\Big)$$

§. 115.

Wird dem ersten Differentiale die Form

$$434)\quad \frac{d}{dx}\left(a^{px}.\,(A+Ba^{qx})^n\right)=(\lg:a).(A+Ba^{qx})^{n-1}.\,(p\,.\,A.a^{px}+(p+nq)\,Ba^{(p+q)x})$$

gegeben, so erscheinen auch die höheren Differentiale in derselben Form, und es ist

$$435)\quad \frac{d^m}{dx^m}\left(a^{px}.(A+B\,a^{qx})^n\right)=(\lg:a)^m.(A+Ba^{qx})^{n-m}.\Big(\ t(m,1)\,.\,A^m\ .\ B^0\,.\,a^{px}$$

$$+t(m,2)\,.\,A^{m-1}\,.\,B^1\,.\,a^{(p+q)x}$$

$$+t(m,3)\,.\,A^{m-2}\,.\,B^2\,.\,a^{(p+2q)x}$$

$$+\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$

$$+t(m,m+1)\,.\,A^0\ \ .\,B^m\,.\,a^{(p+mq)x}\Big)$$

wo

$$
\begin{array}{llll}
436) & t(m,1) & = (p+0q) \,.\, t(m-1,1) & \\
& t(m,2) & = (p+1q) \,.\, t(m-1,2) & + (p+(n-m+1)q) \,.\, t(m-1,1) \\
& t(m,3) & = (p+2q) \,.\, t(m-1,3) & + (p+(n-m+2)q) \,.\, t(m-1,2) \\
& \ldots & \ldots & \ldots \\
& t(m,s+1) & = (p+sq) \,.\, t(m-1,s+1) & + (p+(n-m+s)q) \,.\, t(m-1,s) \\
& \ldots & \ldots & \ldots \\
& t(m,m+1) & = \quad 0 & + (p+nq) \,.\, t(m-1,m)
\end{array}
$$

Aus dieser zurücklaufenden Bildungsweise entspringt eine unabhängige, welche aus den geordneten Verbindungen mit und ohne Wiederholungen zugleich besteht, wie solches zuerst in der 9ten Abhandl. unserer Analysis gelehrt ist.

§. 116.

Der besondere Fall, wo $p=0$, verdient vor allem gewürdigt zu werden. Es ist nach 428

$$
\begin{array}{rl}
437) \quad \frac{d^m}{dx^m}\left(A+Ba^{qx}\right)^n = (q.\lg{:}a)^m \,.\, \Big(& [1]^{(m-1)} \,.\, n^{1l-1} \,.\, B^1 \,.\, a^{1qx} \,.\, (A+Ba^{qx})^{n-1} \\
& + [1,2]^{(m-2)} \,.\, n^{2l-1} \,.\, B^2 \,.\, a^{2qx} \,.\, (A+Ba^{qx})^{n-2} \\
& + [1,2,3]^{(m-3)} \,.\, n^{3l-1} \,.\, B^3 \,.\, a^{3qx} \,.\, (A+Ba^{qx})^{n-3} \\
& + \ldots \\
& + [1,2,3,..,m]^{(0)} \,.\, n^{ml-1} \,.\, B^m \,.\, a^{mqx} \,.\, (A+Ba^{qx})^{n-m} \Big)
\end{array}
$$

und nach 433 ist

$$438)\quad \frac{d^m}{dx^m}(A+B\,a^{qx})^n = (q.\lg:a)^m\Big([n]^{(m)}.\,n^{0l-1}.\,A^0.\,(A+B\,a^{qx})^n$$

$$-[n,n-1]^{(m-1)}.\,n^{1l-1}.\,A^1.\,(A+B\,a^{qx})^{n-1}$$

$$+[n,n-1,n-2]^{(m-2)}.\,n^{2l-1}.\,A^2.\,(A+B\,a^{qx})^{n-2}$$

$$-[n,n-1,n-2,n-3]^{(m-3)}.\,n^{3l-1}.\,A^3.\,(A+B\,a^{qx})^{n-3}$$

$$+\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.$$

$$(-)^m\,[n,n-1,n-2,\ldots\ldots,n-m]^{(0)}.\,n^{ml-1}.\,A^m.\,(A+B\,a^{qx})^{n-m}\Big)$$

Es ist z. B., wenn m = 5 ist, nach 437

$$439)\,\frac{d^5}{dx^5}(A+Ba^{qx})^n=(q.\lg:a)^5.\Big(1.1.1.1.\;n.B.a^{1qx}.(A+B\,a^{qx})^{n-1}$$

$$+\begin{array}{r|l} 1.1.1 & n(n-1).B^2.a^{2qx}.(A+Ba^{qx})^{n-2} \\ 1.1.2 & \\ 1.2.2 & \\ 2.2.2 & \end{array}$$

$$+\begin{array}{r|l} 1.1 & n(n-1)(n-2).B^3.a^{3qx}.(A+Ba^{qx})^{n-3} \\ 1.2 & \\ 1.3 & \\ 2.2 & \\ 2.3 & \\ 3.3 & \end{array}$$

$$+\begin{array}{r|l} 1 & n(n-1)(n-2)(n-3).B^4.a^{4qx}.(A+Ba^{qx})^{n-4} \\ 2 & \\ 3 & \\ 4 & \end{array}$$

$$+\;n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4).B^5.a^{5qx}.(A+Ba^{qx})^{n-5}\Big)$$

hingegen nach 438 ist

$$440)\quad \frac{d^5}{dx^5}(A+Ba^{qx})^n = (q.\lg:a)^5.\Big(n.n.n.n.n.n^{0l-1}.A^0.(A+Ba^{qx})^n$$

$$-\left|\begin{array}{l} n\,.\,n\,.\,n\,.\,n \\ n\,.\,n\,.\,n\,.\,(n-1) \\ n\,.\,n\,.\,(n-1)(n-1) \\ n\,.\,(n-1)(n-1)(n-1) \\ (n-1)(n-1)(n-1)(n-1) \end{array}\right| n^{1l-1}.A^1.(A+Ba^{qx})^{n-1}$$

$$+\left|\begin{array}{l} n\,.\,n\,.\,n \\ n\,.\,n\,.\,(n-1) \\ n\,.\,n\,.\,(n-2) \\ n\,.\,(n-1)(n-1) \\ n\,.\,(n-1)(n-2) \\ n\,.\,(n-2)(n-2) \\ (n-1)(n-1)(n-1) \\ (n-1)(n-1)(n-2) \\ (n-1)(n-2)(n-2) \\ (n-2)(n-2)(n-2) \end{array}\right| n^{2l-1}.A^2.(A+Ba^{qx})^{n-2}$$

$$-\left|\begin{array}{l} n\,.\,n \\ n\,.\,(n-1) \\ n\,.\,(n-2) \\ n\,.\,(n-3) \\ (n-1)(n-1) \\ (n-1)(n-2) \\ (n-1)(n-3) \\ (n-2)(n-2) \\ (n-2)(n-3) \\ (n-3)(n-3) \end{array}\right| n^{3l-1}.A^3.(A+Ba^{qx})^{n-3}$$

$$\begin{array}{r|l} +n & n^{4l-1} . A^4 . (A+Ba^{qx})^{n-4} \\ n-1 & \\ n-2 & \\ n-3 & \\ n-4 & \end{array}$$

$$- n^{5l-1} . A^5 . (A+Ba^{qx})^{n-5} \Big)$$

nach der Vorschrift in 435 und 436 ist aber

$$441) \quad \frac{d^5}{dx^5}\left(A+Ba^{qx}\right)^n =$$

$$(q . \lg : a)^5 . (A+Ba^{qx})^{n-5} . n . B . \Big(1 . 1 . 1 . 1 . A^4 . B^0 . a^{1qx}$$

$$\begin{array}{r|l} +2 . 2 . 2 . n & . A^3 . B^1 . a^{2qx} \\ 1 . 2 . 2 . (n-1) & \\ 1 . 1 . 2 . (n-2) & \\ 1 . 1 . 1 . (n-3) & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} + 3 . 3 . n . n & . A^2 . B^2 . a^{3qx} \\ 2 . 3 . n . (n-1) & \\ 2 . 2 . n . (n-2) & \\ 1 . 3 . (n-1)(n-1) & \\ 1 . 2 . (n-1)(n-2) & \\ 1 . 1 . (n-2)(n-2) & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} +4 . n . n . n & . A^1 . B^3 . a^{4qx} \\ 3 . n . n . (n-1) & \\ 2 . n . (n-1)(n-1) & \\ 1 . (n-1)(n-1)(n-1) & \end{array}$$

$$+ n . n . n . n . A^0 . B^4 . a^{5qx} \Big)$$

§. 117.

Die allgemeineren Formeln

$$b^{rx} \cdot (A+B\ a^{qx})^n$$

und

$$(a+bx)^r \cdot (A+B\ a^{qx})^n$$

lassen sich nun mit Leichtigkeit auf das obige zurückführen, denn

$$\frac{d^m}{dx^m}\left(b^{rx} \cdot (A+Ba^{qx})^n\right) = 1^{m|1} \cdot \Sigma\ \frac{d^s\, b^{rx}}{1^{s|1}\ dx^s} \cdot \frac{d^{m-s}\,(A+Ba^{qx})^n}{1^{m-s|1}\ dx^{m-s}}$$

und so auch bei der zweiten Formel.

IV. Höhere Differentiale von den geordneten Verbindungen aus den Elementen

$a_1 + x,\ a_2 + x,\ a_3 + x,\ \ldots,\ a_p + x$

sowohl ohne als mit Wiederholungen.

§. 118.

Es sei

442) $$fx = (a_1 + x,\ a_2 + x,\ a_3 + x, \ldots,\ a_p + x)^{(m)}$$

Durch das Differentiiren entstehen wieder geordnete Verbindungen ohne Wiederholungen zu m-1 Elementen, und jede dieser Verbindungen kommt p - m + 1mal vor, denn sie entsteht so oft als Elemente ihr fehlen; es ist also

443) $$\frac{d}{dx}\left(a_1+x, a_2+x, \ldots, a_p+x\right)^{(m)} = (p-m+1) . \left(a_1+x,\ a_2+x, \ldots, a_p+x\right)^{(m-1)}$$

Wird von neuem differentiirt, so entstehen durch das Differentiiren der geordneten Verbindungen ohne Wiederholungen zu m-1 Elementen die geordneten Verbindungen ohne Wiederholungen zu m-2 Elementen und zwar p-m+2 mal; und wird das Differentiiren nach vorstehender Vorschrift mehrmalen wiederholt, so ergibt sich die allgemeine Vorschrift für jedes folgende Differential:

444) $$\frac{d^n}{dx^n}\left(a_1+x, a_2+x, \ldots, a_p+x\right)^{(m)} = (p-m+1)^{n|1} . \left(a_1+x, a_2+x, \ldots, a_p+x\right)^{(m-n)}$$

Eben so ist

$$\frac{d^{q-m+n}}{dx^{q-m+n}}\left(a_1+x,\ldots,a_p+x\right)^{(q)}=(p-q+1)^{q-m+n|1}\cdot\left(a_1+x,\ldots,a_p+x\right)^{(m-n)}$$

folglich, wenn beide Gleichungen mit einander verbunden werden,

$$445)\quad\frac{d^n}{dx^n}\left(a_1+x,a_2+x,\ldots,a_p+x\right)^{(m)}=\frac{1^{p-q|1}}{1^{p-m|1}}\cdot\frac{d^{n-m+q}}{dx^{n-m+q}}\left(a_1+x,a_2+x,\ldots,a_p+x\right)^{(q)}$$

§. 119.

Bei den geordneten Verbindungen mit Wiederholungen müssen wir von ihrer Bildungsweise ausgehen, welche durch die Gleichung

$$[a_1+x,\ldots,a_p+x]^{(m)}=[a_1+x,\ldots,a_{p-1}+x]^{(m)}+(a_p+x)\,.\,[a_1+x,\ldots,a_p+x]^{(m-1)}$$

gegeben ist; durch das Differentiiren dieser Gleichung erhalten wir eine doppelt zurücklaufende Bildungsweise

$$d\,[a_1+x,\ldots,a_p+x]^{(m)}=$$

$$=d\,[a_1+x,\ldots,a_{p-1}+x]^{(m)}+[a_1+x,\ldots,a_p+x]^{(m-1)}\,.\,dx+(a_p+x)\,.\,d\,[a_1+x,\ldots,a_p+x]^{(m-1)}$$

woraus sich folgende Gleichungen ergeben:

für $m=1$

$$d\,[a_1+x,\ldots,a_p+x]^{(1)}=p\,.\,[a_1+x,\ldots,a_p+x]^{(0)}\,.\,dx$$

für $m=2$

$$d\,[a_1+x,\ldots,a_p+x]^{(2)}=(p+1)\,.\,[a_1+x,\ldots,a_p+x]^{(1)}\,.\,dx$$

für $m=3$

$$d\,[a_1+x,\ldots,a_p+x]^{(3)}=(p+2)\,.\,[a_1+x,\ldots,a_p+x]^{(2)}\,.\,dx$$

. . . .

und allgemein die Gleichung

$$446)\quad\frac{d}{dx}[a_1+x,\ldots,a_p+x]^{(m)}=(p+m-1)\,.\,[a_1+x,\ldots,a_p+x]^{(m-1)}$$

und hieraus durch wiederholtes Differentiiren das *n*te Differential

447) $\frac{d^n}{dx^n}[a_1+x, \ldots, a_p+x]^{(m)} = (p+m-1)^{n|-1} \cdot [a_1+x, \ldots, a_p+x]^{(m-n)}$

Eben so ist

$$\frac{d^{q-m+n}}{dx^{q-m+n}}[a_1+x, \ldots, a_p+x]^{(q)} = (p+q-1)^{q-m+n|-1} \cdot [a_1+x, \ldots, a_p+x]^{(m+n)}$$

Werden diese beiden Gleichungen mit einander verbunden, so wird

448) $\frac{d^n}{dx^n}[a_1+x, \ldots, a_p+x]^{(m)} = \frac{1^{p+m-1|1}}{1^{p+q-1|1}} \cdot \frac{d^{q-m+n}}{dx^{q-m+n}}[a_1+x, \ldots, a_p+x]^{(q)}$

durch welche Gleichung ein Differential auf ein anderes übertragen werden kann.

V. Höhere Differentiale des Bruches

$$\frac{1}{(a_1+x)\,(a_2+x)\,(a_3+x)\,\ldots\ldots\,(a_p+x)} = P_p$$

§. 120.

Wegen der Kürze setzen wir

$$\frac{1}{a_p+x} = X_p \text{ und}$$

$$\left[X_1, X_2, \ldots, X_p \right]^{(m)} = [p]^{(m)}$$

Wir trennen den letzten Factor vom Producte, und nehmen nach der Vorschrift 188 das *n*te Differential von $P_{p-1} . X_p$, welches in der Summe der Reihe besteht, wenn in

$$\frac{d^n P_p}{1^{n|1}.dx^n} = \Sigma\ \frac{d^s X_p}{1^{s|1}\,dx^s} \cdot \frac{d^{n-s} P_{p-1}}{1^{n-s|1}\,dx^{n-s}}$$

$s = 0, 1, 2, \ldots, n$ gesetzt wird, oder, weil

$$\frac{d^s X_p}{1^{s|1}\,dx^s} = (-)^s\ X_p^{s+1}$$

in folgender Reihe

$$\frac{d^n P_p}{1^{n|1}\,dx^n} = X_p^1 \left(X_p^0\ \frac{d^n P_{p-1}}{1^{n|1}\,dx^n} - X_p^1\ \frac{d^{n-1} P_{p-1}}{1^{n-1|1}\,dx^{n-1}} + X_p^2\ \frac{d^{n-2} P_{p-1}}{1^{n-2|1}\,dx^{n-2}} - \ldots (-)^n X_p^n\ \frac{d^0 P_{p-1}}{1^{0|1}\,dx^0} \right)$$

Vermittelst dieser Gleichung können wir die verschiedenen Differentiale des vorgegebenen Products aufsuchen. Setzen wir nämlich $p = 1$, so wird

$$\frac{d^n P_1}{1^{n|1}\, dx^n} = (-)^n X_1^1 [1]^{(n)}$$

Hiedurch wird für $p = 2$

$$\frac{d^n P_2}{1^{n|1}\, dx^n} = (-)^n X_2^1 X_1^1 \left([1]^{(n)} + X_2^1 [1]^{(n-1)} + X_2^2 [1]^{(n-2)} + \ldots . + X_2^n [1]^{(0)} \right)$$

Die eingeklammerte Reihe ist nach der Gleichung 406 Anal. Seite 252

$$= [2]^{(n)}$$

und folglich

$$\frac{d^n P_2}{1^{n|1}\, dx^n} = (-)^n X_2^1 X_1^1 . [2]^{(n)}$$

Wird $p = 3$ gesetzt, so wird

$$\frac{d^n P_3}{1^{n|1}\, dx^n} = (-)^n X_3^1 X_2^1 X_1^1 . \left([2]^{(n)} + X_3^1 [2]^{(n-1)} + \ldots . + X_3^n [2]^{(0)} \right)$$

und da die eingeklammerte Reihe nach der angeführten Gleichung

$$= [3]^{(n)}$$

so ist

$$\frac{d^n P_3}{1^{n|1}\, dx^n} = (-)^n X_3^1 X_2^1 X_1^1 . [3]^{(n)}$$

Allgemein ergibt sich aus der obigen Gleichung und vermittelst der Gleichung 406 Anal., dass

$$\frac{d^n P_p}{1^{n|1}\, dx^n} = (-)^n X_1^1 X_2^1 \ldots . X_p^1 . [p]^{(n)}$$

oder

449) $$\frac{d^n}{dx^n} \left(\frac{1}{(a_1 + x)(a_2 + x)(a_3 + x) \ldots . (a_p + x)} \right) =$$

$$= (-)^n 1^{n|1} . \frac{1}{(a_1 + x)(a_2 + x) \ldots (a_p + x)} . \left[\frac{1}{a_1 + x}, \frac{1}{a_2 + x}, \frac{1}{a_3 + x}, \ldots, \frac{1}{a^p + x} \right]^{(n)}$$

VI. Höhere Differentiale der geordneten Verbindungen mit und ohne Wiederholungen aus den Elementen

$$\frac{1}{a_1+x}, \frac{1}{a_2+x}, \frac{1}{a_3+x}, \ldots, \frac{1}{a_p+x}$$

§. 121.

Die zuletzt gefundene Gleichung gibt die Bildungsweise des *n* ten Differentials des Bruches an, dessen Nenner ein Product aus den Factoren a_1+x, a_2+x, a_3+x, ..., a_p+x ist. Sie enthält aber auch zugleich die Grundlage zur Bildung des *n* ten Differentials von den geordneten Verbindungen mit Wiederholungen aus den Elementen

$$\frac{1}{a_1+x}, \frac{1}{a_2+x}, \ldots\ldots, \frac{1}{a_p+x}$$

Denn setzen wir

$$a_r + x = V_r$$

$$(V_1, V_2, V_3, \ldots, V_p)^{(h)} = (p)^{(h)}$$

und behalten die vorige Bezeichnung bei, so ist nach 449

$$[p]^{(q)} = (-)^q \, (p)^{(p)} \cdot \frac{d^q P_p}{1^{q|1} \, dx^q}$$

wo $[p]^{(q)}$ aus X_1, X_2, X_3, . . . , X_p gebildet wird, mithin wenn das *n*te Differential genommen wird

$$\frac{d^n \, [p]^{(q)}}{1^{n|1} \, dx^n} = (-)^q \, \Sigma \, \frac{d^s (p)^{(p)}}{1^{s|1} \, dx^s} \cdot \frac{d^{n-s}}{1^{n-s|1} \, dx^{n-s}} \left(\frac{d^q P_p}{1^{q|1} \, dx^q}\right),$$

wo $s = 0, 1, 2, \ldots\ldots, n$.

Es ist aber nach 444

$$\frac{d^s (p)^{(p)}}{1^{s|1}\, dx^s} = (p)^{(p-s)}$$

und nach 449

$$\frac{d^{n-s}}{1^{n-s|1}\, dx^{n-s}} \left(\frac{d^q P_p}{1^{q|1}\, dx^q}\right) = \frac{1}{1^{n-s|1}\, 1^{q|1}} \cdot \frac{d^{n+q-s} P_p}{dx^{n+q-s}} = (-)^{n+q-s}\ \frac{1^{n+q-s|1}}{1^{n-s|1}\, 1^{q|1}} \cdot \frac{[p]^{(n+q-s)}}{(p)^{(p}}$$

folglich

$$\frac{d^n [p]^{(q)}}{1^{n|1}\, dx^n} = \frac{1}{1^{q|1}\, (p)^{(p)}} \cdot \Sigma\, (-)^{n-s}\ \frac{1^{q+n-s|1}}{1^{n-s|1}} \cdot (p)^{(p-s)} \cdot [p]^{(n+q-s)}$$

und weil

$$\frac{(p)^{(p-s)}}{(p)^{(p)}} = (X_1, X_2, \ldots, X_p)^{(s)}$$

so ist

$$450)\qquad \frac{d^n}{dx^n} \left[\frac{1}{a_1+x}, \frac{1}{a_2+x}, \ldots, \frac{1}{a_p+x}\right]^{(q)} =$$

$$\begin{aligned} = (-)^n \frac{1^{n|1}}{1^{q|1}} \Bigg(& \frac{1^{q+n|1}}{1^{n|1}} \cdot \left(\frac{1}{a_1+x}, \ldots, \frac{1}{a_p+x}\right)^{(0)} \cdot \left[\frac{1}{a_1+x}, \ldots, \frac{1}{a_p+x}\right]^{(q+n)} \\ & - \frac{1^{q+n-1|1}}{1^{n-1|1}} \cdot \left(\frac{1}{a_1+x}, \ldots, \frac{1}{a_p+x}\right)^{(1)} \cdot \left[\frac{1}{a_1+x}, \ldots, \frac{1}{a_p+x}\right]^{(q+n-1)} \\ & + \frac{1^{q+n-2|1}}{1^{n-2|1}} \cdot \left(\frac{1}{a_1+x}, \ldots, \frac{1}{a_p+x}\right)^{(2)} \cdot \left[\frac{1}{a_1+x}, \ldots, \frac{1}{a_p+x}\right]^{(q+n-2)} \\ & - \ldots\ldots\ldots + \ldots\ldots\ldots \\ & (-)^n \frac{1^{q+n-n|1}}{1^{n-n|1}} \cdot \left(\frac{1}{a_1+x}, \ldots, \frac{1}{a_p+x}\right)^{(n} \cdot \left[\frac{1}{a_1+x}, \ldots, \frac{1}{a_p+x}\right]^{(q+n-n)} \Bigg) \end{aligned}$$

VII. Allgemeine und besondere Fälle über die mit dem Vervielfachen abwechselnden Differentiale.

§. 122.

In unserer Untersuchung über das mit dem Vervielfachen abwechselnde Differentiiren wurde immer mit demselben Factor Z vervielfacht, dem übrigens keine besondere Eigenschaften gegeben wurden. Wir wollen hier einige besondere Fälle würdigen, und zwar zuerst, wenn die Factoren, mit welchen nach dem Differentiiren vervielfacht wird, ungleich sind, und dann auch wenn diese Factoren besondere Eigenschaften haben.

Es seien Z und u_1, u_2, u_3, ... willkührliche Functionen mehrerer verschiedener veränderlicher Grössen, und zur Abkürzung sei

451) $$d\Big(_{n} u_n d\Big(_{n-1} u_{n-1}\, d\Big(_{n-2} u_{n-2} \ldots\ldots d\Big(_{2} u_2\, d\Big(_{1} u_1\, Z\Big)_{1} \ldots\ldots\Big)_{n} = Z^{(n)}$$

Werden die Geschäfte, welche hier durch Zeichen angegeben sind, vorgenommen, und die Producte nach den Differentialen von Z geordnet,

452) $$Z^{(n)} = Z_{n}^{(n)} . d^{n}Z + Z_{n-1}^{(n)} . d^{n-1}Z + Z_{n-2}^{(n)} . d^{n-2}Z + \ldots + Z_{0}^{(n)} . d^{1}Z$$

so befolgen die begleitenden Factoren das Gesetz:

453)
$$
\begin{aligned}
Z_{n+1}^{(n+1)} &= u_{n+1} . Z_{n}^{(n)} \\
Z_{n}^{(n+1)} &= u_{n+1} . Z_{n-1}^{(n)} + d(u_{n+1} . Z_{n}^{(n)}) \\
Z_{n-1}^{(n+1)} &= u_{n+1} . Z_{n-2}^{(n)} + d(u_{n+1} . Z_{n-1}^{(n)}) \\
&. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\
Z_{n-q+1}^{(n+1)} &= u_{n+1} . Z_{n-q}^{(n)} + d(u_{n+1} . Z_{n-q+1}^{(n)}) \\
&. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\
Z_{0}^{(n+1)} &= \qquad\qquad\qquad d(u_{n+1} . Z_{0}^{(n)})
\end{aligned}
$$

welches sich ergibt, wenn 452 mit u_{n+1} vervielfacht und differentiirt wird. Nach diesem ist

$$d(u_1 Z) = u_1 . d^1 Z + d u_1 . d^0 Z$$

$$d(u_2\, d(u_1 Z)) = u_2 u_1 . d^2 Z + \left. \begin{array}{l} u_2\, d(u_1) \\ + d(u_2\, u_1) \end{array} \right| . d^1 Z + d(u_2\, d(u_1)) . d^0 Z$$

$$
\begin{aligned}
d(u_3\, d(u_2\, d(u_1 Z))) = u_3\, u_2\, u_1 . d^3 Z &+ \left. \begin{array}{l} u_3\, u_2\, d(u_1) \\ + u_3\, d(u_2\, u_1) \\ + d(u_3\, u_2\, u_1) \end{array} \right| . d^2 Z \\
&+ \left. \begin{array}{l} u_3\, d^1(u_2\, d^1(u_1)) \\ + d^1(u_3\, u_2\, d^1(u_1)) \\ + d^1(u_3\, d^1(u_2\, u_1)) \end{array} \right| . d^1 Z + d(u_3 d(u_2 d(u_1))) . d^0 Z
\end{aligned}
$$

$$d(u_4 d(u_3 d(u_2 d(u_1 Z)))) = u_4\, u_3\, u_2\, u_1 . d^4 Z + \left. \begin{array}{l} u_4\, u_3\, u_2\, d(u_1) \\ + u_4\, u_3\, d(u_2\, u_1) \\ + u_4\, d(u_3\, u_2\, u_1) \\ + d(u_4\, u_3\, u_2\, u_1) \end{array} \right| . d^3 Z$$

$$\begin{array}{rl}
+\ u_4\, u_3\, d(u_2\, d(u_1)) & \\
u_4\, d(u_3\, u_2\, d(u_1)) & \\
u_4\, d(u_2\, d(u_2\, u_1)) & \\
d(u_4\, u_3\, u_2\, d(u_1)) & \\
d(u_4\, u_3\, d(u_2\, u_1)) & \\
d(u_4\, d(u_3\, u_2\, u_1)) &
\end{array}\Bigg| \,.\, d^2 Z$$

$$\begin{array}{rl}
+\ u_4\, d(u_3\, d(u_2\, d(u_1))) & \\
+\ d(u_4\, u_3\, d(u_2\, d(u_1))) & \\
+\ d(u_4\, d(u_3\, u_2\, d(u_1))) & \\
+\ d(u_4\, d(u_3\, d(u_2 u_1))) &
\end{array}\Bigg| \,.\, d^1 Z$$

$$+\ d\Big(u_4\, d(u_3\, d(u_2\, d(u_1)))\Big) \,.\, d^0 Z$$

u. s. w. Das Gesetz, nach welchem diese Vorzahlen gebildet werden, besteht darin, dass z. B.

bei $Z_3^{(4)}$ ein d^1

$Z_2^{(4)}$ zwei d^1 d^1

$Z_1^{(4)}$ drei d^1 d^1 d^1

$Z_0^{(4)}$ vier d^1 d^1 d^1 d^1 in vier Abtheilungen gebracht werden.

§. 123.

In dem besonderen Falle, wenn

$$u_1 = 1 \quad \text{und} \quad u_2 = u_3 = \ldots\ldots = e^x$$

und dx beständig angenommen wird, gewinnen wir nach diesen Vorschriften sehr einfache Resultate, z. B.

$$(e^x \,.\, d)^4 Z = e^x \,.\, d\Big(e^x \,.\, d(e^x \,.\, d(e^x \,.\, d(Z)))\Big) = e^{4x}\Big(\ 1\,.\,2\,.\,3\,.\,(dx)^3 \,.\, d^1 Z$$

$$\begin{array}{r}
+\,1\,.\,2 \\
1\,.\,3 \\
2\,.\,3
\end{array}\Bigg| \,.\, (dx)^2 \,.\, d^2 Z$$

$$\begin{array}{r|l} +\;1 & .\,(dx)^1\,.\,d^3Z \\ 2 & \\ 3 & \end{array}$$

$$+\;(dx)^0\,.\,d^4Z\;\Big)$$

und

$$(e^x.d)^5\,Z = e^x.d\Big(e^x.d\Big(e^x.d\big(e^x.d(e^x.d(Z))\big)\Big)\Big) = e^{5x}\Big(\;1\,.\,2\,.\,3\,.\,4\,.\,(dx)^4\,.\,d^1Z$$

$$\begin{array}{r|l} +\;1\,.\,2\,.\,3 & .\;(dx)^3\,.\,d^2Z \\ 1\,.\,2\,.\,4 & \\ 1\,.\,3\,.\,4 & \\ 2\,.\,3\,.\,4 & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 1\,.\,2 & .\;(dx)^2\,.\,d^3Z \\ 1\,.\,3 & \\ 1\,.\,4 & \\ 2\,.\,3 & \\ 2\,.\,4 & \\ 3\,.\,4 & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} +\,1 & .\;(dx)^1\,.\,d^4Z \\ 2 & \\ 3 & \\ 4 & \end{array}$$

$$+\,(dx)^0\,.\,d^5Z\;\Big)$$

und allgemein

$$454)\quad (e^x . d)^n Z = e^{nx} . \left(\begin{aligned} & (1, 2, \ldots, n-1)^{(n-1)} . (dx)^{n-1} . d^1Z \\ + & (1, 2, \ldots, n-1)^{(n-2)} . (dx)^{n-2} . d^2Z \\ + & (1, 2, \ldots, n-1)^{(n-3)} . (dx)^{n-3} . d^3Z \\ + & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ + & (1, 2, \ldots, n-1)^{(0)} . (dx)^0 . d^nZ \end{aligned} \right)$$

Diese Formel 454 findet auch Scherk Seite 18 N. 4.

Bei andern Functionen ergeben sich andere Gesetze.

124

Es sei

$$455)\quad u^{\nu n} . \frac{d}{du}{\Big(}_{n} u^{\nu(n-1)} . \frac{d}{du}{\Big(}_{n-1} u^{\nu(n-2)} \ldots . \frac{d}{du}{\Big(}_{2} u^{\nu 1} . \frac{d}{du}{\Big(}_{1} u^{\nu 0} . Y{\Big)}_{1} \ldots\ldots{\Big)}_{n} = Y^{(n)}$$

und

$$456)\quad \frac{d}{du}{\Big(}_{p} \frac{d}{du}{\Big(}_{p-1} \frac{d}{du}{\Big(}_{p-2} \ldots\ldots \frac{d}{du}{\Big(}_{2} \frac{d}{du}{\Big(}_{1} Y{\Big)}_{1} \ldots\ldots{\Big)}_{p} = J^{(p)}$$

u und Y seien Functionen mehrerer verschiedener veränderlicher Grössen; es sollen die Geschäfte, durch $Y^{(n)}$ vorgestellt, auf die einfacheren Geschäfte, vorgestellt durch $J^{(0)}$, $J^{(1)}$, $J^{(2)}$, …., zurückgeführt werden.

Wir wollen diese allgemeine Aufgabe nach ihrer Wichtigkeit, welche sie für die Theorie der Reihen hat, würdigen.

Zuerst finden wir für das Zurückführen des Zusammengesetzten auf das Einfachere folgende Gleichung:

457)
$$\begin{aligned} Y^{(n)} = {} & Y_0^{(n)} \,.\, u^{-n+wn} \,.\, J^{(0)} \\ & + Y_1^{(n)} \,.\, u^{-n+1+wn} \,.\, J^{(1)} \\ & + Y_2^{(n)} \,.\, u^{-n+2+wn} \,.\, J^{(2)} \\ & + \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;. \\ & + Y_n^{(n)} \,.\, u^{-n+n+wn} \,.\, J^{(n)} \end{aligned}$$

wo

458)
$$\begin{aligned} w0 &= \nu 0 \\ w1 &= \nu 0 + \nu 1 \\ w2 &= \nu 0 + \nu 1 + \nu 2 \\ .\;.\;.\;&.\;.\;.\;.\;.\;.\;. \\ wn &= \nu 0 + \nu 1 + \nu 2 + \ldots + \nu n \end{aligned}$$

und die Vorzahlen $Y_0^{(n)}$, $Y_1^{(n)}$, . . . , $Y_n^{(n)}$ weder u noch Y enthalten und folgendes Gesetz befolgen:

459)
$$\begin{aligned} Y_0^{(n+1)} &= (-n+wn) \,.\, Y_0^{(n)} \\ Y_1^{(n+1)} &= (-n+1+wn) \,.\, Y_1^{(n)} + Y_0^{(n)} \\ Y_2^{(n+1)} &= (-n+2+wn) \,.\, Y_2^{(n)} + Y_1^{(n)} \\ .\;.\;.\;.\;&.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;. \\ Y_q^{(n+1)} &= (-n+q+wn) \,.\, Y_q^{(n)} + Y_{q-1}^{(n)} \\ .\;.\;.\;.\;&.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;. \\ Y_{n+1}^{(n+1)} &= \qquad\qquad\qquad\quad Y_n^{(n)} \end{aligned}$$

Dieses letztere Gesetz lässt sich in ein anderes verwandeln, welches entsteht, wenn in der Gleichung, worin q vorkommt,

$$n = n-s-1 \text{ und } q = q-s \text{ und } s = 0, 1, 2, \ldots, q$$

gesetzt wird, und alle hiedurch gebildeten Gleichungen zusammengezählt werden; die Bildungsweise, welche hiedurch entsteht, und die vorige 459 vertritt, ist

460)
$$\begin{aligned} Y_q^{(n)} = & \ (-n+q+1+w(n-1)) \ . \ Y_q^{(n-1)} \\ & + (-n+q+1+w(n-2)) \ . \ Y_{q-1}^{(n-2)} \\ & + (-n+q+1+w(n-3)) \ . \ Y_{q-2}^{(n-3)} \\ & + \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \\ & + (-n+q+1+w(n-q-1)) \ . \ Y_0^{(n-q-1)} \end{aligned}$$

und wenn $q = n, n-1, n-2, \ldots,$ gesetzt wird

461)
$$\begin{aligned} Y_n^{(n)} & = 1 \\ Y_{n-1}^{(n)} & = w0 + w1 + w2 + \ldots + w(n-1) \\ Y_{n-2}^{(n)} & = (-1+w1).Y_0^{(1)} + (-1+w2).Y_1^{(2)} + \ldots + (-1+w(n-1)) \ . \ Y_{n-2}^{(n-1)} \\ Y_{n-3}^{(n)} & = (-2+w2).Y_0^{(2)} + (-2+w3).Y_1^{(3)} + \ldots + (-2+w(n-1)).Y_{n-3}^{(n-1)} \\ Y_{n-4}^{(n)} & = (-3+w3).Y_0^{(3)} + (-3+w4).Y_T^{(4)} + \ldots + (-3+w(n-1)).Y_{n-4}^{(n-1)} \\ & . \end{aligned}$$

Nach diesen Gesetzen erhalten wir folgende unabhängige Bestimmungen:

462)
$$u^{\nu 1} \cdot \frac{d}{du} (u^{\nu 0} . Y) = (-0 + w0) . u^{-1+w1} . Y + u^{-0+w1} \cdot \frac{d}{du} (Y)$$

$$\begin{aligned} u^{\nu 2} \cdot \frac{d}{du}\left(u^{\nu 1} \cdot \frac{d}{du} (u^{\nu 0} . Y)\right) = & \ (-0+w0)(-1+w1).u^{-2+w2} . Y \\ & + \begin{vmatrix} -0+w0 \\ -0+w1 \end{vmatrix} u^{-1+w2} \cdot \frac{d}{du} (Y) \\ & + u^{-0+w2} \cdot \frac{d}{du}\left(\frac{d}{du} (Y)\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u^{\nu 3} \cdot \frac{d}{du}\left(u^{\nu 2} \cdot \frac{d}{du}\left(u^{\nu 1} \cdot \frac{d}{du}\left(u^{\nu 0} . Y\right)\right)\right) = & \ (-0+w0)(-1+w1)(-2+w2) . u^{-3+w3} . Y \\ & + \left. \begin{matrix} (-0+w0)(-1+w1) \\ (-0+w0)(-1+w2) \\ (-0+w1)(-1+w2) \end{matrix} \right| . u^{-2+w3} \cdot \frac{d}{du} (Y) \end{aligned}$$

$$+\left.\begin{array}{l}(-0+w_0)\\(-0+w_1)\\(-0+w_2)\end{array}\right| .\ u^{-1+w_3}.\ \frac{d}{du}\left(\frac{d}{du}(Y)\right)$$

$$+\ u^{-0+w_3}.\ \frac{d}{du}\left(\frac{d}{du}\left(\frac{d}{du}(Y)\right)\right)$$

$$u^{\nu_4}.\frac{d}{du}\left(u^{\nu_3}.\frac{d}{du}\left(u^{\nu_2}.\frac{d}{du}\left(u^{\nu_1}.\frac{d}{du}\left(u^{\nu_0}.Y\right)\right)\right)\right)=$$

$$=(-0+w_0)(-1+w_1)(-2+w_2)(-3+w_3).u^{-4+w_4}.Y$$

$$+\left.\begin{array}{l}(-0+w_0)(-1+w_1)(-2+w_2)\\(-0+w_0)(-1+w_1)(-2+w_3)\\(-0+w_0)(-1+w_2)(-2+w_3)\\(-0+w_1)(-1+w_2)(-2+w_3)\end{array}\right| .\ u^{-3+w_4}.\ \frac{d}{du}(Y)$$

$$+\left.\begin{array}{l}(-0+w_0)(-1+w_1)\\(-0+w_0)(-1+w_2)\\(-0+w_0)(-1+w_3)\\(-0+w_1)(-1+w_2)\\(-0+w_1)(-1+w_3)\\(-0+w_2)(-1+w_3)\end{array}\right| .\ u^{-2+w_4}.\ \frac{d}{du}\left(\frac{d}{du}(Y)\right)$$

$$+\left.\begin{array}{l}(-0+w_0)\\(-0+w_1)\\(-0+w_2)\\(-0+w_3)\end{array}\right| .\ u^{-1+w_4}.\ \frac{d}{du}\left(\frac{d}{du}\left(\frac{d}{du}(Y)\right)\right)$$

$$+u^{-0+w_4}.\ \frac{d}{du}\left(\frac{d}{du}\left(\frac{d}{du}\left(\frac{d}{du}(Y)\right)\right)\right)$$

u. s. w. wo w_0, w_1, w_2, w_3, ... das Gesetz der geordneten Verbindungen ohne Wiederholungen befolgen.

Wir wollen für diese geordneten Verbindungen ohne Wiederholungen zu p Elementen aus den Elementen w_0, w_1, w_2, . . ., w_n, so beschaffen, dass

dem ersten Elemente jeder Verbindung ein − 0 zugesetzt wird
. . zweiten . . . . − 1 . . . .
. . dritten . . . . − 2 . . . .
. . . .
dem letzten . . . . −(p−1) . . . . . .
ein besonderes Zeichen, und zwar

463) $$\Big|_{,} w0, w1, w2, \ldots, wn\Big|^{(p)}$$

festsetzen; z. B.

$$\begin{aligned}
&(-0+w0)(-1+w1)(-2+w2) = \Big|_{,} w0, w1, w2, w3, w4\Big|^{(3)}\\
&(-0+w0)(-1+w1)(-2+w3)\\
&(-0+w0)(-1+w1)(-2+w4)\\
&(-0+w0)(-1+w2)(-2+w3)\\
&(-0+w0)(-1+w2)(-2+w4)\\
&(-0+w0)(-1+w3)(-2+w4)\\
&(-0+w1)(-1+w2)(-2+w3)\\
&(-0+w1)(-1+w2)(-2+w4)\\
&(-0+w1)(-1+w3)(-2+w4)\\
&(-0+w2)(-1+w3)(-2+w4)
\end{aligned}$$

Hiedurch sind wir im Stande, das Gesetz der Vorzahlen in der obigen allgemeinen Reihe anzugeben, nämlich

464) $$Y_q^{(n)} = \Big|_{,} w0, w1, w2, .., w(n-1)\Big|^{(n-q)}$$

Diese unabhängige Bildungsweise können wir durch eine andere viel wichtigere ersetzen und zwar durch Hülfe der allgemeinen Wahrheit, welche wir in unserer Analysis Seite 350 bekannt gemacht haben. Setzen wir nämlich

$$\begin{aligned} a_1 &= -0+w0 \\ a_2 &= -1+w1 \\ a_3 &= -2+w2 \\ &\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ a_p &= -(p-1)+w(p-1) \end{aligned}$$

so erhalten wir folgende unabhängige Bildungsweise:

$$\begin{aligned} 465)\; Y_q^{(n)} = \frac{1}{1^{q|1}} \cdot \Big(& \frac{q^{0|-1}}{1^{0|1}} \cdot (q+w0)(q-1+w1)(q-2+w2)\ldots\ldots(q-n+1+w(n-1)) \\ & - \frac{q^{1|-1}}{1^{1|1}} \cdot (q-1+w0)(q-2+w1)(q-3+w2)\ldots\ldots(q-n \quad +w(n-1)) \\ & + \frac{q^{2|-1}}{1^{2|1}} \cdot (q-2+w0)(q-3+w1)(q-4+w2)\ldots\ldots(q-n-1+w(n-1)) \\ & - \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; + \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;. \\ & (-)^s \frac{q^{s|-1}}{1^{s|1}} . (q-s+w0)(q-s-1+w1)(q-s-2+w2)\ldots\ldots(q-n-s+1+w(n-1)) \\ & .\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;. \\ & (-)^q \frac{q^{q|-1}}{1^{q|1}} \cdot (0+w0)(-1+w1)(-2+w2)\ldots(-n+1+w(n-1)) \Big) \end{aligned}$$

§. 125.

Nachdem wir für die allgemeine von uns hier zuerst vorgelegte Aufgabe zwei zurücklaufende Bildungsweisen 459 und 460 und auch zwei unabhängige Bildungsweisen 464 und 465 der Vorzahlen aufgefunden haben, gehen wir zu einigen speciellen Fällen über. Es sei

$${}_\nu0 = 0 \text{ und } {}_\nu1 = {}_\nu2 = {}_\nu3 = \ldots = m$$

Die Reihe, welche hiedurch entsteht, ist

466)
$$\left(u^{m}\cdot\frac{d}{du}\right)^{n}Y = \begin{aligned}[t] & Y_{,}^{(n)}\cdot u^{n(m-1)}\cdot\left(\frac{d}{du}\right)^{0}Y \\ & + Y_{1}^{(n)}\cdot u^{n(m-1)+1}\cdot\left(\frac{d}{du}\right)^{1}Y \\ & + Y_{2}^{(n)}\cdot u^{n(m-1)+2}\cdot\left(\frac{d}{du}\right)^{2}Y \\ & + \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ & + Y_{q}^{(n)}\cdot u^{n(m-1)+q}\cdot\left(\frac{d}{du}\right)^{q}Y \\ & + \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ & + Y_{n}^{(n)}\cdot u^{n(m-1)+n}\cdot\left(\frac{d}{du}\right)^{n}Y \end{aligned}$$

und die unabhängige Bildungsweise ihrer Vorzahlen ist

467)
$$Y_{q}^{(n)} = \frac{1}{1^{q|1}}\cdot\left(\begin{aligned} & q^{n|m-1}\cdot\frac{q^{0|-1}}{1^{0|1}} \\ & -(q-1)^{n|m-1}\cdot\frac{q^{1|-1}}{1^{1|1}} \\ & +(q-2)^{n|m-1}\cdot\frac{q^{2|-1}}{1^{2|1}} \\ & -\;\cdot\;\cdot\;+\;\cdot\;\cdot \\ & (-)^{q}(q-q)^{n|m-1}\cdot\frac{q^{q|-1}}{1^{q|1}} \end{aligned}\right)$$

Für diesen Fall bietet uns unsere Gleichung 254 Mittel dar zu einer von der so eben gefundenen verschiedenen unabhängigen Bildungsweise. Setzen wir nämlich

$$Z = \frac{u^{m}}{du}\;,\;Y = u\;,\;U = Y$$

so wird

$$\frac{(Z.d)^{q}Y}{1^{q|1}} = \frac{1}{1^{q|1}}\cdot\left(u^{m}\cdot\frac{d}{du}\right)^{q}u = \frac{1^{q|m-1}}{1^{q|1}}\cdot u^{q(m-1)+1}$$

und

$$\underset{\left(\frac{(Z.d)^1 Y}{1^{1|1}},\ \frac{(Z.d)^2 Y}{1^{2|1}},\ \ldots\ldots\right)}{C(n,s)} = u^{n(m-1)+s} . \underset{\left(\frac{1^{1|m-1}}{1^{1|1}},\ \frac{1^{2|m-1}}{1^{2|1}},\ \ldots\ldots\right)}{C(n,s)}$$

folglich

$$468)\qquad \left(u^m . \frac{d}{du}\right)^n Y = 1^{n|1} . u^{n(m-1)} . \underset{\left(\frac{1^{1|m-1}}{1^{1|1}},\ \frac{1^{2|m-1}}{1^{2|1}},\ \frac{1^{3|m-1}}{1^{3|1}},\ \ldots\ldots\ldots\right)}{\left(\begin{array}{l} C(n,0) . \frac{u^0}{1^{0|1}} . \left(\frac{d}{du}\right)^0 Y \\ + C(n,1) . \frac{u^1}{1^{1|1}} . \left(\frac{d}{du}\right)^1 Y \\ + C(n,2) . \frac{u^2}{1^{2|1}} . \left(\frac{d}{du}\right)^2 Y \\ + \ .\ .\ .\ .\ .\ .\ . \\ + C(n,n) . \frac{u^n}{1^{n|1}} . \left(\frac{d}{du}\right)^n Y \end{array}\right)}$$

Die Verbindungen, welche vorstehende Zeichen angeben, befolgen nach unserer Analysis Seite 132. N. 137, wenn

$$a = m,\ f = m-1,\ b = 2,\ h = 1$$

gesetzt werden, folgendes Gesetz:

$$469)\qquad \underset{\left(\frac{1^{1|m-1}}{1^{1|1}},\ \frac{1^{2|m-1}}{1^{2|1}},\ \frac{1^{3|m-1}}{1^{3|1}},\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\right)}{n . C(n,s) = s . C(n-1,s-1) + ((n-1)(m-1)+s) . C(n-1,s)}$$

Wir haben für das mit dem Vervielfachen abwechselnde Differentiiren

$$\left(u^m . \frac{d}{du}\right)^n Y$$

wo u und Y willkührliche Functionen sind, und für die noch allgemeinere Formel, durch $Y^{(n)}$ vorgestellt, mehrere unabhängige und zurücklaufende Bildungsweisen aufgesucht und gefunden. Die Wichtigkeit dieser Aufgabe, die wir hier zuerst vorgelegt und gelöst haben, forderte die lange Anstrengung, die wir ihr gewidmet haben, ehe wir zu dem Ziele und besonders zu 465 und 467 gelangten.

Wir wollen auf diese ganz allgemeine Untersuchung noch einige specielle Fälle folgen lassen.

§. 126.

Wenn $m = 1$ ist, so ist nach 466 und 467

$$
\begin{aligned}
470)\quad \left(u\cdot\frac{d}{du}\right)^n Y = {} & 0^n \cdot \frac{0^{0|-1}}{1^{0|1}}\cdot\frac{u^0}{1^{0|1}}\cdot\left(\frac{d}{du}\right)^0 Y \\
& + 1^n \cdot \frac{1^{0|-1}}{1^{0|1}}\cdot\frac{u^1}{1^{1|1}}\cdot\left(\frac{d}{du}\right)^1 Y \\
& + \left(2^n\cdot\frac{2^{0|-1}}{1^{0|1}} - 1^n\cdot\frac{2^{1|-1}}{1^{1|1}}\right)\cdot\frac{u^2}{1^{2|1}}\cdot\left(\frac{d}{du}\right)^2 Y \\
& + \left(3^n\cdot\frac{3^{0|-1}}{1^{0|1}} - 2^n\cdot\frac{3^{1|-1}}{1^{1|1}} + 1^n\cdot\frac{3^{2|-1}}{1^{2|1}}\right)\cdot\frac{u^3}{1^{3|1}}\cdot\left(\frac{d}{du}\right)^3 Y \\
& + \cdots\cdots\cdots\cdots \\
& + \left(n^n\cdot\frac{n^{0|-1}}{1^{0|1}} - (n-1)^n\cdot\frac{n^{1|-1}}{1^{1|1}} + (n-2)^n\cdot\frac{n^{2|-1}}{1^{2|1}} - \ldots (-)^{n-1} 1^n\cdot\frac{n^{n-1|-1}}{1^{n-1|1}}\right)\cdot\frac{u^n}{1^{n|1}}\cdot\left(\frac{d}{du}\right)^n Y
\end{aligned}
$$

oder nach 464 und 466

$$471)\quad \left(u\cdot\frac{d}{du}\right)^{n} Y = [0]^{(n)}\cdot u^{0}\cdot\left(\frac{d}{du}\right)^{0} Y$$

$$+ [1]^{(n-1)}\cdot u^{1}\cdot\left(\frac{d}{du}\right)^{1} Y$$

$$+ [1,2]^{(n-2)}\cdot u^{2}\cdot\left(\frac{d}{du}\right)^{2} Y$$

$$+ [1,2,3]^{(n-3)}\cdot u^{3}\cdot\left(\frac{d}{du}\right)^{3} Y$$

$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$+ [1,2,3,..,n]^{(0)}\cdot u^{n}\cdot\left(\frac{d}{du}\right)^{n} Y$$

Einen sehr speciellen Fall von 471, nämlich wo du beständig ist, findet auch **Scherk** in seiner Dissertation de evolvenda functione. 1824 Seite 6. §. 2.

§. 127.

Ist aber $m = 2$, so ist nach 467

$$Y_q^{(n)} = \frac{1}{1^{q|1}}\left(q^{n|1}\cdot\frac{q^{0|-1}}{1^{0|1}} - (q-1)^{n|1}\cdot\frac{q^{1|-1}}{1^{1|1}} + \ldots\ldots (-)^{q-1}\, 1^{n|-1}\cdot\frac{q^{q-1|-1}}{1^{q-1|1}}\right)$$

also nach Analysis Seite 353 N. 644

$$Y_q^{(n)} = \frac{q^{n-q|1}\cdot n^{q|-1}}{1^{q|1}} = \frac{n^{q|-1}}{1^{q|1}}\cdot(n-1)^{n-q|-1}$$

mithin

$$472)\quad \left(u^{2}\cdot\frac{d}{du}\right)^{n} Y = \frac{n^{0|-1}}{1^{0|1}}\cdot(n-1)^{n|-1}\cdot u^{n}\cdot\left(\frac{d}{du}\right)^{0} Y$$

$$+ \frac{n^{1|-1}}{1^{1|1}}\cdot(n-1)^{n-1|-1}\cdot u^{n+1}\cdot\left(\frac{d}{du}\right)^{1} Y$$

$$+ \frac{n^{2|-1}}{1^{2|1}}\cdot(n-1)^{n-2|-1}\cdot u^{n+2}\cdot\left(\frac{d}{du}\right)^{2} Y$$

$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$+ \frac{n^{n|-1}}{1^{n|1}}\cdot(n-1)^{0|-1}\cdot u^{n+n}\cdot\left(\frac{d}{du}\right)^{n} Y$$

§. 128.

Zuletzt ist $m = -1$, so findet man entweder aus 468 oder aus 461, dass

$$Y_{n-p}^{(n)} = (-)^p \, 1^{p|2} \, . \, \frac{(n+p-1)^{2p|-1}}{1^{2p|1}}$$

und

473)
$$\begin{aligned}\left(\frac{d}{u\,.\,du}\right)^n Y = \; & 1^{0|2} \, . \, \frac{(n-1)^{0|-1}}{1^{0|1}} \, . \, u^{-n} \, . \, \left(\frac{d}{du}\right)^n Y \\ & - 1^{1|2} \, . \, \frac{n^{2|-1}}{1^{2|1}} \, . \, u^{-n-1} \, . \, \left(\frac{d}{du}\right)^{n-1} Y \\ & + 1^{2|2} \, . \, \frac{(n+1)^{4|-1}}{1^{4|1}} \, . \, u^{-n-2} \, . \, \left(\frac{d}{du}\right)^{n-2} Y \\ & - 1^{3|2} \, . \, \frac{(n+2)^{6|-1}}{1^{6|1}} \, . \, u^{-n-3} \, . \, \left(\frac{d}{du}\right)^{n-3} Y \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & (-)^{n-1} 1^{n-1|2} . \, \frac{(2n-2)^{2(n-1)|-1}}{1^{2(n-1)|1}} \, . \, u^{-2n+1} \, . \, \left(\frac{d}{du}\right)^1 Y\end{aligned}$$

THEORIE
DER GEDOPPELTEN
VERBINDUNGEN
und der
zurücklaufenden Bildungsweisen, durch welche sie erzeugt werden.

THEORIE
DER GEDOPPELTEN
VERBINDUNGEN
und der
zurücklaufenden Bildungsweisen, durch welche sie erzeugt werden.

§. 129.

Es bedeute

474) $$A\Big(,\,0,(1,2,3,\ldots,n)^{(m)},n+1\Big),$$

die Verbindungen zu m+1 Elementen aus den Elementen

$$\begin{array}{c}
A_0^{(1)} \\
A_0^{(2)} \quad , \quad A_1^{(2)} \\
A_0^{(3)} \quad , \quad A_1^{(3)} \quad , \quad A_2^{(3)} \\
A_0^{(4)} \quad , \quad A_1^{(4)} \quad , \quad A_2^{(4)} \quad , \quad A_3^{(4)} \\
. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .
\end{array}$$

$$\begin{array}{lllll}
A_0^{(n+1-m)}, & A_1^{(n+1-m)}, & A_2^{(n+1-m)}, & \ldots\ldots, & A_{n-m}^{(n+1-m)} \\
A_1^{(n+2-m)}, & A_2^{(n+2-m)}, & A_3^{(n+2-m)}, & \ldots\ldots, & A_{n+1-m}^{(n+2-m)} \\
A_2^{(n+3-m)}, & A_3^{(n+3-m)}, & A_4^{(n+3-m)}, & \ldots\ldots, & A_{n+2-m}^{(n+3-m)} \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
A_m^{(n+1)}, & A_{m+1}^{(n+1)}, & A_{m+2}^{(n+1)}, & \ldots\ldots; & A_n^{(n+1)}
\end{array}$$

so dass die ersten m oberen Stellenzahlen und auch die letzten m unteren Stellenzahlen geordnete Verbindungen ohne Wiederholungen aus 1, 2, 3,..., n zu m Elementen sind, und dass die erste untere Stellenzahl 0 und auch die letzte obere Stellenzahl n + 1 unverändert bleibt.

Ist z. B. $m = 3$ und $n = 5$, so ist

475) $$A\left({}_{,}\, 0, (1, 2, 3, 4, 5)^{(3)}, 6\right)' = \begin{array}{llll}
A_0^{(1)} & A_1^{(2)} & A_2^{(3)} & A_3^{(6)}; \\
A_0^{(1)} & A_1^{(2)} & A_2^{(4)} & A_4^{(6)} \\
A_0^{(1)} & A_1^{(2)} & A_2^{(5)} & A_5^{(6)} \\
A_0^{(1)} & A_1^{(3)} & A_3^{(4)} & A_4^{(6)} \\
A_0^{(1)} & A_1^{(3)} & A_3^{(5)} & A_5^{(6)} \\
A_0^{(1)} & A_1^{(4)} & A_4^{(5)} & A_5^{(6)} \\
A_0^{(2)} & A_2^{(3)} & A_3^{(4)} & A_4^{(6)} \\
A_0^{(2)} & A_2^{(3)} & A_3^{(5)} & A_5^{(6)} \\
A_0^{(2)} & A_2^{(4)} & A_4^{(5)} & A_5^{(6)} \\
A_0^{(3)} & A_3^{(4)} & A_4^{(5)} & A_5^{(6)}
\end{array}$$

Die Gesetze, welchen diese gedoppelten Verbindungen unterworfen sind, geben folgende Zeichen an:

erstens

476) $$A\left({}_{,}\, 0, (1, 2, 3,.., n)^{(m)}, n+1\right)' = A\left({}_{,}\, 0, (1, 2,.., n-1)^{(m)}, n+1\right)' + A\left({}_{,} 0, (1, 2,..., n-1)^{(m-1)}, n\right)' \times A_n^{(n+1)}$$

zweitens

477) $$A\left(_{,}0,(1,2,3,\ldots,n)^{(m)},n+1\right)' =$$
$$A\left(_{,}0,(2,3,\ldots,n)^{(m)},n+1\right)' + A_0^{(1)} \times A\left(_{,}1,(2,3,\ldots,n)^{(m-1)},n+1\right)'$$

drittens

478) $$\begin{aligned} A\left(_{,}0,(1,2,3,\ldots,n)^{(m)},n+1\right)' = \; & A\left(_{,}0,(1,2,\ldots,n-1)^{(m-1)},n\right)' \times A_n^{(n+1)} \\ & + A\left(_{,}0,(1,2,\ldots,n-2)^{(m-1)},n-1\right)' \times A_{n-1}^{(n+1)} \\ & + A\left(_{,}0,(1,2,\ldots,n-3)^{(m-1)},n-2\right)' \times A_{n-2}^{(n+1)} \\ & + \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;. \\ & + A\left(_{,}0,(1,2,\ldots.,m-1)^{(m-1)},m\right)' \times A_m^{(n+1)} \end{aligned}$$

und viertens

479) $$\begin{aligned} A\left(_{,}0,(1,2,3,\ldots,n)^{(m)},n+1\right)' = \; & A_0^{(1)} \times A\left(_{,}1,(2,3,\ldots,n)^{(m-1)},n+1\right)' \\ & + A_0^{(2)} \times A\left(_{,}2,(3,4,\ldots,n)^{(m-1)},n+1\right)' \\ & + A_0^{(3)} \times A\left(_{,}3,(4,5,\ldots,n)^{(m-1)},n+1\right)' \\ & + \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;. \\ & + A_0^{(n-m+1)} \times A\left(_{,}n-m+1,(n-m+2,n-m+3,\ldots,n)^{(m-1)},n+1\right)' \end{aligned}$$

§. 130.

Es bedeute

480) $$A\left({}'0,(1,2,3,\ldots,n)^{(m)},n+1\right),$$

Verbindungen zu $m+1$ Elementen aus den Elementen

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & A_1^{(0)} & & & \\
 & & A_2^{(0)}, & & A_2^{(1)} & & \\
 & A_3^{(0)}, & & A_3^{(1)}, & & A_3^{(2)} & \\
A_4^{(0)}, & & A_4^{(1)}, & & A_4^{(2)}, & & A_4^{(3)} \\
\end{array}$$

$$\begin{array}{lllll}
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
A_{n+1-m}^{(0)}, & A_{n+1-m}^{(1)}, & A_{n+1-m}^{(2)}, & \ldots\ldots, & A_{n+1-m}^{(n-m)} \\
A_{n+2-m}^{(1)}, & A_{n+2-m}^{(2)}, & A_{n+2-m}^{(3)}, & \ldots\ldots, & A_{n+2-m}^{(n+1-m)} \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
A_{n+1}^{(m)}, & A_{n+1}^{(m+1)}, & A_{n+1}^{(m+2)}, & \ldots\ldots, & A_{n+1}^{(n)}
\end{array}$$

so dass die letzten m oberen Stellenzahlen und auch die ersten m unteren Stellenzahlen geordnete Verbindungen ohne Wiederholungen aus 1, 2, 3,..., n zu m Elementen, und dass die erste obere und die letzte untere Stellenzahl unveränderlich sind.

Ist $m = 3$, und $n = 5$, so ist

481) $$A\left('0, (1, 2, 3, 4, 5)^{(3)}, 6\right), = \begin{array}{llll}
A_1^{(0)} & A_2^{(1)} & A_3^{(2)} & A_6^{(3)} \\
A_1^{(0)} & A_2^{(1)} & A_4^{(2)} & A_6^{(4)} \\
A_1^{(0)} & A_2^{(1)} & A_5^{(2)} & A_6^{(5)} \\
A_1^{(0)} & A_3^{(1)} & A_4^{(3)} & A_6^{(4)} \\
A_1^{(0)} & A_3^{(1)} & A_5^{(3)} & A_6^{(5)} \\
A_1^{(0)} & A_4^{(1)} & A_5^{(4)} & A_6^{(5)} \\
A_2^{(0)} & A_3^{(2)} & A_4^{(3)} & A_6^{(4)} \\
A_2^{(0)} & A_3^{(2)} & A_5^{(3)} & A_6^{(5)} \\
A_2^{(0)} & A_4^{(2)} & A_5^{(4)} & A_6^{(5)} \\
A_3^{(0)} & A_4^{(3)} & A_5^{(4)} & A_6^{(5)}
\end{array}$$

Diese Verbindungen befolgen Gesetze, die den vorigen ähnlich sind; sie sind folgende:

erstens

482) $$A\left('0, (1, 2, \ldots, n)^{(m)}, n+1\right), =$$

$$A\left('0, (1, 2, \ldots, n-1)^{(m)}, n+1\right)_, + A\left('0, (1, 2, \ldots, n-1)^{(m-1)}, n\right)_, \times A_{n+1}^{(n)}$$

zweitens

483) $$= A\Big('0, (2, 3, \ldots, n)^{(m)}, n+1\Big)_{,} + A_1^{(0)} \times A\Big(1, (2, 3, \ldots, n)^{(m-1)}, n+1\Big),$$

drittens

484) $$\begin{aligned} = {} & A_1^{(0)} \times A\Big('\;1, (2, 3, \ldots, n)^{(m-1)}, n+1\Big)_{,} \\ & + A_2^{(0)} \times A\Big('\;2, (3, 4, \ldots, n)^{(m-1)}, n+1\Big)_{,} \\ & + A_3^{(0)} \times A\Big('\;3, (4, 5, \ldots, n)^{(m-1)}, n+1\Big)_{,} \\ & + \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ & + A_{n-m+1}^{(0)} \times A\Big('n-m+1, (n-m+2, n-m+3, \ldots, n)^{(m-1)}, n+1\Big)_{,} \end{aligned}$$

und viertens

485) $$\begin{aligned} = {} & A\Big('0, (1, 2, \ldots, m-1)^{(m-1)}, m\Big)_{,} \times A_{n+1}^{(m)} \\ & + A\Big('0, (1, 2, \ldots, m)^{(m-1)}, m+1\Big)_{,} \times A_{n+1}^{(m+1)} \\ & + A\Big('0, (1, 2, \ldots, m+1)^{(m-1)}, m+2\Big)_{,} \times A_{n+1}^{(m+2)} \\ & + \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ & + A\Big('0, (1, 2, \ldots, n-1)^{(m-1)}, n\Big)_{,} \times A_{n+1}^{(n)} \end{aligned}$$

§. 131.

Es sei

486) $$A\Big((1, 2, 3, \ldots, n)^{(m)}, n+1, \mathfrak{z}(n+1)_{m+1}\Big)$$

das Zeichen für die Summe der Producte, welche aus $m+1$ Factoren bestehen, deren erste m oberen Stellenzahlen die geordneten Verbindungen ohne Wiederholungen zu m Elementen aus den Elementen

$$\begin{array}{c} A_1^{(1)} \\ A_1^{(2)}, A_2^{(2)} \\ A_1^{(3)}, A_2^{(3)}, A_3^{(3)} \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ A_1^{(n)}, A_2^{(n)}, \ldots, A_n^{(n)} \end{array}$$

sind, und deren letzte obere Stellenzahl unveränderlich ist, deren untere Stellenzahlen aber die Zerfällungen der Zahl $n+1$ in $m+1$ Elemente sind.

Ist z. B. $m = 3$ und $n = 5$, so ist

$$487)\quad A\left|(1, 2, 3, 4, 5)^{(3)}, 6, \mathfrak{z}(6)_4\right| = \begin{array}{llll} A_1^{(1)} & A_1^{(2)} & A_1^{(3)} & A_3^{(6)} \\ A_1^{(1)} & A_1^{(2)} & A_2^{(4)} & A_2^{(6)} \\ A_1^{(1)} & A_1^{(2)} & A_3^{(5)} & A_1^{(6)} \\ A_1^{(1)} & A_2^{(3)} & A_1^{(4)} & A_2^{(6)} \\ A_1^{(1)} & A_2^{(3)} & A_2^{(5)} & A_1^{(6)} \\ A_1^{(1)} & A_1^{(4)} & A_1^{(5)} & A_1^{(6)} \\ A_2^{(2)} & A_1^{(3)} & A_1^{(4)} & A_2^{(6)} \\ A_2^{(2)} & A_1^{(3)} & A_2^{(5)} & A_1^{(6)} \\ A_2^{(2)} & A_2^{(4)} & A_1^{(5)} & A_1^{(6)} \\ A_3^{(3)} & A_1^{(4)} & A_1^{(5)} & A_1^{(6)} \end{array}$$

Dass diese Vereinigung der geordneten Verbindungen ohne Wiederholungen aus n Elementen zu m Elementen mit den Zerfällungen der Zahl $n+1$ in $m+1$ Elemente möglich ist, geht daraus hervor, weil für beide die Anzahl der Verbindungen

$$= \frac{n^{m|-1}}{1^{m|1}}$$

Diese Verbindungen sind folgenden Gesetzen unterworfen:

$$\begin{aligned} 488)\quad A\left|(1, 2, \ldots, n)^{(m)}, n+1, \mathfrak{z}(n+1)_{m+1}\right| &= A\left|(1, 2, \ldots, n-1)^{(m-1)}, n, \mathfrak{z}(n)_m\right| \times A_1^{(n+1)} \\ &+ A\left|(1, 2, \ldots, n-2)^{(m-1)}, n-1, \mathfrak{z}(n-1)_m\right| \times A_2^{(n+1)} \\ &+ A\left|(1, 2, \ldots, n-3)^{(m-1)}, n-2, \mathfrak{z}(n-2)_m\right| \times A_3^{(n+1)} \\ &+ \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;. \\ &+ A\left|(1, 2, \ldots, m-1)^{(m-1)}, m, \mathfrak{z}(m)_m\right| \times A_{n-m+1}^{(n+1)} \end{aligned}$$

489)
$$\begin{aligned}
&= A_1^{(1)} \times A\Big((2,\ 3,\ \ldots,\ n)^{(m-1)}, n+1, \mathfrak{z}(\ n\ )_m\Big)\\
&\quad + A_2^{(2)} \times A\Big((3,\ 4,\ \ldots,\ n)^{(m-1)}, n+1, \mathfrak{z}(n-1)_m\Big)\\
&\quad + A_3^{(3)} \times A\Big((4,\ 5,\ \ldots,\ n)^{(m-1)}, n+1, \mathfrak{z}(n-2)_m\Big)\\
&\quad + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\quad + A_{n-m+1}^{(n-m+1)} \times A\Big((n-m+2, n-m+3, .., n)^{(m-1)}, n+1, \mathfrak{z}(\ m\ )_m\Big)
\end{aligned}$$

§. 132.

Es sei

490)
$$A\Big(0, (1, 2, \ldots, n)^{(m)}, \mathfrak{z}(n+1)_{m+1}\Big)$$

das Zeichen für die Summe der Producte von m + 1 Factoren gewählt aus den Grössen

$$\begin{array}{llllll}
A_1^{(0)}, & A_1^{(1)}, & A_1^{(2)}, & A_1^{(3)}, & \ldots\ldots, & A_1^{(n+1)}\\
A_2^{(0)}, & A_2^{(1)}, & A_2^{(2)}, & \ldots\ldots & \ldots\ldots, & A_2^{(n)}\\
A_3^{(0)}, & A_3^{(1)}, & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots, & A_3^{(n-1)}\\
A_4^{(0)}, & A_4^{(1)}, & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots, & A_4^{(n-2)}\\
\ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots\\
A_{n-m+1}^{(0)}, & A_{n-m+1}^{(1)}, & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots, & A_{n-m+1}^{(m)}
\end{array}$$

und zwar so, dass die letzten m oberen Stellenzahlen die geordneten Verbindungen ohne Wiederholungen aus 1, 2, 3, …, n zu m Elementen sind, dass die erste obere Stellenzahl 0 unveränderlich ist, und dass die unteren Stellenzahlen die Zerfällungen der Zahl n + 1 in m + 1 Elemente sind.

Ist $n = 5$, $m = 3$, so ist

$$491)\quad A\left|0, (1, 2, 3, 4, 5)^{(3)}, \mathfrak{z}(6)_4\right| = \begin{array}{llll} A_1^{(0)} & A_1^{(1)} & A_1^{(2)} & A_3^{(3)} \\ A_1^{(0)} & A_1^{(1)} & A_2^{(2)} & A_2^{(4)} \\ A_1^{(0)} & A_1^{(1)} & A_3^{(2)} & A_1^{(5)} \\ A_1^{(0)} & A_2^{(1)} & A_1^{(3)} & A_2^{(4)} \\ A_1^{(0)} & A_2^{(1)} & A_2^{(3)} & A_1^{(5)} \\ A_1^{(0)} & A_3^{(1)} & A_1^{(4)} & A_1^{(5)} \\ A_2^{(0)} & A_1^{(2)} & A_1^{(3)} & A_2^{(4)} \\ A_2^{(0)} & A_1^{(2)} & A_2^{(3)} & A_1^{(5)} \\ A_2^{(0)} & A_2^{(2)} & A_1^{(4)} & A_1^{(5)} \\ A_3^{(0)} & A_1^{(3)} & A_1^{(4)} & A_1^{(5)} \end{array}$$

Die Gesetze, welche bei diesen Verbindungen vorkommen, sind den vorhergehenden ähnlich; sie liegen in folgenden Zeichen:

$$\begin{aligned} 492)\quad A\left|0,(1,2,3,\ldots,n)^{(m)},\mathfrak{z}(n+1)_{m+1}\right| = {} & A_1^{(0)} \times A\left|1, (2, 3, \ldots, n)^{(m-1)}, \mathfrak{z}(n)_m\right| \\ & + A_2^{(0)} \times A\left|2, (3, 4, \ldots, n)^{(m-1)}, \mathfrak{z}(n-1)_m\right| \\ & + A_3^{(0)} \times A\left|3, (4, 5, \ldots, n)^{(m-1)}, \mathfrak{z}(n-2)_m\right| \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + A_{n-m+1}^{(0)} \times A\left|n-m+1, (n-m+2, n-m+3, \ldots, n)^{(m-1)}, \mathfrak{z}(m)_m\right| \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} 493)\quad = {} & A\left|0, (1, 2, \ldots, n-1)^{(m-1)}, \mathfrak{z}(n)_m\right| \times A_1^{(n)} \\ & + A\left|0, (1, 2, \ldots, n-2)^{(m-1)}, \mathfrak{z}(n-1)_m\right| \times A_2^{(n-1)} \\ & + A\left|0, (1, 2, \ldots, n-3)^{(m-1)}, \mathfrak{z}(n-2)_m\right| \times A_3^{(n-2)} \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + A\left|0, (1, 2, \ldots, m-1)^{(m-1)}, \mathfrak{z}(m)_m\right| \times A_{n-m+1}^{(m)} \end{aligned}$$

§. 133.

Wenn in den Verbindungen α, in welchen die drei mittleren Elemente geordnete Verbindungen ohne Wiederholungen und die beiden äussersten

Elemente unveränderlich sind, je zwei auf einander folgende Zahlen von einander abgezählt werden, so entstehen die Verbindungen β, welche die Zerfällungen der Zahl 6 in vier Elemente sind:

α	β
0 1 2 3 6	1 1 1 3
0 1 2 4 6	1 1 2 2
0 1 2 5 6	1 1 3 1
0 1 3 4 6	1 2 1 2
0 1 3 5 6	1 2 2 1
0 1 4 5 6	1 3 1 1
0 2 3 4 6	2 1 1 2
0 2 3 5 6	2 1 2 1
0 2 4 5 6	2 2 1 1
0 3 4 5 6	3 1 1 1

Die Producte in 475 gehen also in jene in 487 über, wenn allgemein

$$A^{(q)}_{q-s} \quad \text{statt} \quad A^{(q)}_{s}$$

gesetzt wird, und so auch die Producte in 481 über in jene in 491, wenn

$$A^{(q)}_{s-q} \quad \text{statt} \quad A^{(q)}_{s}$$

eingeführt wird.

Zurücklaufende Bildungsweise, durch welche die gedoppelten Verbindungen erzeugt werden.

§. 134.

Es sei

494) $(n)_p + (n+1)_{p-1} \cdot [n]_1 + (n+2)_{p-2} \cdot [n]_2 + \dots\dots + (n+p-1)_1 \cdot [n]_{p-1} + [n]_p = 0$

$(n)_q$ und $[n]_s$ seien Functionen von n und von q und s, und finden statt für alle Werthe von n, q und s, und zwar für 1, 2, 3, 4, ...

Diese Gleichung enthält die zurücklaufende Bildungsweise der beiden verschiedenen Functionen; sie ist wichtig, weil auf ihr die Theorie der Reihen beruhet, und besonders merkwürdig, weil mit ihr immer eine zweite Gleichung von derselben Gestalt verbunden ist, wie wir gleich sehen werden.

Es ist für $p = 1$

$$(n)_1 + [n]_1 = 0 \qquad (\alpha_1$$

Werden zwei Gleichungen gebildet, eine, wo $p = 2$, $n = n$, und eine zweite, wo $p = 1$, $n = n+1$ ist,

$$\begin{aligned} (n)_2 + (n+1)_1 \cdot [n]_1 + [n]_2 &= 0 \\ (n+1)_1 \qquad\quad + [n+1]_1 &= 0 \end{aligned}$$

und wird die erste mit 1 und die zweite mit $(n)_1$ vervielfacht, so entsteht durch Zusammenzählen dieser beiden Gleichungen eine neue Gleichung

$$(n)_2 + (n)_1 \cdot [n+1]_1 + [n]_2 = 0 \qquad (\alpha_2$$

Wir setzen ferner $p = 3,\ n = n$
dann $p = 2,\ n = n+1$
und $p = 1,\ n = n+2$

es wird

$$\begin{aligned}(n)_3 + (n+1)_2 . [n]_1 + (n+2)_1 . [n]_2 + [n]_3 &= 0\\ (n+1)_2 + (n+2)_1 . [n+1]_1 + [n+1]_2 &= 0\\ (n+2)_1 + [n+2]_1 &= 0\end{aligned}$$

diese Gleichungen vervielfachen wir nach ihrer Folge mit 1, $(n)_1$, $(n)_2$, und zählen alle zusammen; es entsteht die Gleichung

$$(n)_3 + (n)_2 . [n+2]_1 + (n)_1 . [n+1]_2 + [n]_3 = 0 \qquad (\alpha_3$$

Eben so finden wir durch Zusammenzählen der vier Gleichungen, welche entstehen, wenn

$p = 4,\ 3,\ 2,\ 1$
$n = n,\ n+1,\ n+2,\ n+3$

gesetzt wird, und diese Gleichungen nach ihrer Folge mit 1, $(n)_1$, $(n)_2$, $(n)_3$ vervielfacht werden, dass

$$(n)_4 + (n)_3 . [n+3]_1 + (n)_2 . [n+2]_2 + (n)_1 . [n+1]_3 + [n]_4 = 0 \qquad (\alpha_4$$

Allgemein, setzen wir in der Gleichung 494

$p = q\ ,\ q-1\ ,\ q-2\ ,\ .\ .\ .\ .\ .\ ,\ 1$
$n = n\ ,\ n+1\ ,\ n+2\ ,\ .\ .\ .\ .\ .\ ,\ n+q-1$

vervielfachen diese q Gleichungen nach ihrer Folge mit

$1,\ (n)_1,\ (n)_2,\ .\ .\ .\ .\ ,\ (n)_{q-1}$

und zählen sie zusammen, so finden wir durch Anwendung der schon gefundenen q-1 Gleichungen α_1, α_2, α_3, . . . , α_{q-1}, dass

495) $$(n)_q + (n)_{q-1} . [n+q-1]_1 + (n)_{q-2} . [n+q-2]_2 + \ldots + (n)_1 . [n+1]_{q-1} + [n]_q = 0$$

Durch ein gleiches Verfahren können wir aus dieser 495 die vorgegebene Gleichung 494 wieder herleiten. Diese beiden Gleichungen sind also zu gleicher Zeit wahr, oder mit der einen ist auch immer die andere gegeben. Stellen wir diese beiden Gleichungen neben einander

$$496)\ (n)_p \cdot (n+1)_{p-1} \cdot [n]_1 + (n+2)_{p-2} \cdot [n]_2 + \ldots\ldots + (n+p-1)_1 \cdot [n]_{p-1} + [n]_p = 0$$

$$[n]_q + [n+1]_{q-1} \cdot (n)_1 + [n+2]_{q-2} \cdot (n)_2 + \ldots\ldots + [n+q-1]_1 \cdot (n)_{q-1} + (n)_q = 0$$

so sieht man, dass sie dieselbe Gestalt haben.

§. 135.

Durch dasselbe Verfahren findet man, dass auch folgende Gleichungen zusammengehören:

$$497)\ (n)_p + (n-1)_{p-1} \cdot [n]_1 + (n-2)_{p-2} \cdot [n]_2 + \ldots\ldots + (n-p+1)_1 \cdot [n]_{p-1} + [n]_p = 0$$

und

$$[n]_q + [n-1]_{q-1} \cdot (n)_1 + [n-2]_{q-2} \cdot (n)_2 + \ldots\ldots + [n-q+1]_1 \cdot (n)_{q-1} + (n)_q = 0$$

so wie auch die Gleichungen:

$$498)\ (n)_p + (n)_{p-1} \cdot [n+p]_1 + (n)_{p-2} \cdot [n+p]_2 + \ldots\ldots + (n)_1 \cdot [n+p]_{p-1} + [n+p]_p = 0$$

und

$$(n)_q + (n+1)_{q-1} \cdot [n+1]_1 + (n+2)_{q-2} \cdot [n+2]_2 + \ldots\ldots + (n+q-1)_1 \cdot [n+q-1]_{q-1} + [n+q]_q = 0$$

und auch folgende Gleichungen

$$499)\ (n)_p + (n)_{p-1} \cdot [n-p]_1 + (n)_{p-2} \cdot [n-p]_2 + \ldots\ldots + (n)_1 \cdot [n-p]_{p-1} + [n-p]_p = 0$$

und

$$(n)_q + (n-1)_{q-1} \cdot [n-1]_1 + (n-2)_{q-2} \cdot [n-2]_2 + \ldots\ldots + (n-q+1)_1 \cdot [n-q+1]_{q-1} + [n-q]_q = 0$$

§. 136.

Diese Gleichungen können nun unter verschiedenen Gestalten erscheinen, z. B. die Gleichungen 496 in der Gestalt:

500) $D_p^{(n)} + D_{p-1}^{(n+1)} E_1^{(n)} + D_{p-2}^{(n+2)} E_2^{(n)} + \ldots . + D_1^{(n+p-1)} . E_{p-1}^{(n)} + E_p^{(n)} = 0$

und

$$D_q^{(n)} + D_{q-1}^{(n)} E_1^{(n+q-1)} + D_{q-2}^{(n)} E_2^{(n+q-2)} + \ldots . + D_1^{(n)} . E_{q-1}^{(n+1)} + E_q^{(n)} = 0$$

Die Gleichungen 497 in der Gestalt:

501) $G_p^{(n)} + G_{p-1}^{(n-1)} . H_1^{(n)} + G_{p-2}^{(n-2)} . H_2^{(n)} + \ldots\ldots + G_1^{(n-p+1)} . H_{p-1}^{(n)} + H_p^{(n)} = 0$

und

$$G_q^{(n)} + G_{q-1}^{(n)} . H_1^{(n-q+1)} + G_{q-2}^{(n)} . H_2^{(n-q+2)} + \ldots .. + G_1^{(n)} . H_{q-1}^{(n-1)} + H_q^{(n)} = 0$$

die Gleichungen 498 in folgender:

502) $I_p^{(n)} + I_{p-1}^{(n)} . K_1^{(n+p)} + I_{p-2}^{(n)} . K_2^{(n+p)} + \ldots + I_1^{(n)} . K_{p-1}^{(n+p)} + K_p^{(n+p)} = 0$

und

$$I_q^{(n)} + I_{q-1}^{(n+1)} . K_1^{(n+1)} + I_{q-2}^{(n+2)} . K_2^{(n+2)} + \ldots + I_1^{(n+q-1)} . K_{q-1}^{(n+q-1)} + K_q^{(n+q)} = 0$$

und zuletzt die Gleichungen 499 in der Gestalt:

503) $L_p^{(n)} + L_{p-1}^{(n)} . N_1^{(n-p)} + L_{p-2}^{(n)} . N_2^{(n-p)} + \ldots . + L_1^{(n)} . N_{p-1}^{(n-p)} + N_p^{(n-p)} = 0$

und

$$L_q^{(n)} + L_{q-1}^{(n-1)} . N_1^{(n-1)} + L_{q-2}^{(n-2)} . N_2^{(n-2)} + \ldots . + L_1^{(n-q+1)} . N_{q-1}^{(n-q+1)} + N_q^{(n-q)} = 0$$

Diese vier Paare von Gleichungen sind so beschaffen, dass wenn eine der beiden Gleichungen vorkommt, immer die andere auch statt findet.

§. 137.

Aus diesen zurücklaufenden Bestimmungen ergibt sich folgende unabhängige Bildungsweise:

$$
\begin{aligned}
504)\quad D_1^{(n)} &= -E_1^{(n)}\\
D_2^{(n)} &= -E_2^{(n)} + E_1^{(n)} \cdot E_1^{(n+1)}\\
D_3^{(n)} &= -E_3^{(n)} + E_1^{(n)} \cdot E_2^{(n+1)} - E_1^{(n)} \cdot E_1^{(n+1)} \cdot E_1^{(n+2)}\\
&\quad + E_2^{(n)} \cdot E_1^{(n+2)}\\
D_4^{(n)} &= -E_4^{(n)} + E_1^{(n)} \cdot E_3^{(n+1)} - E_1^{(n)} \cdot E_1^{(n+1)} \cdot E_2^{(n+2)} + E_1^{(n)} \cdot E_1^{(n+1)} \cdot E_1^{(n+2)} \cdot E_1^{(n+3)}\\
&\quad + E_2^{(n)} \cdot E_2^{(n+2)} - E_1^{(n)} \cdot E_2^{(n+1)} \cdot E_1^{(n+3)}\\
&\quad + E_3^{(n)} \cdot E_1^{(n+3)} - E_2^{(n)} \cdot E_1^{(n+2)} \cdot E_1^{(n+3)}
\end{aligned}
$$

und allgemein

$$
\begin{aligned}
505)\qquad D_p^{(n)} &= -E\big(n, (n+1, n+2, \ldots, n+p-1)^{(0)}, \mathfrak{z}(p)_1\big)\\
&\quad + E\big(n, (n+1, \ldots, n+p-1)^{(1)}, \mathfrak{z}(p)_2\big)\\
&\quad - E\big(n, (n+1, \ldots, n+p-1)^{(2)}, \mathfrak{z}(p)_3\big)\\
&\quad + \ldots\ldots - \ldots\ldots\\
&\quad (-)^p E\big(n, (n+1, \ldots, n+p-1)^{(p-1)}, \mathfrak{z}(p)_p\big)
\end{aligned}
$$

Vertauscht man D und E, so erhält man die unabhängige Bildungsweise von $E_p^{(n)}$ nämlich

$$
\begin{aligned}
506)\qquad E_p^{(n)} &= -D\big(n, (n+1, \ldots, n+p-1)^{(0)}, \mathfrak{z}(p)_1\big)\\
&\quad + D\big(n, (n+1, \ldots, n+p-1)^{(1)}, \mathfrak{z}(p)_2\big)\\
&\quad - \ldots\ldots + \ldots\ldots\\
&\quad (-)^p D\big(n, (n+1, \ldots, n+p-1)^{(p-1)}, \mathfrak{z}(p)_p\big)
\end{aligned}
$$

Aehnliche Bestimmungen geben die Gleichungen 501, 502, 503 für die Grössen $G_p^{(n)}$, $H_p^{(n)}$, $I_p^{(n)}$, $K_p^{(n)}$, $L_p^{(n)}$, $N_p^{(n)}$.

§. 138.

Von den Gleichungen 496, 497, 498, 499 oder 500, 501, 502, 503 sind folgende ganz verschieden

507) $(n+p)_n + (n+p)_{n+1} \cdot [n]_1 + (n+p)_{n+2} \cdot [n]_2 + \ldots + (n+p)_{n+p-1} \cdot [n]_{p-1} + [n]_p = 0$

und

$(n+q)_n + (n+q-1)_n \cdot [n+q-1]_1 + (n+q-2)_n \cdot [n+q-2]_2 + \ldots + (n+1)_n \cdot [n+1]_{q-1} + [n]_q = 0$

ferner

508) $(n-p)_n + (n-p)_{n-1} \cdot [n]_1 + (n-p)_{n-2} \cdot [n]_2 + \ldots. + (n-p)_{n-p+1} \cdot [n]_{p-1} + [n]_p = 0$

und

$(n-q)_n + (n-q+1)_n \cdot [n-q+1]_1 + (n-q+2)_n \cdot [n-q+2]_2 + \ldots. + (n-1)_n \cdot [n-1]_{q-1} + [n]_q = 0$

oder in andern Zeichen

509) $P_n^{(n+p)} + P_{n+1}^{(n+p)} \cdot Q_1^{(n)} + P_{n+2}^{(n+p)} \cdot Q_2^{(n)} + \ldots. + P_{n+p-1}^{(n+p)} \cdot Q_{p-1}^{(n)} + Q_p^{(n)} = 0$

und

$$P_n^{(n+q)} + P_n^{(n+q-1)} \cdot Q_1^{(n+q-1)} + P_n^{(n+q-2)} \cdot Q_2^{(n+q-2)} + \ldots + P_n^{(n+1)} \cdot Q_{q-1}^{(n+1)} + Q_q^{(n)} = 0$$

so wie auch

510) $R_n^{(n-p)} + R_{n-1}^{(n-p)} \cdot T_1^{(n)} + R_{n-2}^{(n-p)} \cdot T_2^{(n)} + \ldots. + R_{n-p+1}^{(n-p)} \cdot T_{p-1}^{(n)} + T_p^{(n)} = 0$

und

$$R_n^{(n-q)} + R_n^{(n-q+1)} \cdot T_1^{(n-q+1)} + R_n^{(n-q+2)} \cdot T_2^{(n-q+2)} + \ldots. + R_n^{(n-1)} \cdot T_{q-1}^{(n-1)} + T_q^{(n)} = 0$$

Jede zwei dieser Gleichungen sind so mit einander verbunden, dass, wenn eine von den beiden gegeben ist, auch die andere Gleichung statt findet. Das Verfahren, aus der einen die andere ihr zugehörige Gleichung herzuleiten, ist dasselbe, welches schon oben §. 134 gezeigt ist.

Die unabhängige Bildungsweise der Grössen P, Q, R, T ist

511) $Q_1^{(n)} = - P_n^{(n+1)}$

$$Q_2^{(n)} = - P_n^{(n+2)} + P_n^{(n+1)} . P_{n+1}^{(n+2)}$$

$$Q_3^{(n)} = - P_n^{(n+3)} + P_n^{(n+1)} . P_{n+1}^{(n+3)} - P_n^{(n+1)} . P_{n+1}^{(n+2)} . P_{n+2}^{(n+3)}$$
$$+ P_n^{(n+2)} . P_{n+2}^{(n+3)}$$

$$Q_4^{(n)} = - P_n^{(n+4)} + P_n^{(n+1)} . P_{n+1}^{(n+4)} - P_n^{(n+1)} . P_{n+1}^{(n+2)} . P_{n+2}^{(n+4)} + P_n^{(n+1)} . P_{n+1}^{(n+2)} . P_{n+2}^{(n+3)} . P_{n+3}^{(n+4)}$$
$$+ P_n^{(n+2)} . P_{n+2}^{(n+4)} - P_n^{(n+1)} . P_{n+1}^{(n+3)} . P_{n+3}^{(n+4)}$$
$$+ P_n^{(n+3)} . P_{n+3}^{(n+4)} - P_n^{(n+2)} . P_{n+2}^{(n+3)} . P_{n+3}^{(n+4)}$$

u. s. w. und

512) $P_n^{(n+1)} = - Q_1^{(n)}$

$$P_{n1}^{(n+2)} = - Q_2^{(n)} + Q_1^{(n)} . Q_1^{(n+1)}$$

$$P_n^{(n+3)} = - Q_3^{(n)} + Q_1^{(n)} . Q_2^{(n+1)} - Q_1^{(n)} . Q_1^{(n+1)} . Q_1^{(n+2)}$$
$$+ Q_2^{(n)} . Q_1^{(n+2)}$$

$$P_n^{(n+4)} = - Q_4^{(n)} + Q_1^{(n)} . Q_3^{(n+1)} - Q_1^{(n)} . Q_1^{(n+1)} . Q_2^{(n+2)} + Q_1^{(n)} . Q_1^{(n+1)} . Q_{11}^{(n+2)} . Q_1^{(n+3)}$$
$$+ Q_2^{(n)} . Q_2^{(n+2)} - Q_1^{(n)} . Q_2^{(n+1)} . Q_{11}^{(n+3)}$$
$$+ Q_3^{(n)} . Q_1^{(n+3)} - Q_2^{(n)} . Q_1^{(n+2)} . Q_1^{(n+3)}$$

u. s. w. und allgemein

$$513)\ Q_p^{(n)} = -\,P\Big({}_{,}n,(n+1, n+2, \ldots, n+p-1)^{(0)}, n+p\Big)'$$
$$+\,P\Big({}_{,}n,(n+1\,, \ldots\ldots, n+p-1)^{(1)}, n+p\Big)'$$
$$-\,P\Big({}_{,}n,(n+1\,, \ldots\ldots, n+p-1)^{(2)}, n+p\Big)'$$
$$+\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$(-)^p\,P\Big({}_{,}n,(n+1, \ldots\ldots, n+p-1)^{(p-1)}, n+p\Big)'$$

und

$$514)\ P_n^{(n+p)} = -\,Q\Big(n,(n+1, n+2, \ldots, n+p-1)^{(0)}, \mathfrak{z}(p)_1\Big)$$
$$+\,Q\Big(n,(n+1\,, \ldots, n+p-1)^{(1)}, \mathfrak{z}(p)_2\Big)$$
$$-\,Q\Big(n,(n+1\,, \ldots, n+p-1)^{(2)}, \mathfrak{z}(p)_3\Big)$$
$$+\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$(-)^p\,Q\Big(n,(n+1\,, \ldots, n+p-1)^{(p-1)}, \mathfrak{z}(p)_p\Big)$$

Die Gleichungen 510 führen zu ähnlichen unabhängigen Bestimmungen der Elemente $T_p^{(n)}$ und $R_n^{(n-p)}$.

Die Gleichungen 509 und 510 unterscheiden sich dadurch von den früheren 500, 501, 502, 503, dass bei 509 und 510 die Elemente nach verschiedenen Gesetzen 513, 514, hingegen bei 500, ..., 503 nach denselben Gesetzen 505 und 506 gebildet werden. Aber man kann von der einen zur andern übergehen, wenn man

$$D_{p-s}^{(n+s)} = P_{n+s}^{(n+p)}$$

setzt.

Bei Bürmann *) Seite 33 findet man die ersten kaum erkennbaren Spuren von den gedoppelten Verbindungen 475, 481 und bei Kramp **) Seite 81 und 82 von den gedoppelten Verbindungen 487, 491; aber man findet weder bei ihnen noch bei andern Mathematikern irgend etwas von den zurücklaufenden Bildungsweisen 476, ..., 479, ..., von 482, ..., 485, von 488, 489, von 492, 493 noch irgend etwas von den Wahrheiten 494, ..., 514, welche diese Abhandlung enthält.

---

*) Ueber die Combinatorische Analysis von Hindenburg. Leipzig 1803 in 8.

**) De aequat. decre. solu. gen. 1789.

THEORIE

DER

PRODUCTE MIT VERSETZUNGEN.

THEORIE
DER
PRODUCTE MIT VERSETZUNGEN.

§. 139.

Es kann bei denjenigen Mathematikern, für welche gegenwärtiges Werk bestimmt ist, als bekannt vorausgesetzt werden, dass bei Auflösung der Gleichungen vom ersten Grade die Producte aus Factoren mit Versetzungen unentbehrlich sind. Euler, Cramer, Bezout, Hindenburg, Rothe und Laplace beschäftigten sich mit diesen Producten, aber auch nur mit dem bei ihnen vorkommenden Gesetze der Zeichen + und −, über welches sie nicht hinausgegangen sind.

Bezout gab im Jahre 1779 in seiner allgemeinen Theorie der algebraischen Gleichungen einige sehr einfache identische Gleichungen, welche, wie sich bei näherer Betrachtung zeigt, aus Producten mit Versetzungen bestehen.

Desnanot gibt in seinen Zusätzen zur Theorie der algebraischen Gleichungen 1819 noch einige andere dieser einfachen Gleichungen. Ohne die Bemühungen dieses Gelehrten herabsetzen zu wollen, müssen wir doch gestehen, dass alle Wahrheiten ohne Ausnahme, welche er über Producte mit Versetzungen findet, nur einzelne Fälle einer Wahrheit sind, die in unserer Untersuchung selbst nur als specieller Fall einer viel allgemeineren Wahrheit erscheint, wie die Untersuchung selbst zeigen wird.

Wronsky ist der erste, welcher die Producte mit Versetzungen auf die Entwicklung einer Function in Reihen angewendet hat. Aber ohne die Natur dieser Producte erforscht, und die Wahrheiten, zu welchen diese Untersuchung nothwendig führen muss, gefunden zu haben, können die Producte mit Versetzungen auch bei Entwickelung der Functionen in Reihen bei weitem nicht das leisten, was eine gutgegründete Theorie dieser Producte zu leisten fähig ist.

Diese Theorie, wovon wir nicht einmal einen Versuch vorfinden, wollen wir hier geben und zwar in einem Umfange, welcher eine weit grössere Anwendung zulässt, als wir in diesem Werke beabsichtigen. Wir wollen sie in folgenden Abtheilungen vortragen:

Erste Abtheilung: allgemeinste Untersuchung

I. Ueber die Natur der Producte mit Versetzungen

- a) die verschiedenen Bildungsweisen der Producte, wovon die allgemeinste unbekannt war,
- b) das Gesetz der Zeichen + und −, für welches ein neuer Beweis gegeben wird, und
- c) der Einfluss der Gleichheit zweier oder mehrerer oberen oder untern Elemente, welcher unbekannt war.

Die allgemeinste Bildungsweise in a und der Einfluss der Gleichheit zweier Stellenzahlen in c sind sehr folgenreich; sie sind die Grundlage der ganzen Theorie der Producte mit Versetzungen, und ihr Mangel lässt erklären, warum diese Producte ohne weitere Anwendung geblieben sind.

II. Umwandlung einer Reihe von Summen dieser Producte in andere Reihen.

Hier werden die allgemeinsten Wahrheiten ans Licht gebracht, von welchen sehr oft Anwendung gemacht wird, und von welchen Wronski und Desnanot einige ganz specielle Fälle gefunden haben.

III. Auflösung der Producte mit Versetzungen in Producte aus anderen Elementen, welche durch Gleichungen gegeben sind.

Oder das Eliminiren einer unbekannten Grösse aus gegebenen endlichen Gleichungen vom ersten Grade. Ein bekannter Gegenstand.

IV. Auflösung der Producte mit Versetzungen, in welchen einige Factoren verschwinden, in Producte mit gedoppelten Verbindungen.

Bis jetzt ganz unbekannt, so wie auch Folgendes:

V. Entwickelung eines Bruches, dessen Zähler und Nenner Summen von Producten mit Versetzungen aus unendlich vielen Elementen sind, in eine unendliche Reihe.

Zweite Abtheilung. Producte mit Versetzungen, wenn die oberen Elemente das Potentiiren angeben.

I. Allgemeine Untersuchung.

Bei Wronski findet man zwei der Wahrheiten, welche hier vorkommen.

II. Ein Product, gebildet aus einer Summe von Producten mit Versetzungen und aus geordneten Verbindungen ohne Wiederholungen, wird dargestellt durch Producte mit Versetzungen.

III. Dasselbe mit Wiederholungen.

IV. Summe der Producte mit Versetzungen aufgelöst theils in andere Summen vervielfacht mit geordneten Verbindungen, theils blos in geordnete Verbindungen (das Umgekehrte von II und III).

V. Auflösung einer Summe aus Producten mit Versetzungen in ein einziges Product zweitheiliger Factoren.

Alle Wahrheiten, welche in II, III, IV, V gefunden werden, werden hier zuerst bekannt gemacht.

Dritte Abtheilung. Producte mit Versetzungen aus Factoren, deren obere Elemente höhere Unterschiede angeben.

Die Untersuchung führt, aber mit Leichtigkeit, zu demselben Ziele, zu welchem Wronski Seite 236 gelangt.

Vierte Abtheilung. Producte mit Versetzungen aus Factoren, deren obere Elemente höhere Differentiale angeben.

I. Allgemeine Untersuchung.

II. Auflösen der Producte mit Versetzungen in das Differentiiren mit abwechselndem Vervielfachen.

III. Auflösen der Producte mit Versetzungen in ein einfaches Differentiiren einer Function.

IV. Producte mit Versetzungen, wenn die oberen Elemente das Differentiiren mit abwechselndem Vervielfachen angeben.

Von dieser ganzen für die Theorie der Reihen sehr wichtigen Untersuchung ist nichts bekannt als nur zwei sehr specielle Gleichungen, welche man bei Wronski findet.

Erste Abtheilung.

I. UEBER DIE NATUR DER PRODUCTE MIT VERSETZUNGEN.

§. 140.

Die Elemente, aus welchen die Producte gebildet werden, werden durch zwei verschiedene Zeichen unterschieden, durch eine Ziefer unten zur Rechten und durch einen Buchstaben mit einer Ziefer über den Buchstaben A oder B; die Summe der Producte werde vorgestellt durch das Zeichen $[\;.\;.\;.\;.\;)$.

Die Bildungsweise der Producte, welche hier untersucht werden sollen, geben folgende Zeichen an:

515) $\left[\overset{a1}{A}_1\right) = \overset{a1}{A}_1$

$$\left[\overset{a1}{A}_1\,\overset{a2}{A}_2\right) = \left[\overset{a1}{A}_1\right)\cdot\overset{a2}{A}_2 - \left[\overset{a2}{A}_1\right)\cdot\overset{a1}{A}_2$$

$$\left[\overset{a1}{A}_1\,\overset{a2}{A}_2\,\overset{a3}{A}_3\right) = \left[\overset{a1}{A}_1\,\overset{a2}{A}_2\right)\cdot\overset{a3}{A}_3 - \left[\overset{a1}{A}_1\,\overset{a3}{A}_2\right)\cdot\overset{a2}{A}_3 + \left[\overset{a2}{A}_1\,\overset{a3}{A}_2\right)\cdot\overset{a1}{A}_3$$

$$\left[\overset{a1}{A}_1\,\overset{a2}{A}_2\,\overset{a3}{A}_3\,\overset{a4}{A}_4\right) =$$

$$= \left[\overset{a1}{A}_1\,\overset{a2}{A}_2\,\overset{a3}{A}_3\right)\cdot\overset{a4}{A}_4 - \left[\overset{a1}{A}_1\,\overset{a2}{A}_2\,\overset{a4}{A}_3\right)\cdot\overset{a3}{A}_4 + \left[\overset{a1}{A}_1\,\overset{a3}{A}_2\,\overset{a4}{A}_3\right)\cdot\overset{a2}{A}_4 - \left[\overset{a2}{A}_1\,\overset{a3}{A}_2\,\overset{a4}{A}_3\right)\cdot\overset{a1}{A}_4$$

und allgemein

$$\left[\begin{matrix}a1\ldots\ldots an\\ A_1\ldots\ldots A_n\end{matrix}\right) = (-)^0\left[\begin{matrix}a1\ \ldots\ldots a(n-1)\\ A_1\ldots\ldots A_{n-1}\end{matrix}\right)\cdot \overset{an}{A_n} + (-)^1\left[\begin{matrix}a1\ldots a(n-2),an\\ A_1\ldots\ldots\ A_{n-1}\end{matrix}\right)\cdot \overset{a(n-1)}{A_n}$$

$$+\ldots(-)^x\left[\begin{matrix}a1\ldots a(n-x-1),a(n-x+1)\ldots an\\ A_1\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ A_{n-1}\end{matrix}\right)\overset{a(n-x)}{A_n} + \ldots + (-)^{n-1}\left[\begin{matrix}a2\ldots\ldots an\\ A_1\ldots\ldots A_{n-1}\cdot\end{matrix}\right)\overset{a1}{A_n}$$

oder

$$516)\qquad \left[\begin{matrix}a1\ldots\ldots an\\ A_1\ldots\ldots A_n\end{matrix}\right) = \Sigma\,(-)^x\left[\begin{matrix}a1\ \ldots a(n-x-1),a(n-x+1)\ldots an\\ A_1\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ A_{n-1}\cdot\end{matrix}\right)\overset{a(n-x)}{A_n}$$

$$x = 0, 1, \ldots, n-1$$

Zwei verschiedene Arten von Zeichen, welche wir auch, weil sie bestimmte Geschäfte z. B. Differentiiren d^p, d^q, ... oder Unterschiede Δ^p, Δ^q, ... angeben, Elemente nennen können, werden hier so mit einander verbunden, dass, während die unteren A_1, A_2, A_3, ... unverändert bleiben, die oberen Elemente a1, a2, ... nach dem Gesetze der geordneten Verbindungen ohne Wiederholungen verändert werden. Werden die Geschäfte vorgenommen, welche die Zeichen angeben, so entstehen die Producte

$$517)\quad \left[\begin{matrix}a1\\ A_1\end{matrix}\right) = \overset{a1}{A_1}$$

$$\left[\begin{matrix}a1 & a2\\ A_1 & A_2\end{matrix}\right) = \overset{a1}{A_1}\ \overset{a2}{A_2} - \overset{a2}{A_1}\ \overset{a1}{A_2}$$

$$\left[\begin{matrix}a1 & a2 & a3\\ A_1 & A_2 & A_3\end{matrix}\right) = \overset{a1}{A_1}\overset{a2}{A_2}\overset{a3}{A_3} - \overset{a1}{A_1}\overset{a3}{A_2}\overset{a2}{A_3} - \overset{a2}{A_1}\overset{a1}{A_2}\overset{a3}{A_3} + \overset{a2}{A_1}\overset{a3}{A_2}\overset{a1}{A_3} + \overset{a3}{A_1}\overset{a1}{A_2}\overset{a2}{A_3} - \overset{a3}{A_1}\overset{a2}{A_2}\overset{a1}{A_3}$$

welche der Gegenstand der Untersuchung sind; sie sind zweien Gesetzen unterworfen, durch welche sie sich vor allen übrigen Producten auszeichnen, nämlich α) Während die unteren Elemente unverändert bleiben, verändern sich die oberen Elemente auf alle mögliche Weise, und

β) Das Zeichen vor jedem Producte ist abhängig von der Anzahl, welche anzeigt, wie oft die Elemente ihre Stellen verändert haben.

Das erste Gesetz ist offenbar, denn bei zweien Elementen ergeben sich die Versetzungen

a1 a2

a2 a1

Bei dreien Elementen sollen nach der Vorschrift 515

die Versetzungen von den Elementen a1, a2 mit a3
. . . . a1, a3 mit a2
. . . . a2, a3 mit a1

verbunden, mithin alle Versetzungen aus den Elementen a1, a2, a3 gebildet werden.

Das zweite Gesetz β) ist eben so offenbar, und es ist weiter nichts übrig, als eine allgemeine Vorschrift aufzusuchen, nach welcher jedem Producte sein zugehöriges Zeichen bestimmt werden kann, ohne genöthigt zu sein, alle Producte zu bilden, welche diesem bestimmten Producte vorangehen. Damit aber der Einfluss, welchen eine veränderte Folge der Elemente auf das Zeichen vor jedem Producte hat, besser gewürdigt werden kann, suchen wir ihn zuerst bei der Summe der Producte und legen uns deshalb die Frage vor: Welchen Einfluss hat eine veränderte Folge der oberen Elemente auf die ganze Summe der Producte?

Wir finden bei zweien Elementen, dass

$$\left[\overset{a1}{A}_1 \overset{a2}{A}_2\right) = \overset{a1}{A}_1 \overset{a2}{A}_2 - \overset{a2}{A}_1 \overset{a1}{A}_2 = -\left(\overset{a2}{A}_1 \overset{a1}{A}_2 - \overset{a1}{A}_1 \overset{a2}{A}_2 \right)$$

oder

$$\left[\overset{a1}{A}_1 \overset{a2}{A}_2\right) = -\left[\overset{a2}{A}_1 \overset{a1}{A}_2\right)$$

und dass also bei zweien Elementen eine Vertauschung ihrer Stellen auch eine Veränderung des Zeichens vor der Summe nach sich ziehet.

Wird diese Wahrheit auf drei Elemente angewendet, so können folgende Veränderungen vorgenommen werden:

$$\left[\overset{a1}{A_1}\,\overset{a2}{A_2}\,\overset{a3}{A_3}\right) = \left[\overset{a1}{A_1}\,\overset{a2}{A_2}\right)\cdot\overset{a3}{A_3} - \left[\overset{a1}{A_1}\,\overset{a3}{A_2}\right)\cdot\overset{a2}{A_3} + \left[\overset{a2}{A_1}\,\overset{a3}{A_2}\right)\cdot\overset{a1}{A_3}$$

$$= - \left[\overset{a1}{A_1}\,\overset{a3}{A_2}\right)\cdot\overset{a2}{A_3} + \left[\overset{a1}{A_1}\,\overset{a2}{A_2}\right)\cdot\overset{a3}{A_3} - \left[\overset{a3}{A_1}\,\overset{a2}{A_2}\right)\cdot\overset{a1}{A_3} .$$

oder

$$\left[\overset{a1}{A_1}\,\overset{a2}{A_2}\,\overset{a3}{A_3}\right) = - \left[\overset{a1}{A_1}\,\overset{a3}{A_2}\,\overset{a2}{A_3}\right)$$

Die drei ersten Summen zur Rechten des Gleichheitszeichens können auch in folgende übertragen werden:

$$= - \left[\overset{a2}{A_1}\,\overset{a1}{A_2}\right)\cdot\overset{a3}{A_3} + \left[\overset{a2}{A_1}\,\overset{a3}{A_2}\right)\cdot\overset{a1}{A_3} - \left[\overset{a1}{A_1}\,\overset{a3}{A_2}\right)\cdot\overset{a2}{A_3}$$

oder

$$\left[\overset{a1}{A_1}\,\overset{a2}{A_2}\,\overset{a3}{A_3}\right) = - \left[\overset{a2}{A_1}\,\overset{a1}{A_2}\,\overset{a3}{A_3}\right)$$

Das, was vorhin bei Producten aus zweien Factoren gefunden wurde, bestätigt sich also auch wieder bei Producten aus dreien Factoren, nämlich, dass, wenn in einer Summe von Producten zwei benachbarte obere Elemente ihre Stellen vertauschen, die Summe das Zeichen verliert.

Damit aber diese Wahrheit ihre allgemeine Gültigkeit für eine jede mögliche Anzahl von Factoren erhalte, muss gezeigt werden, dass das Verfahren, welches von zweien Factoren zu dreien Factoren führte, bei jeder Anzahl von Factoren statt findet.

Es sei deshalb

$$\left[\overset{a1\ldots a(q-1),aq,a(q+1),a(q+2)\ldots a(n-1)}{A_1 \,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\; A_{n-1}}\right) = - \left[\overset{a1\ldots a(q-1),a(q+1),aq,a(q+2)\ldots a(n-1)}{A_1 \,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\; A_{n-1}}\right)$$

es wird das allgemeine Verfahren verlangt, welches von n-1 zu n führt; dieses ist folgendes:

Die Summe von Producten aus n Factoren wird in Summen von Producten aus n-1 Factoren zerlegt

$$\left[\begin{matrix}{\scriptstyle a1 \qquad an}\\ A_1 \ldots\ldots A_n\end{matrix}\right) = (-)^0 \left[\begin{matrix}{\scriptstyle a1\ldots a(q-1),aq,a(q+1),\, a(q+2)\ldots a(n-1)}\\ A_1 \,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\; A_{n-1}\end{matrix}\right) \cdot \overset{an}{A_n} + \ldots\ldots$$

$$+ (-)^{n-q-2} \left[\begin{matrix}{\scriptstyle a1..a(q-1),aq,a(q+1),a(q+3)..an}\\ A_1 \,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\; A_{n-1}\end{matrix}\right) \cdot \overset{a(q+2)}{A_n} + (-)^{n-q-1} \left[\begin{matrix}{\scriptstyle a1\ldots a(q-1),aq,a(q+2)\ldots an}\\ A_1 \,.\,.\,.\,.\,.\,.\; A_{n-1}\end{matrix}\right) \cdot \overset{a(q+1)}{A_n}$$

$$+ (-)^{n-q} \left[\begin{matrix}{\scriptstyle a1\ldots a(q-1),a(q+1),a(q+2)\ldots an}\\ A_1 \,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\; A_{n-1}\end{matrix}\right) \cdot \overset{aq}{A_n} + (-)^{n-q+1} \left[\begin{matrix}{\scriptstyle a1\ldots a(q-2),aq,a(q+1)\ldots an}\\ A_1 \,.\,.\,.\,.\,.\,.\; A_{n-1}\end{matrix}\right) \cdot \overset{a(q-1)}{A_n}$$

$$+ \,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,. + (-)^{n-1} \left[\begin{matrix}{\scriptstyle a2\ldots\ldots\ldots\ldots an}\\ A_1 \,.\,.\,.\,.\,.\,.\; A_{n-1}\end{matrix}\right) \cdot \overset{a1}{A_n}$$

In denjenigen Summen, in welchen die beiden Elemente aq und a(q+1) zugleich vorkommen, werden diese beiden Elemente vertauscht, mithin auch die Zeichen vor diesen Summen verändert. Diejenigen Summen aber, in welchen diese beiden Elemente nicht zugleich vorkommen, bleiben ungeändert und es wird nur die Summe mit a(q+1) vor jene mit aq, und zugleich $(-)^{n-q+1}$ statt $(-)^{n-q-1}$ gesetzt. Hierdurch wird

$$\left[\begin{matrix}{\scriptstyle a1 \ldots\ldots an}\\ A_1 \ldots A_n\end{matrix}\right) = (-)^1 \left[\begin{matrix}{\scriptstyle a1\ldots a(q-1),a(q+1),aq,a(q+2)\ldots a(n-1)}\\ A_1 \,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\; A_{n-1}\end{matrix}\right) \cdot \overset{an}{A_n} + \,.\,.\,.\,.\,.\,.$$

$$+ (-)^{n-q-1} \left[\begin{matrix}{\scriptstyle a1\ldots.a(q-1),a(q+1),aq,a(q+3)\ldots..an}\\ A_1 \,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\; A_{n-1}\end{matrix}\right) \cdot \overset{a(q+2)}{A_n} + (-)^{n-q} \left[\begin{matrix}{\scriptstyle a1\ldots.a(q-1),a(q+1),a(q+2)\ldots.an}\\ A_1 \,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\; A_{n-1}\end{matrix}\right) \cdot \overset{aq}{A_n}$$

$$+ (-)^{n-q+1} \left[\begin{matrix}{\scriptstyle a1\ldots a(q-1),aq,a(q+2)\ldots.an}\\ A_1 \,.\,.\,.\,.\,.\,.\; A_{n-1}\end{matrix}\right) \cdot \overset{a(q+1)}{A_n} + (-)^{n-q+2} \left[\begin{matrix}{\scriptstyle a1\ldots.a(q-2),\, a(q+1),aq,a(q+2)\ldots an}\\ A_1 \,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\; A_{n-1}\end{matrix}\right) \cdot \overset{a(q-1)}{A_n}$$

$$+ \,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,. + (-)^{n} \left[\begin{matrix}{\scriptstyle a2\ldots.a(q-1),a(q+1),aq,a(q+2)\ldots an}\\ A_1 \,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\; A_{n-1}\end{matrix}\right) \cdot \overset{a1}{A_n}$$

Es ist folglich ganz allgemein

$$518)\qquad \left[\begin{matrix}{\scriptstyle a1\ldots a(q-1),aq,\, a(q+1),\, a(q+2)\ldots.an}\\ A_1 \,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\; A_n\end{matrix}\right) = - \left[\begin{matrix}{\scriptstyle a1\ldots a(q-1),a(q+1),aq,a(q+2)\ldots.an}\\ A_1 \,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\; A_n\end{matrix}\right)$$

Die Wahrheit, welche bei Producten von zweien oder dreien Factoren gefunden ist, bestätigt sich also bei Producten von jeder Anzahl von Factoren, nämlich: Vertauschen in einer Summe zwei benachbarte obere Elemente ihre Stellen, so muss das Zeichen vor der Summe geändert werden. Hieraus folgt unmittelbar:

519) Wenn ein oberes Element um eine gerade Anzahl Stellen zur Linken oder zur Rechten rückt, so wird das Zeichen vor der Summe nicht geändert; hingegen, wenn ein oberes Element um eine ungerade Anzahl Stellen zur Linken oder zur Rechten rückt, so geht das Zeichen vor der Summe in das entgegengesetzte über.

Ferner

520) Wenn mehrere obere Elemente zur Linken oder zur Rechten rücken, so wird das Zeichen vor der Summe der Producte nicht geändert, wenn die Summe der Zahlen, welche anzeigen, wie oft niedere Elemente auf höhere folgen, gerade ist, hingegen geändert, wenn diese Summe ungerade ist.

Z. B. in 154632 folgt 4 auf 5
3 auf 5, 4, 6
2 auf 5, 4, 6, 3

Die Anzahl dieser höheren Elemente ist $1+3+4=8$; es ist also

$$\left[\overset{a1}{A_1}\,\overset{a2}{A_2}\,\overset{a3}{A_3}\,\overset{a4}{A_4}\,\overset{a5}{A_5}\,\overset{a6}{A_6}\right) = \left[\overset{a1}{A_1}\,\overset{a5}{A_2}\,\overset{a4}{A_3}\,\overset{a6}{A_4}\,\overset{a3}{A_5}\,\overset{a2}{A_6}\right)$$

Hingegen in 265314 folgt 1 auf 2, 6, 5, 3
3 auf 6, 5
4 auf 6, 5
5 auf 6

Da nun $4+2+2+1=9$, so ist

$$[\![\overset{a1}{A}_1\,\overset{a2}{A}_2\,\overset{a3}{A}_3\,\overset{a4}{A}_4\,\overset{a5}{A}_5\,\overset{a6}{A}_6\big) = -[\![\overset{a2}{A}_1\,\overset{a6}{A}_2\,\overset{a5}{A}_3\,\overset{a3}{A}_4\,\overset{a1}{A}_5\,\overset{a4}{A}_6\big)$$

Nachdem wir gefunden haben, welchen Einfluss eine veränderte Folge der oberen Elemente auf die Summe der Producte hat, kann derselbe auch jetzt bei den einzelnen Producten aufgesucht werden.

Es ist nach dem Obigen 517 immer das Product, welches zwischen den beiden Zeichen $[\![\;.\;.\;.\;\big)$ sich befindet, das erste Product der Summe. Soll also das Zeichen vor irgend einem Producte bestimmt werden, so ist zu untersuchen: welches Zeichen (+ oder −) würde vor das Zeichen $[\![$ kommen, wenn das bestimmte Product zwischen den Zeichen $[\![\;.\;.\;.\;.\;\big)$ sich befände? Es gilt also dieselbe Vorschrift, welche oben für die Summe der Producte gefunden ist, auch für die einzelnen Producte, nämlich

521) Wenn die Summe der Zahlen, welche anzeigen, wie oft unter den oberen Elementen niedere Elemente auf höhere Elemente folgen, gerade ist, so ist das Product bejahet, und verneint, wenn sie ungerade ist.

§. 141.

Die erste Bildungsweise in 515 ist zurücklaufend und aus ihr ist die unabhängige 517 hergeleitet. In beiden Bildungsweisen sind die unteren Elemente beständig und die oberen Elemente veränderlich. Diese Ordnung lässt sich umkehren, es lassen sich die unteren Elemente verändern, während die oberen Elemente beständig bleiben. Damit aber dieses gehörig begründet werde, so kehren wir zu der anfänglichen Bildungsweise wieder zurück, von welcher wir ausgegangen sind. Es ist

$$[\![\overset{a1}{A}_1\,\overset{a2}{A}_2\big) = \overset{a1}{A}_1\,\overset{a2}{A}_2 - \overset{a2}{A}_1\,\overset{a1}{A}_2 = [\![\overset{a1}{A}_1\big)\cdot\overset{a2}{A}_2 - [\![\overset{a1}{A}_2\big)\cdot\overset{a2}{A}_1 \qquad (\alpha$$

Bei dreien Factoren ist die erste Bildungsweise:

$$\left[\overset{a_1}{A_1}\,\overset{a_2}{A_2}\,\overset{a_3}{A_3}\right) = \left[\overset{a_1}{A_1}\,\overset{a_2}{A_2}\right)\cdot\overset{a_3}{A_3} - \left[\overset{a_1}{A_1}\,\overset{a_3}{A_2}\right)\cdot\overset{a_2}{A_3} + \left[\overset{a_2}{A_1}\,\overset{a_3}{A_2}\right)\cdot\overset{a_1}{A_3}$$

Die beiden letzten Summen werden nach der vorhin gefundenen Vorschrift α zerlegt

$$-\left[\overset{a_1}{A_1}\,\overset{a_3}{A_2}\right)\cdot\overset{a_2}{A_3} = -\left[\overset{a_1}{A_1}\right)\cdot\overset{a_3}{A_2}\cdot\overset{a_2}{A_3} + \left[\overset{a_1}{A_2}\right)\cdot\overset{a_3}{A_1}\cdot\overset{a_2}{A_3}$$

$$+\left[\overset{a_2}{A_1}\,\overset{a_3}{A_2}\right)\cdot\overset{a_1}{A_3} = +\left[\overset{a_2}{A_1}\right)\cdot\overset{a_3}{A_2}\cdot\overset{a_1}{A_3} - \left[\overset{a_2}{A_2}\right)\cdot\overset{a_3}{A_1}\cdot\overset{a_1}{A_3}$$

und diese vier Producte nach vorgezeichnetem Zwecke wieder gruppirt

$$-\left(\left[\overset{a_1}{A_1}\right)\cdot\overset{a_2}{A_3} - \left[\overset{a_2}{A_1}\right)\cdot\overset{a_1}{A_3}\right)\cdot\overset{a_3}{A_2} + \left(\left[\overset{a_1}{A_2}\right)\cdot\overset{a_2}{A_3} - \left[\overset{a_2}{A_2}\right)\cdot\overset{a_1}{A_3}\right)\cdot\overset{a_3}{A_1}$$

$$= -\left[\overset{a_1}{A_1}\,\overset{a_2}{A_3}\right)\cdot\overset{a_3}{A_2} + \left[\overset{a_1}{A_2}\,\overset{a_2}{A_3}\right)\cdot\overset{a_3}{A_1}$$

Werden diese beiden Summen statt der beiden letzten in der obersten Gleichung eingeführt, so entsteht folgende Bildungsweise:

$$\left[\overset{a_1}{A_1}\,\overset{a_2}{A_2}\,\overset{a_3}{A_3}\right) = \left[\overset{a_1}{A_1}\,\overset{a_2}{A_2}\right)\cdot\overset{a_3}{A_3} - \left[\overset{a_1}{A_1}\,\overset{a_2}{A_3}\right)\cdot\overset{a_3}{A_2} + \left[\overset{a_1}{A_2}\,\overset{a_2}{A_3}\right)\cdot\overset{a_3}{A_1}$$

Dieser Uebergang von der ersten Bildungsweise, wo die unteren Elemente beständig und die oberen veränderlich sind, zu einer neuen Bildungsweise, wo die unteren Elemente veränderlich und die oberen beständig sind, hat schon einen bestimmten Charakter angenommen; das Zerlegen der Summen der ersten Bildungsweise in niedrigere Summen und dann wieder das Gruppiren dieser letzteren nach vorgestecktem Zwecke kehrt immer in derselben Ordnung wieder zurück. Es ist nach diesem nichts mehr übrig, als diesen allgemeinen Uebergang von der Summe der Producte aus n - 1 Factoren zu der Summe der Producte aus n Factoren auch in allgemeinen Zeichen vorzulegen.

Es sei die Summe der Producte aus n–1 Factoren (β

$$\left[\!\left[\begin{matrix}a1 \ldots\ldots\ldots a(n-1)\\ A_1\ldots\ldots A_{n-1}\end{matrix}\right)\right. = (-)^0 \left[\!\left[\begin{matrix}a1\ldots\ldots\ldots a(n-2)\\ A_1\ldots\ldots A_{n-2}\end{matrix}\right)\right.\cdot\overset{a(n-1)}{A_{n-1}} + (-)^1 \left[\!\left[\begin{matrix}a1\ldots\ldots a(n-2)\\ A_1\ldots A_{n-3}A_{n-1}\end{matrix}\right)\right.\cdot\overset{a(n-1)}{A_{n-2}} + \ldots\ldots$$

$$+(-)^{y-1}\left[\!\left[\begin{matrix}a1\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots a(n-2)\\ A_1\cdots A_{n-y-1}A_{n-y+1}\cdots A_{n-1}\end{matrix}\right)\right.\cdot\overset{a(n-1)}{A_{n-y}}+\ldots+(-)^{n-2}\left[\!\left[\begin{matrix}a1\ldots\ldots a(n-2)\\ A_2\ldots\ldots A_{n-1}\end{matrix}\right)\right.\cdot\overset{a(n-1)}{A_1}$$

oder

$$=\Sigma_y(-)^{y-1}\left[\!\left[\begin{matrix}a1\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots a(n-2)\\ A_1\ldots\ldots A_{n-y-1}A_{n-y+1}\ldots\ldots A_{n-1}\end{matrix}\right)\right.\cdot\overset{a(n-1)}{A_{n-y}}$$

wo y = 1, 2, . . . , n–1, gefunden; es werde die Summe der Producte aus n Factoren gebildet.

Es ist nach 515

$$\left[\!\left[\begin{matrix}a1\ldots\ldots\ldots an\\ A_1\ldots\ldots A_n\end{matrix}\right)\right.=\Sigma_x(-)^x\left[\!\left[\begin{matrix}a1\ldots\ldots\ldots a(n-x-1),a(n-x+1)\ldots\ldots\ldots an\\ A_1\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots A_{n-1}\end{matrix}\right)\right.\cdot\overset{a(n-x)}{A_n}$$

wo x = 0, 1, 2, . . . , n–1

oder wenn der erste Theil davon getrennt wird

$$\left[\!\left[\begin{matrix}a1\ldots\ldots an\\ A_1\ldots A_n\end{matrix}\right)\right.=\left[\!\left[\begin{matrix}a1\ldots\ldots\ldots a(n-1)\\ A_1\ldots\ldots A_{n-1}\end{matrix}\right)\right.\cdot\overset{an}{A_n}+\Sigma_x(-)^x\left[\!\left[\begin{matrix}a1\ldots\ldots a(n-x-1),a(n-x+1)\ldots\ldots an\\ A_1\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots A_{n-1}\end{matrix}\right)\right.\cdot\overset{a(n-x)}{A_n}$$

wo x = 1, 2, . . . , n–1

Wird der letzte Theil aus n–1 Factoren bestehend nach der obigen Vorschrift β in niedere Summen zerlegt,

$$\left[\!\left[\begin{matrix}a1\ldots\ldots a(n-x-1),a(n-x+1)\ldots\ldots an\\ A_1\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots A_{n-1}\end{matrix}\right)\right.=\Sigma_y(-)^{y-1}\left[\!\left[\begin{matrix}a1\ldots a(n-x-1),a(n-x+1)\ldots\ldots a(n-1)\\ A_1\cdots A_{n-y-1}\ A_{n-y+1}\ldots\ldots A_{n-1}\end{matrix}\right)\right.\cdot\overset{an}{A_{n-y}}$$

wo y = 1, 2, ... , n–1

so wird

$$\left[\!\left[\begin{matrix}a1\ldots an\\ A_1\cdots A_n\end{matrix}\right)\right.=\left[\!\left[\begin{matrix}a1\ldots\ldots a(n-1)\\ A_1\ldots A_{n-1}\end{matrix}\right)\right.\cdot\overset{an}{A_n}+\Sigma_x\Sigma_y(-)^{x+y-1}\left[\!\left[\begin{matrix}a1\ldots\ldots a(n-x-1),a(n-x+1)\ldots\ldots a(n-1)\\ A_1\cdots A_{n-y-1}A_{n-y+1}\cdots A_{n-1}\end{matrix}\right)\right.\cdot\overset{a(n-x),}{A_n}\cdot\overset{an}{A_{n-y}}$$

wo x = 1, 2, . . . , n–1 und auch y = 1, 2, . . . , n–1

Lassen wir nun zuerst y unverändert und setzen x = 1, 2, . . . , n–1 und berücksichtigen, dass nach der ersten Bildungsweise 515

$$\Sigma_x(-)^x\left[\begin{matrix}a_1\ldots\ldots\ldots\ldots a(n-x-1),\ a(n-x+1)\ldots a(n-1)\\ A_1\cdots A_{n-y-1}A_{n-y+1}\ldots\ldots\ldots\ldots A_{n-1}\end{matrix}\right)\cdot\overset{a(n-x)}{A_n}=-\left[\begin{matrix}a_1\ldots\ldots\ldots\ldots a(n-1)\\ A_1\cdots A_{n-y-1}A_{n-y+1}\cdots A_n\end{matrix}\right)$$

so geht jene Gleichung in folgende über:

$$\left[\begin{matrix}a_1\ldots a_n\\ A_1\cdots A_n\end{matrix}\right)=\left[\begin{matrix}a_1\ldots a(n-1)\\ A_1\cdots A_{n-1}\end{matrix}\right)\cdot\overset{a_n}{A_n}-\Sigma_y(-)^{y-1}\left[\begin{matrix}a_1\ldots\ldots\ldots\ldots a(n-1)\\ A_1\cdots A_{n-y-1}A_{n-y+1}\cdots A_n\end{matrix}\right)\cdot\overset{a_n}{A_{n-y}}$$

wo $y=1,\ldots,n-1$

oder

522) $$\left[\begin{matrix}a_1\ldots a_n\\ A_1\ldots\ldots A_n\end{matrix}\right)=\Sigma_y(-)^y\left[\begin{matrix}a_1\ldots\ldots\ldots\ldots a(n-1)\\ A_1\cdots A_{n-y-1}A_{n-y+1}\cdots A_n\end{matrix}\right)\cdot\overset{a_n}{A_{n-y}}$$

wo $y=0, 1, 2,\ldots,n-1$

$$=(-)^0\left[\begin{matrix}a_1\ldots a(n-1)\\ A_1\ldots\ldots A_{n-1}\end{matrix}\right)\cdot\overset{a_n}{A_n}+(-)^1\left[\begin{matrix}a_1\ldots\ldots\ldots a(n-1)\\ A_1\ldots\ldots A_{n-2}\ A_n\end{matrix}\right)\cdot\overset{a_n}{A_{n-1}}$$
$$+(-)^2\left[\begin{matrix}a_1\ldots\ldots\ldots\ldots a(n-1)\\ A_1\ldots\ldots A_{n-3}\ A_{n-1}\ A_n\end{matrix}\right)\cdot\overset{a_n}{A_{n-2}}+\ldots+(-)^{n-1}\left[\begin{matrix}a_1\ldots a(n-1)\\ A_2\ldots\ldots A_n\end{matrix}\right)\cdot\overset{a_n}{A_1}$$

Es findet also ausser der ersten in 515 noch eine zweite zurücklaufende Bildungsweise 522 statt, deren Unterschied in der Veränderlichkeit und Unveränderlichkeit der oberen und unteren Elemente besteht. Eine von diesen beiden Bildungsweisen musste bei der Untersuchung zu Grunde gelegt werden; wäre diese letzte zur Grundlage gewählt, so hätte die erste aus ihr hergeleitet werden müssen.

Die erste zurücklaufende Bildungsweise 515 hat zu der unabhängigen 517 geführt. Die zweite zurücklaufende 522 führt zu einer zweiten unabhängigen. Der Unterschied dieser beiden unabhängigen ist derselbe als jener zwischen den beiden zurücklaufenden. Es ist

523) $$\left[\begin{matrix}a_1 & a_2\\ A_1 & A_2\end{matrix}\right)=\overset{a_1}{A_1}\overset{a_2}{A_2}-\overset{a_1}{A_2}\overset{a_2}{A_1}$$

$$\left[\begin{matrix}a_1 & a_2 & a_3\\ A_1 & A_2 & A_3\end{matrix}\right)=\overset{a_1}{A_1}\overset{a_2}{A_2}\overset{a_3}{A_3}-\overset{a_1}{A_1}\overset{a_2}{A_3}\overset{a_3}{A_2}-\overset{a_1}{A_2}\overset{a_2}{A_1}\overset{a_3}{A_3}+\overset{a_1}{A_2}\overset{a_2}{A_3}\overset{a_3}{A_1}+\overset{a_1}{A_3}\overset{a_2}{A_1}\overset{a_3}{A_2}-\overset{a_1}{A_3}\overset{a_2}{A_2}\overset{a_3}{A_1}$$

u. s. w.

Die Gesetze, welche in Hinsicht der Zeichen für die erste unabhängige Bildungsweise 517 gefunden sind, finden auch für die zweite 523 statt. Die Weitläufigkeit entschuldigt, wenn dieses nicht näher nachgewiesen wird, welches nur in einem Wiederholen derselben Gründe besteht.

§. 142.

Um den Gegenstand weiter verfolgen zu können, führen wir für alle mögliche Versetzungen der Elemente $a_1, a_2, \ldots, a_n$ das Zeichen $V(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ ein.

524) Wenn aus n verschiedenen Elementen die geordneten Verbindungen ohne Wiederholungen zu q Elementen und dann auch zu n–q Elementen gebildet, alle diese Verbindungen auf alle mögliche Weise versetzt und zuletzt alle diese Versetzungen mit einander vervielfacht werden, so dass in jedem Producte alle Elemente $a_1, a_2, \ldots, a_n$ vorkommen, so entstehen alle mögliche Versetzungen aus den Elementen $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

Ist z. B. $n = 5$, $q = 3$, $n-q = 2$, so ist

$$\begin{aligned} V(12345) = {} & V(123) \times V(45) \\ & + V(124) \times V(35) \\ & + V(125) \times V(34) \\ & + V(134) \times V(25) \\ & + V(135) \times V(24) \\ & + V(145) \times V(23) \\ & + V(234) \times V(15) \\ & + V(235) \times V(14) \\ & + V(245) \times V(13) \\ & + V(345) \times V(12) \end{aligned}$$

oder ist $n = 6$, $q = 3$, $n - q = 3$, so ist

$$\begin{aligned}
V(123456) = \; & V(123) \,.\, V(456) \\
& + V(124) \,.\, V(356) \\
& + V(125) \,.\, V(346) \\
& + V(126) \,.\, V(345) \\
& + V(134) \,.\, V(256) \\
& + V(135) \,.\, V(246) \\
& + V(136) \,.\, V(245) \\
& + V(145) \,.\, V(236) \\
& + V(146) \,.\, V(235) \\
& + V(156) \,.\, V(234) \\
& + V(234) \,.\, V(156) \\
& + V(235) \,.\, V(146) \\
& + V(236) \,.\, V(145) \\
& + V(245) \,.\, V(136) \\
& + V(246) \,.\, V(135) \\
& + V(256) \,.\, V(134) \\
& + V(345) \,.\, V(126) \\
& + V(346) \,.\, V(125) \\
& + V(356) \,.\, V(124) \\
& + V(456) \,.\, V(123)
\end{aligned}$$

Dass keine Verbindung mehrmalen vorkommt, ist offenbar, und dass alle mögliche Versetzungen entstehen, lässt sich leicht nachweisen; denn die Versetzungszahl

$$\text{von } V(1, \ldots, q) \text{ ist } 1.2.3\ldots q$$

$$\text{und von } V(q+1, \ldots, n) \text{ ist } 1.2.3\ldots(n-q)$$

Wenn daher die $V(1, \ldots, q)$ mit den $V(q+1, \ldots, n)$ vervielfacht werden, so entstehen $1.2 \ldots q \times 1.2 \ldots (n-q)$ Producte. Da nun bei jeder geordneten Verbindung ohne Wiederholungen dieselbe Anzahl der Producte entsteht, und

$$\frac{n(n-1) \ldots\ldots (n-q+1)}{1 \,.\, 2 \ldots q}$$

geordnete Verbindungen ohne Wiederholungen möglich sind, so entstehen

$$1.2 \ldots q \,.\, 1.2 \ldots (n-q) \,.\, \frac{n(n-1) \ldots\ldots (n-q+1)}{1 \,.\, 2 \ldots\ldots q} = 1 \,.\, 2 \,.\, 3 \ldots\ldots n$$

oder alle mögliche Versetzungen der n verschiedenen Elemente.

§. 143.

Nach dieser Weise, alle Versetzungen zu bilden, welche wir hier zuerst bekannt machen, können auch die Summen der Producte mit Versetzungen und mit veränderlichen Zeichen in niedrigere Summen zerlegt werden, wenn bei jeder Versetzung nach der oben gefundenen Vorschrift das zugehörige Zeichen bestimmt wird; z. B.

$$\begin{aligned}
\Big[\overset{a1}{A}_1\overset{a2}{A}_2\overset{a3}{A}_3\overset{a4}{A}_4\overset{a5}{A}_5\Big) = {} & \Big[\overset{a1}{A}_1\overset{a2}{A}_2\overset{a3}{A}_3\Big)\cdot\Big[\overset{a4}{A}_4\overset{a5}{A}_5\Big) & = {} & \Big[\overset{a1}{A}_1\overset{a2}{A}_2\overset{a3}{A}_3\Big)\cdot\Big[\overset{a4}{A}_4\overset{a5}{A}_5\Big) \\
& -\Big[\overset{a1}{A}_1\overset{a2}{A}_2\overset{a4}{A}_3\Big)\cdot\Big[\overset{a3}{A}_4\overset{a5}{A}_5\Big) & & -\Big[\overset{a1}{A}_1\overset{a2}{A}_2\overset{a3}{A}_4\Big)\cdot\Big[\overset{a4}{A}_3\overset{a5}{A}_5\Big) \\
& +\Big[\overset{a1}{A}_1\overset{a2}{A}_2\overset{a5}{A}_3\Big)\cdot\Big[\overset{a3}{A}_4\overset{a4}{A}_5\Big) & & +\Big[\overset{a1}{A}_1\overset{a2}{A}_2\overset{a3}{A}_5\Big)\cdot\Big[\overset{a4}{A}_3\overset{a5}{A}_4\Big) \\
& +\Big[\overset{a1}{A}_1\overset{a3}{A}_2\overset{a4}{A}_3\Big)\cdot\Big[\overset{a2}{A}_4\overset{a5}{A}_5\Big) & & +\Big[\overset{a1}{A}_1\overset{a2}{A}_3\overset{a3}{A}_4\Big)\cdot\Big[\overset{a4}{A}_2\overset{a5}{A}_5\Big) \\
& -\Big[\overset{a1}{A}_1\overset{a3}{A}_2\overset{a5}{A}_3\Big)\cdot\Big[\overset{a2}{A}_4\overset{a4}{A}_5\Big) & & -\Big[\overset{a1}{A}_1\overset{a2}{A}_3\overset{a3}{A}_5\Big)\cdot\Big[\overset{a4}{A}_2\overset{a5}{A}_4\Big) \\
& +\Big[\overset{a1}{A}_1\overset{a4}{A}_2\overset{a5}{A}_3\Big)\cdot\Big[\overset{a2}{A}_4\overset{a3}{A}_5\Big) & & +\Big[\overset{a1}{A}_1\overset{a2}{A}_4\overset{a3}{A}_5\Big)\cdot\Big[\overset{a4}{A}_2\overset{a5}{A}_3\Big) \\
& -\Big[\overset{a2}{A}_1\overset{a3}{A}_2\overset{a4}{A}_3\Big)\cdot\Big[\overset{a1}{A}_4\overset{a5}{A}_5\Big) & & -\Big[\overset{a1}{A}_2\overset{a2}{A}_3\overset{a3}{A}_4\Big)\cdot\Big[\overset{a4}{A}_1\overset{a5}{A}_5\Big) \\
& +\Big[\overset{a2}{A}_1\overset{a3}{A}_2\overset{a5}{A}_3\Big)\cdot\Big[\overset{a1}{A}_4\overset{a4}{A}_5\Big) & & +\Big[\overset{a1}{A}_2\overset{a2}{A}_3\overset{a3}{A}_5\Big)\cdot\Big[\overset{a4}{A}_1\overset{a5}{A}_4\Big) \\
& -\Big[\overset{a2}{A}_1\overset{a4}{A}_2\overset{a5}{A}_3\Big)\cdot\Big[\overset{a1}{A}_4\overset{a3}{A}_5\Big) & & -\Big[\overset{a1}{A}_2\overset{a2}{A}_4\overset{a3}{A}_5\Big)\cdot\Big[\overset{a4}{A}_1\overset{a5}{A}_3\Big) \\
& +\Big[\overset{a3}{A}_1\overset{a4}{A}_2\overset{a5}{A}_3\Big)\cdot\Big[\overset{a1}{A}_4\overset{a2}{A}_5\Big) & & +\Big[\overset{a1}{A}_3\overset{a2}{A}_4\overset{a3}{A}_5\Big)\cdot\Big[\overset{a4}{A}_1\overset{a5}{A}_2\Big)
\end{aligned}$$

In der ersten Scheitelreihe sind die oberen und in der zweiten die unteren Elemente veränderlich; die Zeichen + und – befolgen das Gesetz in §. 140. Eben so ist

$$\begin{aligned}
\left[\overset{a1}{A_1}\overset{a2}{A_2}\overset{a3}{A_3}\overset{a4}{A_4}\overset{a5}{A_5}\overset{a6}{A_6}\overset{a7}{A_7}\right) = & \left[\overset{a1}{A_1}\overset{a2}{A_2}\overset{a3}{A_3}\right)\cdot\left[\overset{a4}{A_4}\overset{a5}{A_5}\overset{a6}{A_6}\overset{a7}{A_7}\right) \\
& - \left[\overset{a1}{A_1}\overset{a2}{A_2}\overset{a4}{A_3}\right)\cdot\left[\overset{a3}{A_4}\overset{a5}{A_5}\overset{a6}{A_6}\overset{a7}{A_7}\right) \\
& + \left[\overset{a1}{A_1}\overset{a2}{A_2}\overset{a5}{A_3}\right)\cdot\left[\overset{a3}{A_4}\overset{a4}{A_5}\overset{a6}{A_6}\overset{a7}{A_7}\right) \\
& - \left[\overset{a1}{A_1}\overset{a2}{A_2}\overset{a6}{A_3}\right)\cdot\left[\overset{a3}{A_4}\overset{a4}{A_5}\overset{a5}{A_6}\overset{a7}{A_7}\right) \\
& + \left[\overset{a1}{A_1}\overset{a2}{A_2}\overset{a7}{A_3}\right)\cdot\left[\overset{a3}{A_4}\overset{a4}{A_5}\overset{a5}{A_6}\overset{a6}{A_7}\right) \\
& + \left[\overset{a1}{A_1}\overset{a3}{A_2}\overset{a4}{A_3}\right)\cdot\left[\overset{a2}{A_4}\overset{a5}{A_5}\overset{a6}{A_6}\overset{a7}{A_7}\right) \\
& - \left[\overset{a1}{A_1}\overset{a3}{A_2}\overset{a5}{A_3}\right)\cdot\left[\overset{a2}{A_4}\overset{a4}{A_5}\overset{a6}{A_6}\overset{a7}{A_7}\right)
\end{aligned}$$

u. s. w.

Wir wollen für diese Bildungsweise folgende allgemeine Zeichen wählen:

525) $$\left[\overset{a1 \dots\dots an}{A_1 \dots\dots A_n}\right) = \Sigma\,(-)^{*}\left[\overset{(a1,\,a2,\dots,\,an)^{(q)}}{A_1 \dots . A_q}\right)\cdot\left[\overset{(a1,\quad a2,\dots\dots,\,an)^{(n-q)}}{A_{q+1} A_{q+2} \dots A_n}\right)$$

und

526) $$= \Sigma\,(-)^{*}\left[\overset{a1,\ a2,\dots\dots,\ aq}{(A_1, A_2, \dots, A_n)^{(q)}}\right)\cdot\left[\overset{a(q+1),\ a(q+2),\dots .an)}{(A_1, A_2, \dots, A_n)^{(n-q)}}\right)$$

wo * nach dem Gesetze bestimmt werden muss, welches in §. 140 gefunden ist.

Diese beiden Gleichungen enthalten die allgemeinste Bildungsweise, in welcher die vorhergehenden in 515 und 522, die einzigen, welche bisher bekannt waren, enthalten sind. Dieses oberste Gesetz ist sehr wichtig bei der Umformung der Reihen bestehend aus Producten mit Versetzungen, wie bald der Verfolg lehren wird.

§. 144.

Nachdem das höchste und allgemeinste Bildungsgesetz der Producte aus Factoren mit Versetzungen aufgefunden ist, ist nur noch übrig, den Einfluss zu würdigen, welchen die Gleichheit mehrerer Elemente auf die Summe der Producte hat.

Wir gehen hiebei von der Gleichheit der Elemente aus, wenn sie in der niedrigsten Anzahl vorkommen; es ist

$$\left[\overset{a1}{A}_1\overset{a2}{A}_1\right) = \overset{a1}{A}_1\overset{a2}{A}_1 - \overset{a2}{A}_1\overset{a1}{A}_1 = 0 \qquad (\alpha$$

Beim Fortschreiten zu Producten von dreien Factoren finden wir das Gleiche, wenn wir die Summe von Producten aus dreien Factoren in Summen von Producten aus zweien Factoren zerlegen, wovon jede Summe nach vorstehender Gleichung $= 0$ ist;

$$\left[\overset{a1}{A}_1\overset{a2}{A}_1\overset{a3}{A}_2\right) = \left[\overset{a1}{A}_1\overset{a2}{A}_1\right)\cdot\overset{a3}{A}_2 - \left[\overset{a1}{A}_1\overset{a3}{A}_1\right)\cdot\overset{a2}{A}_2 + \left[\overset{a2}{A}_1\overset{a3}{A}_1\right)\cdot\overset{a1}{A}_2 = 0+0+0=0$$

und eben so finden wir durch das Zurückführen der Summen von Producten aus vier Factoren auf Summen der Producte aus dreien Factoren, dass

$$\left[\overset{a1}{A}_1\overset{a2}{A}_1\overset{a3}{A}_2\overset{a4}{A}_3\right) =$$

$$= \left[\overset{a1}{A}_1\overset{a2}{A}_1\overset{a3}{A}_2\right)\cdot\overset{a4}{A}_3 - \left[\overset{a1}{A}_1\overset{a2}{A}_1\overset{a4}{A}_2\right)\cdot\overset{a3}{A}_3 + \left[\overset{a1}{A}_1\overset{a3}{A}_1\overset{a4}{A}_2\right)\cdot\overset{a2}{A}_3 - \left[\overset{a2}{A}_1\overset{a3}{A}_1\overset{a4}{A}_2\right)\cdot\overset{a1}{A}_3 =$$

$$= 0 + 0 + 0 + 0 = 0$$

Dieses Zurückführen der späteren Summen auf niedere Summen zeigt allgemein, dass immer die Summe der Producte, worin zwei der unteren Elemente gleich sind, $= 0$ ist. Denn ist die Summe der Producte, welche aus $n-1$ Factoren bestehen, wovon zwei untere Elemente gleich sind, $= 0$ oder ist

$$\left[\!\left[\overset{a1}{A_1}\,\overset{a2}{A_1}\,\overset{a3}{A_2}\,\overset{a4}{A_3}\,\overset{\ldots\ldots}{\ldots\ldots}\,\overset{a(n-1)}{A_{n-2}}\right) = 0\right.$$

so ist, weil

$$\left[\!\left[\overset{a1}{A_1}\,\overset{a2}{A_1}\,\overset{a3}{A_2}\,\overset{a4}{A_3}\,\overset{\ldots\ldots}{\ldots\ldots}\,\overset{an}{A_{n-1}}\right) = \Sigma(-)^x \left[\!\left[\overset{a1}{A_1}\,\overset{a2}{A_1}\,\overset{a3}{A_2}\,\overset{\ldots a(n-x-1),a(n-x+1)\ldots an}{\ldots\ldots\quad A_{n-2}}\right)\cdot \overset{a(n-x)}{A_{n-1}}\right.\right.$$

wo $x = 0, 1, 2, \ldots, n-1$

auch

527) $$\left[\!\left[\overset{a1}{A_1}\,\overset{a2}{A_1}\,\overset{a3}{A_2}\,\overset{a4}{A_3}\,\overset{\ldots\ldots}{\ldots\ldots}\,\overset{an}{A_{n-1}}\right) = 0\right.$$

Die Untersuchung behält denselben Gang, wenn unter den oberen Elementen zwei gleiche Elemente vorkommen; es ist

$$\left[\!\left[\overset{a1}{A_1}\,\overset{a1}{A_2}\right) = \overset{a1}{A_1}\,\overset{a1}{A_2} - \overset{a1}{A_2}\,\overset{a1}{A_1} = 0\right.$$

ferner

$$\left[\!\left[\overset{a1}{A_1}\,\overset{a1}{A_2}\,\overset{a2}{A_3}\right) = \left[\!\left[\overset{a1}{A_1}\,\overset{a1}{A_2}\right)\cdot\overset{a2}{A_3} - \left[\!\left[\overset{a1}{A_1}\,\overset{a1}{A_3}\right)\cdot\overset{a2}{A_2} + \left[\!\left[\overset{a1}{A_2}\,\overset{a1}{A_3}\right)\cdot\overset{a2}{A_1} = 0+0+0 = 0\right.\right.\right.\right.$$

und allgemein, ist

$$\left[\!\left[\overset{a1}{A_1}\,\overset{a1\quad a2\ldots\ldots\ldots}{\ldots\ldots\ldots\ldots}\,\overset{a(n-2)}{A_{n-1}}\right) = 0\right.$$

so ist, weil

$$\left[\!\left[\overset{a1}{A_1}\,\overset{a1\quad a2\ldots\ldots\ldots}{\ldots\ldots\ldots\ldots}\,\overset{a(n-1)}{A_n}\right) = \Sigma(-)^x \left[\!\left[\overset{a1}{A_1}\,\overset{a1\quad a2\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots a(n-2)}{\ldots\ldots A_{n-x-1}A_{n-x+1}\ldots\ldots A_n}\right)\cdot\overset{a(n-1)}{A_{n-x}}\right.\right.$$

ist, auch

528) $$\left[\!\left[\overset{a1}{A_1}\,\overset{a1\quad a2\ldots\ldots\ldots}{\ldots\ldots\ldots}\,\overset{a(n-1)}{A_n}\right) = 0\right.$$

Es ist hiedurch ganz allgemein gefunden, dass immer zwei gleiche Elemente, sie mögen unter den oberen oder unter den unteren Elementen vorkommen, die Summe der Producte zernichten.

Diese Wahrheit, so nahe sie auch liegt, ist doch noch von keinem Mathematiker bemerkt worden; sie ist eine der wichtigsten für alle Untersuchungen, bei welchen Producte mit Versetzungen der Factoren vorkommen, und der Verfolg wird lehren, wie viel auf ihr ruhet.

Diese einfache Wahrheit gibt den wahren Werth folgender Reihen an:

529) $$\left[\overset{a1}{A}_1 \overset{a2}{A}_2\right) \cdot \overset{a3}{A}_2 - \left[\overset{a1}{A}_1 \overset{a3}{A}_2\right) \cdot \overset{a2}{A}_2 + \left[\overset{a2}{A}_1 \overset{a3}{A}_2\right) \cdot \overset{a1}{A}_2 = 0$$

$$\left[\overset{a1}{A}_1 \overset{a2}{A}_2 \overset{a3}{A}_3\right) \cdot \overset{a4}{A}_3 - \left[\overset{a1}{A}_1 \overset{a2}{A}_2 \overset{a4}{A}_3\right) \cdot \overset{a3}{A}_3 + \left[\overset{a1}{A}_1 \overset{a3}{A}_2 \overset{a4}{A}_3\right) \cdot \overset{a2}{A}_3 - \left[\overset{a2}{A}_1 \overset{a3}{A}_2 \overset{a4}{A}_3\right) \cdot \overset{a1}{A}_3 = 0$$

$$\left[\overset{a1}{A}_1 \overset{a2}{A}_2 \overset{a3}{A}_3 \overset{a4}{A}_4\right) \cdot \overset{a5}{A}_4 - \left[\overset{a1}{A}_1 \overset{a2}{A}_2 \overset{a3}{A}_3 \overset{a5}{A}_4\right) \cdot \overset{a4}{A}_4 + \left[\overset{a1}{A}_1 \overset{a2}{A}_2 \overset{a4}{A}_3 \overset{a5}{A}_4\right) \cdot \overset{a3}{A}_4 - \left[\overset{a1}{A}_1 \overset{a3}{A}_2 \overset{a4}{A}_3 \overset{a5}{A}_4\right) \cdot \overset{a2}{A}_4$$

$$+ \left[\overset{a2}{A}_1 \overset{a3}{A}_2 \overset{a4}{A}_3 \overset{a5}{A}_4\right) \cdot \overset{a1}{A}_4 = 0$$

u. s. w.

so wie auch der Reihen

530) $$\left[\overset{a1}{A}_1 \overset{a2}{A}_2\right) \cdot \overset{a2}{A}_3 - \left[\overset{a1}{A}_1 \overset{a2}{A}_3\right) \cdot \overset{a2}{A}_2 + \left[\overset{a1}{A}_2 \overset{a2}{A}_3\right) \cdot \overset{a2}{A}_1 = 0$$

$$\left[\overset{a1}{A}_1 \overset{a2}{A}_2 \overset{a3}{A}_3\right) \cdot \overset{a3}{A}_4 - \left[\overset{a1}{A}_1 \overset{a2}{A}_2 \overset{a3}{A}_4\right) \cdot \overset{a3}{A}_3 + \left[\overset{a1}{A}_1 \overset{a2}{A}_3 \overset{a3}{A}_4\right) \cdot \overset{a3}{A}_2 - \left[\overset{a1}{A}_2 \overset{a2}{A}_3 \overset{a3}{A}_4\right) \cdot \overset{a3}{A}_1 = 0$$

$$\left[\overset{a1}{A}_1 \overset{a2}{A}_2 \overset{a3}{A}_3 \overset{a4}{A}_4\right) \cdot \overset{a4}{A}_5 - \left[\overset{a1}{A}_1 \overset{a2}{A}_2 \overset{a3}{A}_3 \overset{a4}{A}_5\right) \cdot \overset{a4}{A}_4 + \left[\overset{a1}{A}_1 \overset{a2}{A}_2 \overset{a3}{A}_4 \overset{a4}{A}_5\right) \cdot \overset{a4}{A}_3 - \left[\overset{a1}{A}_1 \overset{a2}{A}_3 \overset{a3}{A}_4 \overset{a4}{A}_5\right) \cdot \overset{a4}{A}_2$$

$$+ \left[\overset{a1}{A}_2 \overset{a2}{A}_3 \overset{a3}{A}_4 \overset{a4}{A}_5\right) \cdot \overset{a4}{A}_1 = 0$$

u. s. w.

denn die Summe der Reihen in 529 ist

$$= \left[\begin{matrix} a1 \,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\, a(n-1)\;\; an \\ A_1 \,.\,.\,.\,.\,.\, A_{n-1}\;\; A_{n-1} \end{matrix}\right) = 0$$

und jener in 530 ist

$$\left[\begin{matrix} a1 \,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\, a(n-1),\; a(n-1) \\ A_1 \,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\;\; A_n \end{matrix}\right) = 0$$

welche wegen der Gleichheit der beiden letzten Elemente verschwinden. Ueberhaupt ist

531) $$\Sigma\, (-)^x \left[\begin{matrix} a1 \,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\, a(q-1),\, aq,\, a(q+1) \,.\,.\,.\, a(n-1) \\ A_1 \ldots A_{x-1} A_{x+1} \,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\, A_n \end{matrix}\right) \cdot \overset{aq}{A}_x = 0$$

und

532) $$\Sigma\, (-)^x \left[\begin{matrix} a1 \ldots a(x-1),\, a(x+1) \,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\, an \\ A_1 \,.\,.\,.\,.\,.\, A_{q-1}\, A_q\, A_{q+1} \,.\,.\,.\, A_{n-1} \end{matrix}\right) \cdot \overset{ax}{A}_q = 0$$

wo in beiden x = 1, 2, ... , n gesetzt werden muss.

II. Umwandlung der Reihen bestehend aus Summen von Producten mit Versetzungen in andere Reihen.

§. 145.

Der Werth einer Reihe, welche aus diesen Producten besteht, lässt sich oft dadurch leichter würdigen, wenn sie in eine andere Reihe verwandelt wird, in welcher die Elemente auf eine andere Weise gruppirt werden. Damit aber hier der Uebergang von einer Reihe zu einer andern ihr an Werth gleichen Reihe deutlicher vorgelegt werde, so werde eine Reihe von einer bestimmten Form und einer bestimmten Anzahl von Elementen gewählt; sie sei folgende: $(\alpha$

$$\left[\overset{a_1}{A}_1\overset{a_2}{A}_2\overset{a_3}{A}_3\overset{a_4}{B}_1\right)\cdot\left[\overset{b_1}{B}_2\overset{b_2}{B}_3\overset{b_3}{B}_4\right)-\left[\overset{a_1}{A}_1\overset{a_2}{A}_2\overset{a_3}{A}_3\overset{a_4}{B}_2\right)\cdot\left[\overset{b_1}{B}_1\overset{b_2}{B}_3\overset{b_3}{B}_4\right)+\left[\overset{a_1}{A}_1\overset{a_2}{A}_2\overset{a_3}{A}_3\overset{a_4}{B}_3\right)\cdot\left[\overset{b_1}{B}_1\overset{b_2}{B}_2\overset{b_3}{B}_4\right)-\left[\overset{a_1}{A}_1\overset{a_2}{A}_2\overset{a_3}{A}_3\overset{a_4}{B}_4\right)\cdot\left[\overset{b_1}{B}_1\overset{b_2}{B}_2\overset{b_3}{B}_3\right)=P$$

Zuerst wird jede Summe, worin vier Elemente vorkommen, nach 515 in niedere Summen zerlegt,

$$\begin{aligned}P=&\left(\left[\overset{a_1}{A}_1\overset{a_2}{A}_2\overset{a_3}{A}_3\right)\cdot\overset{a_4}{B}_1-\left[\overset{a_1}{A}_1\overset{a_2}{A}_2\overset{a_4}{A}_3\right)\cdot\overset{a_3}{B}_1+\left[\overset{a_1}{A}_1\overset{a_3}{A}_2\overset{a_4}{A}_3\right)\cdot\overset{a_2}{B}_1-\left[\overset{a_2}{A}_1\overset{a_3}{A}_2\overset{a_4}{A}_3\right)\cdot\overset{a_1}{B}_1\right)\cdot\left[\overset{b_1}{B}_2\overset{b_2}{B}_3\overset{b_3}{B}_4\right)\\
-&\left(\left[\overset{a_1}{A}_1\overset{a_2}{A}_2\overset{a_3}{A}_3\right)\cdot\overset{a_4}{B}_2-\left[\overset{a_1}{A}_1\overset{a_2}{A}_2\overset{a_4}{A}_3\right)\cdot\overset{a_3}{B}_2+\left[\overset{a_1}{A}_1\overset{a_3}{A}_2\overset{a_4}{A}_3\right)\cdot\overset{a_2}{B}_2-\left[\overset{a_3}{A}_1\overset{a_3}{A}_2\overset{a_4}{A}_3\right)\cdot\overset{a_1}{B}_2\right)\cdot\left[\overset{b_1}{B}_1\overset{b_2}{B}_3\overset{b_3}{B}_4\right)\\
+&\left(\left[\overset{a_1}{A}_1\overset{a_2}{A}_2\overset{a_3}{A}_3\right)\cdot\overset{a_4}{B}_3-\left[\overset{a_1}{A}_1\overset{a_2}{A}_2\overset{a_4}{A}_3\right)\cdot\overset{a_3}{B}_3+\left[\overset{a_1}{A}_1\overset{a_3}{A}_2\overset{a_4}{A}_3\right)\cdot\overset{a_2}{B}_3-\left[\overset{a_2}{A}_1\overset{a_3}{A}_2\overset{a_4}{A}_3\right)\cdot\overset{a_1}{B}_3\right)\cdot\left[\overset{b_1}{B}_1\overset{b_2}{B}_2\overset{b_3}{B}_4\right)\\
-&\left(\left[\overset{a_1}{A}_1\overset{a_2}{A}_2\overset{a_3}{A}_3\right)\cdot\overset{a_4}{B}_4-\left[\overset{a_1}{A}_1\overset{a_2}{A}_2\overset{a_4}{A}_3\right)\cdot\overset{a_3}{B}_4+\left[\overset{a_1}{A}_1\overset{a_3}{A}_2\overset{a_4}{A}_3\right)\cdot\overset{a_2}{B}_4-\left[\overset{a_2}{A}_1\overset{a_3}{A}_2\overset{a_4}{A}_3\right)\cdot\overset{a_1}{B}_4\right)\cdot\left[\overset{b_1}{B}_1\overset{b_2}{B}_2\overset{b_3}{B}_3\right)\end{aligned}$$

diese Summen werden auf eine andere Weise gruppirt

$$P = \left(-\left[\overset{b1}{B}_1\,\overset{b2}{B}_2\,\overset{b3}{B}_3\right)\cdot\overset{a4}{B}_4+\left[\overset{b1}{B}_1\,\overset{b2}{B}_2\,\overset{b3}{B}_4\right)\cdot\overset{a4}{B}_3-\left[\overset{b1}{B}_1\,\overset{b2}{B}_3\,\overset{b3}{B}_4\right)\cdot\overset{a4}{B}_2+\left[\overset{b1}{B}_2\,\overset{b2}{B}_3\,\overset{b3}{B}_4\right)\cdot\overset{a4}{B}_1\right)\cdot\left[\overset{a1}{A}_1\,\overset{a2}{A}_2\,\overset{a3}{A}_3\right)$$

$$+\left(\left[\overset{b1}{B}_1\,\overset{b2}{B}_2\,\overset{b3}{B}_3\right)\cdot\overset{a3}{B}_4-\left[\overset{b1}{B}_1\,\overset{b2}{B}_2\,\overset{b3}{B}_4\right)\cdot\overset{a3}{B}_3+\left[\overset{b1}{B}_1\,\overset{b2}{B}_3\,\overset{b3}{B}_4\right)\cdot\overset{a3}{B}_2-\left[\overset{b1}{B}_2\,\overset{b2}{B}_3\,\overset{b3}{B}_4\right)\cdot\overset{a3}{B}_1\right)\cdot\left[\overset{a1}{A}_1\,\overset{a2}{A}_2\,\overset{a4}{A}_3\right)$$

$$+\left(-\left[\overset{b1}{B}_1\,\overset{b2}{B}_2\,\overset{b3}{B}_3\right)\cdot\overset{a2}{B}_4+\left[\overset{b1}{B}_1\,\overset{b2}{B}_2\,\overset{b3}{B}_4\right)\cdot\overset{a2}{B}_3-\left[\overset{b1}{B}_1\,\overset{b2}{B}_3\,\overset{b3}{B}_4\right)\cdot\overset{a2}{B}_2+\left[\overset{b1}{B}_2\,\overset{b2}{B}_3\,\overset{b3}{B}_4\right)\cdot\overset{a2}{B}_1\right)\cdot\left[\overset{a1}{A}_1\,\overset{a3}{A}_2\,\overset{a4}{A}_3\right)$$

$$+\left(\left[\overset{b1}{B}_1\,\overset{b2}{B}_2\,\overset{b3}{B}_3\right)\cdot\overset{a1}{B}_4-\left[\overset{b1}{B}_1\,\overset{b2}{B}_2\,\overset{b3}{B}_4\right)\cdot\overset{a1}{B}_3+\left[\overset{b1}{B}_1\,\overset{b2}{B}_3\,\overset{b3}{B}_4\right)\cdot\overset{a1}{B}_2-\left[\overset{b1}{B}_2\,\overset{b2}{B}_3\,\overset{b3}{B}_4\right)\cdot\overset{a1}{B}_1\right)\cdot\left[\overset{a2}{A}_1\,\overset{a3}{A}_2\,\overset{a4}{A}_3\right)$$

und zuletzt die Horizontalreihen nach 522 summirt, wodurch folgende neue Reihe entsteht (β

$$P = \left[\overset{a1}{A}_1\,\overset{a2}{A}_2\,\overset{a3}{A}_3\right)\cdot\left[\overset{a4}{B}_1\,\overset{b1}{B}_2\,\overset{b2}{B}_3\,\overset{b3}{B}_4\right)-\left[\overset{a1}{A}_1\,\overset{a2}{A}_2\,\overset{a4}{A}_3\right)\cdot\left[\overset{a3}{B}_1\,\overset{b1}{B}_2\,\overset{b2}{B}_3\,\overset{b3}{B}_4\right)+\left[\overset{a1}{A}_1\,\overset{a3}{A}_2\,\overset{a4}{A}_3\right)\cdot\left[\overset{a2}{B}_1\,\overset{b1}{B}_2\,\overset{b2}{B}_3\,\overset{b3}{B}_4\right)-\left[\overset{a2}{A}_1\,\overset{a3}{A}_2\,\overset{a4}{A}_3\right)\cdot\left[\overset{a1}{B}_1\,\overset{b1}{B}_2\,\overset{b2}{B}_3\,\overset{b3}{B}_4\right)$$

welche der vorgegebenen Reihe gleich ist, aber sich dadurch von ihr unterscheidet, dass die einzelnen Summen, worin A vorkommt, ein oberes und auch ein unteres Element an die andern Summen abgetreten haben.

Dieses Uebertragen einer Reihe in eine andere ist einfach und besteht in dem Zerlegen nach der ersten Bildungsweise 515 und in dem Summiren nach der zweiten in 522. Es ist noch übrig, dasselbe bei einer unbestimmten Anzahl von Elementen vorzunehmen.

Die Reihe, welche in eine andere übertragen werden soll, sei

$$Q = \Sigma_x (-)^{x-1} \left[\begin{matrix} a1 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; a(n+1) \\ A_1 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; A_n \, B_x \end{matrix}\right) \cdot \left[\begin{matrix} b1 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; bm \\ B_1 \ldots B_{x-1} \; B_{x+1} \ldots B_{m+1} \end{matrix}\right)$$

wo $x = 1, 2, \ldots, m+1$

Der erste Factor wird nach 515 in niedere Summen aufgelöst

$$\left[\begin{matrix} a1 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; a(n+1) \\ A_1 \; . \; . \; . \; . \; . \; A_n B_x \end{matrix}\right) = \Sigma_y (-)^{n-y+1} \left[\begin{matrix} a1 \ldots a(y-1),\, a(y+1) \ldots a(n+1) \\ A_1 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; A_n \end{matrix}\right) \cdot \overset{ay}{B_x}$$

wo $y = 1, 2, \ldots, n+1$

wodurch die vorgegebene Reihe in folgende übergeht:

$$Q = \Sigma_x \Sigma_y (-)^{n+x-y} \left[\begin{matrix} a1 \ldots a(y-1),\, a(y+1) \ldots a(n+1) \\ A_1 \; . \; . \; . \; . \; . \; A_n \end{matrix}\right) \cdot \left[\begin{matrix} b1 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; bm \\ B_1 \ldots B_{x-1} \; B_{x+1} \ldots B_{m+1} \end{matrix}\right) \cdot \overset{ay}{B_x}$$

Es ist aber nach 522

$$\Sigma_x (-)^{m+1-x} \left[\begin{matrix} b1 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; bm \\ B_1 \ldots B_{x-1} \; B_{x+1} \ldots B_{m+1} \end{matrix}\right) \cdot \overset{ay}{B_x} = \left[\begin{matrix} b1 \; . \; . \; . \; . \; bm,\, ay \\ B_1 \; . \; . \; . \; . \; . \; B_{m+1} \end{matrix}\right)$$

$$= (-)^m \left[\begin{matrix} ay,\, b1,\, b2 \; . \; . \; . \; bm \\ B_1 \; . \; . \; . \; . \; . \; B_{m+1} \end{matrix}\right)$$

folglich

$$Q = \Sigma_y (-)^{n-y-1} \left[\begin{matrix} a1 \ldots a(y-1),\, a(y+1) \ldots a(n+1) \\ A_1 \; . \; . \; . \; . \; . \; A_n \end{matrix}\right) \cdot \left[\begin{matrix} ay,\, b1,\, b2 \; . \; . \; . \; bm \\ B_1 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; B_{m+1} \end{matrix}\right)$$

oder es ist

533) $$\Sigma_x (-)^{x-1} \left[\begin{matrix} a1 & \ldots\ldots\ldots & a(n+1) \\ A_1 & \ldots\ldots\ldots & A_n B_x \end{matrix}\right) \cdot \left[\begin{matrix} b1 & \ldots\ldots\ldots & bm \\ B_1 \ldots B_{x-1} B_{x+1} & \ldots & B_{m+1} \end{matrix}\right) =$$

$$= \Sigma_y (-)^{n-y-1} \left[\begin{matrix} a1 \ldots a(y-1), a(y+1) \ldots & & a(n+1) \\ A_1 & \ldots\ldots\ldots & A_n \end{matrix}\right) \cdot \left[\begin{matrix} ay, b1, b2 & \ldots & bm \\ B_1 & \ldots\ldots\ldots & B_{m+1} \end{matrix}\right)$$

wo $x = 1, 2, \ldots\ldots, m+1$

und $y = 1, 2, \ldots\ldots, n+1$

oder es ist

534) $$\left[\begin{matrix} a1 & \ldots\ldots\ldots & a(n+1) \\ A_1 & \ldots\ldots & A_n B_1 \end{matrix}\right) \cdot \left[\begin{matrix} b1 & \ldots\ldots\ldots & bm \\ B_2 & \ldots\ldots\ldots & B_{m+1} \end{matrix}\right)$$

$$- \left[\begin{matrix} a1 & \ldots\ldots\ldots & a(n+1) \\ A_1 & \ldots\ldots & A_n B_2 \end{matrix}\right) \cdot \left[\begin{matrix} b1 & \ldots\ldots\ldots & bm \\ B_1 B_3 & \ldots\ldots\ldots & B_{m+1} \end{matrix}\right)$$

$$+ \left[\begin{matrix} a1 & \ldots\ldots\ldots & a(n+1) \\ A_1 & \ldots\ldots & A_n B_3 \end{matrix}\right) \cdot \left[\begin{matrix} b1 & \ldots\ldots\ldots & bm \\ B_1 B_2 B_4 & \ldots\ldots & B_{m+1} \end{matrix}\right)$$

$$- \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$+ (-)^m \left[\begin{matrix} a1 & \ldots\ldots\ldots & a(n+1) \\ A_1 & \ldots\ldots & A_n B_{m+1} \end{matrix}\right) \cdot \left[\begin{matrix} b1 & \ldots\ldots\ldots & bm \\ B_1 & \ldots\ldots\ldots & B_m \end{matrix}\right)$$

$$= \left[\begin{matrix} a1 & \ldots\ldots\ldots & an \\ A_1 & \ldots\ldots\ldots & A_n \end{matrix}\right) \cdot \left[\begin{matrix} a(n+1), b1 & \ldots\ldots & bm \\ B_1 & \ldots\ldots\ldots & B_{m+1} \end{matrix}\right)$$

$$- \left[\begin{matrix} a1 & \ldots\ldots & a(n-1), a(n+1) \\ A_1 & \ldots\ldots\ldots & A_n \end{matrix}\right) \cdot \left[\begin{matrix} an, b1 & \ldots\ldots & bm \\ B_1 & \ldots\ldots\ldots & B_{m+1} \end{matrix}\right)$$

$$+ \left[\begin{matrix} a1 & \ldots & a(n-2), an, a(n+1) \\ A_1 & \ldots\ldots\ldots & A_n \end{matrix}\right) \cdot \left[\begin{matrix} a(n-1), b1 & \ldots\ldots & bm \\ B_1 & \ldots\ldots\ldots & B_{m+1} \end{matrix}\right)$$

$$- \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$(-)^n \left[\begin{matrix} a2 & \ldots\ldots\ldots & a(n+1) \\ A_1 & \ldots\ldots\ldots & A_n \end{matrix}\right) \cdot \left[\begin{matrix} a1, b1 & \ldots\ldots & bm \\ B_1 & \ldots\ldots\ldots & B_{m+1} \end{matrix}\right)$$

§. 146.

So allgemein auch diese Reihe ist, so ist sie doch eigentlich nur ein einfacher Fall von derjenigen Reihe, zu welcher die Untersuchung fortgeführt werden kann; wir gehen zunächst zu der allgemeineren Reihe über, vorgestellt durch die Zeichen

$$R = \Sigma(-)^{*}\left[\!\!\left[\overset{a1\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;an}{A_1\ldots\ldots A_{n-q}B'_1\ldots\ldots\ldots B'_q}\right)\cdot\left[\!\!\left[\overset{b1\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;b(m-q)}{B'_{q+1}\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;B'_m}\right)\right.\right.$$

wo der Strich über den Elementen B bedeutet, dass aus diesen so ausgezeichneten Elementen alle geordneten Verbindungen ohne Wiederholungen zu q und zu m-q Elementen aus m Elementen gebildet werden sollen, und wo die Zeichen + und - nach den früher gefundenen Vorschriften §. 140 zu bestimmen sind, und zwar nur mit Rücksicht auf die Elemente B. Ist z. B. $q = 3$ und $m = 5$, so ist

$$\begin{aligned}
R = & \left[\!\!\left[\overset{a1\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;an}{A_1\ldots A_{n-3}B_1B_2B_3}\right)\cdot\left[\!\!\left[\overset{b1\;\;b2}{B_4\;B_5}\right)\right.\right. \\
& - \left[\!\!\left[\overset{a1\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;an}{A_1\ldots A_{n-3}B_1B_2B_4}\right)\cdot\left[\!\!\left[\overset{b1\;\;b2}{B_3\;B_5}\right)\right.\right. \\
& + \left[\!\!\left[\overset{a1\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;an}{A_1\ldots A_{n-3}B_1B_2B_5}\right)\cdot\left[\!\!\left[\overset{b1\;\;b2}{B_3\;B_4}\right)\right.\right. \\
& + \left[\!\!\left[\overset{a1\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;an}{A_1\ldots A_{n-3}B_1B_3B_4}\right)\cdot\left[\!\!\left[\overset{b1\;\;b2}{B_2\;B_5}\right)\right.\right. \\
& - \left[\!\!\left[\overset{a1\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;an}{A_1\ldots A_{n-3}B_1B_3B_5}\right)\cdot\left[\!\!\left[\overset{b1\;\;b2}{B_2\;B_4}\right)\right.\right. \\
& + \left[\!\!\left[\overset{a1\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;an}{A_1\ldots A_{n-3}B_1B_4B_5}\right)\cdot\left[\!\!\left[\overset{b1\;\;b2}{B_2\;B_3}\right)\right.\right. \\
& - \left[\!\!\left[\overset{a1\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;an}{A_1\ldots A_{n-3}B_2B_3B_4}\right)\cdot\left[\!\!\left[\overset{b1\;\;b2}{B_1\;B_5}\right)\right.\right. \\
& + \left[\!\!\left[\overset{a1\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;an}{A_1\ldots A_{n-3}B_2B_3B_5}\right)\cdot\left[\!\!\left[\overset{b1\;\;b2}{B_1\;B_4}\right)\right.\right. \\
& - \left[\!\!\left[\overset{a1\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;an}{A_1\ldots A_{n-3}B_2B_4B_5}\right)\cdot\left[\!\!\left[\overset{b1\;\;b2}{B_1\;B_3}\right)\right.\right. \\
& + \left[\!\!\left[\overset{a1\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;an}{A_1\ldots A_{n-3}B_3B_4B_5}\right)\cdot\left[\!\!\left[\overset{b1\;\;b2}{B_1\;B_2}\right)\right.\right.
\end{aligned}$$

Diese Reihe ist allgemeiner, als die Reihe 534, welche entsteht, wenn $q = 1$ gesetzt wird. Das Geschäft der Umformung besteht in einem Zerlegen und einem Wiedervereinigen; es wird nämlich die erstere Summe nach der Gleichung 525 in niedere Summen zerlegt, so dass die Elemente A von den Elementen B getrennt in verschiedenen Summen vorkommen

$$\left[\overset{a_1}{A}_1\ldots\ldots A_{n-q}B'_1\ldots\ldots\overset{a_n}{B'}_q\right)=\Sigma(-)^*\left[\overset{a'_1}{A}_1\ldots\ldots\overset{a'_{(n-q)}}{A}_{n-q}\right)\cdot\left[\overset{a'_{(n-q+1)}}{B}_1\ldots\ldots\overset{a'_n}{B}_q\right)$$

wo der Strich über a dasselbe, was vorhin bei B, bedeutet; hierdurch zerfällt die vorgegebene Reihe in folgende

$$R=\Sigma\,\Sigma(-)^*\left[\overset{a'_1}{A}_1\ldots\ldots\overset{a'_{(n-q)}}{A}_{n-q}\right)\cdot\left[\overset{a'_{(n-q+1)}}{B'}_1\ldots\ldots\overset{a'_n}{B'}_q\right)\cdot\left[\overset{b_1}{B'}_{q+1}\ldots\ldots\overset{b_{(m-q)}}{B'}_m\right)$$

wo die beiden Zeichen sich auf die geordneten Verbindungen ohne Wiederholungen der Elemente a und auch der Elemente B beziehen.

Die letzteren werden wieder nach der Gleichung 526 in eine Summe vereinigt

$$\Sigma(-)^*\left[\overset{a_{(n-q+1)}}{B'}_1\ldots\ldots\overset{a_n}{B'}_q\right)\cdot\left[\overset{b_1}{B'}_{q+1}\ldots\ldots\overset{b_{(m-q)}}{B'}_m\right)=\left[\overset{a_{(n-q+1)}\ldots a_n,\,b_1\ldots}{B_1}\ldots\ldots\overset{b_{(m-q)}}{B}_m\right)$$

wodurch die Gleichung entsteht

$$535)\quad \Sigma(-)^*\left[\overset{a_1}{A}_1\ldots A_{n-q}B'_1\ldots\ldots\overset{a_n}{B'}_q\right)\cdot\left[\overset{b_1}{B'}_{q+1}\ldots\ldots\overset{b_{(m-q)}}{B'}_m\right)=$$

$$=\Sigma(-)^*\left[\overset{a'_1}{A}_1\ldots\ldots\overset{a'_{(n-q)}}{A}_{n-q}\right)\cdot\left[\overset{a'_{(n-q+1)}\ldots a'_n\;b_1\ldots}{B_1}\ldots\ldots\overset{b_{(m-q)}}{B}_m\right)$$

welche die Gleichheit zweier Reihen angiebt, die verschieden gebildet sind; in der ersten sind nämlich die Elemente a und b und in der zweiten die Elemente A und B durch verschiedene Summen getrennt; in der ersten werden aus den Elementen B und in der zweiten aus den Elementen a die geordneten Verbindungen ohne Wiederholungen gebildet.

Ist z. B $n=5$, $q=3$ und $m=6$, so ist

$$\Sigma(-)^*\left[\overset{a_1}{A}_1\overset{a_2}{A}_2\overset{a_3}{B'}_1\overset{a_4}{B'}_2\overset{a_5}{B'}_3\right)\cdot\left[\overset{b_1}{B'}_4\overset{b_2}{B'}_5\overset{b_3}{B'}_6\right)=\Sigma(-)^*\left[\overset{a'_1}{A}_1\overset{a'_2}{A}_2\right)\cdot\left[\overset{a'_3}{B}_1\overset{a'_4}{B}_2\overset{a'_5}{B}_3\overset{b_1}{B}_4\overset{b_2}{B}_5\overset{b_3}{B}_6\right)$$

oder

$$\left[\overset{a_1}{A_1}\overset{a_2}{A_2}\overset{a_3}{B_1}\overset{a_4}{B_2}\overset{a_5}{B_3}\right)\cdot\left[\overset{b_1}{B_4}\overset{b_2}{B_5}\overset{b_3}{B_6}\right)=$$

$$-\left[\overset{a_1}{A_1}\overset{a_2}{A_2}\overset{a_3}{B_1}\overset{a_4}{B_2}\overset{a_5}{B_4}\right)\cdot\left[\overset{b_1}{B_3}\overset{b_2}{B_5}\overset{b_3}{B_6}\right)$$

$$+\left[\overset{a_1}{A_1}\overset{a_2}{A_2}\overset{a_3}{B_1}\overset{a_4}{B_2}\overset{a_5}{B_5}\right)\cdot\left[\overset{b_1}{B_3}\overset{b_2}{B_4}\overset{b_3}{B_6}\right)$$

$$-\left[\overset{a_1}{A_1}\overset{a_2}{A_2}\overset{a_3}{B_1}\overset{a_4}{B_2}\overset{a_5}{B_6}\right)\cdot\left[\overset{b_1}{B_3}\overset{b_2}{B_4}\overset{b_3}{B_5}\right)$$

$$+\left[\overset{a_1}{A_1}\overset{a_2}{A_2}\overset{a_3}{B_1}\overset{a_4}{B_3}\overset{a_5}{B_4}\right)\cdot\left[\overset{b_1}{B_2}\overset{b_2}{B_5}\overset{b_3}{B_6}\right)$$

$$-\left[\overset{a_1}{A_1}\overset{a_2}{A_2}\overset{a_3}{B_1}\overset{a_4}{B_3}\overset{a_5}{B_5}\right)\cdot\left[\overset{b_1}{B_2}\overset{b_2}{B_4}\overset{b_3}{B_6}\right)$$

$$+\left[\overset{a_1}{A_1}\overset{a_2}{A_2}\overset{a_3}{B_1}\overset{a_4}{B_3}\overset{a_5}{B_6}\right)\cdot\left[\overset{b_1}{B_2}\overset{b_2}{B_4}\overset{b_3}{B_5}\right)$$

$$+\left[\overset{a_1}{A_1}\overset{a_2}{A_2}\overset{a_3}{B_1}\overset{a_4}{B_4}\overset{a_5}{B_5}\right)\cdot\left[\overset{b_1}{B_2}\overset{b_2}{B_3}\overset{b_3}{B_6}\right)$$

$$-\left[\overset{a_1}{A_1}\overset{a_2}{A_2}\overset{a_3}{B_1}\overset{a_4}{B_4}\overset{a_5}{B_6}\right)\cdot\left[\overset{b_1}{B_2}\overset{b_2}{B_3}\overset{b_3}{B_5}\right)$$

$$+\left[\overset{a_1}{A_1}\overset{a_2}{A_2}\overset{a_3}{B_1}\overset{a_4}{B_5}\overset{a_5}{B_6}\right)\cdot\left[\overset{b_1}{B_2}\overset{b_2}{B_3}\overset{b_3}{B_4}\right)$$

$$-\left[\overset{a_1}{A_1}\overset{a_2}{A_2}\overset{a_3}{B_2}\overset{a_4}{B_3}\overset{a_5}{B_4}\right)\cdot\left[\overset{b_1}{B_1}\overset{b_2}{B_5}\overset{b_3}{B_6}\right)$$

$$+\left[\overset{a_1}{A_1}\overset{a_2}{A_2}\overset{a_3}{B_2}\overset{a_4}{B_3}\overset{a_5}{B_5}\right)\cdot\left[\overset{b_1}{B_1}\overset{b_2}{B_4}\overset{b_3}{B_6}\right)$$

$$-\left[\overset{a_1}{A_1}\overset{a_2}{A_2}\overset{a_3}{B_2}\overset{a_4}{B_3}\overset{a_5}{B_6}\right)\cdot\left[\overset{b_1}{B_1}\overset{b_2}{B_4}\overset{b_3}{B_5}\right)$$

$$-\left[\overset{a_1}{A_1}\overset{a_2}{A_2}\overset{a_3}{B_2}\overset{a_4}{B_4}\overset{a_5}{B_5}\right)\cdot\left[\overset{b_1}{B_1}\overset{b_2}{B_3}\overset{b_3}{B_6}\right)$$

$$\left[\overset{a_1}{A_1}\overset{a_2}{A_2}\right)\cdot\left[\overset{a_3}{B_1}\overset{a_4}{B_2}\overset{a_5}{B_3}\overset{b_1}{B_4}\overset{b_2}{B_5}\overset{b_3}{B_6}\right)$$

$$-\left[\overset{a_1}{A_1}\overset{a_3}{A_2}\right)\cdot\left[\overset{a_2}{B_1}\overset{a_4}{B_2}\overset{a_5}{B_3}\overset{b_1}{B_4}\overset{b_2}{B_5}\overset{b_3}{B_6}\right)$$

$$+\left[\overset{a_1}{A_1}\overset{a_4}{A_2}\right)\cdot\left[\overset{a_2}{B_1}\overset{a_3}{B_2}\overset{a_5}{B_3}\overset{b_1}{B_4}\overset{b_2}{B_5}\overset{b_3}{B_6}\right)$$

$$-\left[\overset{a_1}{A_1}\overset{a_5}{A_2}\right)\cdot\left[\overset{a_2}{B_1}\overset{a_3}{B_2}\overset{a_4}{B_3}\overset{b_1}{B_4}\overset{b_2}{B_5}\overset{b_3}{B_6}\right)$$

$$+\left[\overset{a_2}{A_1}\overset{a_3}{A_2}\right)\cdot\left[\overset{a_1}{B_1}\overset{a_4}{B_2}\overset{a_5}{B_3}\overset{b_1}{B_4}\overset{b_2}{B_5}\overset{b_3}{B_6}\right)$$

$$-\left[\overset{a_2}{A_1}\overset{a_4}{A_2}\right)\cdot\left[\overset{a_1}{B_1}\overset{a_3}{B_2}\overset{a_5}{B_3}\overset{b_1}{B_4}\overset{b_2}{B_5}\overset{b_3}{B_6}\right)$$

$$+\left[\overset{a_2}{A_1}\overset{a_5}{A_2}\right)\cdot\left[\overset{a_1}{B_1}\overset{a_3}{B_2}\overset{a_4}{B_3}\overset{b_1}{B_4}\overset{b_2}{B_5}\overset{b_3}{B_6}\right)$$

$$+\left[\overset{a_3}{A_1}\overset{a_4}{A_2}\right)\cdot\left[\overset{a_1}{B_1}\overset{a_2}{B_2}\overset{a_5}{B_3}\overset{b_1}{B_4}\overset{b_2}{B_5}\overset{b_3}{B_6}\right)$$

$$-\left[\overset{a_3}{A_1}\overset{a_5}{A_2}\right)\cdot\left[\overset{a_1}{B_1}\overset{a_2}{B_2}\overset{a_4}{B_3}\overset{b_1}{B_4}\overset{b_2}{B_5}\overset{b_3}{B_6}\right)$$

$$+\left[\overset{a_4}{A_1}\overset{a_5}{A_2}\right)\cdot\left[\overset{a_1}{B_1}\overset{a_2}{B_2}\overset{a_3}{B_3}\overset{b_1}{B_4}\overset{b_2}{B_5}\overset{b_3}{B_6}\right)$$

$$+\left[\overset{a1}{A_1}\,\overset{a2}{A_2}\,\overset{a3}{B_2}\,\overset{a4}{B_4}\,\overset{a5}{B_6}\right)\cdot\left[\overset{b1}{B_1}\,\overset{b2}{B_3}\,\overset{b3}{B_5}\right)$$

$$-\left[\overset{a1}{A_1}\,\overset{a2}{A_2}\,\overset{a3}{B_2}\,\overset{a4}{B_5}\,\overset{a5}{B_6}\right)\cdot\left[\overset{b1}{B_1}\,\overset{b2}{B_3}\,\overset{b3}{B_4}\right)$$

$$+\left[\overset{a1}{A_1}\,\overset{a2}{A_2}\,\overset{a3}{B_3}\,\overset{a4}{B_4}\,\overset{a5}{B_5}\right)\cdot\left[\overset{b1}{B_1}\,\overset{b2}{B_2}\,\overset{b3}{B_6}\right)$$

$$-\left[\overset{a1}{A_1}\,\overset{a2}{A_2}\,\overset{a3}{B_3}\,\overset{a4}{B_4}\,\overset{a5}{B_6}\right)\cdot\left[\overset{b1}{B_1}\,\overset{b2}{B_2}\,\overset{b3}{B_5}\right)$$

$$+\left[\overset{a1}{A_1}\,\overset{a2}{A_2}\,\overset{a3}{B_3}\,\overset{a4}{B_5}\,\overset{a5}{B_6}\right)\cdot\left[\overset{b1}{B_1}\,\overset{b2}{B_2}\,\overset{b3}{B_4}\right)$$

$$-\left[\overset{a1}{A_1}\,\overset{a2}{A_2}\,\overset{a3}{B_4}\,\overset{a4}{B_5}\,\overset{a5}{B_6}\right)\cdot\left[\overset{b1}{B_1}\,\overset{b2}{B_2}\,\overset{b3}{B_3}\right)$$

Diese Gleichung 535 enthält das höchste Gesetz für die Umwandlung und Summirung der Reihen bestehend aus Summen von Producten mit Versetzungen, und ist die Grundlage zu einer ganz neuen Untersuchung über die Theorie der Reihen im weitesten Sinne.

§. 147.

Wir wollen einige besondere Fälle von dieser allgemeinsten Wahrheit herausheben, welche durch die Gleichheit der Elemente veranlasst werden. Da nämlich jede Summe verschwindet, worin zwei gleiche Elemente vorkommen, so ist, wenn einige B den Elementen A gleich werden,

$$536)\quad \Sigma(-)^{*}\left[\overset{a1}{A_1}\ldots A_{p+s}\,B'_1\ldots\ldots\overset{a(p+s+q)}{B'_q}\right)\cdot\left[\overset{b1}{B'_{q+1}}\ldots\ldots B'_{q+k}\,A_1\ldots\ldots\overset{b(k+p)}{A_p}\right)=$$

$$=\Sigma(-)^{*}\left[\overset{a'1}{A_1}\;\ldots\ldots\;\overset{a(p+s)}{A_{p+s}}\right)\cdot\left[\overset{a'(p+s+1)}{B_1}\ldots\ldots\overset{a'(p+s+q)}{B_{q+k}}\,\overset{b1}{A_1}\ldots\ldots\overset{b(k+p)}{A_p}\right)$$

wo s jede ganze Zahl 0, 1, ... nur nicht verneint sein kann.

Und wenn einige a den b gleich werden

537) $$\Sigma(-)^*\left[\begin{matrix} b_1 & \ldots & b_p, a'_1 & \ldots & a'_q \\ A_1 & \ldots & \ldots & \ldots & A_{p+q}\end{matrix}\right)\cdot\left[\begin{matrix} a'_{(q+1)} & \ldots & a'_{(q+h)}, b_1 & \ldots & b_{(p+s)} \\ B_1 & \ldots & \ldots & \ldots & B_{p+s+h}\end{matrix}\right) =$$

$$= \Sigma(-)^*\left[\begin{matrix} b_1 & \ldots & b_p, a_1 & \ldots & \ldots & a_{(q+h)} \\ A_1 & \ldots & A_{p+q} & B'_1 & \ldots & B'_h\end{matrix}\right)\cdot\left[\begin{matrix} b_1 & \ldots & b_{(p+s)} \\ B'_{h+1} & \ldots & B'_{h+p+s}\end{matrix}\right)$$

wo s jede Zahl nur nicht verneint sein kann.

Findet beides statt, so ist

538) $$\Sigma(-)^*\left[\begin{matrix} b_1 & \ldots & b_h, a'_1 & \ldots & a'_{(p+s-h)} \\ A_1 & \ldots & \ldots & \ldots & A_{p+s}\end{matrix}\right)\cdot\left[\begin{matrix} a'_{(p+s-h+1)} & \ldots & a'_{(p+s-h+q)}, b_1 & \ldots & b_{(h+k)} \\ B_1 \,.\,.\, B_{h+k-p+q} & & A_1 & \ldots & A_p\end{matrix}\right)$$

$$= \Sigma(-)^*\left[\begin{matrix} b_1 & \ldots & b_h, a_1 & \ldots & a_{(p+s+q-h)} \\ A_1 & \ldots & A_{p+s} & B'_1 \ldots & B'_q\end{matrix}\right)\cdot\left[\begin{matrix} b_1 & \ldots & \ldots & \ldots & b_{(h+k)} \\ B'_{q+1} & \ldots & B'_{q+h+k-p} & A_1 \ldots & A_p\end{matrix}\right)$$

§. 148.

Ist k = 0, so erhalten wir aus 536 die Summe folgender Reihe:

539) $$\left[\begin{matrix} a_1 & \ldots & \ldots & \ldots & a_{(p+s+q)} \\ A_1 & \ldots & A_{p+s} & B_1 \ldots & B_q\end{matrix}\right)\cdot\left[\begin{matrix} b_1 & \ldots & b_p \\ A_1 & \ldots & A_p\end{matrix}\right) =$$

$$= \Sigma(-)^*\left[\begin{matrix} a'_1 & \ldots & a'_{(p+s)} \\ A_1 & \ldots & A_{p+s}\end{matrix}\right)\cdot\left[\begin{matrix} a'_{(p+s+1)} & \ldots & a'_{(p+s+q)}, b_1 & \ldots & b_p \\ B_1 & \ldots & B_q\; A_1 & \ldots & A_p\end{matrix}\right)$$

und ist q = 0, aus 537 die Summe folgender Reihe:

540) $$\left[\begin{matrix} b_1 & \ldots & b_p \\ A_1 & \ldots & A_p\end{matrix}\right)\cdot\left[\begin{matrix} a_1 & \ldots & a_h, b_1 & \ldots & b_{(p+s)} \\ B_1 & \ldots & \ldots & \ldots & B_{p+s+h}\end{matrix}\right) =$$

$$= \Sigma(-)^*\left[\begin{matrix} b_1 & \ldots & b_p, a_1 & \ldots & a_h \\ A_1 & \ldots & A_p & B'_1 \ldots & B'_h\end{matrix}\right)\cdot\left[\begin{matrix} b_1 & \ldots & b_{(p+s)} \\ B'_{h+1} & \ldots & B'_{h+p+s}\end{matrix}\right)$$

§. 149.

Ist q = 1, so geht die Reihe 539 in folgende über:

541) $$\left[\begin{matrix} a_1 & \ldots & \ldots & a_{(p+s+1)} \\ A_1 & \ldots & A_{p+s} & B_1\end{matrix}\right)\cdot\left[\begin{matrix} b_1 & \ldots & b_p \\ A_1 & \ldots & A_p\end{matrix}\right) =$$

$$= \Sigma(-)^*\left[\begin{matrix} a'_1 & \ldots & a'_{(p+s)} \\ A_1 & \ldots & A_{p+s}\end{matrix}\right)\cdot\left[\begin{matrix} a'_{(p+s+1)}, b_1 & \ldots & b_p \\ B_1\, A_1 & \ldots & A_p\end{matrix}\right)$$

welche immer verschwindet, wenn $B_1 = A_{p+1}$ oder $= A_{p+2} \ldots$ oder $= A_{p+s}$ ist, und ist $h = 1$, so entsteht aus 540 die Reihe

542) $$\Big[\!\Big[\overset{b_1}{A_1} \ldots\ldots\ldots \overset{b_p}{A_p} \Big) \cdot \Big[\!\Big[\overset{a,\, b_1}{B_1} \ldots\ldots\ldots \overset{b(p+s)}{B_{p+s+1}} \Big) =$$

$$= \Sigma(-)^* \Big[\!\Big[\overset{b_1}{A_1} \ldots\ldots \overset{b_p}{A_p} \overset{a}{B'_1} \Big) \cdot \Big[\!\Big[\overset{b_1}{B'_2} \ldots\ldots\ldots \overset{b(p+s)}{B'_{p+s+1}} \Big)$$

welche immer verschwindet, wenn $a = b_{p+1}$ oder $= b_{p+2} \ldots$ oder $= b_{p+s}$ ist.

Setzen wir daher in jener $B_1 = A_{p+1}$ und in dieser $a = b_{p+1}$, so wird

543) $$\Sigma(-)^* \Big[\!\Big[\overset{a'_1}{A_1} \ldots\ldots\ldots \overset{a'(p+s)}{A_{p+s}} \Big) \cdot \Big[\!\Big[\overset{a'(p+s+1),\, b_1}{A_1} \ldots\ldots\ldots\ldots \overset{b_p}{A_{p+1}} \Big) = 0$$

und

544) $$\Sigma(-)^* \Big[\!\Big[\overset{b_1}{A_1} \ldots\ldots A_p \overset{b(p+1)}{B'_1} \Big) \cdot \Big[\!\Big[\overset{b_1}{B'_2} \ldots\ldots\ldots \overset{b(p+s)}{B'_{p+s+1}} \Big) = 0$$

Wird in dieser Gleichung $s = 2$ gesetzt, so entsteht folgende:

545) $$\Sigma(-)^* \Big[\!\Big[\overset{b_1}{A_1} \ldots\ldots A_p \overset{b(p+1)}{B'_1} \Big) \cdot \Big[\!\Big[\overset{b_1}{B'_2} \overset{b_2}{B'_3} \ldots\ldots\ldots \overset{b(p+2)}{B'_{p+3}} \Big) = 0$$

wovon Desnanot einige ganz specielle Fälle gefunden hat, oder vielmehr der ganze Inhalt seiner Untersuchung ist in folgenden dreien Gleichungen begriffen

$$\Sigma(-)^* \Big[\!\Big[\overset{b_1}{A_1}\ \overset{b_2}{A_2}\ \overset{b_3}{B'_1} \Big) \cdot \Big[\!\Big[\overset{b_1}{B'_2} \overset{b_2}{B'_3} \overset{b_3}{B'_4} \overset{b_4}{B'_5} \Big) = 0 \qquad (\alpha$$

$$\Sigma(-)^* \Big[\!\Big[\overset{b_1}{A_1}\ \ \overset{b_2}{B'_1} \Big) \cdot \Big[\!\Big[\overset{b_1}{B'_2}\ \ \overset{b_2}{B'_3}\ \ \overset{b_3}{B'_4} \Big) = 0 \qquad (\beta$$

$$\Sigma(-)^* \quad \overset{b_1}{B'_1} \quad \Big[\!\Big[\overset{b_1}{B'_2} \overset{b_2}{B'_3} \overset{b_3}{B'_4} \overset{b_4}{B'_5} \Big) = 0 \qquad (\gamma$$

welche mit ermüdender Weitläufigkeit bewiesen sind; und zwar enthält α die sechs Gleichungen des ersten und zweiten Systems Seite 50, β

die sechs Gleichungen des dritten und vierten Systems und γ die vier Gleichungen des fünften Systems; dasselbe gilt auch von den Gleichungen mit fünf und sechs Elementen, welche sämmtlich in der obigen 545 enthalten sind.

§. 150.

Gehen wir zu dem ganz einfachen Falle über, wo unter den unteren Elementen nur drei veränderlich sind, und setzen $s = 2$, $B_4 = A_1$, $B_5 = A_2$, ... , so wird

546) $$\Sigma(-)^* \left\| \overset{b_1}{A_1} \ldots\ldots\ldots A_p \overset{b(p+1)}{B'_1} \right) \cdot \left\| \overset{b_1}{B'_2} B'_3 A_1 \ldots\ldots \overset{b(p+2)}{A_p} \right) = 0$$

worin die drei Elemente B_1, B_2, B_3 veränderlich sind, oder aus diesen dreien Elementen die geordneten Verbindungen ohne Wiederholungen gebildet werden müssen, nämlich

547) $$\left\| \overset{b_1}{A_1} \ldots\ldots\ldots A_p \overset{b(p+1)}{B_1} \right) \cdot \left\| \overset{b_1}{B_2} B_3 A_1 \ldots\ldots\ldots\ldots \overset{b(p+2)}{A_p} \right)$$
$$- \left\| \overset{b_1}{A_1} \ldots\ldots\ldots A_p \overset{b(p+1)}{B_2} \right) \cdot \left\| \overset{b_1}{B_1} B_3 A_1 \ldots\ldots\ldots\ldots \overset{b(p+2)}{A_p} \right)$$
$$+ \left\| \overset{b_1}{A_1} \ldots\ldots\ldots A_p \overset{b(p+1)}{B_3} \right) \cdot \left\| \overset{b_1}{B_1} B_2 A_1 \ldots\ldots\ldots\ldots \overset{b(p+2)}{A_p} \right) = 0$$

Es ist gleichgültig, welche Elemente veränderlich angenommen werden, und es ist eben so

$$\Sigma(-)^* \left\| \overset{a_1}{A_1} \ldots A_{n-1} A'_n A_{n+1} \ldots\ldots \overset{a(n+m)}{A_{n+m}} \right) \cdot \left\| \overset{a_1}{A_1} \ldots A_{n-1} A_{n+1} \ldots A_{n+m} A'_{n+m+1} \overset{a(n+m+1)}{B'} \right) = 0$$

worin A_n, A_{n+m+1}, B, mit einem Striche versehen, veränderlich sind, und in deren Rücksicht die Zeichen + und - bestimmt werden müssen; es ist nämlich

$$\left[\overset{a1}{A_1} \ldots A_{n-1} A_n A_{n+1} \ldots \overset{a(n+m)}{A_{n+m}}\right) \cdot \left[\overset{a1}{A_1} \ldots A_{n-1} A_{n+1} \ldots A_{n+m} A_{n+m+1} \overset{a(n+m+1)}{B}\right)$$

$$-\left[\overset{a1}{A_1} \ldots A_{n-1} A_{n+m+1} A_{n+1} \ldots \overset{a(n+m)}{A_{n+m}}\right) \cdot \left[\overset{a1}{A_1} \ldots A_{n-1} A_{n+1} \ldots A_{n+m} A_n \overset{a(n+m+1)}{B}\right)$$

$$+\left[\overset{a1}{A_1} \ldots A_{n-1}\, B\, A_{n+1} \ldots \overset{a(n+m)}{A_{n+m}}\right) \cdot \left[\overset{a1}{A_1} \ldots A_{n-1} A_{n+1} \ldots A_{n+m} A_n \overset{a(n+m+1)}{A_{n+m+1}}\right) = 0$$

oder, wenn die Elemente auf andere Stellen versetzt werden,

$$548)\ \left[\overset{a1}{A_1} \ldots \ldots \overset{a(n+m)}{A_{n+m}}\right) \cdot \left[\overset{a1}{A_1} \ldots A_{n-1} A_{n+1} \ldots A_{n+m+1} \overset{a(n+m+1)}{B}\right)$$

$$-\left[\overset{a1}{A_1} \ldots A_{n-1} A_{n+1} \ldots \overset{a(n+m)}{A_{n+m+1}}\right) \cdot \left[\overset{a1}{A_1} \ldots \ldots A_{n+m} \overset{a(n+m+1)}{B}\right)$$

$$+\left[\overset{a1}{A_1} \ldots A_{n-1} A_{n+1} \ldots A_{n+m} \overset{a(n+m)}{B}\right) \cdot \left[\overset{a1}{A_1} \ldots \ldots \overset{a(n+m+1)}{A_{n+m+1}}\right) = 0$$

§. 151.

Eben so ergibt sich aus der Gleichung 543, dass

$$549)\ \left[\overset{b1}{A_1} \ldots \ldots \overset{bp}{A_p} \overset{a1}{A_{p+1}} \overset{a2}{A_{p+2}}\right) \cdot \left[\overset{a3}{A_1} \overset{b1}{A_2} \ldots \ldots \overset{bp}{A_{p+1}}\right)$$

$$-\left[\overset{b1}{A_1} \ldots \ldots \overset{bp}{A_p} \overset{a1}{A_{p+1}} \overset{a3}{A_{p+2}}\right) \cdot \left[\overset{a2}{A_1} \overset{b1}{A_2} \ldots \ldots \overset{bp}{A_{p+1}}\right)$$

$$+\left[\overset{b1}{A_1} \ldots \ldots \overset{bp}{A_p} \overset{a2}{A_{p+1}} \overset{a3}{A_{p+2}}\right) \cdot \left[\overset{a1}{A_1} \overset{b1}{A_2} \ldots \ldots \overset{bp}{A_{p+1}}\right) = 0$$

und aus dieser Gleichung folgende

$$550)\quad \left\Vert \begin{matrix} a1 \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;. & a(n+m) \\ A_1 \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;. & A_{n+m} \end{matrix} \right) \cdot \left\Vert \begin{matrix} a1 \ldots a(n-1), a(n+1) \ldots a(n+m+1), b & \\ A_1 \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;. & A_{n+m+1} \end{matrix} \right)$$

$$- \left\Vert \begin{matrix} a1 \ldots a(n-1), a(n+1) \;.\;.\;.\;. & a(n+m+1) \\ A_1 \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;. & A_{n+m} \end{matrix} \right) \cdot \left\Vert \begin{matrix} a1 \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;. & a(n+m), b \\ A_1 \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;. & A_{n+m+1} \end{matrix} \right)$$

$$+ \left\Vert \begin{matrix} a1 \ldots a(n-1), a(n+1), \ldots a(n+m), b & \\ A_1 \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;. & A_{n+m} \end{matrix} \right) \cdot \left\Vert \begin{matrix} a1 \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;. & a(n+m+1) \\ A_1 \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;. & A_{n+m+1} \end{matrix} \right) = 0$$

III. Uebertragen der Producte mit Versetzungen in andere Producte, wenn die Elemente durch Gleichungen gegeben sind.

§. 152.

Wenn die Elemente, aus welchen die Producte mit Versetzungen gebildet werden, nicht unabhängig von einander, und ihre gegenseitigen Beziehungen durch Gleichungen bestimmt sind, so kann durch Hülfe der früher gefundenen Wahrheiten die Summe der Producte mit Versetzungen aus bestimmten Elementen auf Summen der Producte aus andern Elementen übertragen werden. Es sei z. B.

551) $$\begin{array}{l} X_0 A_0^{(0)} + X_1 A_1^{(0)} + X_2 A_2^{(0)} + \ldots + X_n A_n^{(0)} = B^{(0)} \\ X_0 A_0^{(1)} + X_1 A_1^{(1)} + X_2 A_2^{(1)} + \ldots + X_n A_n^{(1)} = B^{(1)} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ X_0 A_0^{(n)} + X_1 A_1^{(n)} + X_2 A_2^{(n)} + \ldots + X_n A_n^{(n)} = B^{(n)} \end{array}$$

Werden diese Gleichungen nach ihrer Folge mit

$$\begin{array}{l} (-)^n \left[A_0^{(1)} \; A_1^{(2)} \ldots A_{q-1}^{(q)} \; A_{q+1}^{(q+1)} \ldots A_n^{(n)} \right) \\ (-)^{n-1} \left[A_0^{(0)} \; A_1^{(2)} \ldots A_{q-1}^{(q)} \; A_{q+1}^{(q+1)} \ldots A_n^{(n)} \right) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ (-)^0 \left[A_0^{(0)} \; A_1^{(1)} \ldots A_{q-1}^{(q-1)} \; A_{q+1}^{(q)} \ldots A_n^{(n-1)} \right) \end{array}$$

vervielfacht, und alle Gleichungen zusammengezählt, und wird nach 515

$$(-)^n \left\| A_0^{(1)} A_1^{(2)} \ldots A_{q-1}^{(q)} A_{q+1}^{(q+1)} \ldots A_n^{(n)} \right) . A_s^{(0)}$$

$$(-)^{n-1} \left\| A_0^{(0)} A_1^{(2)} \ldots A_{q-1}^{(q)} A_{q+1}^{(q+1)} \ldots A_n^{(n)} \right) . A_s^{(1)}$$

. . . .

$$(-)^0 \left\| A_0^{(0)} A_1^{(1)} \ldots A_{q-1}^{(q-1)} A_{q+1}^{(q)} \ldots A_n^{(n-1)} \right) . A_s^{(n)} = \left\| A_0^{(0)} A_1^{(1)} \ldots A_{q-1}^{(q-1)} A_{q+1}^{(q)} \ldots A_n^{(n-1)} A_s^{(n)} \right)$$

$$(-)^n \left\| A_0^{(1)} A_1^{(2)} \ldots A_{q-1}^{(q)} A_{q+1}^{(q+1)} \ldots A_n^{(n)} \right) . B^{(0)}$$

$$(-)^{n-1} \left\| A_0^{(0)} A_1^{(2)} \ldots A_{q-1}^{(q)} A_{q+1}^{(q+1)} \ldots A_n^{(n)} \right) . B^{(1)}$$

. . . .

$$(-)^0 \left\| A_0^{(0)} A_1^{(1)} \ldots A_{q-1}^{(q-1)} A_{q+1}^{(q)} \ldots A_n^{(n-1)} \right) . B^{(n)} = \left\| A_0^{(0)} A_1^{(1)} \ldots A_{q-1}^{(q-1)} A_{q+1}^{(q)} \ldots A_n^{(n-1)} B^{(n)} \right)$$

und $s = 0, 1, 2, \ldots, n$ gesetzt, so verschwinden nach 532 alle Scheitelreihen, nur jene nicht, wo $s = q$ ist, deren Summe

$$\left\| A_0^{(0)} \; A_1^{(1)} \ldots . A_{q-1}^{(q-1)} \; A_{q+1}^{(q)} \ldots . A_n^{(n-1)} \; A_q^{(n)} \right) = (-)^{n-q} \left\| A_0^{(0)} \; A_1^{(1)} \ldots\ldots . A_n^{(n)} \right)$$

und es entsteht die Gleichung

$$552) \quad (-)^{n-q} \, X_q \, . \left\| A_0^{(0)} A_1^{(1)} \ldots . A_n^{(n)} \right) = \left\| A_0^{(0)} A_1^{(1)} \ldots A_{q-1}^{(q-1)} A_{q+1}^{(q)} \ldots . A_n^{(n-1)} B^{(n)} \right)$$

welche zeigt, wie die Summe von Producten aus bestimmten Elementen in Summen von Producten aus andern Elementen übertragen werden kann.

§. 153.

Sind die Gleichungen

$$553)\qquad \begin{array}{l} X_0 A_0^{(0)} + X_1 A_1^{(0)} + X_2 A_2^{(0)} + \ldots\ldots + X_n A_n^{(0)} = 0 \\ X_0 A_0^{(1)} + X_1 A_1^{(1)} + X_2 A_2^{(1)} + \ldots\ldots + X_n A_n^{(1)} = 0 \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ X_0 A_0^{(n-1)} + X_1 A_1^{(n-1)} + X_2 A_2^{(n-1)} + \ldots\ldots + X_n A_n^{(n-1)} = 0 \end{array}$$

gegeben, so findet zum Uebertragen einer Summe in eine andere folgende Gleichung statt:

$$554)\quad (-)^q\, X_q \cdot \llbracket A_0^{(0)}\, A_1^{(1)} \ldots\ldots A_{n-1}^{(n-1)} \big\} = (-)^n\, X_n \cdot \llbracket A_0^{(0)}\, A_1^{(1)} \ldots\ldots A_{q-1}^{(q-1)} A_{q+1}^{(q)} \ldots\ldots A_n^{(n-1)} \big)$$

IV. Auflösung der Producte mit Versetzungen, in welchen einige Factoren verschwinden, in Producte bestehend in gedoppelten Verbindungen.

§. 154.

Die Producte mit Versetzungen lassen sich immer in Producte mit gedoppelten Verbindungen auflösen, wenn diejenigen Factoren, deren obere Stellenzahlen grösser als die unteren sind, verschwinden, oder, wenn

555) $$A_p^{(p+1)} = A_p^{(p+2)} = A_p^{(p+3)} = \ldots . = 0$$

Zuerst bemerken wir in dieser Hinsicht, dass

556) $$\left[\!\!\left[A_1^{(1)} \;.\; A_2^{(2)} \ldots\ldots A_n^{(n)} \right) = A_1^{(1)} \,.\, A_2^{(2)} \,.\, A_3^{(3)} \ldots . A_n^{(n)}\right.$$

denn in allen folgenden Producten ist wenigstens die obere Stellenzahl eines Factors grösser als die untere.

Ferner ist nach 515

$$\left[\!\!\left[A_{n+p}^{(n)} \,.\, A_{n+p+1}^{(n+p)} \,.\, A_{n+p+2}^{(n+p+1)} \ldots . A_{n+m+1}^{(n+m)} \right) = \left[\!\!\left[A_{n+p+1}^{(n+p)} \,.\, A_{n+p+2}^{(n+p+1)} \ldots . A_{n+m+1}^{(n+m)} \right) \,.\, A_{n+p}^{(n)}\right.\right.$$
$$- \left[\!\!\left[A_{n+p+1}^{(n)} \,.\, A_{n+p+2}^{(n+p+1)} \ldots . A_{n+m+1}^{(n+m)} \right) \,.\, A_{n+p}^{(n+p)}\right.$$

denn die folgenden Producte verschwinden, weil

$$A_{n+p}^{(n+p+1)} = A_{n+p}^{(n+p+2)} = \ldots = 0$$

Wir messen die vorstehende Gleichung durch das Product

$$A_n^{(n)} \;.\; A_{n+p}^{(n+p)} \,.\, A_{n+p+1}^{(n+p+1)} \;\ldots .\; A_{n+m}^{(n+m)}$$

setzen zugleich

$$\frac{A_{n+s}^{(n)}}{A_n^{(n)}} = D_{n+s}^{(n)}$$

und

$$\frac{\Big[\!\Big| A_{n+p}^{(n)} \cdot A_{n+p+1}^{(n+p)} \cdot A_{n+p+2}^{(n+p+1)} \cdot \cdot \cdot \cdot A_{n+m+1}^{(n+m)} \Big)}{A_n^{(n)} \cdot A_{n+p}^{(n+p)} \cdot A_{n+p+1}^{(n+p+1)} \cdot \cdot \cdot \cdot A_{n+m}^{(n+m)}} = (n, n+p, n+m+1)$$

Wir erhalten hierdurch folgende:

557) $(n, n+p, n+m+1) = (n+p, n+p+1, n+m+1) \cdot D_{n+p}^{(n)} - (n, n+p+1, n+m+1)$

Wird in dieser Gleichung $p = 1, 2, 3, \ldots, m$ gesetzt,

$$\begin{aligned}
(n, n+1, n+m+1) &= (n+1, n+2, n+m+1) \cdot D_{n+1}^{(n)} - (n, n+2, n+m+1)\\
-(n, n+2, n+m+1) &= -(n+2, n+3, n+m+1) \cdot D_{n+2}^{(n)} + (n, n+3, n+m+1)\\
+(n, n+3, n+m+1) &= +(n+3, n+4, n+m+1) \cdot D_{n+3}^{(n)} - (n, n+4, n+m+1)\\
&\cdot\ \cdot\\
(-)^{m-1}(n, n+m, n+m+1) &= (-)^{m-1}(n+m, n+m+1, n+m+1) \cdot D_{n+m}^{(n)} + (-)^m D_{n+m+1}^{(n)}
\end{aligned}$$

und werden alle diese Gleichungen zusammengezählt, so entsteht die Gleichung

$$\begin{aligned}
558)\qquad 0 = \;& (n, n+1, n+m+1)\\
& -(n+1, n+2, n+m+1) \cdot D_{n+1}^{(n)}\\
& +(n+2, n+3, n+m+1) \cdot D_{n+2}^{(n)}\\
& - \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\\
& (-)^m (n+m, n+m+1, n+m+1) \cdot D_{n+m}^{(n)}\\
& \qquad\qquad (-)^{m+1} D_{n+m+1}^{(n)}
\end{aligned}$$

oder, wenn

$$(n+p, n+p+1, n+m+1) = L_{n+p}^{(n+m+1)}$$

gesetzt wird, die Gleichung

559) $L_n^{(n+m+1)} - L_{n+1}^{(n+m+1)} \cdot D_{n+1}^{(n)} + L_{n+2}^{(n+m+1)} \cdot D_{n+2}^{(n)} - \ldots$

$$\ldots (-)^m L_{n+m}^{(n+m+1)} \cdot D_{n+m}^{(n)} + (-)^{m+1} D_{n+m+1}^{(n)} = 0$$

Mit dieser ist nach 494 auch immer folgende verbunden:

$$560)\quad D^{(n)}_{n+m+1} - D^{(n+1)}_{n+m+1} \cdot L^{(n+1)}_{n} + D^{(n+2)}_{n+m+1} \cdot L^{(n+2)}_{n} - \ldots . \\ \ldots . (-)^{m} D^{(n+m)}_{n+m+1} \cdot L^{(n+m)}_{n} + (-)^{m+1} L^{(n+m+1)}_{n} = 0$$

Diese beiden Gleichungen gehören zu denjenigen, welche gedoppelte Verbindungen erzeugen; nach ihnen ist

$$L^{(n+1)}_{n} = D^{(n)}_{n+1}$$

$$L^{(n+2)}_{n} = - D^{(n)}_{n+2} + D^{(n)}_{n+1} \cdot D^{(n+1)}_{n+2}$$

$$L^{(n+3)}_{n} = + D^{(n)}_{n+3} - D^{(n)}_{n+1} \cdot D^{(n+1)}_{n+3} + D^{(n)}_{n+1} \cdot D^{(n+1)}_{n+2} \cdot D^{(n+2)}_{n+3} \\ - D^{(n)}_{n+2} \cdot D^{(n+2)}_{n+3}$$

$$L^{(n+4)}_{n} = - D^{(n)}_{n+4} + D^{(n)}_{n+1} \cdot D^{(n+1)}_{n+4} - D^{(n)}_{n+1} \cdot D^{(n+1)}_{n+2} \cdot D^{(n+2)}_{n+4} + D^{(n)}_{n+1} \cdot D^{(n+1)}_{n+2} \cdot D^{(n+2)}_{n+3} \cdot D^{(n+3)}_{n+4} \\ + D^{(n)}_{n+2} \cdot D^{(n+2)}_{n+4} - D^{(n)}_{n+1} \cdot D^{(n+1)}_{n+3} \cdot D^{(n+3)}_{n+4} \\ + D^{(n)}_{n+3} \cdot D^{(n+3)}_{n+4} - D^{(n)}_{n+2} \cdot D^{(n+2)}_{n+3} \cdot D^{(n+3)}_{n+4}$$

u. s. w. und allgemein

$$561)\quad \frac{\big[\!\big|\, A^{(n)}_{n+1} \cdot A^{(n+1)}_{n+2} \cdot A^{(n+2)}_{n+3} \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot A^{(n+m)}_{n+m+1} \big)}{A^{(n)}_{n} \cdot A^{(n+1)}_{n+1} \cdot A^{(n+2)}_{n+2} \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot A^{(n+m)}_{n+m}} = D\left({}'n,(n+1,n+2,\ldots.,n+m),{}^{(m)}n+m+1\right), \\ - D\left({}'n,(n+1,n+2,\ldots,n+m),{}^{(m-1)}n+m+1\right), \\ + D\left({}'n,(n+1,n+2,\ldots,n+m),{}^{(m-2)}n+m+1\right), \\ - \;.\;.\;.\;.\;.\; + \;.\;.\;.\;.\;. \\ (-)^{m} D\left({}'n,(n+1,n+2,\ldots,n+m),{}^{(0)}\quad n+m+1\right),$$

wo

$$\frac{A^{(n)}_{n+s}}{A^{(n)}_{n}} = D^{(n)}_{n+s}$$

Diese Gleichung zeigt, dass, wenn die obere Stellenzahl eines Factors nicht grösser als die untere sein darf, die Producte mit Versetzungen immer in Producte übergehen, deren obere und untere Stellenzahlen geordnete Verbindungen ohne Wiederholungen sind.

§. 155.

Wenn aber die unteren Stellenzahlen nicht grösser als die oberen sein dürfen, oder wenn

562) $$A_p^{(p-1)} = A_p^{(p-2)} = \ldots\ldots = 0$$

so findet man auf gleiche Weise, dass

563) $$\frac{\Big[\!\Big| A_n^{(n+1)} \cdot A_{n+1}^{(n+2)} \cdot A_{n+2}^{(n+3)} \ldots\ldots A_{n+m}^{(n+m+1)} \Big)}{A_n^{(n)} \cdot A_{n+1}^{(n+1)} \cdot A_{n+2}^{(n+2)} \ldots\ldots A_{n+m}^{(n+m)}} = E\Big(_{,}\, n, (n+1, n+2, \ldots, n+m),^{(m)} n+m+1\Big)'$$

$$- E\Big(_{,}\, n, (n+1, n+2, \ldots, n+m),^{(m-1)} n+m+1\Big)'$$

$$+ E\Big(_{,}\, n, (n+1, n+2, \ldots, n+m),^{(m-2)} n+m+1\Big)'$$

$$- \;.\;.\;.\;.\;.\; + \;.\;.\;.\;.\;.\;.$$

$$(-)^m E\Big(_{,}\, n, (n+1, n+2, \ldots, n+m),^{(0)} n+m+1\Big)'$$

wo

564) $$E_n^{(n+s)} = \frac{A_n^{(n+s)}}{A_n^{(n)}}$$

V. Entwickelung eines Bruches, dessen Zähler und Nenner Summen von Producten mit Versetzungen aus unendlich vielen Elementen sind, oder Entwickelung des Bruches

$$\frac{\Big[\overset{a1}{B}\;\overset{a2}{A_1}\;\overset{\cdots\cdots}{\cdots\cdots}\;A_{n-1}\;A_{n+1}\;\overset{\cdots\cdots}{\cdots\cdots}\;\overset{a\infty}{A_\infty}\Big)}{\Big[\overset{a1}{A_1}\overset{a2}{A_2}\;\overset{\cdots\cdots\cdots\cdots}{\cdots\cdots\cdots\cdots}\;\overset{a\infty}{A_\infty}\Big)}$$

in eine unendliche Reihe.

§. 156.

Wir beschliessen die allgemeine Theorie der Producte aus Factoren mit Versetzungen mit einem Probleme, welches hier zuerst vorgelegt wird, und von dessen Auflösung die allgemeine Theorie der Reihen ganz abhängt. Die obige Untersuchung setzt uns in den Stand, dieses Problem vollständig zu lösen.

Wir messen die Gleichung 548 durch das Product

$$\Big[\overset{a1}{A_1}\;\overset{\cdots\cdots}{\cdots\cdots}\;\overset{a(n+m)}{A_{n+m}}\Big)\cdot\Big[\overset{a1}{A_1}\;\overset{\cdots\cdots\cdots}{\cdots\cdots\cdots}\;\overset{a(n+m+1)}{A_{n+m+1}}\Big)$$

und erhalten die Gleichung

565) $$\frac{\left\|\begin{matrix} a_1 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots a_{(n+m+1)} \\ A_1 \cdots A_{n-1}\, A_{n+1} \cdots A_{n+m+1}\, B \end{matrix}\right)}{\left\|\begin{matrix} a_1 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots a_{(n+m+1)} \\ A_1 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots A_{n+m+1} \end{matrix}\right)} - \frac{\left\|\begin{matrix} a_1 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots a_{(n+m)} \\ A_1 \ldots\ldots A_{n-1}\, A_{n+1} \ldots\ldots A_{n+m+1} \end{matrix}\right)}{\left\|\begin{matrix} a_1 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots a_{(n+m)} \\ A_1 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots A_{n+m} \end{matrix}\right)} \cdot \frac{\left\|\begin{matrix} a_1 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots a_{(n+m+1)} \\ A_1 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots A_{n+m} B \end{matrix}\right)}{\left\|\begin{matrix} a_1 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots a_{(n+m+1)} \\ A_1 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots A_{n+m+1} \end{matrix}\right)} + \frac{\left\|\begin{matrix} a_1 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots a_{(n+m)} \\ A_1 \cdots A_{n-1} A_{n+1} \cdots A_{n+m}\, B \end{matrix}\right)}{\left\|\begin{matrix} a_1 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots a_{(n+m)} \\ A_1 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots A_{n+m} \end{matrix}\right)} = 0$$

oder, wenn wir wegen der Kürze den ersten Theil dieser Gleichung mit $f(m+1)$, den zweiten mit $g(m)$ und den dritten mit $f(m)$ bezeichnen, die Gleichung

$$f(m+1) - g(m) + f(m) = 0$$

Nach dieser Gleichung bilden wir durch die verschiedenen Werthe von m mehrere Gleichungen:

$$\begin{aligned} f(1) - g(0) + f(0) &= 0 \\ - f(2) + g(1) - f(1) &= 0 \\ + f(3) - g(2) + f(2) &= 0 \\ - f(4) + g(3) - f(3) &= 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ (-)^m f(m+1) + (-)^{m-1} g(m) + (-)^m f(m) &= 0 \end{aligned}$$

und erhalten durch Zuzählen dieser Gleichungen folgende Reihe:

$$(-)^m f(m+1) = - f(0) + g(0) - g(1) + g(2) - g(3) + \ldots - \ldots (-)^m\, g(m)$$

oder da

$$(-)^m f(m+1) = (-)^n \frac{\left\|\begin{matrix} a_1 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots a_{(n+m+1)} \\ B\, A_1 \cdots A_{n-1}\, A_{n+1} \cdots A_{n+m+1} \end{matrix}\right)}{\left\|\begin{matrix} a_1 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots a_{(n+m+1)} \\ A_1 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots A_{n+m+1} \end{matrix}\right)}$$

folgende Reihe:

$$566)\qquad (-)^{n+1}\frac{\left[\begin{matrix} a1 \cdots\cdots\cdots\cdots a(n+m+1) \\ B\, A_1 \cdots\cdots A_{n-1}\ A_{n+1} \cdots\cdots A_{n+m+1}\end{matrix}\right)}{\left[\begin{matrix} a1 \cdots\cdots\cdots\cdots a(n+m+1) \\ A_1 \cdots\cdots\cdots\cdots A_{n+m+1}\end{matrix}\right)}$$

$$= \frac{\left[\begin{matrix} a1 \cdots\cdots\cdots a(n-1) \\ A_1 \cdots\cdots\cdots A_{n-1}\end{matrix}\right)}{\left[\begin{matrix} a1 \cdots\cdots\cdots a(n-1) \\ A_1 \cdots\cdots\cdots A_{n-1}\end{matrix}\right)} \cdot \frac{\left[\begin{matrix} a1 \cdots\cdots\cdots an \\ A_1 \cdots\cdots\cdots A_{n-1} B\end{matrix}\right)}{\left[\begin{matrix} a1 \cdots\cdots\cdots an \\ A_1 \cdots\cdots\cdots A_n\end{matrix}\right)}$$

$$- \frac{\left[\begin{matrix} a1 \cdots\cdots\cdots an \\ A_1 \cdots\cdots A_{n-1}\ A_{n+1}\end{matrix}\right)}{\left[\begin{matrix} a1 \cdots\cdots\cdots an \\ A_1 \cdots\cdots\cdots A_n\end{matrix}\right)} \cdot \frac{\left[\begin{matrix} a1 \cdots\cdots\cdots a(n+1) \\ A_1 \cdots\cdots\cdots A_n B\end{matrix}\right)}{\left[\begin{matrix} a1 \cdots\cdots\cdots a(n+1) \\ A_1 \cdots\cdots\cdots A_{n+1}\end{matrix}\right)}$$

$$+ \frac{\left[\begin{matrix} a1 \cdots\cdots\cdots a(n+1) \\ A_1 \cdots\cdots A_{n-1}\ A_{n+1}\ A_{n+2}\end{matrix}\right)}{\left[\begin{matrix} a1 \cdots\cdots\cdots a(n+1) \\ A_1 \cdots\cdots\cdots A_{n+1}\end{matrix}\right)} \cdot \frac{\left[\begin{matrix} a1 \cdots\cdots\cdots a(n+2) \\ A_1 \cdots\cdots\cdots A_{n+1} B\end{matrix}\right)}{\left[\begin{matrix} a1 \cdots\cdots\cdots a(n+2) \\ A_1 \cdots\cdots\cdots A_{n+2}\end{matrix}\right)}$$

$$- \frac{\left[\begin{matrix} a1 \cdots\cdots\cdots a(n+2) \\ A_1 \cdots A_{n-1}\ A_{n+1}\ A_{n+2}\ A_{n+3}\end{matrix}\right)}{\left[\begin{matrix} a1 \cdots\cdots\cdots a(n+2) \\ A_1 \cdots\cdots\cdots A_{n+2}\end{matrix}\right)} \cdot \frac{\left[\begin{matrix} a1 \cdots\cdots\cdots a(n+3) \\ A_1 \cdots\cdots\cdots A_{n+2} B\end{matrix}\right)}{\left[\begin{matrix} a1 \cdots\cdots\cdots a(n+3) \\ A_1 \cdots\cdots\cdots A_{n+3}\end{matrix}\right)}$$

$$+ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$- \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$(-)^{m+1} \frac{\left[\begin{matrix} a1 \cdots\cdots\cdots a(n+m) \\ A_1 \cdots A_{n-1}\ A_{n+1} \cdots A_{n+m+1}\end{matrix}\right)}{\left[\begin{matrix} a1 \cdots\cdots\cdots a(n+m) \\ A_1 \cdots\cdots\cdots A_{n+m}\end{matrix}\right)} \cdot \frac{\left[\begin{matrix} a1 \cdots\cdots\cdots a(n+m+1) \\ A_1 \cdots\cdots A_{n+m} B\end{matrix}\right)}{\left[\begin{matrix} a1 \cdots\cdots\cdots a(n+m+1) \\ A_1 \cdots\cdots\cdots A_{n+m+1}\end{matrix}\right)}$$

In dieser Reihe kommen zwei Arten von Brüchen vor, wir wollen für sie besondere Zeichen festsetzen, nämlich

567) $$\frac{\left\|\begin{array}{l} a1 \cdots\cdots\cdots\cdots a(n+m-1) \\ A_1 \cdot\cdot\cdot A_{n-1}\, A_{n+1} \cdot\cdot\cdot\cdot A_{n+m} \end{array}\right)}{\left\|\begin{array}{l} a1 \cdots\cdots\cdots\cdots a(n+m-1) \\ A_1 \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot A_{n+m-1} \end{array}\right)} = L_m^{(n)}$$

und

568) $$\frac{\left\|\begin{array}{l} a1 \cdots\cdots\cdots\cdots a(n+m) \\ A_1 \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot A_{n+m-1}\; B \end{array}\right)}{\left\|\begin{array}{l} a1 \cdots\cdots\cdots\cdots a(n+m) \\ A_1 \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot A_{n+m} \end{array}\right)} = V^{(n+m)}$$

Hiedurch erhält die Reihe 566 eine Gestalt, welche leichter zu übersehen ist

569) $$(-)^{n+1} \frac{\left\|\begin{array}{l} a1 \cdots\cdots\cdots\cdots a(n+m+1) \\ B\, A_1 \cdot\cdot\cdot A_{n-1}\, A_{n+1} \cdot\cdot\cdot A_{n+m+1} \end{array}\right)}{\left\|\begin{array}{l} a1 \cdots\cdots\cdots\cdots a(n+m+1) \\ A_1 \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot A_{n+m+1} \end{array}\right)} =$$

$$= L_0^{(n)} \cdot V^{(n)} - L_1^{(n)} \cdot V^{(n+1)} + L_2^{(n)} \cdot V^{(n+2)} - \ldots (-)^{m+1} L_{m+1}^{(n)} \cdot V^{(n+m+1)}$$

Ist m unendlich gross, oder $m = \infty$, so ist

570) $$(-)^{n+1} \frac{\left\|\begin{array}{l} a1 \quad a2 \cdots\cdots\cdots\cdots a\infty \\ B\; A_1 \cdot\cdot\cdot A_{n-1}\; A_{n+1} \cdot\cdot\cdot A_{\infty} \end{array}\right)}{\left\|\begin{array}{l} a1 \quad a2 \cdots\cdots\cdots\cdots a\infty \\ A_1\; A_2 \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot A_{\infty} \end{array}\right)} =$$

$$= L_0^{(n)} \cdot V^{(n)} - L_1^{(n)} \cdot V^{(n+1)} + L_2^{(n)} \cdot V^{(n+2)} - \ldots + \ldots\ldots\ldots$$

Die zurüklaufende Bildungsweise der Vorzahlen $L_0^{(n)}$, L_1^{n}, ... ergiebt sich unmittelbar aus der Gleichung 569 selbst, wenn

$$B = A_{n+m+1}$$

und

$$571)\quad \frac{\left\| \overset{a1}{A_1} \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; \overset{a(n-1+p)}{A_{n-1+p}} \; \overset{a(n+p)}{A_{n+m+2}} \right)}{\left\| \overset{a1}{A_1} \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; \overset{a(n+p)}{A_{n+p}} \right)} = U^{(n+p)}_{n+m+2}$$

gesetzt wird, und ist

$$572)\quad U^{(n)}_{n+m+2} - U^{(n+1)}_{n+m+2} \cdot L^{(n)}_1 + U^{(n+2)}_{n+m+2} \cdot L^{(n)}_2 - U^{(n+3)}_{n+m+2} \cdot L^{(n)}_3 + \ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots (-)^{m+1}\, U^{(n+m+1)}_{n+m+2} \cdot L^{(n)}_{m+1} + (-)^{m+2}\, L^{(n)}_{m+2} = 0$$

nach welcher die Grössen $L^{(n)}_1$, $L^{(n)}_2$, ..., aus den Grössen $U^{(n)}_n$, $U^{(n)}_{n+1}$, $U^{(n)}_{n+2}$, ... gebildet werden können.

Mit dieser ist, wie im §. 134 gezeigt ist, immer eine zweite Gleichung

$$573)\quad U^{(n)}_{n+p} - U^{(n)}_{n+p-1} \cdot L^{(n+p-1)}_1 + U^{(n)}_{n+p-2} \cdot L^{(n+p-2)}_2 - \ldots (-)^{p-1} U^{(n)}_{n+1} \cdot L^{(n+1)}_{p-1} + (-)^p L^{(n)}_p = 0$$

verbunden und beide Gleichungen führen zu folgender unabhängigen Bildungsweise:

$$574)\quad L^{(n)}_1 = U^{(n)}_{n+1}$$
$$L^{(n)}_2 = U^{(n)}_{n+1} \cdot U^{(n+1)}_{n+2} - U^{(n)}_{n+2}$$
$$L^{(n)}_3 = U^{(n)}_{n+1} \cdot U^{(n+1)}_{n+2} \cdot U^{(n+2)}_{n+3} - U^{(n)}_{n+1} \cdot U^{(n+1)}_{n+3} + U^{(n)}_{n+3}$$
$$- U^{(n)}_{n+1} \cdot U^{(n+2)}_{n+3}$$
$$L^{(n)}_4 = U^{(n)}_{n+1} \cdot U^{(n+1)}_{n+2} \cdot U^{(n+2)}_{n+3} U^{(n+3)}_{n+4} - U^{(n)}_{n+1} U^{(n+1)}_{n+2} U^{(n+2)}_{n+4} + U^{(n)}_{n+1} U^{(n+1)}_{n+4} - U^{(n)}_{n+4}$$
$$- U^{(n)}_{n+1} U^{(n+1)}_{n+3} U^{(n+3)}_{n+4} + U^{(n)}_{n+2} U^{(n+2)}_{n+4}$$
$$- U^{(n)}_{n+2} U^{(n+2)}_{n+3} U^{(n+3)}_{n+4} + U^{(n)}_{n+3} U^{(n+3)}_{n+4}$$

und allgemein

$$575)\quad L_p^{(n)} = \begin{array}{l} U\left({}' n, (n+1, n+2, \ldots, n+p-1)^{(p-1)}, n+p\right), \\ -\, U\left({}' n, (n+1, n+2, \ldots, n+p-1)^{(p-2)}, n+p\right), \\ +\, U\left({}' n, (n+1, n+2, \ldots, n+p-1)^{(p-3)}, n+p\right), \\ -\ \ldots\ldots +\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ (-)^{p-1} U\left({}' n, (n+1, n+2, \ldots, n+p-1)^{(0)}, n+p\right), \end{array}$$

§. 157.

Eben so finden wir aus der Gleichung 550, dass

$$576)\quad (-)^{n+1} \frac{\left[\begin{matrix} b & a1 & a2 \ldots\ldots & a(n-1)\ a(n+1) & \ldots\ldots a\infty \\ A_1 \cdot & A_2 \cdot & A_3 & \ldots\ldots\ldots & A_x \end{matrix}\right)}{\left[\begin{matrix} a1 & a2 & a3 \ldots\ldots\ldots\ldots & a\infty \\ A_1 \cdot & A_2 \cdot & A_3 \ldots\ldots\ldots\ldots & A_\infty \end{matrix}\right)} =$$

$$= \mathfrak{L}_0^{(n)} \cdot \mathfrak{B}^{(n)} - \mathfrak{L}_1^{(n)} \cdot \mathfrak{B}^{(n+1)} + \mathfrak{L}_2^{(n)} \cdot \mathfrak{B}^{(n+2)} - \mathfrak{L}_3^{(n)} \cdot \mathfrak{B}^{(n+3)} + \ldots - \ldots\ldots$$

wo

$$577)\quad \mathfrak{L}_m^{(n)} = \frac{\left[\begin{matrix} a1 \ldots\ldots a(n-1),\ a(n+1) \ldots\ldots & a(n+m) \\ A_1 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & A_{n+m-1} \end{matrix}\right)}{\left[\begin{matrix} a1 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & a(n+m-1) \\ A_1 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & A_{n+m-1} \end{matrix}\right)}$$

und

$$\mathfrak{B}^{(n+m)} = \frac{\left[\begin{matrix} a1 \ldots\ldots\ldots\ldots & a(n+m-1),\ b \\ A_1 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & A_{n+m} \end{matrix}\right)}{\left[\begin{matrix} a1 \ldots\ldots\ldots\ldots & a(n+m) \\ A_1 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & A_{n+m} \end{matrix}\right)}$$

so wie auch ähnliche zurücklaufende Bildungsweisen für diese Brüche.

Zweite Abtheilung.

PRODUCTE MIT VERSETZUNGEN, WENN DIE OBEREN ELEMENTE DAS POTENTIIREN ANGEBEN.

I. Allgemeine Untersuchung.

§. 158.

Die Elemente, welche der folgenden Untersuchung zu Grunde liegen, sind

$$A_1 , A_2 , A_3 , \dots , A_n$$

und ihre Potenzen

$$A_1^{a1} , A_2^{a1} , A_3^{a1} , \dots , A_n^{a1}$$

$$A_1^{a2} , A_2^{a2} , A_3^{a2} , \dots , A_n^{a2}$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$A_1^{ap} , A_2^{ap} , A_3^{ap} , \dots , A_n^{ap}$$

wo a1, a2, a3,.... ganz willkührliche Grössen bedeuten, welche keinem Gesetze unterworfen sind.

Zuerst finden wir, dass für jeden Werth von h

---

578) $A_1^h \cdot A_2^h \cdot A_3^h \cdots\cdots A_n^h \cdot \Big[\!\!\Big| A_1^{a1} A_2^{a2} A_3^{a3} \cdots\cdots A_n^{an} \Big) = \Big[\!\!\Big| A_1^{h+a1} A_2^{h+a2} A_3^{h+a3} \cdots A_n^{h+an} \Big)$

Diese Gleichung findet nur bei den Potenzen statt und bei keiner anderen Functionsart.

Ferner ist nach der vorhergehenden Untersuchung

579) $$\begin{aligned} \Big[\!\!\Big| A_1^{a1} A_2^{a2} \cdots A_{n-1}^{a(n-1)} A_n^{an} \Big) = & (-)^{n-1} \Big[\!\!\Big| A_2^{a1} \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot A_n^{a(n-1)} \Big) \cdot A_1^{an} \\ & + (-)^{n-2} \Big[\!\!\Big| A_1^{a1} A_3^{a2} \cdot\cdot\cdot A_n^{a(n-1)} \Big) \cdot A_2^{an} \\ & + (-)^{n-3} \Big[\!\!\Big| A_1^{a1} A_2^{a2} A_4^{a3} \cdots A_n^{a(n-1)} \Big) \cdot A_3^{an} \\ & \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot \\ & + (-)^0 \Big[\!\!\Big| A_1^{a1} A_2^{a2} A_3^{a3} \cdots A_{n-1}^{a(n-1)} \Big) \cdot A_n^{an} \end{aligned}$$

Ist an einer der Grössen a1, a2, a3, ... , a(n-1) gleich, oder ist an = ap, so verschwindet die Summe aller Producte, oder es ist

580) $$M_1 A_1^{ap} - M_2 A_2^{ap} + M_3 A_3^{ap} - M_4 A_4^{ap} + \ldots (-)^{n-1} M_n A_n^{ap} = 0$$

so lange p kleiner als n ist; ist aber p = n, so ist

581) $$M_1 A_1^{an} - M_2 A_2^{an} + M_3 A_3^{an} - \ldots + \ldots (-)^{n-1} M_n A_n^{an} = (-)^{n-1} M$$

wo

$$M_q = \Big[\!\!\Big| A_1^{a1} \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot A_{q-1}^{a(q-1)} A_{q+1}^{aq} \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot A_n^{a(n-1)} \Big)$$

und

$$M = \Big[\!\!\Big| A_1^{a1} A_2^{a2} \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot A_n^{an} \Big)$$

bedeutet. Ist aber an = 0, oder sogar verneint, so verschwindet hiedurch die Summe aller Producte noch nicht, und es ist allgemein

582) $$M_1 - M_2 + M_3 - M_4 + \ldots - \ldots (-)^{n-1} M_n = (-)^{n-1} \Big[\!\!\Big| A_1^{a1} A_2^{a2} \cdots A_{n-1}^{a(n-1)} A_n^0 \Big)$$

und, wenn an verneint ist,

583) $$\frac{M_1}{A_1^{an}} - \frac{M_2}{A_2^{an}} + \frac{M_3}{A_3^{an}} - \ldots + \ldots (-)^{n-1} \frac{M_n}{A_n^{an}} = (-)^{n-1} \Big[\!\!\Big| A_1^{a1} A_2^{a2} \cdots A_{n-1}^{a(n-1)} A_n^{-an} \Big)$$

Wie die Summe dieser Reihe in besonderen Fällen näher bestimmt werden kann, wird in der Folge angegeben werden.

Die beiden Gleichungen 580 und 581 gibt auch **Wronski** in seiner Critique Seite 71, aber ohne Beweis. Ausser ihnen ist von dem ganzen Gegenstande, der wegen seiner Wichtigkeit für die Theorie der Reihen und der Gleichungen im allgemeinen alle Aufmerksamkeit verdient, nichts bekannt. Wir wollen hier durch mehrere neue Theoreme wenigstens den Grund zur Untersuchung legen.

Diese Theoreme, welche wir hier zuerst bekannt machen, betreffen

a) ein Product, gebildet aus einer Summe von Producten mit Versetzungen und aus geordneten Verbindungen zuerst ohne und dann mit Wiederholungen, dargestellt durch Summen von Producten mit Versetzungen;

b) eine Summe von Producten mit Versetzungen aufgelöst, theils in andere Summen vervielfacht mit geordneten Verbindungen, theils blos in geordnete Verbindungen, und zuletzt

c) Auflösung einer Summe aus Producten mit Versetzungen in ein einziges Product zweitheiliger Factoren.

II. Ein Product, gebildet aus einer Summe von Producten mit Versetzungen und aus geordneten Verbindungen ohne Wiederholungen

$$(A_1^h , A_2^h , A_3^h , \ldots , A_n^h)^{(p)} \cdot \| A_1^{a1} A_2^{a2} A_3^{a3} \ldots . A_n^{an})$$

dargestellt durch Summen von Producten mit Versetzungen.

---

§. 159.

Zuerst bilden wir das Product, wenn $p = 1$ ist, nämlich

$$(A_1^h + A_2^h + A_3^h + \ldots + A_n^h) \cdot \| A_1^{a1} A_2^{a2} A_3^{a3} \ldots . A_n^{an}) = P$$

Die Geschäfte nehmen wir in folgender Ordnung vor: wir entwickeln nach der Vorschrift 515 den zweiten Factor dieses Products nach den Potenzen von A_n und vervielfachen mit A_n^h; dann wieder denselben Factor nach den Potenzen von A_{n-1} und vervielfachen mit A_{n-1}^h; denselben Factor nach den Potenzen von A_{n-2} und vervielfachen mit A_{n-2}^h; u. s. w. und zuletzt nach den Potenzen von A_1 und vervielfachen mit A_1^h; es entstehen hiedurch folgende Reihen:

$$
\begin{aligned}
P = & \llbracket A_{1}^{a1} \ldots\ldots\ldots A_{n-1}^{a(n-1)} \big) A_{n}^{h+an} - \llbracket A_{1}^{a1} \ldots A_{n-2}^{a(n-2)} A_{n-1}^{an} \big) A_{n}^{h+a(n-1)} + \llbracket A_{1}^{a1} \ldots A_{n-3}^{a(n-3)} A_{n-2}^{a(n-1)} A_{n-1}^{an} \big) A_{n}^{h+a(n-2)} - \ldots (-)^{n-1} \llbracket A_{1}^{a2} \ldots A_{n-1}^{an} \big) A_{n}^{h+a1} \\
& - \llbracket A_{1}^{a1} \ldots A_{n-2}^{a(n-2)} A_{n}^{a(n-1)} \big) A_{n-1}^{h+an} + \llbracket A_{1}^{a1} \ldots A_{n-2}^{a(n-2)} A_{n}^{an} \big) A_{n-1}^{h+a(n-1)} - \llbracket A_{1}^{a1} \ldots A_{n-3}^{a(n-3)} A_{n-2}^{a(n-1)} A_{n}^{an} \big) A_{n-1}^{h+a(n-2)} + \ldots (-)^{n-1} \llbracket A_{1}^{a2} \ldots A_{n-2}^{a(n-1)} A_{n}^{an} \big) A_{n-1}^{h+a1} \\
& + \llbracket A_{1}^{a1} \ldots A_{n-3}^{a(n-3)} A_{n-1}^{a(n-2)} A_{n}^{a(n-1)} \big) A_{n-2}^{h+an} - \llbracket A_{1}^{a1} \ldots A_{n-3}^{a(n-3)} A_{n-1}^{a(n-2)} A_{n}^{an} \big) A_{n-2}^{h+a(n-1)} + \llbracket A_{1}^{a1} \ldots A_{n-3}^{a(n-3)} A_{n-1}^{a(n-1)} A_{n}^{an} \big) A_{n-2}^{h+a(n-2)} - \ldots\ldots\ldots \\
& \qquad\qquad \ldots\ldots (-)^{n-3} \llbracket A_{1}^{a2} \ldots A_{n-3}^{a(n-2)} A_{n-1}^{a(n-1)} A_{n}^{an} \big) A_{n-2}^{h+a1} \\
& - \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
& + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
& (-)^{n-1} \llbracket A_{2}^{a1} \ldots A_{n}^{a(n-1)} \big) A_{1}^{h+an} + (-)^{n-2} \llbracket A_{2}^{a1} \ldots A_{n-1}^{a(n-2)} A_{n}^{an} \big) A_{1}^{h+a(n-1)} + (-)^{n-3} \llbracket A_{2}^{a1} \ldots A_{n-2}^{a(n-3)} A_{n-1}^{a(n-1)} A_{n}^{an} \big) A_{1}^{h+a(n-2)} + \ldots (-)^{0} \llbracket A_{2}^{a2} \ldots A_{n}^{an} \big) A_{1}^{h+a1}
\end{aligned}
$$

Wir summiren die Scheitelreihen nach 522, und erhalten folgende Gleichung:

584) $$(A_1^h + A_2^h + A_3^h + \ldots\ldots + A_n^h) \,.\, \left\| A_1^{a1} A_2^{a2} A_3^{a3} \ldots\ldots A_n^{an} \right) =$$
$$= \left\| A_1^{a1} \ldots\ldots\ldots A_{n-1}^{a(n-1)} A_n^{h+an} \right)$$
$$+ \left\| A_1^{a1} \ldots\ldots\ldots A_{n-2}^{a(n-2)} A_{n-1}^{h+a(n-1)} A_n^{an} \right)$$
$$+ \left\| A_1^{a1} \ldots\ldots\ldots A_{n-3}^{a(n-3)} A_{n-2}^{h+a(n-2)} A_{n-1}^{a(n-1)} A_n^{an} \right)$$
$$+ \left\| A_1^{a1} \ldots\ldots\ldots A_{n-4}^{a(n-4)} A_{n-3}^{h+a(n-3)} A_{n-2}^{a(n-2)} A_{n-1}^{a(n-1)} A_n^{an} \right)$$
$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$+ \left\| A_1^{h+a1} A_2^{a2} A_3^{a3} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots A_{n-1}^{a(n-1)} A_n^{an} \right)$$

In dem Falle, wenn

$$h = a,\ a1 = 1.a,\ a2 = 2.a,\ a3 = 3.a,\ \ldots\ldots,\ an = n.a$$

werden in der zweiten und jeder folgenden Summe zwei obere Elemente gleich, welche bewirken, dass alle diese Summen verschwinden, und nur die erste Summe übrig bleibt, so dass

585) $$(A_1^a + A_2^a + A_3^a + \ldots + A_n^a) \,.\, \left\| A_1^{1a} A_2^{2a} A_3^{3a} \ldots\ldots A_n^{na} \right) = \left\| A_1^{1a} A_2^{2a} \ldots A_{n-1}^{(n-1)a} A_n^{(n+1)a} \right)$$

§. 160.

Vervielfachen wir die Amben, Ternen, Quaternen, ... mit der Summe $\left\| A_1^{a1} A_2^{a2} \ldots A_n^{an} \right)$, so finden wir folgendes Gesetz: es ist

$$(A_1^h, A_2^h, A_3^h, A_4^h)^{(2)} \cdot [\![A_1^{a1}\ A_2^{a2}\ A_3^{a3}\ A_4^{a4}) = [\![A_1^{h+a1}\ A_2^{h+a2}\ A_3^{a3}\ A_4^{a4})$$

$$+ [\![A_1^{h+a1}\ A_2^{a2}\ A_3^{h+a3}\ A_4^{a4})$$

$$+ [\![A_1^{h+a1}\ A_2^{a2}\ A_3^{a3}\ A_4^{h+a4})$$

$$+ [\![A_1^{a1}\ A_2^{h+a2}\ A_3^{h+a3}\ A_4^{a4})$$

$$+ [\![A_1^{a1}\ A_2^{h+a2}\ A_3^{a3}\ A_4^{h+a4})$$

$$+ [\![A_1^{a1}\ A_2^{a2}\ A_3^{h+a3}\ A_4^{h+a4})$$

Hier entsehen alle Vertheilungen von h, h zu zweien in vier Abheilungen, nämlich

h + a1	h + a2	a3	a4
h + a1	a2	h + a3	a4
h + a1	a2	a3	h + a4
a1	h + a2	h + a3	a4
a1	h + a2	a3	h + a4
a1	a2	h + a3	h + a4

Eben so ist

$$(A_1^h, A_2^h, A_3^h, A_4^h, A_5^h)^{(3)} \cdot [\![A_1^{a1} A_2^{a2} A_3^{a3} A_4^{a4} A_5^{a5}) = [\![A_1^{h+a1} A_2^{h+a2} A_3^{h+a3} A_4^{a4} A_5^{a5})$$

$$+ [\![A_1^{h+a1} A_2^{h+a2} A_3^{a3} A_4^{h+a4} A_5^{a5})$$

$$+ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$

$$+ [\![A_1^{a1} A_2^{a2} A_3^{h+a3} A_4^{h+a4} A_5^{h+a5})$$

wo h, h, h in fünf Abtheilungen zu dreien vertheilt werden, nämlich

h + a 1	h + a 2	h + a 3	a 4	a 5
h + a 1	h + a 2	a 3	h + a 4	a 5
h + a 1	h + a 2	a 3	a 4	h + a 5
h + a 1	a 2	h + a 3	h + a 4	a 5
h + a 1	a 2	h + a 3	a 4	h + a 5
h + a 1	a 2	a 3	h + a 4	h + a 5
a 1	h + a 2	h + a 3	h + a 4	a 5
a 1	h + a 2	h + a 3	a 4	h + a 5
a 1	h + a 2	a 3	h + a 4	h + a 5
a 1	a 2	h + a 3	h + a 4	h + a 5

Wir wollen diese Bildungsweise durch $\Sigma^{(3)}$ angeben, so dass

$$(A_1^h, A_2^h, A_3^h, A_4^h)^{(2)} \cdot \big[\!\big| A_1^{a1} \; A_2^{a2} \; A_3^{a3} \; A_4^{a4} \big) = \Sigma^{(3)} \big[\!\big| A_1^{h+a1} \; A_2^{h+a2} \; A_3^{a3} \; A_4^{a4} \big)$$

und

$$(A_1^h, A_2^h, A_3^h, A_4^h, A_5^h)^{(3)} \cdot \big[\!\big| A_1^{a1} A_2^{a2} A_3^{a3} A_4^{a4} A_5^{a5} \big) = \Sigma^{(3)} \big[\!\big| A_1^{h+a1} A_2^{h+a2} A_3^{h+a3} A_4^{a4} A_5^{a5} \big)$$

Das Verfahren, welches von dem Vorhergehenden zu dem Folgenden führt, soll hier in allgemeinen Zeichen vorgelegt werden. Es sei die Gleichung

$$(A_1^h, A_2^h, \ldots, A_{n-1}^h)^{(p)} \cdot \big[\!\big| A_1^{a1} A_2^{a2} \ldots\ldots A_{n-1}^{a(n-1)} \big) = \Sigma^{(3)} \big[\!\big| A_1^{h+a1} A_2^{h+a2} \ldots A_p^{h+ap} A_{p+1}^{a(p+1)} \ldots A_{n-1}^{a(n-1)} \big)$$

gefunden, und es werde das Product

$$(A_1^h, A_2^h, \ldots, A_n^h)^{(p)} \cdot \big[\!\big| A_1^{a1} \; A_2^{a2} \; \ldots \; A_n^{an} \big) = P$$

gesucht.

Zuerst wird der zweite Factor in folgende Theile zerlegt:

$$\Big\| A_1^{a1}\ A_2^{a2} \ldots\ldots A_n^{an}\Big) = \Sigma_x (-)^{n-x} \Big\| A_1^{a1} \ldots\ldots A_{x-1}^{a(x-1)}\ A_{x+1}^{ax} \ldots\ldots A_n^{a(n-1)}\Big) \,.\, A_x^{an}$$

$$\text{wo } x = 1,\ 2, \ldots\ldots, n$$

und der erste Factor in die beiden Theile

$$(A_1^h, A_2^h, \ldots\ldots, A_n^h)^{(p)} = (A_1^h, \ldots, A_{x-1}^h, A_{x+1}^h, \ldots, A_n^h)^{(p)} + (A_1^h, \ldots, A_{x-1}^h, A_{x+1}^h, \ldots, A_n^h)^{(p-1)} \,.\, A_x^h$$

Hiedurch entspringen aus dem gegebenen Producte zwei Reihen durch folgende Zeichen vorgestellt:

$$P = \Sigma_x (-)^{n-x}\ (A_1^h, \ldots, A_{x-1}^h, A_{x+1}^h, \ldots, A_n^h)^{(p)} \,.\, \Big\| A_1^{a1} \ldots A_{x-1}^{a(x-1)}\ A_{x+1}^{ax} \ldots\ldots A_n^{a(n-1)}\Big) \,.\, A_x^{an}$$

$$+ \Sigma_x (-)^{n-x}\ (A_1^h, \ldots, A_{x-1}^h, A_{x+1}^h, \ldots, A_n^h)^{(p-1)} \,.\, \Big\| A_1^{a1} \ldots\ldots A_{x-1}^{a(x-1)}\ A_{x+1}^{ax} \ldots\ldots A_n^{a(n-1)}\Big) \,.\, A_x^{h+an}$$

$$\text{wo } x = 1,\ 2, \ldots\ldots, n$$

welche nach der oben gefundenen Gleichung in folgende übertragen werden können:

$$P = \Sigma_x (-)^{n-x}\ \Sigma^{(\mathfrak{z})} \Big\| A_1^{h+a1} A_2^{h+a2} \ldots\ldots A_{x-1}^{h+a(x-1)} A_{x+1}^{h+ax} \ldots\ldots A_{p+1}^{h+ap} A_{p+2}^{a(p+1)} \ldots\ldots A_n^{a(n-1)}\Big) \,.\, A_x^{an}$$

$$+ \Sigma_x (-)^{n-x}\ \Sigma^{(\mathfrak{z})} \Big\| A_1^{h+a1} A_2^{h+a2} \ldots\ldots A_{x-1}^{h+a(x-1)} A_{x+1}^{h+ax} \ldots\ldots A_p^{h+a(p-1)} A_{p+1}^{ap} \ldots\ldots A_n^{a(n-1)}\Big) \,.\, A_x^{h+an}$$

Bedeutet nun $\Sigma\left(\begin{smallmatrix}\mathfrak{z}\\ p\\ n-1\end{smallmatrix}\right)$, dass in den n-1 ersten Abtheilungen h in p Abtheilungen vorkommen soll, so entstehen, weil die Σ_x und $\Sigma^{(\mathfrak{z})}$ sich verwechseln lassen, folgende Vertheilungen:

$$P = \Sigma\left(\begin{smallmatrix}\mathfrak{z}\\ p\\ n-1\end{smallmatrix}\right) \Big\| A_1^{h+a1}\ A_2^{h+a2} \ldots\ldots A_p^{h+ap}\ A_{p+1}^{a(p+1)} \ldots\ldots A_{n-1}^{a(n-1)}\ A_n^{an}\Big)$$

$$+ \Sigma\left(\begin{smallmatrix}\mathfrak{z}\\ p-1\\ n-1\end{smallmatrix}\right) \Big\| A_1^{h+a1}\ A_2^{h+a2} \ldots\ldots A_{p-1}^{h+a(p-1)}\ A_p^{ap} \ldots\ldots A_{n-1}^{a(n-1)} A_n^{h+an}\Big)$$

wo nach der eben festgesetzten Bezeichnungsweise sich das $\mathfrak{z}$ weder auf A_n^{an} in der ersten noch auf A_n^{h+an} in der zweiten Summe beziehet.

Da nun

$$\Sigma\left(\begin{smallmatrix}\mathfrak{z}\\ p\\ n-1\end{smallmatrix}\right) \times A_n^{an} + \Sigma\left(\begin{smallmatrix}\mathfrak{z}\\ p-1\\ n-1\end{smallmatrix}\right) \times A_n^{h+an} = \Sigma\left(\begin{smallmatrix}\mathfrak{z}\\ p\\ n\end{smallmatrix}\right)$$

so ist

$$P = \Sigma \left(\begin{smallmatrix}1\\p\\n\end{smallmatrix}\right)$$

oder

$$586)\quad (A_1^h, A_2^h, A_3^h, \ldots\ldots, A_n^h)^{(p)} \cdot \llbracket A_1^{a1} A_2^{a2} A_3^{a3} \ldots\ldots A_n^{an}) =$$
$$= \Sigma^{(1)} \llbracket A_1^{h+a1}\ A_2^{h+a2}\ A_3^{h+a3} \ldots\ldots A_p^{h+ap}\ A_{p+1}^{a(p+1)} \ldots\ldots A_n^{an})$$

§. 161.

Von dieser allgemeinsten Gleichung heben wir einige besondere Fälle heraus, in welchen wegen der Gleichheit der oberen Stellenzahlen die Summen, worin sie vorkommen, verschwinden. Der erste ist, wenn

$$a1 = a+h$$
$$a2 = a+2h$$
$$a3 = a+3h$$
$$\ldots\ldots$$
$$an = a+nh$$

es wird

$$587)\quad (A_1^h, A_2^h, A_3^h, \ldots\ldots, A_n^h)^{(p)} \cdot \llbracket A_1^{a+1h} A_2^{a+2h} A_3^{a+3h} \ldots\ldots A_n^{a+nh}) =$$
$$= \llbracket A_1^{a+1h} A_2^{a+2h} \ldots\ldots\ldots A_{n-p}^{a+(n-p)h} A_{n-p+1}^{a+(n-p+2)h} \ldots\ldots A_n^{a+(n+1)h})$$

Der zweite Fall ist, wenn $-h$ statt h und

$$a1 = a+1h$$
$$a2 = a+2h$$
$$\ldots\ldots$$
$$an = a+nh$$

gesetzt wird; es entsteht die Gleichung

$$588)\quad (A_1^{-h}, A_2^{-h}, A_3^{-h}, \ldots\ldots, A_n^{-h})^{(p)} \cdot \llbracket A_1^{a+1h} A_2^{a+2h} A_3^{a+3h} \ldots\ldots A_n^{a+nh}) =$$
$$= \llbracket A_1^{a}\ A_2^{a+1h}\ A_3^{a+2h} \ldots\ldots A_p^{a+(p-1)h}\ A_{p+1}^{a+(p+1)h} \ldots\ldots A_n^{a+nh})$$

Der dritte ist, wenn nachdem $n = n+m$ gesetzt ist,

$$\begin{array}{lcl} a1 = a+1h & \text{und} & a(n+1) = b+1h \\ a2 = a+2h & & a(n+2) = b+2h \\ a3 = a+3h & & a(n+3) = b+3h \\ . \; . \; . \; . & & . \; . \; . \; . \; . \\ an = a+nh & & a(n+m) = b+mh \end{array}$$

gesetzt wird; die allgemeinste Gleichung 586 geht hierdurch in folgende über:

$$\begin{aligned} 589)\quad & (A_1^h, A_2^h, A_3^h, \ldots., A_{n+m}^h)^{(p)} \cdot [\![A_1^{a+1h} A_2^{a+2h} \ldots. A_n^{a+nh} A_{n+1}^{b+1h} A_{n+2}^{b+2h} \ldots\ldots. A_{n+m}^{b+mh}) = \\ = & [\![A_1^{a+1h} \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot A_n^{a+nh} \quad A_{n+1}^{b+1h} \cdot \cdot \cdot \cdot A_{n+m-p}^{b+(m-p)h} \quad A_{n+m-p+1}^{b+(m-p+2)h} \; . \; . \; . \; . \; . \; A_{n+m}^{b+(m+1)h}) \\ & + [\![A_1^{a+1h} \; . \; . \; . \; A_{n-1}^{a+(n-1)h} A_n^{a+(n+1)h} A_{n+1}^{b+1h} \ldots. A_{n+m-p+1}^{b+(m-p+1)h} A_{n+m-p+2}^{b+(m-p+3)h} \ldots\ldots A_{n+m}^{b+(m+1)h}) \\ & + [\![A_1^{a+1h} \ldots A_{n-2}^{a+(n-2)h} A_{n-1}^{a+nh} A_n^{a+(n+1)h} A_{n+1}^{b+1h} \ldots A_{n+m-p+2}^{b+(m-p+2)h} A_{n+m-p+3}^{b+(m-p+4)h} \ldots. A_{n+m}^{b+(m+1)h}) \\ & + [\![A_1^{a+1h} \ldots A_{n-3}^{a+(n-3)h} A_{n-2}^{a+(n-1)h} A_{n-1}^{a+nh} A_n^{a+(n+1)h} A_{n+1}^{b+1h} \ldots\ldots A_{n+m-p+3}^{b+(m-p+3)h} A_{n+m-p+4}^{b+(m-p+5)h} \ldots. A_{n+m}^{b+(m+1)h}) \\ & + [\![A_1^{a+1h} .. A_{n-4}^{a+(n-4)h} A_{n-3}^{a+(n-2)h} A_{n-2}^{a+(n-1)h} A_{n-1}^{a+nh} A_n^{a+(n+1)h} A_{n+1}^{b+1h} .. A_{n+m-p+4}^{b+(m-p+4)h} A_{n+m-p+5}^{b+(m-p+6)h} .. A_{n+m}^{b+(m+1)h}) \\ & + \; . \\ & + [\![A_1^{a+1h} \ldots A_{n-s}^{a+(n-s)h} A_{n-s+1}^{a+(n-s+2)h} \ldots. A_n^{a+(n+1)h} A_{n+1}^{b+1h} \ldots. A_{n+m-p+s}^{b+(m-p+s)h} A_{n+m-p+s+1}^{b+(m-p+s+2)h} \ldots. A_{n+m}^{b+(m+1)h}) \\ & + \; . \\ & + [\![A_1^{a+2h} A_2^{a+3h} \; . \; . \; . \; . \; . \; A_n^{a+(n+1)h} A_{n+1}^{b+1h} \ldots. A_{n+m-p+n}^{b+(m-p+n)h} A_{n+m-p+n+1}^{b+(m-p+n+2)h} \; . \; . \; . \; . \; A_{n+m}^{b+(m+1)h}) \end{aligned}$$

Dieser Fall lässt sich auch auf folgende Weise besonders behandeln, wenn die Gleichung 587 als schon bewiesen vorausgeschickt wird.

Der zweite Factor des obigen Products wird nach der Vorschrift 526 in geordnete Verbindungen ohne Wiederholungen zu n und auch zu m Elementen aufgelöst, nämlich:

$$
\begin{aligned}
&[\![A_1^{a+1h} \ldots\ldots\ldots A_n^{a+nh} A_{n+1}^{b+1h} \ldots\ldots\ldots A_{n+m}^{b+mh}) = \\
&\quad = [\![A_1^{a+1h} \ldots\ldots\ldots A_n^{a+nh}) \,.\, [\![A_{n+1}^{b+1h} \ldots\ldots\ldots A_{n+m}^{b+mh}) \\
&\quad - [\![A_1^{a+1h} \ldots\ldots A_{n-1}^{a+(n-1)h} A_{n+1}^{a+nh}) \,.\, [\![A_n^{b+1h} A_{n+2}^{b+2h} \ldots\ldots A_{n+m}^{b+mh}) \\
&\quad + [\![A_1^{a+1h} \ldots\ldots A_{n-1}^{a+(n-1)h} A_{n+2}^{a+nh}) \,.\, [\![A_n^{b+1h} A_{n+1}^{b+2h} A_{n+3}^{b+3h} \ldots\ldots A_{n+m}^{b+mh}) \\
&\quad - [\![A_1^{a+1h} \ldots\ldots A_{n-1}^{a+(n-1)h} A_{n+3}^{a+nh}) \,.\, [\![A_n^{b+1h} A_{n+1}^{b+2h} A_{n+2}^{b+3h} A_{n+4}^{b+4h} \ldots A_{n+m}^{b+mh}) \\
&\quad + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&\quad - \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&\quad (-)^* [\![A_{m+1}^{a+1h} \ldots\ldots\ldots A_{n+m}^{a+nh}) \,.\, [\![A_1^{b+1h} \ldots\ldots\ldots A_m^{b+mh})
\end{aligned}
$$

und nun das erste dieser Producte nach Anal. N. 394 Seite 244 mit

$$
\begin{aligned}
(A_1^h, \ldots, A_{n+m}^h)^{(p)} = {} & (A_1^h, \ldots\ldots, A_n^h)^{(0)} \,.\, (A_{n+1}^h, \ldots\ldots, A_{n+m}^h)^{(p)} \\
& + (A_1^h, \ldots\ldots, A_n^h)^{(1)} \,.\, (A_{n+1}^h, \ldots\ldots, A_{n+m}^h)^{(p-1)} \\
& + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
& + (A_1^h, \ldots\ldots, A_n^h)^{(n)} \,.\, (A_{n+1}^h, \ldots\ldots, A_{n+m}^h)^{(p-n)}
\end{aligned}
$$

das zweite Product mit

$$
\begin{aligned}
(A_1^h, \ldots, A_{n+m}^h)^{(p)} = {} & (A_1^h, \ldots, A_{n-1}^h, A_{n+1}^h)^{(0)} \,.\, (A_n^h, A_{n+2}^h, \ldots, A_{n+m}^h)^{(p)} \\
& + (A_1^h, \ldots, A_{n-1}^h, A_{n+1}^h)^{(1)} \,.\, (A_n^h, A_{n+2}^h, \ldots, A_{n+m}^h)^{(p-1)} \\
& + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
& + (A_1^h, \ldots, A_{n-1}^h, A_{n+1}^h)^{(n)} \,.\, (A_n^h, A_{n+2}^h, \ldots, A_{n+m}^h)^{(p-n)}
\end{aligned}
$$

u. s. w., und das letzte Product mit

$$
\begin{aligned}
(A_1^h, \ldots, A_{n+m}^h)^{(p)} = {} & (A_{m+1}^h, \ldots\ldots, A_{n+m}^h)^{(0)} \,.\, (A_1^h, \ldots\ldots, A_m^h)^{(p)} \\
& + (A_{m+1}^h, \ldots\ldots, A_{n+m}^h)^{(1)} \,.\, (A_1^h, \ldots\ldots, A_m^h)^{(p-1)} \\
& + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
& + (A_{m+1}^h, \ldots\ldots, A_{n+m}^h)^{(n)} \,.\, (A_1^h, \ldots\ldots, A_m^h)^{(p-n)}
\end{aligned}
$$

vervielfacht; zuletzt werden, nachdem die Gleichung 587 angewendet ist, die Scheitelreihen wieder nach 525 summirt. Wir begnügen uns das Verfahren hier angezeigt zu haben, welches wir befolgten, bevor wir die allgemeinste Gleichung 586 aufgefunden hatten, worin diese und auch die vorigen enthalten sind.

Diese Gleichung 589 gibt zu vielen particulären Wahrheiten Veranlassung; ist z. B. m = 1, so ist

590) $$(A_1^h, A_2^h, \ldots\ldots, A_{n+1}^h)^{(p)} \cdot \lceil A_1^{a+1h} A_2^{a+2h} \ldots\ldots A_n^{a+nh} A_{n+1}^{b+h}) =$$
$$= [\![A_1^{a+1h} \ldots\ldots A_{n-p+1}^{a+(n-p+1)h} A_{n-p+2}^{a+(n-p+3)h} \ldots\ldots A_n^{a+(n+1)h} A_{n+1}^{b+2h})$$
$$+ [\![A_1^{a+1h} \ldots\ldots A_{n-p}^{a+(n-p)h} A_{n-p+1}^{a+(n-p+2)h} \ldots\ldots A_n^{a+(n+1)h} A_{n+1}^{b+1h})$$

und ist m = 2, so ist

591) $$(A_1^h, A_2^h, \ldots\ldots, A_{n+2}^h)^{(p)} \cdot [\![A_1^{a+1h} A_2^{a+2h} \ldots A_n^{a+nh} A_{n+1}^{b+1h} A_{n+2}^{b+2h}) =$$
$$= [\![A_1^{a+1h} \ldots A_{n-p+2}^{a+(n-p+2)h} A_{n-p+3}^{a+(n-p+4)h} \ldots\ldots A_n^{a+(n+1)h} A_{n+1}^{b+2h} A_{n+2}^{b+3h})$$
$$+ [\![A_1^{a+1h} \ldots A_{n-p+1}^{a+(n-p+1)h} A_{n-p+2}^{a+(n-p+3)h} \ldots\ldots A_n^{a+(n+1)h} A_{n+1}^{b+1h} A_{n+2}^{b+3h})$$
$$+ [\![A_1^{a+1h} \ldots A_{n-p}^{a+(n-p)h} A_{n-p+1}^{a+(n-p+2)h} \ldots\ldots A_n^{a+(n+1)h} A_{n+1}^{b+1h} A_{n+2}^{b+2h})$$

III. Ein Product, gebildet aus einer Summe von Producten mit Versetzungen und aus geordneten Verbindungen mit Wiederholungen

$$\left[A_1^h, A_2^h, \ldots\ldots, A_n^h\right]^{(p)} \cdot \llbracket A_1^{a1} A_2^{a2} A_3^{a3} \ldots\ldots\ldots A_n^{an})$$

dargestellt durch Summen von Producten mit Versetzungen.

§. 162.

Der Anfang, wenn $p = 1$ ist, ist schon mit der Gleichung 584 gegeben. Das Verfahren für $p = 2, 3, \ldots\ldots$ ist folgendes: Es ist

$$\begin{aligned} \left[A_1^h, A_2^h\right]^{(2)} \cdot \llbracket A_1^{a1} A_2^{a2}) &= (A_1^{2h} + A_1^h A_2^h + A_2^{2h}) \cdot (A_1^{a1} A_2^{a2} - A_1^{a2} A_2^{a1}) \\ &= A_1^{2h+a1} A_2^{a2} - A_1^{a2} A_2^{2h+a1} \\ &\quad + A_1^{h+a1} A_2^{h+a2} - A_1^{h+a2} A_2^{h+a1} \\ &\quad + A_1^{a1} A_2^{2h+a2} - A_1^{2h+a2} A_2^{a1} \end{aligned}$$

und folglich

$$\begin{aligned} \left[A_1^h, A_2^h\right]^{(2)} \cdot \llbracket A_1^{a1} A_2^{a2}) = \; &\llbracket A_1^{2h+a1} A_2^{a2}) \\ &+ \llbracket A_1^{h+a1} A_2^{h+a2}) \\ &+ \llbracket A_1^{a1} A_2^{2h+a2}) \end{aligned} \qquad (\alpha$$

Bei der Bildung des Products

$$[A_1^h\,,\ A_2^h\,,\ A_3^h]^{(2)}\,.\,[\![A_1^{a1}A_2^{a2}A_3^{a3})$$

verfahren wir auf folgende Weise: wir zerlegen den zweiten Factor nach 522 in seine Bestandtheile

$$[\![A_1^{a1}A_2^{a2}A_3^{a3}) = [\![A_1^{a1}\ A_2^{a2}).A_3^{a3} - [\![A_1^{a1}\ A_3^{a2}).A_2^{a3} + [\![A_2^{a1}\ A_3^{a2}).A_1^{a3}$$

und vervielfachen den ersten Theil dieses Factors mit

$$[A_1^h\,,\ A_2^h\,,\ A_3^h]^{(2)} = [A_1^h\,,\ A_2^h]^{(2)} + [A_1^h\,,\ A_2^h\,,\ A_3^h]^{(1)}\,.\,A_3^h$$

den zweiten mit $= [A_1^h\,,\ A_3^h]^{(2)} + [A_1^h\,,\ A_2^h\,,\ A_3^h]^{(1)}\,.\,A_2^h$

den dritten mit $= [A_2^h\,,\ A_3^h]^{(2)} + [A_1^h\,,\ A_2^h\,,\ A_3^h]^{(1)}\,.\,A_1^h$

Hierdurch entstehen die Producte

$$[A_1^h\,,\ A_2^h\,,\ A_3^h]^{(2)}\,.\,[\![A_1^{a1}A_2^{a2}A_3^{a3}) =$$

$$[A_1^h,A_2^h]^{(2)}\,.[\![A_1^{a1}\ A_2^{a2})\,.\,A_3^{a3} - [A_1^h,A_3^h]^{(2)}\,.[\![A_1^{a1}A_3^{a2})\,.\,A_2^{a3} + [A_2^h,A_3^h]^{(2)}\,.[\![A_2^{a1}A_3^{a2})\,.\,A_1^{a3}$$

$$+ [A_1^h,A_2^h,A_3^h]^{(1)}\,.\left([\![A_1^{a1}A_2^{a2})\,.\,A_3^{h+a3} - [\![A_1^{a1}A_3^{a2})\,.\,A_2^{h+a3} + [\![A_2^{a1}A_3^{a2})\,.\,A_1^{h+a3}\right)$$

Aus der ersten Horizontalreihe entspringen nach der Gleichung α drei neue Reihen,

$$\begin{aligned}
&[\![A_1^{2h+a1}A_2^{a2}\ )\,.\,A_3^{a3} - [\![A_1^{2h+a1}A_3^{a2}\ )\,.\,A_2^{a3} + [\![A_2^{2h+a1}A_3^{a2}\ )\,.\,A_1^{a3}\\
+&[\![A_1^{h+a1}\ A_2^{h+a2})\,.\,A_3^{a3} - [\![A_1^{h+a1}\ A_3^{h+a2})\,.\,A_2^{a3} + [\![A_2^{h+a1}\ A_3^{h+a2})\,.\,A_1^{a3}\\
+&[\![A_1^{a1}\ \ A_2^{2h+a2})\,.\,A_3^{a3} - [\![A_1^{a1}\ \ A_3^{2h+a2})\,.\,A_2^{a3} + [\![A_2^{a1}\ \ A_3^{2h+a2})\,.\,A_1^{a3}
\end{aligned}$$

welche durch folgende ersetzt werden können:

$$[\![A_1^{2h+a1}\ A_2^{a2}\ A_3^{a3}\ ) + [\![A_1^{h+a1}\ A_2^{h+a2}\ A_3^{a3}\ ) + [\![A_1^{a1}\ A_2^{2h+a2}\ A_3^{a3}\ )$$

Die zweite Horizontalreihe der obigen Gleichung vertritt das Product

$$\Big[A_1^h\,,\,A_2^h\,,\,A_3^h\Big]^{(1)}\cdot\Big\|\,A_1^{a1}\;A_2^{a2}\;A_3^{h+a3}\,\Big)$$

und wird die Bildung dieses Products nach 584 vorgenommen, so entspringen hieraus die Summen

$$\Big\|A_1^{a1}\,A_2^{a2}\,A_3^{2h+a3}\Big)+\Big\|A_1^{a1}\,A_2^{h+a2}\,A_3^{h+a3}\Big)+\Big\|A_1^{h+a1}\,A_2^{a2}\,A_3^{h+a3}\Big)$$

Es ist daher

$$\begin{aligned}\Big[A_1^h\,,\,A_2^h\,,\,A_3^h\Big]^{(2)}\cdot\Big\|A_1^{a1}\;A_2^{a2}\;A_3^{a3}\Big) = &\Big\|\;A_1^{2h+a1}\;\;A_2^{0h+a2}\;\;A_3^{0h+a3}\;\Big) \qquad (\beta\\ +&\Big\|\;A_1^{0h+a1}\;\;A_2^{2h+a2}\;\;A_3^{0h+a3}\;\Big)\\ +&\Big\|\;A_1^{0h+a1}\;\;A_2^{0h+a2}\;\;A_3^{2h+a3}\;\Big)\\ +&\Big\|\;A_1^{1h+a1}\;\;A_2^{1h+a2}\;\;A_3^{0h+a3}\;\Big)\\ +&\Big\|\;A_1^{1h+a1}\;\;A_2^{0h+a2}\;\;A_3^{1h+a3}\;\Big)\\ +&\Big\|\;A_1^{0h+a1}\;\;A_2^{1h+a2}\;\;A_3^{1h+a3}\;\Big)\end{aligned}$$

Eben so finden wir das Product

$$\begin{aligned}\Big[A_1^h\,,\,A_2^h\,,\,A_3^h\Big]^{(3)}\cdot\Big\|A_1^{a1}\;A_2^{a2}\;A_3^{a3}\Big) = &\Big\|\;A_1^{3h+a1}\;\;A_2^{0h+a2}\;\;A_3^{0h+a3}\;\Big) \qquad (\gamma\\ +&\Big\|\;A_1^{0h+a1}\;\;A_2^{3h+a2}\;\;A_3^{0h+a3}\;\Big)\\ +&\Big\|\;A_1^{0h+a1}\;\;A_2^{0h+a2}\;\;A_3^{3h+a3}\;\Big)\\ +&\Big\|\;A_1^{2h+a1}\;\;A_2^{1h+a2}\;\;A_3^{0h+a3}\;\Big)\\ +&\Big\|\;A_1^{2h+a1}\;\;A_2^{0h+a2}\;\;A_3^{1h+a3}\;\Big)\\ +&\Big\|\;A_1^{0h+a1}\;\;A_2^{2h+a2}\;\;A_3^{1h+a3}\;\Big)\\ +&\Big\|\;A_1^{1h+a1}\;\;A_2^{2h+a2}\;\;A_3^{0h+a3}\;\Big)\\ +&\Big\|\;A_1^{1h+a1}\;\;A_2^{0h+a2}\;\;A_3^{2h+a3}\;\Big)\\ +&\Big\|\;A_1^{0h+a1}\;\;A_2^{1h+a2}\;\;A_3^{2h+a3}\;\Big)\\ +&\Big\|\;A_1^{1h+a1}\;\;A_2^{1h+a2}\;\;A_3^{1h+a3}\;\Big)\end{aligned}$$

Hier werden alle mögliche Zerfällungen einer Zahl in mehrere Abtheilungen gebracht; in α, β, γ, sind folgende Zerfällungen in Abtheilungen vertheilt:

α	β	γ
2h , 0h	2h , 0h , 0h	3h , 0h , 0h
1h , 1h	0h , 2h , 0h	0h , 3h , 0h
0h , 2h	0h , 0h , 2h	0h , 0h , 3h
	1h , 1h , 0h	2h , 1h , 0h
	1h , 0h , 1h	2h , 0h , 1h
	0h , 1h , 1h	0h , 2h , 1h
		1h , 2h , 0h
		1h , 0h , 2h
		0h , 1h , 2h
		1h , 1h , 1h

Machen wir dieses Zerfällen einer Zahl p auf alle mögliche Weise und dieses Vertheilen in n Abtheilungen durch $\mathfrak{Z}_{(p,n)}$ bemerkbar, so können wir die Bildung der obigen Producte durch folgende Zeichen angeben:

$$\left[A_1^h , A_2^h \right]^{(2)} \cdot \left\| A_1^{a1} A_2^{a2} \right) = \mathfrak{Z}_{(2,2)} \left\| A_1^{2h+a1} A_2^{0h+a2} \right)$$

$$\left[A_1^h , A_2^h , A_3^h \right]^{(2)} \cdot \left\| A_1^{a1} A_2^{a2} A_3^{a3} \right) = \mathfrak{Z}_{(2,3)} \left\| A_1^{2h+a1} A_2^{0h+a2} A_3^{0h+a3} \right)$$

$$\left[A_1^h , A_2^h , A_3^h \right]^{(2)} \cdot \left\| A_1^{a1} A_2^{a2} A_3^{a3} \right) = \mathfrak{Z}_{(3,3)} \left\| A_1^{3h+a1} A_2^{0h+a2} A_3^{0h+a3} \right)$$

wo 0h , 0h die Stellen anzeigen, auf welche die Zerfällungen ausgedehnt werden müssen.

Nach diesem können wir jetzt das Verfahren, welches vom Vorhergehenden zum Folgenden führt, in allgemeinen Zeichen vorlegen.

Es sei das Product

$$\left[A_1^h, A_2^h, \ldots, A_{n-1}^h\right]^{(p)} \cdot \left\| A_1^{a1} A_2^{a2} \ldots A_{n-1}^{a(n-1)} \right) = \mathfrak{Z}_{(p,n-1)} \left\| A_1^{ph+a1} A_2^{0h+a2} A_3^{0h+a3} \ldots A_{n-1}^{0h+a(n-1)} \right)$$

gewonnen, und das Product

$$\left[A_1^h, A_2^h, \ldots, A_n^h\right]^{(p)} \cdot \left\| A_1^{a1} \; A_2^{a2} \; \ldots\ldots \; A_n^{an} \right) = Q$$

zu bilden.

Der erste Factor wird in seine Bestandtheile zerlegt,

$$\left[A_1^h, A_2^h, \ldots, A_n^h\right]^{(p)} = \left[A_1^h, \ldots, A_{x-1}^h, A_{x+1}^h, \ldots, A_n^h\right]^{(p)} + \left[A_1^h, A_2^h, \ldots, A_n^h\right]^{(p-1)} \cdot A_x^h$$

und eben so der zweite Factor in die Bestandtheile:

$$\left\| A_1^{a1} \ldots\ldots A_n^{an} \right) = \Sigma (-)^{n-x} \left\| A_1^{a1} \ldots\ldots A_{x-1}^{a(x-1)} A_{x+1}^{ax} \ldots\ldots A_n^{a(n-1)} \right) \cdot A_x^{an}$$

welche mit den Vorigen vereint folgende Producte erzeugen:

$$\begin{aligned} Q = {} & \Sigma (-)^{n-x} \left[A_1^h, \ldots, A_{x-1}^h, A_{x+1}^h, \ldots, A_n^h\right]^{(p)} \cdot \left\| A_1^{a1} \ldots A_{x-1}^{a(x-1)} A_{x+1}^{ax} \ldots A_n^{a(n-1)} \right) \cdot A_x^{an} \\ & + \left[A_1^h, A_2^h, \ldots, A_n^h\right]^{(p-1)} \cdot \Sigma (-)^{n-x} \left\| A_1^{a1} \ldots A_{x-1}^{a(x-1)} A_{x+1}^{ax}, \ldots A_n^{a(n-1)} \right) \cdot A_x^{h+an} \end{aligned}$$

Durch den ersten Theil entstehen nach der oben gefundenen Gleichung die Zerfällungen

$$\Sigma (-)^{n-x} \mathfrak{Z}_{(p,n-1)} \left\| A_1^{ph+a1} \; A_2^{0h+a2} \ldots A_{x-1}^{0h+a(x-1)} \; A_{x+1}^{0h+ax} \ldots\ldots A_n^{0h+a(n-1)} \right) \cdot A_x^{an}$$

oder

$$\mathfrak{Z}_{(p,n-1)} \left\| A_1^{ph+a1} \; A_2^{0h+a2} \; A_3^{0h+a3} \; \ldots\ldots \; A_{n-1}^{0h+a(n-1)} \; A_n^{an} \right) \qquad (\delta$$

und durch den zweiten Theil entsteht das Product

$$\left[A_1^h, A_2^h, \ldots\ldots, A_n^h\right]^{(p-1)} \cdot \left\| A_1^{a1} A_2^{a2} \ldots A_{n-1}^{a(n-1)} A_n^{h+an} \right)$$

welches folgende Zerfällungen erzeugt:

$$\mathfrak{Z}_{(p-1,n)} \left\| A_1^{(p-1)h+a1} \; A_2^{0h+a2} \; A_3^{0h+a3} \ldots\ldots A_{n-1}^{0h+a(n-1)} \; A_n^{0h+h+an} \right) \qquad (\varepsilon$$

Werden alle Zerfällungen in δ und ε vereinigt, so entstehen alle mögliche Zerfällungen der Zahl p in n Abtheilungen vertheilt, oder

592) $$\left[A_1^h, A_2^h, A_3^h, \ldots, A_n^h\right]^{(p)} \cdot [\![A_1^{a1} A_2^{a2} \ldots\ldots\ldots A_n^{an}) =$$
$$= \mathfrak{Z}_{(p,n)} [\![A_1^{ph+a1} A_2^{0h+a2} A_3^{0h+a3} \ldots\ldots\ldots\ldots A_n^{0h+an})$$

§. 163.

Wir zeichnen von den unendlich vielen Fällen, welche in dieser allgemeinsten Wahrheit begriffen sind, folgende aus.

Erstens, ist

$$a1 = a+h$$
$$a2 = a+2h$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$an = a+nh$$

so zernichten sich viele Summen wegen entgegengesetzter Zeichen und viele wegen gleicher Elemente, und es bleibt nur eine Summe übrig, nämlich

593) $$\left[A_1^h, A_2^h, \ldots, A_n^h\right]^{(p)} \cdot [\![A_1^{a+1h} A_2^{a+2h} A_3^{a+3h} \ldots\ldots\ldots A_n^{a+nh}) =$$
$$= [\![A_1^{a+1h} A_2^{a+2h} \ldots\ldots A_{n-1}^{a+(n-1)h} A_n^{a+(n+p)h})$$

Zweitens, wenn n+m statt n und

$$\begin{array}{lcl} a1 = a+h & \text{und} & a(n+1) = b+1h \\ a2 = a+2h & & a(n+2) = b+2h \\ \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot & & \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \\ an = a+nh & & a(n+m) = b+mh \end{array}$$

gesetzt wird, so entstehen folgende Summen:

$$594)\quad \left[A_1^h, A_2^h, \ldots, A_{n+m}^h\right]^{(p)} \cdot [\![A_1^{a+1h} A_2^{a+2h} \ldots A_n^{a+nh} A_{n+1}^{b+1h} A_{n+2}^{b+2h} \ldots A_{n+m}^{b+mh}) =$$

$$= [\![A_1^{a+1h} \ldots\ldots A_{n-1}^{a+(n-1)h} A_n^{a+(n+p)h} A_{n+1}^{b+1h} \ldots\ldots A_{n+m-1}^{b+(m-1)h} A_{n+m}^{b+mh})$$

$$+ [\![A_1^{a+1h} \ldots\ldots A_{n-1}^{a+(n-1)h} A_n^{a+(n+p-1)h} A_{n+1}^{b+1h} \ldots\ldots A_{n+m-1}^{b+(m-1)h} A_{n+m}^{b+(m+1)h})$$

$$+ [\![A_1^{a+1h} \ldots\ldots A_{n-1}^{a+(n-1)h} A_n^{a+(n+p-2)h} A_{n+1}^{b+1h} \ldots\ldots A_{n+m-1}^{b+(m-1)h} A_{n+m}^{b+(m+2)h})$$

$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$+ [\![A_1^{a+1h} \ldots\ldots A_{n-1}^{a+(n-1)h} A_n^{a+nh} A_{n+1}^{b+1h} \ldots\ldots A_{n+m-1}^{b+(m-1)h} A_{n+m}^{b+(m+p)h})$$

Ist z. B. $n=2$, und $m=3$, $p=3$, so ist

$$\left[A_1^h, A_2^h, \ldots, A_5^h\right]^{(3)} \cdot [\![A_1^{a+1h} A_2^{a+2h} A_3^{b+1h} A_4^{b+2h} A_5^{b+3h}) = [\![A_1^{a+1h} A_2^{a+5h} A_3^{b+1h} A_4^{b+2h} A_5^{b+3h})$$

$$+ [\![A_1^{a+1h} A_2^{a+4h} A_3^{b+1h} A_4^{b+2h} A_5^{b+4h})$$

$$+ [\![A_1^{a+1h} A_2^{a+3h} A_3^{b+1h} A_4^{b+2h} A_5^{b+5h})$$

$$+ [\![A_1^{a+1h} A_2^{a+2h} A_3^{b+1h} A_4^{b+2h} A_5^{b+6h})$$

Diese beiden Gleichungen 593, 594 sind in der allgemeinsten Gleichung 592 als einzelne Fälle enthalten; sie können auch unabhängig von der allgemeinsten 592 bewiesen werden. Wir wollen das Verfahren, welches wir bei 594 befolgten, bevor wir die allgemeinste Gleichung 592 gefunden hatten, wenigstens in seinen Grundzügen mittheilen.

Der zweite Factor wird nach der Vorschrift 526 in Producte zerlegt, wovon der eine Factor n und der andere m Elemente hat,

$$[\![A_1^{a+1h} \ldots A_n^{a+nh} A_{n+1}^{b+1h} \ldots A_{n+m}^{b+mh}) = [\![A_1^{a+1h} \ldots\ldots A_n^{a+nh}) \cdot [\![A_{n+1}^{b+1h} \ldots\ldots A_{n+m}^{b+mh})$$

$$(-)^* [\![A_1^{a+1h} \ldots A_{n-1}^{a+(n-1)h} A_{n+1}^{a+nh}) \cdot [\![A_n^{b+1h} A_{n+2}^{b+2h} \ldots\ldots A_{n+m}^{b+mh})$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$(-)^* [\![A_{m+1}^{a+1h} \ldots\ldots A_{n+m}^{a+nh}) \cdot [\![A_1^{b+1h} \ldots\ldots A_m^{b+mh})$$

und das erste Product mit

$$\begin{aligned}[A^h_1, \ldots\ldots, A^h_{n+m}]^{(p)} = {} & [A^h_1, \ldots\ldots, A^h_n]^{(0)} \cdot [A^h_{n+1}, \ldots\ldots, A^h_{n+m}]^{(p)} \\ & + [A^h_1, \ldots\ldots, A^h_n]^{(1)} \cdot [A^h_{n+1}, \ldots\ldots, A^h_{n+m}]^{(p-1)} \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + [A^h_1, \ldots\ldots, A^h_n]^{(p)} \cdot [A^h_{n+1}, \ldots\ldots, A^h_{n+m}]^{(0)}\end{aligned}$$

(siehe Analysis Seite 252 Nro. 407)

das zweite mit

$$\begin{aligned}= {} & [A^h_1, \ldots\ldots, A^h_{n-1}, A^h_{n+1}]^{(0)} \cdot [A^h_n, A^h_{n+2}, \ldots\ldots, A^h_{n+m}]^{(p)} \\ & + [A^h_1, \ldots\ldots, A^h_{n-1}, A^h_{n+1}]^{(1)} \cdot [A^h_n, A^h_{n+2}, \ldots\ldots, A^h_{n+m}]^{(p-1)} \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + [A^h_1, \ldots\ldots, A^h_{n-1}, A^h_{n+1}]^{(p)} \cdot [A^h_n, A^h_{n+2}, \ldots\ldots, A^h_{n+m}]^{(0)}\end{aligned}$$

u. s. w., und das letzte Product mit

$$\begin{aligned} & [A^h_{m+1}, \ldots\ldots, A^h_{n+m}]^{(0)} \cdot [A^h_1, \ldots\ldots\ldots, A^h_m]^{(p)} \\ & + [A^h_{m+1}, \ldots\ldots, A^h_{n+m}]^{(1)} \cdot [A^h_1, \ldots\ldots\ldots, A^h_m]^{(p-1)} \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + [A^h_{m+1}, \ldots\ldots, A^h_{n+m}]^{(p)} \cdot [A^h_1, \ldots\ldots\ldots, A^h_m]^{(0)}\end{aligned}$$

vervielfacht, und nach Anwendung der Gleichung 593, welche wir zuvor besonders bewiesen hatten, werden nach der Vorschrift 525 die Scheitelreihen wieder summirt.

IV. Summe der Producte mit Versetzungen aufgelöst, theils in andere Summen vervielfacht mit geordneten Verbindungen, theils in geordnete Verbindungen.

---

§. 164.

Alle diese Gleichungen geben das Product, gebildet aus den geordneten Verbindungen und aus der Summe der Producte mit Versetzungen, durch ähnliche Summen an. Wir wollen die Aufgabe umkehren, und letztere durch erstere darzustellen suchen. Die Wichtigkeit dieser neuen Aufgabe wird sich in den späteren Untersuchungen bewähren. Wir wählen hiezu als Hülfsgleichung die Gleichung 590, setzen in ihr n-p statt p, $b = s-h$, und n-1 statt n; dadurch erhält sie folgende Gestalt:

$$\Big(A_1^h, A_2^h, \ldots, A_n^h\Big)^{(n-p)} \Big\| A_1^{a+1h} \ldots . A_{n-1}^{a+(n-1)h} A_n^s \Big) =$$

$$= \Big\| A_1^{a+1h} \ldots A_p^{a+ph} A_{p+1}^{a+(p+2)h} \ldots A_{n-1}^{a+nh} A_n^{(s+h)} \Big)$$

$$+ \Big\| A_1^{a+1h} \ldots A_{p-1}^{a+(p-1)h} A_p^{a+(p+1)h} \ldots . A_{n-1}^{a+nh} A_n^s \Big)$$

oder wenn

$$(A_1^h, A_2^h, \ldots, A_n^h)^{(n-p)} = N_{n-p}$$

$$\Big\| A_1^{a+1h} \ldots . A_{n-1}^{a+(n-1)h} A_n^s \Big) = A.$$

und

$$\Big[\!\Big| A_1^{a+1h} \ldots . A_{p-1}^{a+(p-1)h} A_p^{a+(p+1)h} \ldots\ldots A_{n-1}^{a+nh} A_n^s \Big) = M_{(p,s)}$$

gesetzt wird,

$$N_{n-p} \cdot A_s = M_{(p+1,\, s+h)} + M_{(p,s)}$$

Nach dieser Gleichung werden mehrere andere gebildet, indem

$$p = p+1 \;,\; p+2 \;,\; p+3 \;,\; \ldots . \;,\; n$$

und

$$s = s+h \;,\, s+2h \;,\; s+3h \;,\; \ldots\ldots \;,\; s+(n-p)h$$

gesetzt werden,

$$\begin{array}{rclcrcl}
N_{n-p} & \cdot & A_s & = & M_{(p+1,\, s+h)} & + & M_{(p\,,\, s)} \\
-\; N_{n-p-1} & \cdot & A_{s+h} & = & -\; M_{(p+2,\, s+2h)} & - & M_{(p+1,\, s+h)} \\
+\; N_{n-p-2} & \cdot & A_{s+2h} & = & +\; M_{(p+3,\, s+3h)} & + & M_{(p+2,\, s+2h)} \\
-\; N_{n-p-3} & \cdot & A_{s+3h} & = & -\; M_{(p+4,\, s+4h)} & - & M_{(p+3,\, s+3h)} \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
(-)^{n-p} N_0 & \cdot & A_{s+(n-p)h} & = & 0 & + & (-)^{n-p} M_{(n,s+(n-p)h)}
\end{array}$$

Werden diese Gleichungen zusammengezählt, so entsteht die Reihe

$$M_{(p,\,s)} = N_{n-p} \cdot A_s - N_{n-p-1} \cdot A_{s+h} + N_{n-p-2} \cdot A_{s+2h} - \ldots . (-)^{n-p} N_0 \cdot A_{s+(n-p)h}$$

oder

$$595) \quad \Big[\!\Big| A_1^{a+1h} A_2^{a+2h} \ldots . A_{p-1}^{a+(p-1)h} A_p^{a+(p+1)h} \ldots . A_{n-1}^{a+nh} A_n^s \Big) =$$

$$\begin{aligned}
&= \left(A_1^h , A_2^h , \ldots , A_n^h \right)^{(n-p)} \Big[\!\Big| A_1^{a+1h} \ldots . A_{n-1}^{a+(n-1)h} A_n^s \Big) \\
&\quad - \left(A_1^h , \ldots\ldots , A_n^h \right)^{(n-p-1)} \Big[\!\Big| A_1^{a+1h} \ldots . A_{n-1}^{a+(n-1)h} A_n^{s+h} \Big) \\
&\quad + \left(A_1^h , \ldots\ldots , A_n^h \right)^{(n-p-2)} \Big[\!\Big| A_1^{a+1h} \ldots . A_{n-1}^{a+(n-1)h} A_n^{s+2h} \Big) \\
&\quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&+ (-)^{n-p} \left(A_1^h , \ldots\ldots , A_n^h \right)^{(0)} \Big[\!\Big| A_1^{a+1h} \ldots . A_{n-1}^{a+(n-1)h} A_n^{s+(n-p)h} \Big)
\end{aligned}$$

Aus der obersten Gleichung ergiebt sich für dieselbe Summe eine zweite Reihe, wenn

$$p = p-1 \,,\; p-2 \,,\; p-3 \,,\; \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \,,\; 2, \; 1, \; 0$$

und

$$s = s-h \,,\; s-2h \,,\; s-3h \,,\; \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \,,\; s-ph$$

gesetzt wird,

$$\begin{array}{rcrcrcl}
 & M_{(p\,,\,s)} & + & M_{(p-1,s-h)} & = & N_{n-p+1} & \cdot\; A_{s-h} \\
- & M_{(p-1,s-h)} & - & M_{(p-2,s-2h)} & = & -\; N_{n-p+2} & \cdot\; A_{s-2h} \\
+ & M_{(p-2,s-2h)} & + & M_{(p-3,s-3h)} & = & +\; N_{n-p+3} & \cdot\; A_{s-3h} \\
- & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
 & (-)^{p-1} M_{(1,s-(p-1)h)} & + & 0 & = & (-)^{p-1} N_n & \cdot\; A_{s-ph}
\end{array}$$

und diese Gleichungen zusammengezählt werden; es entsteht die Reihe

$$M_{(p\,,\,s)} = N_{n-p+1} \cdot A_{s-h} - N_{n-p+2} \cdot A_{s-2h} + N_{n-p+3} \cdot A_{s-3h} - \ldots (-)^{p-1} N_n \cdot A_{s-ph}$$

oder

$$596) \quad \Big\| A_1^{a+1h} A_2^{a+2h} \ldots\ldots A_{p-1}^{a+(p-1)h} A_p^{a+(p+1)h} \ldots\ldots A_{n-1}^{a+nh} A_n^{s} \Big) =$$

$$\begin{aligned}
= \; & \Big(A_1^h , A_2^h , \ldots , A_n^h \Big)^{(n-p+1)} \cdot \Big\| A_1^{a+1h} A_2^{a+2h} \ldots\ldots A_{n-1}^{a+(n-1)h} A_n^{s-h} \Big) \\
- \; & \Big(A_1^h , \ldots\ldots , A_n^h \Big)^{(n-p+2)} \cdot \Big\| A_1^{a+1h} \ldots\ldots\ldots A_{n-1}^{a+(n-1)h} A_n^{s-2h} \Big) \\
+ \; & \Big(A_1^h , \ldots\ldots , A_n^h \Big)^{(n-p+3)} \cdot \Big\| A_1^{a+1h} \ldots\ldots\ldots A_{n-1}^{a+(n-1)h} A_n^{s-3h} \Big) \\
- \; & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
(-)^{p-1} \; & \Big(A_1^h , \ldots\ldots , A_n^h \Big)^{(n)} \cdot \Big\| A_1^{a+1h} \ldots\ldots\ldots A_{n-1}^{a+(n-1)h} A_n^{s-ph} \Big)
\end{aligned}$$

§. 165.

Dieses Zurückführen von Summen der Producte mit Versetzungen auf geordnete Verbindungen ohne Wiederholungen und auf ähnliche, aber einfachere Summen, so wie es die Gleichungen 595 und 596 angeben, setzt uns oft in den Stand, den Werth der ersteren besser würdigen zu können. Ist nämlich

$$s = a+(n+m)h$$

so ist nach 595 und 593

$$597)\quad \frac{\left\| A_1^{a+1h}\, A_2^{a+2h} \ldots\ldots A_{p-1}^{a+(p-1)h}\, A_p^{a+(p+1)h} \ldots\ldots\ldots A_{n-1}^{a+nh}\, A_n^{a+(n+m)h} \right)}{\left\| A_1^{a+1h}\, A_2^{a+2h} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots A_n^{a+nh} \right)} =$$

$$\begin{aligned}
&= (A_1^h, A_2^h, \ldots\ldots, A_n^h)^{(n-p)} \cdot [A_1^h, A_2^h, \ldots, A_n^h]^{(m)} \\
&\quad - (A_1^h, \ldots\ldots\ldots, A_n^h)^{(n-p-1)} \cdot [A_1^h, \ldots\ldots\ldots, A_n^h]^{(m+1)} \\
&\quad + (A_1^h, \ldots\ldots\ldots, A_n^h)^{(n-p-2)} \cdot [A_1^h, \ldots\ldots\ldots, A_n^h]^{(m+2)} \\
&\quad - \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&(-)^{n-p}(A_1^h, \ldots\ldots\ldots, A_n^h)^{(0)} \cdot [A_1^h, \ldots\ldots\ldots, A_n^h]^{(m+n-p)}
\end{aligned}$$

und nach Nro. 596 und 593

$$\begin{aligned}
598)\quad &= (A_1^h, \ldots\ldots\ldots, A_n^h)^{(n-p+1)} \cdot [A_1^h, \ldots\ldots, A_n^h]^{(m-1)} \\
&\quad - (A_1^h, \ldots\ldots\ldots, A_n^h)^{(n-p+2)} \cdot [A_1^h, \ldots\ldots, A_n^h]^{(m-2)} \\
&\quad + (A_1^h, \ldots\ldots\ldots, A_n^h)^{(n-p+3)} \cdot [A_1^h, \ldots\ldots, A_n^h]^{(m-3)} \\
&\quad - \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&(-)^{p-1}(A_1^h, \ldots\ldots\ldots, A_n^h)^{(n)} \cdot [A_1^h, \ldots\ldots, A_n^h]^{(m-p)}
\end{aligned}$$

Ist aber $s = a+h$, so verschwindet die Summe in 596, und es entsteht, wenn wir noch $a = 0$ und $h = 1$ setzen, die Gleichung

$$\begin{aligned}
599)\quad 0 &= \Big(A_1, A_2, \ldots\ldots, A_n\Big)^{(n-p+1)} \cdot \Big\| A_1^1\, A_2^2 \ldots\ldots A_{n-1}^{n-1}\, A_n^0 \Big) \\
&\quad - \Big(A_1, A_2, \ldots\ldots, A_n\Big)^{(n-p+2)} \cdot \Big\| A_1^1\, A_2^2 \ldots\ldots A_{n-1}^{n-1}\, A_n^{-1} \Big) \\
&\quad + \Big(A_1, A_2, \ldots\ldots, A_n\Big)^{(n-p+3)} \cdot \Big\| A_1^1\, A_2^2 \ldots\ldots A_{n-1}^{n-1}\, A_n^{-2} \Big) \\
&\quad - \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&(-)^{p-1} \Big(A_1, A_2, \ldots\ldots, A_n\Big)^{(n)} \cdot \Big\| A_1^1\, A_2^2 \ldots\ldots A_{n-1}^{n-1} A_n^{-(p-1)} \Big)
\end{aligned}$$

welche die zurücklaufende Bildungsweise der Summen angibt, wenn in ihnen eine verneinte Potenz vorkommt.

Bestehen aber die Producte nicht aus einer bestimmten Anzahl, wie in 597, sondern aus unendlich vielen Factoren, wie in dem Bruche

$$\frac{\Big[\!\Big| A_1^b \; A_2^a \; A_3^{a+h} \; A_4^{a+2h} \; \ldots\ldots \; A_n^{a+(n-2)h} \, A_{n+1}^{a+nh} \; \ldots\ldots\ldots\ldots \; A_\alpha^\infty \Big)}{\Big[\!\Big| A_1^a \; A_2^{a+h} \; A_3^{a+2h} \; \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \; A_\alpha^\infty \Big)}$$

so ist auch die Reihe, in welcher dieser Bruch entwickelt werden kann, unendlich, und es ist nach §. 157 der Zähler des Bruches

$$\mathfrak{Q}_m^{(n)} = \frac{\Big[\!\Big| A_1^a \, A_2^{a+h} \; \ldots\ldots \; A_{n-1}^{a+(n-2)h} \; A_n^{a+nh} \; \ldots\ldots\ldots \; A_{n+m-1}^{a+(n+m-1)h} \Big)}{\Big[\!\Big| A_1^a \, A_2^{a+h} \; \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \; A_{n+m-1}^{a+(n+m-2)h} \Big)}$$

der als Factor in der Entwickelung §. 157 vorkommt, nach 587

$$= \Big(A_1^h, A_2^h, \ldots, A_{n+m-1}^h\Big)^{(m)} \cdot \Big[\!\Big| A_1^a \, A_2^{a+h} \ldots\ldots A_{n+m-1}^{a+(n+m-2)h} \Big)$$

und folglich dieser Factor

$$\mathfrak{Q}_m^{(n)} = (A_1^h, A_2^h, \ldots\ldots, A_{n+m-1}^h)^{(m)}$$

mithin der unendliche Bruch

$$600) \quad (-)^{n+1} \frac{\Big[\!\Big| A_1^b \, A_2^a \; A_3^{a+h} \, A_4^{a+2h} \; \ldots\ldots \; A_n^{a+(n-2)h} \, A_{n+1}^{a+nh} \; \ldots\ldots\ldots \; A_\infty^\infty \Big)}{\Big[\!\Big| A_1^a \, A_2^{a+h} \, A_3^{a+2h} \; \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \; A_\alpha^\infty \Big)} =$$

$$\begin{aligned} &= (A_1^h, A_2^h, A_3^h, \ldots\ldots, A_{n-1}^h)^{(0)} \cdot V^{(n)} \\ &\quad - (A_1^h, A_2^h, A_3^h, \ldots\ldots, A_n^h)^{(1)} \cdot V^{(n+1)} \\ &\quad + (A_1^h, A_2^h, A_3^h, \ldots\ldots, A_{n+1}^h)^{(2)} \cdot V^{(n+2)} \\ &\quad - (A_1^h, A_2^h, A_3^h, \ldots\ldots, A_{n+2}^h)^{(3)} \cdot V^{(n+3)} \\ &\quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

wo

$$V^{(n+m)} = \frac{\Big[\!\Big| A_1^a \, A_2^{a+h} \; A_3^{a+2h} \ldots\ldots\ldots\ldots \; A_{n+m-1}^{a+(n+m-2)h} \; A_{n+m}^b \Big)}{\Big[\!\Big| A_1^a \, A_2^{a+h} \; A_3^{a+2h} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \; A_{n+m}^{a+(n+m-1)h} \Big)}$$

V. Auflösung einer Summe aus Producten mit Versetzungen in ein Product zweitheiliger Factoren.

§. 166.

Durch diese Untersuchung sind wir in den Stand gesetzt, die Summen der Producte aus Factoren mit Versetzungen in zweitheilige Factoren aufzulösen. Es ist

$$[\![A_1^a A_2^{a+1h} A_3^{a+2h} \ldots\ldots A_n^{n+(n-1)h}\big) = \Sigma\,(-)^{n-x} [\![A_1^n A_2^{a+1h} \ldots A_{x-1}^{a+(x-2)h} A_x^{a+xh} \ldots\ldots A_{n-1}^{a+(n-1)h}\big)\, A_n^{n+(x-1)h}$$

wo $x = 1, 2, \ldots\ldots, n$

und nach der Gleichung 587

$$[\![A_1^a A_2^{n+1h} \ldots A_{x-1}^{a+(x-2)h} A_x^{a+xh} \ldots\ldots\ldots A_{n-1}^{n+(n-1)h}\big) =$$

$$= \big(A_1^h, A_2^h, \ldots, A_{n-1}^h\big)^{(n-x)} \cdot [\![A_1^a\, A_2^{a+1h} A_3^{a+2h} \ldots\ldots A_{n-1}^{a+(n-2)h}\big)$$

folglich

$$[\![A_1^n\, A_2^{a+1h} \ldots\ldots A_n^{a+(n-1)h}\big) =$$

$$= [\![A_1^n\, A_2^{a+1h} \ldots\ldots A_{n-1}^{a+(n-2)h}\big) \cdot \Sigma\,(-)^{n-x} \big(A_1^h\, A_2^h, \ldots, A_{n-1}^h\big)^{(n-x)} \cdot A_n^{a+(x-1)h}$$

da nun

$$\Sigma(-)^{n-x}(A_1^h, \ldots, A_{n-1}^h)^{(n-x)} \cdot A_n^{a+(x-1)h} = (A_1^h, \ldots, A_{n-1}^h)^{(0)} \cdot A_n^{a+(n-1)h} - (A_1^h, \ldots, A_{n-1}^h)^{(1)} \cdot A_n^{a+(n-2)h}$$

$$+ (A_1^h, \ldots, A_{n-1}^h)^{(2)} \cdot A_n^{n+(n-3)h} - \ldots (-)^{n-1}(A_1^h, \ldots, A_{n-1}^h)^{(n-1)} \cdot A_n^{a+0h}$$

$$= A_n^a \cdot (A_n^h - A_1^h) \cdot (A_n^h - A_2^h) \cdot (A_n^h - A_3^h) \ldots\ldots (A_n^h - A_{n-1}^h)$$

so ist

$$601)\quad \|A_1^a A_2^{a+1h} A_3^{n+2h} \dots\dots\dots\dots A_n^{n+(n-1)h}) =$$

$$= A_n^a \cdot (A_n^h - A_1^h) \cdot (A_n^h - A_2^h) \cdot (A_n^h - A_3^h) \dots (A_n^h - A_{n-1}^h) \cdot \|A_1^a A_2^{a+1h} \dots\dots A_{n-1}^{a+(n-2)h})$$

Werden nach dieser Gleichung andere gebildet, und zwar dadurch, dass n = 1, 2, 3, ... , n gesetzt wird, und werden alle diese Gleichungen miteinander vervielfacht, so entsteht folgende sehr merkwürdige Wahrheit:

$$602)\quad \|A_1^a A_2^{n+1h} A_3^{a+2h} \dots\dots\dots A_n^{a+(n-1)h}) =$$

$$\begin{aligned}
= {} & A_1^n \\
\times {} & A_2^a \cdot (A_2^h - A_1^h) \\
\times {} & A_3^a \cdot (A_3^h - A_1^h) \cdot (A_3^h - A_2^h) \\
\times {} & A_4^n \cdot (A_4^h - A_1^h) \cdot (A_4^h - A_2^h) \cdot (A_4^h - A_3^h) \\
\times {} & A_5^n \cdot (A_5^h - A_1^h) \cdot (A_5^h - A_2^h) \cdot (A_5^h - A_3^h) \cdot (A_5^h - A_4^h) \\
& \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
\times {} & A_n^n \cdot (A_n^h - A_1^h) \cdot (A_n^h - A_2^h) \cdot (A_n^h - A_3^h) \cdot (A_n^h - A_4^h) \dots\dots (A_n^h - A_{n-1}^h)
\end{aligned}$$

Die übrigen Summen, welche früher vorgekommen sind, lassen sich vermittelst obiger Gleichungen in ähnliche Producte auflösen.

§. 167.

Machen wir hievon Anwendung auf den unendlichen Bruch

$$\frac{\|B^n A_1^{n+h} A_2^{n+2h} \dots\dots\dots\dots A_{n-1} A_{n+1} \dots\dots\dots\dots A_\alpha^\alpha)}{\|A_1^n A_2^{n+h} A_3^{a+2h} \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots A_\alpha^\alpha)} = \frac{P}{Q}$$

und setzen

$$(B - A_1)\ (B - A_2) \dots\dots (B - A_{p-1}) = \alpha (B - A_{p-1})$$

so ist

$$\big[\!\big| A_1^a\, A_2^{a+h} \ldots\ldots A_{n-1}^{a+(n-2)h}\; A_{n+1}^{a+(n-1)h} \ldots\ldots\ldots\ldots A_{n+m}^{a+(n+m-2)h} \big) =$$

$$= \frac{A_1^a A_2^n \ldots A_{n-1}^a A_{n+1}^n \ldots A_{n+m}^a \cdot \alpha(A_2^h - A_1^h) \ldots\ldots \alpha(A_{n-1}^h - A_{n-2}^h) \cdot \alpha(A_{n+1}^h - A_n^h) \ldots \alpha(A_{n+m}^h - A_{n+m-1}^h)}{(A_{n+1}^h - A_n^h)\;(A_{n+2}^h - A_n^h)\;(A_{n+3}^h - A_n^h)\;\ldots\ldots\;(A_{n+m}^h - A_n^h)}$$

und

$$\big[\!\big| A_1^a\, A_2^{a+h} \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\; A_{n+m-1}^{a+(n+m-2)h} \big) =$$

$$= A_1^a\, A_2^a \ldots\ldots A_{n+m-1}^a\; \alpha(A_2^h - A_1^h) \cdot \alpha(A_3^h - A_2^h) \ldots\ldots \alpha(A_{n+m-1}^h - A_{n+m-2}^h)$$

und

$$\big[\!\big| A_1^a\, A_2^{a+h} \ldots\ldots\ldots\ldots A_{n+m-1}^{a+(n+m-2)h}\; B^{a+(n+m-1)h} \big) =$$

$$= A_1^a\, A_2^a \ldots A_{n+m-1}^a\, B^a \cdot \alpha(A_2^h - A_1^h) \cdot \alpha(A_3^h - A_2^h) \ldots\ldots \alpha(A_{n+m-1}^h - A_{n+m-2}^h) \cdot \alpha(B^h - A_{n+m-1}^h)$$

folglich nach §. 156

$$L_m^{(n)} = \frac{A_{n+m}^a}{A_n^a} \cdot \frac{\alpha(A_{n+m}^h - A_{n+m-1}^h)}{\alpha(A_n^h - A_{n-1}^h)} \times \frac{1}{(A_{n+1}^h - A_n^h)(A_{n+2}^h - A_n^h)\;\ldots\ldots\;(A_{n+m}^h - A_n^h)}$$

und

$$V^{(n+m)} = \frac{B^a}{A_{n+m}^a} \cdot \frac{\alpha(B^h - A_{n+m-1}^h)}{\alpha(A_{n+m}^h - A_{n+m-1}^h)}$$

mithin

$$L_m^{(n)} \cdot V^{(n+m)} = \frac{B^a}{A_n^a} \cdot \frac{\alpha(B^h - A_{n+m-1}^h)}{\alpha(A_n^h - A_{n-1}^h)} \times \frac{1}{(A_{n+1}^h - A_n^h)\;(A_{n+2}^h - A_n^h)\;\ldots\ldots\;(A_{n+m}^h - A_n^h)}$$

oder

$$L_m^{(n)} \cdot V^{(n+m)} = (-)^m \frac{B^a}{A_n^a} \cdot \frac{(B^h - A_1^h)(B^h - A_2^h)\;\ldots\ldots\ldots\ldots\;(B^h - A_{n+m-1}^h)}{(A_n^h - A_1^h)(A_n^h - A_2^h)\ldots\ldots(A_n^h - A_{n-1}^h)(A_n^h - A_{n+1}^h)\ldots\ldots\ldots(A_n^h - A_{n+m}^h)}$$

Es ist daher

$$603)\quad (-)^{n+1}\cdot\frac{\left[\!\left[B^{a}\,A_{1}^{a+1h}\,A_{2}^{a+2h}\ldots\ldots A_{n-1}^{a+(n-1)h}\,A_{n+1}^{a+nh}\,A_{n+2}^{a+(n+1)h}\ldots\ldots\ldots A_{\infty}^{\infty}\right)\right.}{\left[\!\left[A_{1}^{a}\,A_{2}^{a+1h}\,A_{3}^{a+2h}\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;A_{\infty}^{\infty}\right)\right.}$$

$$=\frac{B^{a}}{A_{n}^{a}}\cdot\frac{(B^{h}-A_{1}^{h})(B^{h}-A_{2}^{h})(B^{h}-A_{3}^{h})\ldots\ldots(B^{h}-A_{n-1}^{h})}{(A_{n}^{h}-A_{1}^{h})(A_{n}^{h}-A_{2}^{h})(A_{n}^{h}-A_{3}^{h})\ldots\ldots(A_{n}^{h}-A_{n-1}^{h})}\times\left(1-\frac{B^{h}-A_{n}^{h}}{A_{n}^{h}-A_{n+1}^{h}}\right.$$

$$+\frac{(B^{h}-A_{n}^{h}\;)(B^{h}-A_{n+1}^{h})}{(A_{n}^{h}-A_{n+1}^{h})(A_{n}^{h}-A_{n+2}^{h})}$$

$$-\frac{(B^{h}-A_{n}^{h}\;)(B^{h}-A_{n+1}^{h})(B^{h}-A_{n+2}^{h})}{(A_{n}^{h}-A_{n+1}^{h})(A_{n}^{h}-A_{n+2}^{h})(A_{n}^{h}-A_{n+3}^{h})}$$

$$\left.+\;.\;.\;.\;.\;.\;-\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\right)$$

Dritte Abtheilung.

Producte mit Versetzungen, wenn die oberen Elemente höhere Unterschiede angeben.

§. 168.

Es ist nach §. 41.

$$\Delta(A_1 \cdot A_2 \cdot A_3 \cdot A_4) = \begin{array}{l} \Delta^0 A_1 \cdot \Delta^0 A_2 \cdot \Delta^0 A_3 \cdot \Delta^1 A_4 \\ \Delta^0 A_1 \cdot \Delta^0 A_2 \cdot \Delta^1 A_3 \cdot \Delta^0 A_4 \\ \Delta^0 A_1 \cdot \Delta^1 A_2 \cdot \Delta^0 A_3 \cdot \Delta^0 A_4 \\ \Delta^1 A_1 \cdot \Delta^0 A_2 \cdot \Delta^0 A_3 \cdot \Delta^0 A_4 \end{array} \quad + \begin{array}{cccc} \Delta^0 A_1 \cdot & \Delta^0 A_2 \cdot & \Delta^1 A_3 \cdot & \Delta^1 A_4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}$$

$$+ \begin{array}{cccc} \Delta^0 A_1 \cdot & \Delta^1 A_2 \cdot & \Delta^1 A_3 \cdot & \Delta^1 A_4 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{array} \quad + \Delta^1 A_1 \cdot \Delta^1 A_2 \cdot \Delta^1 A_3 \cdot \Delta^1 A_4$$

folglich

$$604)\quad \Delta \left[\!\left[\Delta^a A_1 . \Delta^b A_2 . \Delta^c A_3 . \Delta^d A_4 \right)\right. = \left[\!\left[\begin{array}{cccc} \Delta^a \; A_1 \;. & \Delta^b \; A_2 \;. & \Delta^c \; A_3 \;. & \Delta^{d+1} A_4 \\ a & b & c+1 & d \\ a & b+1 & c & d \\ a+1 & b & c & d \end{array} \right)\right.$$

$$+ \left[\!\left[\begin{array}{cccc} \Delta^a \; A_1 \;. & \Delta^b \; A_2 \;. & \Delta^{c+1} A_3 \;. & \Delta^{d+1} A_4 \\ a & b+1 & c & d+1 \\ a & b+1 & c+1 & d \\ a+1 & b & c & d+1 \\ a+1 & b & c+1 & d \\ a+1 & b+1 & c & d \end{array} \right)\right.$$

$$+ \left[\!\left[\begin{array}{cccc} \Delta^a \; A_1 \;. & \Delta^{b+1} A_2 \;. & \Delta^{c+1} A_3 \;. & \Delta^{d+1} A_4 \\ a+1 & b & c+1 & d+1 \\ a+1 & b+1 & c & d+1 \\ a+1 & b+1 & c+1 & d \end{array} \right)\right.$$

$$+ \left[\!\left[\Delta^{a+1} A_1 \;.\; \Delta^{b+1} A_2 \;.\; \Delta^{c+1} A_3 \;.\; \Delta^{d+1} A_4 \right)\right.$$

In dem Falle, wo $b = a+1$, $c = a+2$, $d = a+3$, ... , verschwinden alle die Summen, worin zwei obere Elemente gleich sind, und es ist

$$605)\quad \Delta \left[\!\left[\Delta^a A_1 \; \Delta^{a+1} A_2 \; \Delta^{a+2} A_3 \ldots . \Delta^{a+n} A_{n+1} \right)\right. = \left[\!\left[\Delta^a A_1 \; \Delta^{a+1} A_2 \ldots . \Delta^{a+n-1} A_n \; \Delta^{a+n+1} A_{n+1} \right)\right.$$

$$+ \left[\!\left[\Delta^a A_1 \; \Delta^{a+1} A_2 \ldots .. \Delta^{a+n-2} A_{n-1} \; \Delta^{a+n} A_n \; \Delta^{a+n+1} A_{n+1} \right)\right.$$

$$+ \left[\!\left[\Delta^a A_1 \; \Delta^{a+1} A_2 \ldots .. \Delta^{a+n-3} A_{n-2} \; \Delta^{a+n-1} A_{n-1} \; \Delta^{a+n} A_n \Delta^{a+n+1} A_{n+1} \right)\right.$$

$$+ \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.$$

$$+ \left[\!\left[\Delta^a A_1 \; \Delta^{a+1} A_2 \;.\;.\;.\;.\;.\; \Delta^{a+x} A_{x+1} \; \Delta^{a+x+2} A_{x+2} \;.\;.\;.\;.\;.\; \Delta^{a+n+1} A_{n+1} \right)\right.$$

$$+ \;.$$

$$+ \left[\!\left[\Delta^{a+1} A_1 \; \Delta^{a+2} A_2 \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; . \Delta^{a+n+1} A_{n+1} \right)\right.$$

§. 169.

Der Unterschied des Bruches

$$\frac{\Big[\!\Big|\Delta^{a}A_{1}\ \Delta^{a+1}A_{2}\ \Delta^{a+2}A_{3}\ \ldots\ldots\ldots\ \Delta^{a+n-2}A_{n-1}\ \Delta^{a+n-1}A_{n+1}\Big)}{\Big[\!\Big|\Delta^{a}A_{1}\ \Delta^{a+1}A_{2}\ \Delta^{a+2}A_{3}\ \ldots\ldots\ldots\ \Delta^{a+n-1}A_{n}\Big)}=\frac{P}{Q}$$

lässt sich auf folgende Weise näher bestimmen. Es ist

$$\Delta\left(\frac{P}{Q}\right)=\frac{P+\Delta P}{Q+\Delta Q}-\frac{P}{Q}=\frac{Q.\Delta P-P.\Delta Q}{Q\,(Q+\Delta Q)}$$

Nach dem Obigen ist aber

$$Q.\Delta P=Q.\Sigma_{p}\Big[\!\Big|\Delta^{a}A_{1}\ \Delta^{a+1}A_{2}\overset{a+p-1,\ a+p+1}{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots}\Delta^{a+n-1}A_{n-1}\Delta^{a+n}A_{n+1}\Big)$$

und

$$P.\Delta Q=P.\Sigma_{p}\Big[\!\Big|\Delta^{a}A_{1}\ \Delta^{a+1}A_{2}\overset{a+p-1,\ a+p+1}{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots}\Delta^{a+n}A_{n}\Big)$$

wo in beiden $p=0,\ 1,\ 2,\ \ldots\ldots,\ n-1$ vertritt, folglich der Zähler des Bruches

$$Q.\Delta P-P.\Delta Q=$$

$$=\Sigma_{p}\Big(\Big[\!\Big|\Delta^{a}A_{1}\ldots\ldots\Delta^{a+n-1}A_{n}\Big).\Big[\!\Big|\Delta^{a}A_{1}\overset{a+p-1,\ a+p+1}{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots}\Delta^{a+n-1}A_{n-1}\Delta^{a+n}A_{n+1}\Big)$$

$$-\Big[\!\Big|\Delta^{a}A_{1}\overset{a+p-1,\ a+p+1}{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots}\Delta^{a+n}A_{n}\Big).\Big[\!\Big|\Delta^{a}A_{1}\ldots\ldots\Delta^{a+n-2}A_{n-1}\ \Delta^{a+n-1}A_{n+1}\Big)\Big)$$

und nach der Hülfsgleichung 541

$$=\Sigma_{p}\Big[\!\Big|\Delta^{a}A_{1}\ldots\ldots\Delta^{a+n}A_{n+1}\Big).\Big[\!\Big|\Delta^{a}A_{1}\overset{a+p-1,\ a+p+1}{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots}\Delta^{a+n-1}A_{n-1}\Big)$$

$$=\Big[\!\Big|\Delta^{a}A_{1}\ldots\ldots\Delta^{a+n}A_{n+1}\Big).\Sigma\Big[\!\Big|\Delta^{a}A_{1}\overset{a+p-1,\ a+p+1}{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots}\Delta^{a+n-1}A_{n-1}\Big)$$

Nach 605 ist der Nenner des Bruches

$$Q(Q+\Delta Q) =$$

$$= \left\|\Delta^a A_1 \ldots\ldots\ldots \Delta^{a+n-1} A_n\right) \ \Sigma_q \left\| \Delta^a A_1 \overset{a+q-1,\ a+q+1}{\cdots\cdots\cdots\cdots} \Delta^{a+n} A_n\right)$$

wo $q = 0, 1, \ldots\ldots, n$

Es ist folglich der Unterschied des Bruches

$$606) \quad \Delta\left(\frac{\left\|\Delta^a A_1\ \Delta^{a+1} A_2 \ldots\ldots\ldots \Delta^{a+n-2} A_{n-1}\ \Delta^{a+n-1} A_{n+1}\right)}{\left\|\Delta^a A_1\ \Delta^{a+1} A_2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \Delta^{a+n-1} A_n\right)}\right) =$$

$$= \frac{\left\|\Delta^a A_1\ \Delta^{a+1} A_2 \ldots\ldots \Delta^{a+n} A_{n+1}\right) \cdot \Sigma_p \left\|\Delta^a A_1 \overset{a+p-1,\ a+p+1}{\cdots\cdots\cdots\cdots} \Delta^{a+n-1} A_{n-1}\right)}{\left\|\Delta^a A_1\ \Delta^{a+1} A_2 \ldots \Delta^{a+n-1} A_n\right) \cdot \Sigma_q \left\|\Delta^a A_1 \overset{a+q-1,\ a+q+1}{\cdots\cdots\cdots\cdots} \Delta^{a+n} A_n\right)}$$

wo $p = 0, 1, 2, \ldots, n-1$ und $q = 0, 1, 2, \ldots\ldots, n$, und wo

$$\begin{aligned}
\Sigma_p \left\|\Delta^a A_1 \overset{a+p-1,\ a+p+1}{\cdots\cdots\cdots} \Delta^{a+n-1} A_{n-1}\right) = & \left\|\Delta^a A_1 \ldots\ldots\ldots\ldots \Delta^{a+n-2} A_{n-1}\right) \\
& + \left\|\Delta^a A_1 \ldots\ldots \Delta^{a+n-3} A_{n-2}\ \Delta^{a+n-1} A_{n-1}\right) \\
& + \left\|\Delta^a A_1 \ldots \Delta^{a+n-4} A_{n-3}\ \Delta^{a+n-2} A_{n-2}\ \Delta^{a+n-1} A_{n-1}\right) \\
& + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
& + \left\|\Delta^{a+1} A_1 \ldots\ldots\ldots\ldots \Delta^{a+n-1} A_{n-1}\right)
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
\Sigma_q \left\|\Delta^a A_1 \overset{a+q-1,\ a+q+1}{\cdots\cdots\cdots} \Delta^{a+n} A_n\right) = & \left\|\Delta^a A_1 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \Delta^{a+n-1} A_n\right) \\
& + \left\|\Delta^a A_1 \ldots\ldots\ldots \Delta^{a+n-2} A_{n-1}\ \Delta^{a+n} A_n\right) \\
& + \left\|\Delta^a A_1 \ldots \Delta^{a+n-3} A_{n-2}\ \Delta^{a+n-1} A_{n-1}\ \Delta^{a+n} A_n\right) \\
& + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
& + \left\|\Delta^{a+1} A_1 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \Delta^{a+n} A_n\right)
\end{aligned}$$

Bilden wir nach 606 eine Gleichung, worin A_{n+2} statt A_{n+1} gesetzt wird, und messen sie durch die Gleichung 606, so entsteht eine andere, in welcher die Reihen Σ_p und Σ_q nicht mehr vorkommen, nämlich die Gleichung

$$607)\ \frac{\left[\left|\Delta^a A_1 \Delta^{a+1} A_2 \ldots \Delta^{a+n-1} A_n \Delta^{a+n} A_{n+2}\right)\right.}{\left[\left|\Delta^a A_1 \Delta^{a+1} A_2 \ldots \Delta^{a+n-1} A_n \Delta^{a+n} A_{n+1}\right)\right.} = \frac{\Delta\left(\frac{\left[\left|\Delta^a A_1\ \Delta^{a+1} A_2 \ldots\ldots \Delta^{a+n-2} A_{n-1}\ \Delta^{a+n-1} A_{n+2}\right)\right.}{\left[\left|\Delta^a A_1\ \Delta^{a+1} A_2\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ \Delta^{a+n-1} A_n\right)\right.}\right)}{\Delta\left(\frac{\left[\left|\Delta^a A_1\ \Delta^{a+1} A_2 \ldots\ldots \Delta^{a+n-2} A_{n-1}\ \Delta^{a+n-1} A_{n+1}\right)\right.}{\left[\left|\Delta^a A_1\ \Delta^{a+1} A_2\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ \Delta^{a+n-1} A_n\right)\right.}\right)}$$

Diese Gleichung ist diejenige, welche in der Theorie der Reihen grosse Dienste leistet.

Vierte Abtheilung.

PRODUCTE MIT VERSETZUNGEN, WENN DIE ELEMENTE DAS DIFFERENTIIREN MIT ABWECHSELNDEM VERVIELFACHEN ANGEBEN.

I. Allgemeine Untersuchung.

§. 170.

Wenn Z, A_1, A_2, A_3, ... , verschiedene Functionen mehrerer verschiedener veränderlicher Grössen sind, so ist

$$
\begin{aligned}
Zd\left((Zd)^a A_1 \,.\, (Zd)^b A_2 \,.\, (Zd)^c A_3 \,.\, (Zd)^d A_4\right) = \\
& (Zd)^{1+a} A_1 \,.\, (Zd)^b A_2 \,.\, (Zd)^c A_3 \,.\, (Zd)^d A_4 \\
+ & (Zd)^a A_1 \,.\, (Zd)^{1+b} A_2 \,.\, (Zd)^c A_3 \,.\, (Zd)^d A_4 \\
+ & (Zd)^a A_1 \,.\, (Zd)^b A_2 \,.\, (Zd)^{1+c} A_3 \,.\, (Zd)^d A_4 \\
+ & (Zd)^a A_1 \,.\, (Zd)^b A_2 \,.\, (Zd)^c A_3 \,.\, (Zd)^{1+d} A_4
\end{aligned}
$$

folglich

608) $$Zd\Big[\!\!\Big[(Zd)^{a1}A_1\,.\,(Zd)^{a2}A_2\,.\,(Zd)^{a3}A_3\,.\;.\;.\;(Zd)^{an}A_n\Big) =$$

$$= \Big[\!\!\Big[(Zd)^{1+a1}A_1\,.\,(Zd)^{a2}\;A_2\,.\,(Zd)^{a3}\;A_3\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;(Zd)^{an}\;A_n\Big)$$

$$+ \Big[\!\!\Big[(Zd)^{a1}\;A_1\,.\,(Zd)^{1+a2}A_2\,.\,(Zd)^{a3}\;A_3\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;(Zd)^{an}\;A_n\Big)$$

$$+ \Big[\!\!\Big[(Zd)^{a1}\;A_1\,.\,(Zd)^{a2}\;A_2\,.\,(Zd)^{1+a3}A_3\,.\,(Zd)^{a4}A_4\,.\;.\;.\;(Zd)^{an}\;A_n\Big)$$

$$+ \;.$$

$$+ \Big[\!\!\Big[(Zd)^{a1}\;A_1\,.\,(Zd)^{a2}\;A_2\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;(Zd)^{a(n-1)}A_{n-1}\,.\,(Zd)^{1+an}A_n\Big)$$

Wenn nun die Summe

$$\Big[\!\!\Big[(Zd)^{a}A_1\,.\,(Zd)^{a+1}A_2\,.\,(Zd)^{a+2}A_3\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;(Zd)^{a+n-1}A_n\Big)$$

differentiirt werden soll, so muss jedes Differential erhöhet werden; da nun aber, wenn unter den oberen Elementen zwei Elemente gleich sind, die Summe verschwindet, so bleibt nur eine Summe übrig, und es ist das Differential

609) $$Zd\Big[\!\!\Big[(Zd)^{a}A_1.(Zd)^{a+1}A_2.(Zd)^{a+2}A_3...(Zd)^{a+n-1}A_n\Big) =$$

$$= \Big[\!\!\Big[(Zd)^{a}A_1.(Zd)^{a+1}A_2.(Zd)^{a+2}A_3...(Zd)^{a+n-2}A_{n-1}.(Zd)^{a+n}A_n\Big)$$

Das Differentiiren der vorstehenden Summe besteht also nur in dem Erhöhen des letzten Differentials, welches in der Summe vorkommt.

§. 171.

Das mit Z vervielfachte Differential des Bruches

$$\frac{\Big[\!\!\Big[(Zd)^{a}\;A_1\,.\,(Zd)^{a+1}A_2\;.\;.\;.\;.\;(Zd)^{a+n-1}A_n\;\Big)}{\Big[\!\!\Big[(Zd)^{a+1}A_1\,.\,(Zd)^{a+2}A_2\;.\;.\;.\;.\;(Zd)^{a+n-1}A_{n-1}\Big)} = \frac{P}{Q}$$

ist

$$\frac{Q \,.\, ZdP - P \,.\, ZdQ}{Q^2}$$

Es ist aber nach 609

$$ZdP = \left\| (Zd)^a A_1 \;.\;.\;.\;.\; (Zd)^{a+n-2} A_{n-1} \,.\, (Zd)^{a+n} A_n \right)$$

$$ZdQ = \left\| (Zd)^{a+1} A_1 \;.\;.\;.\;.\;.\; (Zd)^{a+n-2} A_{n-2} \,.\, (Zd)^{a+n} A_{n-1} \right)$$

folglich

$$Q \,.\, ZdP - P \,.\, ZdQ =$$

$$= \left\| (Zd)^a A_1 .... (Zd)^{a+n-2} A_{n-1} \,.\, (Zd)^{a+n} A_n \right) \,.\, \left\| (Zd)^{a+1} A_1 \;......\; (Zd)^{a+n-1} A_{n-1} \right)$$

$$- \left\| (Zd)^a A_1 \;.\;.\;.\;.\;.\; (Zd)^{a+n-1} A_n \right) \,.\, \left\| (Zd)^{a+1} A_1 \,...\, (Zd)^{a+n-2} A_{n-2} \,.\, (Zd)^{a+n} A_{n-1} \right)$$

ferner ist nach 543

$$\Sigma\ (-)^* \left\| \begin{matrix} a1 & b1 & . & . & . & . & . & . & . & bp, a(p+1) \\ A_1 & & . & . & . & . & . & & & A_{p+2} \end{matrix} \right) \cdot \left\| \begin{matrix} b1 & . & . & . & . & . & . & . & . & bp, a(p+2) \\ A_1 & & . & . & . & . & . & . & . & A_{p+1} \end{matrix} \right) = 0$$

mithin, wenn a1 = a, a(p+1) = a+n, a(p+2) = a+n-1, b1 = a+1, b2 = a+2, . . . , bp = a+n-2 gesetzt wird, so ist

$$0 = \left\| (Zd)^a\ A_1 \;.\;.\;.\;.\;.\;.\; (Zd)^{a+n}\ A^n \right) . \left\| (Zd)^{a+1} A_1 \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; (Zd)^{a+n-1} A_{n-1} \right)$$

$$- \left\| (Zd)^a\ A_1 \;.\;.\;.\;.\;.\;.\; (Zd)^{a+n-1} A_n \right) \cdot \left\| (Zd)^{a+1} A_1 .... (Zd)^{a+n-2} A_{n-2} . (Zd)^{a+n}\ A_{n-1} \right)$$

$$+ \left\| (Zd)^{a+n} A_1 . (Zd)^{a+1} A_2 ... (Zd)^{a+n-1} A_n \right) \cdot \left\| (Zd)^{a+1} A_1 .... (Zd)^{a+n-2} A_{n-2} . (Zd)^a\ A_{n-1} \right)$$

Es ist daher, wenn auf die Zeichen Rücksicht genommen wird

$$Q \,.\, ZdP - P \,.\, ZdQ = \left\| (Zd)^{a+1} A_1 .... (Zd)^{a+n} A_n \right) \cdot \left\| (Zd)^a A_1 .... (Zd)^{a+n-2} A_{n-1} \right)$$

und das Differential des vorgegebenen Bruches

$$610)\quad Zd\left(\frac{\Big\|(Zd)^{a}\ A_1\,.\,(Zd)^{a+1}A_2\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ (Zd)^{a+n-1}A_n\ \Big)}{\Big\|(Zd)^{a+1}A_1\,.\,(Zd)^{a+2}A_2\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ (Zd)^{a+n-1}A_{n-1}\Big)}\right) =$$

$$= \frac{\Big\|(Zd)^{a}\ A_1\ .\ .\ .\ (Zd)^{a+n-2}A_{n-1}\Big)}{\Big\|(Zd)^{a+1}A_1\ .\ .\ .\ (Zd)^{a+n-1}A_{n-1}\Big)} \cdot \frac{\Big\|(Zd)^{a+1}A_1\ .\ .\ .\ (Zd)^{a+n}\ A_n\ \Big)}{\Big\|(Zd)^{a+1}A_1\ .\ .\ .\ (Zd)^{a+n-1}A_{n-1}\Big)}$$

§. 172.

Eben so finden wir das Differential des Bruches

$$\frac{\Big\|(Zd)^{a}A_1\,.\,(Zd)^{a+1}A_2\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ (Zd)^{a+n-2}A_{n-1}\,.\,(Zd)^{a+n-1}A_{n+1}\Big)}{\Big\|(Zd)^{a}A_1\,.\,(Zd)^{a+1}A_2\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ (Zd)^{a+n-2}A_{n-1}\,.\,(Zd)^{a+n-1}A_n\ \Big)} = \frac{R}{U}$$

Es ist

$$Zd\left(\frac{R}{U}\right) = \frac{U\ .\ Zd\,R\ -\ R\ .\ Zd\,U}{U^2}$$

$$Zd\,R = \Big\|(Zd)^{a}A_1\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ (Zd)^{a+n-2}A_{n-1}\,.\,(Zd)^{a+n}A_{n+1}\Big)$$

$$Zd\,U = \Big\|(Zd)^{a}A_1\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ (Zd)^{a+n-2}A_{n-1}\,.\,(Zd)^{a+n}A_n\ \Big)$$

also der Zähler des Bruches =

$$\Big\|(Zd)^{a}A_1\ldots(Zd)^{a+n-2}A_{n-1}.(Zd)^{a+n-1}A_n\ \Big).\Big\|(Zd)^{a}A_1\ldots.(Zd)^{a+n-2}A_{n-1}.(Zd)^{a+n}A_{n+1}\Big)$$
$$-\Big\|(Zd)^{a}A_1\ldots(Zd)^{a+n-2}A_{n-1}.(Zd)^{a+n-1}A_{n+1}\Big).\Big\|(Zd)^{a}A_1\ldots.(Zd)^{a+n-2}A_{n-1}.(Zd)^{a+n}A_n\ \Big)$$

allein nach 542 ist

$$\left\|\overset{b_1}{A_1}\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \overset{bp}{A_p}\right)\cdot\left\|\overset{a}{B_1}\overset{b_1}{A_1}\ldots A_p\overset{b(p+1)}{B_{p+2}}\right)=\left\|\overset{b_1}{A_1}\ \ldots\ldots\ \overset{bp}{A_p}\overset{a}{B_1}\right)\cdot\left\|\overset{b_1}{A_1}\ \ldots\ldots\ A_p\ \overset{b(p+1)}{B_{p+2}}\right)$$

$$-\left\|\overset{b_1}{A_1}\ \ldots\ldots\ \overset{bp}{A_p}\overset{a}{B_{p+2}}\right)\cdot\left\|\overset{b_1}{A_1}\ \ldots\ldots\ A_p\overset{b(p+1)}{B_1}\right)$$

folglich der Zähler des Bruches $=$

$$=\left\|(Zd)^a A_1\ \ldots\ldots\ (Zd)^{a+n-2}A_{n-1}\right)\,.\,\left\|(Zd)^a A_1\ \ldots\ldots\ldots\,(Zd)^{a+n}A_{n+1}\right)$$

und endlich das mit Z vervielfachte Differential des vorgegebenen Bruches $\frac{R}{U}$ ist

$$611)\ Zd\left(\frac{\left\|(Zd)^a A_1\,.\,(Zd)^{a+1}A_2\ \ldots\ldots\ (Zd)^{a+n-2}A_{n-1}\,.\,(Zd)^{a+n-1}A_{n+1}\right)}{\left\|(Zd)^a A_1\,.\,(Zd)^{a+1}A_2\ \ldots\ldots\ (Zd)^{a+n-2}A_{n-1}\,.\,(Zd)^{a+n-1}A_n\right)}\right)=$$

$$=\frac{\left\|(Zd)^a A_1.(Zd)^{a+1}A_2\ldots\ldots(Zd)^{a+n-2}A_{n-1}\right)}{\left\|(Zd)^a A_1.(Zd)^{a+1}A_2\ldots\ldots(Zd)^{a+n-1}A_n\right)}\cdot\frac{\left\|(Zd)^a A_1.(Zd)^{a+1}A_2\ldots\ldots(Zd)^{a+n}A_{n+1}\right)}{\left\|(Zd)^a A_1.(Zd)^{a+1}A_2\ldots\ldots(Zd)^{a+n-1}A_n\right)}$$

Diese Gleichung gibt zu einer zweiten für die Folge eben so wichtigen Gleichung Veranlassung; wird nämlich nach vorstehender eine andere Gleichung gebildet, in welcher A_{n+2} statt A_{n+1} steht, und diese durch die vorstehende gemessen, so wird

$$612)\quad \frac{Zd\left(\dfrac{\Big\|(Zd)^a A_1 . (Zd)^{a+1} A_2 \,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\, (Zd)^{a+n-2} A_{n-1} . (Zd)^{a+n-1} A_{n+2}\Big)}{\Big\|(Zd)^a A_1 . (Zd)^{a+1} A_2 \,.\,.\,.\,.\,.\,.\, (Zd)^{a+n-2} A_{n-1} . (Zd)^{a+n-1} A_n \Big)}\right)}{Zd\left(\dfrac{\Big\|(Zd)^a A_1 . (Zd)^{a+1} A_2 \,.\,.\,.\,.\,.\,.\, (Zd)^{a+n-2} A_{n-1} . (Zd)^{a+n-1} A_{n+1}\Big)}{\Big\|(Zd)^a A_1 . (Zd)^{a+1} A_2 \,.\,.\,.\,.\,.\,.\, (Zd)^{a+n-2} A_{n-1} . (Zd)^{a+n-1} A_n \Big)}\right)} =$$

$$= \frac{\Big\|(Zd)^a A_1 . (Zd)^{a+1} A_2 \,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\, (Zd)^{a+n-1} A_n \;. (Zd)^{a+n} A_{n+2}\Big)}{\Big\|(Zd)^a A_1 . (Zd)^{a+1} A_2 \,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\, (Zd)^{a+n-1} A_n \;. (Zd)^{a+n} A_{n+1}\Big)}$$

II. Auflösen der Producte mit Versetzungen in ein einfaches fortlaufendes Differentiiren mit abwechselndem Vervielfachen.

---

§. 173.

Machen wir von dieser so eben gefundenen, für die Theorie der Reihen so wichtigen Gleichung Anwendung auf den Fall, wenn die Elemente Potenzen einer Grösse A sind, so ist

$$613)\ \frac{[\![(\mathrm{Z}d)^1\mathrm{A}^{n1}.(\mathrm{Z}d)^2\mathrm{A}^{n2}\ldots(\mathrm{Z}d)^n\mathrm{A}^{nn}.(\mathrm{Z}d)^{n+1}\mathrm{B}\ \Big)}{[\![(\mathrm{Z}d)^1\mathrm{A}^{n1}.(\mathrm{Z}d)^2\mathrm{A}^{n2}\ldots(\mathrm{Z}d)^n\mathrm{A}^{nn}.(\mathrm{Z}d)^{n+1}\mathrm{A}^{n(n+1)}\Big)} =$$

$$\frac{\mathrm{Z}d\left(\dfrac{[\![(\mathrm{Z}d)^1\mathrm{A}^{n1}(\mathrm{Z}d)^2\mathrm{A}^{n2}\ldots.(\mathrm{Z}d)^{n-1}\mathrm{A}^{n(n-1)}(\mathrm{Z}d)^n\mathrm{B}\ \Big)}{[\![(\mathrm{Z}d)^1\mathrm{A}^{n1}(\mathrm{Z}d)^2\mathrm{A}^{n2}\ldots.(\mathrm{Z}d)^{n-1}\mathrm{A}^{n(n-1)}(\mathrm{Z}d)^n\mathrm{A}^{nn}\ \Big)}\right)}{\mathrm{Z}d\left(\dfrac{[\![(\mathrm{Z}d)^1\mathrm{A}^{n1}(\mathrm{Z}d)^2\mathrm{A}^{n2}\ldots.(\mathrm{Z}d)^{n-1}\mathrm{A}^{n(n-1)}(\mathrm{Z}d)^n\mathrm{A}^{n(n+1)}\Big)}{[\![(\mathrm{Z}d)^1\mathrm{A}^{n1}(\mathrm{Z}d)^2\mathrm{A}^{n2}\ldots.(\mathrm{Z}d)^{n-1}\mathrm{A}^{n(n-1)}(\mathrm{Z}d)^n\mathrm{A}^{nn}\ \Big)}\right)}$$

Diese Gleichung zeigt, wie der erste Bruch, worin d^1, d^2, ... , d^{n+1} vorkommt, durch das Differentiiren zweier anderer Brüche, worin nur d^1, d^2, . . . , d^n sich befindet, gewonnen werden kann; sie weiset d^{n+1} auf d^n zurück, also d^n auf d^{n-1}, d^{n-1} auf d^{n-2}, ... Gehen wir bis zu d^2, d^1 herab, so können wir hiedurch den vorstehenden Bruch in ein allmäliges Differentiiren einer Grundfunction auflösen.

Bezeichnen wir also, um den Gegenstand mitgrösserer Leichtigkeit verfolgen zu können, den ersten Bruch durch (n+1, B), so ist

$$(n+1\,,\,B) = \frac{Zd(n\,,\,B)}{Zd(n\,,\,A^{a(n+1)})}$$

Für $n = 1$ ist

$$\Big\|(Zd)^1 A^{a1} . (Zd)^2 B\Big) = (Zd)^1 A^{a1} . (Zd)^2 B - (Zd)^2 A^{a1} . (Zd)^1 B =$$

$$\Big(Zd\,(A^{a1})\Big)^2 . Zd\left(\frac{dB}{d\,(A^{a1})}\right)$$

$$\Big\|(Zd)^1 A^{a1} . (Zd)^2 A^{a2}\Big) = \Big(Zd\;(A^{a1})\Big)^2 . Zd\left(\frac{d\,(A^{a2})}{d\,(A^{a1})}\right) = \frac{a2}{a1} . \Big(Zd\,(A^{a1})\Big)^2 . Zd\,(A^{a2-a1})$$

also

$$(2,B) = \frac{\Big\|(Zd)^1 A^{a1}\;\;.\;(Zd)^2 B\;\Big)}{\Big\|(Zd)^1 A^{a1}\;\;.\;(Zd)^2 A^{a2}\Big)} = \frac{a1}{a2} . \frac{1}{d\,(A^{a2-a1})} . d\left(\frac{dB}{d(A^{a1})}\right)$$

und wenn $B = A^{ap}$ gesetzt wird

$$(2,A^{ap}) = \frac{\Big\|(Zd)^1 A^{a1}\;\;.\;(Zd)^2 A^{ap}\Big)}{\Big\|(Zd)^1 A^{a1}\;\;.\;(Zd)^2 A^{a2}\Big)} = \frac{ap}{a2} . \frac{ap - a1}{a2 - a1} . A^{ap-a2}$$

und wenn a3 statt ap gesetzt wird

$$(2,A^{a3}) = \frac{a3}{a2} . \frac{a3 - a1}{a2 - a1} . A^{a3-a2}$$

Nach diesem ergeben sich folgende Gleichungen:

$$(3,B) = \frac{Zd(2,B)}{Zd(2,A^{a3})} = \frac{a1}{a3} . \frac{a2-a1}{a3-a1} . \frac{1}{d(A^{a3-a2})} . d\,{}_{2}\!\left(\frac{1}{d(A^{a2-a1})} . d\,{}_{1}\!\left(\frac{dB}{d(A^{a1})}\right)_{1}\right)_{2}$$

und

$$(3,A^{ap}) = \frac{Zd(2,A^{ap})}{Zd(2,A^{a3})} = \frac{ap}{a3} \cdot \frac{ap-a1}{a3-a1} \cdot \frac{ap-a2}{a3-a2} \cdot A^{ap-a3}$$

und

$$(3,A^{a4}) = \frac{a4}{a3} \cdot \frac{a4-a1}{a3-a1} \cdot \frac{a4-a2}{a3-a2} \cdot A^{a4-a3}$$

Ferner ist

$$(4,B) = \frac{Zd(3,B)}{Zd(3,A^{a4})} =$$

$$\frac{a1}{a4} \cdot \frac{a2-a1}{a4-a1} \cdot \frac{a3-a2}{a4-a2} \cdot \frac{1}{d(A^{a4-a3})} \cdot d\left(_3 \frac{1}{d(A^{a3-a2})} \cdot d\left(_2 \frac{1}{d(A^{a2-a1})} \cdot d\left(_1 \frac{dB}{d(A^{a1})}\right)_1 \right)_2 \right)_3$$

und

$$(4,A^{ap}) = \frac{Zd(3,A^{ap})}{Zd(3,A^{a4})} = \frac{ap}{a4} \cdot \frac{ap-a1}{a4-a1} \cdot \frac{ap-a2}{a4-a2} \cdot \frac{ap-a3}{a4-a3} \cdot A^{ap-a4}$$

Dieser stäte und unabänderliche Uebergang von n zu n+1 führt zu folgenden allgemeinen Gleichungen:

$$614)\ \frac{\left\|(Zd)^1 A^{a1} \ldots (Zd)^{n-1} A^{a(n-1)} . (Zd)^n B\right)}{\left\|(Zd)^1 A^{a1} \ldots\ldots\ldots (Zd)^n A^{an}\right)} = \frac{a1}{an} \cdot \frac{a2-a1}{an-a1} \ldots \frac{a(n-1)-a(n-2)}{an-a(n-2)} \times$$

$$\times \frac{1}{d(A^{an-a(n-1)})} \cdot d\left(_{n-1} \frac{1}{d(A^{a(n-1)-a(n-2)})} \cdot \ldots d\left(_2 \frac{1}{d(A^{a2-a1})} . d\left(_1 \frac{dB}{d(A^{a1})}\right)_1 \right)_2 \ldots \right)_{n-1}$$

und

$$615)\ \frac{\left\|(Zd)^1 A^{a1} \ldots (Zd)^{n-1} A^{a(n-1)} . (Zd)^n A^{ap}\right)}{\left\|(Zd)^1 A^{a1} \ldots\ldots\ldots (Zd)^n A^{an}\right)} = \frac{ap}{an} \cdot \frac{ap-a1}{an-a1} \ldots \frac{ap-a(n-1)}{an-a(n-1)} \cdot A^{ap-an}$$

Nach der allgemeinsten Gleichung 614 kann der vorstehende Bruch durch ein fortgesetztes Differentiiren und Messen, welche mit einander abwechseln, hervorgebracht werden. Den Nutzen von diesem Zurückführen auf diese beiden mit einander abwechselnden Geschäfte bewährt die Gleichung 615.

Wir können noch weiter gehen, und sind nach §. 124 im Stande, den allgemeinen Bruch in 614 auf das Differentiiren und Messen mit einfacheren Grössen, als in 614 vorkommen, zurückzubringen; es ist nämlich

$$616)\quad \frac{\left[(Zd)^1A^{a1}.(Zd)^2A^{a2}\,.......(Zd)^{n-1}A^{a(n-1)}(Zd)^nB\right)}{\left[(Zd)^1A^{a1}.(Zd)^2A^{a2}\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;(Zd)^nA^{an}\right)} =$$

$$= \frac{1}{an.(an-a1)(an-a2)\,......\,(an-a(n-1))}.\left(B_1^{(n)}.A^{1-an}.\frac{d}{dA}\left({}_1B\right)_1\right.$$

$$+\;B_2^{(n)}.A^{2-an}.\frac{d}{dA}\left({}_2\frac{d}{dA}\left({}_1B\right)_1\right)_2$$

$$+\;B_3^{(n)}.A^{3-an}.\frac{d}{dA}\left({}_3\frac{d}{dA}\left({}_2\frac{d}{dA}\left({}_1B\right)_1\right)_2\right)_3$$

$$+\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.$$

$$\left.+\;B_n^{(n)}.A^{n-an}.\frac{d}{dA}\left({}_n\frac{d}{dA}\left({}_{n-1}\,.......\,\frac{d}{dA}\left({}_1B\right)_1.....\right)\right)_n\right)$$

wo die Vorzahlen $B_1^{(n)}$, $B_2^{(n)}$, . . . , $B_n^{(n)}$ folgendes Gesetz befolgen:

$$617)\qquad \begin{aligned} B_1^{(n)} &= (1-a(n-1))\,.\,B_1^{(n-1)} \\ B_2^{(n)} &= (2-a(n-1))\,.\,B_2^{(n-1)} + B_1^{(n-1)} \\ B_3^{(n)} &= (3-a(n-1))\,.\,B_3^{(n-1)} + B_2^{(n-1)} \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ B_n^{(n)} &= \qquad 0 \qquad + B_{n-1}^{(n-1)} \end{aligned}$$

oder auch nach folgendem Gesetze gebildet werden können:

$$618)\qquad \begin{aligned} B_q^{(n)} = &\ (q-a(n-1))\quad B_q^{(n-1)} \\ &+ (q-1-a(n-2))\,.\,B_{q-1}^{(n-2)} \\ &+ (q-2-a(n-3))\,.\,B_{q-2}^{(n-3)} \\ &+ \ldots\ldots\ldots \\ &+ (q-q-a(n-q-1)\,.\,B_0^{(n-q-1)} \end{aligned}$$

Die unabhängige Bildungsweise dieser Vorzahlen ist nach 464

$$619)\qquad B_q^{(n)} = (1-a1, 2-a2, 3-a3, \ldots, n-1-a(n-1))^{(n-q)}$$

oder nach 465

$$620)\qquad \begin{aligned} B_q^{(n)} = (-)^{q-1}\frac{1}{1^{q-1|1}}\,.\,\Bigg(&\frac{(q-1)^{0|-1}}{1^{0|1}}\,.\,(1-a1)\ (1-a2)\ \ldots\ (1-a(n-1)) \\ &- \frac{(q-1)^{1|-1}}{1^{1|1}}\,.\,(2-a1)\ (2-a2)\ \ldots\ (2-a(n-1)) \\ &+ \frac{(q-1)^{2|-1}}{1^{2|1}}\,.\,(3-a1)\ (3-a2)\ \ldots\ (3-a(n-1)) \\ &- \ldots\ldots + \ldots\ldots \\ &(-)^{q-1}\frac{(q-1)^{q-1|-1}}{1^{q-1|1}}\,.\,(q-a1)(q-a2)\ \ldots\ (q-a(n-1)) \Bigg) \end{aligned}$$

Oder, wenn diese Producte nach den Potenzen der Zahlen 1, 2, 3, ..., q entwickelt werden, so nimmt diese unabhängige Bildungsweise nach der Gleichung 645 unserer Analysis folgende Gestalt an:

$$621)\qquad \begin{aligned} B_q^{(n)} = &+ (a1,\ a2,\ \ldots,\ a(n-1))^{(0)}\,.\,[1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ q]^{(n-q)} \\ &- (a1,\ a2,\ \ldots,\ a(n-1))^{(1)}\,.\,[1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ q]^{(n-q-1)} \\ &+ (a1,\ a2,\ \ldots,\ a(n-1))^{(2)}\,.\,[1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ q]^{(n-q-2)} \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &(-)^{n-q}\,(a1,\ a2,\ \ldots,\ a(n-1))^{(n-q)}\,.\,[1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ q]^{(0)} \end{aligned}$$

Will man den Bruch in 613 nicht bis zu diesen einfachen Differentialen verfolgen, und nur durch eine Gleichung den Weg angeben, auf welchem man zu ihnen gelangen kann, so setze man in 615, p = n+1, differentiire dann die Gleichung 615 und führe sie in die Gleichung 613 ein; es entsteht, nachdem n statt n+1 gesetzt ist, die Gleichung

$$622)\qquad \frac{\Big\|(Zd)^1A^{a1}.(Zd)^2A^{a2}\ldots.(Zd)^{n-1}A^{a(n-1)}.(Zd)^nB\ \Big)}{\Big\|(Zd)^1A^{a1}.(Zd)^2A^{a2}\ \ldots\ldots\ldots\ (Zd)^nA^{an}\Big)} =$$

$$= \frac{a(n-1)}{an}\,.\,\frac{a(n-1)-a1}{an-a1}\,.\,\frac{a(n-1)-a2}{an-a2}\ldots\ldots\frac{a(n-1)-a(n-2)}{an-a(n-2)}\,.\,\frac{1}{d(A^{an-a(n-1)})}\times$$

$$\times\ d\left(\frac{\Big\|(Zd)^1A^{a1}.(Zd)^2A^{a2}\ldots(Zd)^{n-2}A^{a(n-2)}.(Zd)^{n-1}B\ \Big)}{\Big\|(Zd)^1A^{a1}.(Zd)^2A^{a2}\ \ldots\ldots\ldots\ (Zd)^{n-1}A^{a(n-1)}\Big)}\right)$$

wodurch der Bruch, worin d^n vorkommt, auf das Differentiiren eines Bruches, worin d^{n-1} das höchste Differential ist, zurückgebracht ist.

§. 174.

Eben so finden wir durch ein gleiches Verfahren folgende Gleichungen:

$$623)\ \frac{\left\|(Zd)^0 A^{a1}.(Zd)^1 A^{a2}\ldots\ldots(Zd)^{n-1}A^{an}.(Zd)^n B\right)}{\left\|(Zd)^0 A^{a1}.(Zd)^1 A^{a2}\ \ldots\ldots\ldots\ (Zd)^n A^{a(n+1)}\right)} =$$

$$= \frac{a2-a1}{a(n+1)-a1}\cdot\frac{a3-a2}{a(n+1)-a2}\cdot\ldots\ldots\cdot\frac{an-a(n-1)}{a(n+1)-a(n-1)}\times$$

$$\times\ \frac{1}{d(A^{a(n+1)-an})}\cdot d\left(\frac{1}{d(A^{an-a(n-1)})}\cdot d\left(\frac{1}{d(A^{a(n-1)-a(n-2)})}\ldots d\left(\frac{1}{d(A^{a2-a1})}\cdot d\left(\frac{B}{A^{a1}}\right)_1\right)_2\ldots\right)_{n-1}\right)_n$$

und

$$624)\ \frac{\left\|(Zd)^0 A^{a1}.(Zd)^1 A^{a2}\ldots(Zd)^{n-1}A^{an}.(Zd)^n A^{ap}\right)}{\left\|(Zd)^0 A^{a1}.(Zd)^1 A^{a2}\ \ldots\ldots\ldots\ (Zd)^n A^{a(n+1)}\right)} =$$

$$= \frac{ap-a1}{a(n+1)-a1}\cdot\frac{ap-a2}{a(n+1)-a2}\ldots\frac{ap-an}{a(n+1)-an}\cdot A^{ap-a(n+1)}$$

Die Gleichung 623 hat gleichen Zweck mit 614 und kann eben so wie letztere auf einfachere Differentiale zurückgebracht werden; es ist nämlich

$$625)\ \frac{\left\|(Zd)^0 A^{a1}.(Zd)^1 A^{a2}\ldots\ldots(Zd)^{n-1}A^{an}.(Zd)^n B\right)}{\left\|(Zd)^0 A^{a1}.(Zd)^1 A^{a2}\ \ldots\ldots\ldots\ (Zd)^n A^{a(n+1)}\right)} =$$

$$\frac{1}{(a(n+1)-a1)(a(n+1)-a2)\ldots\ldots(a(n+1)-an)}\cdot\Bigg(\mathfrak{B}_0^{(n)}\cdot A^{0-a(n+1)}.B$$

$$+\ \mathfrak{B}_1^{(n)}\cdot A^{1-a(n+1)}\cdot\frac{d}{dA}\left(B\right)$$

$$+\ \mathfrak{B}_2^{(n)}\cdot A^{2-a(n+1)}\cdot\frac{d}{dA}\left(\frac{d}{dA}\left(B\right)_1\right)_2$$

$$+\ \mathfrak{B}_3^{(n)}\cdot A^{3-a(n+1)}\cdot\frac{d}{dA}\left(\frac{d}{dA}\left(\frac{d}{dA}\left(B\right)_1\right)_2\right)_3$$

$$+\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$+\ \mathfrak{B}_n^{(n)}\cdot A^{n-a(n+1)}\cdot\frac{d}{dA}\left(\frac{d}{dA}\left(\ \ldots\ \frac{d}{dA}\left(B\right)_1\ldots\right)_{n-1}\right)_n\ \Bigg)$$

wo die Vorzahlen $\mathfrak{B}_0^{(n)}$, $\mathfrak{B}_1^{(n)}$, . . . , $\mathfrak{B}_n^{(n)}$ nach folgendem Gesetze gebildet werden:

626)
$$\begin{aligned}
\mathfrak{B}_0^{(n)} &= (0-an) \,.\, \mathfrak{B}_0^{(n-1)} \\
\mathfrak{B}_1^{(n)} &= (1-an) \,.\, \mathfrak{B}_1^{(n-1)} + \mathfrak{B}_0^{(n-1)} \\
\mathfrak{B}_2^{(n)} &= (2-an) \,.\, \mathfrak{B}_2^{(n-1)} + \mathfrak{B}_1^{(n-1)} \\
\mathfrak{B}_3^{(n)} &= (3-an) \,.\, \mathfrak{B}_3^{(n-1)} + \mathfrak{B}_2^{(n-1)} \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\mathfrak{B}_n^{(n)} &= \quad 0 \quad + \mathfrak{B}_{n-1}^{(n-1)}
\end{aligned}$$

oder nach folgendem:

627)
$$\begin{aligned}
\mathfrak{B}_q^{(n)} = &\ (q-an) \,.\, \mathfrak{B}_q^{(n-1)} \\
&+ (q-1-a(n-1)) \,.\, \mathfrak{B}_{q-1}^{(n-2)} \\
&+ (q-2-a(n-2)) \,.\, \mathfrak{B}_{q-2}^{(n-3)} \\
&+ \ldots\ldots\ldots \\
&+ (q-q-a(n-q)) \,.\, \mathfrak{B}_0^{(n-q-1)}
\end{aligned}$$

Die unabhängige Bildungsweise dieser Vorzahlen ist nach 464

628)
$$\mathfrak{B}_q^{(n)} = \left(_{,}\, 0-a1 \,,\ 1-a2 \,,\ 2-a3 \,,\ \ldots \,,\ n-1-an\right)^{(n-q)}$$

und nach 465

$$629)\quad \mathfrak{B}_q^{(n)} = \frac{1}{1^{q|1}} \cdot \Big(\frac{q^{0|-1}}{1^{0|1}} \cdot (q-0-a1)(q-0-a2)(q-0-a3)\ldots(q-0-an)$$

$$- \frac{q^{1|-1}}{1^{1|1}} \cdot (q-1-a1)(q-1-a2)(q-1-a3)\ldots(q-1-an)$$

$$+ \frac{q^{2|-1}}{1^{2|1}} \cdot (q-2-a1)(q-2-a2)(q-2-a3)\ldots(q-2-an)$$

$$- \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; + \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.$$

$$(-)^s \frac{q^{s|-1}}{1^{s|1}} \cdot (q-s-a1)(q-s-a2)(q-s-a3)\ldots(q-s-an)$$

$$(-)^q \frac{q^{q|-1}}{1^{q|1}} \cdot (0-a1)\,(0-a2)\,(0-a3)\ldots(0-an)\Big)$$

Oder, wenn nach Auflösung dieser Producte die Gleichung 645 unserer Analysis berücksichtiget wird,

$$630)\quad \mathfrak{B}_q^{(n)} = (a1\,,\,a2\,,\,a3\,,\ldots,\,an)^{(0)} \cdot [1\,,\,2\,,\,3\,,\ldots,\,q]^{(n-q)}$$

$$- (a1\,,\,a2\,,\,a3\,,\ldots,\,an)^{(1)} \cdot [1\,,\,2\,,\,3\,,\ldots,\,q]^{(n-q-1)}$$

$$+ (a1\,,\,a2\,,\,a3\,,\ldots,\,an)^{(2)} \cdot [1\,,\,2\,,\,3\,,\ldots,\,q]^{(n-q-2)}$$

$$- \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; + \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.$$

$$(-)^{n-q} (a1\,,\,a2\;a3\,,\ldots,\,an)^{(n-q)} \cdot [1\,,\,2\,,\,3\,,\ldots,\,q]^{(0)}$$

Die Gleichung, welche den obigen Bruch, in welchem d^n vorkommt, auf das Differentiiren eines Bruches, worin nur d^{n-1} sich befindet, zurückführt, ist

$$631)\quad \frac{\left\|(Zd)^0 A^{a1} \ldots\ldots (Zd)^{n-1} A^{an} (Zd)^n B \right)}{\left\|(Zd)^0 A^{a1} \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; (Zd)^n A^{a(n+1)} \right)} =$$

$$= \frac{an-a1}{a(n+1)-a1} \cdots \frac{an-a(n-1)}{a(n+1)-a(n-1)} \cdot \frac{1}{d(A^{a(n+1)-an})} \cdot d \left(\frac{\left\| d^0 A^{a1} \ldots d^{n-2} A^{a(n-1)} d^{n-1} B \right)}{\left\| d^0 A^{a1} \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; d^{n-1} A^{an} \right)} \right)$$

§. 175.

Wir verfolgen diesen Gegenstand weiter, und nehmen die Gleichung

$$\left\|A_1^{a1}\ldots A_p^{ap}\quad A_{p+1}^{a(p+1)}\,A_{p+2}^{a(p+2)}\right)\cdot\left\|A_1^{a1}\ldots\ldots\ldots\ldots A_p^{ap}\right)=$$

$$=\left\|A_1^{a1}\ldots\ldots\ldots A_p^{ap}\;A_{p+1}^{a(p+1)}\right)\cdot\left\|A_1^{a1}\ldots\ldots\ldots A_p^{ap}\;A_{p+2}^{a(p+2)}\right)$$

$$-\left\|A_1^{a1}\ldots\ldots\ldots A_p^{ap}\;A_{p+1}^{a(p+2)}\right)\cdot\left\|A_1^{a1}\ldots\ldots\ldots A_p^{ap}\;A_{p+2}^{a(p+1)}\right)$$

welche sich aus 541 ergibt, zu Hülfe; wir bilden nach ihr die Gleichung

$$\left\|(Zd)^1A^{a1}\ldots\ldots(Zd)^nA^{an}(Zd)^{n+1}A^{a(n+1)}\right).\left\|(Zd)^1A^{a1}\ldots\ldots(Zd)^{n-1}A^{a(n-1)}\right)=$$

$$=\left\|(Zd)^1A^{a1}\ldots\ldots(Zd)^nA^{an}\right)\cdot\left\|(Zd)^1A^{a1}\ldots(Zd)^{n-1}A^{a(n-1)}(Zd)^{n+1}A^{a(n+1)}\right)$$

$$-\left\|(Zd)^1A^{a1}\ldots(Zd)^{n-1}A^{n(n-1)}(Zd)^{n+1}A^{an}\right).\left\|(Zd)^1A^{n1}..(Zd)^{n-1}A^{a(n-1)}(Zd)^nA^{a(n+1)}\right)$$

und setzen in ihr nach 615

$$\left\|(Zd)^1A^{a1}..(Zd)^{n-1}A^{a(n-1)}.(Zd)^nA^{n(n+1)}\right)=(n+1,n).A^{a(n+1)-an}\left\|(Zd)^1A^{n1}..(Zd)^nA^{an}\right)$$

wo (n + 1, n) den Bruch

$$\frac{a(n+1)}{an}\cdot\frac{a(n+1)-a1}{an-a1}\cdot\frac{a(n+1)-a2}{an-a2}\cdots\cdots\frac{a(n+1)-a(n-1)}{an-a(n-1)}=(n+1,n)$$

vorstellt, und nach 609

$$\left\|(Zd)^1A^{a1}\ldots(Zd)^{n-1}A^{a(n-1)}.(Zd)^{n+1}A^{a(n+1)}\right)=$$

$$=Zd\left\|(Zd)^1A^{a1}\ldots(Zd)^{n-1}A^{a(n-1)}(Zd)^nA^{a(n+1)}\right)$$

$$=(n+1,n).Zd(A^{a(n+1)-an}).\left\|(Zd)^1A^{a1}\ldots(Zd)^nA^{an}\right)$$

$$+(n+1,n).A^{a(n+1)-an}Zd\left\|(Zd)^1A^{a1}\ldots(Zd)^nA^{an}\right)$$

$$=(n+1,n).Zd(A^{a(n+1)-an}).\left\|(Zd)^1A^{a1}\ldots(Zd)^nA^{an}\right)$$

$$+(n+1,n).A^{a(n+1)-an}.\left\|(Zd)^1A^{a1}\ldots(Zd)^{n-1}A^{a(n-1)}(Zd)^{n+1}A^{an}\right)$$

Wir erhalten nach Einführung dieser Werthe folgende Gleichung:

$$\Big[\!\Big|(Zd)^1 A^{a1} \dots (Zd)^n A^{an} (Zd)^{n+1} A^{a(n+1)}\Big) . \Big[\!\Big|(Zd)^1 A^{a1} \dots (Zd)^{n-1} A^{a(n-1)}\Big) =$$

$$= (n+1,n) . Zd(A^{a(n+1)-an}) . \Big[\!\Big|(Zd)^1 A^{a1} \dots (Zd)^n A^{an}\Big) . \Big[\!\Big|(Zd)^1 A^{a1} \dots (Zd)^n A^{an}\Big|$$

oder

$$632) \qquad \frac{\Big[\!\Big|(Zd)^1 A^{a1} \dots . (Zd)^{n+1} A^{a(n+1)}\Big)}{\Big[\!\Big|(Zd)^1 A^{a1} \dots . (Zd)^n A^{an} \qquad \Big)} =$$

$$= \frac{a(n+1)}{an} . \frac{a(n+1)-a1}{an-a1} \dots \frac{a(n+1)-a(n-1)}{an-a(n-1)} . Zd(A^{a(n+1)-an}) . \frac{\Big[\!\Big|(Zd)^1 A^{a1} \dots . (Zd)^n \quad A^{an} \qquad \Big)}{\Big[\!\Big|(Zd)^1 A^{a1} \dots . (Zd)^{n-1} A^{a(n-1)}\Big)}$$

§. 176.

Durch dasselbe Verfahren erhalten wir folgende Gleichung:

$$633) \qquad \frac{\Big[\!\Big|(Zd)^0 A^{a1} . (Zd)^1 A^{a2} . (Zd)^2 A^{a3} \dots . (Zd)^{n+1} A^{a(n+2)}\Big)}{\Big[\!\Big|(Zd)^0 A^{a1} . (Zd)^1 A^{a2} . (Zd)^2 A^{a3} \dots . (Zd)^n \quad A^{a(n+1)}\Big)} =$$

$$= \frac{a(n+2)-a1}{a(n+1)-a1} . \frac{a(n+2)-a2}{a(n+1)-a2} \dots \frac{a(n+2)-an}{a(n+1)-an} . Zd(A^{a(n+2)-a(n+1)}) . \frac{\Big[\!\Big|(Zd)^0 A^{a1} \dots (Zd)^n A^{a(n+1)}\Big)}{\Big[\!\Big|(Zd)^0 A^{a1} \dots (Zd)^{n-1} A^{an} \ \Big)}$$

§. 177.

Wir wollen gleich die Folgerungen geben, wodurch diese beiden Gleichungen ihre Wichtigkeit bewähren, und stellen desshalb den ersten Bruch in 632 durch P_{n+1}, also die Gleichung selbst durch

$$P_{n+1} = (n+1, n) . P_n . Zd(A^{a(n+1)-an})$$

vor, und bilden nach ihr folgende Gleichungen:

$$P_n = (n,n-1) \;.P_{n-1} . Zd(A^{an-a(n-1)})$$

$$P_{n-1} = (n-1,n-2) . P_{n-2} . Zd(A^{a(n-1)-a(n-2)})$$

$$P_{n-2} = (n-2,n-3) . P_{n-3} . Zd(A^{n(n-2)-a(n-3)})$$

$$. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$

$$P_3 = (3\,,2) \quad . \quad P_2 \;. \; Zd(A^{a3-a2})$$

$$P_2 = (2\,,1) \quad . \quad P_1 \;. \; Zd(A^{a2-a1})$$

$$P_1 = [\![(Zd^1 A^{a1}) = Zd(A^{a1})$$

welche, wenn sie miteinander vervielfacht werden, folgende erzeugen:

$$P_n = (2\,,1).(3\,,2)\ldots.(n\,,n-1).Z^n.d(A^{a1}).d(A^{a2-a1})\ldots.d(A^{an-a(n-1)})$$
$$= an.(an-a1).(an-a2)\ldots.\big(an-a(n-1)\big).A^{an-n}.(Z\,dA)^n$$

Es ist folglich

$$634)\quad [\![(Zd)^1 A^{a1}.(Zd)^2 A^{a2}.(Zd)^3 A^{a3}\ldots(Zd)^n A^{an}\big) =$$
$$= an.(an-a1)\ldots.\big(an-a(n-1)\big).A^{an-n}.(Z.dA)^n [\![(Zd)^1 A^{a1}\ldots(Zd)^{n-1} A^{a(n-1)}\big)$$

§. 178.

Ein gleiches Verfahren führt von der Gleichung 633 zu folgender:

$$635)\quad [\![(Zd)^0 A^{a1}.(Zd)^1 A^{a2}.(Zd)^2 A^{a3}\ldots..(Zd)^n A^{a(n+1)}\big) =$$
$$= (a(n+1)-a1)\ldots.(a(n+1)-an).A^{a(n+1)-n}\,(Z.dA)^n [\![(Zd)^0 A^{a1}\ldots.(Zd)^{n-1} A^{an}\big)$$

welche für alle Werthe von n = 1, 2, 3, ..., gilt.

§. 179.

Setzen wir nun zuletzt das Product

$$(an-a1)\;(an-a2)\;(an-a3)\ldots.\big(an-a(n-1)\big) = Q_n$$

bilden nach diesen beiden Gleichungen folgende:

$$\Big\|(Zd)^1A^{a1}\ldots(Zd)^nA^{an}\Big)=an.Q_n.A^{an-n}.(ZdA)^n.\Big\|(Zd)^1A^{a1}\ldots(Zd)^{n-1}A^{a(n-1)}\Big)$$

$$\Big\|(Zd)^1A^{a1}\ldots(Zd)^{n-1}A^{a(n-1)}\Big)=$$

$$=a(n-1).Q_{n-1}.A^{a(n-1)-(n-1)}(ZdA)^{n-1}.\Big\|(Zd)^1A^{a1}\ldots(Zd)^{n-2}A^{a(n-2)}\Big)$$

$$\Big\|(Zd)^1A^{a1}\ldots(Zd)^{n-2}A^{a(n-2)}\Big)=$$

$$=a(n-2).Q_{n-2}.A^{a(n-2)-(n-2)}.(ZdA)^{n-2}.\Big\|(Zd)^1A^{a1}\ldots(Zd)^{n-3}A^{a(n-3)}\Big)$$

. . . .

$$\Big\|(Zd)^1A^{a1}.(Zd)^2A^{a2}\Big)=a2.Q_2.A^{a2-2}.(ZdA)^2.\Big\|(Zd)^1A^{a1}\Big)$$

$$\Big\|(Zd)^1A^{a1}\Big)=a1.A^{a1-1}.(ZdA)^1$$

so wie auch

$$\Big\|(Zd)^0A^{a1}\ldots(Zd)^nA^{a(n+1)}\Big)=Q_{n+1}.A^{a(n+1)-n}.(ZdA)^n.\Big\|(Zd)^0A^{a1}\ldots(Zd)^{n-1}A^{an}\Big)$$

$$\Big\|(Zd)^0A^{a1}\ldots(Zd)^{n-1}A^{an}\Big)=Q_n.A^{an-(n-1)}.(ZdA)^{n-1}\Big\|(Zd)^0A^{a1}\ldots(Zd)^{n-2}A^{a(n-1)}\Big)$$

. . . .

$$\Big\|(Zd)^0A^{a1}.(Zd)^1A^{a2}\Big)=Q_2.A^{a2-1}.(ZdA)^1.\Big\|(Zd)^0A^{a1}\Big)$$

$$\Big\|(Zd)^0A^{a1}\Big)=A^{a1}$$

und vervielfachen sowohl jene als diese miteinander, so entstehen folgende Endgleichungen:

636) $\Big\|(Zd)^1A^{a1}.(Zd)^2A^{a2}.(Zd)^3A^{a3}\ldots(Zd)^nA^{an}\Big)=$

$$\begin{aligned}
=\ & a1\\
&.a2.(a2-a1)\\
&.a3.(a3-a1).(a3-a2)\\
&.a4.(a4-a1).(a4-a2).(a4-a3)\\
&.a5.(a5-a1).(a5-a2).(a5-a3).(a5-a4)\\
&\quad.\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\\
&.an.(an-a1).(an-a2).(an-a3).(an-a4)\ldots\big(an-a(n-1)\big).\\
&.A^{a1+a2+\ldots+an-(1+2+\ldots+n)}.(ZdA)^{1+2+\ldots\ldots+n}
\end{aligned}$$

und

$$637)\quad \big[\!\big[(Zd)^0A^{a1}.(Zd)^1A^{a2}.(Zd)^2A^{a3}\ldots.(Zd)^nA^{a(n+1)}\big) =$$

$$\begin{aligned} = \;& (a2-a1)\\ & .(a3-a1).(a3-a2)\\ & .(a4-a1).(a4-a2).(a4-a3)\\ & .(a5-a1).(a5-a2).(a5-a3).(a5-a4)\\ & \;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\\ & .\big(a(n+1)-a1\big).\big(a(n+1)-a2\big).\big(a(n+1)-a3\big)\ldots\ldots\big(a(n+1)-an\big).\\ & .A^{a1+a2+\ldots.+a(n+1)-(1+2+\ldots.+n)}.(Z.dA)^{1+2+\ldots+n} \end{aligned}$$

durch welche die Werthe dieser Summen näher gewürdigt werden können.

In diesen Gleichungen sind die Elemente $a1$, $a2,\ldots,$ ganz allgemein; nehmen wir an, dass

$$a1=a,\; a2=a+1,\; a3=a+2,\ldots,an=a+n-1$$

so erhalten wir aus 636 die Gleichung

$$638)\big[\!\big[(Zd)^1A^a.(Zd)^2A^{a+1}..(Zd)^nA^{a+n-1}\big)=1^{1|1}.1^{2|1}\ldots1^{n-1|1}.a^{n|1}.A^{n(a-1)}.(Z.dA)^{1+2+3+\ldots+n}$$

und aus 637

$$639)\quad \big[\!\big[(Zd)^0A^a.(Zd)^1A^{a+1}\ldots(Zd)^nA^{a+n}\big)=1^{1|1}.1^{2|1}\ldots1^{n|1}.A^{(n+1)n}.(Z.dA)^{1+2+\ldots+n}$$

ferner aus 614 und 638 die Gleichung

$$640)\quad \big[\!\big[(Zd)^1A^a.(Zd)^2A^{a+1}\ldots(Zd)^{n-1}.A^{a+n-2}.(Zd)^nB\big)=$$

$$=1^{1|1}.1^{2|1}\ldots1^{n-2|1}.a.a^{n-1|1}.A^{n(a-1)}.(Z.dA)^{1+2+3+\ldots+n}.\frac{d}{dA}\Big(_{n-1}\frac{d}{dA}\Big(_{n-2}\cdots\frac{d}{dA}\Big(_1\frac{dB}{d(A^a)}\Big)_1\cdots\Big)_1\Big)_{n-1}$$

und aus 623 und 639 die Gleichung

$$641)\quad \big[\!\big[(Zd)^0A^a.(Zd)^1A^{a+1}.(Zd)^2A^{a+2}\ldots(Zd)^{n-1}A^{a+n-1}.(Zd)^nB\big)=$$

$$=1^{1|1}.1^{2|1}\ldots1^{n-1|1}.A^{(n+1)n}.(Z.dA)^{1+2+\ldots+n}.\frac{d}{dA}\Big(_n\frac{d}{dA}\Big(_{n-1}\cdots\frac{d}{dA}\Big(_1\frac{B}{A^a}\Big)_1\cdots\Big)_n$$

Gehen wir zuletzt zu dem ganz speciellen Falle über, wo $a = 1$ ist, so erhalten wir

642) $$\Big[\!\Big|(Zd)^1 A^1 . (Zd)^2 A^2 \ldots (Zd)^n A^n\Big) = 1^{1|1} . 1^{2|1} \ldots . 1^{n|1} . (Z.dA)^{1+2+\ldots+n}$$

und

643) $$\Big[\!\Big|(Zd)^0 A^1 . (Zd)^1 A^2 \ldots (Zd)^n A^{n+1}\Big) = 1^{1|1} . 1^{2|1} \ldots 1^{n|1} . A^{n+1} . (Z.dA)^{1+2+\ldots+n}$$

und ist $a = 0$, so ist aus 639

644) $$\Big[\!\Big|(Zd)^0 A^0 . (Zd)^1 A^1 \ldots . (Zd)^n A^n\Big) = 1^{1|1} . 1^{2|1} \ldots . 1^{n|1} . (Z.dA)^{1+2+\ldots+n}$$

Setzen wir noch in dieser Gleichung $Z = 1$, so erhalten wir endlich jene partikuläre Gleichung, welche auch Wronski Seite 110 findet.

III. Auflösen der Producte mit Versetzungen in ein einfaches Differentiiren einer Function.

§. 180.

Da die Gleichungen gefunden sind, durch welche eine Summe von Producten mit Versetzungen in das Differentiiren, welches mit dem Messen abwechselt, aufgelöset werden, und früher wieder eine Gleichung 321, nach welcher das Differentiiren mit dem abwechselnden Messen in das Differentiiren einer einzigen Function übertragen werden kann, so kann jetzt aus der Verbindung dieser Gleichungen ein System von Gleichungen hergeleitet werden, welche eine solche Summe auf das Differentiiren einer einzigen Function übertragen. Wir erhalten aus 321 und 640 die Gleichung

645) $$\left\| d^1(fx)^a\, d^2(fx)^{a+1}\, d^3(fx)^{a+2} \dots d^{n-1}(fx)^{a+n-2}\, d^n Fx \right| =$$

$$= 1^{1|1} . 1^{2|1} .. 1^{n-2|1} . a . a^{n-1|1} . (fx)^{n.(a-1)} . (dfx)^{1+2+\dots+n} . \frac{d^{n-2}}{dx_1^{n-2}} \left(\left(\frac{x_1 - x}{fx_1 - fx} \right)^{n-1} . \frac{d}{dx_1} \left(\frac{dFx_1}{d((fx)^a)} \right) \right)_{x_1 = x}$$

und für den Fall, wenn $a = 1$ ist, aus denselben Gleichungen die Gleichung

646) $$\left\| d^1(fx)^1\, d^2(fx)^2\, d^3(fx)^3 \dots d^{n-1}(fx)^{n-1}\, d^n Fx \right| =$$

$$= 1^{1|1} . 1^{2|1} \dots 1^{n-1|1} . (dfx)^{1+2+\dots+n} . \frac{d^{n-1}}{dx_1^{n-1}} \left(\left(\frac{x_1 - x}{fx_1 - fx} \right)^n . \frac{dFx_1}{dx_1} \right)_{x_1 = x}$$

Verfolgen wir diesen Gegenstand weiter, trennen nach 515 die Function Fx von den übrigen Grössen

$$\Sigma_q (-)^q \left\| d^1(\mathrm{fx})^1 d^2(\mathrm{fx})^2 \ldots\ldots d^{n-q-1}(\mathrm{fx})^{n-q-1} d^{n-q+1}(\mathrm{fx})^{n-q} \ldots\ldots d^n(\mathrm{fx})^{n-1} \right) . d^{n-q}\mathrm{Fx} =$$

$$= 1^{1|1} . 1^{2|1} \ldots 1^{n-1|1} . (d\mathrm{fx})^{1+2+\ldots+n} . 1^{n-1|1} . \Sigma_q \frac{d^q}{1^{q|1} . dx^q} \left(\frac{x_1 - x}{\mathrm{fx}_1 - \mathrm{fx}}\right)^n . \frac{d^{n-q}\mathrm{Fx}}{1^{n-q-1|1} . dx^{n-q}}$$

wo $q = 0, 1, 2, \ldots\ldots, n-1$

und bemerken, dass die Factoren, welche in beiden Reihen $d^{n-q}\mathrm{Fx}$ begleiten, gleich sein müssen, so erhalten wir folgende Gleichung:

647) $$\left\| d^1(\mathrm{fx})^1 d^2(\mathrm{fx})^2 \ldots\ldots d^{n-q-1}(\mathrm{fx})^{n-q-1} d^{n-q+1}(\mathrm{fx})^{n-q} \ldots\ldots d^n(\mathrm{fx})^{n-1} \right) =$$

$$= (-)^q \frac{1^{1|1} . 1^{2|1} \ldots\ldots 1^{n|1}}{n . 1^{q|1} . 1^{n-q-1|1}} . (d\mathrm{fx})^{1+2+\ldots+n} . \frac{1}{dx_1^n} . d^q \left(\frac{x_1 - x}{\mathrm{fx}_1 - \mathrm{fx}}\right)^n_{x_1 = x}$$

in welcher, so wie in den vorigen, x jeden Werth annimmt.

Wird nach dem Differentiiren und nach Beendigung aller Geschäfte, welche durch Zeichen angegeben sind, dem x derjenige Werth gegeben, der $\mathrm{fx} = 0$ macht, so kann der vorstehenden Gleichung nicht allein eine einfachere Form gegeben werden

648) $$\left\| d^1(\mathrm{fx})^1 d^2(\mathrm{fx})^2 \ldots\ldots d^{n-q-1}(\mathrm{fx})^{n-q-1} d^{n-q+1}(\mathrm{fx})^{n-q} \ldots\ldots d^n(\mathrm{fx})^{n-1} \right) =$$

$$= (-)^q \frac{1^{1|1} . 1^{2|1} \ldots\ldots 1^{n|1}}{n . 1^{q|1} . 1^{n-q-1|1}} . (d\mathrm{fx})^{1+2+\ldots+n} . \frac{1}{dx^n} . d^q \left(\frac{x}{\mathrm{fx}}\right)^n \text{ für } \mathrm{fx} = 0$$

sondern diese Bedingung $\mathrm{fx} = 0$ gestattet auch mit der Gleichung selbst eine wesentliche Veränderung vorzunehmen. Wir zerlegen nämlich jedes Product in vorstehender Summe in zwei Producte

$$\left\| d^1(\mathrm{fx})^1 d^2(\mathrm{fx})^2 \ldots\ldots d^{n-q-1}(\mathrm{fx})^{n-q-1} d^{n-q+1}(\mathrm{fx})^{n-q} \ldots\ldots d^n(\mathrm{fx})^{n-1} \right) =$$

$$\Sigma (-)^* \left\| d^1(\mathrm{fx})^1 d^2(\mathrm{fx})^2 \ldots\ldots d^{n-q-1}(\mathrm{fx})^{n-q-1} \right) \times \left\| d^{n-q+1}(\mathrm{fx})^{n-q} \ldots\ldots d^n(\mathrm{fx})^{n-1} \right)$$

wo die Exponenten von fx

$$1, 2, 3, \ldots, n-q-1, n-q+1, \ldots, n-1$$

den Gesetzen der geordneten Verbindungen ohne Wiederholungen, so wie wir es in §. 143 angegeben haben, unterworfen sind. Wir setzen ferner

$$\Big\| d^1(fx)^{\nu 1} d^2(fx)^{\nu 2} \ldots d^{n-q-1}(fx)^{\nu(n-q-1)} \Big) =$$

$$= H.(fx)^{\nu 1+\nu 2+\ldots+\nu(n-q-1)-(1+2+\ldots+n-q-1)}.(dfx)^{1+2+\ldots+n-q-1}$$

wo der Factor H nach der Vorschrift 636 gebildet wird.

Bei den geordneten Verbindungen ohne Wiederholungen, welche oben angegeben sind, kann nur bei der ersten Verbindung, wo

$$\nu 1 = 1,\ \nu 2 = 2,\ \nu 3 = 3, \ldots\ldots, \nu(n-q-1) = n-q-1$$

der Exponent von fx verschwinden; bei jeder ihr folgenden Verbindung wird

$$\nu 1 + \nu 2 + \ldots\ldots + \nu(n-q-1) > 1 + 2 + \ldots\ldots + n-q-1$$

Da nur im ersten Falle $(fx)^0$ und in jedem anderen $(fx)^p$ entsteht, wo p grösser als 0 ist, so bleibt für $fx = 0$ nur die erste Verbindung in der Gleichung und jede folgende Verbindung verschwindet. Es ist also

$$\Big\| d^1(fx)^1 \ldots d^{n-q-1}(fx)^{n-q-1} d^{n-q+1}(fx)^{n-q} \ldots d^n(fx)^{n-1} \Big) =$$

$$= \Big\| d^1(fx)^1\, d^2(fx)^2 \ldots d^{n-q-1}(fx)^{n-q-1} \cdot \Big\| d^{n-q+1}(fx)^{n-q} \ldots d^n(fx)^{n-1} \Big)$$

$$= 1^{1|1}.1^{2|1} \ldots 1^{n-q-1|1}.(dfx)^{1+2+\ldots+n-q-1} \cdot \Big\| d^{n-q+1}(fx)^{n-q} \ldots d^n(fx)^{n-1} \Big)$$

Die Gleichung 648 geht hiedurch in folgende über:

$$649)\qquad \Big\| d^{n-q+1}(fx)^{n-q}\, d^{n-q+2}(fx)^{n-q+1} \ldots \cdot d^n(fx)^{n-1} \Big) =$$

$$= (-)^q \frac{1^{n|1}.1^{n-1|1} \ldots . 1^{n-q|1}}{n.1^{q|1}.1^{n-q-1|1}}.(dfx)^{n+n-1+n-2+\ldots+n-q} \cdot \frac{d^q}{dx^n}\Big(\frac{x}{fx}\Big)^n_{fx=0}$$

Diesen ganz speciellen Fall findet zuerst Wronski Phil. d. l. T. Seite 60 auf einem ganz verschiedenen Wege.

IV. Uebertragen der Producte mit Versetzungen zusammengesetzterer Grössen in andere Producte.

§. 181.

Setzt man in 228,

$$U = 1$$
$$X = \phi(x_1, x_2, \ldots\ldots)$$
$$Y_s = X^{-q+nc} f_s (y_1, y_2, \ldots\ldots)$$
$$Z = \psi(z, z_1, \ldots\ldots)$$

so ist

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{p} \cdot \frac{(Z.d)^0 X^p}{1^{0|1}} \cdot \frac{(Z.d)^n (X^{nc}.Y_h)}{1^{n|1}} \\
+ & \frac{1}{p+c} \cdot \frac{(Z.d)^1 X^{p+c}}{1^{1|1}} \cdot \frac{(Z.d)^{n-1} (X^{(n-1)c}.Y_h)}{1^{n-1|1}} \\
+ & \frac{1}{p+2c} \cdot \frac{(Z.d)^2 X^{p+2c}}{1^{2|1}} \cdot \frac{(Z.d)^{n-2} (X^{(n-2)c}.Y_h)}{1^{n-2|1}} \\
+ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
+ & \frac{1}{p+nc} \cdot \frac{(Z.d)^n X^{p+nc}}{1^{n|1}} \cdot \frac{(Z.d)^0 (X^{0c}.Y_h)}{1^{0|1}} \\
= & \frac{1}{p} \cdot \frac{(Z.d)^n (X^{p+nc}.Y_h)}{1^{n|1}}
\end{aligned}$$

Wird nun in der Gleichung 551 und 552

$$X_s = \frac{1}{p+(n-s)c} \cdot \frac{(Z.d)^{n-s} X^{p+(n-s)c}}{1^{n-s|1} \cdot 1^{s|1}}, \qquad A_s^{(h)} = (Z.d)^s (X^{sc}.Y_h)$$

und

$$B^{(h)} = \frac{(Z.d)^n(X^{p+nc}.Y_h)}{p.1^{n|1}}$$

gesetzt, so entsteht die Gleichung

$$650)\quad \Big\|(Zd)^0(X^{0c}Y_0)\ldots(Zd)^{s-1}(X^{(s-1)c}Y_{s-1}).(Zd)^{s+1}(X^{(s+1)c}Y_s)\ldots$$
$$.(Zd)^n(X^{nc}Y_{n-1}).(Zd)^n(X^{p+nc}Y_n)\Big)$$
$$= (-)^{n-s}\frac{p.1^{n|1}}{(p+(n-s)c)}.\frac{(Zd)^{n-s}X^{p+(n-s)c}}{1^{s|1}.1^{n-s|1}}.\Big\|(Zd)^0(X^{0c}Y_0).(Zd)^1(X^{1c}Y_1)..(Zd)^n(X^{nc}Y_n)\Big)$$

durch welche die Summe der Producte aus den ersteren Elementen, unter welchen sc fehlt, in die Summe von Producten aus den letzteren Elementen übertragen wird.

Ist s = n, so wird

$$651)\quad \Big\|(Zd)^0(X^{0c}Y_0).(Zd)^1(X^{1c}Y_1)\ldots.(Zd)^{n-1}(X^{(n-1)c}Y_{n-1}).(Zd)^n(X^{p+nc}Y_n)\Big)$$
$$= X^p.\Big\|(Zd)^0(X^{0c}Y_0).(Zd)^1(X^{1c}Y_1)\ldots.(Zd)^n(X^{nc}Y_n)\Big)$$

und ist s = 0, so ist

$$652)\quad \Big\|(Zd)^1(X^{1c}Y_0).(Zd)^2(X^{2c}Y_1)\ldots.(Zd)^n(X^{nc}Y_{n-1}).(Zd)^n(X^{p+nc}Y_n)\Big)$$
$$= (-)^n\ \frac{p}{p+nc}.(Zd)^nX^{p+nc}.\Big\|(Zd)^0(X^{0c}Y_0).(Zd)^1(X^{1c}Y_1)\ldots.(Zd)^n(X^{nc}Y_n)\Big)$$

Ist c = 0, so wird aus 650

$$653)\quad \Big\|(Zd)^0Y_0.(Zd)^1Y_1\ldots(Zd)^{s-1}Y_{s-1}.(Zd)^{s+1}Y_s\ldots(Zd)^nY_{n-1}.(Zd)^n(X^pY_n)\Big)$$
$$= (-)^{n-s}\frac{1^{n|1}}{1^{s|1}}.\frac{(Zd)^{n-s}X^p}{1^{n-s|1}}.\Big\|(Zd)^0Y_0.(Zd)^1Y_1\ldots.(Zd)^nY_n\Big)$$

§. 182.

Aus der Gleichung 237 und 552, wenn wir

$$X_s = (-)^s\frac{1}{1^{s|1}.1^{n-s|1}.X^{sh}}\qquad,\qquad A_s^{(n-p)} = (Z.d)^{n-p}(U.X^{sh})$$

und

$$p = 1,\ 2,\ 3, \ldots\ldots, n$$

setzen, erhalten wir die Gleichung

$$654)\quad \big[\!\big|(Zd)^0(UX^{0h})\ldots(Zd)^{s-1}.(UX^{(s-1)h}).(Zd)^s(UX^{(s+1)h})\ldots(Zd)^{n-1}(UX^{nh})\big) =$$

$$= \frac{1^{n|1}.X^{(n-s)h}}{1^{s|1}.1^{n-s|1}} \cdot \big[\!\big|(Zd)^0(UX^{0h}).(Zd)^1(UX^{1h}).\ldots.(Zd)^{n-1}(UX^{(n-1)h}\big)$$

Setzen wir aber in der Gleichung 237 und 552

$$p = 0,\ 1,\ 2, \ldots, n$$

so erhalten wir mit Hülfe der Gleichung 238 folgende:

$$655)\quad \big[\!\big|(Zd)^0(UX^{0h})\ldots.(Zd)^n(UX^{nh})\big) = 1^{s|1}.1^{n-s|1}.U.X^{sh}.\left(\frac{hZ\,dX}{X}\right)^n \times$$

$$\times \big[\!\big|(Zd)^0(UX^{1h})\ldots.(Zd)^{s-1}(UX^{(s-1)h}).(Zd)^s(UX^{(s+1)h})\ldots.(Zd)^{n-1}(UX^{nh})\big)$$

Beide Gleichungen haben den Zweck, die Producte, worin sh fehlt, in andere Producte, worin sh nicht fehlt, und diese in jene zu übertragen.

Ist s = 0, so wird

$$656)\quad \big[\!\big|(Zd)^0(UX^{0h}).(Zd)^1(UX^{1h})\ldots.(Zd)^n(UX^{nh})\big) =$$

$$= 1^{n|1}.U.\left(\frac{hZ\,dX}{X}\right)^n \cdot \big[\!\big|(Zd)^0(UX^{1h}).(Zd)^1(UX^{2h})\ldots.(Zd)^{n-1}(UX^{nh})\big)$$

und ist s = n, so ist

$$657)\quad \big[\!\big|(Zd)^0(UX^{0h}).(Zd)^1(UX^{1h})\ldots\ldots(Zd)^n(UX^{nh})\big)$$

$$= 1^{n|1}.UX^{nh}.\left(\frac{hZ\,dX}{X}\right)^n \cdot \big[\!\big|(Zd)^0(UX^{0h}).(Zd)^1(UX^{1h})\ldots(Zd)^{n-1}(UX^{(n-1)h})\big)$$

Setzen wir in der Gleichung 656

$$U = U, = UX^{1h}, = UX^{2h}, = UX^{3h}, \ldots, = UX^{(n-1)h}$$

und

$$n = n, = n-1, n-2, n-3, \ldots, 1$$

und vervielfachen alle Gleichungen miteinander, so erhalten wir folgende:

658) $$\Big\|(Zd)^0(UX^{0h}).(Zd)^1(UX^{1h})\ldots.(Zd)^n(UX^{nh})\Big) =$$

$$= 1^{1|1}.1^{2|1}.1^{3|1}\ldots.1^{n|1}.U^{n+1}.\big(Z.d(X^h)\big)^{1+2+3+\ldots+n}$$

Diese merkwürdige Wahrheit gehört in die Reihe derjenigen, welche wir oben zu Ende §. 179 gefunden haben; auch aus ihr lässt sich jene partikuläre Wahrheit, welche Wronski Seite 110 findet, herleiten, wenn man $Z = 1$ und $U = 1$ und $h = 1$ annimmt.

THEORIE

DER

REIHEN.

55

THEORIE
DER
REIHEN.

Erste Abtheilung.

ELIMINIREN BESTIMMTER GRÖSSEN AUS UNENDLICHEN REIHEN.

I. Allgemeinste Untersuchung.

§. 183.

Die vorhergehende Untersuchung setzt uns in den Stand, eine Theorie der Entwicklung der Functionen in Reihen zu geben; sie erscheint hier zuerst; das, was wir anderen Gelehrten schuldig sind, werden wir am gehörigen Orte erwähnen.

Die Untersuchung fängt mit dem allgemeinsten Eliminationsprobleme an, wovon wir hier eine directe Auflösung mit unabhängiger Bildungsweise der Vorzahlen geben, was beides nie geschehen.

Es seien die Grössen X_1, X_2, X_3,...., deren Anzahl unbestimmt oder auch unendlich ist, durch eben so viele Gleichungen oder Reihen bestimmt:

659) $$\begin{aligned} B^{(1)} &= A_1^{(1)}.X_1 + A_2^{(1)}.X_2 + A_3^{(1)}.X_3 + A_4^{(1)}.X_4 + \ldots\ldots \\ B^{(2)} &= A_1^{(2)}.X_1 + A_2^{(2)}.X_2 + A_3^{(2)}.X_3 + A_4^{(2)}.X_4 + \ldots\ldots \\ B^{(3)} &= A_1^{(3)}.X_1 + A_2^{(3)}.X_2 + A_3^{(3)}.X_3 + A_4^{(3)}.X_4 + \ldots\ldots \\ B^{(4)} &= A_1^{(4)}.X_1 + A_2^{(4)}.X_2 + A_3^{(4)}.X_3 + A_4^{(4)}.X_4 + \ldots\ldots \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Es sollen diese Grössen unmittelbar aus den übrigen Elementen der Reihen gebildet werden.

Die erste Reihe werde mit $\Big[A_1^{(2)}A_2^{(3)}\ldots\ldots A_{n-1}^{(n)}A_{n+1}^{(n+1)}\ldots\ldots A_\infty^{(\infty)}\Big)$

» zweite » » » $-\Big[A_1^{(1)}A_2^{(3)}\ldots\ldots A_{n-1}^{(n)}A_{n+1}^{(n+1)}\ldots\ldots A_\infty^{(\infty)}\Big)$

» dritte » » » $+\Big[A_1^{(1)}A_2^{(2)}A_3^{(4)}\ldots A_{n-1}^{(n)}A_{n+1}^{(n+1)}\ldots\ldots A_\infty^{(\infty)}\Big)$

. . . .

vervielfacht, und alle Reihen werden zusammengezählt. Die erste Scheitelreihe ist

$$\begin{aligned} & B^{(1)}.\Big[A_1^{(2)}A_2^{(3)}\ldots\ldots A_{n-1}^{(n)}A_{n+1}^{(n+1)}\ldots\ldots A_\infty^{(\infty)}\Big) \\ & -B^{(2)}.\Big[A_1^{(1)}A_2^{(3)}\ldots\ldots A_{n-1}^{(n)}A_{n+1}^{(n+1)}\ldots\ldots A_\infty^{(\infty)}\Big) \\ & +B^{(3)}.\Big[A_1^{(1)}A_2^{(2)}A_3^{(4)}\ldots A_{n-1}^{(n)}A_{n+1}^{(n+1)}\ldots\ldots A_\infty^{(\infty)}\Big) \\ & -\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ = & \Big[B^{(1)}A_1^{(2)}A_2^{(3)}\ldots A_{n-1}^{(n)}A_{n+1}^{(n+1)}\ldots\ldots A_\infty^{(\infty)}\Big) \end{aligned}$$

und wird hierin A_q statt B gesetzt, so ist die Scheitelreihe, welche von X_q begleitet wird,

$$= \Big[A_q^{(1)}A_1^{(2)}A_2^{(3)}\ldots\ldots A_{n-1}^{(n)}A_{n+1}^{(n+1)}\ldots\ldots A_\infty^{(\infty)}\Big).X_q$$

Diese Summe verschwindet wegen der Gleichheit zweier unteren Stellenzahlen, ausser in dem Falle, wenn $q = n$ ist, und es entsteht die Gleichung

$$[\![B^{(1)}A_1^{(2)}A_2^{(3)}\ldots A_{n-1}^{(n)}A_{n+1}^{(n+1)}\ldots A_\infty^{(\infty)}) = [A_n^{(1)}A_1^{(2)}A_2^{(3)}\ldots A_{n-1}^{(n)}A_{n+1}^{(n+1)}\ldots A_\infty^{(\infty)}) \cdot X_n$$

oder wenn die Folge der Elemente wieder hergestellt wird

$$660) \qquad X_n = (-)^{n-1} \frac{[\![B^{(1)}A_1^{(2)}A_2^{(3)}\ldots\ldots A_{n\;1}^{(n)}A_{n+1}^{(n+1)}\ldots\ldots A_\infty^{(\infty)})}{[\![A_1^{(1)}A_2^{(2)}A_3^{(3)}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots A_\infty^{(\infty)})}$$

Dieser Bruch besteht aus Producten mit Versetzungen der Factoren, deren Anzahl unendlich ist; wir haben in §. 156 gezeigt, wie solche Brüche in unenliche Reihen entwickelt werden können; es ist nämlich

$$\begin{aligned}
661) \quad X_n = {} & \frac{[\![A_1^{(1)}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots A_{n-1}^{(n-1)})}{[\![A_1^{(1)}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots A_{n-1}^{(n-1)})} \cdot \frac{[\![A_1^{(1)}\ldots\ldots A_{n-1}^{(n-1)}B^{(n)})}{[\![A_1^{(1)}\ldots\ldots\ldots A_n^{(n)})} \\
& - \frac{[\![A_1^{(1)}\ldots\ldots\ldots\ldots A_{n-1}^{(n-1)}A_{n+1}^{(n)})}{[\![A_1^{(1)}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots A_n^{(n)})} \cdot \frac{[\![A_1^{(1)}\ldots\ldots A_n^{(n)}\,B^{(n+1)})}{[\![A_1^{(1)}\ldots\ldots\ldots A_{m+1}^{(n+1)})} \\
& + \frac{[\![A_1^{(1)}\ldots\ldots\ldots A_{n-1}^{(n-1)}A_{n+1}^{(n)}A_{n+2}^{(n+1)})}{[\![A_1^{(1)}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots A_{n+1}^{(n+1)})} \cdot \frac{[\![A_1^{(1)}\ldots\ldots A_{n+1}^{(n+1)}B^{(n+2)})}{[\![A_1^{(1)}\ldots\ldots\ldots A_{m+2}^{(n+2)})} \\
& - \frac{[\![A_1^{(1)}\ldots\ldots A_{n-1}^{(n-1)}\,A_{n+1}^{(n)}A_{n+2}^{(n+1)}\,A_{n+3}^{(n+2)})}{[\![A_1^{(1)}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots A_{n+2}^{(n+2)})} \cdot \frac{[\![A_1^{(1)}\ldots\ldots A_{n+2}^{(n+2)}B^{(n+3)})}{[\![A_1^{(1)}\ldots\ldots\ldots A_{m+3}^{(n+3)})} \\
& + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
& - \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Die zurücklaufende Bildungsweise derjenigen Brüche, welche kein B enthalten, ist 572 und 573 angegeben.

§. 184.

Wird eine andere Bezeichnung der Elemente gewählt,

$$662)\quad \begin{aligned} B_1 &= A_1^{(1)} \cdot X_1 + A_1^{(2)} \cdot X_2 + A_1^{(3)} \cdot X_3 + \ldots\ldots \\ B_2 &= A_2^{(1)} \cdot X_1 + A_2^{(2)} \cdot X_2 + A_2^{(3)} \cdot X_3 + \ldots\ldots \\ B_3 &= A_3^{(1)} \cdot X_1 + A_3^{(2)} \cdot X_2 + A_3^{(3)} \cdot X_3 + \ldots\ldots \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

so hat man nur die oberen mit den unteren Elementen zu vertauschen, und es ist

$$663)\qquad X_n = (-)^{n-1} \frac{\Big\| B_1 A_2^{(1)} A_3^{(2)} \ldots\ldots^{(n-1),\,(n+1),} \ldots\ldots A_\infty^{(\infty)} \Big)}{\Big\| A_1^{(1)} A_2^{(2)} A_3^{(3)} \ldots\ldots\ldots\ldots A_\infty^{(\infty)} \Big)}$$

und

$$664)\quad \begin{aligned} X_n = {} & \frac{\Big\| A_1^{(1)} \ldots\ldots\ldots\ldots A_{n-1}^{(n-1)} \Big)}{\Big\| A_1^{(1)} \ldots\ldots\ldots\ldots A_{n-1}^{(n-1)} \Big)} \cdot \frac{\Big\| A_1^{(1)} \ldots\ldots A_{n-1}^{(n-1)} B_n \Big)}{\Big\| A_1^{(1)} \ldots\ldots\ldots A_n^{(n)} \Big)} \\ & - \frac{\Big\| A_1^{(1)} \ldots\ldots\ldots A_{n-1}^{(n-1)} A_n^{(n+1)} \Big)}{\Big\| A_1^{(1)} \ldots\ldots\ldots\ldots A_n^{(n)} \Big)} \cdot \frac{\Big\| A_1^{(1)} \ldots\ldots A_n^{(n)} B_{n+1} \Big)}{\Big\| A_1^{(1)} \ldots\ldots\ldots A_{n+1}^{(n+1)} \Big)} \\ & + \frac{\Big\| A_1^{(1)} \ldots\ldots A_{n-1}^{(n-1)} A_n^{(n+1)} A_{n+1}^{(n+2)} \Big)}{\Big\| A_1^{(1)} \ldots\ldots\ldots\ldots A_{n+1}^{(n+1)} \Big)} \cdot \frac{\Big\| A_1^{(1)} \ldots\ldots A_{n+1}^{(n+1)} B_{n+2} \Big)}{\Big\| A_1^{(1)} \ldots\ldots\ldots A_{n+2}^{(n+2)} \Big)} \\ & - \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Diese Entwicklung ist die allgemeinste, und das Verfahren, aus den gegebenen Reihen die unbekannten Vorzahlen zu bilden, ist ganz direkt. Wie aber Reihen 659 und 662 hervorgebracht werden können, wird später gezeigt werden. Wir wollen vorerst noch einige specielle Fälle näher würdigen und zeigen, wie auch auf anderen Wegen, die freilich nicht ganz direkt sind, dasselbe Ziel erreicht werden kann.

II. Erster besonderer Fall.

§. 185.

Es sei

665)

$$\begin{aligned}
B^{(1)} &= A_1^{(1)} \cdot X_1 \\
B^{(2)} &= A_1^{(2)} \cdot X_1 + A_2^{(2)} \cdot X_2 \\
B^{(3)} &= A_1^{(3)} \cdot X_1 + A_2^{(3)} \cdot X_2 + A_3^{(3)} \cdot X_3 \\
B^{(4)} &= A_1^{(4)} \cdot X_1 + A_2^{(4)} \cdot X_2 + A_3^{(4)} \cdot X_3 + A_4^{(4)} \cdot X_4 \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

In diesen Reihen verschwindet $A_q^{(p)}$, wenn p kleiner als q ist; diese Eigenschaft macht, dass auch

$$\Big[\!\Big[A_1^{(1)} \ldots A_{n-1} A_{n+1} \ldots A_{n+m}^{(n+m-1)} \Big) =$$

$$\Sigma (-)^{n+m-x-1} \Big[\!\Big[A_1^{(1) \ldots (x-1), (x+1)} \ldots A_{n-1} A_{n+1} \ldots A_{n+m-1}^{(n+m-1)} \Big) \cdot A_{n+m}^{(x)} = 0$$

denn x ist immer kleiner als n + m. Von der ganzen Reihe in 661 bleibt also nur das erste Glied übrig, und es ist

666)

$$X_n = \frac{\Big[\!\Big[A_1^{(1)} \ldots\ldots\ldots A_{n-1}^{(n-1)} B^{(n)} \Big)}{\Big[\!\Big[A_1^{(1)} \ldots\ldots\ldots A_n^{(n)} \Big)}$$

Dieselbe Gleichung ergibt sich, wenn die vorgegebenen Gleichungen in 665 nach ihrer Folge mit

$$(-)^{n-1}\,[\![A_1^{(2)} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots A_{n-1}^{(n)}\big)$$

$$(-)^{n-2}\,[\![A_1^{(1)} A_2^{(3)} \ldots\ldots\ldots\ldots A_{n-1}^{(n)}\big)$$

$$(-)^{n-3}\,[\![A_1^{(1)} A_2^{(2)} A_3^{(4)} \ldots\ldots\ldots A_{n-1}^{(n)}\big)$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$(-)^{0}\,[\![A_1^{(1)} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots A_{n-1}^{(n-1)}\big)$$

vervielfacht werden.

In diesem Bruche verschwinden noch viele Producte, und von denjenigen, welche übrig bleiben, enthalten viele noch überflüssige Factoren. Es ist nämlich der Nenner dieses Bruches

$$[\![A_1^{(1)} \ldots A_n^{(n)}\big) = A_1^{(1)} \cdot A_2^{(2)} \cdot A_3^{(3)} \cdot A_4^{(4)} \ldots A_n^{(n)}$$

Der Zähler des obigen Bruches ist

$$[\![A_1^{(1)} \ldots\ldots A_{n-1}^{(n-1)} B^{(n)}\big) = \Sigma\,(-)^{n-x}\,[\![A_1^{(1)\ldots,\,(x-1),\,(x+1),\,\ldots} \ldots\ldots\ldots A_{n-1}^{(n)}\big) \cdot B^{(x)}$$

und jedes dieser Producte kann in zwei Factoren zerlegt werden:

$$[\![A_1^{(1)\ldots,\,(x-1),\,(x+1),\,\ldots} \ldots\ldots\ldots A_{n-1}^{(n)}\big) = \Sigma\,(-)^{*}\,[\![A_1^{(1)} \ldots\ldots A_{x-1}^{(x-1)}\big) \cdot [\![A_x^{(x+1)} \ldots\ldots A_{n-1}^{(n)}\big)$$

wo die unteren Stellenzahlen den Gesetzen der geordneten Verbindungen ohne Wiederholungen unterworfen sind. Da aber durch das Uebertragen eines Elements die obere Zahl von A kleiner wird, als diejenige, welche A unten begleitet, wodurch dieser einzelne Factor $A_q^{(p)}$, also auch das Product, worin es vorkommt, verschwindet, so bleibt von der ganzen Summe der Producte, welche unter dem letzten Σ begriffen sind, nur das erste Product, nämlich

$$[\![A_1^{(1)\ldots,\,(x-1),\,(x+1),\,\ldots} \ldots\ldots\ldots A_{n-1}^{(n)}\big) = [\![A_1^{(1)} \ldots\ldots A_{x-1}^{(x-1)}\big) \cdot [\![A_x^{(x+1)} \ldots\ldots A_{n-1}^{(n)}\big)$$

Es ist aber nach der obigen Gleichung

$$[\![A_1^{(1)} \ldots\ldots A_{x-1}^{(x-1)}\big) = A_1^{(1)} \cdot A_2^{(2)} \cdot A_3^{(3)} \ldots\ldots A_{x-1}^{(x-1)}$$

folglich der Zähler des Bruches 666

$$\left\| A_1^{(1)} \ldots\ldots A_{n-1}^{(n-1)} \cdot B^{(n)} \right) = \Sigma\,(-)^{n-x} A_1^{(1)} \cdot A_2^{(2)} \ldots\ldots A_{x-1}^{(x-1)} \cdot B^{(x)} \cdot \left\| A_x^{(x+1)} \ldots\ldots A_{n-1}^{(n)} \right)$$

mithin der Bruch selbst

$$667)\qquad X_n = \Sigma\,(-)^{n-x} \frac{B^{(x)} \cdot \left\| A_x^{(x+1)} \ldots\ldots A_{n-1}^{(n)} \right)}{A_x^{(x)} \cdot A_{x+1}^{(x+1)} \cdot A_{x+2}^{(x+2)} \cdots A_n^{(n)}}$$

oder

$$668)\ X_n = \frac{B^{(n)}}{A_n^{(n)}} - \frac{B^{(n-1)} \cdot \left\| A^{(n)} \right)}{A_{n-1}^{(n-1)} \cdot A_n^{(n)}} + \frac{B^{(n-2)} \cdot \left\| A_{n-2}^{(n-1)} A_{n-1}^{(n)} \right)}{A_{n-2}^{(n-2)} \cdot A_{n-1}^{(n-1)} \cdot A_n^{(n)}} - \frac{B^{(n-3)} \cdot \left\| A_{n-3}^{(n-2)} \cdot A_{n-2}^{(n-1)} \cdot A_{n-1}^{(n)} \right)}{A_{n-3}^{(n-3)} \cdot A_{n-2}^{(n-2)} \cdot A_{n-1}^{(n-1)} \cdot A_n^{(n)}}$$

$$+ \ldots\ldots\ (-)^{n-1} \frac{B^{(1)} \cdot \left\| A_1^{(2)} A_2^{(3)} \ldots\ldots A_{n-1}^{(n)} \right)}{A_1^{(1)} \cdot A_2^{(2)} \cdot A_3^{(3)} \ldots\ldots A_n^{(n)}}$$

Hiedurch ist viel Ueberflüssiges aus der Gleichung 666 gebracht; wir können noch weiter gehen, um sie noch mehr davon zu befreien; die Gleichung

$$669)\ \left\| A_{n-m-1}^{(n-m)} \ldots A_{n-1}^{(n)} \right) = \left\| A_{n-m-1}^{(n-m)} \ldots A_{n-2}^{(n-1)} \right) \cdot A_{n-1}^{(n)} - \left\| A_{n-m-1}^{(n-m)} \ldots A_{n-3}^{(n-2)} A_{n-2}^{(n)} \right) \cdot A_{n-1}^{(n-1)}$$

welche aus

$$\Sigma\,(-)^{*} \left\| A_{n-m-1}^{(n-m)} \overset{\ldots\, n-y-1,\ n-y+1,\ \ldots}{\ldots\ldots\ldots\ldots} A_{n-2}^{(n)} \right) \cdot A_{n-1}^{(n-y)}$$

entspringt, leistet hier grosse Dienste. Wird nämlich

$$\frac{\left\| A_{n-m-1}^{(n-m)} \ldots\ldots\ldots A_{n-2}^{(n-1)} \right) \cdot A_{n-1}^{(n)}}{A_{n-m-1}^{(n-m-1)} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots A_{n-1}^{(n-1)}} = V(n, m+1)$$

und

$$\frac{\left\| A_{n-m-1}^{(n-m)} \ldots\ldots\ldots\ldots A_{n-3}^{(n-2)} \cdot A_{n-2}^{(n)} \right)}{A_{n-m-1}^{(n-m-1)} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots A_{n-2}^{(n-2)}} = U(n, m+1)$$

gesetzt, so wird

670) $$X_n = \frac{1}{A_n^{(n)}} \cdot \Big(\big(V(n,0) - U(n,0)\big) \cdot B^{(n)} \\ - \big(V(n,1) - U(n,1)\big) \cdot B^{(n-1)} \\ + \big(V(n,2) - U(n,2)\big) \cdot B^{(n-2)} \\ - \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \\ (-)^{n-1}\big(V(n,n-1) - U(n,n-1)\big) \cdot B^{(1)} \Big)$$

Ohngeachtet dieser Reduction bleibt noch mehreres Ueberflüssige in dieser Gleichung; wollen wir sie hievon ganz befreien, so müssen wir diesen Weg verlassen und einen andern einschlagen.

Die Gleichungen 665 enthalten nämlich eine zurücklaufende Bildungsweise, welche wir früher §. 138 gewürdigt haben; setzen wir

671) $$\frac{-B^{(n)}}{A_n^{(n)}} = \mathfrak{F}_0^{(n)}\,,\quad \frac{A_1^{(n)}}{A_n^{(n)}} = \mathfrak{F}_1^{(n)}\,,\; \ldots\ldots\,,\; \frac{A_q^{(n)}}{A_n^{(n)}} = \mathfrak{F}_q^{(n)}$$

so wird

672) $$0 = \mathfrak{F}_0^{(n)} + \mathfrak{F}_1^{(n)} \cdot X_1 + \mathfrak{F}_2^{(n)} \cdot X_2 + \ldots\ldots + \mathfrak{F}_{n-1}^{(n)} \cdot X_{n-1} + X_n$$

Aus dieser Gleichung ergibt sich folgende unabhängige Bildungsweise der Grössen X_1, X_2, …….

673) $$X_1 = -\mathfrak{F}_0^{(1)}$$
$$X_2 = -\mathfrak{F}_0^{(2)} + \mathfrak{F}_0^{(1)} \cdot \mathfrak{F}_1^{(2)}$$
$$X_3 = -\mathfrak{F}_0^{(3)} + \mathfrak{F}_0^{(1)} \cdot \mathfrak{F}_1^{(3)} - \mathfrak{F}_0^{(1)} \cdot \mathfrak{F}_1^{(2)} \cdot \mathfrak{F}_2^{(3)} \\ + \mathfrak{F}_0^{(2)} \cdot \mathfrak{F}_2^{(3)}$$
$$X_4 = -\mathfrak{F}_0^{(4)} + \mathfrak{F}_0^{(1)} \cdot \mathfrak{F}_1^{(4)} - \mathfrak{F}_0^{(1)} \cdot \mathfrak{F}_1^{(2)} \cdot \mathfrak{F}_2^{(4)} + \mathfrak{F}_0^{(1)} \cdot \mathfrak{F}_1^{(2)} \cdot \mathfrak{F}_2^{(3)} \cdot \mathfrak{F}_3^{(4)} \\ + \mathfrak{F}_0^{(2)} \cdot \mathfrak{F}_2^{(4)} - \mathfrak{F}_0^{(1)} \cdot \mathfrak{F}_1^{(3)} \cdot \mathfrak{F}_3^{(4)} \\ + \mathfrak{F}_0^{(3)} \cdot \mathfrak{F}_3^{(4)} - \mathfrak{F}_0^{(2)} \cdot \mathfrak{F}_2^{(3)} \cdot \mathfrak{F}_3^{(4)}$$

und allgemein

674)

$$\begin{aligned}
X_n = &- \mathfrak{F}({}_{,}0,\ (1,\ 2, \ldots,\ n-1)^{(0)},\ n)' \\
&+ \mathfrak{F}({}_{,}0,\ (1,\ 2, \ldots,\ n-1)^{(1)},\ n)' \\
&- \mathfrak{F}({}_{,}0,\ (1,\ 2, \ldots,\ n-1)^{(2)},\ n)' \\
&+ \ldots\ldots\ldots\ldots \\
&(-)^n \mathfrak{F}({}_{,}0,\ (1,\ 2, \ldots,\ n-1)^{(n-1)},\ n)'
\end{aligned}$$

Dieses Bildungsgesetz ist von dem vorigen 670 ganz verschieden, und enthält kein überflüssiges Element.

III. Zweiter besonderer Fall.

§. 186.

Der zweite besondere Fall ist folgender:

$$\begin{array}{lllllll}
675) & B^{(1)} = & A_1^{(1)}X_1 + & A_2^{(1)}X_2 + & A_3^{(1)}X_3 + & A_4^{(1)}X_4 + & A_5^{(1)}X_5 \ldots\ldots \\
 & B^{(2)} = & & A_2^{(2)}X_2 + & A_3^{(2)}X_3 + & A_4^{(2)}X_4 + & A_5^{(2)}X_5 \ldots\ldots \\
 & B^{(3)} = & & & A_3^{(3)}X_3 + & A_4^{(3)}X_4 + & A_5^{(3)}X_5 \ldots\ldots \\
 & B^{(4)} = & & & & A_4^{(4)}X_4 + & A_5^{(4)}X_5 \ldots\ldots \\
 & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\ldots
\end{array}$$

Dieser Fall kann entweder als in dem allgemeinsten in §. 183 enthalten betrachtet, oder er kann als für sich bestehend behandelt werden. Der erste Weg führt zu folgenden Resultaten: es ist

$$\left[A_1^{(1)} \ldots\ldots A_{n-1}^{(n-1)} A_n^{(n)}\right) = A_1^{(1)} \cdot A_2^{(2)} \cdot A_3^{(3)} \ldots\ldots A_{n-1}^{(n-1)} \cdot A_n^{(n)}$$

und

$$\left[A_1^{(1)} \ldots\ldots A_{n-1}^{(n-1)} B^{(n)}\right) = A_1^{(1)} \cdot A_2^{(2)} \cdot A_3^{(3)} \ldots\ldots A_{n-1}^{(n-1)} \cdot B^{(n)}$$

denn jeder Factor $A_q^{(p)}$ verschwindet, wenn p grösser ist als q, also auch jedes Product, worin ein solcher Factor vorkommt. Ferner ist

$$\left[A_1^{(1)} \ldots\ldots A_{n-1}^{(n-1)} A_{n+1}^{(n)} \ldots\ldots A_{n+m+1}^{(n+m)}\right) = \Sigma (-)^* \left[A_1^{(1)} \ldots\ldots A_{n-1}^{(n-1)}\right) \cdot \left[A_{n+1}^{(n)} \ldots\ldots A_{n+m+1}^{(n+m)}\right)$$

wo die oberen Elemente $1, 2, \ldots, n+m$ in zwei Abtheilungen gebracht worden, so dass die erstere alle geordnete Verbindungen ohne Wiederholungen zu $n-1$ Elementen, und die andere zu $m+1$ Elementen enthält; hiedurch wird in der ersteren Abtheilung ein oberes Element grösser als das ihm entsprechende untere Element, mithin dieser Factor, also das ganze Product $= 0$. Von allen geordneten Verbindungen ohne Wiederholungen bleibt daher nur die erste Verbindung, und es ist

$$\Big\|A_1^{(1)} \ldots\ldots A_{n-1}^{(n-1)} A_{n+1}^{(n)} \ldots\ldots A_{n+m+1}^{(n+m)}\Big) = \Big\|A_1^{(1)} \ldots\ldots A_{n-1}^{(n-1)}\Big) . \Big\|A_{n+1}^{(n)} \ldots\ldots A_{n+m+1}^{(n+m)}\Big)$$

welche nach dem Obigen $= A_1^{(1)} . A_2^{(2)} . A_3^{(3)} \ldots A_{n-1}^{(n-1)} . \Big\|A_{n+1}^{(n)} \ldots\ldots A_{n+m+1}^{(n+m)}\Big)$

Es ist also das allgemeine Glied von der Reihe in 661

$$\frac{\Big\|A_1^{(1)} \ldots\ldots A_{n-1}^{(n-1)} A_{n+1}^{(n)} \ldots\ldots A_{n+m+1}^{(n+m)}\Big) . \Big\|A_1^{(1)} \ldots\ldots A_{n+m}^{(n+m)} B^{(n+m+1)}\Big)}{\Big\|A_1^{(1)} \ldots\ldots\ldots\ldots A_{n+m}^{(n+m)}\Big) . \Big\|A_1^{(1)} \ldots\ldots\ldots A_{n+m+1}^{(n+m+1)}\Big)} =$$

$$= \frac{B^{(n+m+1)} . \Big\|A_{n+1}^{(n)} \ldots\ldots\ldots\ldots A_{n+m+1}^{(n+m)}\Big)}{A_n^{(n)} . A_{n+1}^{(n+1)} \ldots\ldots\ldots\ldots A_{n+m+1}^{(n+m+1)}}$$

mithin die Reihe, welche den Werth von X_n angibt,

$$676)\quad X_n = \frac{B^{(n)}}{A_n^{(n)}} - \frac{B^{(n+1)} . \Big\|A_{n+1}^{(n)}\Big)}{A_n^{(n)} . A_{n+1}^{(n+1)}} + \frac{B^{n+2} . \Big\|A_{n-1}^{(n)} A_{n+2}^{(n+1)}\Big)}{A_n^{(n)} . A_{n+1}^{(n+1)} . A_{n+2}^{(n+2)}} - \frac{B^{(n+3)} . \Big\|A_{n+1}^{(n)} A_{n+2}^{(n+1)} A_{n+3}^{(n+2)}\Big)}{A_n^{(n)} . A_{n+1}^{(n+1)} . A_{n+2}^{(n+2)} . A_{n+3}^{(n+3)}}$$
$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots - \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Diese Reihe enthält noch viel Ueberflüssiges; bemerken wir, dass

$$\Big\|A_{n+1}^{(n)} \ldots\ldots A_{n+m+1}^{(n+m)}\Big) = \Sigma(-)^x \Big\|A_{n+2}^{(n)} \ldots, {}^{n+x-1,\ n+x+1,} \ldots\ldots A_{n+m+1}^{(n+m)}\Big) . A_{n+1}^{(n+x)}$$

und dass $A_{n+1}^{(n+x)}$ verschwindet, wenn x grösser ist als 1, so erhalten wir eine Gleichung

$$677)\quad \Big\|A_{n+1}^{(n)} \ldots\ldots A_{n+m+1}^{(n+m)}\Big) = \Big\|A_{n+2}^{(n+1)} \ldots A_{n+m+1}^{(n+m)}\Big) . A_{n+1}^{(n)} - \Big\|A_{n+2}^{(n)} A_{n+3}^{(n+2)} \ldots A_{n+m+1}^{(n+m)}\Big) . A_{n+1}^{(n+1)}$$

welche grosse Dienste leistet, wenn die obige Reihe von dem Ueberflüssigen befreiet werden soll. Setzen wir desshalb

$$678)\qquad \frac{\Big\|A_{n+2}^{(n+1)} \ldots\ldots A_{n+m+1}^{(n+m)}\Big) . A_{n+1}^{(n)}}{A_{n+1}^{(n+1)} \ldots\ldots\ldots A_{n+m+1}^{(n+m+1)}} = H(n)_{m+1}$$

und

$$679)\qquad \frac{\Big\|A_{n+2}^{(n)} A_{n+3}^{(n+2)} \ldots\ldots A_{n+m+1}^{(n+m)}\Big)}{A_{n+2}^{(n+2)} \ldots\ldots\ldots A_{n+m+1}^{(n+m+1)}} = K(n)_{m+1}$$

so ist das allgemeine Glied obiger Reihe

$$= \frac{B^{(n+m+1)}}{A_n^{(n)}} . \left(H(n)_{m+1} - K(n)_{m+1}\right)$$

und folglich die Reihe selbst

680) $$X_n = \frac{1}{A_n^{(n)}} \left(\begin{array}{l} B^{(n)} \; (H(n)_0 - K(n)_0) \\ - B^{(n+1)} (H(n)_1 - K(n)_1) \\ + B^{(n+2)} (H(n)_2 - K(n)_2) \\ - \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \\ + \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \end{array} \right)$$

welche noch nicht ganz von dem Ueberflüssigen befreiet ist, zu dessen Fortschaffung ähnliche Gleichungen wie 677 gebildet werden können.

Soll der Werth von X_n ganz befreit von dem Ueberflüssigen dargestellt werden, so müssen wir zu denjenigen Verbindungen übergehen, in welchen die obern und die untern Stellenzahlen den Gesetzen der geordneten Verbindungen ohne Wiederholungen unterworfen sind; es ist nämlich, wenn wir

681) $$\frac{A_{n+s}^{(n)}}{A_n^{(n)}} = D_{n+s}^{(n)}$$

setzen, nach 676

682) $$X_n = \frac{B^{(n)}}{A_n^{(n)}} - \frac{B^{(n+1)}}{A_{n+1)}^{(n+1)}} \cdot D_{n+1}^{(n)} + \frac{B^{(n+2)}}{A_{n+2}^{(n+2)}} \cdot \left| \begin{array}{l} + D_{n+1}^{(n)} \cdot D_{n+2}^{(n+1)} \\ \quad - \quad D_{n+2}^{(n)} \end{array} \right.$$

$$- \frac{B^{(n+3)}}{A_{n+3}^{(n+3)}} \left| \begin{array}{l} + D_{n+1}^{(n)} \cdot D_{n+2}^{(n+1)} \cdot D_{n+3}^{(n+2)} \\ - D_{n+1}^{(n)} \cdot D_{n+3}^{(n+1)} \\ - D_{n+2}^{(n)} \cdot D_{n+3}^{(n+2)} \\ + D_{n+3}^{(n)} \end{array} \right. + \frac{B^{(n+4)}}{A_{n+4}^{(n+4)}} \cdot \left| \begin{array}{l} + D_{n+1}^{(n)} \cdot D_{n+2}^{(n+1)} \cdot D_{n+3}^{(n+2)} \cdot D_{n+4}^{(n+3)} - \ldots + \ldots \\ - D_{n+1}^{(n)} \cdot D_{n+2}^{(n+1)} \cdot D_{n+4}^{(n+2)} \\ - D_{n+1}^{(n)} \cdot D_{n+3}^{(n+1)} \cdot D_{n+4}^{(n+3)} \\ - D_{n+2}^{(n)} \cdot D_{n+3}^{(n+2)} \cdot D_{n+4}^{(n+3)} \\ + D_{n+1}^{(n)} \cdot D_{n+4}^{(n+1)} \\ + D_{n+2}^{(n)} \cdot D_{n+4}^{(n+2)} \\ + D_{n+3}^{(n)} \cdot D_{n+4}^{(n+3)} \\ - D_{n+4}^{(n)} \end{array} \right.$$

§. 187.

Der obige Fall lässt sich auch unabhängig von dem allgemeinsten in §. 183 auf folgende Weise behandeln. Die Gleichungen

$$\begin{array}{llllll} B^{(n)} = & A_n^{(n)} X_n & + A_{n+1}^{(n)} X_{n+1} & + A_{n+2}^{(n)} X_{n+2} & + A_{n+3}^{(n)} X_{n+3} & + \ldots\ldots \\ B^{(n+1)} = & & A_{n+1}^{(n+1)} X_{n+1} & + A_{n+2}^{(n+1)} X_{n+2} & + A_{n+3}^{(n+1)} X_{n+3} & + \ldots\ldots \\ B^{(n+2)} = & & & A_{n+2}^{(n+2)} X_{n+2} & + A_{n+3}^{(n+2)} X_{n+3} & + \ldots\ldots \\ B^{(n+3)} = & & & & A_{n+3}^{(n+3)} X_{n+3} & + \ldots\ldots \end{array}$$

. . . .

werden nach ihrer Folge mit 1, $Q_1^{(n)}$, $Q_2^{(n)}$, $Q_3^{(n)}$, ... vervielfacht, und diese so bestimmt, dass

683) $$\begin{array}{l} A_{n+1}^{(n)} + A_{n+1}^{(n+1)} \cdot Q_1^{(n)} = 0 \\ A_{n+2}^{(n)} + A_{n+2}^{(n+1)} \cdot Q_1^{(n)} + A_{n+2}^{(n+2)} \cdot Q_2^{(n)} = 0 \\ A_{n+3}^{(n)} + A_{n+3}^{(n+1)} \cdot Q_1^{(n)} + A_{n+3}^{(n+2)} \cdot Q_2^{(n)} + A_{n+3}^{(n+3)} \cdot Q_3^{(n)} = 0 \\ A_{n+4}^{(n)} + A_{n+4}^{(n+1)} \cdot Q_1^{(n)} + A_{n+4}^{(n+2)} Q_2^{(n)} + A_{n+4}^{(n+3)} \cdot Q_3^{(n)} + A_{n+4}^{(n+4)} \cdot Q_4^{(n)} = 0 \end{array}$$

. . . .

Hiedurch entsteht die Reihe

$$684)\qquad X_n = \frac{1}{A_n^{(n)}}\left(B^{(n)} + B^{(n+1)} \cdot Q_1^{(n)} + B^{(n+2)} \cdot Q_2^{(n)} + B^{(n+3)} \cdot Q_3^{(n)} + \ldots\ldots\right)$$

Aus den Gleichungen 683 ergeben sich auf die Weise, welche in §. 137 gelehrt ist, die Werthe von $Q_1^{(n)}$, $Q_2^{(n)}$, $Q_3^{(n)}$, …., welche mit denjenigen Grössen, die wir oben gefunden haben, übereinstimmen.

IV. Zurückführen des allgemeinsten auf den besondern Fall.

§. 188.

Die allgemeinste Aufgabe in §. 183 lässt sich auf die besondere in §. 186 zurückführen; werden nämlich die n ersten Reihen in 659 nach ihrer Folge mit

$$\begin{array}{l}
(-)^{n-1}\left\|A_1^{(2)}\ldots\ldots\ldots\ldots A_{n-1}^{(n)}\right) \\
(-)^{n-2}\left\|A_1^{(1)}A_2^{(3)}\ldots\ldots\ldots A_{n-1}^{(n)}\right) \\
(-)^{n-3}\left\|A_1^{(1)}A_2^{(2)}A_3^{(4)}\ldots\ldots A_{n-1}^{(n)}\right) \\
.\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ . \\
(-)^{0}\ \left\|A_1^{(1)}\ldots\ldots\ldots\ldots A_{n-1}^{(n-1)}\right)
\end{array}$$

vervielfacht, und alle zusammengezählt, so ist die erste Scheitelreihe

$$\left\|A_1^{(1)}\ldots A_{n-1}^{(n-1)}\right).B^{(n)}-\left\|A_1^{(1)}\ldots A_{n-2}^{(n-2)}A_{n-1}^{(n)}\right).B^{(n-1)}+\ldots(-)^{n-1}\left\|A_1^{(2)}\ldots A_{n-1}^{(n)}\right).B^{(1)}=$$

$$=\left\|A_1^{(1)}\ldots\ldots\ldots A_{n-1}^{(n-1)}B^{(n)}\right)$$

und diejenige Scheitelreihe, welche mit X_q vervielfacht ist, wird

$$\left\|A_1^{(1)}\ldots A_{n-1}^{(n-1)}\right).A_q^{(n)}-\left\|A_1^{(1)}\ldots A_{n-2}^{(n-2)}A_{n-1}^{(n)}\right).A_q^{(n-1)}+\ldots(-)^{n-1}\left\|A_1^{(2)}\ldots A_{n-1}^{(n)}\right).\ A_q^{(1)}\ =$$

$$=\left\|A_1^{(1)}\ldots\ldots A_{n-1}^{(n-1)}A_q^{(n)}\right)$$

So lange q kleiner als n ist, verschwindet diese Summe, und es wird

685)
$$\begin{aligned}\left[A_1^{(1)} \ldots\ldots A_{n-1}^{(n-1)} B^{(n)}\right) = &\left[A_1^{(1)} \ldots\ldots A_{n-1}^{(n-1)} A_n^{(n)}\right) . X_n \\ &+\left[A_1^{(1)} \ldots\ldots A_{n-1}^{(n-1)} A_{n+1}^{(n)}\right) . X_{n+1} \\ &+\left[A_1^{(1)} \ldots\ldots A_{n-1}^{(n-1)} A_{n+2}^{(n)}\right) . X_{n+2} \\ &+ \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;. \\ &+\left[A_1^{(1)} \ldots\ldots A_{n-1}^{(n-1)} A_{n+m}^{(n)}\right) . X_{n+m} \\ &+ \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\end{aligned}$$

Wird nun $n = 1, 2, 3, \ldots$, gesetzt, so entstehen folgende Reihen:

686)
$$\begin{aligned}\left[B^{(1)}\right) &= \left[A_1^{(1)}\right) . X_1 + \left[A_2^{(1)}\right) . X_2 + \left[A_3^{(1)}\right) . X_3 + \left[A_4^{(1)}\right) . X_4 + \ldots\ldots \\ \left[A_1^{(1)} B^{(2)}\right) &= \left[A_1^{(1)} A_2^{(2)}\right) . X_2 + \left[A_1^{(1)} A_3^{(2)}\right) . X_3 + \left[A_1^{(1)} A_4^{(2)}\right) . X_4 + \ldots\ldots \\ \left[A_1^{(1)} A_2^{(2)} B^{(3)}\right) &= \left[A_1^{(1)} A_2^{(2)} A_3^{(3)}\right) . X_3 + \left[A_1^{(1)} A_2^{(2)} A_4^{(3)}\right) . X_4 + \ldots\ldots \\ &\;.\end{aligned}$$

oder wenn

687)
$$\frac{\left[A_1^{(1)} A_2^{(2)} A_3^{(3)} \ldots\ldots A_{n-1}^{(n-1)} B^{(n)}\right)}{\left[A_1^{(1)} A_2^{(2)} A_3^{(3)} \ldots\ldots\ldots\ldots A_n^{(n)}\right)} = V^{(n)}$$

und

688)
$$\frac{\left[A_1^{(1)} A_2^{(2)} A_3^{(3)} \ldots\ldots A_{n-1}^{(n-1)} A_{n+m}^{(n)}\right)}{\left[A_1^{(1)} A_2^{(2)} A_3^{(3)} \ldots\ldots\ldots\ldots A_n^{(n)}\right)} = U_{n+m}^{(n)}$$

gesetzt wird, so ist

689)
$$\begin{aligned}V^{(1)} &= X_1 + U_2^{(1)} . X_2 + U_3^{(1)} . X_3 + U_4^{(1)} . X_4 + \ldots\ldots \\ V^{(2)} &= X_2 + U_3^{(2)} . X_3 + U_4^{(2)} . X_4 + \ldots\ldots \\ V^{(3)} &= X_3 + U_4^{(3)} . X_4 + \ldots\ldots \\ V^{(4)} &= X_4 + \ldots\ldots \\ &\;.\end{aligned}$$

folglich erhalten wir, wenn diese Reihen mit $1, L_1^{(n)}, L_2^{(n)}, L_3^{(n)}, L_4^{(n)}, L_5^{(n)}, \ldots$ vervielfacht werden, die Reihe

690) $$X_n = V^{(n)} + L_1^{(n)} . V^{(n+1)} + L_2^{(n)} . V^{(n+2)} + L_3^{(n)} . V^{(n+3)} + \ldots\ldots$$

deren Vorzahlen folgendes Gesetz befolgen:

691) $$U_{n+1}^{(n)} + L_1^{(n)} = 0$$

$$U_{n+2}^{(n)} + L_1^{(n)} . U_{n+2}^{(n+1)} + L_2^{(n)} = 0$$

$$U_{n+3}^{(n)} + L_1^{(n)} . U_{n+3}^{(n+1)} + L_2^{(n)} . U_{n+3}^{(n+2)} + L_3^{(n)} = 0$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$U_{n+p}^{(n)} + L_1^{(n)} . U_{n+p}^{(n+1)} + L_2^{(n)} . U_{n+p}^{(n+2)} + \ldots\ldots + L_{p-1}^{(n)} . U_{n+p}^{(n+p-1)} + L_p^{(n)} = 0$$

Wir erhalten durch dieses Verfahren dieselbe Reihe mit denselben Gesetzen, zu welchen uns früher die erste Hauptidee, die der Theorie der Reihen zu Grunde liegt, führte.

Zweite Abtheilung.

Bildung der Hülfsgleichungen vermittelst der Unterschiede und der Differentiale.

§. 189.

Die Gleichungen 659, 662, 665, 675, von denen die Entwickelung einer Function in Reihen ganz abhängt, können auf verschiedene Weise hervorgebracht werden, und zwar

I. durch Einführen verschiedener bestimmter Werthe einer veränderlichen Grundgrösse, oder durch Einführen verschiedener bestimmter Functionen für eine willkürliche Function;

II. dadurch, dass alle Glieder der zu bildenden Reihe einem bestimmten Algorithmus entweder der Unterschiede oder der Differentiale oder irgend einem andern Algorithmus unterworfen werden;

III. oder durch Hülfe eines Algorithmus und durch Einführen eines bestimmten Werthes für die Grundgrösse.

Das Einführen bestimmter Werthe oder bestimmter Functionen soll der besonderen Untersuchung überlassen bleiben; nur über die Bildung der Hülfsgleichungen vermittelst der Unterschiede, oder vermittelst des Differentiirens soll hier das Allgemeine voraus gegeben werden.

§. 190.

Es sei

$$692)\qquad F(x+h) = A_0 . \varphi_0 x + A_1 . \varphi_1 x + A_2 . \varphi_2 x + A_3 . \varphi_3 x + \ldots .$$

wo $\varphi_0 x$, $\varphi_1 x$, $\varphi_2 x$, ... verschiedene Functionen von x sind, aber die Vorzahlen A_0, A_1, A_2, ... kein x enthalten; erstere sind gegeben, die Bildungsweise der letzteren wird gesucht.

Es werden vermittelst der Unterschiede oder auch der Differentiale Reihen gebildet,

$$693)\qquad \begin{aligned} \Delta^{\nu 0}F(x+h) &= A_0 . \Delta^{\nu 0}\varphi_0 x + A_1 . \Delta^{\nu 0}\varphi_1 x + A_2 . \Delta^{\nu 0}\varphi_2 x + \ldots \ldots \\ \Delta^{\nu 1}F(x+h) &= A_0 . \Delta^{\nu 1}\varphi_0 x + A_1 . \Delta^{\nu 1}\varphi_1 x + A_2 . \Delta^{\nu 1}\varphi_2 x + \ldots \ldots \\ \Delta^{\nu 2}F(x+h) &= A_0 . \Delta^{\nu 2}\varphi_0 x + A_1 . \Delta^{\nu 2}\varphi_1 x + A_2 . \Delta^{\nu 2}\varphi_2 x + \ldots \ldots \\ \Delta^{\nu 3}F(x+h) &= A_0 . \Delta^{\nu 3}\varphi_0 x + A_1 . \Delta^{\nu 3}\varphi_1 x + A_2 . \Delta^{\nu 3}\varphi_2 x + \ldots \ldots \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

und aus diesen Reihen nach der allgemeinen Theorie, welche wir oben gegeben haben, die Vorzahlen A_0, A_1, A_2, ... gesucht; es ist nach dieser

$$694)\quad A_n = \frac{\Big\|\Delta^{\nu 0}\varphi_0 x . \Delta^{\nu 1}\varphi_1 x \ldots \Delta^{\nu(n-1)}\varphi_{n-1} x\Big)}{\Big\|\Delta^{\nu 0}\varphi_0 x . \Delta^{\nu 1}\varphi_1 x \ldots \Delta^{\nu(n-1)}\varphi_{n-1} x\Big)} . \frac{\Big\|\Delta^{\nu 0}\varphi_0 x \ldots \Delta^{\nu(n-1)}\varphi_{n-1} x . \Delta^{\nu n}F(x+h)\Big)}{\Big\|\Delta^{\nu 0}\varphi_0 x . \Delta^{\nu 1}\varphi_1 x \ldots\ldots \Delta^{\nu n}\varphi_n x\Big)}$$

$$- \frac{\Big\|\Delta^{\nu 0}\varphi_0 x . \Delta^{\nu 1}\varphi_1 x \ldots \Delta^{\nu(n-1)}\varphi_{n-1} x . \Delta^{\nu n}\varphi_{n+1} x\Big)}{\Big\|\Delta^{\nu 0}\varphi_0 x . \Delta^{\nu 1}\varphi_1 x \ldots\ldots\ldots\ldots \Delta^{\nu n}\varphi_n x\Big)} . \frac{\Big\|\Delta^{\nu 0}\varphi_0 x \ldots\ldots\ldots \Delta^{\nu n}\varphi_n x . \Delta^{\nu(n+1)}F(x+h)\Big)}{\Big\|\Delta^{\nu 0}\varphi_0 x . \Delta^{\nu 1}\varphi_1 x \ldots\ldots\ldots\ldots \Delta^{\nu(n+1)}\varphi_{n+1} x\Big)}$$

$$+ \frac{\Big\|\Delta^{\nu 0}\varphi_0 x . \Delta^{\nu 1}\varphi_1 x \ldots \Delta^{\nu(n-1)}\varphi_{n-1} x . \Delta^{\nu n}\varphi_{n+1} x . \Delta^{\nu(n+1)}\varphi_{n+2} x\Big)}{\Big\|\Delta^{\nu 0}\varphi_0 x . \Delta^{\nu 1}\varphi_1 x \ldots\ldots\ldots\ldots \Delta^{\nu(n+1)}\varphi_{n+1} x\Big)} .$$

$$\frac{\Big\|\Delta^{\nu 0}\varphi_0 x . \Delta^{\nu 1}\varphi_1 x \ldots \Delta^{\nu(n+1)}\varphi_{n+1} x . \Delta^{\nu(n+2)}F(x+h)\Big)}{\Big\|\Delta^{\nu 0}\varphi_0 x . \Delta^{\nu 1}\varphi_1 x \ldots\ldots\ldots\ldots \Delta^{\nu(n+2)}\varphi_{n+2} x\Big)}$$

$$- \ldots\ldots + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Nach Vollendung der Geschäfte, welche diese Zeichen angeben, wird statt x nach Willkühr irgend eine beständige Grösse gesetzt.

Welche Werthe für $\nu 0$, $\nu 1$, $\nu 2$, ... angenommen werden müssen, ist der Wahl des Rechners überlassen, die durch die Natur der Functionen geleitet wird.

Für diejenigen Brüche, welche kein $F(x+h)$ enthalten, sind in §. 156 die zurücklaufenden und die unabhängigen Bildungsweisen angegeben.

Hier ist das Verfahren ganz im allgemeinen vorgelegt. Die Natur der gegebenen Functionen gestattet oft, aus der gegebenen Reihe 692 durch Unterschiede oder durch Differentiale solche Gleichungen wie in §. 185 oder solche Reihen wie in §. 186 zu bilden, und die dort angestellten Untersuchungen auf diese Reihen zu übertragen.

Wenn das erste Glied $\varphi_0 x$ kein x enthält, oder wenn sogar $\varphi_0 x = 0$ ist, so wird dieser Factor $\Delta^{\nu 0} \varphi_0 x$ unterdrückt, und die Reihe für A_n in 694 leidet weiter keine Aenderung.

§. 191.

In dem Falle, wenn

$$\nu 0 = a, \ \nu 1 = a + 1, \ \nu 2 = a + 2, \ \nu 3 = a + 3, \ \ldots\ldots$$

kann auch folgendes Verfahren gewählt werden. Es wird jedem Gliede in der vorgegebenen Reihe Δ^a vorgesetzt, die Reihe durch $\Delta^a \varphi_0 x$ gemessen

$$\frac{\Delta^a F(x + h)}{\Delta^a \varphi_0 x} = A_0 + A_1 \,.\, \frac{\Delta^a \varphi_1 x}{\Delta^a \varphi_0 x} + A_2 \,.\, \frac{\Delta^a \varphi_2 x}{\Delta^a \varphi_0 x} + A_3 \,.\, \frac{\Delta^n \varphi_3 x}{\Delta^n \varphi_0 x} + \ldots\ldots$$

und für diese neue Reihe folgende Bezeichnung gewählt:

$$F^{(0)}(x + h) = A_0 + A_1 \,.\, \varphi_1^{(0)} x + A_2 \,.\, \varphi_2^{(0)} x + A_3 \,.\, \varphi_3^{(0)} x + \ldots\ldots$$

Von dieser Reihe wird der erste Unterschied in Hinsicht x genommen, und die Reihe durch $\Delta \varphi_1^{(0)} x$ gemessen

$$\frac{\Delta\, F^{(0)}(x + h)}{\varphi_1^{(0)}x} = A_1 + A_2 \,.\, \frac{\Delta\, \varphi_2^{(0)}x}{\Delta\, \varphi_1^{(0)}x} + A_3 \,.\, \frac{\Delta\, \varphi_3^{(0)}x}{\Delta\, \varphi_1^{(0)}x} + A_4 \,.\, \frac{\Delta\, \varphi_4^{(0)}x}{\Delta\, \varphi_1^{(0)}x} + \ldots\ldots$$

oder

$$F^{(1)}(x + h) = A_1 + A_2 \,.\, \varphi_2^{(1)}x + A_3 \,.\, \varphi_3^{(1)}x + A_4 \,.\, \varphi_4^{(1)}x + \ldots\ldots$$

Wird wieder von dieser Reihe der Unterschied in Hinsicht x genommen, und die Reihe durch $\Delta\, \varphi_2^{(1)}x$ gemessen

$$\frac{\Delta\, F^{(1)}(x + h)}{\Delta\, \varphi_2^{(1)}x} = A_2 + A_3 \,.\, \frac{\Delta\, \varphi_3^{(1)}x}{\Delta\, \varphi_2^{(1)}x} + A_4 \,.\, \frac{\Delta\, \varphi_4^{(1)}x}{\Delta\, \varphi_2^{(1)}x} + A_5 \,.\, \frac{\Delta\, \varphi_5^{(1)}x}{\Delta\, \varphi_2^{(1)}x} + \ldots\ldots$$

oder

$$F^{(2)}(x + h) = A_2 + A_3 \,.\, \varphi_3^{(2)}x + A_4 \,.\, \varphi_4^{(2)}x + A_5 \,.\, \varphi_5^{(2)}x + \ldots\ldots$$

und mit diesem Geschäfte so fortgefahren, so entstehen folgende Reihen:

$$695)\qquad \begin{array}{lllll}
F^{(0)}(x + h) = A_0 & + A_1 \,.\, \varphi_1^{(0)}x & + A_2 \,.\, \varphi_2^{(0)}x & + A_3 \,.\, \varphi_3^{(0)}x & + \ldots\ldots \\
F^{(1)}(x + h) = & \quad A_1 & + A_2 \,.\, \varphi_2^{(1)}x & + A_3 \,.\, \varphi_3^{(1)}x & + \ldots\ldots \\
F^{(2)}(x + h) = & & \quad A_2 & + A_3 \,.\, \varphi_3^{(2)}x & + \ldots\ldots \\
F^{(3)}(x + h) = & & & \quad A_3 \,. & + \ldots\ldots \\
\ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots
\end{array}$$

wo

$$696)\qquad \begin{array}{lll}
F^{(0)}(x + h) = \dfrac{\Delta^n F(x + h)}{\Delta^n \varphi_0 x} & \text{und} & \varphi_n^{(0)}x = \dfrac{\Delta^n \varphi_n x}{\Delta^n \varphi_0 x} \\[2ex]
F^{(1)}(x + h) = \dfrac{\Delta^1 F^{(0)}(x + h)}{\Delta^1 \varphi_1^{(0)}x} & & \varphi_n^{(1)}x = \dfrac{\Delta^1 \varphi_n^{(0)}x}{\Delta^1 \varphi_1^{(0)}x} \\[2ex]
F^{(2)}(x + h) = \dfrac{\Delta^1 F^{(1)}(x + h)}{\Delta^1 \varphi_2^{(1)}x} & & \varphi_n^{(2)}x = \dfrac{\Delta^1 \varphi_n^{(1)}x}{\Delta^1 \varphi_2^{(1)}x} \\
\ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots
\end{array}$$

Mit Hülfe der Wahrheiten, welche wir in einer früheren Untersuchung über Unterschiede §. 169 gefunden haben, können wir vorstehende Functionen $F^{(0)}$, $F^{(1)}$, $F^{(2)}$, ... und $\varphi^{(0)}$, $\varphi^{(1)}$, $\varphi^{(2)}$, ... auf Producte aus Factoren mit Versetzungen zurückführen. Es ist nämlich

$$F^{(0)}(x+h) = \frac{\Big[\!\Big|\Delta^n F(x+h)\Big)}{\Big[\!\Big|\Delta^n \varphi_0 x \qquad \Big)} \qquad \text{und } \varphi_n^{(0)} x = \frac{\Big[\!\Big|\Delta^n \varphi^n x\Big)}{\Big[\!\Big|\Delta^n \varphi_0 x\Big)}$$

ferner ist nach 607

$$F^{(1)}(x+h) = \frac{\Delta\left(\dfrac{\Big[\!\Big|\Delta^n F(x+h)\Big)}{\Big[\!\Big|\Delta^n \varphi_0 x\Big)}\right)}{\Delta\left(\dfrac{\Big[\!\Big|\Delta^n \varphi_1 x\Big)}{\Big[\!\Big|\Delta^n \varphi_0 x\Big)}\right)} = \frac{\Big[\!\Big|\Delta^n \varphi_0 x \,.\, \Delta^{n+1} F(x+h)\Big)}{\Big[\!\Big|\Delta^n \varphi_0 x \,.\, \Delta^{n+1}\varphi_1 x \qquad \Big)}$$

also auch, wenn $\varphi_n x$ statt $F(x+h)$ gesetzt wird

$$\varphi_n^{(1)} x = \frac{\Big[\!\Big|\Delta^n \varphi_0 x \,.\, \Delta^{n+1}\varphi^n x\Big)}{\Big[\!\Big|\Delta^n \varphi_0 x \,.\, \Delta^{n+1}\varphi_1 x\Big)}$$

Ferner ist

$$F^{(2)}(x+h) = \frac{\Delta\left(\dfrac{\Big[\!\Big|\Delta^n \varphi_0 x \,.\, \Delta^{n+1} F(x+h)\Big)}{\Big[\!\Big|\Delta^n \varphi_0 x \,.\, \Delta^{n+1}\varphi_1 x\Big)}\right)}{\Delta\left(\dfrac{\Big[\!\Big|\Delta^n \varphi_0 x \,.\, \Delta^{n+1}\varphi_2 x\Big)}{\Big[\!\Big|\Delta^n \varphi_0 x \,.\, \Delta^{n+1}\varphi_1 x\Big)}\right)} = \frac{\Big[\!\Big|\Delta^n \varphi_0 x \,.\, \Delta^{n+1}\varphi_1 x \,.\, \Delta^{n+2} F(x+h)\Big)}{\Big[\!\Big|\Delta^n \varphi_0 x \,.\, \Delta^{n+1}\varphi_1 x \,.\, \Delta^{n+2}\varphi_2 x \qquad \Big)}$$

und, wenn $\varphi_n x$ statt $F(x+h)$ gesetzt wird

$$\varphi_n^{(2)} x = \frac{\Big[\!\Big|\Delta^n \varphi_0 x \,.\, \Delta^{n+1}\varphi_1 x \,.\, \Delta^{n+2}\varphi_n x\Big)}{\Big[\!\Big|\Delta^n \varphi_0 x \,.\, \Delta^{n+1}\varphi_1 x \,.\, \Delta^{n+2}\varphi_2 x\Big)}$$

Allgemein finden wir auf diesem Wege, dass

697) $$F^{(m)}(x+h) = \frac{\Big[\!\Big|\Delta^n \varphi_0 x \,.\, \Delta^{n+1}\varphi_1 x \,.\, \Delta^{n+2}\varphi_2 x \ldots\ldots \Delta^{n+m-1}\varphi_{m-1} x \,.\, \Delta^{n+m} F(x+h)\Big)}{\Big[\!\Big|\Delta^n \varphi_0 x \,.\, \Delta^{n+1}\varphi_1 x \,.\, \Delta^{n+2}\varphi_2 x \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \Delta^{n+m}\varphi_m x \qquad \Big)}$$

und

$$\varphi_n^{(m)} x = \frac{\Big[\!\Big|\Delta^n \varphi_0 x \,.\, \Delta^{n+1}\varphi_1 x \,.\, \Delta^{n+2}\varphi_2 x \ldots\ldots \Delta^{n+m-1}\varphi_{m-1} x \,.\, \Delta^{n+m}\varphi_n x\Big)}{\Big[\!\Big|\Delta^n \varphi_0 x \,.\, \Delta^{n+1}\varphi_1 x \,.\, \Delta^{n+2}\varphi_2 x \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \Delta^{n+m}\varphi_m x\Big)}$$

Nachdem wir die Grössen $F^{(0)}$, $F^{(1)}$, $F^{(2)}$, ..., $\varphi^{(0)}$, $\varphi^{(1)}$, $\varphi^{(2)}$, ... welche durch abwechselndes Abzählen und Messen entstanden sind, auf Producte aus Factoren mit Versetzungen zurückgebracht haben, gehen wir zur Bestimmung der Vorzahlen A_0, A_1, A_2, ..., über. Wir vervielfachen desshalb die Reihen

$$F^{(n)}(x+h) = A_n + A_{n+1} \cdot \varphi^{(n)}_{n+1} x + A_{n+2} \cdot \varphi^{(n)}_{n+2} x + A_{n+3} \cdot \varphi^{(n)}_{n+3} x + \ldots\ldots$$
$$F^{(n+1)}(x+h) = \qquad A_{n+1} \qquad A_{n+2} \cdot \varphi^{(n+1)}_{n+2} x + A_{n+3} \cdot \varphi^{(n+1)}_{n+3} x + \ldots\ldots$$
$$F^{(n+2)}(x+h) = \qquad A_{n+2} \qquad + A_{n+3} \cdot \varphi^{(n+2)}_{n+3} x + \ldots\ldots$$
$$F^{(n+3)}(x+h) = \qquad A_{n+3} \qquad + \ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

nach ihrer Folge mit 1, $L^{(n)}_1$, $L^{(n)}_2$, $L^{(n)}_3$, ... und setzen

698) $$\varphi^{(n)}_{n+1} x + L^{(n)}_1 = 0$$
$$\varphi^{(n)}_{n+2} x + \varphi^{(n+1)}_{n+2} x \cdot L^{(n)}_1 + L^{(n)}_2 = 0$$
$$\varphi^{(n)}_{n+3} x + \varphi^{(n+1)}_{n+3} x \cdot L^{(n)}_1 + \varphi^{(n+2)}_{n+3} x \cdot L^{(n)}_2 + L^{(n)}_3 = 0$$
$$\varphi^{(n)}_{n+4} x + \varphi^{(n+1)}_{n+4} x \cdot L^{(n)}_1 + \varphi^{(n+2)}_{n+4} x \cdot L^{(n)}_2 + \varphi^{(n+3)}_{n+4} x \cdot L^{(n)}_3 + L^{(n)}_4 = 0$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

dadurch entsteht die Reihe

699) $$A_n = F^{(n)}(x+h) + L^{(n)}_1 \cdot F^{(n+1)}(x+h) + L^{(n)}_2 \cdot F^{(n+2)}(x+h) + \ldots\ldots$$

deren Vorzahlen durch die Gleichungen 698 bestimmt, und nach folgendem Gesetze gebildet werden:

700) $$L^{(n)}_1 = -\varphi^{(n)}_{n+1}$$
$$L^{(n)}_2 = -\varphi^{(n)}_{n+2} + \varphi^{(n)}_{n+1} \cdot \varphi^{(n+1)}_{n+2}$$
$$L^{(n)}_3 = -\varphi^{(n)}_{n+3} + \varphi^{(n)}_{n+1} \cdot \varphi^{(n+1)}_{n+3} - \varphi^{(n)}_{n+1} \cdot \varphi^{(n+1)}_{n+2} \cdot \varphi^{(n+2)}_{n+3}$$
$$+ \varphi^{(n)}_{n+2} \cdot \varphi^{(n+2)}_{n+3}$$
$$L^{(n)}_4 = -\varphi^{(n)}_{n+4} + \varphi^{(n)}_{n+1} \cdot \varphi^{(n+1)}_{n+4} - \varphi^{(n)}_{n+1} \cdot \varphi^{(n+1)}_{n+2} \cdot \varphi^{(n+2)}_{n+4} + \varphi^{(n)}_{n+1} \cdot \varphi^{(n+1)}_{n+2} \cdot \varphi^{(n+2)}_{n+3} \cdot \varphi^{(n+3)}_{n+4}$$
$$+ \varphi^{(n)}_{n+2} \cdot \varphi^{(n+2)}_{n+4} - \varphi^{(n)}_{n+1} \cdot \varphi^{(n+1)}_{n+3} \cdot \varphi^{(n+3)}_{n+4}$$
$$+ \varphi^{(n)}_{n+3} \cdot \varphi^{(n+3)}_{n+4} - \varphi^{(n)}_{n+2} \cdot \varphi^{(n+2)}_{n+3} \cdot \varphi^{(n+3)}_{n+4}$$

und allgemein

701) $$\begin{aligned} L^{(n}_{m} = & - \varphi('n, (n+1, n+2, \ldots, n+m-1)^{(0)}, n+m)_{,} \\ & + \varphi('n, (n+1, n+2, \ldots, n+m-1)^{(1)}, n+m)_{,} \\ & - \varphi('n, (n+1, n+2, \ldots, n+m-1)^{(2)}, n+m)_{,} \\ & + \ldots\ldots - \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & (-)^{m}\varphi('n, (n+1, n+2, \ldots, n+m-1)^{(m-1)}, n+m)_{,} \end{aligned}$$

Nach Beendigung aller dieser angezeigten Geschäfte wird dem x nach Willkühr irgend ein beständiger Werth gegeben. Dieselben Resultate würden wir erhalten haben, wenn wir das Verfahren, welches in §. 188 gelehrt ist, auf die vorgegebene Reihe angewandt hätten.

Dritte Abtheilung.

Entwickelung der Functionen in Reihen.

§. 192.

Nach diesen allgemeinen Untersuchungen gehen wir zur Entwickelung der Functionen in Reihen selbst über. Damit aber diese Untersuchung sich in gehöriger Haltung bewege, und nicht im Zufälligen herumschweife, führen wir die Reihen in folgender Ordnung vor:

I. Reihen, in welchen kein Werth von x mehr als ein Glied der Reihe zernichtet.

II. Reihen, in welchen das Einführen einer bestimmten Function von x das *n* te und jedes folgende Glied der Reihe zernichtet.

III. Reihen, in welchen das Einführen eines bestimmten Werthes von $x = a_n$ das *n* te und jedes folgende Glied zernichtet.

IV. Reihen, in welchen $x = a_n$ alle früheren und späteren Glieder zernichtet, nur nicht das *n* te Glied.

V. Reihen, in welchen $x = a$ alle Glieder zernichtet.

I. Reihen, in welchen kein Werth von x mehr als ein Glied zernichtet.

§. 193.

Die Reihe, welche diese Eigenschaft hat, sei

702)
$$\begin{aligned} F(x+h) = {} & A_0 + A_1 . (\varphi x + 1_1) \\ & + A_2 . (\varphi x + 2_1)(\varphi x + 2_2) \\ & + A_3 . (\varphi x + 3_1)(\varphi x + 3_2)(\varphi x + 3_3) \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots \\ = {} & A_0 + A_1 . \psi_1 x + A_2 . \psi_2 x + A_3 . \psi_3 x + \ldots\ldots \end{aligned}$$

in welcher die Vorzahlen A_0, A_1, A_2, ... kein veränderliches x enthalten, aber durch unveränderliche Werthe von x gebildet werden können.

Erste Methode.

Durch das Einführen verschiedener Werthe $a^{(1)}$, $a^{(2)}$, $a^{(3)}$, ... von x entstehen eben so viele verschiedene Reihen

703)
$$\begin{aligned} F(a^{(1)} + h) &= A_0 + A_1 . \psi_1 a^{(1)} + A_2 . \psi_2 a^{(1)} + A_3 . \psi_3 a^{(1)} + \ldots \\ F(a^{(2)} + h) &= A_0 + A_1 . \psi_1 a^{(2)} + A_2 . \psi_2 a^{(2)} + A_3 . \psi_3 a^{(2)} + \ldots \\ F(a^{(3)} + h) &= A_0 + A_1 . \psi_1 a^{(3)} + A_2 . \psi_2 a^{(3)} + A_3 . \psi_3 a^{(3)} + \ldots \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Aus diesen Reihen können die Vorzahlen A_0, A_1, A_2, ... so wie es in den §§. 183 und 184 gezeigt ist, hergeleitet werden.

Zweite Methode.

Dadurch, dass die vorgegebene Reihe in Hinsicht x mehrmalen differentiirt wird, entstehen Reihen

704) $$\begin{aligned} d^0 F(x+h) &= A_0 + A_1 . d^0 \psi_1 x + A_2 . d^0 \psi_2 x + \dots\dots \\ d^1 F(x+h) &= \qquad A_1 . d^1 \psi_1 x + A_2 . d^1 \psi_2 x + \dots\dots \\ d^2 F(x+h) &= \qquad A_1 . d^2 \psi_1 x + A_2 . d^2 \psi_2 x + \dots\dots \\ \dots\dots & \dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{aligned}$$

aus welchen nach §. 183 und 184 die Vorzahlen A_0, A_1, A_2, ... gefunden werden können. Nach Beendigung aller dieser Geschäfte wird statt x irgend ein bekannter Werth eingeführt.

Dritte Methode.

Zuerst wird ein willkührlicher Werth von x in ϕx eingeführt, diese beständige Function ϕa zu- und abgezählt, oder

$$\phi x - \phi a + \phi a + n_q \text{ statt } \phi x + n_q$$

und dann ferner zur Vereinfachung der Zeichen

705) $$\phi x - \phi a = \phi' x \quad \text{und} \quad \phi a + n_q = n'_q$$

gesetzt. Die Reihe, welche hierdurch entsteht

706) $$\begin{aligned} F(x+h) = A_0 &+ A_1 . (\phi' x + 1'_1) \\ &+ A_2 . (\phi' x + 2'_1)(\phi' x + 2'_2) \\ &+ A_3 . (\phi' x + 3'_1)(\phi' x + 3'_2)(\phi' x + 3'_3) \\ &+ \dots\dots\dots\dots\dots \end{aligned}$$

wird mehrmalen differentiirt, nach jedem Differentiiren wird die Reihe durch $d\phi' x$ oder $d\phi x$ gemessen, und auch $x = a$ gesetzt. Da nun nach 444

$$\left(\left(\frac{d}{d\phi x}\right)^q \psi_n x\right)_{x=a} = 1^{q|1} . (n'_1 , n'_2 , \dots , n'_n)^{(n-q)}$$

oder, wenn einfachere Zeichen

707) $(n'_1, n'_2, \ldots, n'_n)^{(n-q)} = (\varphi a + n_1, \varphi a + n_2, \ldots, \varphi a + n_n)^{(n-q)} = B_n^{(n-q)}$:
gewählt werden,

$$\left(\left(\frac{d}{d\varphi x}\right)^q \psi_n x\right)_{x=a} = 1^{q|1} . B_n^{(n-q)}$$

so entstehen durch die angegebenen Geschäfte folgende Reihen:

$$\begin{array}{lllll}
\frac{1}{1^{0|1}} \cdot \left(\frac{d}{d\varphi a}\right)^0 F(a+h) = A_0 & + A_1 . B_1^{(1)} & + A_2 . B_2^{(2)} & + A_3 . B_3^{(3)} & + \ldots\ldots \\
\frac{1}{1^{1|1}} \cdot \left(\frac{d}{d\varphi a}\right)^1 F(a+h) = & \quad A_1 & + A_2 . B_2^{(1)} & + A_3 . B_3^{(2)} & + \ldots\ldots \\
\frac{1}{1^{2|1}} \cdot \left(\frac{d}{d\varphi a}\right)^2 F(a+h) = & & \quad A_2 & + A_3 . B_3^{(1)} & + \ldots\ldots \\
\frac{1}{1^{3|1}} \cdot \left(\frac{d}{d\varphi a}\right)^3 F(a+h) = & & & \quad A_3 & + \ldots\ldots \\
\ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots
\end{array}$$

welche nach §§. 186 und 187 zu der Bildungsweise der Vorzahlen A_0, A_1, ... führen, nämlich

708) $$\begin{aligned} A_n = & \quad \frac{1}{1^{n|1}} \cdot \left(\frac{d}{d\varphi a}\right)^n F(a+h) \\ & + L_1^{(n)} . \frac{1}{1^{n+1|1}} \cdot \left(\frac{d}{d\varphi a}\right)^{n+1} F(a+h) \\ & + L_2^{(n)} . \frac{1}{1^{n+2|1}} \cdot \left(\frac{d}{d\varphi a}\right)^{n+2} F(a+h) \\ & + \ldots\ldots \end{aligned}$$

Die Factoren $L_1^{(n)}$, $L_2^{(n)}$, $L_3^{(n)}$, ..., welche in dieser Bildungsweise vorkommen, werden bestimmt durch die Gleichungen

709) $$B^{(1)}_{n+1} + L^{(n)}_1 = 0$$

$$B^{(2)}_{n+2} + B^{(1)}_{n+2} L^{(n)}_1 + L^{(n)}_2 = 0$$

$$B^{(3)}_{n+3} + B^{(2)}_{n+3} \cdot L^{(n)}_1 + B^{(1)}_{n+3} \cdot L^{(n)}_2 + L^{(n)}_3 = 0$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

oder auch durch die Gleichungen

710) $$L^{(n)}_1 + B^{(1)}_{n+1} = 0$$

$$L^{(n)}_2 + B^{(1)}_{n+1} \cdot L^{(n+1)}_1 + B^{(2)}_{n+2} = 0$$

$$L^{(n)}_3 + B^{(1)}_{n+1} \cdot L^{(n+1)}_2 + B^{(2)}_{n+2} \cdot L^{(n+2)}_1 + B^{(3)}_{n+3} = 0$$

$$L^{(n)}_4 + B^{(1)}_{n+1} \cdot L^{(n+1)}_3 + B^{(2)}_{n+2} \cdot L^{(n+2)}_2 + B^{(3)}_{n+3} \cdot L^{(n+3)}_1 + B^{(4)}_{n+4} = 0$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

welche nach §. 135 immer mit ihnen verbunden sind, und aus welchen die unabhängige Bildungsweise der Factoren $L^{(n)}_1$, $L^{(n)}_2$, . . . auf die Art, wie es in §. 137 geschehen, hergeleitet werden kann.

Die Grössen $B^{(1)}_n$, $B^{(2)}_n$, . . . werden nach der Vorschrift 707 aus den gegebenen Elementen n_1, n_2, . . ., n_n und aus der vorgegebenen Function φx, deren Grundelement $x = a$ nach Willkühr angenommen werden kann, gebildet. Die Gleichungen 709 und 710 geben die zurücklaufende Bildungsweise der Grössen $L^{(n)}_1$, $L^{(n)}_2$, ... Nach Beendigung dieser Vorarbeiten tritt das Hauptgeschäft 708 ein, wodurch die vorgelegte Aufgabe in der grössten Allgemeinheit gelöst ist.

§. 194.

In dem einfachen Falle, wo $\varphi x = x$, den auch Wronski Seite 517 aber auf eine von der unserigen ganz verschiedene Weise behandelt hat, geben für die Reihe

$$711) \qquad F(x+h) = A_0 + A_1 . (x + 1_1) \\ + A_2 . (x + 2_1)(x + 2_2) \\ + A_3 . (x + 3_1)(x + 3_2)(x + 3_3) \\ + \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot$$

folgende Gleichungen die Bildungsweise an:

$$712) \qquad A_n = \frac{d^n F(a+h)}{1^{n|1} . da^n} + L_1^{(n)} . \frac{d^{n+1} F(a+h)}{1^{n+1|1} . da^{n+1}} + L_2^{(n)} . \frac{d^{n+2} F(a+h)}{1^{n+2|1} . da^{n+2}} + \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot$$

und

$$713) \qquad (a + n_1 , a + n_2 , \ldots\ldots , a + n_n)^{(p)} = B_n^{(p)}$$

$$714) \qquad L_p^{(n)} + L_{p-1}^{(n)} . B_{n+p}^{(1)} + L_{p-2}^{(n)} . B_{n+p}^{(2)} + \ldots\ldots + L_1^{(n)} . B_{n+p}^{(p-1)} + B_{n+p}^{(p)} = 0$$

$$715) \qquad L_p^{(n)} + L_{p-1}^{(n+1)} . B_{n+1}^{(n)} + L_{p-2}^{(n+2)} . B_{n+2}^{(2)} + \ldots\ldots + L_1^{(n+p-1)} . B_{n+p-1}^{(p-1)} + B_{n+p}^{(p)} = 0$$

II. Reihen, in welchen das Einführen einer bestimmten Function von x das *n*te und jedes folgende aber kein früheres Glied zernichtet.

§. 195.

Es sei $F(y \cdot fx)$ in eine Reihe nach den Unterschieden der Function x zu entwickeln, oder es seien die Vorzahlen $A_0, A_1, A_2, \ldots$ in der Reihe

716) $$F(y \,.\, fx) = A_0 \,.\, \Delta^0 fx + A_1 \,.\, \Delta^1 fx + A_2 \,.\, \Delta^2 fx + A_3 \,.\, \Delta^3 fx + \ldots$$

zu bestimmen.

Diejenige Function, welche hier gewählt werden kann, damit sie statt fx eingeführt, ein bestimmtes und jedes hierauf folgende Glied zernichtet, ist

$$fx = x^{n|h}$$

Denn für $\Delta x = h$ ist

$$\Delta^m x^{n|h} = n^{m|-1} \,.\, h^m \,.\, (x + mh)^{n-m|h}$$

also $$\Delta^n x^{n|h} = n^{n|-1} \,.\, h^n \quad \text{und} \quad \Delta^{n+p} x^{n|h} = 0$$

Werden nun die Functionen $x^{0|h}$, $x^{1|h}$, $x^{2|h}, \ldots$ für fx eingeführt, so entstehen zur zurücklaufenden Bildungsweise der Vorzahlen folgende Gleichungen:

717) $F(y.x^{0|h}) = A_0$

$F(y.x^{1|h}) = A_0 x^{1|h} + A_1\, 1^{1|-1} h^1$

$F(y.x^{2|h}) = A_0 x^{2|h} + A_1\, 2^{1|-1} h^1 (x+1h)^{1|h} + A_2\, 2^{2|-1} h^2$

$F(y.x^{3|h}) = A_0 x^{3|h} + A_1\, 3^{1|-1} h^1 (x+1h)^{2|h} + A_2\, 3^{2|-1} h^2 (x+2h)^{1|h} + A_3\, 3^{3|-1} h^3$

. . . .

$F(y.x^{n|h}) = A_0 x^{n|h} + A_1\, n^{1|1} h^1 (x+1h)^{n-1|h} + \ldots\ldots + A_n\, n^{n|-1} h^n (x+nh)^{0|h}$

Aus dieser zurücklaufenden lässt sich die unabhängige Bildungsweise herleiten, wenn vorstehende Gleichungen nach ihrer Folge mit

$$(-)^n \frac{n^{0|-1}}{1^{0|1}} x^{n|h} \quad , \quad (-)^{n-1} \frac{n^{1|-1}}{1^{1|1}} (x+h)^{n-1|h} \quad ,$$

$$(-)^{n-2} \frac{n^{2|-1}}{1^{2|1}} (x+2h)^{n-2|h} , \ldots , (-)^0 \frac{n^{n|-1}}{1^{n|1}} (x+nh)^{0|h}$$

vervielfacht und alle zusammengezählt werden; wir erhalten hiedurch die Vorschrift zur Bildung der Vorzahlen von der vorgegebenen Reihe, nämlich

718) $$A_n = h^{-n} . \left(\frac{(x+nh)^{0|h} . F(y.x^{n|h})}{1^{0|1} . 1^{n|1}} \right.$$
$$- \frac{(x+(n-1)h)^{1|h} . F(y.x^{n-1|h})}{1^{1|1} . 1^{n-1|1}}$$
$$+ \frac{(x+(n-2)h)^{2|h} . F(y.x^{n-2|h})}{1^{2|1} . 1^{n-2|1}}$$
$$- \ldots\ldots\ldots\ldots ,$$
$$\left. (-)^n \frac{x^{n|h} . F(y.x^{0|h})}{1^{n|1} . 1^{0|1}} \right)$$

Die Reihe selbst ist

$$719)\quad F(y\,.\,fx) = Fy\,.\,\frac{\Delta^0 fx}{h^0}$$

$$+ \left(\frac{(x+h)^{0|h}\,.\,F(y\,.\,x^{1|h})}{1^{0|1}\,.\,1^{1|1}} - \frac{x^{1|h}\,.\,F(y\,.\,x^{0|h})}{1^{1|1}\,.\,1^{0|1}}\right)\,.\,\frac{\Delta^1 fx}{h^1}$$

$$+ \left(\frac{(x+2h)^{0|h}\,.\,F(y\,.\,x^{2|h})}{1^{0|1}\,.\,1^{2|1}} - \frac{(x+h)^{1|h}\,.\,F(y\,.\,x^{1|h})}{1^{1|1}\,.\,1^{1|1}} + \frac{x^{2|h}\,.\,F(y\,.\,x^{0|h})}{1^{2|1}\,.\,1^{0|1}}\right)\,.\,\frac{\Delta^2 fx}{h^2}$$

$+ \;.$

wo $\Delta x = h$

§. 196.

Die Bildungsweise der Vorzahlen lässt sich durch einen besonderen Algorithmus darstellen. Es habe γ die Bedeutung, dass

$$720)\qquad \gamma^{m+1}Fn = \gamma^m Fn - \gamma^m(\varphi n\,.\,F(n-1))$$

also

$$721)\qquad \begin{aligned} \gamma\;\; Fn &= Fn - \varphi n\,.\,F(n-1) \\ \gamma^2\; Fn &= \gamma\, Fn - \gamma\,(\varphi n\,.\,F(n-1)) \\ \gamma^3\; Fn &= \gamma^2 Fn - \gamma^2(\varphi n\,.\,F(n-1)) \\ &.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;. \end{aligned}$$

und

$$722)\qquad \begin{aligned} \gamma^1 Fn &= Fn - \varphi n.F(n-1) \\ \gamma^2 Fn &= Fn - 2.\varphi n.F(n-1) + \varphi n.\varphi(n-1).F(n-2) \\ \gamma^3 Fn &= Fn - 3.\varphi n.F(n-1) + 3.\varphi n.\varphi(n-1).F(n-2) - \varphi n.\varphi(n-1).\varphi(n-2).F(n-3) \\ &.\;. \end{aligned}$$

Nehmen wir nun für den gegenwärtigen Fall

$$Fn = F(y\,.\,x^{n|h}) \quad \text{und} \quad \varphi n = x - h + nh$$

an, so erhalten wir die Gleichungen

723) $$\gamma^1 F(y.x^{n|h}) = F(y.x^{n|h}) - (x-h+nh).F(y.x^{n-1|h})$$

$$\gamma^2 F(y.x^{n|h}) = F(y.x^{n|h}) - 2.(x-h+nh)^{1|h}.F(y.x^{n-1|h}) + (x-2h+nh)^{2|h}.F(y.x^{n-2|h})$$

$$\gamma^3 F(y.x^{n|h}) = F(y.x^{n|h}) - 3(x-h+nh)^{1|h}.F(y.x^{n-1|h}) + 3.(x-2h+nh)^{2|h}.F(y.x^{n-2|h}) - (x-3h+nh)^{3|h}.F(y.x^{n-3|h})$$

. . . .

und aus diesen für $n = 0, 1, 2, \ldots\ldots$ dieselben Producte wie in 719 und dadurch folgende merkwürdige Bildungsweise der Vorzahlen:

724) $$A_0 = \frac{\gamma^0 F(y\,.\,x^{n|h})_{n=0}}{1^{0|1}\,.\,h^0}$$

$$A_1 = \frac{\gamma^1 F(y\,.\,x^{n|h})_{n=1}}{1^{1|1}\,.\,h^1}$$

$$A_2 = \frac{\gamma^2 F(y\,.\,x^{n|h})_{n=2}}{1^{2|1}\,.\,h^2}$$

. . . .

$$A_p = \frac{\gamma^p F(y\,.\,x^{n|h})_{n=p}}{1^{p|1}\,.\,h^p}$$

Die Reihe aber selbst ist

725) $$F(y\,.\,fx) = \frac{\Delta^0 fx\,.\,\gamma^0 F(y\,.\,x^{n|h})_{n=0}}{h^0\,.\,1^{0|1}}$$

$$+ \frac{\Delta^1 fx\,.\,\gamma^1 F(y\,.\,x^{n|h})_{n=1}}{h^1\,.\,1^{1|1}}$$

$$+ \frac{\Delta^2 fx\,.\,\gamma^2 F(y\,.\,x^{n|h})_{n=2}}{h^2\,.\,1^{2|1}}$$

$$+ \frac{\Delta^3 fx.\gamma^3 F(y.x^{n|h})_{n=3}}{h^3\,.\,1^{3|1}}$$

$$+ \ldots\ldots\ldots$$

§. 197.

In dieser Allgemeinheit und mit diesem Beweise erscheint sowohl diese Reihe als der Algorithmus hier zuerst.

In dem ganz speciellen Falle aber, wenn $h = 0$ angenommen wird, kommen wir zu einer viel einfacheren Reihe und zu einem minder allgemeinen Algorithmus, den schon **Brisson** (in seiner Abhandlung über Integration der Gleichungen mit partiellen Differentialen in dem Journal de l'ecole polytechnique 14 Hefte. Band VII vom Jahr 1808 Seite 191) auf eine sehr unklare Weise zuerst bekannt gemacht hat. Der Algorithmus ist in unserer Bezeichnung folgender:

726)
$$\begin{aligned} \gamma^1 Fn &= Fn - x\,.\,F(n-1) \\ \gamma^2 Fn &= \gamma Fn - x\,.\,\gamma F(n-1) \\ \gamma^3 Fn &= \gamma^2 Fn - x\,.\,\gamma^2 F(n-1) \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \gamma^{m+1} Fn &= \gamma^m Fn - x\,.\,\gamma^m F(n-1) \end{aligned}$$

oder

727)
$$\begin{aligned} \gamma\, F(y\,.\,x^n) &= F(y\,.\,x^n) - x\,.\,F(y\,.\,x^{n-1}) \\ \gamma^2 F(y\,.\,x^n) &= \gamma F(y\,.\,x^n) - x\,.\,\gamma F(y\,.\,x^{n-1}) \\ &= F(y\,.\,x^n) - 2.x^1.\,F(y\,.\,x^{n-1}) + x^2\,.\,F(y\,.\,x^{n-2}) \\ \gamma^3 F(y\,.\,x^n) &= \gamma^2 F(y\,.\,x^n) - x\,.\,\gamma^2 F(y\,.\,x^{n-1}) \\ &= F(y\,.\,x^n) - 3.x^1.F(y.x^{n-1}) + 3.x^2.F(y.x^{n-2}) - x^3.F(y.x^{n-3}) \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

wo also $\varphi\, n = x$ eine beständige Grösse ist.

Die Reihe selbst ist

$$728)\quad F(y\,.\,fx) = F\,y\,.\,\frac{d^0\,fx}{1^{0|1}dx^0}$$

$$+\left(F(y\,.\,x^1) - x\,.\,F(y\,.\,x^0)\right)\,.\,\frac{d^1\,fx}{1^{1|1}\,dx^1}$$

$$+\left(F(y\,.\,x^2) - 2\,.\,x^1\,.\,F(y\,.\,x^1) + x^2\,.\,F(y\,.\,x^0)\right)\,.\,\frac{d^2\,fx}{1^{2|1}\,dx^2}$$

$$+\left(F(y\,.\,x^3) - 3\,.\,x^1\,.\,F(y\,.\,x^2) + 3\,.\,x^2\,.\,F(y\,.\,x^1) - x^3\,.\,F(y\,.\,x^0)\right)\,.\,\frac{d^3\,fx}{1^{3|1}\,dx^3}$$

$$+ \;.$$

oder mit dem bezeichneten Algorithmus

$$729)\quad F(y\,.\,fx) = \gamma^0\,F(y\,.\,x^0)\,.\,\frac{d^0\,fx}{1^{0|1}.dx^0}$$

$$+\,\gamma^1\,F(y\,.\,x^1)\,.\,\frac{d^1\,fx}{1^{1|1}.dx^1}$$

$$+\,\gamma^2\,F(y\,.\,x^2)\,.\,\frac{d^2\,fx}{1^{2|1}.dx^2}$$

$$+\,\gamma^3\,F(y\,.\,x^3)\,.\,\frac{d^3\,fx}{1^{3|1}.dx^3}$$

$$+ \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.$$

III. Reihen, in welchen das Einführen eines bestimmten Werthes von $x = a_n$ das *n* te und jedes folgende aber kein früheres Glied zernichtet.

A. Im Allgemeinen.

§. 198.

Es sei

730) $F(x+h) = A_0 . \psi^{(0)}x + A_1 . \psi^{(1)}x + A_2 . \psi^{(2)}x + \ldots\ldots$

und die Functionen $\psi^{(0)}x$, $\psi^{(1)}x$, ... so beschaffen, dass

731)
$$\begin{array}{l} \psi^{(1)}a_1 = \psi^{(2)}a_1 = \psi^{(3)}a_1 = \ldots\ldots = 0 \\ \psi^{(2)}a_2 = \psi^{(3)}a_2 = \psi^{(4)}a_2 = \ldots\ldots = 0 \\ \psi^{(3)}a_3 = \psi^{(4)}a_3 = \psi^{(5)}a_3 = \ldots\ldots = \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \psi^{(n)}a_n = \psi^{(n+1)}a_n = \psi^{(n+2)}a_n = \ldots\ldots = 0 \end{array}$$

Diese Bedingungen erzeugen folgende Gleichungen:

732)
$$\begin{array}{l} F(a_1 + h) = A_0 . \psi^{(0)}a_1 \\ F(a_2 + h) = A_0 . \psi^{(0)}a_2 + A_1 . \psi^{(1)}a_2 \\ F(a_3 + h) = A_0 . \psi^{(0)}a_3 + A_1 . \psi^{(1)}a_3 + A_2 . \psi^{(2)}a_3 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}$$

welche die Vorzahlen obiger Reihe bestimmen

Wird zur Vereinfachung der Rechnung

733)
$$\frac{F(a_{n+1} + h) - \dfrac{\psi^{(0)}a_{n+1}}{\psi^{(0)}a_1} . F(a_1 + h)}{\psi^{(n)}a_{n+1}} = B_n^{(0)}$$

und für q = 1, 2, 3, . . . gesetzt

$$\frac{\psi^{(q)}a_{n+1}}{\psi^{(n)}a_{n+1}} = B_n^{(q)}$$

so nehmen vorstehende Gleichungen eine einfachere Gestalt an:

734)
$$\begin{aligned}
B_0^{(0)} &= 0 \\
B_1^{(0)} &= A_1 \\
B_2^{(0)} &= A_1 . B_2^{(1)} + A_2 \\
B_3^{(0)} &= A_1 . B_3^{(1)} + A_2 . B_3^{(2)} + A_3 \\
B_4^{(0)} &= A_1 . B_4^{(1)} + A_2 . B_4^{(2)} + A_3 . B_4^{(3)} + A_4 \\
B_5^{(0)} &= A_1 . B_5^{(1)} + A_2 . B_5^{(2)} + A_3 . B_5^{(3)} + A_4 . B_5^{(4)} + A_5 \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

aus welchen sich die unabhängige Bildungsweise der Vorzahlen $A_1, A_2, A_3, \ldots$ ergibt:

735)
$$\begin{aligned}
A_1 &= B_1^{(0)} \\
A_2 &= B_2^{(0)} - B_1^{(0)} . B_2^{(1)} \\
A_3 &= B_3^{(0)} - B_2^{(0)} . B_3^{(2)} - B_1^{(0)} \left| \begin{array}{l} + B_3^{(1)} \\ - B_2^{(1)}\ B_3^{(2)} \end{array} \right. \\
A_4 &= B_4^{(0)} - B_3^{(0)} . B_4^{(3)} - B_2^{(0)} \left| \begin{array}{l} + B_4^{(2)} \\ - B_3^{(2)} . B_4^{(3)} \end{array} \right. - B_1^{(0)} \left| \begin{array}{l} + B_4^{(1)} \\ - B_2^{(1)} . B_4^{(2)} \\ - B_3^{(1)} . B_4^{(3)} \\ + B_2^{(1)} . B_3^{(2)} . B_4^{(3)} \end{array} \right.
\end{aligned}$$

u. s. w.

Dieselben Gleichungen findet **Bürmann** Seite 31. §. 3.

§. 199.

Die allgemeinste Form, in welcher die obige Reihe 730 mit ihren Bedingungen 731 erscheinen kann, ist

736) $$\begin{aligned} F(x+h) = {} & A_0 . f^{(0)}x \\ & + A_1 . f^{(1)}x . (\varphi_1^{(1)}x - \varphi_1^{(1)}a_1) \\ & + A_2 . f^{(2)}x . (\varphi_1^{(2)}x - \varphi_1^{(2)}a_1)(\varphi_2^{(2)}x - \varphi_2^{(2)}a_2) \\ & + A_3 . f^{(3)}x . (\varphi_1^{(3)}x - \varphi_1^{(3)}a_1)(\varphi_2^{(3)}x - \varphi_2^{(3)}a_2)(\varphi_3^{(3)}x - \varphi_3^{(3)}a_3) \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ = {} & A_0 . \psi^{(0)}x + A_1 . \psi^{(1)}x + A_2 . \psi^{(2)}x + \ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Die Gleichungen zur zurücklaufenden Bestimmung der Vorzahlen sind

737) $$\begin{aligned} F(a_1+h) &= A_0 . f^{(0)}a_1 \\ F(a_2+h) &= A_0 . f^{(0)}a_2 + A_1 . f^{(1)}a_2 . (\varphi_1^{(1)}a_2 - \varphi_1^{(1)}a_1) \\ F(a_3+h) &= \\ = A_0 . f^{(0)}a_3 + A_1 . f^{(1)}a_3 . (\varphi_1^{(1)}a_3 - \varphi_1^{(1)}a_1) &+ A_2 . f^{(2)}a_3 . (\varphi_1^{(2)}a_3 - \varphi_1^{(2)}a_1)(\varphi_2^{(2)}a_3 - \varphi_2^{(2)}a_2) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

und die Vorzahlen A_0, A_1, A_2, ... entstehen, wenn für ψ und B in 733, 734, 735 die ihnen entsprechenden Producte gesetzt werden.

§. 200.

Diese allgemeine Reihe 736 begreift drei Fälle unter sich, und zwar zuerst

738) $$\begin{aligned} F(x+h) = {} & A_0 . f^{(0)}x \\ & + A_1 . f^{(1)}x . (\varphi^{(1}x - \varphi^{(1)}a_1) \\ & + A_2 . f^{(2)}x . (\varphi^{(2)}x - \varphi^{(2)}a_1)(\varphi^{(2)}x - \varphi^{(2)}a_2) \\ & + A_3 . f^{(3)}x . (\varphi^{(3)}x - \varphi^{(3)}a_1)(\varphi^{(3)}x - \varphi^{(3)}a_2)(\varphi^{(3)}x - \varphi^{(3)}a_3) \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

wo die Functionen φ, welche die Glieder der Reihe durch Einführung der Werthe von x verschwinden machen, in jedem Gliede der Reihe gleich aber in verschiedenen Gliedern verschieden sind.

Diese Eigenschaft begründet keine neue Behandlungsweise, und es ist, wie in 733, 734, 735 zu verfahren.

§. 201.

Der zweite Fall, welcher in der allgemeinen Reihe 736 begriffen ist, ist

$$
\begin{aligned}
739)\qquad F(x+h) = \; & A_0 . f^{(0)}x \\
& + A_1 . f^{(1)}x . (\varphi^{(1)}x - \varphi^{(1)}a_1) \\
& + A_2 . f^{(2)}x . (\varphi^{(1)}x - \varphi^{(1)}a_1)(\varphi^{(2)}x - \varphi^{(2)}a_2) \\
& + A_3 . f^{(3)}x . (\varphi^{(1)}x - \varphi^{(1)}a_1)(\varphi^{(2)}x - \varphi^{(2)}a_2)(\varphi^{(3)}x - \varphi^{(3)}a_3) \\
& + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}
$$

wo die Functionen, welche die Glieder verschwinden machen, in einem und demselben Gliede verschieden, aber in verschiedenen Gliedern gleich sind.

Auch hier gelten die Bildungsweisen in 733, 734, 735, welche für den allgemeinen Fall gefunden sind, und es ist diesem noch das Eigenthümliche dieser Reihe 739 hinzuzusetzen, dass sie durch folgende Gleichungen erzeugt wird:

$$
\begin{aligned}
740)\qquad F(x+h) &= A_0 . f^{(0)}x + (\varphi^{(1)}x - \varphi^{(1)}a_1) . F_1(x+h) \\
F_1(x+h) &= A_1 . f^{(1)}x + (\varphi^{(2)}x - \varphi^{(2)}a_2) . F_2(x+h) \\
F_2(x+h) &= A_2 . f^{(2)}x + (\varphi^{(3)}x - \varphi^{(3)}a_3) . F_3(x+h) \\
F_3(x+h) &= A_3 . f^{(3)}x + (\varphi^{(4)}x - \varphi^{(4)}a_4) . F_4(x+h) \\
& \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}
$$

die zu folgender Bildungsweise veranlassen:

741) $$A_0 = \frac{F(a_1 + h)}{f^{(0)}a_1} \quad \text{und} \quad F_1(x + h) = \frac{F(x + h) - A_0 \,.\, f^{(0)}x}{\varphi^{(1)}x - \varphi^{(1)}a_1}$$

$$A_1 = \frac{F_1(a_2 + h)}{f^{(1)}a_2} \qquad F_2(x + h) = \frac{F_1(x + h) - A_1 \,.\, f^{(1)}x}{\varphi^{(2)}x - \varphi^{(2)}a_2}$$

$$A_2 = \frac{F_2(a_3 + h)}{f^{(2)}a_3} \qquad F_3(x + h) = \frac{F_2(x + h) - A_2 \,.\, f^{(2)}x}{\varphi^{(3)}x - \varphi^{(3)}a_3}$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$A_n = \frac{F_n(a_{n+1} + h)}{f^{(n)}a_{n+1}} \qquad F_{n+1}(x + h) = \frac{F_n(x + h) - A_n \,.\, f^{(n)}x}{\varphi^{(n+1)}x - \varphi^{(n+1)}a_{n+1}}$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

Eine unmittelbare Folge dieser Bildungsweise ist dann auch, dass die Function, von welcher alle Glieder, welche nach dem *n* ten Gliede folgen, die Entwickelung sind, vollständig angegeben werden kann, welches durch folgende Zeichen angezeigt werden mag:

742) $$\begin{aligned} F(x + h) = \; & A_0 \,.\, f^{(0)}x \\ & + A_1 \,.\, f^{(1)}x \,.\, (\varphi^{(1)}x - \varphi^{(1)}a_1) \\ & + A_2 \,.\, f^{(2)}x \,.\, (\varphi^{(1)}x - \varphi^{(1)}a_1)(\varphi^{(2)}x - \varphi^{(2)}a_2) \\ & + \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \\ & + A_n \,.\, f^{(n)}x \,.\, (\varphi^{(1)}x - \varphi^{(1)}a_1)(\varphi^{(2)}x - \varphi^{(2)}a_2) \ldots (\varphi^{(n)}x - \varphi^{(n)}a_n) \\ & + (\varphi^{(1)}x - \varphi^{(1)}a_1)(\varphi^{(2)}x - \varphi^{(2)}a_2) \ldots\ldots\ldots (\varphi^{(n+1)}x - \varphi^{(n+1)}a_{n+1}) \,.\, F_{n+1}(x + h) \end{aligned}$$

§. 202.

Der dritte Fall, welcher in der allgemeinen Reihe 736 begriffen ist, ist

743) $$\begin{aligned} F(x + h) = \; & A_0 \,.\, f^{(0)}x \\ & + A_1 \,.\, f^{(1)}x \,.\, (\varphi x - \varphi a_1) \\ & + A_2 \,.\, f^{(2)}x \,.\, (\varphi x - \varphi a_1)(\varphi x - \varphi a_2) \\ & + A_3 \,.\, f^{(3)}x \,.\, (\varphi x - \varphi a_1)(\varphi x - \varphi a_2)(\varphi x - \varphi a_3) \\ & + \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \end{aligned}$$

wo die Functionen φ, welche die Glieder verschwinden machen, sämmtlich gleich sind.

Bei dieser Reihe finden alle früher gefundenen Bildungsweisen der Vorzahlen A_0, A_1, A_2, ... statt, sowohl die allgemeinen 733, 734, 735 als die besonderen 740, 741, und es gilt von ihr auch die Wahrheit, welche die Gleichung 742 angibt.

§. 203.

Diese allgemeinen Reihen sind vielen Abänderungen unterworfen, und zwar durch Eigenschaften

a) der begleitenden Function $f^{n)}$

b) der Elemente a_1, a_2, a_3, ...

c) der Hauptfunction φ und

d) der Haupt-, der begleitenden Functionen und der Elemente zugleich.

B. Wenn die begleitenden Functionen bestimmte Eigenschaften haben.

§. 204.

Wird die begleitende Function

$$f^{(0)}x = f^{(1)}x = f^{(2)}x = \ldots\ldots = 1$$

angenommen, so hat diese Annahme in der Reihe 736, 738 und 739 bei der Bildung der Vorzahlen keinen, aber grossen Einfluss in der Reihe 743, deren Vorzahlen dadurch sehr vereinfacht werden; es ist

$$744)\quad \begin{aligned} F(x+h) = {} & A_0 \\ & + A_1.(\varphi x - \varphi a_1) \\ & + A_2.(\varphi x - \varphi a_1)(\varphi x - \varphi a_2) \\ & + A_3.(\varphi x - \varphi a_1)(\varphi x - \varphi a_2)(\varphi x - \varphi a_3) \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Die Gleichungen zur Bildung der Vorzahlen sind erstens nach 732 oder 737

$$745)\quad \begin{aligned} & F(a_1+h) = A_0 \\ & F(a_2+h) = A_0 + A_1.(\varphi a_2 - \varphi a_1) \\ & F(a_3+h) = A_0 + A_1.(\varphi a_3 - \varphi a_1) + A_2.(\varphi a_3 - \varphi a_1)(\varphi a_3 - \varphi a_2) \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

und dann nach 740 und 741

746)
$$\begin{aligned}
F(x+h) &= A_0 + (\varphi x - \varphi a_1) . F_1(x+h) \\
F_1(x+h) &= A_1 + (\varphi x - \varphi a_2) . F_2(x+h) \\
F_2(x+h) &= A_2 + (\varphi x - \varphi a_3) . F_3(x+h) \\
& \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot
\end{aligned}$$

und

747)
$$\begin{aligned}
A_0 &= F(a_1+h) \quad \text{und} & F_1(x+h) &= \frac{F(x+h) - A_0}{\varphi x - \varphi a_1} \\
A_1 &= F_1(a_2+h) & F_2(x+h) &= \frac{F_1(x+h) - A_1}{\varphi x - \varphi a_2} \\
A_2 &= F_2(a_3+h) & F_3(x+h) &= \frac{F_2(x+h) - A_2}{\varphi x - \varphi a_3} \\
& \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \\
A_n &= F_n(a_{n+1}+h) & F_{n+1}(x+h) &= \frac{F_n(x+h) - A_n}{\varphi x - \varphi a_{n+1}}
\end{aligned}$$

Aus diesen Gleichungen ergiebt sich folgende einfache unabhängige Bildungsweise:

748)
$$\begin{aligned}
A_0 &= F(a_1+h) \\
F_1(x+h) &= \frac{F(x+h)}{\varphi x - \varphi a_1} + \frac{F(a_1+h)}{\varphi a_1 - \varphi x} \\
A_1 &= \frac{F(a_2+h)}{\varphi a_2 - \varphi a_1} + \frac{F(a_1+h)}{\varphi a_1 - \varphi a_2} \\
F_2(x+h) &= \frac{F(x+h)}{(\varphi x - \varphi a_1)(\varphi x - \varphi a_2)} + \frac{F(a_2+h)}{(\varphi a_2 - \varphi a_1)(\varphi a_2 - \varphi x)} + \frac{F(a_1+h)}{(\varphi a_1 - \varphi a_2)(\varphi a_1 - \varphi x)} \\
A_2 &= \frac{F(a_3+h)}{(\varphi a_3 - \varphi a_1)(\varphi a_3 - \varphi a_2)} + \frac{F(a_2+h)}{(\varphi a_2 - \varphi a_1)(\varphi a_2 - \varphi a_3)} + \frac{F(a_1+h)}{(\varphi a_1 - \varphi a_2)(\varphi a_1 - \varphi a_3)}
\end{aligned}$$

u. s. w.

Hier entstehen die Producte mit wiederkehrenden Elementen, welche wir in der 7ten Abhandlung unserer Analysis untersucht haben; und es ist durch Hülfe der am angeführten Orte entwickelten Wahrheiten leicht zu beweisen, dass allgemein

$$
\begin{aligned}
749)\qquad F_{n-1}(x+h) = {} & \frac{F(x+h)}{(\varphi x-\varphi a_1)(\varphi x-\varphi a_2)\,.\,.\,.\,.\,.\,(\varphi x-\varphi a_{n-1})} \\
& + \frac{F(a_{n-1}+h)}{(\varphi a_{n-1}-\varphi a_1)(\varphi a_{n-1}-\varphi a_2)\,.\,.\,.\,.\,(\varphi a_{n-1}-\varphi x)} \\
& + \frac{F(a_{n-2}+h)}{(\varphi a_{n-2}-\varphi a_1)(\varphi a_{n-2}-\varphi a_2)\,.\,.\,.\,.\,(\varphi a_{n-2}-\varphi a_{n-1})(\varphi a_{n-2}-\varphi x)} \\
& + \,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,. \\
& + \frac{F(a_1+h)}{(\varphi a_1-\varphi a_2)(\varphi a_1-\varphi a_3)\,.\,.\,.\,.\,(\varphi a_1-\varphi a_{n-1})(\varphi a_1-\varphi x)}
\end{aligned}
$$

und

$$
\begin{aligned}
750)\qquad A_{n-1} = {} & \frac{F(a_n+h)}{(\varphi a_n-\varphi a_1)(\varphi a_n-\varphi a_2)\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,(\varphi a_n-\varphi a_{n-1})} \\
& + \frac{F(a_{n-1}+h)}{(\varphi a_{n-1}-\varphi a_1)(\varphi a_{n-1}-\varphi a_2)\,.\,.\,.\,.\,(\varphi a_{n-1}-\varphi a_{n-2})(\varphi a_{n-1}-\varphi a_n)} \\
& + \,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,. \\
& + \frac{F(a_1+h)}{(\varphi a_1-\varphi a_2)(\varphi a_1-\varphi a_3)\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,(\varphi a_1-\varphi a_n)}
\end{aligned}
$$

Soll die Entwickelung bei dem *n* ten Gliede stehen bleiben, so ist

$$
\begin{aligned}
751)\qquad F(x+h) = {} & A_0 + A_1.(\varphi x-\varphi a_1) \\
& + A_2.(\varphi x-\varphi a_2)(\varphi x-\varphi a_2) \\
& + \,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,. \\
& + A_n.(\varphi x-\varphi a_1)(\varphi x-\varphi a_2)\,.\,.\,.\,(\varphi x-\varphi a_n) \\
& + (\varphi x-\varphi a_1)(\varphi x-\varphi a_2)\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,(\varphi x-\varphi a_{n+1}).F_{n+1}(x+h)
\end{aligned}
$$

wonach bei praktischer Anwendung der Fehler bemessen werden kann, welcher durch Vernachlässigung späterer Glieder entsteht.

Die obige Reihe 744 kann auch als ein besonderer Fall von der Reihe 702 betrachtet werden; dadurch gewinnen wir für die Reihe 744 jene Bildungsweisen, welche dort die Gleichung 708 angibt, deren Glieder $L_1^{(n)}$, $L_2^{(n)}$, $L_3^{(n)}$, ... durch die Gleichungen 709 und 710 zwar hinreichend bestimmt werden, aber in gegenwärtigem Falle einer weitern Entwickelung fähig sind.

Es ist nämlich, wenn wir die geordneten Verbindungen aus n Elementen zu p Elementen

ohne Wiederholungen durch $(n)^{(p)}$

und mit Wiederholungen durch $[n]^{(p)}$ vorstellen,

nach der Gleichung 709

$$(n+m)^{(m)} + (n+m)^{(m-1)}.L_1^{(n)} + (n+m)^{(m-2)}.L_2^{(n)}. + \ldots\ldots + (n+m)^{(0)}.L_m^{(n)} = 0$$

und nach der Analysis Seite 256 N. 413

$$(n+m)^{(m)} - (n+m)^{(m-1)}.[n+1]^{(1)} + (n+m)^{(m-2)}.[n+1]^{(2)} - \ldots. + \\ \ldots.(-)^m\,(n+m)^{(0)}.[n+1]^{(m)} = 0$$

Werden diese beiden Gleichungen miteinander verbunden, und $m = 0, 1, 2, \ldots.$ gesetzt, so wird

752)
$$\begin{aligned} L_1^{(n)} &= -\,[n+1]^{(1)} \\ L_2^{(n)} &= +\,[n+1]^{(2)} \\ L_3^{(n)} &= -\,[n+1]^{(3)} \\ &\ldots\ldots\ldots \\ L_p^{(n)} &= (-)^p\,[n+1]^{(p)} \end{aligned}$$

und folglich nach der Gleichung 708

$$
\begin{aligned}
753)\quad A_n = {} & [\varphi a_1 - \varphi b, \varphi a_2 - \varphi b, \varphi a_3 - \varphi b, \ldots, \varphi a_{n+1} - \varphi b]^{(0)} \cdot \frac{1}{1^{n|1}} \cdot \left(\frac{d}{d\varphi b}\right)^n F(b+h) \\
& - [\varphi a_1 - \varphi b, \varphi a_2 - \varphi b, \varphi a_3 - \varphi b, \ldots, \varphi a_{n+1} - \varphi b]^{(1)} \cdot \frac{1}{1^{n+1|1}} \cdot \left(\frac{d}{d\varphi b}\right)^{n+1} F(b+h) \\
& + [\varphi a_1 - \varphi b, \varphi a_2 - \varphi b, \varphi a_3 - \varphi b, \ldots, \varphi a_{n+1} - \varphi b]^{(2)} \cdot \frac{1}{1^{n+2|1}} \cdot \left(\frac{d}{d\varphi b}\right)^{n+2} F(b+h) \\
& - \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \\
& (-)^p [\varphi a_1 - \varphi b, \varphi a_2 - \varphi b, \varphi a_3 - \varphi b, \ldots, \varphi a_{n+1} - \varphi b]^{(p)} \cdot \frac{1}{1^{n+p|1}} \cdot \left(\frac{d}{d\varphi b}\right)^{n+p} F(b+h) \\
& \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots
\end{aligned}
$$

wo b eine fremde willkührliche Grösse ist.

Diese Bildungsweise gehört nur einzig der Reihe 744 an, und keiner früheren Reihe.

C. Wenn die Elemente bestimmten Gesetzen unterworfen sind.

§. 205.

Wird die Willkühr der Elemente a_1, a_2, a_3, ... aufgehoben, und werden diese bestimmten Gesetzen unterworfen, so ist der Einfluss auf die Bildung der Vorzahlen gross. Dieses gilt wenigstens in dem Falle, wenn bei diesen Elementen ein gleicher Unterschied obwaltet, oder wenn

$$a_1 = a,\ a_2 = a + 1k,\ a_3 = a + 2k,\ a_4 = a + 3k, \ldots\ldots$$

und

$$\begin{aligned}
754)\quad F(x+h) = {} & A_0 . f^{(0)}x \\
& + A_1 . f^{(1)}x . (\varphi_1^{(1)}x - \varphi_1^{(1)}a) \\
& + A_2 . f^{(2)}x . (\varphi_1^{(2)}x - \varphi_1^{(2)}a)(\varphi_2^{(2)}x - \varphi_2^{(2)}(a+k)) \\
& + A_3 . f^{(3)}x . (\varphi_1^{(3)}x - \varphi_1^{(3)}a)(\varphi_3^{(3)}x - \varphi_2^{(3)}(a+k))(\varphi_3^{(3)}x - \varphi_3^{(3)}(a+2k)) \\
& + A_4 . f^{(4)}x . (\varphi_1^{(4)}x - \varphi_1^{(4)}a)(\varphi_2^{(4)}x - \varphi_2^{(4)}(a+k))(\varphi_3^{(4)}x - \varphi_3^{(4)}(a+2k))(\varphi_4^{(4)}x - \varphi_{41}^{(4)}(a+3k)) \\
& + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
= {} & A_0 . \psi^{(0)}x + A_1 . \psi^{(1)}x + A_2 . \psi^{(2)}x + \ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Die allgemeinen Bildungsweisen 732, 734, 735 gelten auch für diese Reihe. Wegen des gleichen Unterschiedes der Elemente lässt sich der Algorithmus der Unterschiede auf die Glieder der Reihe anwenden, und es entstehen dadurch zur Bildung der Vorzahlen Gleichungen, welche dieser Reihe 754 ganz allein angehören oder ihr eigenthümlich sind. Es ist, wenn das an Δ angehängte k bedeutet, dass x um k wächst,

$$\Delta_k^q \psi^{(n)} x = f^{(n)}(x+qk) \cdot \left(\varphi_1^{(n)}(x+qk) - \varphi_1^{(n)} a\right) \ldots \left(\varphi_n^{(n)}(x+qk) - \varphi_n^{(n)}(a+(n-1)k)\right)$$

$$- \frac{n^{1|-1}}{1^{1|1}} \cdot f^{(n)}\left(x+(q-1)k\right) \cdot \left(\varphi_1^{(n)}(x+(q-1)k) - \varphi_1^{(n)} a\right) \ldots \left(\varphi_n^{(n)}(x+(q-1)k) - \varphi_n^{(n)}(a+(n-1)k)\right)$$

$$+ \;.$$

$$(-)^p \frac{n^{p|-1}}{1^{p|1}} \cdot f^{(n)}\left(x+(q-p)k\right) \cdot \left(\varphi_1^{(n)}(x+(q-p)k) - \varphi_1^{(n)} a\right) \ldots \left(\varphi_n^{(n)}(x+(q-p)k) - \varphi_n^{(n)}(a+(n-1)k)\right)$$

$$.\;.$$

$$(-)^n \frac{n^{n|-1}}{1^{n|1}} \cdot f^{(n)} x \cdot \left(\varphi_1^{(n)} x - \varphi_1^{(n)} a\right) \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; \left(\varphi_n^{(n)} x - \varphi_n^{(n)}(a+(n-1)k)\right)$$

Ist nun $x = a$, so ist für $q < n$ oder für $q = n - s$

755) $$\left(\Delta_k^{n-s} \psi^{(n)} x\right) = 0$$

für $q = n$ ist aber

756) $$\left(\Delta_k^n \psi^{(n)} x\right)_{x=n} = f^{(n)}(a+nk) \cdot \left(\varphi_1^{(n)}(a+nk) - \varphi_1^{(n)} a\right) \ldots \left(\varphi_n^{(n)}(a+nk) - \varphi_n^{(n)}(a+(n-1)k)\right)$$

und für $q > n$ oder $q = n + s$ ist

757) $$\left(\Delta_k^{n+s} \psi^{(n)} x\right)_{x=a} =$$

$$= f^{(n)}(a+(n+s)k) \cdot \left(\varphi_1^{(n)}(a+(n+s)k) - \varphi_1^{(n)} a\right) \ldots \left(\varphi_n^{(n)}(a+(n+s)k) - \varphi_n^{(n)}(a+(n-1)k)\right)$$

$$- \frac{n^{1|-1}}{1^{1|1}} f^{(n)}\left(a+(n+s-1)k\right) \cdot \left(\varphi_1^{(n)}(a+(n+s-1)k) - \varphi_1^{(n)} a\right) .. \left(\varphi_n^{(n)}(a+(n+s-1)k) - \varphi_n^{(n)}(a+(n-1)k)\right)$$

$$+ \;.$$

$$(-)^s \frac{n^{s|-1}}{1^{s|1}} \cdot f^{(n)}(a+nk) \cdot \left(\varphi_1^{(n)}(a+nk) - \varphi_1^{(n)} a\right) \ldots\ldots\ldots \left(\varphi_n^{(n)}(a+nk) - \varphi_n^{(n)}(a+(n-1)k)\right)$$

Wird nun von der vorgegebenen Reihe 754 der 0, 1, 2, 3, ... te Unterschied genommen, und dann $x = a$ gesetzt, so entstehen zur Bildung der Vorzahlen folgende Gleichungen:

758) $(\Delta_k^0 F(x+h) = A_0 \,.\, \Delta_k^n \psi^{(0)} x)_{x=a}$

$(\Delta_k^1 F(x+h) = A_0 \,.\, \Delta_k^1 \psi^{(0)} x + A_1 \,.\, \Delta_k^1 \psi^{(1)} x)_{x=a}$

$(\Delta_k^2 F(x+h) = A_0 \,.\, \Delta_k^2 \psi^{(0)} x + A_1 \,.\, \Delta_k^2 \psi^{(1)} x + A_2 \,.\, \Delta_k^2 \psi^{(2)} x)_{x=a}$

$(\Delta_k^3 F(x+h) = A_0 \,.\, \Delta_k^3 \psi^{(0)} x + A_1 \,.\, \Delta_k^3 \psi^{(1)} x + A_2 \,.\, \Delta_k^3 \psi^{(2)} x + A_3 \,.\, \Delta_k^3 \psi^{(3)} x)_{x=a}$

. . . .

Diese zurücklaufende Bildungsweise ist der Reihe 754 eigenthümlich; auch **Bürmann** findet sie Seite 36 §. 7.

Die unabhängige Bildungsweise der Vorzahlen A_0, A_1, A_2, ... kann nach der Weise 735 dargestellt werden.

§. 206.

Diese besondere Bildungsweise gilt auch für die untergeordneten Reihen 738, 739, 743, wenn in ihnen die Elemente a_1, a_2, ... gleichen Unterschied beobachten. Für die Reihe

759) $$\begin{aligned} F(x+h) = {} & A_0 \,.\, f^{(0)} x \\ & + A_1 \,.\, f^{(1)} x \,.\, (\varphi^{(1)} x - \varphi^{(1)} a) \\ & + A_2 \,.\, f^{(2)} x \,.\, (\varphi^{(2)} x - \varphi^{(2)} a)\big(\varphi^{(2)} x - \varphi^{(2)}(a+k)\big) \\ & + A_3 \,.\, f^{(3)} x \,.\, (\varphi^{(3)} x - \varphi^{(3)} a)\big(\varphi^{(3)} x - \varphi^{(3)}(a+k)\big)\big(\varphi^{(3)} x - \varphi^{(3)}(a+2k)\big) \\ & + \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;. \end{aligned}$$

gelten daher die Bildungsweisen 732, 734, 735 und 758.

Für die Reihe

$$
\begin{aligned}
760)\quad F(x+h) = {} & A_0 . f^{(0)}x \\
& + A_1 . f^{(1)}x . (\varphi^{(1)}x - \varphi^{(1)}a) \\
& + A_2 . f^{(2)}x . (\varphi^{(1)}x - \varphi^{(1)}a)(\varphi^{(2)}x - \varphi^{(2)}(a+k)) \\
& + A_3 . f^{(3)}x . (\varphi^{(1)}x - \varphi^{(1)}a)(\varphi^{(2)}x - \varphi^{(2)}(a+k))(\varphi^{(3)}x - \varphi^{(3)}(a+2k)) \\
& + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}
$$

gelten die Bildungsweisen 732, 734, 735, und 740, 741, 742 und 758, und für die Reihe

$$
\begin{aligned}
761)\quad F(x+h) = {} & A_0 . f^{(0)}x \\
& + A_1 . f^{(1)}x . (\varphi x - \varphi a) \\
& + A_2 . f^{(2)}x . (\varphi x - \varphi a)(\varphi x - \varphi(a+k)) \\
& + A_3 . f^{(3)}x . (\varphi x - \varphi a)(\varphi x - \varphi(a+k))(\varphi x - \varphi(a+2k)) \\
& + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}
$$

gelten dieselben wie für 760.

D. Wenn die begleitenden Functionen und auch die Elemente bestimmten Gesetzen folgen.

§. 207.

Es sei

762)
$$\begin{aligned} F(x+h) = {} & A_0 \\ & + A_1 . (\varphi x - \varphi a) \\ & + A_2 . (\varphi x - \varphi a)(\varphi x - \varphi(a+b)) \\ & + A_3 . (\varphi x - \varphi a)(\varphi x - \varphi(a+b))(\varphi x - \varphi(a+2b)) \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

In dieser Reihe sind alle begleitenden Functionen $=1$ gesetzt, und die Elemente nehmen um gleichviel zu; es gelten also hier auch die Bildungsweisen 732, 734, 735 und 746, 747, 748, 749, 750 und 753 und 758 also überhaupt vier verschiedene Bildungsweisen. Auch kann hier nach 751 die Function angegeben werden, aus welcher alle folgenden Glieder der Reihe entspringen, nämlich

763)
$$\begin{aligned} F(x+h) = A_0 \quad & + A_1 . (\varphi x - \varphi a) \\ & + A_2 . (\varphi x - \varphi a)\ (\varphi x - \varphi(a+k)) \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + A_n\ (\varphi x - \varphi a)(\varphi x - \varphi(a+k)) \ldots\ldots (\varphi x - \varphi(a+(n-1)k)) \\ & + (\varphi x - \varphi a)(\varphi x - \varphi(a+k)) \ldots\ldots\ldots (\varphi x - \varphi(a+nk)) . F_{n+1}(x+h) \end{aligned}$$

wo $F_{n+1}(x+h)$ nach 749 gebildet werden muss.

E. Wenn die begleitenden und die Hauptfunctionen bestimmte Eigenschaften haben.

---

§. 208.

Es sei

$$
\begin{aligned}
764)\quad F(x+h) = & A_0 \\
& + A_1 . (x-a_1) \\
& + A_2 . (x-a_1)(x-a_2) \\
& + A_3 . (x-a_1)(x-a_2)(x-a_3) \\
& + \dots\dots\dots\dots
\end{aligned}
$$

wo die begleitenden Factoren $f = 1$ gesetzt und die Hauptfunction x selbst ist, hingegen die Elemente willkührlich sind.

Die erste Bildungsweise ist nach 732

$$
\begin{aligned}
765)\quad & F(a_1+h) = A_0 \\
& F(a_2+h) = A_0 + A_1 . (a_2-a_1) \\
& F(a_3+h) = A_0 + A_1 . (a_3-a_1) + A_2 . (a_3-a_1)(a_3-a_2) \\
& \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots
\end{aligned}
$$

Die zweite nach 747

$$766)\quad A_0 = F(a_1+h) \quad \text{und} \quad F_1(x+h) = \frac{F(x+h) - A_0}{x-a_1}$$

$$A_1 = F(a_2+h) \qquad F_2(x+h) = \frac{F_1(x+h) - A_1}{x-a_2}$$

$$A_2 = F(a_3+h) \qquad F_3(x+h) = \frac{F_2(x+h) - A_2}{x-a_3}\,.$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

und nach 749

$$767)\ F_{n-1}(x+h) = \frac{F(a_1+h)}{(a_1-a_2)(a_1-a_3)\ldots\ldots\ldots(a_1-a_{n-1})(a_1-x)}$$

$$+\frac{F(a_2+h)}{(a_2-a_1)(a_2-a_3)\ldots\ldots\ldots(a_2-a_{n-1})(a_2-x)}$$

$$+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$+\frac{F(a_{n-1}+h)}{(a_{n-1}-a_1)(a_{n-1}-a_2)\ldots\ldots(a_{n-1}-a_{n-2})(a_{n-1}-x)}$$

$$+\frac{F(x+h)}{(x-a_1)(x-a_2)\ldots\ldots\ldots\ldots(x-a_{n-1})}$$

und nach 750

$$768)\quad A_{n-1} = \frac{F(a_1+h)}{(a_1-a_2)(a_1-a_3)\ldots\ldots\ldots(a_1-a_n)}$$

$$+\frac{F(a_2+h)}{(a_2-a_1)(a_2-a_3)\ldots\ldots\ldots(a_2-a_n)}$$

$$+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$+\frac{F(a_n+h)}{(a_n-a_1)(a_n-a_2)\ldots\ldots\ldots(a_n-a_{n-1})}$$

und die dritte Bildungsweise ist nach 753

$$769)\qquad A_n = [a_1 - b\ ,\ a_2 - b,\ a_3 - b, \ldots, a_{n+1} - b]^{(0)} . \frac{d^n\ F(b+h)}{1^{n|1} . db^n}$$

$$- [a_1 - b\ ,\ a_2 - b, \ldots\ldots\ldots, a_{n+1} - b]^{(1)} . \frac{d^{n+1} F(b+h)}{1^{n+1|1} . db^{n+1}}$$

$$+ [a_1 - b\ ,\ a_2 - b, \ldots\ldots\ldots, a_{n+1} - b]^{(2)} . \frac{d^{n+2} F(b+h)}{1^{n+2|1} . db^{n+2}}$$

$$- \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

wo b eine fremde willkührliche Grösse ist.

F. Wenn die Elemente und die Hauptfunction bestimmten Gesetzen unterworfen sind.

§. 209.

Wenn den Hauptfunctionen, welche die Glieder der Reihe verschwinden machen, bestimmte Eigenschaften zugetheilt werden, so geben sie oft zu ganz eigenthümlichen Bildungsweisen der Vorzahlen Gelegenheit. Wir wollen dieses an einigen Functionsarten nachweisen. Wir nehmen an, dass

770)
$$\begin{aligned}F(x+h) = {} & A_0 . f^{(0)}x \\ & + A_1 . \frac{x-a}{1} . f^{(1)}x \\ & + A_2 . \frac{(x-a)(x-a-k)}{1 \;.\; 2} . f^{(2)}x \\ & + A_3 . \frac{(x-a)(x-a-k)(x-a-2k)}{1 \;.\; 2 \;.\; 3} . f^{(3)}x \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\end{aligned}$$

Die erste Bildungsweise ist nach 732

771)
$$F(a+h) = A_0 . f^{(0)}a$$

$$F(a+k+h) = A_0 . f^{(0)}(a+k) + A_1 . \frac{1}{1} . k^1 . f^{(1)}(a+k)$$

$$F(a+2k+h) = A_0 . f^{(0)}(a+2k) + A_1 . \frac{2}{1} . k^1 . f^{(1)}(a+2k) + A_2 . \frac{2.1}{1.2} . k^2 . f^{(2)}(a+2k)$$

$$F(a+3k+h) =$$

$$= A_0 f^{(0)}(a+3k) + A_1 . \frac{3}{1} . k^1 . f^{(1)}(a+3k) + A_2 . \frac{3.2}{1.2} . k^2 . f^{(2)}(a+3k) + A_3 . \frac{3.2.1}{1.2.3} . k^3 f^{(3)}(a+3k)$$

. . . .

aus welcher wie in 735 die unabhängige Bildungsweise hergeleitet werden kann. Diese Bildungsweise findet auch Bürmann Seite 38.

Die zweite ist nach 741

772) $$A_0 = \frac{F(a+h)}{f^{(0)}a} \quad \text{und} \quad F_1(x+h) = \frac{F(x+h) - A_0 . f^{(0)}x}{x-a}$$

$$A_1 = \frac{F_1(a+k+h)}{f^{(1)}(a+k)} \qquad F_2(x+h) = \frac{F_1(x+h) - A_1 . f^{(1)}x}{x-a-1k}$$

$$A_2 = \frac{F_2(a+2k+h)}{f^{(2)}(a+2k)} \qquad F_3(x+h) = \frac{F_2(x+h) - A_2 . f^{(2)}x}{x-a-2k}$$

. . . .

Die dritte entspringt aus 758, wenn nach 167

$$\Delta_k^{n+s}\left(\frac{(x-a)^{n|-k} f^{(n)}x}{1^{n|1}}\right)_{x=a} = \frac{(n+s)^{s|-1}}{1^{s|1}} . k^n . \Delta_k^s f^{(n)}(x+nk)_{x=a}$$

gesetzt wird; sie ist

773) $$\left(\Delta_k^0 F(x+h) = A_0 . \Delta_k^0 f^{(0)}x\right)_{x=a}$$

$$\left(\Delta_k^1 F(x+h) = A_0 . \Delta_k^1 f^{(0)}x + A_1 . \frac{1^{0|-1}}{1^{0|1}} . k^1 . \Delta_k^0 f^{(1)}(x+1k)\right)_{x=a}$$

$$\left(\Delta_k^2 F(x+h) = A_0 . \Delta_k^2 f^{(0)}x + A_1 . \frac{2^{1|-1}}{1^{1|1}} . k^1 . \Delta_k^1 f^{(1)}(x+1k) + A_2 . \frac{2^{0|-1}}{1^{0|1}} . k^2 . \Delta_k^0 f^{(2)}(x+2k)\right)_{x=a}$$

. . . .

und allgemein

$$774)\qquad \left(\Delta_k^n F(x+h) = A_0 \cdot \frac{n^{n|-1}}{1^{n|1}} \cdot k^0 \cdot \Delta_k^n f^{(0)}(x)\right.$$

$$+ A_1 \cdot \frac{n^{n-1|-1}}{1^{n-1|1}} \cdot k^1 \cdot \Delta_k^{n-1} f^{(1)}(x+1k)$$

$$+ A_2 \cdot \frac{n^{n-2|-1}}{1^{n-2|1}} \cdot k^2 \cdot \Delta_k^{n-2} f^{(2)}(x+2k)$$

$$+ A_3 \cdot \frac{n^{n-3|-1}}{1^{n-3|1}} \cdot k^3 \cdot \Delta_k^{n-3} f^{(3)}(x+3k)$$

$$+ \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot$$

$$\left. + A_n \cdot \frac{n^{0|-1}}{1^{0|1}} \cdot k^n . \Delta_k^0 f^{(n)}(x+nk)\right)_{x=a}$$

G. Wenn die begleitenden Functionen, die Elemente und die Hauptfunction bestimmten Gesetzen folgen.

§. 210.

Es sei

775) $$F(x+h) = A_0 + A_1.(x-a) + A_2.(x-a)(x-a-1k) + A_3.(x-a)(x-a-1k)(x-a-2k) + A_4.(x-a)(x-a-1k)(x-a-2k)(x-a-3k) + \ldots\ldots$$

Die Bildungsweise der Vorzahlen dieser Reihe können wir entweder aus §. 207 oder aus §. 208 herleiten; wir finden nach beiden, dass

776) $$A_n = \frac{\Delta_k^n F(a+h)}{1^{n|1}.k^n}$$

und dass also

777) $$F(x+h) = F(a+h) + \frac{(x-a)^{1|-k}}{1^{1|1}}.\frac{\Delta_k^1 F(a+h)}{k^1} + \frac{(x-a)^{2|-k}}{1^{2|1}}.\frac{\Delta_k^2 F(a+h)}{k^2} + \frac{(x-a)^{3|-k}}{1^{3|1}}.\frac{\Delta_k^3 F(a+h)}{k^3} + \ldots\ldots$$

ferner, wenn die Entwickelung nur bis zu einem bestimmten Gliede geführt werden soll, dass

778)
$$F(x+h) = F(a+h) + \frac{(x-a)^{1|-k}}{1^{1|1}} \cdot \frac{\Delta_k^1 F(a+h)}{k^1}$$
$$+ \frac{(x-a)^{2|-k}}{1^{2|1}} \cdot \frac{\Delta_k^2 F(a+h)}{k^2}$$
$$+ \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot$$
$$+ \frac{(x-a)^{n|-k}}{1^{n|1}} \cdot \frac{\Delta_k^n F(a+h)}{k^n}$$
$$+ (x-a)^{n+1|-k} . F_{n+1}(x+h)$$

wo

779)
$$F_{n+1}(x+h) = (-)^{n-1} \frac{F(a+h)}{1^{0|1} . 1^{n-1|1} . (a-x) . k^{n-1}}$$
$$(-)^{n-2} \frac{F(a+h+1k)}{1^{1|1} . 1^{n-2|1} . (a+1.k-x) . k^{n-1}}$$
$$(-)^{n-3} \frac{F(a+h+2.k)}{1^{2|1} . 1^{n-3|1} . (a+2.k-x) . k^{n-1}}$$
$$\cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot$$
$$(-)^0 \frac{F(a+h+(n-1)k)}{1^{n-1|1} . 1^{0|1} . (a+(n-1)k-x) . k^{n-1}}$$
$$+ \frac{F(a+nk-x)}{(x-a)^{n|-k}}$$

IV. Reihen, in welchen das Einführen eines bestimmten Werthes von $x = a_n$ alle früheren und alle späteren Glieder nur nicht das *n*te Glied zernichtet.

§. 211.

Es sei

$$780)\quad F(x+h) = \begin{aligned}[t] & A_1 . (\varphi x - \varphi a_2)(\varphi x - \varphi a_3) \ldots\ldots\ldots\ldots (\varphi x - \varphi a_n) \\ + & A_2 . (\varphi x - \varphi a_1)(\varphi x - \varphi a_3) \ldots\ldots\ldots\ldots (\varphi x - \varphi a_n) \\ + & A_3 . (\varphi x - \varphi a_1)(\varphi x - \varphi a_2)(\varphi x - \varphi a_4) \ldots\ldots (\varphi x - \varphi a_n) \\ + & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ + & A_n . (\varphi x - \varphi a_1)(\varphi x - \varphi a_2)(\varphi x - \varphi a_3) \ldots\ldots (\varphi x - \varphi a_{n-1}) \end{aligned}$$

Wird $x = a_1, a_2, \ldots\ldots, a_n$ gesetzt, so entstehen die Gleichungen

$$781)\quad \begin{aligned} F(a_1+h) &= A_1 . (\varphi a_1 - \varphi a_2)(\varphi a_1 - \varphi a_3) \ldots\ldots (\varphi a_1 - \varphi a_n) \\ F(a_2+h) &= A_2 . (\varphi a_2 - \varphi a_1)(\varphi a_2 - \varphi a_3) \ldots\ldots (\varphi a_2 - \varphi a_n) \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ F(a_n+h) &= A_n . (\varphi a_n - \varphi a_1)(\varphi a_n - \varphi a_2) \ldots\ldots (\varphi a_n - \varphi a_{n-1}) \end{aligned}$$

durch welche die Vorzahlen $A_1, A_2, \ldots\ldots$ bestimmt werden. Die Reihe selbst ist

$$782)\quad F(x+h)=\frac{(\varphi x-\varphi a_2)(\varphi x-\varphi a_3)\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,(\varphi x-\varphi a_n)}{(\varphi a_1-\varphi a_2)(\varphi a_1-\varphi a_3)\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,(\varphi a_1-\varphi a_n)}\,.\,F(a_1+h)$$

$$+\frac{(\varphi x-\varphi a_1)(\varphi x-\varphi a_3)\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,(\varphi x-\varphi a_n)}{(\varphi a_2-\varphi a_1)(\varphi a_2-\varphi a_3)\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,(\varphi a_2-\varphi a_n)}\,.\,F(a_2+h)$$

$$+\frac{(\varphi x-\varphi a_1)(\varphi x-\varphi a_2)(\varphi x-\varphi a_4)\,.\,.\,.\,(\varphi x-\varphi a_n)}{(\varphi a_3-\varphi a_1)(\varphi a_3-\varphi a_2)(\varphi a_3-\varphi a_4)\,.\,.\,.\,(\varphi a_3-\varphi a_n)}\,.\,F(a_3+h)$$

$$+\;.$$

$$+\frac{(\varphi x-\varphi a_1)(\varphi x-\varphi a_2)(\varphi x-\varphi a_3)\,.\,.\,.\,.\,(\varphi x-\varphi a_{n-1})}{(\varphi a_n-\varphi a_1)(\varphi a_n-\varphi a_2)(\varphi a_n-\varphi a_3)\,.\,.\,.\,.\,(\varphi a_n-\varphi a_{n-1})}\,.\,F(a_n+h)$$

§. 212.

Hieher gehört auch folgende Reihe:

$$783)\quad F(x+h)=A_0\,.\,\frac{\sin\;x\;\pi}{\sin b_0\,x\,\pi}+A_1\,.\,\frac{\sin(x-1)\pi}{\sin b_1(x-1)\pi}+A_2\,.\,\frac{\sin(x-2)\pi}{\sin b_2(x-2)\pi}+\,.\,.\,.\,.$$

wo b_0, b_1, b_2, ... keine ganze Zahlen sind.

Wird $x = n$ gesetzt, so verschwinden alle Glieder ausser jenem, worin $x-n$ vorkommt; werden deshalb statt dieser Functionen die Reihen, welche sie vertreten, gesetzt, so wird

$$\frac{\sin(x-n)\pi}{\sin b_n(x-n)\pi}=\frac{\dfrac{(x-n)\pi}{1}-\dfrac{(x-n)^3\pi^3}{1\,.\,2\,.\,3}+\ldots-\ldots.}{\dfrac{b_n(x-n)\pi}{1}-\dfrac{b_n^3(x-n)^3\pi^3}{1\,.\,2\,.\,3}+\ldots-\ldots.}$$

$$=\frac{1-\dfrac{(x-n)^2\pi^2}{1\,.\,2\,.\,3}+\,.\,.\,-\,.\,.\,.\,.}{b_n-\dfrac{b_n^2(x-n)^2\pi^2}{1\,.\,2\,.\,3}+\,.\,.\,-\,.\,.\,.\,.}$$

folglich für $x = n$ ist $F(n+h) = A_n\,.\,\frac{1}{b_n}$

also $A_n = b_n\,.\,F(n+h)$ und

$$784)\qquad F(x+h) = b_0 \cdot \frac{\sin x\pi}{\sin b_0 x\pi} \cdot F(h) + b_1 \cdot \frac{\sin(x-1)\pi}{\sin b_1 (x-1)\pi} \cdot F(1+h) + \ldots.$$

§. 213.

Eben so findet man die Vorzahlen der Reihen

$$785)\qquad F(x+h) = A_0 \cdot \frac{\sin x\pi}{e^{xb_0} - 1} + A_1 \cdot \frac{\sin(x-1)\pi}{e^{(x-1)b_1} - 1} + A_2 \cdot \frac{\sin(x-2)\pi}{e^{(x-2)b_2} - 1} + \ldots\ldots$$

und

$$786)\qquad F(x+h) = A_0 \cdot \left(\frac{\sin x\pi}{x}\right)^2 + A_1 \cdot \left(\frac{\sin(x-1)\pi}{x-1}\right)^2 + A_2 \cdot \left(\frac{\sin(x-2)\pi}{x-2}\right)^2 + \ldots.$$

§. 214.

Hieher gehören auch folgende Reihen:

$$\begin{aligned} 787)\qquad F(x+h) = {} & A_1 \cdot (\sin x - \sin a_2)(\sin x - \sin a_3) \ldots\ldots (\sin x - \sin a_n) \\ & + A_2 \cdot (\sin x - \sin a_1)(\sin x - \sin a_3) \ldots\ldots (\sin x - \sin a_n) \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + A_n \cdot (\sin x - \sin a_1)(\sin x - \sin a_2) \ldots\ldots (\sin x - \sin a_{n-1}) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} 788)\qquad F(x+h) = {} & A_1 \cdot \sin(x-a_2)\pi \cdot \sin(x-a_3)\pi \ldots\ldots\ldots \sin(x-a_n)\pi \\ & + A_2 \cdot \sin(x-a_1)\pi \cdot \sin(x-a_3)\pi \ldots\ldots\ldots \sin(x-a_n)\pi \\ & + A_3 \cdot \sin(x-a_1)\pi \cdot \sin(x-a_2)\pi \cdot \sin(x-a_4)\pi \ldots \sin(x-a_n)\pi \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + A_n \cdot \sin(x-a_1)\pi \cdot \sin(x-a_2)\pi \cdot \sin(x-a_3)\pi \ldots \sin(x-a_{n-1})\pi \end{aligned}$$

V. Reihen, in welchen das Einführen eines bestimmten Werthes von x alle Glieder zernichtet
oder
Entwickelung einer Function in eine Reihe nach den Potenzen einer andern Function.

A. Allgemeinste Entwickelung.

§. 215.

Es sei F(x + h) nach den Potenzen der Function φx zu entwickeln, oder es sei

789) $$F(x+h) = A_0.(\varphi x)^{a0} + A_1.(\varphi x)^{a1} + A_2.(\varphi x)^{a2} + \ldots\ldots\ldots$$

man sucht das Gesetz der Vorzahlen A_0, A_1, A_2, ...

Es ist nach der früheren Untersuchung §. 190

790) $$A_n = \Sigma(-)^m \frac{\Big\| d^0\varphi x^{a0}.d^1\varphi x^{a1}\ldots d^{n-1}\varphi x^{a(n-1)}.d^n\varphi x^{a(n+1)}\ldots d^{n+m-1}\varphi x^{a(n+m)}\Big)}{\Big\| d^0\varphi x^{a0}.d^1\varphi x^{a1}\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; d^{n+m-1}\varphi x^{a(n+m-1)}\Big)} .$$
$$. \frac{\Big\| d^0\varphi x^{a0}.d^1\varphi x^{a1}\ldots. d^{n+m-1}\varphi x^{a)n+m-1)}.d^{n+m}F(x+h)\Big)}{\Big\| d^0\varphi x^{a0}.d^1\varphi x^{a1}\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; d^{n+m}\varphi x^{a(n+m)}\Big)}$$

wo

$$m = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4, \ldots\ldots\ldots$$

Die Producte aus den Differentialen der verschiedenen Potenzen von φx können wir durch Hülfe der früher gefundenen Wahrheiten auf einfachere Geschäfte zurückführen; setzen wir zu diesem Zwecke

$$(an - a0)(an - a1)(an - a2)\ldots\ldots(an - a(n-1)) = P_n$$

so ist nach 637

$$\left\|d^0\varphi x^{a0} . d^1\varphi x^{a1} \ldots . d^{n-1}\varphi x^{a(n-1)} . d^n\varphi x^{a(n+1)} \ldots\ldots d^{n+m-1}\varphi x^{a(n+m)}\right)$$

$$= \frac{P_1 . P_2 \ldots . P_{n+m} . \varphi x^{a0 + a1 + \ldots . + a(n+m) - an - (1+2+\ldots . + n + m - 1)} . (d\varphi x)^{1+2+\ldots . + n+m-1}}{P_n \times (a(n+1) - an)(a(n+2) - an)\ldots\ldots(a(n+m) - an)}$$

und

$$\left\|d^0\varphi x^{a0} . d^1\varphi x^{a1} \ldots\ldots d^{n+m-1}\varphi x^{a(n+m-1)}\right)$$

$$= P_1 . P_2 \ldots . P_{n+m-1} . (\varphi x)^{a0 + a1 + \ldots + a(n+m-1) - (1+2+\ldots + n+m-1)} . (d\varphi x)^{1+2+\ldots+n+m-1}$$

Ferner ist nach 625

$$\frac{\left\|d^0\varphi x^{a0} . d^1\varphi x^{a1} \ldots\ldots d^{n+m-1}\varphi x^{a(n+m-1)} . d^{n+m}F(x+h)\right)}{\left\|d^0\varphi x^{a0} . d^1\varphi x^{a1} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots d^{n+m}\varphi x^{a(n+m)}\right)} =$$

$$= \frac{1}{P_{n+m}} \times \left(\mathfrak{B}_0^{(n+m)} . B_0 . \varphi x^{0-a(n+m)} + \mathfrak{B}_1^{(n+m)} . B_1 . \varphi x^{1-a(n+m)} + \ldots + \mathfrak{B}_{n+m}^{(n+m)} . B_{n+m} . \varphi x^{n+m-a(n+m)}\right)$$

Es ist folglich die Bildungsweise der Vorzahl A_n

791) $$A_n = \Sigma(-)^{n+m} \frac{\mathfrak{B}_0^{(n+m)} . B_0 . \varphi x^{0-an} + \mathfrak{B}_1^{(n+m)} . B_1 . \varphi x^{1-an} + \ldots + \mathfrak{B}_{n+m}^{(n+m)} B_{n+m} . \varphi x^{n+m-an}}{(a0-an)(a1-an)\ldots(a(n-1)-an)(a(n+1)-an)\ldots(a(n+m)-an)}$$

oder wenn m = 0, 1, 2, 3, ... gesetzt wird

792) $$A_n = (-)^n \frac{\mathfrak{B}_0^{(n)} . B_0 . \varphi x^{0-an} + \mathfrak{B}_1^{(n)} . B_1 . \varphi x^{1-an} + \ldots + \mathfrak{B}_n^{(n)} . B_n . \varphi x^{n-an}}{(a0-an)(a1-an)\ldots\ldots(a(n-1)-an)}$$

$$+ (-)^{n+1} \frac{\mathfrak{B}_0^{(n+1)} . B_0 . \varphi x^{0-an} + \mathfrak{B}_1^{(n+1)} . B_1 . \varphi x^{1-an} + \ldots + \mathfrak{B}_{n+1}^{(n+1)} . B_{n+1} . \varphi x^{n+1-an}}{(a0-an)(a1-an)\ldots . (a(n-1)-an) \times (a(n+1)-an)}$$

$$+ (-)^{n+2} \frac{\mathfrak{B}_0^{(n+2)} . B_0 . \varphi x^{0-an} + \mathfrak{B}_1^{(n+2)} . B_1 \varphi x^{1-an} + \ldots + \mathfrak{B}_{n+2}^{(n+2)} . B_{n+2} . \varphi x^{n+2-an}}{(a0-an)(a1-an)\ldots . (a(n-1)-an) \times (a(n+1)-an)(a(n+2)-an)}$$

$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

wo

$$793)\quad B_q = \frac{d}{d\varphi x}\Big(_{q}\frac{d}{d\varphi x}\Big(_{q-1}\frac{d}{d\varphi x}\Big(_{q-2}\ldots\ldots\ldots\frac{d}{d\varphi x}\Big(_{1} F(x+h)\Big)_{1}\ldots\ldots\Big)_{q} = \Big(\frac{d}{d\varphi x}\Big)^{q} F(x+h)$$

ist, und $\mathfrak{B}_0^{(n+m)}$, $\mathfrak{B}_1^{(n+m)}$, ... folgende Gesetze befolgen:

$$794)\quad \mathfrak{B}_0^{(n+m)} = (0 - a(n+m-1)).\mathfrak{B}_0^{(n+m-1)}$$

$$\mathfrak{B}_1^{(n+m)} = (1 - a(n+m-1)).\mathfrak{B}_1^{(n+m-1)} + \mathfrak{B}_0^{(n+m-1)}$$

$$\mathfrak{B}_2^{(n+m)} = (2 - a(n+m-1)).\mathfrak{B}_2^{(n+m-1)} + \mathfrak{B}_1^{(n+m-1)}$$

$$\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot$$

$$\mathfrak{B}_{n+m}^{(n+m)} = \qquad 0 \qquad + \mathfrak{B}_{n+m-1}^{(n+m-1)}$$

und

$$795)\quad \mathfrak{B}_q^{(n+m)} = (q - a(n+m-1)).\mathfrak{B}_q^{(n+m-1)}$$

$$+ (q-1-a(n+m-2)).\mathfrak{B}_{q-1}^{(n+m-2)}$$

$$+ (q-2-a(n+m-3)).\mathfrak{B}_{q-2}^{(n+m-3)}$$

$$+ \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot$$

$$+ (q-q-a(n+m-q-1)).\mathfrak{B}_0^{(n+m-q-1)}$$

Da nun

$$796)\quad \mathfrak{B}_0^{(0)} = \mathfrak{B}_1^{(1)} = \ldots\ldots = \mathfrak{B}_n^{(n)} = 1 \quad \text{und} \quad \mathfrak{B}_0^{(1)} = -a0$$

so können nach den vorstehenden Gleichungen die übrigen Vorzahlen gefunden werden. Die unabhängige Bildungsweise dieser Vorzahlen ist aber nach 628 und 629

$$797)\quad \mathfrak{B}_q^{(n+m)} = (0-a0,\ 1-a1,\ 2-a2, \ldots\ldots, n+m-1-a(n+m-1))^{(n+m-q)}$$

und

$$798)\quad \mathfrak{B}_q^{(n+m)} = \frac{1}{1^{q|1}}\left(\frac{q^{0|-1}}{1^{0|1}} \cdot (q-0-a0)(q-0-a1) \ldots\ldots\ldots (q-0-a(n+m-1)) \right.$$

$$- \frac{q^{1|-1}}{1^{1|1}} \cdot (q-1-a0)(q-1-a1) \ldots\ldots\ldots (q-1-a(n+m-1))$$

$$+ \frac{q^{2|-1}}{1^{2|1}} \cdot (q-2-a0)(q-2-a1) \ldots\ldots\ldots (q-2-a(n+m-1))$$

$$- \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; + \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.$$

$$(-)^s \frac{q^{s|-1}}{1^{s|1}} \cdot (q-s-a0)(q-s-a1) \ldots\ldots\ldots (q-s-a(n+m-1))$$

$$.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.$$

$$\left. (-)^q \frac{q^{q|-1}}{1^{q|1}} \cdot (0-a0)(0-a1) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (0-a(n+m-1)) \right)$$

Nach Vollendung dieser Geschäfte, welche in 792 angegeben sind, muss für x irgend eine beständige Grösse a gesetzt werden, die nach Willkühr angenommen werden kann.

Dieses ist die allgemeinste Entwickelung einer Function in eine Reihe nach den Potenzen einer anderen Function; sie ist neu, und umfasst alles, was bisher über diesen Gegenstand bekannt ist.

B. Entwickelung von F(x + h) *nach den ganzen Potenzen von* φx

---

§. 216.

Es sei

799) $F(x+h) = A_0 + A_1 . (\varphi x)^1 + A_2 . (\varphi x)^2 + A_3 . (\varphi x)^3 + \ldots\ldots$

Man sucht die Vorzahlen $A_0, A_1, A_2, \ldots\ldots$

Bei dieser Reihe ist $a_0 = 0$, $a_1 = 1$, $a_2 = 2, \ldots, a_n = n$ also auch nach 794 und 795

$$\mathfrak{B}_0^{(0)} = \mathfrak{B}_1^{(1)} = \mathfrak{B}_2^{(2)} = \ldots = \mathfrak{B}_n^{(n)} = 1$$

und für jeden andern Werth von q, ausser für $q = n$, ist

$$\mathfrak{B}_q^{(n)} = 0$$

Es ist daher

800) $$A_n = \frac{\varphi a^0 . B_n}{1^{0|1} . 1^{n|1}} - \frac{\varphi a^1 . B_{n+1}}{1^{1|1} . 1^{n|1}} + \frac{\varphi a^2 . B_{n+2}}{1^{2|1} . 1^{n|1}} - \ldots\ldots$$

wo

801) $$B_m = \frac{d}{d\varphi a}\left(\frac{d}{d\varphi a}\left(\ldots\ldots\frac{d}{d\varphi a}\left(F(a+h)\right)_1\cdots\right)_{m-1}\right)_m = \left(\frac{d}{d\varphi a}\right)^m F(a+h)$$

Dieselbe Bildungsweise findet **Wronski** Seite 111

Die vollständige Entwickelung von F(x+h) ist also

$$802)\quad F(x+h) = \frac{(\varphi x)^0}{1^{0|1}} . \left(\frac{(\varphi a)^0}{1^{0|1}} . B_0 - \frac{(\varphi a)^1}{1^{1|1}} . B_1 + \frac{(\varphi a)^2}{1^{2|1}} . B_2 - \ldots\ldots \right)$$
$$+ \frac{(\varphi x)^1}{1^{1|1}} . \left(\frac{(\varphi a)^0}{1^{0|1}} . B_1 - \frac{(\varphi a)^1}{1^{1|1}} . B_2 + \frac{(\varphi a)^2}{1^{2|1}} . B_3 - \ldots\ldots \right)$$
$$+ \frac{(\varphi x)^2}{1^{2|1}} . \left(\frac{(\varphi a)^0}{1^{0|1}} . B_2 - \frac{(\varphi a)^1}{1^{1|1}} . B_3 + \frac{(\varphi a)^2}{1^{2|1}} . B_4 - \ldots\ldots \right)$$
$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

§. 217.

Die Reihe 802 erhält eine andere Form, wenn die Glieder in der so eben gefundenen Entwickelung nach B_0, B_1, B_2, ... geordnet werden, nämlich

$$F(x+h) = \frac{(\varphi x)^0.(\varphi a)^0}{1^{0|1}.1^{0|1}}.B_0 + \left.\begin{array}{l} \frac{(\varphi x)^1.(\varphi a)^0}{1^{1|1}.1^{0|1}} \\ + \frac{(\varphi x)^0.(\varphi a)^1}{1^{0|1}.1^{1|1}} \end{array}\right| . B_1 + \left.\begin{array}{l} \frac{(\varphi x)^2.(\varphi a)^0}{1^{2|1}.1^{0|1}} \\ - \frac{(\varphi x)^1.(\varphi a)^1}{1^{1|1}.1^{1|1}} \\ + \frac{(\varphi x)^0.(\varphi a)^2}{1^{0|1}.1^{2|1}} \end{array}\right| . B_2 + \ldots.$$

Die Vorzahl von B_p ist

$$\frac{(\varphi x)^p.(\varphi a)^0}{1^{p|1}.1^{0|1}} - \frac{(\varphi x)^{p-1}.(\varphi a)^1}{1^{p-1|1}.1^{1|1}} + \ldots - ..(-)^p \frac{(\varphi x)^0.(\varphi a)^p}{1^{0|1}.1^{p|1}} = \frac{1}{1^{p|1}} . (\varphi x - \varphi a)^p$$

und folglich, wenn $p = 0, 1, 2, \ldots\ldots$ gesetzt wird,

$$803)\ F(x+h) = \frac{1}{1^{0|1}} \cdot (\varphi x - \varphi a)^{0} \cdot \frac{d^{0}}{(d\varphi a)^{0}} F(a+h)$$
$$+ \frac{1}{1^{1|1}} \cdot (\varphi x - \varphi a)^{1} \cdot \frac{d}{d\varphi a}\left({}_{1}\, F(a+h) \right)_{1}$$
$$+ \frac{1}{1^{2|1}} \cdot (\varphi x - \varphi a)^{2} \cdot \frac{d}{d\varphi a}\left({}_{2}\, \frac{d}{d\varphi a}\left({}_{1}\, F(a+h) \right)_{1} \right)_{2}$$
$$+ \frac{1}{1^{3|1}} \cdot (\varphi x - \varphi a)^{3} \cdot \frac{d}{d\varphi a}\left({}_{3}\, \frac{d}{d\varphi a}\left({}_{2}\, \frac{d}{d\varphi a}\left({}_{1}\, F(a+h) \right)_{1} \right)_{2} \right)_{3}$$
$$+ \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot$$

oder auch

$$804)\ F(x+h) - F(a+h) = \frac{1}{1^{1|1}} \cdot (\varphi x - \varphi a)^{1} \cdot \frac{d}{d\varphi a}\left({}_{1}\, F(a+h) \right)_{1}$$
$$+ \frac{1}{1^{2|1}} \cdot (\varphi x - \varphi a)^{2} \cdot \frac{d}{d\varphi a}\left({}_{2}\, \frac{d}{d\varphi a}\left({}_{1}\, F(a+h) \right)_{1} \right)_{2}$$
$$+ \frac{1}{1^{3|1}} \cdot (\varphi x - \varphi a)^{3} \cdot \frac{d}{d\varphi a}\left({}_{3}\, \frac{d}{d\varphi a}\left({}_{2}\, \frac{d}{d\varphi a}\left({}_{1}\, F(a+h) \right)_{1} \right)_{2} \right)_{3}$$
$$+ \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot$$

Die Entwickelung 803 oder 804, welche den Unterschied

$$F(x+h) - F(a+h)$$

durch Potenzen des Unterschiedes

$$\varphi x - \varphi a$$

angibt, ist nur eine andere Form von der Entwickelung 802, welches sich hier zuerst durch unser Verfahren herausgestellt hat.

Die Gleichung 804 gibt die unabhänge Bildungsweise der Vorzahlen von den verschiedenen Potenzen von $(\varphi x - \varphi a)$ an; die zurücklaufende Bildungsweise derselben erhalten wir aus der Gleichung 254, wenn wir $Z = \frac{1}{da}$ setzen; nach dieser Gleichung ist, wenn

805) $$F(x+h) - F(a+h) = A_1 . (\varphi x - \varphi a)^1 + A_2 . (\varphi x - \varphi a)^2 + A_3 . (\varphi x - \varphi a)^3 + \ldots\ldots$$

gesetzt wird,

806) $$\frac{1}{1^{n|1}} \cdot \frac{d^n F(a+h)}{da^n} = A_1 . C(n,1) + A_2 . C(n,2) + A_3 . C(n,3) + \ldots + A_n . C(n,n) \left(\frac{d^1\varphi a}{1^{1|1} da^1} , \frac{d^2\varphi a}{1^{2|1} da^2} , \frac{d^3\varphi a}{1^{3|1} da^3} , \ldots\ldots\right)$$

§. 218.

In dieser ganzen Untersuchung ist x willkührlich. Wird für x derjenige Werth genommen, der $\varphi x = 0$ macht, so ist

807) $$F(x+h) = A_0 + A_1 .(\varphi x)^1 + A_2 .(\varphi x)^2 + \ldots\ldots$$

wo aber

808) $$A_n = \frac{1}{1^{n|1}} \left(\frac{d}{d\varphi x} \left(\frac{d}{d\varphi x} \left(\frac{d}{d\varphi x} \left(\ldots\ldots\ldots \frac{d}{d\varphi x} \left(F(x+h) \right)_1 \ldots\ldots \right)_1 \right)_{n-2} \right)_{n-1} \right)_n \Bigg/ \varphi x = 0$$

und nach dem Differentiiren derjenige Werth von x in den Vorzahlen A_0, A_1, A_2, ... gesetzt werden muss, der bewirkt, dass $\varphi x = 0$

Diese Bildungsweise, welche 808 bemerkbar macht, ist diejenige, welche Paoli angibt. Bürmann hat zuerst folgende bekannt gemacht:

809) $$A_n = \frac{1}{1^{n|1}} \cdot \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} \left(\left(\frac{x-a}{\varphi x} \right)^n \cdot \frac{dF(x+h)}{dx} \right)$$

wo $x = a$ und $\varphi a = 0$

und Wronski Seite 26 und 27 folgende:

810) $$A_n = \frac{\left[d^0\varphi x^0 . d^1\varphi x^1 . d^2\varphi x^2 \ldots\ldots\ldots d^{n-1}\varphi x^{n-1} . d^n F(x+h) \right)}{1^{0|1} . 1^{1|1} . 1^{2|1} \ldots\ldots 1^{n|1} . (d\varphi x)^{1+2+3+\ldots+n}}$$

wo $x = a$ und $\varphi a = 0$

Die letztere 810 folgt unmittelbar aus der Gleichung 791, und die erstere 809 entsteht, wenn 808 mit 321 verbunden wird.

Die Gleichung 810 bleibt wahr, wenn auch der Factor $d^0\varphi x^0$ unterdrückt wird, und es ist

$$811) \qquad A_n = \frac{\left\| d^1\varphi x^1 . d^2\varphi x^2 \,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\, d^{n-1}\varphi x^{n-1} . d^n F(x+h) \right)}{1^{1|1} . 1^{2|1} . 1^{3|1} \,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\, 1^{n|1} . (d\varphi x)^{1+2+\ldots+n}}$$

Viele der Producte, welche durch diese Zeichen vorgestellt werden, verschwinden; es ist nämlich

$$\left\| d^1\varphi x^1 . d^2\varphi x^2 \ldots\ldots d^{n-1}\varphi x^{n-1} . d^n F(x+h) \right) =$$

$$= \Sigma_q (-)^q \left\| d^1\varphi x^1 \ldots . d^{n-q-1}\varphi x^{n-q-1} . d^{n-q+1}\varphi x^{n-q} \ldots . d^n\varphi x^{n-1} \right) . d^{n-q} F(x+h)$$

$$q = 0,\ 1,\ 2, \ldots, n-1$$

und

$$\left\| d^1\varphi x^1 \ldots d^{n-q-1}\varphi x^{n-q-1} . d^{n-q+1}\varphi x^{n-q} \ldots d^n\varphi x^{n-1} \right) =$$

$$= \Sigma (-)^* \left\| d^1\varphi x^1 \ldots . d^{n-q-1}\varphi x^{n-q-1} \right) . \left\| d^{n-q+1}\varphi x^{n-q} \ldots d^n\varphi x^{n-1} \right)$$

wo die Stellenzahlen von φx, nämlich $1, 2, 3, \ldots, n-1$ den Gesetzen der geordneten Verbindungen zu $n-q-1$ und zu q Elementen ohne Wiederholungen unterworfen sind.

Wird nun nach 267 das Differential $d^s\varphi x^p$ in Potenzen von φx und in Differentiale $d^1\varphi x$, $d^2\varphi x, \ldots .$ aufgelöst, und $\varphi x = 0$ gesetzt, so verschwindet $d^s\varphi x^p$ nicht, wenn $s = p$ oder $s > p$, verschwindet aber, wenn $s < p$. Von allen den Producten, welche in

$$\left\| d^1\varphi x^1 . d^2\varphi x^2 \ldots\ldots d^{n-q-1}\varphi x^{n-q-1} \right)$$

begriffen sind, bleibt also nur das erste Product, die übrigen Producte verschwinden, weil wenigstens ein Factor $d^s\varphi x^p$ in ihnen vorkommt, wo $s < p$ ist, und der durch sein Verschwinden auch das ganze Product zernichtet. Zugleich ist für $\varphi x = 0$

$$d^p\varphi x^p = 1^{p|1}.(d\varphi x)^p$$

mithin

$$[\![d^1\varphi x^1 . d^2\varphi x^2 \ldots . d^{n-q-1}\varphi x^{n-q-1}) = 1^{1|1}.1^{2|1}\ldots\ldots 1^{n-q-1|1}(d\varphi x)^{1+2+\ldots+n-q-1}$$

Die Gleichung 810 verliert hiedurch viele unnütze Producte, und die Producte, welche bleiben, viele unnütze Factoren; die Bildungsweise 810 wird dadurch einfacher, und geht in folgende über:

$$812)\qquad A_n = \Sigma(-)^q \frac{[\![d^{n-q+1}\varphi x^{n-q} . d^{n-q+2}\varphi x^{n-q+1}\ldots\ldots\ldots d^n\varphi x^{n-1}) . d^{n-q}F(x+h)}{1^{n-q|1} . 1^{n-q+1|1}\ldots\ldots\ldots 1^{n|1} . (d\varphi x)^{n-q+n-q+1+\ldots+n}}$$

$$q = 0,\ 1,\ 2, \ldots\ldots, n-1$$

oder

$$813)\quad A_n = \frac{d^nF(x+h)}{1^{n|1}.(d\varphi x)^n}$$

$$- \frac{[\![d^n\varphi x^{n-1}) . d^{n-1}F(x+h)}{1^{n-1|1}.1^{n|1}.(d\varphi x)^{2n-1}}$$

$$+ \frac{[\![d^{n-1}\varphi x^{n-2} . d^n\varphi x^{n\ 1}) . d^{n-2}F(x+h)}{1^{n-2|1}.1^{n-1|1}.1^{n|1}(d\varphi x)^{3n-1-2}}$$

$$- \frac{[\![d^{n-2}\varphi x^{n-3} . d^{n-1}\varphi x^{n-2} . d^n\varphi x^{n-1}) . d^{n-3}F(x+h)}{1^{n-3|1}.1^{n-2|1}.1^{n-1|1}.1^{n|1}.(d\varphi x)^{4n-1-2-3}}$$

$$+ \;.\;\;.\;\;.\;\; - \;.\;\;.\;\;.\;\;.\;\;.\;\;.\;\;.\;\;.\;\;.\;\;.\;\;.\;\;.$$

$$(-)^{n-1}\frac{[\![d^2\varphi x^1 . d^3\varphi x^2\ldots\ldots\ldots d^n\varphi x^{n-1}) . d^1F(x+h)}{1^{1|1}.1^{2|1}.1^{3|1}\ldots\ldots 1^{n|1}.(d\varphi x)^{1+2+3+\ldots+n}}$$

§. 219.

Auch nach diesen Geschäften bleiben noch mehrere unnütze Producte und auch noch unnütze Factoren in den Producten zurück. Um die Bildungsweise von allem Ueberflüssigen zu befreien, schlagen wir folgenden Weg ein. Es ist nach 220 für $\varphi x = 0$

$$\frac{d^n(\varphi x)^{n-p}}{1^{n|1}} = C(n, n-p)$$
$$\left(\frac{d^1\varphi x}{1^{1|1}},\ \frac{d^2\varphi x}{1^{2|1}},\ \frac{d^3\varphi x}{1^{3|1}}, \ldots\ldots\right)$$

Setzen wir nun

$$814)\qquad \frac{d^n(\varphi x)^{n-p}}{1^{n|1}\,.\,(d\varphi x)^n} = \frac{C(n, n-p)}{C(n, n)} = C^{(n)}_{n-p}$$

so wird

$$815)\qquad A_n = \frac{d^n F(x+h)}{1^{n|1}.(d\varphi x)^n}$$
$$- \frac{d^{n-1} F(x+h)}{1^{n-1|1}.(d\varphi x)^{n-1}} \cdot \Big[\!\Big|\, C^{(n)}_{n-1} \Big)$$
$$+ \frac{d^{n-2} F(x+h)}{1^{n-2|1}.(d\varphi x)^{n-2}} \cdot \Big[\!\Big|\, C^{(n-1)}_{n-2} \,.\, C^{(n)}_{n-1} \Big)$$
$$- \frac{d^{n-3} F(x+h)}{1^{n-3|1}.(d\varphi x)^{n-3}} \cdot \Big[\!\Big|\, C^{(n-2)}_{n-3} \,.\, C^{(n-1)}_{n-2} \,.\, C^{(n)}_{n-1} \Big)$$
$$+ \;.\;\;.\;\;.\;-\;.\;\;.\;\;.\;\;.\;\;.\;\;.\;\;.$$
$$(-)^{n-1} \frac{d^1 F(x+h)}{1^{1|1}.(d\varphi x)^1} \cdot \Big[\!\Big|\, C^{(2)}_1 \,.\, C^{(3)}_2 \,.\, C^{(4)}_3 \ldots\ldots\ldots\ldots C^{(n)}_{n-1} \Big)$$

Da nun in $C(n, n-p)$ die erstere Zahl n nie kleiner als n–p werden kann, so verschwindet $C^{(s)}_k$, wenn k grösser als s ist. In allen diesen Producten verschwinden also alle Factoren, deren obere Stellenzahlen kleiner als die unteren sind, mithin entstehen hier nach §. 155 diejenigen Producte, deren obere und untere Stellenzahlen den Gesetzen der geordneten Verbindungen ohne Wiederholungen unterworfen sind. Setzen wir also

$$816)\ A_n = \frac{d^n F(x+h)}{1^{n|1}.(d\varphi x)^n} + \frac{d^{n-1} F(x+h)}{1^{n-1|1}.\,(d\varphi x)^{n-1}} \,.\, \mathfrak{S}^{(n)}_1 + \frac{d^{n-2} F(x+h)}{1^{n-2|1}.\,(d\varphi x)^{n-2}} \,.\, \mathfrak{S}^{(n)}_2 + \ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots + \frac{d^1 F(x+h)}{1^{1|1}.\,(d\varphi x)^1} \,.\, \mathfrak{S}^{(n)}_{n-1}$$

so ist, weil $C_n^{(n)} = 1$,

$$817)\quad \mathfrak{G}_1^{(n)} = -C_{n-1}^{(n)}$$

$$\mathfrak{G}_2^{(n)} = -C_{n-1}^{(n)} + C_{n-1}^{(n)} \,.\, C_{n-2}^{(n-1)}$$

$$\mathfrak{G}_3^{(n)} = -C_{n-3}^{(n)} + C_{n-1}^{(n)} \,.\, C_{n-3}^{(n-1)} - C_{n-1}^{(n)} \,.\, C_{n-2}^{(n-1)} \,.\, C_{n-3}^{(n-2)}$$
$$+ C_{n-2}^{(n)} \,.\, C_{n-3}^{(n-2)}$$

$$\mathfrak{G}_4^{(n)} = -C_{n-4}^{(n)} + C_{n-1}^{(n)}.C_{n-4}^{(n-1)} - C_{n-1}^{(n)}.C_{n-2}^{(n-1)}.C_{n-4}^{(n-2)} + C_{n-1}^{(n)}.C_{n-2}^{(n-1)}.C_{n-3}^{(n-2)}.C_{n-4}^{(n-3)}$$
$$+ C_{n-2}^{(n)}.C_{n-4}^{(n-2)} - C_{n-1}^{(n)}.C_{n-3}^{(n-1)}.C_{n-4}^{(n-3)}$$
$$+ C_{n-3}^{(n)}.C_{n-4}^{(n-3)} - C_{n-2}^{(n)}.C_{n-3}^{(n-2)}.C_{n-4}^{(n-3)}$$

und allgemein

$$818)\quad \mathfrak{G}_p^{(n)} = -\,C('n,(n-1, n-2, n-3, \ldots\ldots\ldots, n-p+1),^{(0)}n-p),$$
$$+\,C('n,(n-1, n-2, n-3, \ldots\ldots\ldots, n-p+1),^{(1)}n-p),$$
$$-\,C('n,(n-1, n-2, n-3, \ldots\ldots\ldots, n-p+1)^{(2)},n-p),$$
$$+ \quad . \quad . \quad . \quad . \quad - \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$
$$(-)^p\, C('n,(n-1, n-2, n-3, \ldots\ldots\ldots, n-p+1)^{(p-1)},n-p),$$

Diese Bildungsweise in 816, 817, 818 ist von den unnützen Producten und Factoren ganz befreiet, welche sich in jener, die **Wronski** gefunden hat, nämlich in 810, 811, 812, 813 befinden.

Es ist oft nützlich, durch eine zurücklaufende Bildungsweise die Grössen $\mathfrak{G}_1^{(n)}, \mathfrak{G}_2^{(n)}, \ldots.$ zu bestimmen; diese ist nach 509 folgende:

$$819)\quad \mathfrak{G}_1^{(n)} + C_{n-1}^{(n)} = 0$$

$$\mathfrak{G}_2^{(n)} + \mathfrak{G}_1^{(n)} \,.\, C_{n-2}^{(n-1)} + C_{n-2}^{(n)} = 0$$

$$\mathfrak{G}_3^{(n)} + \mathfrak{G}_2^{(n)} \,.\, C_{n-3}^{(n-2)} + \mathfrak{G}_1^{(n)} \,.\, C_{n-3}^{(n-1)} + C_{n-3}^{(n)} = 0$$

und allgemein

$$820)\quad \mathfrak{G}_p^{(n)} + \mathfrak{G}_{p-1}^{(n)} \,.\, C_{n-p}^{(n-p+1)} + \mathfrak{G}_{p-2}^{(n)} \,.\, C_{n-p}^{(n-p+2)} + \ldots + \mathfrak{G}_1^{(n)} \,.\, C_{n-p}^{(n-1)} + C_{n-p}^{(n)} = 0$$

oder auch

$$821)\quad \begin{aligned} &\mathfrak{G}_1^{(n)} + C_{n-1}^{(n)} = 0 \\ &\mathfrak{G}_2^{(n)} + \mathfrak{G}_1^{(n-1)} . C_{n-1}^{(n)} + C_{n-2}^{(n)} = 0 \\ &\mathfrak{G}_3^{(n)} + \mathfrak{G}_2^{(n-1)} . C_{n-1}^{(n)} + \mathfrak{G}_1^{(n-2)} . C_{n-2}^{(n)} + C_{n-3}^{(n)} = 0 \\ &. \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \end{aligned}$$

und allgemein

$$822)\quad \mathfrak{G}_p^{(n)} + \mathfrak{G}_{p-1}^{(n-1)} . C_{n-1}^{(n)} + \mathfrak{G}_{p-2}^{(n-2)} . C_{n-2}^{(n)} + \ldots\ldots + \mathfrak{G}_1^{(n-p+1)} . C_{n-p+1}^{(n)} + C_{n-p}^{(n)} = 0$$

denn nach 509 sind die Gleichungen 820 und 822 immer mit einander verbunden.

Setzen wir nach 814

$$C_{n-p}^{(n)} = \frac{C(n, n-p)}{C(n, n)} = \frac{C(n, n-p)}{(d\phi x)^n}$$

so nehmen die Gleichungen 820 und 822 folgende Gestalt an:

$$823)\quad C(n, n-p) + \mathfrak{G}_1^{(n)}.C(n-1, n-p) . (d\phi x)^1 + \ldots . + \mathfrak{G}_p^{(n)} . (d\phi x)^p = 0$$

und

$$824)\quad C(n, n-p) + \mathfrak{G}_1^{(n-p+1)} . C(n, n-p+1) + \mathfrak{G}_2^{(n-p+2)}.C(n,n-p+2)+\ldots+\mathfrak{G}_p^{(n)}.C(n,n) = 0$$

$$\left(\frac{d^1\phi x}{1^{1|1}} , \frac{d^2\phi x}{1^{2|1}} , \frac{d^3\phi x}{1^{3|1}} , \ldots . \right)$$

Diese Gleichungen geben die zurücklaufende Bildungsweise der Grössen $\mathfrak{G}_1^{(n)}$, $\mathfrak{G}_2^{(n)}$, ... an; wir können sie benutzen, um eine zurücklaufende Bildungsweise der Vorzahlen A_1, A_2, A_3, ... aufzustellen. Setzen wir nämlich in der Gleichung 816

$$n = n,\ n-1,\ n-2,\ \ldots ,\ 2,\ 1$$

und vervielfachen diese n Gleichungen nach ihrer Folge mit

$$C(n, n), C(n, n-1), C(n, n-2), \ldots\ldots , C(n, 1)$$

und zählen alle diese Gleichungen zusammen, so entsteht die Gleichung

825) $$\frac{d^nF(x+h)}{1^{n|1}} = A_n \,.\, C(n, n) + A_{n-1} \,.\, C(n, n-1) + \ldots\ldots + A_1 \,.\, C(n, 1)$$

$$\left(\frac{d^1\varphi x}{1^{1|1}} \,,\; \frac{d^2\varphi x}{1^{2|1}} \,,\; \frac{d^3\varphi x}{1^{3|1}} \,, \ldots\ldots \right)$$

$$\text{für} \qquad \varphi x = 0$$

welche die zurücklaufende Bildungsweise der Vorzahlen A_1, A_2, A_3, ... angibt.

Dieselbe zurücklaufende Bildungsweise ergibt sich aus 806, wenn $\varphi x = 0$ gesetzt wird.

C. Entwickelung von **$Fy = F(fx)$** *nach den ganzen Potenzen von* φx

§. 220.

Es sei $y = fx$ und $z = \varphi x$; man entwickele Fy nach den Potenzen von z, oder man suche die Vorzahlen der Reihe

$$826)\qquad Fy - Fb = (\varphi x - \varphi a)^1 . B_1 + (\varphi x - \varphi a)^2 . B_2 + (\varphi x - \varphi a)^3 . B_3 + \ldots\ldots$$

Diese Reihe lässt sich leicht auf 804 zurückbringen, wenn $h = o$ und

$$y = fx \quad , \quad b = fa$$

$$Fy = Ffx = F_1 x \quad , \quad Fb = Ffa = F_1 a$$

gesetzt wird; es ist

$$Fy - Fb = F_1 x - F_1 a = \frac{1}{1^{1|1}} . (\varphi x - \varphi a)^1 . \left(\frac{d}{d\varphi a}\right)^1 F_1 a$$

$$+ \frac{1}{1^{2|1}} . (\varphi x - \varphi a)^2 . \left(\frac{d}{d\varphi a}\right)^2 F_1 a$$

$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots$$

mithin
$$B_n = \frac{1}{1^{n|1}} . \Big(\frac{d}{d\varphi a}{}^n F_1 a$$

Nehmen wir nun unsere Gleichung 254 zu Hülfe, setzen in ihr $U = F_1 a$, $Y = fa$ und $Z = \frac{1}{d\varphi a}$, und zugleich

$$\left(\frac{d}{dfa}\right)^p F_1 a = \left(\frac{d}{db}\right)^p Fb = \frac{d^p Fb}{db^p}$$

so erhalten wir folgende Bildungsweise der Vorzahlen:

827) $$B_n = \Sigma_p \frac{1}{1^{p|1}} . C(n\,,\,p) . \frac{d^pFb}{db^p}$$

$$= C(n\,,1) . \frac{d^1Fb}{1^{1|1}.db^1} + C(n\,,2) . \frac{d^2Fb}{1^{2|1}.db^2} + \ldots . + C(n,n) . \frac{d^nFb}{1^{n|1}.db^n}$$

$$\left(\frac{1}{1^{1|1}} . \left(\frac{d}{d\varphi a}\right)^1 fa\,,\, \frac{1}{1^{2|1}}\left(\frac{d}{d\varphi a}\right)^2 fa\,, \ldots\ldots\ldots \right)$$

Diese Entwickelung ist ganz allgemein, gilt also auch, wenn $\varphi a = 0$ ist, und ist verschieden von den bis jetzt bekannten.

Für den Fall, wenn $\varphi a = 0$, gibt **Wronski** Seite 121 folgende Vorschrift:

828) $$B_n = H_0 . \frac{d^nFy}{1^{n|1}.dy^n} + H_1 . \frac{d^{n-1}Fy}{1^{n-1|1}.dy^{n-1}} + \ldots + H_{n-1} . \frac{d^1Fy}{1^{1|1}.dy^1} + H_n . \frac{d^0Fy}{1^{0|1}.dy^0}$$

wo

829) $$H_p = \frac{C(n\,,\,n-p)}{(d\varphi x)^n}$$

$$- \frac{\|d^n\varphi x^{n-1}) . C(n-1\,,\,n-p)}{1^{n|1} . (d\varphi x)^{2n-1}}$$

$$+ \frac{\|d^{n-1}\varphi x^{n-2} . d^n\varphi x^{n-1}) . C(n-2\,,\,n-p)}{1^{n|1} . 1^{n-1|1} . (d\varphi x)^{3n-1-2}}$$

$$- \frac{\|d^{n-2}\varphi x^{n-3} . d^{n-1}\varphi x^{n-2} . d^n\varphi x^{n-1}) . C(n-3\,,\,n-p)}{1^{n|1} . 1^{n-1|1} . 1^{n-2|1} . (d\varphi x)^{4n-1-2-3}}$$

$$+ \ldots\ldots - \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$(-)^p \frac{\|d^{n-p+1}\varphi x^{n-p} \ldots\ldots\ldots\ldots d^n\varphi x^{n-1}) . C(n-p\,,\,n-p)}{1^{n|1} . 1^{n-1|1} \ldots\ldots\ldots\ldots 1^{2|1} . (d\varphi x)^{(p+1).n-1-2-\ldots.-p}}$$

$$\left(\frac{d^1y}{1^{1|1}.dx^1}\,,\, \frac{d^2y}{1^{2|1}.dx^2}\,, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \right)$$

wenn nach dem Differentiiren derjenige Werth für x gesetzt wird, welcher $\varphi x = 0$ macht.

Diese Vorschrift entsteht nämlich aus 813, wenn $h = 0$, Fy statt Fx, und nach 266

$$\frac{d^m Fy}{1^{m|1} . dx^m} = \frac{d^m Fy}{1^{m|1} . dy^m} . C(m, m) + \frac{d^{m-1} Fy}{1^{m-1|1} . dy^{m-1}} . C(m, m-1) + \ldots + \frac{d^0 Fy}{1^{0|1} . dy^0} . C(m, 0)$$

$$\left(\frac{d^1 y}{1^{1|1} . dx^1} , \quad \frac{d^2 y}{1^{2|1} . dx^2} , \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \right)$$

gesetzt wird. Die Reihe, welche nach dieser Vorschrift gebildet wird, ist

830) $$Fy = B_0 + B_1 . (\varphi x)^1 + B_2 . (\varphi x)^2 + B_3 . (\varphi x)^3 + \ldots\ldots$$

§. 221.

Es sei $y = fx$ und $z = x . \varphi x$; man entwickele Fy nach den Potenzen von z.

Man erhält aus dem Obigen folgende Entwickelung:

831) $$\begin{aligned} Fy = F(fx) = & \left(F(\varphi x)\right)_{x=0} \\ & + \frac{x^1 (\varphi x)^1}{1^{1|1}} . \left(\frac{d^0}{dx^0} \left((\varphi x)^{-1} . \frac{dFy}{dx} \right) \right)_{x=0} \\ & + \frac{x^2 . (\varphi x)^2}{1^{2|1}} . \left(\frac{d^1}{dx^1} \left((\varphi x)^{-2} . \frac{dFy}{dx} \right) \right)_{x=0} \\ & + \frac{x^3 . (\varphi x)^3}{1^{3|1}} . \left(\frac{d^2}{dx^2} \left((\varphi x)^{-3} . \frac{dFy}{dx} \right) \right)_{x=0} \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

D. *Entwickelung von* F(x+h) *nach den Potenzen von* $(\varphi x)^{\frac{p}{q}}$

---

§. 222.

Die Reihe, deren Vorzahlen gesucht werden, ist

$$832)\qquad F(x+h) - F(a+h) = \begin{aligned}[t] & A_1 . (\varphi x^{\frac{p}{q}} - \varphi a^{\frac{p}{q}})^1 \\ + & A_2 . (\varphi x^{\frac{p}{q}} - \varphi a^{\frac{p}{q}})^2 \\ + & A_3 . (\varphi x^{\frac{p}{q}} - \varphi a^{\frac{p}{q}})^3 \\ + & \;.\;\;.\;\;.\;\;.\;\;.\;\;. \end{aligned}$$

In der Gleichung 804 setzen wir $(\varphi x)^{\frac{p}{q}}$ statt φx, und

$$\frac{p}{q}\,(\varphi x)^{\frac{p}{q}-1} . d\varphi x \text{ statt } d\varphi x$$

Die Vorzahl A_n ist nach diesem

$$A_n = \frac{1}{1^{n|1}} . \left(\frac{q}{p}\right)^n . \left(\varphi a^{1-\frac{p}{q}} . \frac{d}{d\varphi a}\right)^n F(a+h)$$

und also nach 466

$$833)\quad A_n = \frac{1}{1^{n|1}} . \left(\frac{q}{p}\right)^n . \left(\begin{aligned}[t] & F_{n,0} . (\varphi a)^{-n.\frac{p}{q}} . \left(\frac{d}{d\varphi a}\right)^0 F(a+h) \\ + & F_{n,1} . (\varphi a)^{1-n.\frac{p}{q}} . \left(\frac{d}{d\varphi a}\right)^1 F(a+h) \\ + & F_{n,2} . (\varphi a)^{2-n.\frac{p}{q}} . \left(\frac{d}{d\varphi a}\right)^2 F(a+h) \\ + & \;.\;\;.\;\;.\;\;.\;\;.\;\;.\;\;.\;\;.\;\;.\;\;. \\ & F_{n,n} . (\varphi a)^{n-n.\frac{p}{q}} . \left(\frac{d}{d\varphi a}\right)^n F(a+h) \end{aligned} \right)$$

wo die Factoren $F_{n,1}$, $F_{n,2}$, . . . nach der Vorschrift 467 gebildet werden:

834) $$F_{n,s} = \frac{1}{1^{s|1}} \cdot \Big(s^{n|-\frac{p}{q}} \cdot \frac{s^{0|-1}}{1^{0|1}}$$
$$- (s-1)^{n|-\frac{p}{q}} \cdot \frac{s^{1|-1}}{1^{1|1}}$$
$$+ (s-2)^{n|-\frac{p}{q}} \cdot \frac{s^{2|-1}}{1^{2|1}}$$
$$- \;.\;.\;.\;.\;.\;.$$
$$(-)^{s}(s-s)^{n|-\frac{p}{q}} \cdot \frac{s^{s|-1}}{1^{s|1}} \Big)$$

oder (468) nach folgender Vorschrift:

835) $$F_{n,s} = \frac{1^{n|1}}{1^{s|1}} \cdot C(n, s) \left(\frac{1^{1|-\frac{p}{q}}}{1^{1|1}}, \frac{1^{2|-\frac{p}{q}}}{1^{2|1}}, \ldots . \right)$$

Wronski findet Seite 447 für den Fall, wenn $p = 1$ und $\varphi x = 1 + kx$, auf einem von unserem ganz verschiedenen Wege, eine Bildungsweise, die mit unserer zweiten 835 übereinstimmt, ohne dass das allgemeine Gesetz derselben angegeben ist.

E. Entwickelung von F(x+h) *nach den Potenzen von* lg : (1+bx)

§. 223.

Es sei

836)
$$F(x+h)-F(a+h) = A_1 . \Big(\lg:(1+bx)-\lg:(1+b.a)\Big)^1 + A_2 . \Big(\lg:(1+bx)-\lg:(1+b.a)\Big)^2 + A_3 . \Big(\lg:(1+bx)-\lg:(1+b.a)\Big)^3 + \ldots\ldots\ldots\ldots ;$$

Diese Reihe ist ein besonderer Fall von 804, wo

$$\varphi x = \lg:(1+bx) \text{ , also } d\varphi x = \frac{b.dx}{1+bx} \text{ , } \frac{1}{d\varphi x} = \frac{1+bx}{b.dx}$$

Die Bildungsweise der Vorzahlen ist

$$A_n = \frac{1}{1^{n|1}} . \left(\frac{1+ba}{b} . \frac{d}{da}\right)^n F(a+h)$$

oder nach 471, wenn $u = \frac{1}{b} + a$ und $Y = F(a+h)$ gesetzt wird

837)
$$A_n = \frac{1}{1^{n|1}} . \Bigg([1]^{(n-1)} . \left(\frac{1}{b}+a\right)^1 . \frac{d^1F(a+h)}{da^1} + [1,2]^{(n-2)} . \left(\frac{1}{b}+a\right)^2 . \frac{d^2F(a+h)}{da^2} + [1,2,3]^{(n-3)} . \left(\frac{1}{b}+a\right)^3 . \frac{d^3F(a+h)}{da^3} + \ldots\ldots\ldots\ldots + [1,2,3,\ldots,n]^{(0)} . \left(\frac{1}{b}+a\right)^n . \frac{d^nF(a+h)}{da^n} \Bigg)$$

Die Vorzahlen können auch wie in 470 angegeben werden. **Wronski** findet Seite 449 ein anderes Gesetz.

F. Entwickelung von F(x + h) *nach den Potenzen von* (Arc : (tg = b + c.x))

---

§. 224.

Es sei

838) $$F(x+h)-F(a+h) = A_1 . \left(Arc.(tg = b+c.x) - Arc.(tg = b+c.a)\right)^1$$
$$+ A_2 . \left(Arc.(tg = b+c.x) - Arc.(tg = b+c.a)\right)^2$$
$$+ A_3 . \left(Arc.(tg = b+c.x) - Arc.(tg = b+c.a)\right)^3$$
$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Auch dieser specielle Fall von 804 verdient besonders gewürdigt zu werden. Es ist

$$\varphi x = Arc : (tg = b + cx) \quad \text{und} \quad \frac{1}{d\varphi x} = \frac{1 + (b + cx)^2}{c \,.\, dx}$$

Die Bildungsweise der Vorzahlen geben nach 804 folgende Zeichen an:

839) $$A_n = \frac{1}{1^{n|1}} \cdot \frac{1}{c^n} \cdot \left(\left(1 + (b + c.a)^2\right) . \frac{d}{da}\right)^n F(a + h)$$

Wählt man aber die zurücklaufende Bildungsweise 806

840) $$\frac{d^n F(a + h)}{1^{n|1} . da^n} = A_1 . C(n, 1) + A_2 . C(n, 2) + \ldots + A_n . C(n, n)$$
$$\left(\frac{d^1\varphi a}{1^{1|1}.da^1}\,,\ \frac{d^2\varphi a}{1^{2|1}.da^2}\,,\ \ldots\ldots\ldots\ldots\right)$$

so müssen die Elemente, aus welchen die Verbindungen C(n, 1), C(n, 2), ... gemacht werden sollen, nach den früher aufgefundenen Gesetzen gebildet werden, nämlich nach der Vorschrift 415

841) $$\frac{d^{m+1}\varphi a}{1^{m+1|1} \cdot da^{m+1}} = \frac{c^{m+1}}{m+1} \cdot \Big((-)^{m} \frac{m^{0|-1}}{1^{0|1}} \cdot 2^{m} \cdot (b+ca)^{m} \cdot \big(1+(b+ca)^{2}\big)^{-m-1}$$
$$+ (-)^{m-1} \frac{(m-1)^{1|-1}}{1^{1|1}} \cdot 2^{m-2} \cdot (b+ca)^{m-2} \cdot \big(1+(b+ca)^{2}\big)^{-m}$$
$$+ (-)^{m-2} \frac{(m-2)^{2|-1}}{1^{2|1}} \cdot 2^{m-4} \cdot (b+ca)^{m-4} \cdot \big(1+(b+ca)^{2}\big)^{-m+1}$$
$$+ (-)^{m-3} \frac{(m-3)^{3|-1}}{1^{3|1}} \cdot 2^{m-6} \cdot (b+ca)^{m-6} \cdot \big(1+(b+ca)^{2}\big)^{-m+2}$$
$$+ \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \Big)$$

oder auch nach 416

842) $$= \big(1 + (b + ca)^{2}\big)^{-m-1} \cdot \frac{c^{m+1}}{m+1} \cdot \Big((-)^{m} \frac{(m+1)^{m|-1}}{1^{m|1}} \cdot (b + ca)^{m}$$
$$+ (-)^{m-1} \frac{(m+1)^{m-2|-1}}{1^{m-2|1}} \cdot (b + ca)^{m-2}$$
$$+ (-)^{m-2} \frac{(m+1)^{m-4|-1}}{1^{m-4|1}} \cdot (b + ca)^{m-4}$$
$$+ \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \Big)$$

Bei Wronski Seite 461 findet man eine unabhängige Bildungsweise der Vorzahlen A_1, A_2, A_3, ...

G. *Entwickelung der Function* $F(x+h)$ *nach den Potenzen von* $(x-a)$, *von* h *und von* x; *ferner Entwickelung der Function* $F(x_1+h_1, x_2+h_2, .., x_m+h_m)$ *nach den Potenzen von* $h_1, h_2, .., h_m$.

§. 225.

Wir heben diesen sehr speciellen Fall besonders heraus, theils wegen seiner grossen Anwendung, theils deswegen, weil er gewöhnlich als Grundlage der Differentialrechnung gewählt, und also auch in geschichtlicher Hinsicht merkwürdig ist.

Unmittelbar aus 804 folgt, dass

$$843)\quad F(x+h) - F(a+h) = (x-a)^1 . \frac{d^1 F(a+h)}{1^{1|1}.da^1} + (x-a)^2 . \frac{d^2 F(a+h)}{1^{2|1}.da^2} + (x-a)^3 . \frac{d^3 F(a+h)}{1^{3|1}.da^3} + \dots\dots$$

Diese ist die allgemeinste und bequemste Form; andere Formen erhält man leicht, je nachdem man x, a, oder h verschwinden lässt. Nimmt man z. B. $a=0$, so wird

$$844)\quad F(x+h) = Fh + x^1 . \frac{d^1 Fh}{1^{1|1}.dh^1} + x^2 . \frac{d^2 Fh}{1^{2|1}.dh^2} + \dots\dots$$

oder wenn man h und x vertauscht

$$845)\quad F(x+h) = Fx + h^1 . \frac{d^1 Fx}{1^{1|1}.dx^1} + h^2 . \frac{d^2 Fx}{1^{2|1}.dx^2} + \dots\dots$$

oder wird $h=0$ angenommen

846) $$\mathrm{Fx}-\mathrm{Fa} = (\mathrm{x}-\mathrm{a})^1 \cdot \frac{d^1\,\mathrm{Fa}}{1^{1|1}.\,d\mathrm{a}^1} + (\mathrm{x}-\mathrm{a})^2 \cdot \frac{d^2\,\mathrm{Fa}}{1^{2|1}.\,d\mathrm{a}^2} + \ldots.$$

und

847) $$\mathrm{Fx} = \mathrm{F}(0) + \mathrm{x}^1 \cdot \frac{d^1\,\mathrm{F}(\mathrm{x}=0)}{1^{1|1}.d\mathrm{x}^1} + \mathrm{x}^2 \cdot \frac{d^2\,\mathrm{F}(\mathrm{x}=0)}{1^{2|1}.d\mathrm{x}^2} + \ldots.$$

§. 226.

Oft hat man bei der Entwickelung in Reihen sich nach der Natur der gegebenen Functionen zu richten. Ist z. B. $(\mathrm{fy})^n = (\mathrm{f}\varphi\mathrm{x})^n$ in eine Reihe nach den Potenzen von x zu entwickeln, und ist

848) $$\mathrm{fy} = \mathrm{A}_0 . \mathrm{y}^{a} + \mathrm{A}_1 . \mathrm{y}^{a+1b} + \mathrm{A}_2 . \mathrm{y}^{a+2b} + \ldots\ldots.$$

und

$$\mathrm{y} = \varphi\mathrm{x} = \mathrm{B}_0 . \mathrm{x}^{h} + \mathrm{B}_1 . \mathrm{x}^{h+1k} + \mathrm{B}_2 . \mathrm{x}^{h+2k} + \ldots\ldots.$$

so werde fy zuerst auf die *n* te Potenz erhoben

$$(\mathrm{fy})^n = (\mathrm{fy})^n\mathfrak{f}1 . \mathrm{y}^{na} + (\mathrm{fy})^n\mathfrak{f}2 . \mathrm{y}^{na+1b} + (\mathrm{fy})^n\mathfrak{f}3 . \mathrm{y}^{na+2b} + \ldots\ldots$$

und dann die Reihe y auf die verschiedenen Potenzen na, na+1b, ... nach der Vorschrift

$$\mathrm{y}^{na+pb} = \mathrm{y}^{na+pb}\mathfrak{f}1 . \mathrm{x}^{(na+pb)h} + \mathrm{y}^{na+pb}\mathfrak{f}2 . \mathrm{x}^{(na+pb)h+1k} + \mathrm{y}^{na+pb}\mathfrak{f}3 . \mathrm{x}^{(na+pb)h+2k} + \ldots..$$

Es entstehen hiedurch folgende Producte:

849) $$\begin{aligned}(\mathrm{fy})^n = {} & (\mathrm{fy})^n\mathfrak{f}1.\left(\mathrm{y}^{na}\,\mathfrak{f}1 . \mathrm{x}^{nah} + \mathrm{y}^{na}\,\mathfrak{f}2 . \mathrm{x}^{nah+1k} + \mathrm{y}^{na}\,\mathfrak{f}3 . \mathrm{x}^{nah+2k} + \ldots.\right)\\ & + (\mathrm{fy})^n\mathfrak{f}2 . \left(\mathrm{y}^{na+b}\mathfrak{f}1 . \mathrm{x}^{(na+b)h} + \mathrm{y}^{na+b}\mathfrak{f}2 . \mathrm{x}^{(na+b)h+1k} + \mathrm{y}^{na+b}\mathfrak{f}3 . \mathrm{x}^{(na+b)h+2k} + \ldots\right)\\ & + (\mathrm{fy})^n\mathfrak{f}3.\left(\mathrm{y}^{na+2b}\mathfrak{f}1 . \mathrm{x}^{(na+2b)h} + \mathrm{y}^{na+2b}\mathfrak{f}2 . \mathrm{x}^{(na+2b)h+1k} + \mathrm{y}^{na+2b}\mathfrak{f}3.\mathrm{x}^{(na+2b)h+2k} + \ldots\right)\\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\end{aligned}$$

Je nachdem nun die Grössen a, b, h, k beschaffen sind, werden diese Producte sich entweder zu einer allgemeinen Reihe oder in mehrere Reihen gruppiren lassen. Es sind hier vorzüglich drei Fälle zu beachten:

Erstens ist $h = 0$, oder ist

850) $$fy = A_0 . y^a + A_1 . y^{a+1b} + A_2 . y^{a+2b} + \ldots\ldots$$

und

$$y = B_0 + B_1 . x^{1k} + B_2 . x^{2k} + \ldots\ldots$$

so ist

$$(fy)^n = E_0 + E_1 . x^{1k} + E_2 . x^{2k} + \ldots\ldots$$

wo

$$E_p = (fy)^n \mathfrak{f}1 . y^{na} \mathfrak{f}(p+1) + (fy)^n \mathfrak{f}2 . y^{na+b} \mathfrak{f}(p+1) + \ldots\ldots$$

Zweitens ist $k = h.b$, oder ist

851) $$fy = A_0 . y^a + A_1 . y^{a+1b} + A_2 . y^{a+2b} + \ldots\ldots$$

und

$$y = B_0 . x^h + B_1 . x^{(1+1b)h} + B_2 . x^{(1+2b)h} + \ldots\ldots$$

so ist

$$(fy)^n = G_0 . x^{nah} + G_1 . x^{(na+b)h} + G_2 . x^{(na+2b)h} + \ldots\ldots$$

wo

$$G_p = (fy)^n \mathfrak{f}1 . y^{na} \mathfrak{f}p + (fy)^n \mathfrak{f}2 . y^{na+b} \mathfrak{f}(p-1) + (fy)^n \mathfrak{f}3 . y^{na+2b} \mathfrak{f}(p-2) + \ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots + (fy)^n \mathfrak{f}p . y^{na+(p-1)b} \mathfrak{f}1$$

Drittens ist $k = -h.b$, oder ist

852) $$fy = A_0 . y^a + A_1 . y^{a+1b} + A_2 . y^{a+2b} + \ldots\ldots$$

und

$$y = B_0 . x^h + B_1 . x^{(1-1b)h} + B_2 . y^{(1-2b)h} + \ldots\ldots$$

so ist

$$(fy)^n = H_0 . x^{nah} + H_1 . x^{(na-1b)h} + H_2 . x^{(na-2b)h} + \ldots\ldots$$
$$+ H_{-1} . x^{(na+1b)h} + H_{-2} . x^{(na+2b)h} + \ldots\ldots$$

wo

$$H_p = (fy)^n \mathfrak{f}1 . y^{na} \mathfrak{f}(p+1) + (fy)^n \mathfrak{f}2 . y^{na+b} \mathfrak{f}(p+2) + (fy)^n \mathfrak{f}3 . y^{na+2b} \mathfrak{f}(p+3) + \ldots\ldots$$

wo $p = 0, 1, 2, 3, \ldots$ und auch $= -1, -2, -3, \ldots$ gesetzt werden muss, und zu berücksichtigen ist, dass $y^q f(0), y^q f(-1), \ldots = 0$.

Beide Reihen, wovon die eine nach den steigenden und die andere nach den fallenden Potenzen von x fortgeht, bilden nur eine einzige Reihe, die weder Anfang noch Ende hat, und deren Mittelglied $A_0 x^{nah}$ ist.

§. 227.

Soll eine Function $f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ von mehreren Grundgrössen $x_1, x_2, \ldots, x_m$ in eine Reihe nach den Potenzen der Zunahmen $h_1, h_2, \ldots, h_m$ dieser Grundgrössen entwickelt werden, so ist das Verfahren folgendes:

$$\begin{aligned} f(x_1 + h_1, x_2, \ldots, x_m) = {} & f(x_1, x_2, \ldots, x_m) \\ & + \frac{h_1^1}{1^{1|1}} \cdot \frac{d^1}{dx_1^1} f(x_1, x_2, \ldots, x_m) \\ & + \frac{h_1^2}{1^{2|1}} \cdot \frac{d^2}{dx_1^2} f(x_1, x_2, \ldots, x_m) \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Nimmt x_2 um h_2 zu, so geht $f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ über in

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2 + h_2, x_3, \ldots, x_m) = {} & f(x_1, x_2, \ldots, x_m) \\ & + \frac{h_2^1}{1^{1|1}} \cdot \frac{d^1}{dx_2^1} f(x_1, x_2, \ldots, x_m) \\ & + \frac{h_2^2}{1^{2|1}} \cdot \frac{d^2}{dx_2^2} f(x_1, x_2, \ldots, x_m) \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

und es wird

$$f(x_1+h_1, x_2+h_2, x_3, \ldots, x_m) = f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$$

$$+ \frac{h_1^1}{1^{1|1}} \cdot \frac{d^1}{dx_1^1} f(x_1, \ldots, x_m) + \frac{h_2^1}{1^{1|1}} \cdot \frac{d^1}{dx_2^1} f(x_1, \ldots, x_m)$$

$$+ \frac{h_1^2}{1^{2|1}} \cdot \frac{d^2}{dx_1^2} f(x_1, \ldots, x_m) + \frac{h_1^1 \cdot h_2^1}{1^{1|1} \cdot 1^{1|1}} \cdot \frac{d^2}{dx_1^1 dx_2^1} f(x_1, \ldots, x_m) + \frac{h_2^2}{1^{2|1}} \cdot \frac{d^2}{dx_2^2} f(x_1, \ldots, x_m)$$

$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Man erhält allgemein folgende Reihe:

$$853)\quad f(x_1+h_1, x_2+h_2, \ldots, x_m+h_m) =$$

$$\begin{array}{llll}
= A_{0,0,0,\ldots\ldots} & + A_{1,0,0,\ldots\ldots} h_1^1 & + A_{2,0,0,\ldots\ldots} h_1^2 & + \ldots\ldots \\
 & + A_{0,1,0,\ldots\ldots} h_2^1 & + A_{1,1,0,\ldots\ldots} h_1^1\, h_2^1 & \\
 & + A_{0,0,1,\ldots\ldots} h_3^1 & + A_{1,0,1,\ldots\ldots} h_1^1\, h_3^1 & \\
 & + \ldots\ldots & + A_{0,2,0,\ldots\ldots} h_2^2 & \\
 & & + A_{0,1,1,\ldots\ldots} h_2^1\, h_3^1 & \\
 & & + A_{0,0,2,\ldots\ldots} h_3^2 & \\
 & & + \ldots\ldots &
\end{array}$$

wo

$$854)\quad A_{n1,n2,n3,\ldots,nm} = \frac{d^{n1+n2+n3+\ldots\ldots+nm} f(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_m)}{1^{n1|1} . 1^{n2|1} . 1^{n3|1} \ldots\ldots 1^{nm|1} . dx_1^{n1}\, dx_2^{n2}\, dx_3^{n3} \ldots\ldots dx_m^{nm}}$$

Soll $f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ nach den Potenzen der Grundgrössen $x_1, x_2, \ldots, x_m$ entwickelt werden, so wird in vorstehender Entwickelung $x_1 = x_2 = \ldots = x_m = 0$ und $x_1, x_2, \ldots, x_m$ statt $h_1, h_2, \ldots, h_m$ gesetzt.

Ist

$$y_1 = \varphi_1(x_1 , x_2 , \ldots .)$$

$$y_2 = \varphi_2(x_1 , x_2 , \ldots .)$$

. . . .

und soll $f(y_1 , y_2 , y_3 , \ldots .)$ in eine Reihe nach den Potenzen von x_1 , x_2 .... entwickelt werden, so kommen hiebei jene Wahrheiten in Anwendung, welche in den §§. 76, 77, 78, und 90 gefunden sind.

H. Wenn die Hauptfunction noch von einer anderen Function begleitet wird.

---

a) Im Allgemeinen.

§. 228.

Es sei

855) $$F(x+h) = A_0.(\varphi x-\varphi a)^0.f^{(0)}x + A_1.(\varphi x-\varphi a)^1.f^{(1)}x + A_2.(\varphi x-\varphi a)^2.f^{(2)}x + \ldots\ldots\ldots$$

Die Reihe wird differentiirt, nach jedem Differentiiren durch $d\varphi x$ gemessen, und dann $x = a$ gesetzt. Durch diese Geschäfte entstehen, weil für $x = a$

$$\frac{1}{1^{n+s|1}}.\left(\frac{d}{d\varphi x}\right)^{n+s}((\varphi x-\varphi a)^n.f^{(n)}x) = \frac{1}{1^{s|1}}.\left(\frac{d}{d\varphi a}\right)^s f^{(n)}a$$

folgende Gleichungen:

856) $$\frac{1}{1^{0|1}}.\left(\frac{d}{d\varphi a}\right)^0 F(a+h) = A_0.\left(\frac{d}{d\varphi a}\right)^0 f^{(0)}a$$

$$\frac{1}{1^{1|1}}.\left(\frac{d}{d\varphi a}\right)^1 F(a+h) = A_0.\frac{1}{1^{1|1}}.\left(\frac{d}{d\varphi a}\right)^1 f^{(0)}a + A_1\frac{1}{1^{0|1}}.\left(\frac{d}{d\varphi a}\right)^0 f^{(1)}a$$

$$\frac{1}{1^{2|1}}\left(\frac{d}{d\varphi a}\right)^2 F(a+h) = A_0\frac{1}{1^{2|1}}\left(\frac{d}{d\varphi a}\right)^2 f^{(0)}a + A_1\frac{1}{1^{1|1}}\left(\frac{d}{d\varphi a}\right)^1 f^{(1)}a + A_2\frac{1}{1^{0|1}}\left(\frac{d}{d\varphi a}\right)^0 f^{(2)}a$$

und allgemein

$$\frac{1}{1^{n|1}}\left(\frac{d}{d\varphi a}\right)^n F(a+h) = A_0\frac{1}{1^{n|1}}\left(\frac{d}{d\varphi a}\right)^n f^{(0)}a + A_1\frac{1}{1^{n-1|1}}\left(\frac{d}{d\varphi a}\right)^{n-1} f^{(1)}a + \ldots + A_n\frac{1}{1^{0|1}}\left(\frac{d}{d\varphi a}\right)^0 f^{(n)}a$$

welche die zurücklaufende Bildungsweise der Vorzahlen A_0, A_1, ... angeben, und die auch schon **Bürmann** Seite 39. §. 9 gefunden hat.

Die unabhängige Bildungsweise kann, wie es in §§. 137 und 138 gezeigt ist, aus dieser zurücklaufenden hergeleitet werden.

b) Im Besonderen.

§. 229.

Es sei

$$857)\qquad F(x+h) = A_0 + A_1 \cdot \frac{(\varphi x - \varphi a)^1}{b_1 + \varphi x}$$
$$+ A_2 \cdot \frac{(\varphi x - \varphi a)^2}{(b_1 + \varphi x)(b_2 + \varphi x)}$$
$$+ A_3 \cdot \frac{(\varphi x - \varphi a)^3}{(b_1 + \varphi x)(b_2 + \varphi x)(b_3 + \varphi x)}$$
$$+ \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot$$

In diesem Falle ist

$$f^{(p)}x = \frac{1}{(b_1 + \varphi x)(b_2 + \varphi x) \cdot \cdot \cdot \cdot (b_p + \varphi x)}$$

und wenn wegen der Kürze

$$858)\qquad \frac{1}{b_p + \varphi a} = c_p \quad \text{und} \quad [c_1, c_2, \ldots, c_p]^{(n)} = [p]^{(n)}$$

gesetzt wird, nach 449

$$\frac{1}{1^{n|1}} \cdot \left(\frac{d}{d\varphi a}\right) f^{(p)}a = (-)^n c_1 \cdot c_2 \cdot \ldots \cdot c_p \cdot [p]^{(n)}$$

Die zurücklaufende Bildungsweise der Vorzahlen der vorgegebenen Reihe ist also nach 855

$$859)\quad \frac{1}{1^{n|1}}\cdot\left(\frac{d}{d\varphi a}\right)^{n} F(a+h) = \begin{aligned}[t] & A_n \cdot [\,n\,]^{(0)} . c_1 . c_2 . c_3 \ldots c_n \\ & - A_{n-1} . [n-1]^{(1)} . c_1 . c_2 . c_3 \ldots c_{n-1} \\ & + A_{n-2} . [n-2]^{(2)} . c_1 . c_2 . c_3 \ldots c_{n-2} \\ & - \;.\;\;.\;\;.\;+\;.\;\;.\;\;.\;\;.\;\;.\;\;. \\ & (-)^{n-1} A_1 . [1]^{(n-1)} . c_1 \end{aligned}$$

Aus dieser zurücklaufenden erhalten wir die unabhängige Bildungsweise, wenn wir $n = 1, 2, 3, \ldots, n$ setzen, die Gleichungen, welche dadurch entstehen, nach ihrer Folge mit

$$(n-1)^{(n-1)}\;,\;(n-1)^{(n-2)}\;,\;(n-1)^{(n-3)},\ldots\;(n-1)^{(0)}$$

vervielfachen, alle diese Gleichungen zusammenzählen, und nach unserer Analysis Seite 256 N. 413

$$(n-1)^{(n-q)} . [q]^{(0)} - (n-1)^{(n-q-1)} . [q]^{(1)} + \ldots - \ldots (-)^{n-q} (n-1)^{(0)} . [q]^{(n-q)} = 0$$

setzen. Hiedurch entsteht die Gleichung

$$c_1 . c_2 \ldots c_n . A_n = \frac{1}{1^{1|1}} . (n-1)^{(n-1)} . \left(\frac{d}{d\varphi a}\right)^{1} F(a+h) + \ldots + \frac{1}{1^{n|1}} . (n-1)^{(0)} . \left(\frac{d}{d\varphi a}\right)^{n} F(a+h)$$

oder, weil

$$(n-1)^{(n-p)} = \left(\frac{1}{b_1+\varphi a}, \ldots, \frac{1}{b_{n-1}+\varphi a}\right)^{(n-p)} = \frac{(b_1+\varphi a, \ldots, b_{n-1}+\varphi a)^{(p-1)}}{(b_1+\varphi a) \ldots\ldots (b_{n-1}+\varphi a)}$$

ist, die Gleichung

$$860)\quad A^n = (b_n+\varphi a) . \left(\begin{aligned} & (b_1+\varphi a, \ldots, b_{n-1}+\varphi a)^{(0)} . \frac{1}{1^{1|1}} . \left(\frac{d}{d\varphi a}\right)^{1} F(a+h) \\ & + (b_1+\varphi a, \ldots, b_{n-1}+\varphi a)^{(1)} . \frac{1}{1^{2|1}} . \left(\frac{d}{d\varphi a}\right)^{2} F(a+h) \\ & + \;.\;\;.\;\;.\;\;.\;\;.\;\;.\;\;.\;\;.\;\;.\;\;.\;\;.\;\;.\;\;.\;\;.\;\;.\;\;. \\ & + (b_1+\varphi a, \ldots, b_{n-1}+\varphi a)^{(n-1)} . \frac{1}{1^{n|1}} . \left(\frac{d}{d\varphi a}\right)^{n} F(a+h) \end{aligned} \right)$$

Diese Bildungsweise kann in einen besondern Algorithmus umgestaltet werden. Es sei nämlich

861) $$\frac{1}{1^{m|1}} \cdot \left(\frac{d}{d\varphi a}\right)^m F(a+h) = f(m)$$

und

862) $$\nabla^{n+1} f(m) = \nabla^n f(m-1) + (b_{n+1} + \varphi a) \cdot \nabla^n f(m)$$

Setzen wir nun $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$, so erhalten wir

$$\nabla^1 fm = f(m-1) + (b_1 + \varphi a) \cdot fm$$

$$\nabla^2 fm = \nabla^1 f(m-1) + (b_2 + \varphi a) \cdot \nabla^1 fm$$

$$= f(m-2) + \left|\begin{matrix} b_1 + \varphi a \\ b_2 + \varphi a \end{matrix}\right| \cdot f(m-1) + (b_1 + \varphi a)(b_2 + \varphi a) \cdot fm$$

$$\nabla^3 fm = \nabla^2 f(m-1) + (b_3 + \varphi a) \cdot \nabla^2 fm$$

$$= f(m-3) + \left|\begin{matrix} b_1 + \varphi a \\ b_2 + \varphi a \\ b_3 + \varphi a \end{matrix}\right| \cdot f(m-2) + \left|\begin{matrix} (b_1 + \varphi a)(b_2 + \varphi a) \\ (b_1 + \varphi a)(b_3 + \varphi a) \\ (b_2 + \varphi a)(b_3 + \varphi a) \end{matrix}\right| \cdot f(m-1)$$

$$+ (b_1 + \varphi a)(b_2 + \varphi a)(b_3 + \varphi a) \cdot fm$$

u. s. w., und nehmen wir zugleich $m = 2, 3, 4, \ldots$ an, so erhalten wir dieselben Producte, welche aus 859 für $A_1, A_2, \ldots$ entspringen; es ist also

863) $$A_n = (b_n + \varphi a) \cdot \nabla^{n-1} fn$$

und die vorgegebene Reihe selbst

864) $$F(x+h) = F(a+h) + \frac{(\varphi x - \varphi a)^1}{b_1 + \varphi x} \cdot (b_1 + \varphi a) \cdot \nabla^0 f(1)$$

$$+ \frac{(\varphi x - \varphi a)^2}{(b_1 + \varphi x)(b_2 + \varphi x)} \cdot (b_2 + \varphi a) \cdot \nabla^1 f(2)$$

$$+ \frac{(\varphi x - \varphi a)^3}{(b_1 + \varphi x)(b_2 + \varphi x)(b_3 + \varphi x)} \cdot (b_3 + \varphi a) \cdot \nabla^2 f(3)$$

$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

§. 230.

Wronski hat Seite 496 eine speciellere Reihe, wo $\varphi x = x$, untersucht; er findet für diesen Fall Seite 498 No. 481, aber durch ein von dem unsrigen ganz verschiedenes Verfahren, die Gleichung 859 und Seite 502, 503, 504 die Gleichungen 862 und 863, wenn in ihnen $\varphi x =$ gesetzt wird.

Ist nicht allein $\varphi x = x$, sondern auch $b_1 = b_2 = \ldots\ldots = b$, oder ist

$$F(x+h) = A_0 + A_1 \cdot \left(\frac{x-a}{x+b}\right)^1 + A_2 \cdot \left(\frac{x-a}{x+b}\right)^2 + A_3 \cdot \left(\frac{x-a}{x+b}\right)^3 + \ldots\ldots \tag{865}$$

so finden folgende Bildungsweisen statt:

$$\begin{aligned}(b+a)^n \cdot \frac{d^nF(a+h)}{1^{n|1} \cdot da^n} = & \frac{(n-1)^{0|-1}}{1^{0|1}} \cdot A_n \\ & - \frac{(n-1)^{1|-1}}{1^{1|1}} \cdot A_{n-1} \\ & + \frac{(n-1)^{2|-1}}{1^{2|1}} \cdot A_{n-2} \\ & - \ldots\ldots\ldots \\ & (-)^{n-1} \frac{(n-1)^{n-1|-1}}{1^{n-1|1}} \cdot A_1\end{aligned} \tag{866}$$

und

$$A_n = \frac{1}{1^{n|1}} \cdot \frac{1}{(b+a)^n} \cdot \left((b+a)^2 \cdot \frac{d}{da}\right)^n F(a+h) \tag{867}$$

oder

$$\begin{aligned}A_n = & \frac{(n-1)^{0|-1}}{1^{0|1}} \cdot (b+a)^n \cdot \frac{d^nF(a+h)}{1^{n|1} \cdot da^n} \\ & + \frac{(n-1)^{1|-1}}{1^{1|1}} \cdot (b+a)^{n-1} \cdot \frac{d^{n-1}F(a+h)}{1^{n-1|1} \cdot da^{n-1}} \\ & + \frac{(n-1)^{2|-1}}{1^{2|1}} \cdot (b+a)^{n-2} \cdot \frac{d^{n-2}F(a+h)}{1^{n-2|1} \cdot da^{n-2}} \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + \frac{(n-1)^{n-1|1}}{1^{n-1|1}} \cdot (b+a)^1 \cdot \frac{d^1F(a+h)}{1^{1|1} \cdot da^1}\end{aligned} \tag{868}$$

Die letztere Bildungsweise 868 findet auch Wronski Seite 466

§. 231.

Ist die Hauptfunction $\varphi x = x$ und sind die begleitenden Functionen

$$f^{(0)}x = 1\,,\; f^{(1)}x = (fx)^{m},\; f^{(2)}x = (fx)^{2m},\ldots,\; f^{(p)}x = (fx)^{pm},$$

oder ist die Reihe für $F(x+h)$

$$869)\qquad \begin{aligned} F(x+h) = A_0 &+ A_1\,.\,(x-a)^1.\,(fx)^{m} \\ &+ A_2\,.\,(x-a)^2.\,(fx)^{2m} \\ &+ A_3\,.\,(x-a)^3.\,(fx)^{3m} \\ &+ \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;. \end{aligned}$$

so findet nach 847 folgende zurücklaufende Bildungsweise statt:

$$870)\qquad \begin{aligned} F(a+h) &= A_0 \\ \frac{d^1F(a+h)}{1^{1|1}.\,da^1} &= A_1.(fa)^{m} \\ \frac{d^2F(a+h)}{1^{2|1}.\,da^2} &= A_1\,.\,\frac{d^1(fa)^{m}}{1^{1|1}.\,da^1} + A_2\,.\,(fa)^{2m} \\ \frac{d^3F(a+h)}{1^{3|1}.\,da^3} &= A_1\,.\,\frac{d^2(fa)^{m}}{1^{2|1}.\,da^2} + A_2\,.\,\frac{d^1(fa)^{2m}}{1^{1|1}.\,da^1} + A_3\,.\,(fa)^{3m} \end{aligned}$$

. . . .

$$\frac{d^nF(a+h)}{1^{n|1}.\,da^n} = A_1\,.\,\frac{d^{n-1}(fa)^{m}}{1^{n-1|1}.\,da^{n-1}} + \;.\;.\;.\;.\;.\;. + A_{n-1}\,.\,\frac{d^1(fa)^{(n-1)m}}{1^{1|1}.\,da^1} + A_n\,.\,(fa)^{n.m}$$

Aus dieser erhält man, wenn man diese Gleichungen von der zweiten an nach ihrer Folge mit

$$\frac{d^{n-1}(fa)^{-n.m}}{1^{n-1|1}.\,da^{n-1}}\;,\;\frac{d^{n-2}(fa)^{-n.m}}{1^{n-2|1}.\,da^{n-2}},\ldots\ldots,\frac{d^{0}(fa)^{-n.m}}{1^{0|1}.\,da^{0}}$$

vervielfacht, die unabhängige Bildungsweise

$$871)\qquad A_n = \frac{1}{1^{n|1}}\,.\,\frac{d^{n-1}}{da^{n-1}}\left((fa)^{-n.m}\,.\,\frac{dF(a+h)}{da}\right)$$

Die Reihe selbst ist nach diesem

872) $$F(x+h) = F(a+h)$$
$$+ \frac{(x-a)^1 . (fx)^{1.m}}{1^{1|1}} . \frac{d^0}{da^0}\left((fa)^{-1.m} . \frac{dF(a+h)}{da}\right)$$
$$+ \frac{(x-a)^2 . (fx)^{2.m}}{1^{2|1}} . \frac{d^1}{da^1}\left((fa)^{-2.m} . \frac{dF(a+h)}{da}\right)$$
$$+ \frac{(x-a)^3 . (fx)^{3.m}}{1^{3|1}} . \frac{d^2}{da^2}\left((fa)^{-3.m} . \frac{dF(a+h)}{da}\right)$$
$$+ \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot$$

oder ist $fx = \frac{1}{fx}$, so ist

873) $$F(x+h) = F(a+h)$$
$$+ \frac{1}{1^{1|1}} . \left(\frac{x-a}{(fx)^m}\right)^1 . \frac{d^0}{da^0}\left((fa)^{1.m} . \frac{dF(a+h)}{da}\right)$$
$$+ \frac{1}{1^{2|1}} . \left(\frac{x-a}{(fx)^m}\right)^2 . \frac{d^1}{da^1}\left((fa)^{2.m} . \frac{dF(a+h)}{da}\right)$$
$$+ \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot$$

§. 232.

In dem besonderen Falle, wenn

$$Fx = (fx)^n . \psi x$$

ist für $h = 0$ und $a = 0$

874) $$(fx)^n . \psi x = ((fx)^n . \psi x)_{x=0}$$
$$+ \frac{1}{1^{1|1}} . \left(\frac{x}{(fx)^m}\right)^1 . \frac{d^0}{dx^0}\left((fx)^{1.m} . \frac{d}{dx}\left((fx)^n . \psi x\right)\right)_{x=0}$$
$$+ \frac{1}{1^{2|1}} . \left(\frac{x}{(fx)^m}\right)^2 . \frac{d^1}{dx^1}\left((fx)^{2.m} . \frac{d}{dx}\left((fx)^n . \psi x\right)\right)_{x=0}$$
$$+ \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot$$

Ist

$$fx = a + a_1 . x^1 + a_2 . x^2 + \ldots\ldots$$

und

$$\psi x = b_0 + b_1 . x^1 + b_2 . x^2 + \ldots\ldots$$

so finden wir vermittelst der Gleichung 48 Seite 66 unserer Analysis folgende Entwickelung:

875) $$(a + a_1 . x^1 + a_2 . x^2 + \ldots.)^n . (b_0 + b_1 . x^1 + b_2 . x^2 + \ldots.) =$$

$$= \frac{(P . Q^n) f1}{n} . \left(\frac{x}{Q^m}\right)^0$$

$$+ \frac{(P . Q^{n+1.m}) f2}{n + 1 . m} . \left(\frac{x}{Q^m}\right)^1$$

$$+ \frac{(P . Q^{n+2.m}) f3}{n + 2 . m} . \left(\frac{x}{Q^m}\right)^2$$

$$+ \ldots\ldots\ldots$$

wo $P = n . b_0 + (n + 1 . m) . b_1 . x^1 + (n + 2 . m) . b_2 . x^2 + \ldots\ldots$

und

$$Q = a_0 + a_1 . x^1 + a_2 . x^2 + \ldots\ldots$$

Wir überlassen dem Leser die Herleitung dieser Reihe.

Ist

$$P = 1 \text{ und } Q = a + bx$$

so ergibt sich aus beiden die Entwickelung des Binomiums, dessen wir Seite 31 erwähnten.

c) Wenn die Hauptfunctionen verschieden sind.

§. 233.

Es sei

876)
$$\begin{aligned} F(x+h) = {} & A_0 . f^{(0)}x \\ & + A_1 . f^{(1)}x . (\varphi_1^{(1)}x - \varphi_1^{(1)}a) \\ & + A_2 . f^{(2)}x . (\varphi_1^{(2)}x - \varphi_1^{(2)}a)(\varphi_2^{(2)}x - \varphi_2^{(2)}a) \\ & + A_3 . f^{(3)}x . (\varphi_1^{(3)}x - \varphi_1^{(3)}a)(\varphi_2^{(3)}x - \varphi_2^{(3)}a)(\varphi_3^{(3)}x - \varphi_3^{(3)}a) \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ = {} & A_0 . \psi_0 x + A_1 . \psi_1 x + A_2 . \psi_2 x + \ldots\ldots \end{aligned}$$

Da für $x = a$ und für $q < n$ auch immer

$$\frac{d^q \psi_n x}{dx^q} = 0$$

so führt ein mehrmaliges Differentiiren dieser Reihe zu der zurücklaufenden Bildungsweise der Vorzahlen

877)
$$\frac{d^n F(a+h)}{da^n} = A_0 . \frac{d^n \psi_0 a}{da^n} + A_1 . \frac{d^n \psi_1 a}{da^n} + \ldots . + A_n . \frac{d^n \psi_n a}{da^n}$$

welche auch Bürmann Seite 37, §. 7 findet.

Diese zurücklaufende Bildungsweise findet ohne weitere Abänderung auch statt bei der Reihe

878)
$$\begin{aligned} F(x+h) = {} & A_0 . f^{(0)}x \\ & + A_1 . f^{(1)}x . (\varphi^{(1)}x - \varphi^{(1)}a) \\ & + A_2 . f^{(2)}x . (\varphi^{(1)}x - \varphi^{(1)}a)(\varphi^{(2)}x - \varphi^{(2)}a) \\ & + A_3 . f^{(3)}x . (\varphi^{(1)}x - \varphi^{(1)}a)(\varphi^{(2)}x - \varphi^{(2)}a)(\varphi^{(3)}x - \varphi^{(3)}a) \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

VI. Entwickelung einer Function nach den Potenzen einer anderen Function, wenn die Elemente beider Functionen durch eine Gleichung gegeben sind.

A. Untersuchung über Gleichungen.

§. 234.

Wir fangen diese Untersuchung mit einer Aufgabe aus der Theorie der Gleichungen an, welche wir, weil sie nirgends so vollständig gelöst ist, als unser Zweck es verlangt, als Vorbereitung zum Folgenden hier aufnehmen müssen.

Die Aufgabe ist folgende: Es sei

879) $$0 = A_0 + A_1 . x^1 + A_2 . x^2 + \ldots\ldots + A_n . x^n .$$

Man entwickele x^{n+m} nach den Potenzen von $x^0, x^1, x^2, \ldots, x^{n-1}$ oder man bilde die Vorzahlen der Gleichung

880) $$x^{n+m} = E_0 + E_1 . x^1 + E_2 . x^2 + \ldots + E_{n-1} . x^{n-1}$$

Wir nehmen eine Gleichung vom *m* ten Grade an

881) $$0 = B_0 + B_1 . x^1 + B_2 . x^2 + \ldots + B_m . x^m$$

vervielfachen diese mit der vorgebenen 879

$$\begin{array}{llllll} 0 = A_0 B_0 & + A_0 B_1 . x^1 & + A_0 B_2 . x^2 & + \ldots\ldots + & A_{n-1} B_m . x^{n+m-1} & + A_n B_m . x^{n+m} \\ & A_1 B_0 & A_1 B_1 & & A_n \; B_{m-1} & \\ & & A_2 B_0 & & & \end{array}$$

Dieses Product wird mit

$$0 = E_0 + E_1 . x^1 + E_2 . x^2 + \ldots + E_{n-1} . x^{n-1} - x^{n+m}$$

identisch sein, wenn

882) $$\begin{aligned} -1 &= A_n \; B_m \\ 0 &= A_{n-1} B_m + A_n \; B_{m-1} \\ 0 &= A_{n-2} B_m + A_{n-1} B_{m-1} + A_n B_{m-2} \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

und wenn

883) $$\begin{aligned} E_0 &= A_0 B_0 \\ E_1 &= A_0 B_1 + A_1 B_0 \\ E_2 &= A_0 B_2 + A_1 B_1 + A_2 B_0 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ E_{n-1} &= A_0 B_{n-1} + A_1 B_{n-2} + A_2 B_{n-3} + \ldots . + A_{n-1} B_0 \end{aligned}$$

Die Gleichungen 882 geben die zurücklaufende Bildungsweise der Grössen B_m, B_{m-1}, ... an; die unabhängige ist

$$\begin{aligned} B_m &= -\frac{1}{A_n} \\ B_{m-1} &= +\frac{A_{n-1}}{A_n^2} \\ B_{m-2} &= +\frac{A_{n-2}}{A_n^2} - \frac{A_{n-1} A_{n-1}}{A_n^3} \\ B_{m-3} &= +\frac{A_{n-3}}{A_n^2} - \frac{A_{n-1} A_{n-2} + A_{n-2} A_{n-1}}{A_n^3} + \frac{A_{n-1} A_{n-1} A_{n-1}}{A_n^4} \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

und allgemein

$$884) \qquad \begin{aligned} B_p = & - A_n^{-1} \,.\, C(0\,.\,n-m+p,0) \\ & + A_n^{-2} \,.\, C(1\,.\,n-m+p,1) \\ & - A_n^{-3} \,.\, C(2\,.\,n-m+p,2) \\ & + \;.\;.\;.\; - \;.\;.\;. \\ & (-)^{m-p+1} A_n^{-m+p-1} . C\big((m-p)(n-1), m-p\big) \\ & \qquad \big(A_{n-1}, A_{n-2}, \ldots\ldots, A_{n-m+p}\big) \end{aligned}$$

Nach 882 und 884 werden die Grössen B_0, B_1.... aus den Vorzahlen A_0, A_1,.... der vorgegebenen Gleichung 879, und aus diesen Grössen die Vorzahlen E_0, E_1,...... nach der Vorschrift 883 gebildet. Die Gleichungen 882, 883, 884 lösen also die vorgelegte Aufgabe.

Werden die Grössen B_0, B_1,...., deren Bildungsweise 884 angibt, in 883 eingeführt, so entsteht diejenige Gleichung, welche Hauber in den Comb. Samml. 2 Bd. Seite 235 zuerst auf einem Wege gefunden hat, der sehr verschieden von demjenigen ist, den wir hier eingeschlagen haben.

§. 235.

Nachdem wir das über diesen Gegenstand Bekannte vorangeschickt, gehen wir zu demjenigen über, was wir selbst gefunden haben.

Für unseren Zweck ist es nützlich, die vielen Producte, aus welchen die Vorzahlen E_0, E_1, E_2,..... zusammengesetzt werden, nach den Potenzen des A_0 zu ordnen. In dieser Hinsicht bemerken wir, dass in B_p nur dann A_0 vorkommen kann, wenn $p = m-n$ oder wenn $p < m-n$. Findet diese Bedingung statt, so ist

$$
\begin{aligned}
C(qn-m+p,q) \quad = \quad & \frac{q^{0|-1}}{1^{0|1}} . A_0^{q} \; . C(q.n-m+p,0) \\
(A_0, A_1, \ldots, A_{n-1}) \quad & + \frac{q^{1|-1}}{1^{1|1}} . A_0^{q-1} . C(q.n-m+p,1) \\
& + \frac{q^{2|-1}}{1^{2|1}} . A_0^{q-2} . C(q.n-m+p,2) \\
& + \ldots\ldots\ldots\ldots \\
& + \frac{q^{qn-m+p|-1}}{1^{qn-m+p|1}} . A_0^{q-qn+m-p} . C(q.n-m+p,q.n-m+p) \\
& \qquad\qquad (A_1, A_2, \ldots, A_{n-1})
\end{aligned}
$$

Hiedurch erhalten wir folgende Bildungsweise der Hülfsgrössen $B_0, B_1, \ldots\ldots$

$$885)\quad B_p = (p)_0 . A_0^0 + (p)_1 . A_0^1 + (p)_2 . A_0^2 + \ldots + (p)_{m-p} . A_0^{m-p}$$

wo

$$
\begin{aligned}
886)\ (p)_s \quad = \quad & (-)^{s+1} \frac{s^{0|-1}}{1^{0|1}} \; . \; A_n^{-s-1} . C(sn-m+p,0) \\
& + (-)^{s+2} \frac{(s+1)^{1|-1}}{1^{1|1}} . A_n^{-s-2} . C\big((s+1)n-m+p,1\big) \\
& + (-)^{s+3} \frac{(s+2)^{2|-1}}{1^{2|1}} . A_n^{-s-3} . C\big((s+2)n-m+p,2\big) \\
& + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
& + (-)^{s+k+1} \frac{(s+k)^{k|-1}}{1^{k|1}} . A_n^{-s-k-1} . C\big((s+k)n-m+p,k\big) \\
& + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
& + (-)^{m-p+1} \frac{(m-p)^{m-p-s|-1}}{1^{m-p-s|1}} . A_n^{-m+p-1} . C\big((m-p)n-m+p,m-p-s\big) \\
& \qquad\qquad (A_1, A_2, \ldots, A_{n-1})
\end{aligned}
$$

Die Bildungsweise der Vorzahlen der Gleichung 880, welche wir suchen, ist also folgende:

887) $$E_q = M_0^{(q)} . A_0^0 + M_1^{(q)} . A_0^1 + M_2^{(q)} . A_0^2 + \ldots . + M_m^{(q)} . A_0^m$$

wo

888) $$M_k^{(q)} = (q)_{k-1} + (q-1)_k . A_1 + (q-2)_k . A_2 + (q-3)_k . A_3 + \ldots + (0)_k . A_q$$

§. 236.

Alle diese Gleichungen 882, 884, 885 geben die Bildung der Hülfsgrössen B_0, B_1, ... aus den Vorzahlen A_0, A_1, ... der gegebenen Gleichung 879, die, wie bekannt, aus den Wurzeln dieser Gleichung zusammengesetzt werden. Es müssen also auch die Hülfsgrössen B, mithin auch die Vorzahlen E_0, E_1 .... der Gleichung, die wir suchen, aus den Wurzeln der vorgegebenen Gleichung gebildet werden können. Um dieses Verfahren kennen zu lernen, nehmen wir an, dass die vorgegebene Gleichung aus folgenden Wurzeln zusammengesetzt sei:

889) $$\begin{aligned} 0 &= A_0 + A_1 . x^1 + A_2 . x^2 + \ldots . + A_{n-1} . x^{n-1} + x^n \\ &= (x-a_1)(x-a_2)(x-a_3) \ldots . (x-a_n) \end{aligned}$$

wo die Vorzahl von x^n nämlich $A_n = 1$ gesetzt ist, welches die Allgemeinheit der Untersuchung nicht stört, weil jeder Gleichung diese Form gegeben werden kann.

Es ist nach unserer Analysis Seite 254 N. 412

$$\begin{aligned} 0 = \ & A_{n-p} \\ & + A_{n-p+1} . [a_1, a_2, \ldots, a_n]^{(1)} \\ & + A_{n-p+2} . [a_1, a_2, \ldots, a_n]^{(2)} \\ & + \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \\ & + A_{n-1} \ . [a_1, a_2, \ldots, a_n]^{(p-1)} \\ & + \qquad [a_1, a_2, \ldots, a_n]^{(p)} \end{aligned}$$

Verbinden wir diese Gleichung mit jenen in 882, und setzen $p = 1, 2, \ldots,$ so erhalten wir eine neue und merkwürdige Bildungsweise der Hülfsgrössen, welche von den vorigen sehr verschieden ist:

890)
$$\begin{aligned}
B_m &= - 1 \\
B_{m-1} &= - [a_1, a_2, \ldots, a_n]^{(1)} \\
B_{m-2} &= - [a_1, a_2, \ldots, a_n]^{(2)} \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots \\
B_{m-s} &= - [a_1, a_2, \ldots, a_n]^{(s)} \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots \\
B_0 &= - [a_1, a_2, \ldots, a_n]^{(m)}
\end{aligned}$$

Für unsere Aufgabe: aus der Gleichung

$$o = A_0 + A_1 x^1 + \ldots + A_{n-1} x^{n-1} + x^n$$

den Werth von x^{n+m} durch $x^0, x^1, x^2, \ldots, x^{n-1}$ darzustellen, haben wir also mehrere Wege aufgefunden, die zum Ziele führen; man kann nämlich die Hülfsgrössen $B_0, B_1, \ldots, B_m$ entweder nach der Vorschrift 882, oder nach 884 oder 885 oder 890, und zuletzt die Vorzahlen $E_0, E_1, \ldots, E_{n-1}$ entweder nach der Vorschrift 883 oder nach 887 bilden.

§. 237.

Diese Untersuchung gibt uns Gelegenheit zu einer neuen, für die Theorie der Gleichungen sehr wichtigen Wahrheit, die wir noch nirgends gefunden haben, nämlich:

891) Jede Gleichung, in welcher nach der höchsten Potenz von x mehrere Glieder fehlen, ist aus zweien Gleichungen zusammengesetzt, muss sich also auch wieder in diese zerlegen lassen, deren Vorzahlen so beschaffen sind, dass die

Vorzahlen der einen Gleichung die geordneten Verbindungen mit Wiederholungen aus den Wurzeln der anderen Gleichung sind. Oder die Gleichung

$$x^{n+m} + E_{n-1}x^{n-1} + E_{n-2}x^{n-2} + \ldots. + E_1x^1 + E_0 = 0$$

ist entstanden durch das Vervielfachen der Gleichungen

$$x^n + A_{n-1} . x^{n-1} + A_{n-2} . x^{n-2} + \ldots. + A_1 . x^1 + A_0 = 0 \qquad \alpha$$

und

$$x^m + B_{m-1} . x^{m-1} + B_{m-2} . x^{m-2} + \ldots. + B_1 . x^1 + B_0 = 0 \qquad \beta$$

wo B_0, B_1, $B_2, \ldots.$, B_{m-1} die geordneten Verbindungen mit Wiederholungen aus den Wurzeln der Gleichung α sind, so dass, wenn a_1, $a_2, \ldots, a_n$ die Wurzeln der Gleichung α sind, oder wenn

$$(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)\ldots.(x-a_n) = 0$$

ist, die Vorzahlen der Gleichung β sind

$$B_{m-1} = + [a_1, a_2, \ldots., a_n]^{(1)}$$

$$B_{m-2} = + [a_1, a_2, \ldots., a_n]^{(2)}$$

. . . .

$$B_{m-s} = + [a_1, a_2, \ldots., a_n]^{(s)}$$

Zum Beispiele die Gleichung

$$x^6 - 63\, x^1 + 62 = 0$$

lässt sich in zwei Gleichungen

$$x^2 - 3.x + 2 = 0$$

$$x^4 + 3.x^3 + 7.x^2 + 15.x^1 + 31 = 0$$

zerlegen; die Wurzeln der ersten sind 1 und 2, und die Vorzahlen der anderen sind die geordneten Verbindungen mit Wiederholungen dieser beiden Wurzeln, nämlich

$$\begin{array}{llll} 3 = 1 & 7 = 1.1 & 15 = 1.1.1 & 31 = 1.1.1.1 \\ \quad + 2 & \quad + 1.2 & \quad + 1.1.2 & \quad + 1.1.1.2 \\ & \quad + 2.2 & \quad + 1.2.2 & \quad + 1.1.2.2 \\ & & \quad + 2.2.2 & \quad + 1.2.2.2 \\ & & & \quad + 2.2.2.2 \end{array}$$

§. 238.

Wir wollen diese Untersuchung mit einem einzelnen Falle beschliessen, und $n = 2$ annehmen; oder es sei

892) $$x^2 + A_1.x + A_0 = 0$$

Man sucht

$$x^{m+2} - E_1.x^1 - E_0 = 0 \quad \text{oder} \quad x^{m+2} = E_0 + E_1.x^1$$

Die Auflösung dieses speciellen Falles ergibt sich aus 887, und ist

893) $$E_0 = (-)^{m-1}\left(A_1^m A_0^1 - \frac{(m-1)^{1|-1}}{1^{1|1}} A_1^{m-2} A_0^2 + \frac{(m-2)^{2|-1}}{1^{2|1}} A_1^{m-4} A_0^3 - \ldots + \ldots\right)$$

$$E_1 = (-)^{m-1}\left(A_1^{m+1} - \frac{m^{1|-1}}{1^{1|1}} A_1^{m-1} A_0^1 + \frac{(m-1)^{2|-1}}{1^{2|1}} A_1^{m-3} A_0^2 - \frac{(m-2)^{3|-1}}{1^{3|1}} A_1^{m-5} A_0^3 + \ldots\right)$$

Kramp hat in seiner allgemeinen Arithmetik vom Jahr 1808 diesen speciellen Fall behandelt, und Seite 401 N. 626 dieselbe Bildungsweise, welche hier 893 angibt, auf anderen Wegen gefunden.

Setzen wir noch $A_0 = 1$ und $A_1 = -2.\cos{:}a$, oder nehmen wir an, dass

894) $$x^2 - 2.\cos{:}a.x + 1 = 0$$

so finden wir nach 893, dass

895) $$x^{m+2} = x.\frac{\sin(m+2)a}{\sin a} - \frac{\sin(m+1)a}{\sin a}$$

Diese specielle Wahrheit fand Euler im Jahr 1779, sie wurde aber in den Schriften der petersburger Societät erst im Jahr 1809 Seite 23 bekannt gemacht.

B. *Entwickelung von* x^h *nach den Potenzen von* z *und* x, *wenn* $z = A_0 + A_1.x^1 + A_2.x^2 + \ldots + A_n.x^n$

§. 239.

Diese Aufgabe können wir, nachdem alle Vorbereitungen vollendet sind, jetzt mit Leichtigkeit lösen. Wir setzen in der Gleichung 887

$$A_0 - z \quad \text{statt} \quad A_0$$

und für $(A_0 - z)^b$ die Producte

$$A_0^b - \frac{b^{1|-1}}{1^{1|1}} . A_0^{b-1} . z^1 + \frac{b^{2|-1}}{1^{2|1}} . A_0^{b-2} . z^2 - \ldots (-)^b \frac{b^{b|-1}}{1^{b|1}} . A_0^0 . z^b$$

Wir erhalten folgende Reihe:

896) $$E_q = N_0^{(q)} - N_1^{(q)}.z^1 + N_2^{(q)}.z^2 - \ldots + \ldots (-)^m N_m^{(q)}.z^m$$

wo

897) $$N_s^{(q)} = \frac{s^{s|-1}}{1^{s|1}} A_0^0 M_s^{(q)} + \frac{(s+1)^{s|-1}}{1^{s|1}} A_0^1 M_{s+1}^{(q)} + \frac{(s+2)^{s|-1}}{1^{s|1}} A_0^2 M_{s+2}^{(q)} + \ldots + \frac{m^{s|-1}}{1^{s|1}} A_0^{m-s} M_m^{(q)}$$

und folglich aus 880 die verlangte Entwickelung

898) $$\begin{aligned} x^{a+m} = \quad & N_0^{(0)} - N_1^{(0)}.z^1 + N_2^{(0)}.z^2 - \ldots.\ (-)^m N_m^{(0)}.z^m \\ & + x^1.\left(N_0^{(1)} - N_1^{(1)}.z^1 + N_2^{(1)}.z^2 - \ldots.\ (-)^m N_m^{(1)}.z^m\right) \\ & + x^2.\left(N_0^{(2)} - N_1^{(2)}.z^1 + N_2^{(2)}.z^2 - \ldots.\ (-)^m N_m^{(2)}.z^m\right) \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + x^{n-1}.\left(N_0^{(n-1)} - N_1^{(n-1)}.z^1 + N_2^{(n-1)}.z^2 - \ldots.(-)^m N_m^{(n-1)}.z^m\right) \end{aligned}$$

Laplace hat zuerst diese Aufgabe in seiner Théorie analytique des probabilités. 1812 von Seite 19—25 behandelt. Unsere Auflösung, die wir hier gegeben haben, hat nichts gemein mit jener des Laplace; auch das Resultat ist verschieden; denn nach Laplace muss man die Wurzeln der Gleichung vom *n* ten Grade kennen, welches aber unser Resultat nicht voraussetzt, worin alle Geschäfte vermittelst der gegebenen Vorzahlen A_0, A_1, A_2, ..., A_n bewerkstelligt werden; auch ist hier nicht nöthig, zu untersuchen, ob gleiche oder ungleiche Wurzeln vorkommen.

§. 240.

Von dieser Entwickelung können wir gleich zu einer anderen übergehen, wo die Producte nach den Potenzen von $(x-1)$ und von z geordnet sind. Setzen wir nämlich

$$x^q = (1 + x-1)^q = 1 + \frac{q^{1|-1}}{1^{1|1}} . (x-1)^1 + \frac{q^{2|-1}}{1^{2|1}} . (x-1)^2 + \ldots .$$

und zur Abkürzung

$$899) \qquad \frac{q^{p|-1}}{1^{p|1}} . N_s^{(q)} = (q, s)_p$$

so erhalten wir folgende Reihe:

900) $$x^{n+m} = (x-1)^0 . \left| \begin{array}{l} + z^0 . \Big((0,0)_0 + (1,0)_0 + (2,0)_0 + \ldots + (n-1,0)_0\Big) \\ - z^1 . \Big((0,1)_0 + (1,1)_0 + (2,1)_0 + \ldots + (n-1,1)_0\Big) \\ + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ (-)^m z^m . \Big((0,m)_0 + (1,m)_0 + (2,m)_0 + \ldots + (n-1,m)_0\Big) \end{array} \right.$$

$$+ (x-1)^1 . \left| \begin{array}{l} + z^0 . \Big((1,0)_1 + (2,0)_1 + (3,0)_1 + \ldots + (n-1,0)_1\Big) \\ - z^1 . \Big((1,1)_1 + (2,1)_1 + (3,1)_1 + \ldots + (n-1,1)_1\Big) \\ + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ (-)^m z^m . \Big((1,m)_1 + (2,m)_1 + (3,m)_1 + \ldots + (n-1,m)_1\Big) \end{array} \right.$$

$$+ (x-1)^2 . \left| \begin{array}{l} + z^0 . \Big((2,0)_2 + (3,0)_2 + (4,0)_2 + \ldots + (n-1,0)_2\Big) \\ - z^1 . \Big((2,1)_2 + (3,1)_2 + (4,1)_2 + \ldots + (n-1,1)_2\Big) \\ + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ (-)^m z^m . \Big((2,m)_2 + (3,m)_2 + (4,m)_2 + \ldots + (n-1,m)_2\Big) \end{array} \right.$$

$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Diese Herleitung ist verschieden von jener, welche Laplace Seite 33 gibt.

§. 241.

Wir gehen zu einer dritten Entwickelung über, setzen in 898

$$x^h = e^{h.\lg:x} = 1 + \frac{h^1.(\lg:x)^1}{1^{1|1}} + \frac{h^2.(\lg:x)^2}{1^{2|1}} + \ldots.$$

und erhalten folgende Reihe:

901) $$\begin{array}{rl} x^{n+m} = & [0,0].(\lg:x)^0.z^0 + [0,1].(\lg:x)^0.z^1 + [0,2].(\lg:x)^0.z^2 + \ldots. \\ & + [1,0].(\lg:x)^1.z^0 + [1,1].(\lg:x)^1.z^1 + [1,2].(\lg:x)^1.z^2 + \ldots. \\ & + [2,0].(\lg:x)^2.z^0 + [2,1].(\lg:x)^2.z^1 + [2,2].(\lg:x)^2.z^2 + \ldots. \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}$$

Eine ähnliche Reihe findet Laplace Seite 35.

C. *Entwickelung von* $F(x+h)$ *nach den Potenzen von* φz, *wenn* $z = A_0 + A_1 x^1 + A_2 x^2 + \ldots. + A_{n-1} x^{n-1} + x^n$

§. 242.

Um dieser Entwickelung die grösste Allgemeinheit zu geben, nehmen wir die Functionen

$$f^{(1)}x\ ,\ f^{(2)}x\ ,\ f^{(3)}x, \ldots., f^{(n)}x$$

an, die nach Willkühr gewählt werden können, und zwar eben so viele als die gegebene Gleichung

$$o = -z + A_0 + A_1 . x^1 + A_2 . x^2 + \ldots + A_{n-1} . x^{n-1} + x^n$$
$$= (x-x_1)(x-x_2)(x-x_3) \ldots.. (x-x_n)$$

Wurzeln hat. Wir zerlegen $F(x+h)$ in diese Functionen, so dass

902) $$F(x+h) = X_1 . f^{(1)}x + X_2 . f^{(2)}x + X_3 . f^{(3)}x + \ldots + X_n . f^{(n)}x$$

Die Vorzahlen dieser angenommenen Gleichung werden durch Einführung der obigen Wurzeln gewonnen, wodurch n Gleichungen entstehen,

$$F(x_1+h) = X_1 . f^{(1)}x_1 + X_2 . f^{(2)}x_1 + \ldots + X_n . f^{(n)}x_1$$
$$F(x_2+h) = X_1 . f^{(1)}x_2 + X_2 . f^{(2)}x_2 + \ldots + X_n . f^{(n)}x_2$$
$$. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$
$$F(x_n+h) = X_1 . f^{(1)}x_n + X_2 . f^{(2)}x_n + \ldots + X_n . f^{(n)}x_n$$

aus welchen X_1, X_2, ..., X_n eliminirt werden.

Diese Vorzahlen sind Functionen von $x_1, x_2, \ldots, x_n$

903)
$$\begin{aligned} X_1 &= \psi_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ X_2 &= \psi_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ X_n &= \psi_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) \end{aligned}$$

können also in Reihen entwickelt werden nach den Potenzen von φz, so dass

$$X_q = X_q^{(0)} + X_q^{(1)} \cdot (\varphi z)^1 + X_q^{(2)} (\varphi z)^2 + \ldots.$$

wo

904)
$$X_q^{(s)} = \frac{1}{1^{s|1}} \cdot \left(\frac{d}{d\varphi z_1}\right)^s \psi_q(x_1, \ldots, x_n)$$

und z_1 der Werth von z ist, welcher bewirkt, dass $\varphi z_1 = 0$.

Bei diesem Differentiiren kommen die Differentiale von $x_1, x_2, \ldots, x_n$ in Hinsicht z vor; man erhält sie aus der vorgegebenen Gleichung, nämlich

$$1 = \left(1 . A_1 + 2 . A_2 x^1 + 3 . A_3 x^2 + \ldots + n . x^{n-1}\right) \cdot \frac{dx}{dz}$$

folglich, wenn zur Abkürzung

$$1 A_1 + 2 A_2 . x^1 + \ldots. + n . x^{n-1} = \pi x$$

gesetzt wird,

$$\frac{dx}{dz} = \frac{1}{\pi x}$$

mithin

$$\frac{d^2x}{dz^2} = \frac{d}{dz}\left(\frac{1}{\pi x}\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\pi x}\right) \frac{dx}{dz} = \left(\frac{1}{\pi x} \cdot \frac{d}{dx}\right)^1 \frac{1}{\pi x}$$

$$\frac{d^3 x}{dz^3} = \left(\frac{1}{\pi x} \cdot \frac{d}{dx}\right)^2 \frac{1}{\pi x}$$

und allgemein

$$\frac{d^m x}{dz^m} = \left(\frac{1}{\pi x} \cdot \frac{d}{dx}\right)^{m-1} \frac{1}{\pi x}$$

Wird nun $x = x_p$ gesetzt, so wird

$$905) \quad \frac{d^m x_p}{dz^m} = \left(\frac{1}{\pi x_p} \cdot \frac{d}{dx_p}\right)^{m-1} \frac{1}{\pi x_p} \qquad \text{für } z = z_1$$

Die Reihe, welche hiedurch entsteht, ist

$$\begin{aligned} 906) \quad F(x+h) = {} & \left(X_1^{(0)} . f^{(1)}x + X_2^{(0)} . f^{(2)}x + \ldots . + X_n^{(0)} . f^{(n)}x\right) . (\varphi z)^0 \\ & + \left(X_1^{(1)} . f^{(1)}x + X_2^{(1)} . f^{(2)}x + \ldots . + X_n^{(1)} . f^{(n)}x\right) . (\varphi z)^1 \\ & + \left(X_1^{(2)} . f^{(1)}x + X_2^{(2)} . f^{(2)}x + \ldots . + X_n^{(2)} . f^{(n)}x\right) . (\varphi z)^2 \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Diese Auflösung gibt zuerst Wronski Seite 58.

THEORIE

DER

WIEDERHOLENDEN

FUNCTIONEN.

THEORIE
DER
WIEDERHOLENDEN
FUNCTIONEN.

Erste Abtheilung.

I. Unterschiede und Differentiale.

§. 243.

Die Unterschiede befolgen das Gesetz des Vervielfachens; bezeichnen wir das Zunehmen der Grundgrösse x um h durch

$$f(x + n h) = \square_x^n fx$$

so ist nach den früheren Untersuchungen

907) $$\Delta^{\pm n} fx = (\square - 1)^{\pm n} fx$$

$$\square^{\pm n} fx = (1 + \Delta)^{\pm n} fx$$

und bei Functionen von zweien veränderlichen Grössen

908) $$\Delta^n f(x, y) = (\square_x \square_y - 1)^n f(x, y)$$

$$\Delta^n f(x, y) = (\Delta_x + \Delta_y \square_x)^n f(x,y)$$

und

909) $$\square^n f(x, y) = (1 + \Delta_x \Delta_y)^n f(x, y)$$

$$\square^n f(x, y) = (\square_x \Delta_y - \square_y)^n f(x, y)$$

Die vierte Gleichung folgt aus der dritten, wenn $1 + \Delta_x$ statt $\square_x$ und $1 + \Delta_y$ statt $\square_y$ gesetzt wird, und so auch die sechste aus der 5ten Gleichung.

§. 244.

Die Differentiale befolgen auch das Gesetz des Vervielfachens, und es ist

910) $$d^n f(x, y) = (d_x + d_y)^n f(x, y)$$

oder bei mehreren Grundgrössen

911) $$d^n f(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_m) = (d_1 + d_2 + d_3 + \ldots + d_m)^n f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$$

Wenn die Grundgrösse um h wächst, so kann die Entwickelung der Function durch folgende Zeichen angegeben werden:

912) $$f(x + h) = \left(e^{h \cdot d}\right) fx$$

und bei mehreren Grundgrössen

913) $$f(x_1 + h_1, x_2 + h_2, \ldots, x_m + h_m) = \left(\frac{1}{1^{0|1}} \left(h_1 \cdot d_1 + h_2 \cdot d_2 + \ldots + h_m \cdot d_m\right)^0 + \frac{1}{1^{1|1}} \left(h_1 \cdot d_1 + h_2 \cdot d_2 + \ldots + h_m \cdot d_m\right)^1 + \frac{1}{1^{2|1}} \left(h_1 \cdot d_1 + h_2 \cdot d_2 + \ldots + h_m \cdot d_m\right)^2 + \ldots\ldots \right) f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$$

oder

$$= \left(e^{h_1 \cdot d_1 + \ldots + h_m \cdot d_m}\right) f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$$

§. 245.

Nach diesem kann der Unterschied auf folgende Weise durch Differentiale dargestellt werden

914) $$\Delta fx = \left(e^{h.d} - 1\right) fx$$

und

915) $$\Delta f(x_1, x_2, \ldots, x_m) = \left(e^{h_1.d_1 + h_2.d_2 + \ldots + h_m.d_m} - 1\right) f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$$

Auch die höheren Unterschiede lassen sich auf diese Weise angeben; denn

$$\Delta^1 fx = \frac{1}{1^{1|1}} \cdot \frac{h^1.d^1}{dx^1} fx + \frac{1}{1^{2|1}} \cdot \frac{h^2.d^2}{dx^2} fx + \frac{1}{1^{3|1}} \cdot \frac{h^3.d^3}{dx^3} fx + \ldots\ldots$$

also

$$\Delta^2 fx = \frac{1}{1^{1|1}} \cdot \left(\frac{hd}{dx}\right)^1 \Delta fx + \frac{1}{1^{2|1}} \cdot \left(\frac{hd}{dx}\right)^2 \Delta fx + \frac{1}{1^{3|1}} \cdot \left(\frac{hd}{dx}\right)^3 \Delta fx + \ldots\ldots$$

$$= \frac{1}{1^{1|1}} \cdot \left(\frac{h.d}{dx}\right)^1 \left(\frac{1}{1^{1|1}} \cdot \left(\frac{h.d}{dx}\right)^1 fx + \frac{1}{1^{2|1}} \cdot \left(\frac{h.d}{dx}\right)^2 fx + \ldots\ldots\right)$$

$$+ \frac{1}{1^{2|1}} \cdot \left(\frac{h.d}{dx}\right)^2 \left(\frac{1}{1^{1|1}} \cdot \left(\frac{h.d}{dx}\right)^1 fx + \frac{1}{1^{2|1}} \cdot \left(\frac{h.d}{dx}\right)^2 fx + \ldots\ldots\right)$$

$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$= \left(\frac{1}{1^{1|1}} \cdot \left(\frac{h.d}{dx}\right)^1 + \frac{1}{1^{2|1}} \cdot \left(\frac{h.d}{dx}\right)^2 + \frac{1}{1^{3|1}} \cdot \left(\frac{h.d}{dx}\right)^3 + \ldots\ldots\right) fx$$

oder $$\Delta^2 fx = \left(e^{h.d} - 1\right)^2 fx$$

und so auch allgemein

$$916)\quad \Delta^n fx = \left(\frac{1}{1^{1|1}}\cdot\left(\frac{h.d}{dx}\right)^1 + \frac{1}{1^{2|1}}\cdot\left(\frac{h.d}{dx}\right)^2 + \frac{1}{1^{3|1}}\cdot\left(\frac{h.d}{dx}\right)^3 + \ldots\right)^n fx$$

$$= \left(e^{h.d} - 1\right)^n fx$$

$$= \left(E^n\mathfrak{f}1.\left(\frac{h.d}{dx}\right)^n + E^n\mathfrak{f}2.\left(\frac{h.d}{dx}\right)^{n+1} + E^n\mathfrak{f}3.\left(\frac{h.d}{dx}\right)^{n+2} + \ldots\right) fx$$

wo $E^n\mathfrak{f}1$, $E^n\mathfrak{f}2$, ... nach den Vorschriften zu bilden sind, die wir in der dritten Abhandlung unserer Analysis gefunden haben.

Eben so ist bei Functionen mehrerer veränderlicher Grössen

$$917)\quad \Delta_x^n\,\Delta_y^m\,\Delta_z^p\, f(x,y,z) = \left(e^{h.d_x} - 1\right)^n \left(e^{k.d_y} - 1\right)^m \left(e^{s.d_z} - 1\right)^p f(x,y,z)$$

hingegen

$$918)\quad \Delta^n f(x,y,z) = \left(e^{h.d_x + k.d_y + s.d_z} - 1\right)^n f(x,y,z)$$

Diese Gleichungen gelten nicht allein für das bejahete sondern auch für das verneinte n. Damit aber dieses gehörig begründet werde, so legen wir die Reihe

$$\Delta fx = \frac{1}{1^{1|1}}\cdot\left(\frac{h.d}{dx}\right)^1 fx + \frac{1}{1^{2|1}}\cdot\left(\frac{h.d}{dx}\right)^2 fx + \ldots..$$

zu Grunde, und nehmen von Δ^0 den Rückweg zu Δ^{-1} dadurch, dass wir in ihr $\left(\frac{h.d}{dx}\right)^{-1} \Delta^{-1}fx$ statt fx einführen

$$\left(\frac{h.d}{dx}\right)^{-1} fx = \frac{1}{1^{1|1}}.\Delta^{-1} fx + \frac{1}{1^{2|1}}.\left(\frac{h.d}{dx}\right)^1 \Delta^{-1} fx + \frac{1}{1^{3|1}}.\left(\frac{h.d}{dx}\right)^2 \Delta^{-1}fx + \ldots.$$

Wir erhalten hiedurch eine Reihe

$$\Delta^{-1}fx = \left(\frac{h.d}{dx}\right)^{-1} fx - \frac{1}{1^{2|1}}\left(\frac{h.d}{dx}\right)^1 \Delta^{-1} fx - \frac{1}{1^{3|1}}\left(\frac{h.d}{dx}\right)^2 \Delta^{-1}fx - \ldots.$$

welche zugleich das Gesetz in sich aufgenommen hat, nach welchem die übrigen Glieder von Δ^{-1} befreiet werden müssen. Wir erhalten nach ihr

$$\Delta^{-1}fx = \left(\frac{hd}{dx}\right)^{-1} fx - \frac{1}{1^{2|1}} \cdot \frac{hd}{dx}\left(\left(\frac{hd}{dx}\right)^{-1} fx - \frac{1}{1^{2|1}} \cdot \left(\frac{hd}{dx}\right)^{1} \Delta^{-1}fx - \frac{1}{1^{3|1}} \cdot \left(\frac{hd}{dx}\right)^{2} \Delta^{-1}fx - \ldots\right)$$

$$- \frac{1}{1^{3|1}} \cdot \left(\frac{hd}{dx}\right)^{2} \Delta^{-1}fx - \frac{1}{1^{4|1}} \cdot \left(\frac{hd}{dx}\right)^{3} \Delta^{-1}fx - \ldots\ldots$$

oder

$$\Delta^{-1}fx = \left(\frac{hd}{dx}\right)^{-1} fx - \frac{1}{1^{2|1}}\left(\frac{hd}{dx}\right)^{0} fx - \left.\begin{array}{l} \frac{1}{1^{3|1}} \\ + \frac{1}{1^{2|1}} \cdot \frac{1}{1^{2|1}} \end{array}\right| \left(\frac{hd}{dx}\right)^{2} \Delta^{-1}fx - \left.\begin{array}{l} \frac{1}{1^{4|1}} \\ + \frac{1}{1^{2|1}} \cdot \frac{1}{1^{3|1}} \end{array}\right| \left(\frac{hd}{dx}\right)^{3} \Delta^{-1}fx - \ldots.$$

Durch dieses Einführen der zuerst gefundenen Reihe ist das zweite Glied von Δ^{-1} befreiet; eine Wiederholung desselben Geschäfts wird auch das dritte Glied von Δ^{-1} befreien; wird nämlich die erste Reihe für $\Delta^{-1}fx$ in die letztgefundene Reihe eingeführt, so wird

$$\Delta^{-1}fx = \left(\frac{hd}{dx}\right)^{-1} fx - \frac{1}{1^{2|1}}\left(\frac{hd}{dx}\right)^{0} fx - \left.\begin{array}{l} \frac{1}{1^{3|1}} \\ + \frac{1}{1^{2|1}} \cdot \frac{1}{1^{2|1}} \end{array}\right| \left(\frac{hd}{dx}\right)^{1} fx - \left.\begin{array}{l} \frac{1}{1^{4|1}} \\ + \frac{1}{1^{2|1}} \cdot \frac{1}{1^{3|1}} \\ + \frac{1}{1^{3|1}} \cdot \frac{1}{1^{2|1}} \\ - \frac{1}{1^{2|1}} \cdot \frac{1}{1^{2|1}} \cdot \frac{1}{1^{2|1}} \end{array}\right| \left(\frac{hd}{dx}\right)^{3} \Delta^{-1}fx - \ldots.$$

Bei der Einführung der ersten Reihe erhielt das zweite Glied die Union $\frac{1}{1^{2|1}}$, und die folgenden Glieder Unionen und Binionen. Bei der zweiten Einführung der ersten Reihe wurden im vierten Gliede die noch fehlenden Binionen ergänzt, und es traten die Ternionen hinzu. Das

70 *

stäte und unabänderliche Gesetz, welches bei dieser Bildung herrscht, wird bei dem $(n+1)$ten Gliede alle Unionen, Binionen, Ternionen,..., *n*tionen zur Summe $n+1$ aus den Elementen

$$\frac{1}{1^{2|1}},\ \frac{1}{1^{3|1}},\ \frac{1}{1^{4|1}},\ \dots\dots$$

herbeiführen, und es wird sein

$$\Delta^{-1}fx = \left(\frac{h.d}{dx}\right)^{-1} fx - C(1,1)\left(\frac{h.d}{dx}\right)^{0} fx - \begin{array}{r|}C(2,1)\\ +C(2,2)\\ \\ \end{array}\left(\frac{h.d}{dx}\right)^{1} fx - \begin{array}{r|}C(3,1)\\ +C(3,2)\\ -C(3,3)\end{array}\left(\frac{h.d}{dx}\right)^{2} fx - \dots\dots$$

$$\left(\begin{array}{llll} \frac{1}{1^{2|1}}, & \frac{1}{1^{3|1}}, & \frac{1}{1^{4|1}}, & \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ 1, & 2, & 3, & \dots\dots \end{array}\right)$$

oder in anderen Zeichen

$$919)\quad \Delta^{-1}fx = \left(\frac{1}{1^{1|1}}\cdot\left(\frac{h.d}{dx}\right)^{1} + \frac{1}{1^{2|1}}\cdot\left(\frac{h.d}{dx}\right)^{2} + \frac{1}{1^{3|1}}\cdot\left(\frac{h.d}{dx}\right)^{3} + \dots\right)^{-1} fx$$

Wird wieder $\Delta^{-1}fx$ statt fx gesetzt, so wird

$$\Delta^{-2}fx = \left(\frac{1}{1^{1|1}}\cdot\left(\frac{h.d}{dx}\right)^{1} + \frac{1}{1^{2|1}}\cdot\left(\frac{h.d}{dx}\right)^{-2} + \dots\dots\right)^{2} fx$$

Die Wiederholung dieses Geschäfts führt zu der allgemeinen Gleichung

$$920)\qquad \Delta^{-n}fx = \left(\frac{1}{1^{1|1}}\cdot\left(\frac{h.d}{dx}\right)^{1} + \frac{1}{1^{2|1}}\cdot\left(\frac{h.d}{dx}\right)^{2} + \dots\dots\right)^{-n} fx$$

oder in anderen Zeichen

$$\Delta^{-n}fx = \left(e^{\frac{h.d}{dx}} - 1\right)^{-n} fx$$

§. 246.

Es ist noch übrig, $\left(\frac{h\,.\,d}{dx}\right)^n$ durch Δ^n, Δ^{n+1}, ... darzustellen.

Wir finden diese Reihe leicht, wenn wir die Reihen

$$\Delta^n\,fx = \left(\frac{hd}{dx}\right)^n fx + \frac{[1,2,\ldots,n]^{(1)}}{(n+1)^{1|1}}\left(\frac{hd}{dx}\right)^{n+1} fx + \frac{[1,2,\ldots,n]^{(2)}}{(n+1)^{2|1}}\left(\frac{hd}{dx}\right)^{n+2} fx + \ldots.$$

$$\Delta^{n+1} fx = \left(\frac{hd}{dx}\right)^{n+1} fx + \frac{[1,2,\ldots,n+1]^{(1)}}{(n+2)^{1|1}}\left(\frac{hd}{dx}\right)^{n+2} fx + \ldots.$$

$$\Delta^{n+2} fx = \left(\frac{hd}{dx}\right)^{n+2} fx + \ldots.$$

. . . .

nach ihrer Folge vervielfachen mit

$$1,\ -\frac{(1,\ldots,n)^{(1)}}{(n+1)^{1|1}},\ +\frac{(1,\ldots,n+1)^{(2)}}{(n+1)^{2|1}},\ -\frac{(1,\ldots,n+2)^{(3)}}{(n+1)^{3|1}},\ldots.$$

und von der Gleichung 417 Seite 261 unserer Analysis, wenn in ihr $m = 0$ und $q = n-1$ gesetzt ist, Anwendung machen; wir erhalten folgende Reihe:

$$921)\quad \left(\frac{h\,.\,d}{dx}\right)^n fx = \Delta^n fx - \frac{(1,\ldots,n)^{(1)}}{(n+1)^{1|1}}.\Delta^{n+1} fx + \frac{(1,\ldots,n+1)^{(2)}}{(n+1)^{2|1}}.\Delta^{n+2} fx - \ldots + \ldots$$

Diese Bildungsweise lässt sich nach §. 54 unserer Analysis auch durch folgende Zeichen bemerkbar machen:

$$922)\quad \left(\frac{h\,.\,d}{dx}\right)^n fx = \left(\frac{\Delta^1}{1} - \frac{\Delta^2}{2} + \frac{\Delta^3}{3} - \frac{\Delta^4}{4} + \ldots - \ldots\right)^n fx = (\lg:(1+\Delta))^n fx$$

§. 247.

Zu allen diesen Wahrheiten von 907 — 922 hat schon Leibnitz, der Erfinder der Differential- und Integralrechnung, in einer Abhandlung (Symbolismus memorabilis calculi algebraici et infinitesimalis in comparatione potentiarum et differentiarum....), welche sich in den Miscellanea berolinensia befindet, und in seinem 18ten Briefe (commercium epistolicum) die Idee angegeben. Joh. **Bernoulli** macht von ihnen (14r Brief) einige Anwendung. Aber vor allen hat sich **Lagrange** (in den Denkschriften der berl. Academie vom Jahr 1772, gedruckt 1774) um diesen Gegenstand grosse Verdienste erworben, indem er die Idee von **Leibnitz** weiter ausbildete, wovon die obigen Wahrheiten die Ergebnisse sind. Man findet dieselben Wahrheiten später bei **Laplace**, **Prony**, **Servois**, **Lefrancais**, **Kramp** und **Tralles**. Wir wollen zu diesen Wahrheiten eine neue hinzufügen, die wir vermittelst der Gleichung 875 gefunden haben, sie ist

$$923)\quad \Delta^{n}fx = \frac{n}{n} \,.\, E^{n}f1 \,.\, \frac{d^{n}fx}{dx^{n}} + \frac{n}{n-1.m} \,.\, E^{n-1.m}f2 \,.\, \frac{d^{n+1}\Delta^{1.m}fx}{dx^{n+1}} + \frac{n}{n-2.m} \,.\, E^{n-2.m}f3 \,.\, \frac{d^{n+2}\Delta^{2.m}fx}{dx^{n+2}} + \ldots\ldots\ldots\ldots$$

wo $E = \left(\frac{1}{1^{1|1}}, \frac{1}{1^{2|1}}, \frac{1}{1^{3|1}}, \ldots\ldots\right)$

Diese Reihe entsteht nämlich aus 875, wenn sie mit x^{n} vervielfacht, $P = 1$, $x = \frac{h.d}{dx}$ und

$$Q = \frac{1}{1^{1|1}} \cdot \left(\frac{h.d}{dx}\right)^{1} + \frac{1}{1^{2|1}} \cdot \left(\frac{h.d}{dx}\right)^{2} + \ldots\ldots$$

gesetzt wird.

II. Wiederholende Functionen,

wenn $\gamma fx = f(x+h) - a.fx$ zu Grunde gelegt wird.

§. 248.

Der Unterschied einer Function fx

$$f(x+h) - fx$$

ist nur ein einzelner Fall eines viel allgemeineren Algorithmus, der entsteht, wenn nicht fx sondern ein Vielfaches von fx abgezählt wird

$$f(x+h) - a.fx$$

Bezeichnen wir dieses Geschäft durch den Buchstaben γ, so dass

924) $$\gamma fx = f(x+h) - a.fx$$

so ist

$$\gamma(\gamma fx) = \gamma^2 fx = f(x+2h) - a.f(x+h) - a\big(f(x+h) - a.fx\big)$$

oder

$$\gamma^2 fx = f(x+2h) - 2.a^1.f(x+h) + a^2.fx$$

und so auch

$$\gamma(\gamma^2 fx) = \gamma^3 fx = f(x+3h) - 2.a^1.f(x+2h) + a^2.f(x+h)$$
$$- a.\big(f(x+2h) - 2.a^1.f(x+h) + a^2.fx\big)$$

oder

$$\gamma^3 fx = f(x+3h) - 3.a^1.f(x+2h) + 3.a^2.f(x+h) - a^3.fx$$

und allgemein

925) $$\gamma^n fx = f(x+nh) - \frac{n^{1|-1}}{1^{1|1}}.a^1.f\big(x+(n-1)h\big) + \frac{n^{2|-1}}{1^{2|1}}.a^2.f\big(x+(n-2)h\big) - \ldots (-)^n a^n.fx$$

Das Hauptgesetz, welches bei Δ vorkommt, gilt auch bei dieser allgemeineren Function. Besteht nämlich die Function fx aus Theilen

$$fx = f_1x + f_2x$$

so ist es gleichgültig, ob das Geschäft, durch γ vorgestellt, bei der ungetheilten Function fx, oder ob es bei den einzelnen Theilen f_1x, f_2x abgesondert vorgenommen wird. Denn

$$\gamma fx = \gamma(f_1x + f_2x) = \big(f_1(x+h) + f_2(x+h)\big) - a.(f_1x + f_2x)$$
$$= \big(f_1(x+h) - a.f_1x\big) + \big(f_2(x+h) - a.f_2x\big)$$

oder es ist

926) $$\gamma fx = \gamma f_1x + \gamma f_2x$$

Dieses Gesetz folgt unmittelbar aus dem Grundgedanken, der oben gegeben wurde, und verdient besonders beachtet zu werden, da es eine Freiheit in der Untersuchung gestattet, die ohne dasselbe nicht statt finden würde.

Uebertragen wir dieses theilweise Verfahren auf die späteren Wiederholungen γ^2, γ^3, γ^4, ..., so ist

$$\gamma^2 fx = \gamma^1 f(x+h) - a.\gamma^1 fx$$
$$\gamma^3 fx = \gamma^2 f(x+h) - a.\gamma^2 fx$$

und allgemein

927) $$\gamma^{m+1} fx = \gamma^m f(x+h) - a.\gamma^m fx$$

§. 249.

Die obige Gleichung 925 gibt das Gesetz an, nach welchem γ^1, γ^2, γ^3, ... aus fx, f(x + h), f(x + 2h), ... gebildet werden. Dieses Gesetz gilt aber nicht allein für das bejahete, sondern auch für das verneinte n. Denn nehmen wir in der letzten Gleichung $m = -1$

$$\gamma^{-1} f(x+h) = fx + a.\gamma^{-1} fx$$

und bilden nach dieser die Gleichungen

$$\begin{aligned}\gamma^{-1}fx &= f(x-h) + a\,.\,\gamma^{-1}f(x-h)\\ a^1.\gamma^{-1}f(x-h) &= a^1.f(x-2h) + a^2.\gamma^{-1}f(x-2h)\\ a^2.\gamma^{-1}f(x-2h) &= a^2.f(x-3h) + a^3.\gamma^{-1}f(x-3h)\\ \ldots &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\end{aligned}$$

so erhalten wir durch das Zusammenzählen dieser Gleichungen eine Reihe

928) $$\gamma^{-1}fx = f(x-h) + a^1.f(x-2h) + a^2.f(x-3h) + \ldots.$$

welche das Gesetz angibt, wie γ^{-1} aus den Functionen $f(x-h), f(x-2h), \ldots$ gebildet wird. Eben so erhalten wir die Reihe

$$\gamma^{-2}fx = \gamma^{-1}f(x-h) + a^1.\gamma^{-1}f(x-2h) + a^2.\gamma^{-1}f(x-3h) + \ldots..$$

und wenn wir nach 928 jedes Glied derselben in eine Reihe entwickeln

$$\begin{aligned}\gamma^{-}fx = f(x-2h) + a^1.f(x-3h) &+ a^2.f(x-4h) + \ldots..\\ + a^1.f(x-3h) &+ a^2.f(x-4h) + \ldots..\\ &+ a^2.f(x-4h) + \ldots..\\ &\qquad\qquad\quad + \ldots..\end{aligned}$$

oder

$$\gamma^{-2}fx = f(x-2h) + 2.a^1.f(x-3h) + 3.a^2.f(x-4h) + \ldots..$$

Der Uebergang von γ^{-1} zu γ^{-2} findet statt bei γ^{-2} zu γ^{-3}, bei γ^{-3} zu γ^{-4}, ... und führt zu der allgemeinen Reihe

929) $$\gamma^{-n}fx = f(x-nh) - \frac{(-n)^{1|-1}}{1^{1|1}}.a^1.f(x-(n+1)h) + \frac{(-n)^{2|-1}}{1^{2|1}}a^2.f(x-(n+2)h) - ..+...$$

welche dasselbe Gesetz befolgt als die Reihe für γ^{+n}.

§. 250.

Die Function $f(x+nh)$, in welcher x die Zunahme n.h erhalten hat, lässt sich umgekehrt aus den Functionen $\gamma^0, \gamma^1, \gamma^2, \ldots..$ wieder bilden. Es ist

$$f(x+h) = a^1.fx + \gamma^1fx$$

Ferner ist

$$\begin{aligned} f(x+2h) &= a^1 \,.\, f(x+h) + \gamma^1 f(x+h) \\ &= a^1 . (a^1 . fx + \gamma^1 fx) + \gamma^1 (a^1 . fx + \gamma^1 fx) \\ &= a^2 \,.\, fx + 2 . a^1 . \gamma^1 fx + \gamma^2 fx \end{aligned}$$

und allgemein

930) $f(x+nh) = a^n . fx + \frac{n^{1|-1}}{1^{1|1}} . a^{n-1} . \gamma^1 fx + \frac{n^{2|-1}}{1^{2|1}} . a^{n-2} . \gamma^2 fx + \ldots + \frac{n^{n|-1}}{1^{n|1}} . a^0 . \gamma^n fx$

Die Reihe für das verneinte n wird dadurch gewonnen, wenn nach der Gleichung

$$fx = a^{-1} . f(x+h) - a^{-1} . \gamma^1 fx$$

folgende gebildet

$$\begin{aligned} f(x-h) &= a^{-1} . fx - a^{-1} . \gamma^1 f(x-h) \\ - a^{-1} . \gamma^1 f(x-h) &= - a^{-2} . \gamma^1 fx + a^{-2} . \gamma^2 f(x-h) \\ + a^{-2} . \gamma^2 f(x-h) &= + a^{-3} . \gamma^2 fx - a^{-3} . \gamma^3 f(x-h) \\ - a^{-3} . \gamma^3 f(x-h) &= - a^{-4} . \gamma^3 fx + a^{-4} . \gamma^4 f(x-h) \\ \ldots & \ldots \ldots \end{aligned}$$

und alle zusammengezählt werden; es entsteht die Reihe

931) $f(x-h) = a^{-1} . fx - a^{-2} . \gamma^1 fx + a^{-3} . \gamma^2 fx - a^{-4} . \gamma^3 fx + \ldots\ldots$

Nach diesem ist es nicht schwer, die Reihe für f(x–2h), f(x–3h), ... zu bilden; man findet allgemein, dass

932) $f(x-nh) = a^{-n} . \gamma^0 fx + \frac{(-n)^{1|-1}}{1^{1|1}} . a^{-n-1} . \gamma^1 fx + \frac{(-n)^{2|-1}}{1^{2|1}} . a^{-n-2} . \gamma^2 fx + \ldots.$

Die Reihe 930 gilt also nicht allein für das bejahete, sondern auch für das verneinte n.

§. 251.

Die Bildungsweise von γ^nin 925, so wie auch von $f(x+nh)$ in 930, lässt sich durch einfache Zeichen bemerkbar machen

$$\gamma fx = (\square - a) fx \quad \text{und} \quad \square\, fx = (a+\gamma) fx$$

und allgemein

933) $$\gamma^n fx = (\square - a)^n fx \quad \text{und} \quad \square^n fx = (a+\gamma)^n fx$$

Dieses Zurückführen der gefundenen Reihen auf das Binomium ist sehr nützlich; da nämlich $\gamma = \square - a$, so ist auch

$$\frac{a}{\square} = 1 - \frac{\gamma}{\square} \text{ oder } a.\square^{-1} = 1 - \gamma.\square^{-1}$$

folglich

$$a^n.\square^{-n} = 1 - \frac{n}{1}.\gamma^1.\square^{-1} + \frac{n(n-1)}{1.2}.\gamma^2.\square^{-2} - \ldots + \ldots$$

oder

934) $$a^n f(x-nh) = fx - \frac{n^{1|-1}}{1^{1|1}}.\gamma^1 f(x-h) + \frac{n^{2|-1}}{1^{2|1}}.\gamma^2 f(x-2h) - \ldots + \ldots\ldots$$

Diese Reihe gilt für jedes mögliche n, und findet leicht ihre Bestätigung, wenn in der Reihe 925 $n = 0, 1, 2, \ldots$ und $x = x, x-h, x-2h, \ldots$ gesetzt, diese Reihen mit $1, -\frac{n}{1}, \frac{n(n-1)}{1.2}, \ldots\ldots$ vervielfacht, und alle Reihen zusammengezählt werden.

§. 252.

Bei Functionen von zweien veränderlichen Grössen finden wir Folgendes: Gehört a zu x und b zu y, so dass

935) $$\gamma_x fx = f(x+h) - a.fx$$
$$\gamma_y fy = f(y+k) - b.fy$$

so ist

$$\gamma_y \gamma_x f(x, y) = \gamma_y \left(f(x+h, y) - a . f(x, y) \right)$$
$$= f(x+h, y+k) - a . f(x, y+k) - b . \left(f(x+h, y) - a . f(x, y) \right)$$

oder

$$\gamma_y \gamma_x f(x, y) = f(x+h, y+k) - a . f(x, y+k) + b . a . f(x, y)$$
$$- b . f(x+h, y)$$

Dasselbe erhalten wir durch $\gamma_x \gamma_y f(x, y)$; es ist also

936) $$\gamma_y \gamma_x f(x, y) = \gamma_x \gamma_y f(x, y)$$

oder es ist gleichgültig, in welcher Ordnung die Geschäfte γ_x und γ_y vorgenommen werden.

§. 253.

Der Buchstabe γ hat eine allgemeinere Bedeutung als Δ. Wir können jenes Geschäft auf dieses einfachere zurückführen, und zwar dadurch, wenn wir

937) $$a = 1 - q . h$$

annehmen. In diesem Falle ist

$$\gamma fx = f(x+h) - (1 - q . h) . fx = f(x+h) - fx + q . h . fx$$

oder

938) $$\gamma fx = q . h . fx + \Delta fx$$

Jetzt lässt sich auch γfx sogar durch h messen, und es ist

939) $$\frac{\gamma fx}{h} = q . fx + \frac{\Delta fx}{h}$$

und allgemein

940) $$\left(\frac{\gamma}{h}\right)^n fx = \left(q + \frac{\Delta}{h}\right)^n fx$$

$$= q^n . fx + \frac{n^{1|-1}}{1^{1|1}} . q^{n-1} . \frac{\Delta^1 fx}{h^1} + \frac{n^{2|-1}}{1^{2|1}} . q^{n-2} . \frac{\Delta^2 fx}{h^2} + \dots$$

Umgekehrt ist

941) $$\left(\frac{\Delta}{h}\right)^n fx = \left(\frac{\gamma}{h} - q\right)^n fx$$

$$= \frac{\gamma^n fx}{h^n} - \frac{n^{1|-1}}{1^{1|1}} \cdot q^1 \cdot \frac{\gamma^{n-1} fx}{h^{n-1}} + \frac{n^{2|-1}}{1^{2|1}} \cdot q^2 \cdot \frac{\gamma^{n-2} fx}{h^{n-2}} - \ldots + \ldots$$

Wird sogar nach dem Messen mit h diese Grösse $h = 0$ gesetzt, und dieses dadurch bemerkbar gemacht, dass der lateinische Buchstabe c statt des griechischen γ, und cx statt h gewählt wird, so ist

942) $$\frac{cfx}{cx} = q \cdot fx + \frac{dfx}{dx}$$

und allgemein

943) $$\frac{c^n fx}{(cx)^n} = \left(\frac{c}{cx}\right)^n fx = \left(q + \frac{d}{dx}\right)^n fx$$

$$= q^n \cdot fx + \frac{n^{1|-1}}{1^{1|1}} \cdot q^{n-1} \cdot \frac{d^1 fx}{dx^1} + \frac{n^{2|-1}}{1^{2|1}} \cdot q^{n-2} \cdot \frac{d^2 fx}{dx^2} + \ldots + \frac{n^{n|-1}}{1^{n|1}} \cdot q^0 \cdot \frac{d^n fx}{dx^n}$$

Wir können selbst $f(x + k)$ in eine Reihe entwickeln, welche nach $c^1 fx$, $c^2 fx$, $c^3 fx$, ... fortgeht; es gilt nämlich die Reihe 930 für jedes mögliche n, also auch, wenn $n = \frac{k}{h}$, und es ist

$$f(x + k) = \Sigma_m \frac{k^{m|-h}}{1^{m|1}} \cdot (1 - qh)^{\frac{k-mh}{h}} \cdot \frac{\gamma^m fx}{h^m} \quad \text{wo } m = 0, 1, 2, \ldots.$$

Da diese Gleichung für jeden Werth von h gilt, so kann auch $h = 0$ gesetzt werden; dadurch wird

$$\frac{k^{m|-h}}{1^{m|1}} = \frac{k^m}{1^{m|1}}$$

$$(1-qh)^{\frac{k-mh}{h}} = 1 - \frac{k - mh}{1} \cdot q^1 + \frac{(k-mh)(k-mh-h)}{1 \cdot 2} \cdot q^2 - \ldots + \ldots$$

$$= 1 - \frac{k^1}{1} \cdot q^1 + \frac{k^2}{1 \cdot 2} \cdot q^2 - \ldots + \ldots = e^{-k \cdot q}$$

und
$$\frac{\gamma^m fx}{h^m} = \frac{c^m fx}{(cx)^m}$$

Es ist folglich

$$f(x + k) = \Sigma_m \frac{k^m}{1^{m|1}} . e^{-kq} . \frac{c^m fx}{(cx)^m}$$

oder

944) $$f(x + k) = e^{-kq} . \left(fx + \frac{k^1}{1} . \frac{c^1 fx}{(cx)^1} + \frac{k^2}{1 . 2} . \frac{c^2 fx}{(cx)^2} + \dots\dots \right)$$

Die Taylorische Reihe ist ein specieller Fall von der vorstehenden, und entsteht, wenn $q = 0$ gesetzt wird.

III. Wiederholende Functionen,

wenn $\gamma fx = f(x+h) - \varphi x \, . \, fx$ zu Grunde liegt.

§. 254.

Die vorige Untersuchung wird zu einer viel grösseren Allgemeinheit erhoben, wenn der begleitende Factor, welchen wir vorhin mit a bezeichnet haben, selbst von der Grundgrösse x abhängig gemacht und wenn angenommen wird, dass

945) $$\gamma fx = f(x+h) - \varphi x \, . \, fx$$

Der Sinn dieser Zeichen ist: In der ursprünglichen Function soll die Grundgrösse x um h zunehmen, und hievon abgezählt werden die ursprüngliche Function vervielfacht mit einer anderen Function, die aus derselben Grundgrösse gebildet wird, aus welcher die ursprüngliche Function gebildet wurde.

Wenn die ursprüngliche Function aus Theilen f_1x, und f_2x zusammengesetzt ist, so können diese Geschäfte bei den einzelnen gesonderten Theilen vorgenommen werden, denn

$$\begin{aligned} \gamma(f_1x + f_2x) &= \big(f_1(x+h) + f_2(x+h)\big) - \varphi x \, . \, (f_1x + f_2x) \\ &= \big(f_1(x+h) - \varphi x \, . \, f_1x\big) + \big(f_2(x+h) - \varphi x \, . \, f_2x\big) \end{aligned}$$

oder

946) $$\gamma(f_1x + f_2x) = \gamma f_1x + \gamma f_2x$$

Dieses theilweise Verfahren hebt alle Zweifel, welche bei der Grundgrösse des begleitenden Factors entstehen können; so ist z. B.

$$\begin{aligned}\gamma\Big(f(x+3h) + f(x+h) + fx\Big) &= \gamma f(x+3h) + \gamma f(x+h) + \gamma fx \\ &= f(x+4h) - \varphi(x+3h).f(x+3h) \\ &\quad + f(x+2h) - \varphi(x+h).f(x+h) \\ &\quad + f(x+h) - \varphi x \;.\; fx\end{aligned}$$

Eine Wiederholung des Geschäfts, welches γ angibt, erzeugt folgende Producte:

$$\begin{aligned}\gamma^2 fx = \gamma f(x+h) - \gamma(\varphi x\,.\,fx) &= f(x+2h) - \varphi(x+h).f(x+h) \\ &\quad - \varphi(x+h).f(x+h) + \varphi x.\varphi x.fx \\ &= f(x+2h) - 2\varphi(x+h).f(x+h) + (\varphi x)^2.fx\end{aligned}$$

und eine mehrmalige Wiederholung folgende Producte:

947) $$\begin{aligned}\gamma^n fx = \; & f(x+nh) \\ & - \frac{n^{1|-1}}{1^{1|1}}.f(x+(n-1)h).\Big(\varphi(x+(n-1)h)\Big)^1 \\ & + \frac{n^{2|-1}}{1^{2|1}}.f(x+(n-2)h).\Big(\varphi(x+(n-2)h)\Big)^2 \\ & - \;.\;.\;.\; + \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;. \\ & (-)^n \frac{n^{n|-1}}{1^{n|1}}.\;\; fx \;\;.\;\; (\varphi x)^n\end{aligned}$$

Durch ein gleiches Verfahren wie in §. 249 finden wir hier, dass diese Reihe auch für das verneinte n gilt, und dass

948) $$\begin{aligned}\gamma^{-n} fx = \; & f(x-nh) \\ & - \frac{(-n)^{1|-1}}{1^{1|1}}.f(x-(n+1)h).\Big(\varphi(x-(n+1)h)\Big)^1 \\ & + \frac{(-n)^{2|-1}}{1^{2|1}}.f(x-(n+2)h).\Big(\varphi(x-(n+2)h)\Big)^2 \\ & - \;.\;.\;.\; + \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\end{aligned}$$

Eben so wie in §. 250 finden wir hier, dass

$$949)\ \left(\varphi(x-nh)\right)^n . f(x-nh) = fx - \frac{n^{1|-1}}{1^{1|1}} . \gamma^1 f(x-h) + \frac{n^{2|-1}}{1^{2|1}} . \gamma^2 f(x-2h) - \ldots\ldots + \ldots\ldots$$

So allgemein dieser Algorithmus in Hinsicht der begleitenden Function φx ist, so ist er doch nur auf Functionen anwendbar, welche aus derselben Grundgrösse x gebildet werden, aber nicht bei denjenigen, in welchen x, und x + h, oder eine andere Grundgrösse vorkommt z. B. wie bei fx × f(x + h) oder bei f(x−h) × F(x + 4h).

IV. Wiederholende Functionen,

wenn $vfx = a_0 . f(x+h_0) + a_1 . f(x+h_1) + \ldots + a_m . f(x+h_m)$ zu Grunde liegt.

A. Entwickelung von v^n nach den Zunahmen von x, im Allgemeinen.

§. 255.

Die wiederholenden Functionen, durch das Zeichen v vorgestellt, hat zuerst Laplace unter dem Namen fonctions génératrices in einer besondern Gestalt und mit einer eigenen Darstellungsweise in die Wissenschaft eingeführt. Nach ihm hat zuerst Wronski sich sehr grosse Verdienste um diese Functionen erworben. Ausser diesen beiden Mathematikern finden wir weder andere Wahrheiten noch eine andere Darstellungsweise noch irgend etwas, was Licht über den Gegenstand verbreiten könnte.

Wir nehmen hier den Gegenstand von neuem vor und zwar in einer seiner Natur angemesseneren Gestalt, und schlagen, sowohl im allgemeinen als besondern, Wege ein, welche ganz verschieden von denjenigen sind, die wir bei Laplace oder Wronski vorgefunden.

Es sei

950) $v^{n+1}fx = a_0 . v^n f(x+h_0) + a_1 . v^n f(x+h_1) + a_2 . v^n f(x+h_2) + \ldots + a_m . v^n f(x+h_m)$

Die Geschäfte, welche das Zeichen v vorschreibt, sind

951) $vfx = a_0 . f(x+h_0) + a_1 . f(x+h_1) + a_2 . f(x+h_2) + \ldots + a_m . f(x+h_m)$

Eine Wiederholung dieser Geschäfte wird nach der obersten Vorschrift vorgenommen

$$\nabla^2 fx = a_0 . \nabla f(x+h_0) + a_1 . \nabla f(x+h_1) + a_2 . \nabla f(x+h_2) + \ldots + a_m . \nabla f(x+h_m)$$

und erzeugt, wenn in der Reihe 951 nach und nach statt x gesetzt wird $x+h_0$, $x+h_1$, $x+h_2, \ldots,$ die Producte

$$\begin{aligned} \nabla^2 fx = {} & a_0 a_0 . f(x+h_0+h_0) + a_0 a_1 . f(x+h_0+h_1) + a_0 a_2 . f(x+h_0+h_2) + a_0 a_3 . f(x+h_0+h_3) + \ldots \\ & + a_1 a_0 . f(x+h_1+h_0) + a_1 a_1 . f(x+h_1+h_1) + a_1 a_2 . f(x+h_1+h_2) + \ldots \\ & + a_2 a_0 . f(x+h_2+h_0) + a_2 a_1 . f(x+h_2+h_1) + \ldots \\ & + a_3 a_0 . f(x+h_3+h_0) + \ldots \end{aligned}$$

Eine zweite Wiederholung wird nach demselben Gesetze vorgenommen,

$$\nabla^3 fx = a_0 . \nabla^2 f(x+h_0) + a_1 . \nabla^2 f(x+h_1) + a_2 . \nabla^2 f(x+h_2) + \ldots . + a_m . \nabla^2 f(x+h_m)$$

und erzeugt folgende Producte:

$$\begin{aligned} \nabla^3 fx = {} & a_0 a_0 a_0 . f(x+h_0+h_0+h_0) + a_0 a_0 a_1 . f(x+h_0+h_0+h_1) + a_0 a_0 a_2 . f(x+h_0+h_0+h_2) + \ldots \\ & + a_0 a_1 a_0 . f(x+h_0+h_1+h_0) + a_0 a_1 a_1 . f(x+h_0+h_1+h_1) \\ & + a_1 a_0 a_0 . f(x+h_1+h_0+h_0) + a_0 a_2 a_0 . f(x+h_0+h_2+h_0) \\ & + a_1 a_0 a_1 . f(x+h_1+h_0+h_1) \\ & + a_1 a_1 a_0 . f(x+h_1+h_1+h_0) \\ & + a_2 a_0 a_0 . f(x+h_2+h_0+h_0) \end{aligned}$$

Diese wiederholenden Functionen befolgen das Gesetz des Polynomiums. Wird

$$f(x+h_0) = \square^{h_0} fx,\ f(x+h_1) = \square^{h_1} fx,\ f(x+h_2) = \square^{h_2} fx, \ldots . .$$

gesetzt, so lassen sich die sämmtlichen Geschäfte durch folgende Zeichen bemerkbar machen:

$$\nabla^1 fx = (a_0 . \square^{h_0} + a_1 . \square^{h_1} + a_2 . \square^{h_2} + \ldots . .)^1 fx$$

$$\nabla^2 fx = (a_0 . \square^{h_0} + a_1 . \square^{h_1} + a_2 . \square^{h_2} + \ldots . .)^2 fx$$

$$\nabla^3 fx = (a_0 . \square^{h_0} + a_1 . \square^{h_1} + a_2 . \square^{h_2} + \ldots . .)^3 fx$$

und allgemein

952) $$\nabla^n fx = (a_0 . \Box^{h0} + a_1 . \Box^{h1} + a_2 . \Box^{h2} + \ldots .)^n fx$$

Dieses Gesetz findet nicht allein bei einem bejaheten sondern auch bei einem verneinten n statt, welches sich auf folgende Art nachweisen lässt: Es ist, wenn in 950 $n = -1$ gesetzt wird,

$$\nabla^0 fx = fx = a_0 . \nabla^{-1} f(x+h_0) + a_1 . \nabla^{-1} f(x+h_1) + a_2 . \nabla^{-1} f(x+h_2) + \ldots\ldots$$

folglich, wenn $x-h_0$ statt x eingeführt wird,

$$\nabla^{-1} fx = \frac{1}{a_0} . f(x-h_0) - \frac{a_1}{a_0} . \nabla^{-1} f(x-h_0+h_1) - \frac{a_2}{a_0} . \nabla^{-1} f(x-h_0+h_2) - \ldots (\alpha$$

Diese Reihe α enthält zugleich das Gesetz, wie die späteren Glieder von dem Zeichen ∇^{-1} befreiet werden können; wird nämlich $x-h_0+h_1$ statt x gesetzt

$$\nabla^{-1} f(x-h_0+h_1) = \frac{1}{a_0} . f(x-2h_0+h_1) - \frac{a_1}{a_0} . \nabla^{-1} f(x-2h_0+2h_1) - \frac{a_2}{a_0} . \nabla^{-1} f(x-2h_0+h_1+h_2) - \ldots$$

und diese Reihe eingeführt, so wird das zweite Glied von ∇^{-1} befreiet, und es wird

$$\begin{aligned}\nabla^{-1} fx = \frac{1}{a_0} . f(x-h_0) - \frac{a_1}{a_0 a_0} . f(x-2h_0+h_1) - \frac{a_2}{a_0} . \nabla^{-1} f(x-h_0+h_2) \\ + \frac{a_1 a_1}{a_0 a_0} . \nabla^{-1} f(x-2h_0+2h_1) \\ - \frac{a_3}{a_0} . \nabla^{-1} f(x-h_0+h_3) - \frac{a_4}{a_0} . \nabla^{-1} f(x-h_0+h_4) - \ldots\ldots (\beta \\ + \frac{a_1 a_2}{a_0 a_0} . \nabla^{-1} f(x-2h_0+h_1+h_2) + \frac{a_1 a_3}{a_0 a_0} . \nabla^{-1} f(x-2h_0+h_1+h_3) + \ldots .\end{aligned}$$

Wird ferner $x-h_0+h_2$ und dann $x-2h_0+2h_1$ statt x in der Reihe α gesetzt,

$$\nabla^{-1} f(x-h_0+h_2) = \frac{1}{a_0} . f(x-2h_0+h_2) - \frac{a_1}{a_0} . \nabla^{-1} f(x-2h_0+h_1+h_2) - \ldots\ldots$$

und

$$\nabla^{-1}f(x-2h_0+2h_1) = \frac{1}{a_0}.f(x-3h_0+2h_1) - \frac{a_1}{a_0}.\nabla^{-1}f(x-3h_0+3h_1) - \ldots\ldots$$

und werden diese beiden Reihen in die Reihe β eingeführt, so geht sie in folgende über:

$$\nabla^{-1}fx = \frac{1}{a_0}.f(x-h_0) - \frac{a_1}{a_0^2}.f(x-2h_0+h_1) - \frac{a_2}{a_0^2}.f(x-2h_0+h_2) - \frac{a_3}{a_0}.\nabla^{-1}f(x-h_0+h_3) \;\ldots.$$

$$+ \frac{a_1 a_1}{a_0^3}.f(x-3h_0+h_1+h_1) + \frac{a_1 a_2}{a_0^2}.\nabla^{-1}f(x-2h_0+h_1+h_2)\ldots$$

$$+ \frac{a_2 a_1}{a_0^2}.\nabla^{-1}f(x-2h_0+h_2+h_1)\ldots$$

$$- \frac{a_1 a_1 a_1}{a_0^3}.\nabla^{-1}f(x-3h_0+h_1+h_1+h_1)\ldots$$

Die nächst folgenden ∇^{-1} werden wieder durch Reihen ersetzt, welche entstehen, wenn in der Reihe α statt x die Werthe

$$x-1h_0+h_3$$

$$x-2h_0+h_1+h_2$$

$$x-2h_0+h_2+h_1$$

$$x-3h_0+h_1+h_1+h_1$$

eingeführt werden. Es entsteht zuletzt, wenn dieses Verfahren weiter verfolgt wird, folgende Endreihe:

$$953)\ \nabla^{-1}fx = \frac{1}{a_0}.f(x-1h_0) - \frac{a_1}{a_0^2}.f(x-2h_0+h_1) - \frac{a_2}{a_0^2}.f(x-2h_0+h_2)$$

$$+ \frac{a_1a_1}{a_0^3}.f(x-3h_0+h_1+h_1)$$

$$- \frac{a_3}{a_0^2}.f(x-2h_0+h_3) \qquad - \frac{a_4}{a_0^2}.f(x-2h_0+h_4) - \ldots\ldots\ldots$$

$$+ \frac{a_1a_2}{a_0^3}.f(x-3h_0+h_1+h_2) \qquad + \frac{a_1a_3}{a_0^3}.f(x-3h_0+h_1+h_3)$$

$$+ \frac{a_2a_1}{a_0^3}.f(x-3h_0+h_2+h_1) \qquad + \frac{a_2a_2}{a_0^3}.f(x-3h_0+h_2+h_2)$$

$$- \frac{a_1a_1a_1}{a_0^4}.f(x-4h_0+h_1+h_1+h_1) + \frac{a_3a_1}{a_0^3}.f(x-3h_0+h_3+h_1)$$

$$- \frac{a_1a_1a_2}{a_0^4}.f(x-4h_0+h_1+h_1+h_2)$$

$$- \frac{a_1a_2a_1}{a_0^4}.f(x-4h_0+h_1+h_2+h_1)$$

$$- \frac{a_2a_1a_1}{a_0^4}.f(x-4h_0+h_2+h_1+h_1)$$

$$+ \frac{a_1a_1a_1a_1}{a_0^5}.f(x-5h_0+h_1+h_1+h_1+h_1)$$

oder

$$954)\qquad \nabla^{-1}fx = (a_0.\Box^{h_0} + a_1.\Box^{h_1} + a_2.\Box^{h_2} + \ldots\ldots)^{-1}fx$$

Dasselbe Gesetz befolgt also auch ∇^{-2}, ∇^{-3}, ..., und es ist allgemein

$$955)\qquad \nabla^{-n}fx = (a_0.\Box^{h_0} + a_1.\Box^{h_1} + a_2.\Box^{h_2} + \ldots.)^{-n}fx$$

§. 256.

Es sei

$$956)\qquad \nabla_{a,h}fx = a_0.f(x+h_0) + a_1.f(x+h_1) + a_2.f(x+h_2) + \ldots..$$

$$\nabla_{b,k}fx = b_0.f(x+k_0) + b_1.f(x+k_1) + b_2.f(x+k_2) + \ldots..$$

$$\nabla_{c,l}fx = c_0.f(x+l_0) + c_1.f(x+l_1) + c_2.f(x+l_2) + \ldots..$$

. . . .

Kommen nun bei einer und derselben Function fx zwei oder mehrere Bildungsweisen vor, so ist

957) $$\nabla_{b,k}\nabla_{a,h}fx = a_0b_0.f(x+h_0+k_0)+a_0b_1.f(x+h_0+k_1)+a_0b_2.f(x+h_0+k_2)+\ldots.$$
$$+a_1b_0.f(x+h_1+k_0)+a_1b_1.f(x+h_1+k_1)+\ldots.$$
$$+a_2b_0.f(x+h_2+k_0)+\ldots.$$
$$\ldots\ldots\ldots$$

und also

958) $$\nabla_{b,k}\nabla_{a,h}fx = (a_0.\square^{h0}+a_1.\square^{h1}+a_2.\square^{h2}+\ldots)(b_0.\square^{k0}+b_1.\square^{k1}+b_2.\square^{k2}+\ldots)fx$$

Diese wiederholenden Functionen befolgen also das Gesetz des Vervielfachens und Messens der Reihen, welche Elemente bei ihnen auch zu Grunde gelegt werden mögen.

Zugleich folgt auch hieraus, dass die Ordnung, in welcher diese verschiedenen Bildungsweisen vorgenommen werden, gleichgültig ist, oder dass

959) $$\nabla_{c,l}\nabla_{b,k}\nabla_{a,h} = \nabla_{c,l}\nabla_{a,h}\nabla_{b,k} = \nabla_{b,k}\nabla_{a,h}\nabla_{c,l} = \ldots.$$

B. *Entwickelung von* $v^n fx$ *nach der Zunahme von* x, *im Besonderen.*

---

§. 257.

Wir wollen, um die Untersuchung zu vereinfachen, folgende Grundlage wählen:

960) $$vfx = a_0 . fx + a_1 . f(x+h) + a_2 . f(x+2h) + \ldots . + a_m . f(x+mh)$$

oder nach der früheren Bezeichnung

$$vfx = (a_0 + a_1 . \square^{1h} + a_2 . \square^{2h} + \ldots .) fx$$

Setzen wir aber fest, dass x immer um h wachsen soll, so ist es nicht nöthig, diesen Buchstaben in die Bezeichnung aufzunehmen; die einfacheren Zeichen werden sein

$$\square^{q} fx = f(x + q . h)$$

und

961) $$vfx = (a_0 + a_1 . \square^1 + a_2 . \square^2 + a_3 . \square^3 + \ldots . + a_m . \square^m) fx$$

Die *n* te Wiederholung kann nach dem Obigen durch folgende Zeichen angegeben werden:

962) $$a_0 + a_1 . \square^1 + a_2 . \square^2 + \ldots . = P$$

und

$$\begin{aligned} v^n fx &= (a_0 + a_1 . \square^1 + a_2 . \square^2 + \ldots)^n fx \\ &= (P^n f1 + P^n f2 . \square^1 + P^n f3 . \square^2 + \ldots .) fx \end{aligned}$$

Es gelten also auch für die *n* te Wiederholung alle Gesetze, welche wir für das Polynomium in unserer Analysis entwickelt haben.

Diese Uebereinstimmung mit der Bildungsweise des Polynomiums gilt für jeden Werth von n; nehmen wir diesen $n = -1$ an

$$\nabla^{-1}fx = (P^{-1}\mathfrak{f}1 + P^{-1}\mathfrak{f}2 . \Box^1 + P^{-1}\mathfrak{f}3 . \Box^2 + \ldots\ldots\ldots\ldots) fx$$

und vervielfachen mit ∇^n, so erhalten wir

$$\nabla^{n-1}fx = (P^{-1}\mathfrak{f}1 + P^{-1}\mathfrak{f}2 . \Box^1 + \ldots\ldots\ ) \nabla^n fx$$

oder

963) $$\nabla^{n-1}fx = P^{-1}\mathfrak{f}1 . \nabla^n fx + P^{-1}\mathfrak{f}2 . \nabla^n f(x+h) + P^{-1}\mathfrak{f}3 . \nabla^n f(x+2h) + \ldots\ldots$$

Die Bildungsweise der Vorzahlen ist einfach und bekannt. Wronski gibt für diesen Fall, wo ∇^{n-1} aus ∇^n hergeleitet werden soll, eine von der vorstehenden ganz verschiedene Reihe an. Wir wollen zeigen, wie diese Reihe, welche er durch ein ihm eigenes Verfahren gewonnen hat, aus unserer Reihe 963 hergeleitet werden kann.

Es seien $b_1, b_2, b_3, \ldots, b_m$ die Wurzeln der Gleichung

$$(b_1+z)(b_2+z)\ldots.(b_m+z) = \frac{a_0}{a_m} + \frac{a_1}{a_m} z^1 + \ldots + \frac{a_{m-1}}{a_m} . z^{m-1} + z^m$$

Nach diesem ist

$$(a_0+a_1.z^1+\ldots+a_m.z^m)^{-1} = \frac{1}{a_m(b_1+z)(b_2+z)\ldots\ldots(b_m+z)}$$

$$= \frac{1}{a_0} . \left(1+\frac{z}{b_1}\right)^{-1} . \left(1+\frac{z}{b_2}\right)^{-1} \ldots . \left(1+\frac{z}{b_m}\right)^{-1}$$

$$= \frac{1}{a_0} . \left(1-[b_1^{-1}, b_2^{-1}, \ldots, b_m^{-1}]^{(1)}.z^1 + [b_1^{-1}, b_2^{-1}, \ldots, b_m^{-1}]^{(2)}.z^2 - \ldots\right)$$

Es ist aber nach 593, wenn $n = m$, $h = -1$ und $a = m$ gesetzt wird,

$$[b_1^{-1}, b_2^{-1}, .., b_m^{-1}]^{(p)} = \frac{\left\| b_1^1 b_2^2 : : : : : b_{m-1}^{m-1} b_m^{-p} \right)}{\left\| b_1^1 b_2^2 : : : : : b_{m-1}^{m-1} b_m^{0} \right)}$$

Wenn der Zähler nach 522 in die Producte

$$\llbracket b_1^1\dots b_{m-1}^{m-1}\big).b_m^{-p} - \llbracket b_1^1\dots b_{m-2}^{m-2}\,b_m^{m-1}\big)\cdot b_{m-1}^{-p} + \dots\dots (-)^{m-1}\llbracket b_2^1\,b_3^2\dots\dots b_m^{m-1}\big).b_1^{-p}$$

zerlegt, und zur Abkürzung

$$964)\quad \llbracket b_1^1\,b_2^2 :::: b_{q-1}^{q-1}\,b_{q+1}^q :::: b_m^{m-1}\big) = B_q \text{ und } \llbracket b_1^1 b_2^2 ::: b_{m-1}^{m-1} b_m^q\big) = M^{(q)}$$

gesetzt wird, so geht diese Gleichung über in

$$[b_1^{-1}, b_2^{-1}, \dots, b_m^{-1}]^{(p)} = \frac{1}{M^{(0)}}\cdot\Big(B_m.b_m^{-p} - B_{m-1}.b_{m-1}^{-p} + \dots\dots (-)^{m-1}B_1.b_1^{-p}\Big)$$

Es ist folglich

$$P^{-1}f(p+1) = (-)^p\,\frac{1}{a_0}\cdot[b_1^{-1}, b_2^{-1}, \dots, b_m^{-1}]^{(p)}$$

$$= (-)^p\,\frac{1}{a_0.M^{(0)}}\cdot\Big(B_m.b_m^{-p} - B_{m-1}.b_{m-1}^{-p} + \dots - \dots (-)^{m-1}B_1.b_1^{-p}\Big)$$

Werden nun diese Producte mit $\nabla^n f(x+ph)$ vervielfacht, und wird $p = 0, 1, 2, \dots\dots$ gesetzt, so entsteht folgende Reihe:

$$\begin{aligned}965)\quad \nabla^{n-1}fx = (-)^{m-1}\frac{1}{a_0.M^{(0)}}\cdot\Big(& B_1.\big(b_1^0\nabla^n fx - b_1^{-1}.\nabla^n f(x+h) + b_1^{-2}.\nabla^n f(x+2h) - \dots\dots\big)\\ & - B_2.\big(b_2^0\nabla^n fx - b_2^{-1}.\nabla^n f(x+h) + b_2^{-2}.\nabla^n f(x+2h) - \dots\dots\big)\\ & + B_3.\big(b_3^0.\nabla^n fx - b_3^{-1}\nabla^n f(x+h) + b_3^{-2}.\nabla^n f(x+2h) - \dots\dots\big)\\ & - \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ & (-)^{m-1}B_m.\big(b_m^0.\nabla^n fx - b_m^{-1}\nabla^n f(x+h) + b_m^{-2}.\nabla^n f(x+2h) - \dots\big)\Big)\end{aligned}$$

Diese Reihe 965 gehört dem Herrn Wronski an, und unterscheidet sich dadurch von 963, dass in 963 die Vorzahlen der Reihe für $\nabla^{n-1}fx$ aus den Vorzahlen der gegebenen Reihe 960, hingegen in 965 aus den Elementen, woraus die Vorzahlen der gegebenen Reihe 960 zusammengesetzt sind, gebildet werden.

Wir haben diese Reihe 965 aus der Reihe 963 hergeleitet. Wir wollen jetzt zeigen, wie sie unabhängig von dieser Reihe 963 bewiesen werden kann.

Man setzt in der vorgegebenen Gleichung 960, $x = qh$, vervielfacht sie mit $(-)^q M^{(-q)}$

$$(-)^q M^{(-q)} \nabla f(x+qh) =$$

$$= (-)^q \Big(M^{(-q)} a_0 f(x+qh) + M^{(-q)} a_1 f(x+(q+1)h) + \ldots . + M^{(-q)} a_m f(x+(q+m)h) \Big)$$

setzt hierin $q = 0, 1, 2, \ldots .$ und zählt alle Gleichungen zusammen; es entsteht folgende:

$$M^{(0)} \nabla fx - M^{(-1)} \nabla f(x+h) + M^{(-2)} \nabla f(x+2h) - \ldots = K_0 fx + K_1 f(x+h) + K_2 f(x+2h) + \ldots .$$

wo

$$\begin{aligned} K_p &= M^{(0)} . a_p - M^{(-1)} . a_{p-1} + M^{(-2)} . a_{p-2} - \ldots . (-)^p M^{(-p)} . a_0 \\ &= a_m . \Big(\big(b_1, b_2, \ldots, b_m\big)^{(m-p)} . [\![b_1^1 \ldots \ldots b_{m-1}^{m-1} b_m^0 \big) \\ &\quad - \big(b_1, \ldots \ldots, b_m\big)^{(m-p+1)} . [\![b_1^1 \ldots \ldots b_{m-1}^{m-1} b_m^{-1} \big) \\ &\quad + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\quad (-)^p \big(b_1, \ldots \ldots, b_m\big)^{(m)} . [\![b_1^1 \ldots \ldots b_{m-1}^{m-1} b_m^{-p} \big) \Big) \end{aligned}$$

Die Producte, mit welchen a_m vervielfacht werden muss, können nach 596 summirt werden; man findet, dass

$$K_p = a_m . [\![b_1^1 b_2^2 \ldots . b_p^p b_{p+1}^{p+2} \ldots . b_{m-1}^m b_m^1 \big)$$

Da die Gleichheit zweier oberen Stellenzahlen die ganze Summe zernichtet, so verschwindet K_p für jeden Werth von p nur nicht für $p = 0$ und es ist

$$K_0 = a_m . [\![b_1^2 b_2^3 \ldots . b_{m-1}^m b_m^1 \big)$$

Da nun nach 578

$$[\![b_1^2 b_2^3 \ldots b_{m-1}^m b_m^1) = b_1 . b_2 . b_3 \ldots b_m . [\![b_1^1 b_2^2 \ldots b_{m-1}^{m-1} b_m^0) = \frac{a_0}{a_m} . [\![b_1^1 b_2^2 \ldots b_{m-1}^{m-1} b_m^0)$$

so ist

$$K_0 = a_0 . [\![b_1^1 b_2^2 \ldots b_{m-1}^{m-1} b_m^0)$$

und folglich

$$a_0 . M^{(0)} . fx = M^{(0)} . \nabla fx - M^{(-1)} . \nabla f(x+h) + M^{(-2)} . \nabla f(x+2h) - \ldots . + \ldots .$$

Zerlegt man nun noch $M^{(0)}$, $M^{(-1)}$, $M^{(-2)}$, ..., wie es oben gezeigt ist, und vervielfacht mit ∇^{n-1}, so erhält man für diese Reihe diejenige Form, welche ihr **Wronski** gegeben hat, und die hier mit 965 bezeichnet ist.

C. *Entwickelung von* $\nabla^n\Delta^v$ *nach* $\nabla^{0p}\Delta^{0q}$, $\nabla^{1p}\Delta^{1q}$, $\nabla^{2p}\Delta^{2q}$, ...

§. 258.

Diese Entwickelung kann auf jene in 875 zurückgebracht werden, wenn in derselben $n = w$, $m = s$, $Q = \nabla^{\frac{p}{s}}\Delta^{\frac{q}{s}}$ und

$$b_0 + b_1 z^1 + b_2 z^2 + \ldots = \nabla^{n-\frac{w.p}{s}}\Delta^{v-\frac{w.q}{s}}$$

also

$$Q^n.(b_0 + b_1 z^1 + \ldots) = \nabla^n\Delta^v$$

gesetzt wird. Nimmt man nun wegen der Kürze an, dass

$$\nabla^{n-\frac{wp}{s}}\Delta^{v-\frac{wq}{s}} = (a_0 + a_1.\square^1 + a_2.\square^2 + \ldots)^{n-\frac{w.p}{s}}.(1+\square)^{v-\frac{w.q}{s}}$$

$$= V_0 + V_1.\square^1 + V_2.\square^2 \ldots\ldots$$

$$w.V_0 + (w + 1.s).V_1.\square^1 + (w + 2.s).V_2.\square^2 + \ldots\ldots = R$$

$$\left(\nabla^{\frac{p}{s}}\Delta^{\frac{q}{s}}\right)^{w-rs} = \left((a_0 + a_1.\square^1 + a_2.\square^2 + \ldots)^{\frac{p}{s}}(1+\square)^{\frac{q}{s}}\right)^{w-r.s} = U^{w-r.s}$$

so ist

966) $$\nabla^n\Delta^v fx = \frac{1}{w}.(R.U^w)\mathfrak{f}1 . \nabla^{0.p}\Delta^{0.q}fx$$
$$+ \frac{1}{w-1.s}.(R.U^{w-1.s})\mathfrak{f}2 . \nabla^{1.p}\Delta^{1.q}f(x+h)$$
$$+ \frac{1}{w-2.s}.(R.U^{w-2.s})\mathfrak{f}3 . \nabla^{2.p}\Delta^{2.q}f(x+2h)$$
$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Die Aufgabe kann allgemeiner gestellt werden. Es sei

$$v_a fx = a_0 . fx + a_1 . f(x+h) + a_2 . f(x+2h) + \ldots .$$

und

$$v_b fx = b_0 . fx + b_1 . f(x+h) + b_2 . f(x+2h) + \ldots .$$

und es kann verlangt werden die Entwickelung

$$v_a^n \Delta^r fx = A_0 . v_b^{0.p} \Delta^{0.q} fx + A_1 . v_b^{1.p} \Delta^{1.q} f(x+h) + A_2 . v_b^{2.p} \Delta^{2.q} f(x+2h) \ldots\ldots$$

Zur Entwickelung dieser Reihe sind die Wege in der Theorie der Reihen angegeben, und wir überlassen dem Leser, den geeignetsten selbst zu wählen.

D. Entwickelung von $f(x+k)$ *nach* $\nabla^1, \nabla^2, \nabla^3 \ldots.$

§. 259.

Wenn

$$\nabla fx = a_0 . fx + a_1 . f(x+h) + a_2 . f(x+2h) + \ldots. + a_m . f(x+mh)$$

so lässt sich $f(x+k)$ in folgende Reihe entwickeln:

967) $$\begin{aligned} f(x+k) = \; & H_0^{(0)} . fx + H_1^{(0)} . \nabla^1 fx + H_2^{(0)} . \nabla^2 fx + \ldots\ldots \\ & + H_0^{(1)} . f(x+h) + H_1^{(1)} . \nabla^1 f(x+h) + H_2^{(1)} . \nabla^2 f(x+h) + \ldots\ldots \\ & + H_0^{(2)} . f(x+2h) + H_1^{(2)} . \nabla^1 f(x+2h) + H_2^{(2)} . \nabla^2 f(x+2h) + \ldots.. \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + H_0^{(m-1)} . f(x+(m-1)h) + H_1^{(m-1)} . \nabla^1 f(x+(m-1)h) + H_2^{(m-1)} . \nabla^2 f(x+(m-1)h) + .. \end{aligned}$$

Sie wird dadurch gewonnen, dass man aus der Gleichung

$$\nabla = a_0 + a_1 . \square^1 + a_2 . \square^2 + \ldots. + a_m . \square^m$$

die Reihe

$$\begin{aligned} \square^k = \; & (H_0^{(0)} . \nabla^0 + H_1^{(0)} . \nabla^1 + H_2^{(0)} . \nabla^2 + \ldots\ldots\ldots) . \square^0 \\ & + (H_0^{(1)} . \nabla^0 + H_1^{(1)} . \nabla^1 + H_2^{(1)} . \nabla^2 + \ldots\ldots\ldots) . \square^1 \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + (H_0^{(m-1)} . \nabla^0 + H_1^{(m-1)} . \nabla^1 + H_2^{(m-1)} . \nabla^2 + \ldots\ldots\ldots) . \square^{m-1} \end{aligned}$$

entwickelt. Da wir dieses Verfahren schon in §. 238 vorgelegt haben, so wollen wir nur noch einige Beispiele hinzufügen. Es sei

968) $$\nabla fx = a . fx + b . f(x+h)$$

und $f(x+k)$ nach den Potenzen von ∇ zu entwickeln.

Es ist $\nabla = a + b . \square$ folglich $\square^1 = -\frac{a}{b} \times \left(1 - \frac{\nabla}{a}\right)$

$$\square^{n} = \left(-\frac{a}{b}\right)^{n} \times \left(1-\frac{\nabla}{a}\right)^{n} = \left(-\frac{a}{b}\right)^{n} \times \left(1-\frac{n}{1}\cdot\frac{\nabla^{1}}{a^{1}}+\frac{n(n-1)}{1.2}\cdot\frac{\nabla^{2}}{a^{2}}-\ldots\right)$$

mithin

$$\square^{n}fx = f(x+nh) = \left(-\frac{a}{b}\right)^{n} \times \left(fx-\frac{n}{1.a}\cdot\nabla^{1}fx+\frac{n(n-1)}{1.2.a^{2}}\cdot\nabla^{2}fx-\ldots\ldots\right)$$

oder wenn $n = \frac{k}{h}$ gesetzt wird

$$969)\quad f(x+k) = \left(-\frac{a}{b}\right)^{n} \times \left(fx-\frac{k}{1.h^{1}.a^{1}}\cdot\nabla^{1}fx+\frac{k(k-1h)}{1.2.h^{2}.a^{2}}\cdot\nabla^{2}fx-\ldots\ldots\right)$$

Dieselbe Reihe findet **Wronski** Seite 113 aber auf einem ganz anderen Wege.

Es sei

$$970)\quad \nabla fx = a_{0}.fx + a_{1}.f(x+h) + f(x+2h)$$

Man sucht $f(x+k)$ nach den Potenzen von ∇ zu entwickeln.

Es ist nach 886, wenn dort $m = m-2$ gesetzt wird

$$(q)_{s} = (-)^{m-s-q-1}\ \frac{(m-q-s-2)^{s|-1}}{1^{s|1}}\cdot a_{1}^{m-q-2s-2}$$

also nach 888

$$M_{s}^{(0)} = (-)^{m-s}\ \frac{(m-s-1)^{s-1|-1}}{1^{s-1|1}}\ a_{1}^{m-2s}$$

$$M_{s}^{(1)} = (-)^{m-s-1}\ \frac{(m-s-1)^{s|-1}}{1^{s|1}}\cdot a_{1}^{m-2s-1}$$

und $M_{s}^{(2)} = M_{s}^{(3)} = \ldots\ldots\ldots = 0$, und nach 897

971)
$$N_s^{(0)} = (-)^{m-s} \frac{s.(m-s-1)^{s-1|-1}}{1^{0|1}.1^{s|1}} . a_0^0 . a_1^{m-2s}$$
$$+ (-)^{m-s-1} \frac{(s+1).(m-s-2)^{s|-1}}{1^{1|1}.1^{s|1}} . a_0^1 . a_1^{m-2s-2}$$
$$+ (-)^{m-s-2} \frac{(s+2).(m-s-3)^{s+1|-1}}{1^{2|1}.1^{s|1}} . a_0^2 . a_1^{m-2s-4}$$
$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

und

$$N_s^{(1)} = (-)^{m-s-1} \frac{(m-s-1)^{s|-1}}{1^{0|1}.1^{s|1}} . a_0^0 . a_1^{m-2s-1}$$
$$+ (-)^{m-s-2} \frac{(m-s-2)^{s+1|-1}}{1^{1|1}.1^{s+1|1}} . a_0^1 . a_1^{m-2s-3}$$
$$+ (-)^{m-s-3} \frac{(m-s-3)^{s+2|-1}}{1^{2|1}.1^{s+2|1}} . a_0^2 . a_1^{m-2s-5}$$
$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Wird nun $s = 0, 1, 2, \ldots$ gesetzt, so ist nach 898

$$\square^m = N_0^{(0)} - N_1^{(0)}.\nabla^1 + N_2^{(0)}.\nabla^2 - N_3^{(0)}.\nabla^3 + \ldots - \ldots$$
$$+ (N_0^{(1)} - N_1^{(1)}.\nabla^1 + N_2^{(1)}.\nabla^2 - N_3^{(1)}.\nabla^3 + \ldots - \ldots).\square$$

oder

972)
$$f(x+mh) = N_0^{(0)}.\ fx - N_1^{(0)}.\nabla^1 fx + N_2^{(0)}.\nabla^2 fx - \ldots + \ldots$$
$$+ N_0^{(1)}.f(x+h) - N_1^{(1)}.\nabla^1 f(x+h) + N_2^{(1)}.\nabla^2 f(x+h) - \ldots + \ldots$$

Setzt man $m = \frac{k}{h}$, so erhält man die verlangte Entwickelung von f(x+k).

Dieselbe Aufgabe löset **Wronski** Seite 113; unser Verfahren hat aber mit dem seinigen nichts gemein.

E. Entwickelung von $v^n fx$ *nach den Differentialen von* $v^m fx$.

---

§. 260.

Es sei

$$\Box fx = f(x+h)$$

und

$$973)\quad vfx = a_0 . f(x+g.h) + a_1 . f(x+(g+1v)h) + a_2 . f(x+(g+2v)h) + \ldots.$$
$$= (a_0 . \Box^g + a_1 . \Box^{g+1.v} + a_2 . \Box^{g+2.v} + \ldots\ldots)fx$$

Da f(x+g.h) vermittelst des Differentiirens von fx in eine Reihe entwickelt werden kann, so kann auch vfx und allgemeiner $v^n fx$ durch Differentiiren von fx dargestellt werden.

Wir können, da $v^n = v^{n-m+m} = v^{n-m} \times v^m$, diese Untersuchung erweitern, und $v^n fx$ durch Differentiale von $v^m fx$ darstellen. Es ist nämlich, wenn wir

$$a_0 . \Box^g + a_1 . \Box^{g+1.v} + a_2 . \Box^{g+2.v} + \ldots\ldots = P$$

$$v^{n-m} fx = (P^{n-m}\mathfrak{f}1 . \Box^{(n-m)g} + P^{n-m}\mathfrak{f}2 . \Box^{(n-m)g+1.v} + P^{n-m}\mathfrak{f}3 . \Box^{(n-m)g+2.v} + \ldots.)fx$$

$$\Box^p fx = f(x+ph) = \left(\frac{p^0}{1^{0|1}} . \left(\frac{hd}{dx}\right)^0 + \frac{p^1}{1^{1|1}} . \left(\frac{hd}{dx}\right)^1 + \frac{p^2}{1^{2|1}} . \left(\frac{hd}{dx}\right)^2 + \ldots\ldots \right) fx$$

also

$$v^{n-m} fx = P^{n-m}\mathfrak{f}1 . \left(\frac{(n-m)^0 g^0}{1^{0|1}} . \left(\frac{hd}{dx}\right)^0 + \frac{(n-m)^1 g^1}{1^{1|1}} . \left(\frac{hd}{dx}\right)^1 + \ldots\ldots \right) fx$$
$$+ P^{n-m}\mathfrak{f}2 . \left(\frac{((n-m)g+1.v)^0}{1^{0|1}} . \left(\frac{hd}{dx}\right)^0 + \frac{((n-m)g+1.v)^1}{1^{1|1}} . \left(\frac{hd}{dx}\right)^1 + \ldots\ldots \right) fx$$
$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

setzen, und die letztere Reihe mit $\nabla^m fx$ vervielfachen, die Entwickelung von $\nabla^n fx$ folgende:

$$974)\quad \nabla^n fx = P_0 \cdot \frac{h^0}{1^{0|1}} \cdot \frac{d^0 \nabla^m fx}{dx^0} + P_1 \cdot \frac{h^1}{1^{1|1}} \cdot \frac{d^1 \nabla^m fx}{dx^1} + P_2 \cdot \frac{h^2}{1^{2|1}} \cdot \frac{d^2 \nabla^m fx}{dx^2} + \ldots\ldots$$

wo

$$975)\quad P = ((n-m)g)^q . P^{n-m}\mathfrak{f}1 + ((n-m)g+1.v)^q . P^{n-m}\mathfrak{f}2 + ((n-m)g+2.v)^q . P^{n-m}\mathfrak{f}3 + \ldots.$$

und P die obige Bedeutung hat.

Wird hierin $m = 0$ gesetzt, so hat man die einfachere Aufgabe, deren wir im Anfange erwähnten.

Diese Bildungsweise findet man zuerst bei **Wronski** Seite 126 und 132 mit 154 und 160 bezeichnet.

§. 261.

Auf gleiche Weise kann, wenn

$$976)\quad \begin{aligned} \nabla_a fx &= (a_0 . \square^g + a_1 . \square^{g+1.v} + a_2 . \square^{g+2.v} + \ldots .)fx \\ \nabla_b fx &= (b_0 . \square^i + b_1 . \square^{i+1.v} + b_2 . \square^{i+2.v} + \ldots .)fx \end{aligned}$$

ist, das Product $\nabla_a^n \nabla_b^m \Delta^p fx$ durch Differentiale von fx dargestellt werden. Denn wird

$$a_0 . \square^g + a_1 . \square^{g+1.v} + \ldots = P$$

$$b_0 . \square^i + b_1 . \square^{i+1.v} + \ldots = Q$$

$$(n.g+m.i)^q . (P^n Q^m)\mathfrak{f}1 + (n.g+m.i+1.v)^q . (P^n Q^m)\mathfrak{f}2 + \ldots . = A_q$$

gesetzt, und das Product

$$\begin{aligned} \nabla_a^n \nabla_b^m fx &= \left((P^n Q^m)\mathfrak{f}1 . \square^{n.g+m.i} + (P^n Q^m)\mathfrak{f}2 . \square^{n.g+m.i+1.v} + \ldots\ldots \right) fx \\ &= \left(\frac{A_0}{1^{0|1}} \cdot \left(\frac{hd}{dx}\right)^0 + \frac{A_1}{1^{1|1}} \cdot \left(\frac{hd}{dx}\right)^1 + \frac{A_2}{1^{2|1}} \cdot \left(\frac{hd}{dx}\right)^2 + \ldots \right) fx \end{aligned}$$

mit der Reihe

$$\Delta^p fx = \left(E^p\mathfrak{f}1 \, . \left(\frac{hd}{dx}\right)^p + E^p\mathfrak{f}2 \, . \left(\frac{hd}{dx}\right)^{p+1} + \ldots\ldots\right) fx$$

vervielfacht, so entsteht die verlangte Reihe

977) $$\nabla_a^n \nabla_b^m \Delta^p fx = \left(B_0 . \left(\frac{hd}{dx}\right)^p + B_1 . \left(\frac{hd}{dx}\right)^{p+1} + B_2 . \left(\frac{hd}{dx}\right)^{p+2} + \ldots\ldots\right) fx$$

wo

978) $$B_0 = \frac{1}{1^{0|1}} . A_0 . E^p\mathfrak{f}1$$

$$B_1 = \frac{1}{1^{0|1}} . A_0 . E^p\mathfrak{f}2 + \frac{1}{1^{1|1}} . A_1 . E^p\mathfrak{f}1$$

$$B_2 = \frac{1}{1^{0|1}} . A_0 . E^p\mathfrak{f}3 + \frac{1}{1^{1|1}} . A_1 . E^p\mathfrak{f}2 + \frac{1}{1^{2|1}} . A_2 . E^p\mathfrak{f}1$$

. . . .

und wo $E^p\mathfrak{f}1$, $E^p\mathfrak{f}2$, ... die Vorzahlen in der Reihe 916 sind.

F. Entwickelung der Differentiale nach den Wiederholungen von ∇.

§. 262.

Es sei

$$979)\qquad \nabla Fz = a_0 . Fz + a_1 . F(z+1) + \ldots\ldots + a_m . F(z+m)$$

Man entwickele folgende Reihe:

$$980)\ \frac{d^n fx}{1^{n|1} dx^n} = \begin{array}{l} A^{(n)}_{0,0} . f(x+zh) + A^{(n)}_{0,1} . \nabla^1 f(x+zh) + A^{(n)}_{0,2} . \nabla^2 f(x+zh) + \ldots \\ + A^{(n)}_{1,0} . f(x+(z+1)h) + A^{(n)}_{1,1} . \nabla^1 f(x+(z+1)h) + A^{(n)}_{1,2} . \nabla^2 f(x+(z+1)h) + \ldots \\ + A^{(n)}_{2,0} . f(x+(z+2)h) + A^{(n)}_{2,1} . \nabla^1 f(x+(z+2)h) + A^{(n)}_{2,2} . \nabla^2 f(x+(z+2)h) + \ldots \\ + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ + A^{(n)}_{m-1,0} . f(x+(z+m-1)h) + A^{(n)}_{m-1,1} . \nabla^1 f(x+(z+m-1)h) + A^{(n)}_{m-1,2} . \nabla^2 f(x+(z+m-1)h) + \ldots \end{array}$$

Dieser Reihe erwähnt **Wronski** oft, ohne ihre vollständige Entwickelung zu geben; wir wollen die unserige hier mittheilen. Setzen wir zur Abkürzung

$$\frac{d^n fx}{1^{n|1} dx^n} = X_n$$

so ist

$$f(x+zh) = X_0 . h^0 . z^0 + X_1 . h^1 . z^1 + X_2 . h^2 . z^2 + \ldots.$$

und

$$\begin{aligned} \nabla^r f(x+zh) &= X_0 . h^0 . \nabla^r z^0 + X_1 . h^1 . \nabla^r z^1 + X_2 . h^2 . \nabla^r z^2 + \ldots. \\ \nabla^r f(x+(z+1)h) &= X_0 . h^0 . \nabla^r (z+1)^0 + X_1 . h^1 \nabla^r (z+1)^1 + X_2 . h^2 . \nabla^r (z+1)^2 + \ldots \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \nabla^r f(x+(z+m-1)h) &= X_0 . h^0 . \nabla^r (z+m-1) + X_1 . h^1 . \nabla^r (z+m-1)^1 + \ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Diese Reihen werden nach ihrer Folge vervielfacht mit

$$(p)_0 = \Big[\!\!\Big[\nabla^r(z+1)^0 \; \nabla^r(z+2)^1 \; \nabla^r(z+3)^2 \ldots\ldots \nabla^r(z+m-1)^{m-2} \Big)$$

$$(-)^1 (p)_1 = (-)^1 \Big[\!\!\Big[\nabla^r(z+0)^0 \; \nabla^r(z+2)^1 \; \nabla^r(z+3)^2 \ldots\ldots \nabla^r(z+m-1)^{m-2} \Big)$$

$$(-)^2 (p)_2 = (-)^2 \Big[\!\!\Big[\nabla^r(z+0)^0 \; \nabla^r(z+1)^1 \; \nabla^r(z+3)^2 \ldots\ldots \nabla^r(z+m-1)^{m-2} \Big)$$

. . . .

$$(-)^{m-1}(p)_{m-1} = (-)^{m-1} \Big[\!\!\Big[\nabla^r(z+0)^0 \; \nabla^r(z+1)^1 \; \nabla^r(z+2)^2 \ldots\ldots \nabla^r(z+m-2)^{m-2} \Big)$$

und alle zusammengezählt; es entsteht, wenn zur Abkürzung

$$(p)_0 . \nabla^r f(x+(z+0)h) - (p)_1 . \nabla^r f(x+(z+1)h) + \ldots (-)^{m-1}(p)_{m-1} . \nabla^r f(x+(z+m-1)h) = \varphi(p)$$

und

$$(p)_0 . \nabla^r (z+0)^{m+q-1} - (p)_1 . \nabla^r (z+1)^{m+q-1} + \ldots - \ldots (-)^{m-1}(p)_{m-1} . \nabla^r (z+m-1)^{m+q-1}$$
$$= (-)^{m-1} \Big[\!\!\Big[\nabla^r(z+0)^0 \, \nabla^r(z+1)^1 \ldots\ldots \nabla^r(z+m-2)^{m-2} \nabla^r(z+m-1)^{m+q-1} \Big) = (p)^{(q)}$$

gesetzt wird, die Reihe

$$\varphi(p) = p^{(0)} . h^{m-1} . X_{m-1} + p^{(1)} . h^m . X_m + p^{(2)} . h^{m+1} . X_{m+1} + \ldots .$$

Wird in dieser $p = 0, 1, 2, 3, \ldots\ldots$ gesetzt, so entstehen die Reihen

$$\varphi(0) = 0^{(0)} . h^{m-1} . X_{m-1} + 0^{(1)} . h^m . X_m + 0^{(2)} . h^{m+1} . X_{m+1} + \ldots .$$

$$\varphi(1) = 1^{(0)} . h^{m-1} . X_{m-1} + 1^{(1)} . h^m . X_m + 1^{(2)} . h^{m+1} . X_{m+1} + \ldots .$$

$$\varphi(2) = 2^{(0)} . h^{m-1} . X_{m-1} + 2^{(1)} . h^m . X_m + 2^{(2)} . h^{m+1} . X_{m+1} + \ldots .$$

. . . .

aus welchen durch Elimination, wie es in §. 183 gelehrt ist, X_{m-1}, X_m, X_{m+1}, ... gefunden werden können, nämlich nach 664

$$\begin{aligned} h^{n+m-2}.X_{n+m-2} = & \frac{\big\| 0^{(0)}1^{(1)}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(n-2)^{(n-2)}\big)}{\big\| 0^{(0)}1^{(1)}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(n-2)^{(n-2)}\big)} \cdot \frac{\big\| 0^{(0)}1^{(1)}\ldots(n-2)^{(n-2)}\varphi(n-1)\big)}{\big\| 0^{(0)}1^{(1)}\ldots\ldots\ldots(n-1)^{(n-1)}\big)} \\ & - \frac{\big\| 0^{(0)}1^{(1)}\ldots\ldots\ldots(n-2)^{(n-2)}(n-1)^{(n)}\big)}{\big\| 0^{(0)}1^{(1)}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(n-1)^{(n-1)}\big)} \cdot \frac{\big\| 0^{(0)}1^{(1)}\ldots\ldots(n-1)^{(n-1)}\varphi(n)\big)}{\big\| 0^{(0)}1^{(1)}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots n^{(n)}\big)} \\ & + \frac{\big\| 0^{(0)}1^{(1)}\ldots\ldots(n-2)^{(n-2)}(n-1)^{(n)}n^{(n+1)}\big)}{\big\| 0^{(0)}1^{(1)}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots n^{(n)}\big)} \cdot \frac{\big\| 0^{(0)}1^{(1)}\ldots\ldots\ldots n^{(n)}\varphi(n+1)\big)}{\big\| 0^{(0)}1^{(1)}\ldots\ldots\ldots(n+1)^{(n+1)}\big)} \\ & - \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Wenn nun in diesen Producten mit Versetzungen nach 515 die Factoren $\varphi 0$, $\varphi 1$, $\varphi 2$, ... herausgestellt, und alle Producte nach $\varphi 0$, $\varphi 1$, $\varphi 2$, ... geordnet werden, so entsteht die Reihe

981) $$h^{n+m-2}X_{n+m-2} = A_0^{(n+m-2)}.\varphi 0 + A_1^{(n+m-2)}.\varphi 1 + A_2^{(n+m-2)}.\varphi 2 + \ldots\ldots$$

aus welcher die verlangte Reihe 980 entspringt.

Zweite Abtheilung

wenn

$$f^{n+1}x = A_0 . (f^n x)^b + A_1 . (f^n x)^{b+1.a} + A_2 . (f^n x)^{b+2.a} + \ldots\ldots$$

§. 263.

Eine zweite Art der wiederholenden Functionen sind z. B.

$$\sin\big(\sin(\sin x)\big) \quad , \quad \cos\big(\cos(\cos x)\big) \quad , \quad \mathrm{tg}\big(\mathrm{tg}(\mathrm{tg}\, x)\big) \quad , \text{ u. s. w.}$$

Bei diesen kann man, da

$$\sin x = \frac{x}{1} - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1.2.3.4.5} - \ldots + \ldots$$

nicht setzen

$$\sin(\sin x) = \frac{\sin x}{1} - \frac{\sin(x^3)}{1.2.3} + \frac{\sin(x^5)}{1.2.3.4.5} - \ldots + \ldots$$

sondern

$$\sin(\sin x) = \frac{(\sin x)^1}{1} - \frac{(\sin x)^3}{1.2.3} + \ldots - \ldots + \ldots$$

$$= \frac{1}{1}\left(\frac{x}{1} - \frac{x^3}{1.2.3} + \ldots\right)^1 - \frac{1}{1.2.3}\left(\frac{x}{1} - \frac{x^3}{1.2.3} + \ldots\right)^3 + \ldots - \ldots$$

und so auch bei den übrigen.

Diese Art wiederholender Functionen, welche im Substituiren bestehen, hat zuerst Tralles bekannt gemacht, und zwar in einer Abhandlung, welche von ihm im Jahre 1811 der berliner Akademie übergeben, aber erst im Jahre 1818 in den Denkschriften abgedruckt wurde. Wir erwähnen dieses besonders, weil nur ihm das Verdienst angehört, diese Functionen zuerst aufgestellt, und in die Wissenschaft eingeführt zu haben.

Der Weg aber, den Tralles eingeschlagen, führte ihn fast zu keinem Resultate, denn nur eine Wahrheit, welche wir mit 997 bezeichnet haben, ist das Ergebniss seiner mühevollen Arbeit.

Wir haben hier eine allgemeinere Reihe, als diejenige ist, welche Tralles wählte, zu Grunde gelegt, zugleich einen anderen Weg bei der Untersuchung eingeschlagen, und sind durch Hülfe unserer Analysis zu mehreren Wahrheiten 986, 987, 988, 990, 991 gekommen, die neu und ein Gewinn für die Wissenschaft sind.

§. 264.

Wir wählen für diese Functionen eine sehr allgemeine Form

982) $$f^{n+1}x = A_0.(f^n x)^b + A_1.(f^n x)^{b+1.a} + A_2.(f^n x)^{b+2.a} + \dots.$$

Die ursprüngliche Function ist

$$fx = A_0.x^b + A_1.x^{b+1.a} + A_2.x^{b+2.a} + \dots.$$

Die nächst folgende wird nach 982 gebildet

$$f^2x = A_0.(fx)^b + A_1.(fx)^{b+1.a} + A_2.(fx)^{b+2.a} + \dots\dots$$

und aus dieser die nächstfolgenden f^3x, f^4x,.... Werden die Geschäfte, welche hier durch Zeichen angegeben sind, vorgenommen, so entstehen mehrere Reihen, welche nach den Potenzen von x fortgehen. Diese Reihen lassen sich in zweien Fällen in eine einzige Reihe vereinigen, entweder wenn $b = 0$ oder wenn $b = 1$. Der erste Fall biethet im Allgemeinen nicht viel Stoff zur Untersuchung dar, wenn nicht besondere Eigenschaften der Vorzahlen A_0, A_1, A_2, ... ihn herbeiführen. Es bleibt daher nur der zweite Fall für die Untersuchung übrig.

§. 265.

Es sei

983) $$f^{n+1}x = A_0.(f^n x)^1 + A_1.(f^n x)^{1+1.a} + A_2.(f^n x)^{1+2.a} + A_3.(f^n x)^{1+3.a} + \ldots\ldots$$

Die ursprüngliche Function ist

984) $$fx = A_0.x^1 + A_1.x^{1+a} + A_2.x^{1+2a} + A_3.x^{1+3a} + \ldots.$$

und die erste Wiederholung

$$\begin{aligned} f^2x &= A_0.(fx)^1 + A_1.(fx)^{1+1.a} + A_2.(fx)^{1+2.a} + \ldots. \\ &= A_0.(fx)^1\mathfrak{f}1.x^1 + \left.\begin{array}{r} A_0.(fx)^1\ \ \mathfrak{f}2 \\ + A_1.(fx)^{1+a}\mathfrak{f}1 \\ \end{array}\right| x^{1+1.a} + \left.\begin{array}{r} A_0.(fx)^1\ \ \mathfrak{f}3 \\ + A_1.(fx)^{1+a}\ \mathfrak{f}2 \\ + A_2.(fx)^{1+2n}\mathfrak{f}1 \end{array}\right| x^{1+2.a} + \ldots\ldots \end{aligned}$$

Die folgende Wiederholung erzeugt eine ähnliche Reihe, und die *n* te Wiederholung folgende:

985) $$f^n x = (f^n x)\mathfrak{f}1.x^1 + (f^n x)\mathfrak{f}2.x^{1+1.a} + (f^n x)\mathfrak{f}3.x^{1+2.a} + (f^n x)\mathfrak{f}4.x^{1+3.a} + \ldots.$$

Das Bildungsgesetz der Vorzahlen ergibt sich, wenn $f^m x$ statt x

$$f^{n+m}x = (f^n x)\mathfrak{f}1.(f^m x)^1 + (f^n x)\mathfrak{f}2.(f^m x)^{1+1.a} + (f^n x)\mathfrak{f}3.(f^m x)^{1+2.a} + \ldots\ldots.$$

und

$$(f^m x)^{1+p.a} = (f^m x)^{1+p.a}\mathfrak{f}1.x^{1+p.a} + (f^m x)^{1+p.a}\mathfrak{f}2.x^{1+(p+1).a} + (f^m x)^{1+p.a}\mathfrak{f}3.x^{1+(p+2).a} + \ldots$$

gesetzt wird; nämlich

$$(f^{n+m}x)\mathfrak{f}p = (f^n x)\mathfrak{f}1.(f^m x)^1\mathfrak{f}p + \ldots. + (f^n x)\mathfrak{f}p.(f^m x)^{1+(p-1).a}\mathfrak{f}1$$

Da n und m verwechselt werden können, so veranlasst dieses zu folgender zwiefachen Bildungsweise:

$$
\begin{aligned}
986)\quad (f^{n+m}x)\mathfrak{f}p = \; & (f^{n}x)\mathfrak{f}1\,.\,(f^{m}x)^{1}\mathfrak{f}p & = \; & (f^{m}x)\mathfrak{f}1\,.\,(f^{n}x)^{1}\mathfrak{f}p \\
+ \; & (f^{n}x)\mathfrak{f}2\,.\,(f^{m}x)^{1+1.a}\mathfrak{f}(p-1) & + \; & (f^{m}x)\mathfrak{f}2\,.\,(f^{n}x)^{1+1.a}\mathfrak{f}(p-1) \\
+ \; & (f^{n}x)\mathfrak{f}3\,.\,(f^{m}x)^{1+2.a}\mathfrak{f}(p-2) & + \; & (f^{m}x)\mathfrak{f}3\,.\,(f^{n}x)^{1+2.a}\mathfrak{f}(p-2) \\
+ \; & \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot & + \; & \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\
+ \; & (f^{n}x)\mathfrak{f}p\,.\,(f^{m}x)^{1+(p-1).a}\mathfrak{f}1 & + \; & (f^{m}x)\mathfrak{f}p\,.\,(f^{n}x)^{1+(p-1).a}\mathfrak{f}1
\end{aligned}
$$

§. 266.

Die so eben gefundene Gleichung enthält das Grundgesetz für die Bildung der Vorzahlen. Aus diesem leiten wir ein anderes her, welches viel umfassender ist, und zwar dadurch, dass wir in der Gleichung 986 $p-h$ statt p setzen, die Gleichung mit $(\alpha+h\beta).(f^{m}x)^{1+q.a}\mathfrak{f}(h+1)$ vervielfachen, $h=0, 1, 2, \ldots, p-1$ setzen, alle Gleichungen, welche hiedurch entstehen, zusammenzählen, und nach unserer Analysis Seite 59 Nr. 37

$$
\left.\begin{aligned}
& \alpha.(f^{m}x)^{1+q.a}\mathfrak{f}1.(f^{m}x)^{1+s.a}\mathfrak{f}(p-s) \\
+ & (\alpha+\beta).(f^{m}x)^{1+q.a}\mathfrak{f}2.(f^{m}x)^{1+s.a}\mathfrak{f}(p-s-1) \\
+ & \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot
\end{aligned}\right| = \left(\alpha+\frac{(p-s-1)(1+q.a)\beta}{2+(q+s).a}\right).(f^{m}x)^{2+(q+s).a}\mathfrak{f}(p-s)
$$

$$
+(\alpha+(p-s-1)\beta).(f^{m}x)^{1+q.a}\mathfrak{f}(p-s).(f^{m}x)^{1+s.a}\mathfrak{f}1
$$

setzen; wir erhalten folgende Gleichung:

$$
\begin{aligned}
987)\qquad & \alpha.(f^{n+m}x)\,\mathfrak{f}p\quad .(f^{m}x)^{1+q.a}\mathfrak{f}1 \\
& (\alpha+\beta).(f^{n+m}x)\,\mathfrak{f}(p-1)\,.(f^{m}x)^{1+q.a}\mathfrak{f}2 \\
& + \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\
& +(\alpha+(p-1)\beta).(f^{n+m}x)\,\mathfrak{f}1\quad .(f^{m}x)^{1+q.a}\mathfrak{f}p \\
= \; & \left(\alpha+\frac{(p-1)\,(1+q.a).\beta}{2+q.a}\right).(f^{m}x)^{2+q.a}\quad\mathfrak{f}p\quad .(f^{n}x)\mathfrak{f}1 \\
& + \left(\alpha+\frac{(p-2)\,(1+q.a).\beta}{2+(q+1).a}\right).(f^{m}x)^{2+(q+1).a}\mathfrak{f}(p-1).(f^{n}x)\mathfrak{f}2 \\
& + \left(\alpha+\frac{(p-3)\,(1+q.a).\beta}{2+(q+2)a}\right).(f^{m}x)^{2+(q+2).a}\mathfrak{f}(p-2).(f^{n}x)\mathfrak{f}3 \\
& + \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\
& + \left(\alpha+\frac{(p-p)\,(1+q.a).\beta}{2+(q+p-1).a}\right).(f^{m}x)^{2+(q+p-1).a}\mathfrak{f}1\;.(f^{n}x)\mathfrak{f}p
\end{aligned}
$$

welche das allgemeinste Gesetz für die Bildung der Vorzahlen enthält, denn n, m, q, α, β sind Grössen, die nach Willkühr angenommen werden können.

Setzen wir $\beta = q = 0$, so erhalten wir wieder das Grundgesetz 986, von welchem wir ausgegangen sind. Nehmen wir aber an, dass

$$q = \frac{(1-p).a-2}{a} \text{ und } \alpha = \frac{(1-p).a-1}{a}.\beta$$

so entsteht die Gleichung

$$988) \quad \begin{aligned} & (1+(p-1).a).(f^{n+m}x)\mathfrak{f}p \quad .(f^m x)^{-1-(p-1).a}\mathfrak{f}1 \\ + & (1+(p-2).a).(f^{n+m}x)\mathfrak{f}(p-1).(f^m x)^{-1-(p-1).a}\mathfrak{f}2 \\ + & (1+(p-3).a).(f^{n+m}x)\mathfrak{f}(p-2).(f^m x)^{-1-(p-1).a}\mathfrak{f}3 \\ + & \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \\ + & (1+(p-p).a).(f^{n+m}x)\mathfrak{f}1 \quad .(f^m x)^{-1-(p-1).a}\mathfrak{f}p \\ & = (1+(p-1).a).(f^n x)\mathfrak{f}p \end{aligned}$$

welche für die Bildung der Vorzahlen sehr wichtig ist, wie sich bald zeigen wird.

§. 267.

Alle diese Gleichungen 986, 987, 988 geben die zurücklaufende Bildungsweise der Vorzahlen in der Reihe 985. Die unabhängige Bildungsweise derselben ist mit vielen Schwierigkeiten verbunden; wir haben aus 986 für die ersten Glieder folgendes Gesetz gefunden:

$$989) \quad (f^0 x)\mathfrak{f}1 = 1, \; (f^0 x)\mathfrak{f}2 = (f^0 x)\mathfrak{f}3 = \ldots = 0$$

und

990) $$(f^{+n}x)\mathfrak{k}1 = A_0^{+n} \quad , \qquad (f^{-n}x)\mathfrak{k}1 = A_0^{-n}$$

$$(f^{+n}x)\mathfrak{k}2 = \frac{A_0^{n.a} - 1}{A_0^{n} - 1} . A_0^{n-1} . A_1$$

$$(f^{+n}x)\mathfrak{k}3 = \frac{A_0^{2n.a} - 1}{A_0^{2a} - 1} . A_0^{n-1} . A_2^1 + (1 + a) . \frac{(A_0^{n.a} - 1)(A^{(n-1).a} - 1)}{(A_0^{1.a} - 1)(A_0^{2.a} - 1)} . A_0^{n-2+a} . A_1^2$$

Wir überlassen dem Leser die allgemeine unabhängige Bildungsweise selbst aufzusuchen.

§. 268.

Für die verneinten Wiederholungen erhalten wir aus 988 eine sehr merkwürdige Wahrheit; setzen wir nämlich $n = -m$, so wird

991) $$(f^m x)^{-1-(p-1).a}\mathfrak{k}p = (1 + (p-1).a).(f^{-m}x)\mathfrak{k}p$$

$$\text{oder} \quad (f^{-m}x)\mathfrak{k}p = \frac{1}{1 + (p-1).a} . (f^m x)^{-1-(p-1).a}\mathfrak{k}p$$

Diese Gleichung zeigt, dass die verneinten Wiederholungen aus den bejaheten Wiederholungen nach den Gesetzen des Polynomiums hergeleitet werden können. Nach diesem finden wir, weil

$$f^{-m}x = (f^{-m}x)\mathfrak{k}1 . x^1 + (f^{-m}x)\mathfrak{k}2 . x^{1+1.a} + (f^{-m}x)\mathfrak{k}3 . x^{1+2.a} + \dots .$$

dass

992) $$f^{-m}x = \frac{1}{1}.(f^m x)^{-1}\mathfrak{k}1.x^1 + \frac{1}{1+1.a}.(f^m x)^{-1-1.a}\mathfrak{k}2.x^{1+1.a} + \frac{1}{1+2.a}.(f^m)^{-1-2.a}.x^{1+2a} + \dots$$

und wenn $f^m x$ statt x gesetzt wird, dass

993) $x^1 =$

$$\frac{1}{1}.(f^m x)^{-1}\mathfrak{k}1.(f^m x)^1 + \frac{1}{1+1.a}.(f^m x)^{-1-1.a}\mathfrak{k}2.(f^m x)^{1+1.a} + \frac{1}{1+2.a}.(f^m x)^{-1-2.a}\mathfrak{k}3.(f^m x)^{1+2.a} + \dots .$$

Nehmen wir den einzelnen Fall, wo $m = 1$ ist, so erhalten wir die Reihe

994) $$x^1 = \frac{1}{1} . (fx)^{-1} \mathfrak{f}1 . (f^1x)^1 + \frac{1}{1+1.a} . (f^1x)^{-1-1.a} \mathfrak{f}2 . (f^1x)^{1+1.a} + \ldots\ldots$$

welche auch nach unserer Analysis Seite 72 durch Umkehrung der Reihen entstehen muss.

Ist z. B.

$$fx = \sin : x = \frac{x}{1} - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1.2.3.4.5} - \ldots + \ldots$$

so ist $x = \sin : x =$

$$\frac{1}{1}.(\sin:x)^{-1}\mathfrak{f}1.(\sin:x)^1 + \frac{1}{3}.(\sin:x)^{-3}\mathfrak{f}2(\sin:x)^3 + \frac{1}{5}.(\sin:x)^{-5}\mathfrak{f}3.(\sin:x)^5 + \ldots$$

$$= \frac{1}{1}.(\sin:x)^1 + \frac{1}{2.3}.(\sin:x)^3 + \frac{1.3}{2.4.5}.(\sin:x)^5 + \ldots.$$

und

$$\sin^{-1} : x = \frac{1}{1}.(\sin:x)^{-1}\mathfrak{f}1 . x^1 + \frac{1}{3}.(\sin:x)^{-3}\mathfrak{f}2 . x^3 + \ldots.$$

$$= \frac{1}{1}.x + \frac{1}{2.3}.x^3 + \frac{1.3}{2.4.5}.x^5 + \ldots.$$

§. 269.

Die *n*te Wiederholung von fx lässt sich in eine Reihe, geordnet nach der Wiederholungszahl n, entwickeln, so dass

995) $$f^n x = B_0 + B_1 . n^{1l-1} + B_2 . n^{2l-1} + B_3 . n^{3l-1} + \ldots\ldots$$

Die Vorzahlen ergeben sich aus den Gleichungen:

$$f^0 x = B_0$$

$$f^1 x = B_0 + B_1 . 1$$

$$f^2 x = B_0 + B_1 . 2 + B_2 . 2 . 1$$

. . . .

welche entstehen, wenn $n = 0, 1, 2, \ldots$ gesetzt wird; man findet, dass

996)
$$\begin{aligned}
B_0 &= f^0x \\
B_1 &= \frac{1}{1^{1|1}} \,.\, (f^1x - f^0x) \\
B_2 &= \frac{1}{1^{2|1}} \,.\, (f^2x - 2\,.\,f^1x + f^0x) \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Es ist folglich

997)
$$\begin{aligned}
f^nx = {} & \frac{n^{0|-1}}{1^{0|1}} \,.\, f^0x & = {} & \frac{n^{0|-1}}{1^{0|1}} \,.\, (f-1)^0x \\
& + \frac{n^{1|-1}}{1^{1|1}} \,.\, (f^1x - f^0x) & & + \frac{n^{1|-1}}{1^{1|1}} \,.\, (f-1)^1x \\
& + \frac{n^{2|-1}}{1^{2|1}} \,.\, (f^2x - 2\,.\,f^1x + f^0x) & & + \frac{n^{2|-1}}{1^{2|1}} \,.\, (f-1)^2x \\
& + \frac{n^{3|-1}}{1^{3|1}} \,.\, (f^3x - 3\,.\,f^2x + 3\,.\,f^1x - f^0x) & & + \frac{n^{3|-1}}{1^{3|1}} \,.\, (f-1)^3x \\
& + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & & + \ldots\ldots
\end{aligned}$$

oder $$= \big(1 + (f-1)\big)^nx$$

Von dieser Reihe ist der Uebergang zu der Reihe

998) $$f^nx = G_0\,.\,n^0 + G_1\,.\,n^1 + G_2\,.\,n^2 + \ldots$$

leicht, und besteht darin, dass $n^{r|-1}$ in Potenzen von n aufgelöst wird.

Dritte Abtheilung.

Periodische Functionen.

§. 270.

Unter den wiederholenden Functionen der zweiten Art sind besonders jene merkwürdig, welche nach zweien oder mehreren Wiederholungen die ursprüngliche Function wieder erzeugen; ist z. B.

$$\varphi x = a - x$$

so ist

$$\varphi^2 x = a - \varphi x = a - (a - x) = x$$

folglich

$$\varphi^1 x = \varphi^3 x = \varphi^5 x = \ldots\ldots = a - x$$

und

$$\varphi^0 x = \varphi^2 x = \varphi^4 x = \ldots\ldots = x$$

Oder ist

$$\varphi x = \frac{2}{2-x}$$

so ist

$$\varphi^2 x = \frac{2}{2-\varphi x} = \frac{2-x}{1-x}$$

$$\varphi^3 x = \frac{2}{2-\varphi^2 x} = -\frac{2(1-x)}{x}$$

$$\varphi^4 x = \frac{2}{2-\varphi^3 x} = x$$

und also

$$\varphi^1 x = \varphi^5 x = \varphi^9 x = \varphi^{13} x = \ldots\ldots\ldots = \frac{2}{2-x}$$

$$\varphi^2 x = \varphi^6 x = \varphi^{10} x = \varphi^{14} x = \ldots\ldots\ldots = \frac{2-x}{1-x}$$

$$\varphi^3 x = \varphi^7 x = \varphi^{11} x = \varphi^{15} x = \ldots\ldots\ldots = -\frac{2(1-x)}{x}$$

$$\varphi^0 x = \varphi^4 x = \varphi^8 x = \varphi^{12} x = \ldots\ldots\ldots = x$$

Andere Functionen erzeugen bei der dritten oder fünften, ... Wiederholung das ursprüngliche Element. Man kann sie periodisch wiederkehrende Functionen nennen.

§. 271.

Diese periodisch wiederkehrenden Functionen lassen sich auf folgende Weise aufsuchen. Es sei

$$\varphi x = \frac{a+b.x}{c+d.x}$$

es sollen a, b, c, d so bestimmt werden, dass

$$\varphi^2 x = x$$

Da

$$\varphi^2 x = \frac{a+b\,\varphi x}{c+d\,\varphi x} = \frac{a(b+c)+(ad+b^2)x}{ad+c^2+d(b+c)x} = x$$

so müssen folgende Bedingungen erfüllt werden:

$$a.(b+c) = 0$$

$$d.(b+c) = 0$$

$$ad+b^2 = ad+c^2 \text{ oder } (b-c)(b+c) = 0$$

Allen dreien Gleichungen geschieht Genüge, wenn $b+c=0$ oder $b=-c$.

Ist also $\varphi x = \frac{a-c.x}{c+d.x}$, so ist auch $\varphi^2 x = x$

§. 272.

Eben so verfährt man, wenn $\varphi x = \frac{a+bx}{c+dx}$ und $\varphi^3 x = x$ sein soll. Es ist

$$\varphi^2 x = \frac{a+b.\varphi x}{c+d.\varphi x} = \frac{a(b+c) + (ad+b^2)x}{ad+c^2 + d(b+c)x}$$

$$\varphi^3 x = \frac{a+b.\varphi^2 x}{c+d.\varphi^2 x} = \frac{a(ad+bc+b^2+c^2) + (2abd+acd+b^3)x}{abd+2acd+c^3 + d(ad+bc+b^2+c^2)x}$$

Die obige Bedingung wird durch folgende Gleichungen erfüllt:

$$a(ad+bc+b^2+c^2) = 0$$

$$d(ad+bc+b^2+c^2) = 0$$

$2abd + acd + b^3 = abd + 2acd + c^3$ oder $(b-c)(ad+bc+b^2+c^2) = 0$ und allen diesen geschicht Genüge, wenn man annimmt, dass

$$ad+bc+b^2+c^2 = 0 \quad \text{oder} \quad d = -\frac{b^2+bc+c^2}{a}$$

Ist also $\varphi x = \frac{a(a+bx)}{ac-(b^2+bc+c^2)x}$, so ist auch $\varphi^3 x = x$, mithin

$$\varphi^0 x = \varphi^3 x = \varphi^6 x = \varphi^9 x = \ldots\ldots = x$$

$$\varphi^1 x = \varphi^4 x = \varphi^7 x = \varphi^{10} x = \ldots\ldots = \frac{+a(a+bx)}{ac-(b^2+bc+c^2)x}$$

$$\varphi^2 x = \varphi^5 x = \varphi^8 x = \varphi^{11} x = \ldots\ldots = \frac{-a(a-cx)}{ab+(b^2+bc+c^2)x}$$

§. 273.

Wir wollen diese Untersuchung verallgemeinern. Wir nehmen an, dass

$$\varphi x = \frac{a+b.x}{c+d.x}$$

und suchen erstens die Gesetze, denen bei der *m*ten Wiederholung von φ

$$\varphi^m x = \frac{A_m + B_m . x}{C_m + D_m . x}$$

die Grössen A_m, B_m, C_m, D_m im allgemeinen unterworfen sind, und zweitens die Beschaffenheit der Elemente a, b, c, d, wenn φx eine periodisch zurückkehrende Function oder wenn $\varphi^n x = x$ sein soll.

Die Gesetze für A_m, B_m, C_m, D_m gründen sich auf die verschiedene Bildungsweise von $\varphi^{n+m} x$; es ist nämlich

$$\varphi^{n+m} x = \varphi^n(\varphi^m x) = \varphi^m(\varphi^n x) = \frac{A_n + B_n . \varphi^m x}{C_n + D_n . \varphi^m x} = \frac{A_m + B_m . \varphi^n x}{C_m + D_m . \varphi^n x}$$

oder

$$\frac{A_{m+n} + B_{m+n} . x}{C_{m+n} + D_{m+n} . x} = \frac{A_n + B_n . \dfrac{A_m + B_m . x}{C_m + D_m . x}}{C_n + D_n . \dfrac{A_m + B_m . x}{C_m + D_m . x}} = \frac{A_m + B_m . \dfrac{A_n + B_n x}{C_n + D_n x}}{C_m + D_m . \dfrac{A_n + B_n x}{C_n + D_n x}}$$

folglich

999)
$$\begin{aligned}
A_{m+n} &= A_m . C_n + B_m . A_n = A_n . C_m + B_n . A_m \\
B_{m+n} &= A_m . D_n + B_m . B_n = A_n . D_m + B_n . B_m \\
C_{m+n} &= D_m . A_n + C_m . C_n = D_n . A_m + C_n . C_m \\
D_{m+n} &= D_m . B_n + C_m . D_n = D_n . B_m + C_n . D_m
\end{aligned}$$

Diese Gleichungen enthalten das Grundgesetz, aus welchem mehrere andere hergeleitet werden können. Unmittelbar aus ihnen ergibt sich folgendes:

1000)
$$\frac{A_n}{A_m} = \frac{C_n - B_n}{C_m - B_m} = \frac{D_n}{D_m}$$

Eine zweite Folge aus ihnen ist

1001) $B_{m+n} . C_{m+n} - A_{m+n} . D_{m+n} = (B_m . C_m - A_m . D_m)(B_n . C_n - A_n . D_n)$

aus welcher Gleichung, wenn $n = 1$, $m = 1, 2, 3, \ldots$ gesetzt wird, folgende entspringt:

1002) $$B_n . C_n - A_n . D_n = (bc - ad)^n$$

Eine dritte Folge aus 999 ist, wenn zugleich auf 1002 Rücksicht genommen und $m - n$ statt m gesetzt wird,

1003) $$B_m . C_n - A_m . D_n = B_{m-n} . (b.c - a.d)^n$$
$$C_m . B_n - A_m . D_n = C_{m-n} . (b.c - a.d)^n$$
$$B_m . C_n - C_m . B_n = (B_{m-n} - C_{m-n}) . (bc - ad)^n$$

Viertens erhalten wir durch Zusammenzählen der Gleichungen, wobei die Gleichung 1002 berücksichtiget wird,

$$A_{m+n} = A_m . C_n + B_m . A_n$$
$$B_m . A_n = A_n (A_{m-n} . D_n + B_{m-n} . B_n)$$
$$0 = A_m . B_n - B_n (A_{m-n} . C_n + B_{m-n} . A_n)$$

und so auch durch drei ähnliche Gleichungen für B_{m+n}, C_{m+n}, D_{m+n}, welche sämmtlich nach den Grundgleichungen 999 gebildet werden, folgende vier Gleichungen:

1004) $$A_{m+n} = A_m . (B_n + C_n) - A_{m-n} . (bc - ad)^n$$
$$B_{m+n} = B_m . (B_n + C_n) - B_{m-n} . (bc - ad)^n$$
$$C_{m+n} = C_m . (B_n + C_n) - C_{m-n} . (bc - ad)^n$$
$$D_{m+n} = D_m . (B_n + C_n) - D_{m-n} . (bc - ad)^n$$

Diese letzten Gleichungen enthalten eine einfache zurücklaufende Bildungsweise, und zeigen, dass man wenigstens zwei Glieder kennen muss, wenn man die übrigen bilden will. Da nun

$A_1 = a$, $B_1 = b$, $C_1 = c$, $D_1 = d$

$A_2 = a.(b+c)$ $B_2 = b.(b+c)-(bc-ad)$ $C_2 = c.(b+c)-(bc-ad)$ $D_2 = d.(b+c)$

so können nach vorstehenden Gleichungen alle übrigen Grössen A_m, B_m, C_m, D_m aus ihnen hergeleitet werden. Zuletzt ergeben sich aus 999, 1000, 1004 noch drei andere Gleichungen

1005) $$a . B_m = b . A_m - (bc - ad) . A_{m-1}$$
$$a . C_m = c . A_m - (bc - ad) . A_{m-1}$$
$$a . D_m = d . A_m$$

durch welche B_m, C_m, D_m aus A_m und A_{m-1} hergeleitet werden können.

Vorzüglich wichtig sind die Werthe von A_0, B_0, C_0, D_0 und besonders auch das Verhältniss von A_{-n}, B_{-n}, C_{-n}, D_{-n} zu den Gliedern mit bejaheten Stellenzahlen. Wir finden die ersteren aus den Gleichungen 1004, wenn wir $m = n = 1$ setzen,

$$A_2 = A_1 (B_1 + C_1) - A_0 (bc - ad)^1$$
$$B_2 = B_1 (B_1 + C_1) - B_0 (bc - ad)^1$$
$$C_2 = C_1 (B_1 + C_1) - C_0 (bc - ad)^1$$
$$D_2 = D_1 (B_1 + C_1) - D_0 (bc - ad)^1$$

und es ist

1006) $$A_0 = 0 \quad , \quad B_0 = 1 \quad , \quad C_0 = 1 , \quad D_0 = 0$$

Die Glieder mit verneinten Stellenzahlen erhalten wir aus derselben Gleichung 1004, wenn wir $m = 0$ annehmen, nämlich:

1007) $$A_{-n} = - A_{+n} . (bc - ad)^{-n} \quad , \quad B_{-n} = + C_{+n} . (bc - ad)^{-n}$$
$$C_{-n} = + B_{+n} . (b.c - ad)^{-n} \quad , \quad D_{-n} = - D_{+n} . (bc - ad)^{-n}$$

Aus diesem geht hervor, dass

1008) $$A_{-1} = - a . (bc - ad)^{-1} \quad , \quad B_{-1} = + c . (bc - ad)^{-1}$$
$$C_{-1} = + b . (bc - ad)^{-1} \quad , \quad D_{-1} = - d . (bc - ad)^{-1}$$

und nicht $A_{-1} = - a$, $B_{-1} = c$, $C_{-1} = b$, $D_{-1} = - d$, wie man wohl aus

$$x = \frac{a + b \varphi^{-1} x}{c + d \varphi^{-1} x} \text{ oder vielmehr aus } \varphi^{-1} x = \frac{- a + c . x}{b - d . x}$$

schliessen könnte.

Gehen wir jetzt zu der unabhängigen Bildungsweise von A_m, B_m, C_m, D_m über, so erhalten wir aus 1004, wenn wir zur Abkürzung

1009) $$b + c = h \quad \text{und} \quad ad - bc = k$$

setzen, folgende Werthe

$$A_1 = a$$
$$A_2 = a . h$$
$$A_3 = a(h^2 + k^1)$$
$$A_4 = a(h^3 + 2h^1 k^1)$$
$$A_5 = a(h^4 + 3h^2 k^1 + k^2)$$
$$A_6 = a(h^5 + 4h^3 k^1 + 3h^1 k^2)$$
$$. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$

und allgemein, dass

1010) $$A_m = a . \left(h^{m-1} + \frac{(m-2)^{1|-1}}{1^{1|1}} h^{m-3} . k^1 + \frac{(m-3)^{2|-1}}{1^{2|1}} h^{m-5} . k^2 + \frac{(m-4)^{3|-1}}{1^{3|1}} h^{m-7} . k^3 + \ldots \right.$$

Es ist daher für

$$\varphi x = \frac{a + bx}{c + dx}$$

die *m* te Wiederholung

1011) $$\varphi^m x = \frac{a . A'_m + (b . A'_m + k . A'_{m-1}) . x}{(c . A'_m + k . A'_{m-1}) + d . A'_m . x}$$

wo

1012) $$h^{m-1} + \frac{(m-2)^{1|-1}}{1^{1|1}} . h^{m-3} k^1 + \frac{(m-3)^{2|-1}}{1^{2|1}} h^{m-5} k^2 + \ldots\ldots = A'_m$$

§. 274.

Wir gehen jetzt zum zweiten Theile der Hauptaufgabe, welche wir oben vorgelegt haben, über, nach welcher

$$\varphi^n x = x$$

sein soll. Diese Gleichung fordert folgende Bedingungen:

$$A_n = 0,\ D_n = 0,\ B_n = C_n$$

oder $a . A'_n = 0\ ,\quad d . A'_n = 0$ und

$$b . A'_n + k . A'_{n-1} = c . A'_n + k . A'_{n-1} \quad \text{oder} \quad (b-c)A'_n = 0$$

und allen diesen dreien geschieht Genüge, wenn $A'_n = 0$, oder

$$h^{n-1} + \frac{(n-2)^{1|-1}}{1^{1|1}} . h^{n-3} . k^1 + \frac{(n-3)^{2|-1}}{1^{2|1}} . h^{n-5} . k^2 + \frac{(n-4)^{3|-1}}{1^{3|1}} . h^{n-7} k^3 + \ldots\ldots = 0$$

Um die Wurzeln dieser Gleichung zu finden, setze man $k = -\left(\frac{h}{2.\cos.\delta}\right)^2$, dadurch wird

$$A_n = a.\left(\frac{h}{2\cos\delta}\right)^{n-1} . \left((2\cos{:}\delta)^{n-1} - \frac{(n-2)^{1|-1}}{1^{1|1}}.(2\cos{:}\delta)^{n-3} + \frac{(n-3)^{2|-1}}{1^{2|1}}.(2\cos{:}\delta)^{n-5} - \ldots\right)$$

oder

$$A_n = a . \left(\frac{h}{2\cos\delta}\right)^{n-1} . \frac{\sin n\delta}{\sin\delta}$$

Diese Gleichung gibt an, dass A_n verschwindet, wenn $\delta = \frac{p . \pi}{n}$,

wo $p = 1, 2, 3, \ldots\ldots$ und $p < \frac{n}{2}$ ist.

Aus der obigen Gleichung 999

$$ad - bc = -\left(\frac{b+c}{2\cos\delta}\right)^2$$

ergibt sich zuletzt der Werth von d nämlich

$$d = -\frac{1}{2a} . \frac{b^2 - 2 . b . c . \cos\frac{2\,p . \pi}{n} + c^2}{1 + \cos\frac{2\,p\,\pi}{n}}$$

welcher in die Function φx eingeführt werden muss.

Ist also

$$1013) \quad \varphi x = \frac{2a.\left(1 + \cos\frac{2p\pi}{n}\right)(a + bx)}{2ac.\left(1 + \cos\frac{2p\pi}{n}\right) - \left(b^2 - 2bc.\cos\frac{2p\pi}{n} + c^2\right).x}$$

so ist auch

$$\varphi^n x = x$$

Diese Gleichung 1013 findet zuerst Horner in den Annals of philosophy Vol X London 1817 Seite 344.

Ist n gerade, so lässt

$$\varphi^n x = x$$

$\frac{n}{2} - 1$ Auflösungen zu, hingegen $\frac{n-1}{2}$ Auflösungen, wenn n ungerade ist.

§. 275.

φ^{-1} und φ^{+1} heben sich gegen einander auf, und zwar nur dann, wenn sie unmittelbar aufeinander folgen, aber nicht, wenn noch eine Functionsweise zwischen sie geschoben wird; wir wollen das, was durch $\varphi^{-1} f \varphi^1$ entsteht, mit ψ bezeichnen, so dass

$$\psi x = \varphi^{-1} f \varphi x$$

Wiederholen wir diese Geschäfte in derselben Ordnung wieder, so heben sich zwei von ihnen auf, und es ist

$$\psi^2 x = \varphi^{-1} f \varphi(\varphi^{-1} f \varphi x) = \varphi^{-1} f^2 \varphi x$$

und eben so, wenn sie nochmal wiederholt werden

$$\psi^3 x = \varphi^{-1} f \varphi(\varphi^{-1} f^2 \varphi x) = \varphi^{-1} f^3 \varphi x$$

und algemein

1014) Ist $\psi x = \varphi^{-1} f \varphi x$, so ist $\psi^m x = \varphi^{-1} f^m \psi x$

Oder statt 3m werden nur m+2 Geschäfte vorgenommen.

§. 276.

Dieses gegenseitige Aufheben der Functionen bei mehrmaliger Wiederholung in derselben Ordnung führt zu wichtigen Resultaten.

Ist nämlich fx eine solche Function, dass ihre *n* te Wiederholung das ursprüngliche Element x wieder erzeugt, oder dass

$$f^n x = x$$

so ist auch

$$f^n \varphi x = \varphi x$$

mithin

$$\psi^n x = \varphi^{-1} f^n \varphi x = \varphi^{-1} \varphi x = x$$

1015) Ist also $f^n x = x$, so ist auch $\varphi^{-1} f^n \varphi x = x$

Durch diese Wahrheit wird das Feld der Untersuchung sehr erweitert. Von der Wichtigkeit derselben nur folgende Proben:

Wenn $\varphi x = a - x$, so ist $\varphi^2 x = x$ also auch

wenn $\varphi x = \lg : (a - e^x)$, so ist $\varphi^2 x = x$

wenn $\varphi x = \mathrm{Arc} : \big(\mathrm{tg} = (a - \mathrm{tg} x)\big)$, so ist $\varphi^2 x = x$

Ferner wenn $\varphi x = \frac{x}{x-1}$, so ist $\varphi^2 x = x$ also auch

wenn $\varphi x = \frac{x}{\sqrt[m]{(x^m - 1)}}$, so ist $\varphi^2 x = x$

wenn $\varphi x = x - \lg : (e^x - 1)$, so ist $\varphi^2 x = x$

Ferner wenn $\varphi x = \frac{a^2}{a - x}$, so ist $\varphi^3 x = x$, also auch

wenn $\varphi x = \lg \left(\frac{a^2}{a - e^x} \right) = 2 . \lg : a - \lg (a - e^x)$, so ist $\varphi^3 x = x$

wenn $\varphi x = \frac{a^2}{\sqrt[m]{(a^m - x^m)}}$, so ist $\varphi^3 x = x$

Diese periodisch wiederkehrenden Functionen hat Babbage entdeckt, und zuerst in den philosophical transactions ..... London 1815 P. I. Seite 389 bekannt gemacht. Die Gleichung 1013 findet zuerst Horner in den Annals of philosophy Vol. X. 1817 Seite 344 aber auf einem anderen Wege, als den wir hier eingeschlagen. Die Gleichungen 999, 1000, ..., 1011 machen wir hier zuerst bekannt. Die wichtige Wahrheit 1014, 1015 gehört dem Herrn Babbage.

THEORIE
DER
ALLGEMEINSTEN
FACULTAETEN.

THEORIE
DER
ALLGEMEINSTEN
FACULTAETEN.

I. Das Bilden der allgemeinsten Facultäten.

§. 277.

Kramp machte im Jahre 1799 die Facultäten

$$x^{n|h} = x(x+h)(x+2h) \ldots\ldots (x+(n-1)h)$$

bekannt. Im Jahre 1820 haben wir in unserer Analysis die Exponential-Facultäten

$$(1+u.a^{x})(1+u.a^{x+h})(1+u.a^{x+2h}) \ldots\ldots (1+u.a^{x+(n-1)h}) = (1+u.a^{x})^{n;h}$$

in die Wissenschaft eingeführt, und die Gesetze ihrer Entwickelung in Reihen sowohl im allgemeinen als im besonderen gefunden.

Schon im Jahre 1812 haben wir bei einer Untersuchung über fortlaufende Brüche die Facultäten

$$\varphi_{m} \cdot \varphi_{m+1} \cdot \varphi_{m+2} \cdot \ldots \cdot \varphi_{m+n-1} = (\varphi_{m})^{n|1}$$

welche wir allgemeinste Facultäten nennen wollen, gebraucht.

Im Jahre 1821 lernten wir aber die Arbeiten von Wronski kennen, und fanden, dass ihm die Ehre gebührt, die allgemeinsten Facultäten zuerst untersucht und bekannt gemacht zu haben.

Die ganze Untersuchung wollen wir in folgender Ordnung vornehmen:

I. Bildung der allgemeinsten Facultäten.

II. Entwickelung derselben in Reihen.

III. Entwickelung einer Function in eine Reihe nach den Facultäten einer anderen Function.

IV. Producte der Reihen, welche nach den Facultäten einer Function fortgehen.

Die Resultate in II und III hat Wronski gegeben, aber nicht die Wege gezeigt, welche zu ihnen führen.

Das merkwürdige Gesetz, welches in IV die Producte befolgen, haben wir gefunden, und machen es hier zuerst bekannt.

§. 278.

Wird φx mit $\varphi(x+h)$, $\varphi(x+2h)$, $\varphi(x+3h)$, ... vervielfacht, so entstehen die Producte

$$\varphi x = (\varphi x)^{1|h}$$

$$\varphi x . \varphi(x+h) = (\varphi x)^{2|h}$$

$$\varphi x . \varphi(x+h) . \varphi(x+2h) = (\varphi x)^{3|h}$$

$$\varphi x . \varphi(x+h) . \varphi(x+2h) . \varphi(x+3h) = (\varphi x)^{4|h}$$

. . . .

und wird φx durch φx, $\varphi(x-h)$, $\varphi(x-2h)$, ... gemessen, so wird

$$1 = (\varphi x)^{0|h}$$

$$\frac{1}{\varphi(x-h)} = (\varphi x)^{-1|h}$$

$$\frac{1}{\varphi(x-h) . \varphi(x-2h)} = (\varphi x)^{-2|h}$$

$$\frac{1}{\varphi(x-h) . \varphi(x-2h) . \varphi(x-3h)} = (\varphi x)^{-3|h}$$

. . . .

Hiedurch entsteht eine Reihe

1016) $\ldots (\varphi x)^{-3|h}, (\varphi x)^{-2|h}, (\varphi x)^{-1|h}, (\varphi x)^{0|h}, (\varphi x)^{1|h}, (\varphi x)^{2|h}, (\varphi x)^{3|h}, \ldots$

in welcher jedes Glied aus seinem vorhergehenden nämlich das $(p+1)$ te aus dem $p$ten entsteht, wenn das $p$te Glied mit $\varphi(x+ph)$ vervielfacht wird, und umgekehrt das vorhergehende Glied aus seinem unmittelbar folgenden Gliede, oder das $p$te aus dem $(p+1)$ten, wenn das $(p+1)$te Glied durch $\varphi(x+ph)$ gemessen wird, so dass

1017) $$(\varphi x)^{p+1|h} = (\varphi x)^{p|h} \times \varphi(x+ph)$$

und

$$(\varphi x)^{p|h} = \frac{(\varphi x)^{p+1|h}}{\varphi(x+ph)}$$

Nach diesem ist

1018) $$(\varphi x)^{+m|h} = \varphi x . \varphi(x+h) . \varphi(x+2h) \ldots . \varphi(x+(m-1)h)$$

$$(\varphi x)^{-m|h} = \frac{1}{\varphi(x-h) . \varphi(x-2h) . \varphi(x-3h) \ldots . \varphi(x-mh)}$$

$$= \frac{1}{(\varphi(x-h))^{m|-h}} = \frac{1}{(\varphi(x-mh))^{m|h}}$$

$$(\varphi x)^{0|h} = 1$$

§. 279.

Für diese Producte finden wir zwei Gleichungen, welche die Grundlagen zu jeder Untersuchung über diese Producte sind. Die erste ist

1019) $$(\varphi x)^{m+n|h} = (\varphi x)^{m|h} . (\varphi(x+mh))^{n|h} = (\varphi x)^{n|h} . (\varphi(x+nh))^{m|h}$$

welche nur eine verschiedene Abtheilung der Factoren des ganzen Products angibt.

Die zweite Gleichung ist

1020) $$((\varphi x)^{m|h})^{n|k} = ((\varphi x)^{n|k})^{m|h}$$

sie gibt die verschiedenen Arten an, auf welche folgende Factoren zu einem und demselben Producte gruppirt werden können:

$$\begin{array}{lllll}
\varphi x & .\ \varphi(x+1h) & .\ \varphi(x+2h) & \ldots\ldots & \varphi(x+(m-1)h) \\
\times\ \varphi(x+1k) & .\ \varphi(x+1k+1h) & .\ \varphi(x+1k+2h) & \ldots\ldots & \varphi(x+1k+(m-1)h) \\
\times\ \varphi(x+2k) & .\ \varphi(x+2k+1h) & .\ \varphi(x+2k+2h) & \ldots\ldots & \varphi(x+2k+(m-1)h) \\
\times\ \varphi(x+3k) & .\ \varphi(x+3k+1h) & .\ \varphi(x+3k+2h) & \ldots\ldots & \varphi(x+3k+(m-1)h) \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
\times\ \varphi(x+(n-1)k) & .\ \varphi(x+(n-1)k+1h) & .\ \varphi(x+(n-1)k+2h) & \ldots & \varphi(x+(n-1)k+(m-1)h)
\end{array}$$

Nimmt man an, dass $k = mh$, so geht die Gleichung 1020 in folgende über:

1021) $$(\varphi x)^{m \cdot n|h} = \left((\varphi x)^{m|h}\right)^{n|mh} = \left((\varphi x)^{n|mh}\right)^{m|h}$$

und nimmt man an, dass $m . n = 1$ und $h = n . h$, so wird

1022) $$\varphi x = \left((\varphi x)^{\frac{1}{n}|nh}\right)^{n|h} = \left((\varphi x)^{n|h}\right)^{\frac{1}{n}|nh}$$

§. 280.

Diesem Algorithmus kann eine scheinbar grössere Allgemeinheit gegeben werden, wenn

1023) $$(\varphi(z+afx))^{m|h} = \varphi(z+afx) . \varphi(z+af(x+h)) . \varphi(z+af(x+2h)) \ldots \varphi(z+af(x+(m-1)h))$$

gesetzt wird. Da aber nur x sich ändert, so kann $\varphi(z+afx)$ als Function von x betrachtet und $\varphi(z+afx) = Fx$ und also

1024) $$(\varphi(z+afx))^{m|h} = (Fx)^{m|h} = Fx . F(x+h) . F(x+2h) \ldots . F(x+(m-1)h)$$

gesetzt werden. Es lässt sich also $(\varphi(z+afx))^{m|h}$ nur als eine besondere Form von $(\varphi x)^{m|h}$ ansehen.

§. 281.

Dieser Algorithmus kann auf mehrere veränderliche Grössen, welche zu gleicher Zeit zu oder abnehmen, ausgedehnt werden, so dass

1025) $(\varphi(x,y))^{+m|h,k} = \varphi(x,y).\varphi(x+h,y+k)\ldots\ldots\varphi(x+(m-1)h,y+(m-1)k)$

und für ein verneintes m

1026) $(\varphi(x,y))^{-m|h,k} = \frac{1}{\varphi(x-h,y-k).\varphi(x-2h,y-2k)\ldots\ldots\varphi(x-mh,y-mk)}$

und wenn $m = 0$ ist

1027) $$(\varphi(x,y))^{0|h,k} = 1$$

und eben so auch auf mehrere veränderliche Grössen wie

$$(\varphi(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n))^{m|h1,h2,h3,\ldots,hn}$$

§. 282.

Jede Function von x kann unter der Form der Facultäten erscheinen; es ist z. B.

1028) $fx = f(0) . \frac{(f(1))^{x|1}}{(f(0))^{x|1}} = fo . \left(\frac{f(z+1)}{fz}\right)^{x|1}$ für $z = 0$

und so auch

1029) $f(-x) = fo . \left(\frac{f(z+1)}{fz}\right)^{-x|1}$

Ist z. B. $fx = (a+x)^n$, so kann gesetzt werden

1030) $(a+x)^n = a^n . \left(\left(\frac{a+z+1}{a+z}\right)^n\right)^{x|1}$ für $z = 0$

II. Entwickelung der allgemeinsten Facultäten in Reihen.

§. 283.

Wir nehmen die besondere Form

$$(\varphi(z+a.fx))^{m|h} = P$$

vor, und entwickeln dieses Product nach den Potenzen von a, so dass

1031) $$(\varphi(z+a.fx))^{m|h} = A_0^{(m)} + A_1^{(m)}.a^1 + A_2^{(m)}.a^2 + A_3^{(m)}.a^3 + \ldots\ldots$$

Wegen der Kürze sei

1032) $$fx = f_0, f(x+h) = f_1, \ldots, f(x+ph) = f_p$$

Wenn m eine ganze bejahete Zahl ist, so wird der Zweck erreicht, wenn jeder Factor des vorgegebenen Products in eine Reihe entwickelt wird,

$$\varphi(z+af_p) = \varphi z + \frac{a^1.f_p}{1^{1|1}}.\frac{d\varphi z}{dz} + \frac{a^2.f_p^2}{1^{2|1}}.\frac{d^2\varphi z}{dz^2} + \ldots\ldots$$

und alle diese Reihen vervielfacht werden

$$\begin{aligned}(\varphi(z+afx))^{m|h} = & \left(\varphi z + \frac{f_0^1.d^1\varphi z}{1^{1|1}.dz^1}.a^1 + \frac{f_0^2.d^2\varphi z}{1^{2|1}.dz^2}.a^2 + \ldots.\right) \\ & \times\left(\varphi z + \frac{f_1^1.d^1\varphi z}{1^{1|1}.dz^1}.a^1 + \frac{f_1^2.d^2\varphi z}{1^{2|1}.dz^2}.a^2 + \ldots.\right) \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & \times\left(\varphi z + \frac{f_{m-1}^1.d^1\varphi z}{1^{1|1}.dz^1}.a^1 + \frac{f_{m-1}^2.d^2\varphi z}{1^{2|1}.dz^2}.a^2 + \ldots.\right)\end{aligned}$$

es entsteht dadurch die Reihe

1033) $$(\varphi(z+afx))^{m|h} = C(0,m) + C(1,m).a^1 + C(2,m).a^2 + \ldots..$$

welche aus den Elementen der vorstehenden Reihen gebildet wird.

Es ist z. B.

$$\begin{aligned}
C(0,3) &= (\varphi z)^3 \\
C(1,3) &= (\varphi z)^2 \cdot \frac{d^1\varphi z}{1^{1|1}\,dz^1} \cdot (f^1_0 + f^1_1 + f^1_2) \\
C(2,3) &= (\varphi z)^2 \cdot \frac{d^2\varphi z}{1^{2|1}\,dz^2} \cdot (f^2_0 + f^2_1 + f^2_2) \\
&\quad + (\varphi z)^1 \cdot \frac{d^1\varphi z}{1^{1|1}\,dz^1} \cdot \frac{d^1\varphi z}{1^{1|1}\,dz^1} \cdot (f^1_0 . f^1_1 + f^1_0 . f^1_2 + f^1_1 . f^1_2) \\
C(3,3) &= (\varphi z)^2 \cdot \frac{d^3\varphi z}{1^{3|1}\,dz^3} \cdot (f^3_0 + f^3_1 + f^3_2) \\
&\quad + (\varphi z)^1 \cdot \frac{d^1\varphi z}{1^{1|1}\,dz^1} \cdot \frac{d^2\varphi z}{1^{2|1}\,dz^2} \cdot \left| \begin{matrix} f^1_0 . f^2_1 + f^1_0 . f^2_2 + f^1_1 . f^2_2 \\ f^2_0 . f^1_1 + f^2_0 . f^1_2 + f^2_1 . f^1_2 \end{matrix} \right| \\
&\quad + \frac{d^1\varphi z}{1^{1|1}\,dz^1} \cdot \frac{d^1\varphi z}{1^{1|1}\,dz^1} \cdot \frac{d^1\varphi z}{1^{1|1}\,dz^1} \cdot f^1_0 . f^1_1 . f^1_2 \\
C(4,3) &= (\varphi z)^2 \cdot \frac{d^4\varphi z}{1^{4|1}\,dz^4} \cdot (f^4_0 + f^4_1 + f^4_2) \\
&\quad + (\varphi z)^1 \cdot \frac{d^1\varphi z}{1^{1|1}\,dz^1} \cdot \frac{d^3\varphi z}{1^{3|1}\,dz^3} \cdot \left| \begin{matrix} f^1_0 . f^3_1 + f^1_0 . f^3_2 + f^1_1 . f^3_2 \\ f^3_0 . f^1_1 + f^3_0 . f^1_2 + f^3_1 . f^1_2 \end{matrix} \right| \\
&\quad + (\varphi z)^1 \cdot \frac{d^2\varphi z}{1^{2|1}\,dz^2} \cdot \frac{d^2\varphi z}{1^{2|1}\,dz^2} \cdot (f^2_0 . f^2_1 + f^2_0 . f^2_2 + f^2_1 . f^2_2) \\
&\quad + \frac{d^1\varphi z}{1^{1|1}\,dz^1} \cdot \frac{d^1\varphi z}{1^{1|1}\,dz^1} \cdot \frac{d^2\varphi z}{1^{2|1}\,dz^2} \cdot (f^1_0 . f^1_1 . f^2_2 + f^1_0 . f^2_1 . f^1_2 + f^2_0 . f^1_1 . f^1_2)
\end{aligned}$$

§. 284.

Die zurücklaufende Bildungsweise dieser Vorzahlen lässt sich auf folgende Art aufsuchen: Wird

1034) $$(\varphi(z + a . fx))^{m|h} = Fa$$

gesetzt, so ist

$$\mathrm{Fa} = \Big(\mathrm{Fa}\Big)_{a=0} + \left(\frac{d^1\,\mathrm{Fa}}{1^{1|1}\,.\,da}\right)_{a=0} .\,a^1 + \left(\frac{d^2\,\mathrm{Fa}}{1^{2|1}\,.\,da^2}\right)_{a=0} .\,a^2 + \ldots\ldots$$

Die Differentiale von Fa, welche in dieser Reihe vorkommen, ersetzen wir durch Differentiale von lg : Fa,

$$\frac{d^{n+1}\,\mathrm{Fa}}{1^{n+1|1}\,da^{n+1}} = \frac{1}{n+1}\cdot\frac{1}{1^{n|1}}\cdot\frac{d^n}{da^n}\left(\mathrm{Fa}\,.\,\frac{d\,\mathrm{lg}:\mathrm{Fa}}{da}\right) =$$

$$= \frac{1}{n+1}\left(\frac{d^n\mathrm{Fa}}{1^{n|1}\,da^n}\cdot\frac{d^1\mathrm{lg}:\mathrm{Fa}}{1^{0|1}\,da^1} + \ldots\ldots + \frac{d^0\mathrm{Fa}}{1^{0|1}\,da^0}\cdot\frac{d^{n+1}\,\mathrm{lg}:\mathrm{Fa}}{1^{n|1}\,da^{n+1}}\right)$$

oder

$$(n+1)\,A^{(m)}_{n+1} = A^{(m)}_n\,.\,\frac{d^1\mathrm{lg}:\mathrm{Fa}}{1^{0|1}\,.\,da^1} + A^{(m)}_{n-1}\,.\,\frac{d^2\mathrm{lg}:\mathrm{Fa}}{1^{1|1}\,.\,da^2} + \ldots + A^{(m)}_0\,.\,\frac{d^{n+1}\mathrm{lg}:\mathrm{Fa}}{1^{n|1}\,.\,da^{n+1}}$$

und diese wieder durch Differentiale von lg : φz; es ist nämlich

$$\mathrm{lg}:\varphi(z + a\,.\,f) = \mathrm{lg}:\varphi z + \frac{d^1\mathrm{lg}:\varphi z}{1^{1|1}\,dz^1}\,.\,a^1\,.\,f^1 + \frac{d^2\mathrm{lg}:\varphi z}{1^{2|1}\,dz^2}\,.\,a^2\,.\,f^2 + \ldots\ldots$$

mithin

$$\mathrm{lg}:\mathrm{Fa} = \mathrm{lg}:\varphi(z + afx) + \mathrm{lg}:\varphi(z + af(x+h)) + \ldots\ldots + \mathrm{lg}:\varphi(z + af(x+(m-1)h))$$

$$= m.\varphi z + \frac{d^1\mathrm{lg}:\varphi z}{1^{1|1}\,dz^1}\,.\,a^1\,.\,S_1 + \frac{d^2\,\mathrm{lg}:\varphi z}{1^{2|1}\,dz^2}\,a^2\,.\,S_2 + \ldots\ldots$$

wo

1035) $$S_p = (fx)^p + (f(x+h))^p + \ldots\ldots + (f(x+(m-1)h))^p$$

Wird nun die Reihe für lg : Fa in Hinsicht a differentiirt, und dann $a = 0$ gesetzt, so ergibt sich die Gleichung

$$\frac{d^p\mathrm{lg}:\mathrm{Fa}}{da^p} = \frac{d^p\,\mathrm{lg}:\varphi z}{dz^p} \times S_p$$

durch welche wir in der obigen Gleichung lg : Fa in lg : φz übertragen können, nämlich:

1036) $$(n+1)\,.\,A^{(m)}_{n+1} =$$

$$\frac{1}{1^{0|1}}\,.\,S_1\,.\,A^{(m)}_n\,.\,\frac{d^1\mathrm{lg}:\varphi z}{dz^1} + \frac{1}{1^{1|1}}\,.\,S_2\,.\,A^{(m)}_{n-1}\,.\,\frac{d^2\mathrm{lg}:\varphi z}{dz^2} + \ldots\frac{1}{1^{n|1}}\,.\,S_{n+1}\,.\,A^{(m)}_n\,.\,\frac{d^{n+1}\mathrm{lg}:\varphi z}{dz^{n+1}}$$

Dieselbe Gleichung findet Wronski Seite 116.

§. 285.

Eine zweite ganz allgemeine zurücklaufende Bildungsweise erhalten wir, wenn wir die Gleichung

$$\left|\varphi(z + a\,.\,fx)\right)^{m+1|h} = \left|\varphi(z + a\,.\,fx)\right)^{m|h}.\,\varphi\left|z + a\,.\,f(x + mh)\right|$$

zu Grunde legen, und die beiden Reihen

$$\left|\varphi(z + a\,.\,fx)\right)^{m|h} = A_0^{(m)} + A_1^{(m)}.\,a^1 + A_2^{(m)}.\,a^2 + \ldots.$$

$$\varphi\left|z + a\,.\,f(x + mh)\right) = \varphi z + a^1.\,\left|f(x + mh)\right)^1.\frac{d^1\varphi z}{1^{1|1}dz^1} + a^2.\,\left|f(x+mh)\right)^2.\frac{d^2\varphi z}{1^{2|1}dz^2} + \ldots$$

miteinander vervielfachen. Wir erhalten durch dieses Product folgende allgemeine zurücklaufende Bildungsweise

$$1037)\quad A_0^{(m+1)} = A_0^{(m)}.\,\varphi z$$

$$A_1^{(m+1)} = A_1^{(m)}.\,\varphi z + A_0^{(m)}.\,(f(x + mh))^1.\frac{d^1\varphi z}{1^{1|1}.dz^1}$$

$$A_2^{(m+1)} = A_2^{(m)}.\,\varphi z + A_1^{(m)}.\,(f(x + mh))^1.\frac{d^1\varphi z}{1^{1|1}.dz^1}.+A_0^{(m)}(f(x+mh))^2.\frac{d^2\varphi z}{1^{2|1}.dz^2}$$

. . . .

III. Entwickelung einer Function F(x + h) in eine Reihe nach den Facultäten einer anderen Function.

---

§. 286

Es sei

1038) $F(x+h) = A_0.f_0x + A_1.f_1x + \ldots + A_m.f_mx + A_{m+1}.(fx)^{m+1|h} + A_{m+2}.(fx)^{m+2|h} + \ldots.$

f_1x, $f_2x, \ldots, f_mx$ seien Functionen von x verschieden von $(fx)^{m+1|h}$, $(fx)^{m+2|h}, \ldots.$; die Natur der ersteren bleibe hier unbestimmt; die letzteren seien so beschaffen, dass $fa = 0$. Man sucht die Vorzahlen dieser Reihe.

Weil $fa = 0$, so ist für $x = a$ und $\Delta x = -h$ auch

$$\Delta^{m-q}(fx)^{m|h} = 0 \quad , \quad \Delta^m(fx)^{m|h} = f(a-mh)^{m|h} \text{ und}$$

$\Delta^{m+q}(fx)^{m|h} =$

$$f(a-(m+q)h)^{m|h} - \frac{(m+q)^{1|-1}}{1^{1|1}}.f(a-(m+q-1)h)^{m|h} + \ldots (-)^q \frac{(m+q)^{q|-1}}{1^{q|1}}.f(a-mh)^{m|h}$$

Setzen wir nun zur Abkürzung

$$\frac{\left\| \Delta^0 f_0 x \ldots\ldots \Delta^{p-1} f_{p-1} x . \Delta^p F(x+h) \right)}{\left\| \Delta^0 f_0 x \,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\, \Delta^p f_p x \right)} = H_p$$

$$\frac{\left\| \Delta^0 f_0 x \ldots\ldots \Delta^{n-1} f_{n-1} x . \Delta^n f_{n+1} x \ldots\ldots \Delta^{p-1} f_p x \right)}{\left\| \Delta^0 f_0 x \,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\, \Delta^{p-1} f_{p-1} x \right)} = K_p^{(n)}$$

so ist $K_{m+q}^{(n)} = 0$, und nach 694

$$A_n = K_n^{(n)} . H_n - K_{n+1}^{(n)} . H_{n+1} + K_{n+2}^{(n)} . H_{n+2} - \ldots . (-)^{m-n} K_m^{(n)} . H_m$$

so lange n nicht grösser als m ist; ist aber n grösser als m, so ist $A_{m+q} = H_{m+q}$. Es ist also

$$1039) \qquad F(x+h) = \Big(K_0^{(0)} . H_0 - K_1^{(0)} . H_1 + K_2^{(0)} . H_2 - \ldots (-)^m K_m^{(0)} . H_m\Big) . f_0 x$$
$$+ \Big(K_1^{(1)} . H_1 - K_2^{(1)} . H_2 + \ldots\ldots\ldots (-)^{m-1} K_m^{(1)} . H_m\Big) . f_1 x$$
$$+ \Big(K_2^{(2)} . H_2 - K_3^{(2)} . H_3 + \ldots\ldots\ldots (-)^{m-2} K_m^{(2)} . H_m\Big) . f_2 x$$
$$+ \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; .$$
$$+ \Big(K_{m-1}^{(m-1)} . H_{m-1} - K_m^{(m-1)} . H_m\Big) . f_{m-1} x$$
$$+ K_m^{(m)} . H_m . f_m x$$
$$+ H_{m+1} . (fx)^{m+1|h} + H_{m+2} . (fx)^{m+2|h} + H_{m+3} . (fx)^{m+3|h} + \ldots$$

wo in den Vorzahlen $x = a$ und $\Delta x = -h$ gesetzt werden muss. Wenn man H und K vereinfachen will, so sehe man hierüber §. 154 und 155.

Dieselbe Reihe findet **Wronski** Seite 272.

§. 287

Die Reihe

$$1040) \qquad F(x+h) = A_0 + A_1 . (fx)^{1|h} + A_2 . (fx)^{2|h} + A_3 . (fx)^{3|h} + \ldots . .$$

ist nur ein einfacher Fall von der vorigen Reihe, und geht aus ihr hervor, wenn $m = 0$ gesetzt wird; es ist nämlich

$$1041) \quad A_n = H_n = \frac{\big[\!\big|\Delta^0 (fx)^{0|h} \ldots . \Delta^{n-1} (fx)^{n-1|h} \Delta^n F(x+h)\big)}{\big[\!\big|\Delta^0 (fx)^{0|h} \ldots\ldots\ldots\ldots \Delta^n (fx)^{n|h}\big)}$$

$$= \frac{\Delta^n F(x+h)}{\Delta^n (fx)^{n|h}} - \frac{\Delta^{n-1} F(x+h) . \big[\!\big|\Delta^n (fx)^{n-1|h}\big)}{\Delta^{n-1} (fx)^{n-1|h} . \Delta^n (fx)^{n|h}} + \frac{\Delta^{n-2} F(x+h) . \big[\!\big|\Delta^{n-1} (fx)^{n-2|h} . \Delta^n (fx)^{n-1|h}\big)}{\Delta^{n-2} (fx)^{n-2|h} . \Delta^{n-1} (fx)^{n-1|h} . \Delta^n (fx)^{n|h}}$$

$$- \ldots + \ldots (-)^{n-1} \frac{\Delta^1 F(x+h) . \big[\!\big|\Delta^2 (fx)^{1|h} \ldots . . \Delta^n (fx)^{n-1|h}\big)}{\Delta^1 (fx)^{1|h} \ldots\ldots\ldots\ldots \Delta^n (fx)^{n|h}}$$

Die überflüssigen Factoren, welche hier noch vorkommen, lassen sich nach §. 154, 155 wegbringen.

Die zurücklaufende Bildungsweise der Vorzahlen geben folgende Gleichungen an:

1042) $$\Delta^1 F(x+h) = A_1 . \Delta^1 (fx)^{1|h}$$

$$\Delta^2 F(x+h) = A_1 . \Delta^2 (fx)^{1|h} + A_2 . \Delta^2 (fx)^{2|h}$$

$$\Delta^3 F(x+h) = A_1 . \Delta^3 (fx)^{1|h} + A_2 . \Delta^3 (fx)^{2|h} + A_3 . \Delta^3 (fx)^{3|h}$$

. . . .

IV. Producte der Reihen, welche nach den Facultäten einer Function fortgehen.

§. 288.

Wenn

$$F_0 x = f_0 x + (\varphi_0 x)^{1|h} . f_0 (x+h) . \frac{a^1}{1^{1|1}} + (\varphi_0 x)^{2|h} . f_0 (x+2h) . \frac{a^2}{1^{2|1}} + (\varphi_0 x)^{3|h} . f(x+3h) . \frac{a^3}{1^{3|1}} + \ldots$$

und

$$F_1 y = f_1 y + (\varphi_1 y)^{1|k} . f_1 (y+k) . \frac{a^1}{1^{1|1}} + (\varphi_1 y)^{2|k} . f_1 (y+2k) . \frac{a^2}{1^{2|1}} + (\varphi_1 y)^{3|k} . f_1 (y+3k) . \frac{a^3}{1^{3|1}} + \ldots$$

so befolgt das Product dieser beiden Reihen

$$F_0 x \times F_1 y = f^{(0)}(x, y) + f^{(1)}(x, y) . \frac{a^1}{1^{1|1}} + f^{(2)}(x, y) . \frac{a^2}{1^{2|1}} + f^{(3)}(x, y) . \frac{a^3}{1^{3|1}} + \ldots .$$

folgendes Gesetz:

$$f^{(p)}(x, y) = \varphi_0 x . f^{(p-1)}(x+h, y) + \varphi_1 y . f^{(p-1)}(x, y+k)$$

Kommt eine dritte Reihe

$$F_2 z = f_2 z + (\varphi_2 z)^{1|s} . f_2 (z+s) . \frac{a^1}{1^{1|1}} + (\varphi_2 z)^{2|s} . f_2 (z+2s) . \frac{a^2}{1^{2|1}} + (\varphi_2 z)^{3|s} . f_2 (z+3s) . \frac{a^3}{1^{3|1}} + \ldots$$

hinzu, so finden wir bei dem Producte

$$F_0 x \times F_1 y \times F_2 z = f^{(0)}(x, y, z) + f^{(1)}(x, y, z) . \frac{a^1}{1^{1|1}} + f^{(2)}(x, y, z) . \frac{a^2}{1^{2|1}} + \ldots ..$$

dasselbe Gesetz, nämlich

$$f^{(p)}(x, y, z) = \varphi_0 x . f^{(p-1)}(x+h, y, z) + \varphi_1 y . f^{(p-1)}(x, y+k, z) + \varphi_2 z . f^{(p-1)}(x, y, z+s)$$

Allgemein, ist

$$1043)\ F_0x_0 = f_0x_0 + (\varphi_0x_0)^{1|h_0}.f_0(x_0+h_0).\frac{a^1}{1^{1|1}} + (\varphi_0x_0)^{2|h_0}.f_0(x_0+2h_0).\frac{a^2}{1^{2|1}} + \ldots$$

$$F_1x_1 = f_1x_1 + (\varphi_1x_1)^{1|h_1}.f_2(x_1+h_1).\frac{a^1}{1^{1|1}} + (\varphi_1x_1)^{2|h_1}.f_1(x_1+2h_1).\frac{a^2}{1^{2|1}} + \ldots$$

$$\cdot \quad \cdot$$

$$F_nx_n = f_nx_n + (\varphi_nx_n)^{1|h_n}.f_n(x_n+h_n).\frac{a^1}{1^{1|1}} + (\varphi_nx_n)^{2|h_n}.f_n(x_n+2h_n).\frac{a^2}{1^{2|1}} + \ldots$$

und sind $f_0, f_1, f_2, \ldots, F_0, F_1, F_2, \ldots, \varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \ldots$ eben so viele verschiedene Functionen und $x_0, x_1, x_2, \ldots, h_0, h_1, h_2, \ldots$ eben so viele verschiedene Grössen, so befolgen die Vorzahlen des Products dieser Reihen

$$F_0x_0 \times F_1x_1 \times \ldots \times F_nx_n = f^{(0)}(x_0,..,x_n) + f^{(1)}(x_0,..,x_n).\frac{a^1}{1^{1|1}} + f^{(2)}(x_0,..,x_n).\frac{a^2}{1^{2|1}} + \ldots$$

folgendes Gesetz:

$$\begin{aligned} f^{(p)}(x_0, x_1, \ldots, x_n) = {} & \varphi_0x_0 \times f^{(p-1)}(x_0 + h_0, x_1, \ldots, x_n) \\ & + \varphi_1x_1 \times f^{(p-1)}(x_0, x_1 + h_1, x_2, \ldots, x_n) \\ & + \varphi_2x_2 \times f^{(p-1)}(x_0, x_1, x_2 + h_2, x_3, \ldots, x_n) \\ & + \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ & + \varphi_nx_n \times f^{(p-1)}(x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n + h_n) \end{aligned}$$

Wir wollen das Verfahren, welches zu dieser allgemeinen und merkwürdigen Wahrheit führt, in allgemeinen Zeichen vorlegen. Es sei bei dem Producte von n Reihen

$$F_0x_0 \times F_1x_1 .. \times F_{n-1}x_{n-1} = f^{(0)}(x_0,..,x_{n-1}) + f^{(1)}(x_0,..,x_{n-1}).\frac{a^1}{1^{1|1}} + f^{(2)}(x_0,..,x_{n-1}).\frac{a^2}{1^{2|1}} + ..$$

das Gesetz α

$$\begin{aligned} f^{(q)}(x_0, \ldots, x_{n-1}) = {} & \\ = {} & \varphi_0x_0.f^{(q-1)}(x_0+h_0, x_1,..,x_{n-1}) + {}_1x\varphi_1.f^{(q-1)}(x_0, x_1+h_1, x_2,..,x_{n-1}) + \ldots \\ & \ldots + \varphi_{n-1}x_{n-1}.f^{(q-1)}(x_0,\ldots,x_{n-2}, x_{n-1}+h_{n-1}) \end{aligned}$$

gefunden; der Uebergang zu dem Producte von $n+1$ Reihen besteht darin, dass dieses Product mit der $(n+1)$ten Reihe für $F_n x_n$ vervielfacht wird. Das $(p+1)$te Glied dieses Products ist β

$$f^{(p)}(x_0,..,x_n) = \Sigma_q \frac{p^{q|-1}}{1^{q|1}} . f^{(q)}(x_0,...,x_{n-1}).(\varphi_n x_n)^{p-q|h_n} .f_n(x_n+(p-q)h_n) \text{ wo } q = 0,1,..,p.$$

Der erste Factor unter dem Σ_q kann in zwei Theile zerfällt werden

$$\frac{p^{q|-1}}{1^{q|1}} = \frac{(p-1)^{q-1|-1}}{1^{q-1|1}} + \frac{(p-1)^{q|-1}}{1^{q|1}}$$

und also auch genannte Vorzahl in die beiden Theile

$$f^{(p)}(x_0,...,x_n) = \Sigma_q \frac{(p-1)^{q-1|-1}}{1^{q-1|1}} . f^{(q)}(x_0,...,x_{n-1}).(\varphi_n x_n)^{p-q|h_n} .f_n(x_n+(p-q)h_n)$$

$$+ \Sigma_q \frac{(p-1)^{q|-1}}{1^{q|1}} . f^{(q)}(x_0,...,x_{n-1}).(\varphi_n x_n)^{p-q|h_n} . f_n(x_n+(p-q)h_n)$$

Wird in dem ersten Theile das, was oben mit α bezeichnet ist, statt $f^{(q)}(x_0, \ldots, x_{n-1})$ eingeführt, und in dem zweiten Theile der Factor $\varphi_n x_n$ vor Σ_q gesetzt, so zerfällt das Ganze in folgende Theile:

$$f^{(p)}(x_0, \ldots, x_n) =$$

$$\varphi_0 x_0 . \Sigma_q \frac{(p-1)^{q-1|-1}}{1^{q-1|1}} .f^{(q-1)}(x_0+h_0, x_1, \ldots, x_{n-1}) . (\varphi_n x_n)^{p-q|h_n}.f_n(x_n+(p-q)h_n)$$

$$+\varphi_1 x_1 . \Sigma_q \frac{(p-1)^{q-1|-1}}{1^{q-1|1}} .f^{(q-1)}(x_0, x_1+h_1, x_2, .., x_{n-1}) . (\varphi_n x_n)^{p-q|h_n}.f_n(x_n+(p-q)h_n)$$

$$+ \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot$$

$$+\varphi_{n-1} x_{n-1} . \Sigma_q \frac{(p-1)^{q-1|-1}}{1^{q-1|1}} .f^{(q-1)}(x_0, \ldots, x_{n-2}, x_{n-1}+h_{n-1}) . (\varphi_n x_n)^{p-q|h_n} . f_n(x_n+(p-p)h_n)$$

$$+\varphi_n x_n . \Sigma_q \frac{(p-1)^{q|-1}}{1^{q|1}} . f^{(q)}(x_0, \ldots\ldots, x_{n-1}) . (\varphi_n(x_n+h_n))^{p-q-1|h_n}.f_n(x_n+(p-q)h_n)$$

Da nun dieses nach β die Reihen für $f^{(p-1)}(x_0 + h_0, x_1, \ldots\ldots, x_n)$, $f^{(p-1)}(x_0, x_1 + h_1, x_2, \ldots x_n), \ldots, f^{(p-1)}(x_0, \ldots, x_{n-1}, x_n + h_n)$ sind, so ist auch

$$\begin{aligned} f^{(p)}(x_0, \ldots, x_n) = \; & \varphi_0 x_0 . f^{(p-1)}(x_0 + h_0, x_1, \ldots, x_n) \\ & + \varphi_1 x_1 . f^{(p-1)}(x_0, x_1 + h_1, x_2, \ldots, x_n) \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + \varphi_n x_n . f^{(p-1)}(x_0, \ldots\ldots, x_{n-1}, x_n + h_n) \end{aligned}$$

Die Gleichung, welche für n Reihen gilt, findet also auch statt bei n + 1 Reihen.

ALLGEMEINE THEORIE

DER

FORTLAUFENDEN BRÜCHE.

ALLGEMEINE THEORIE
DER
FORTLAUFENDEN BRUECHE.

I. Zurücklaufende Bestimmung.

§. 289.

Bei diesem Gegenstande sind folgende Puncte genau voneinander zu trennen:

I. Algorithmus.
II. Wahrheiten.
III. Anwendung der Wahrheiten auf Gleichungen, Reihen und andere Gegenstände.

Zu dem Algorithmus hat Euler *) den ersten Versuch gemacht, der aber sehr unvollkommen und oft von anderen Mathematikern, nur in anderen Zeichen, ohne Verbesserung wiederholt ist. Wir geben hier einen neuen Algorithmus in vollkommener Gestalt, so dass er alle Foderungen erfüllt.

Mit diesem Algorithmus in der Hand haben wir solche allgemeine Wahrheiten entwickelt, dass alles, was auch immer über diesen Gegenstand erschienen, höchst specielle Fälle von ihnen sind. Die Anwendung können wir hier noch nicht geben.

Die Ordnung, in welcher wir die Untersuchung vornehmen, ist

---

*) Novi comm. ac. sci. petrop. T. XI, 1767. pag. 28. De usu novi algorithmi.

I. Zurüklaufende Bestimmung, wenn

$$\alpha(m)_n = \alpha(m)_{n-1} \cdot \Gamma_{m+n-1} + \alpha(m)_{n-2} \cdot \varphi_{m+n-2}$$

II. Zurücklaufende Bestimmung, durch welche fortlaufende Brüche erzeugt werden.

§. 290.

Es seien .... $\varphi_{-3}, \varphi_{-2}, \varphi_{-1}, \varphi_0, \varphi_{+1}, \varphi_{+2}, \varphi_{+3}, \ldots\ldots$ A

und .... $\Gamma_{-3}, \Gamma_{-2}, \Gamma_{-1}, \Gamma_0, \Gamma_{+1}, \Gamma_{+2}, \Gamma_{+3}, \ldots\ldots$ B

verschiedene Grössen, welche in keinem Zusammenhange stehen. Aus ihnen werde eine dritte Reihe von Grössen

$\ldots\ldots \alpha(m)_{-3}, \alpha(m)_{-2}, \alpha(m)_{-1}, \alpha(m)_0, \alpha(m)_{+1}, \alpha(m)_{+2}, \alpha(m)_{+3}, \ldots\ldots$ C

nach folgender Vorschrift gebildet:

1044) $$\alpha(m)_n = \alpha(m)_{n-1} \cdot \Gamma_{m+n-1} + \alpha(m)_{n-2} \cdot \varphi_{m+n-2}$$

Oder es soll jedes Glied der Reihe C aus den beiden vorhergehenden Gliedern derselben Reihe in Verbindung mit dem (m+n–2)ten der Reihe A und dem (m+n–1)ten Gliede der Reihe B durch Zuzählen und Vervielfachen zusammengesetzt werden.

Zwei von den Gliedern der Reihe C müssen gegeben sein, wenn die übrigen nach dieser Vorschrift bestimmt werden sollen. Nehmen wir $\alpha(m)_0$, $\alpha(m)_1$ als gegeben an, so sind die übrigen folgende:

1045) $$\alpha(m)_2 = \alpha(m)_1 \cdot \Gamma_{m+1} + \alpha(m)_0 \cdot \varphi_m$$

$$\alpha(m)_3 = \alpha(m)_1 \cdot \left| \begin{array}{l} \Gamma_{m+1}\Gamma_{m+2} \\ +\varphi_{m+1} \end{array} \right. + \alpha(m)_0 \cdot \varphi_m \Gamma_{m+2}$$

$$\alpha(m)_4 = \alpha(m)_1 \cdot \left| \begin{array}{l} \Gamma_{m+1}\Gamma_{m+3}\Gamma_{m+3} \\ +\varphi_{m+1}\Gamma_{m+3} \\ +\varphi_{m+2}\Gamma_{m+1} \end{array} \right. + \alpha(m)_0 \cdot \left| \begin{array}{l} \varphi_m \Gamma_{m+2}\Gamma_{m+3} \\ +\varphi_m \varphi_{m+2} \end{array} \right.$$

$$\alpha(m)_5 = \alpha(m)_1 \cdot \left| \begin{array}{l} \Gamma_{m+1}\,\Gamma_{m+2}\,\Gamma_{m+3}\,\Gamma_{m+4} \\ +\,\varphi_{m+1}\,\Gamma_{m+3}\,\Gamma_{m+4} \\ +\,\varphi_{m+2}\,\Gamma_{m+1}\,\Gamma_{m+4} \\ +\,\varphi_{m+3}\,\Gamma_{m+1}\,\Gamma_{m+2} \\ +\,\varphi_{m+1}\,\varphi_{m+3} \end{array} \right. + \alpha(m)_0 \cdot \left| \begin{array}{l} \varphi_m\,\Gamma_{m+2}\,\Gamma_{m+3}\,\Gamma_{m+4} \\ +\,\varphi_m\,\varphi_{m+2}\,\Gamma_{m+4} \\ +\,\varphi_m\,\varphi_{m+3}\,\Gamma_{m+2} \end{array} \right.$$

u. s. w.

Setzen wir .... $2, 1, 0, -1, -2$, ... statt m, so erhalten wir eben so viele Reihen

$$\begin{array}{lllllll} \ldots\ldots & \alpha(+2)_{-2}, & \alpha(+2)_{-1}, & \alpha(+2)_0, & \alpha(+2)_{+1}, & \alpha(+2)_{+2}, & \ldots\ldots \quad C_1 \\ \ldots\ldots & \alpha(+1)_{-2}, & \alpha(+1)_{-1}, & \alpha(+1)_0, & \alpha(+1)_{+1}, & \alpha(+1)_{+2}, & \ldots\ldots \\ \ldots\ldots & \alpha(\;0)_{-2}, & \alpha(\;0)_{-1}, & \alpha(\;0)_0, & \alpha(\;0)_{+1}, & \alpha(\;0)_{+2}, & \ldots\ldots \\ \ldots\ldots & \alpha(-1)_{-2}, & \alpha(-1)_{-1}, & \alpha(-1)_0, & \alpha(-1)_{+1}, & \alpha(-1)_{+2}, & \ldots\ldots \\ \ldots\ldots & \alpha(-2)_{-2}, & \alpha(-2)_{-1}, & \alpha(-2)_0, & \alpha(-2)_{+1}, & \alpha(-2)_{+2}, & \ldots\ldots \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \end{array}$$

deren Glieder sämmtlich nach der Vorschrift 1044 aus den Gliedern der Reihen A und B gebildet werden.

Das Bildungsgesetz eines Gliedes der Reihe C aus den beiden unmittelbar vorhergehenden Gliedern derselben Reihe ist gegeben. Unsere Aufgabe ist

I. Wie wird ein Glied der Reihe C aus irgend zweien anderen (nicht unmittelbar vorhergehenden Gliedern) derselben Reihe C gebildet? und

II. In welchem Zusammenhange stehen die Glieder der verschiedenen Reihen C_1?

§. 291.

Die obige Bildungsweise lässt zwei Glieder der Reihe C unbestimmt, welche nach Willkühr angenommen werden können. Die Gleichung 1044 ist daher die allgemeinste ihrer Art. Um den Weg zu der Auflösung dieser allgemeinen Aufgabe zu bahnen, nehmen wir zuerst einen einfachen Fall vor, und kehren dann zu der allgemeinen Gleichung 1044 wieder zurück. Diesen einfachen Fall machen wir durch einen besonderen Buchstaben β bemerkbar

1046) $$\beta(m)_n = \beta(m)_{n-1} \cdot \Gamma_{m+n-1} + \beta(m)_{n-2} \cdot \varphi_{m+n-2}$$

und nehmen für zwei Glieder, auf welche wir alle übrigen Glieder beziehen, folgende Werthe an, so dass

1047) $$\begin{aligned} \beta(m)_0 &= 1 \\ \beta(m)_1 &= \Gamma_m \\ \beta(m)_2 &= \beta(m)_1 \cdot \Gamma_{m+1} + \beta(m)_0 \cdot \varphi_m \\ \beta(m)_3 &= \beta(m)_2 \cdot \Gamma_{m+2} + \beta(m)_1 \cdot \varphi_{m+1} \\ \beta(m)_4 &= \beta(m)_3 \cdot \Gamma_{m+3} + \beta(m)_2 \cdot \varphi_{m+2} \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Nach diesem finden wir für die übrigen Glieder folgende Werthe:

1048) $$\begin{aligned} \beta(m)_{+2} &= \Gamma_m \Gamma_{m+1} + \varphi_m \\ \beta(m)_{+3} &= \Gamma_m \Gamma_{m+1} \Gamma_{m+2} + \varphi_m \Gamma_{m+2} \\ &\qquad + \varphi_{m+1} \Gamma_m \\ \beta(m)_{+4} &= \Gamma_m \Gamma_{m+1} \Gamma_{m+2} \Gamma_{m+3} + \varphi_m \Gamma_{m+2} \Gamma_{m+3} + \varphi_m \varphi_{m+2} \\ &\qquad + \varphi_{m+1} \Gamma_m \Gamma_{m+3} \\ &\qquad + \varphi_{m+2} \Gamma_m \Gamma_{m+1} \end{aligned}$$

u. s. w.

Die Glieder auf der linken Seite oder die Glieder mit verneinten Stellenzahlen erhalten wir aus der Gleichung 1044, wenn wir $n = 1, 0, -1, -2, \ldots$ setzen, nämlich

1049) $$\beta(m)_{-1} = 0$$

$$\beta(m)_{-2} = \frac{1}{\varphi_{m-2}}$$

$$\beta(m)_{-3} = -\frac{\Gamma_{m-2}}{\varphi_{m-2}\varphi_{m-3}}$$

$$\beta(m)_{-4} = \frac{1}{\varphi_{m-2}\varphi_{m-4}} + \frac{\Gamma_{m-2}\Gamma_{m-3}}{\varphi_{m-2}\varphi_{m-3}\varphi_{m-4}}$$

$$\beta(m)_{-5} = -\frac{\Gamma_{m-2}}{\varphi_{m-2}\varphi_{m-3}\varphi_{m-5}} - \frac{\Gamma_{m-4}}{\varphi_{m-2}\varphi_{m-4}\varphi_{5-m}} - \frac{\Gamma_{m-2}\Gamma_{m-3}\Gamma_{m-4}}{\varphi_{m-2}\varphi_{m-3}\varphi_{m-4}\varphi_{m-5}}$$

u. s. w.

§. 292.

Sowohl für die Bildung eines Gliedes aus entfernten Gliedern derselben Reihe als auch für den Zusammenhang der Glieder aus verschiedenen Reihen finden wir folgende Gleichung P

$$\beta(m)_{n+1} = \beta(m)_{n-p+2} \cdot \beta(m+n-p+2)_{p-1} + \beta(m)_{n-p+1} \cdot \beta(m+n-p+3)_{p-2} \cdot \varphi_{m+n-p+1}$$

Ihre Rechtfertigung findet sie in dem allgemeinen Uebergange des Vorhergehenden zum Folgenden, und dieser besteht in der Verbindung der Gleichung P mit den Gleichungen

$$\beta(m)_{n-p+2} = \beta(m)_{n-p+1} \cdot \beta(m+n-p+1)_1 + \beta(m)_{n-p} \cdot \varphi_{m+n-p}$$

$$\beta(m+n-p+1)_p =$$

$$= \beta(m+n-p+1)_1 \cdot \beta(m+n-p+2)_{p-1} + \beta(m+n-p+1)_0 \cdot \beta(m+n-p+3)_{p-2} \cdot \varphi_{m+n-p+1}$$

wovon jene nach 1046 und diese nach der Gleichung P gebildet ist. Es entsteht die nächstfolgende Gleichung P_1

$$\beta(m_{n+1}) = \beta(m)_{n-p+1} \cdot \beta(m+n-p+1)_p + \beta(m)_{n-p} \cdot \beta(m+n-p+2)_{p-1} \cdot \varphi_{m+n-p}$$

Diese Gleichung P_1 gilt nicht allein für das bejahete, sondern auch für das verneinte p, und es ist

$$\beta(m)_{n+1} = \beta(m)_{n+p} \cdot \beta(m+n+p)_{-p+1} + \beta(m)_{n+p-1} \cdot \beta(m+n+p-1)_{-p} \cdot \varphi_{m+n+p-1} \qquad Q$$

Diese Gleichung beruhet eben so wie die vorige auf dem allgemeinen Uebergange vom Vorhergehenden zum Folgenden. Es ist nämlich nach 1047

$$\beta(m)_{n+p+1} = \beta(m)_{n+p} . \beta(m+n+p)_1 + \beta(m)_{n+p-1} . \varphi_{m+n+p-1}$$

und nach P, wenn $n = -p$, $p = -p+1$, $m = m+n+p$ gesetzt wird,

$$\beta(m+n+p)_{-p+1} = \beta(m+n+p)_1 . \beta(m+n+p+1)_{-p} + \beta(m+n+p+2)_{-p-1} . \varphi_{m+n+p}$$

Werden diese drei Gleichungen vereinigt, so entsteht die nächstfolgende:

$$\beta(m)_{n+1} = \beta(m)_{n+p+1} . \beta(m+n+p+1)_{-p} + \beta(m)_{n+p} . \beta(m+n+p+2)_{-p-1} . \varphi_{m+n+p} \qquad Q_1$$

Die Gleichung P_1 gilt also für jeden Werth von p. Setzen wir zur Vereinfachung derselben $n-1$ statt n und $n-p$ statt p, so ist

1050) $$\beta(m)_n = \beta(m)_p . \beta(m+p)_{n-p} + \beta(m)_{p-1} . \beta(m+p+1)_{n-p-1} . \varphi_{m+p-1}$$

§. 293.

Ausser dieser erhalten wir zu gleichem Zwecke eine zweite Gleichung auf folgende Weise: Aus den beiden Gleichungen

$$\beta(m+p)_{n+1} = \beta(m+p)_n . \Gamma_{m+p+n} + \beta(m+p)_{n-1} . \varphi_{m+p+n-1}$$

$$\beta(m)_{n+p+1} = \beta(m)_{n+p} . \Gamma_{m+p+n} + \beta(m)_{n+p-1} . \varphi_{m+n+p-1}$$

welche nach 1046 gebildet sind, eliminiren wir Γ_{m+p+n}, und setzen zur Abkürzung

$$\beta(m+p)_{n+1} . \beta(m)_{n+p} - \beta(m+p)_n . \beta(m)_{n+p+1} = B_{n+1}$$

Es entsteht die Gleichung

$$B_{n+1} = - B_n . \varphi_{m+n+p-1} \qquad R$$

Nach dieser bilden wir mehrere

$$B_n = - B_{n-1} . \varphi_{m+n+p-2}$$

$$. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$

$$B_1 = - B_0 . \varphi_{m+p-1}$$

$$B_0 = \beta(m)_{p-1}$$

und vervielfachen alle miteinander; es entsteht die Gleichung

$$B_{n+1} = (-)^{n+1} \beta(m)_{p-1} . \varphi_{m+p-1} . \varphi_{m+p} \ldots \varphi_{m+p+n-1} = (-)^{n+1} \beta(m)_{p-1} . (\varphi_{m+p-1})^{n+1|1}$$

Da ferner in der Gleichung R die Stellenzahl n auch verneint sein kann, so können wir auch folgende nach ihr bilden:

$$B_{-n+2} = - B_{-n+1} \cdot \varphi_{m+p-n}$$

$$B_{-n+3} = - B_{-n+2} \cdot \varphi_{m+p-n+1}$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$B_0 = - B_{-1} \cdot \varphi_{m+p-2}$$

$$\beta(m)_{p-1} = B_0$$

Vervielfachen wir diese Gleichungen miteinander, so erhalten wir folgende:

$$\beta(m)_{p-1} = (-)^{n-1} B_{-n+1} \cdot \varphi_{m+p-2} \cdot \varphi_{m+p-3} \cdot \cdot \cdot \cdot \varphi_{m+p-n}$$

oder

$$B_{-n+1} = \frac{(-)^{-n+1} \; \beta(m)_{p-1}}{\varphi_{m+p-2} \cdot \varphi_{m+p-3} \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \varphi_{m+p-n}} = (-)^{-n+1} \beta(m)_{p-1} \cdot (\varphi_{m+p-1})^{-n+1|1}$$

B_{n+1} und B_{-n+1} huldigen also demselben Gesetze, und es ist für jeden Werth von n

1051) $\beta(m+p)_{n+1} \cdot \beta(m)_{n+p} - \beta(m+p)_n \cdot \beta(m)_{n+p+1} = (-)^{n+1} \beta(m)_{p-1} \cdot (\varphi_{m+p-1})^{n+1|1}$

§. 294.

So allgemein die beiden Gleichungen 1050 und 1051 auch sind, so sind sie doch nur zwei untergeordnete Fälle eines viel allgemeineren Gesetzes, welches ausser ihnen noch unendlich viele andere Fälle umfasst. Eliminiren wir nämlich aus den beiden Gleichungen

$$\beta(m+p)_{n-p} = \beta(m+p)_{s-p} \cdot \beta(m+s)_{n-s} + \beta(m+p)_{s-p-1} \cdot \beta(m+s+1)_{n-s-1} \cdot \varphi_{m+s-1}$$

$$\beta(m)_n = \beta(m)_s \cdot \beta(m+s)_{n-s} + \beta(m)_{s-1} \cdot \beta(m+s+1)_{n-s-1} \cdot \varphi_{m+s-1}$$

welche nach 1050 gebildet sind, die Grösse $\beta\,(m+s)_{n-s}$, und verbinden mit der Gleichung, welche hiedurch entsteht, die Gleichung

$$\beta(m+p)_{s-p} \cdot \beta(m)_{s-1} - \beta(m+p)_{s-p-1} \cdot \beta(m)_s = (-)^{s-p} \beta(m)_{p-1} \cdot (\varphi_{m+p-1})^{s-p|1}$$

welche nach 1051 gebildet ist, so erhalten wir die Gleichung

$$\beta(m+p)_{n-p}.\beta(m)_s - \beta(m+p)_{s-p}.\beta(m)_n = (-)^{s-p+1}\beta(m)_{p-1}.\beta(m+s+1)_{n-s-1}(\varphi_{m+p-1})^{s-p+1|1}$$

oder, wenn wir, um ihr eine andere Form zu geben, $p = n-m$, $n = n+p-m$ und $s = q$ setzen, die Gleichung

1052) $$\beta(n)_p.\beta(m)_q - \beta(n)_{q+m-n}\beta(m)_{p+n-m} =$$
$$= (-)^{1+q-n+m}\beta(m)_{n-m-1}.\beta(m+q+1)_{n-m+p-q-1}.(\varphi_{n-1})^{1+q-n+m|1}$$

welche das höchste Gesetz für den Zusammenhang sowohl der Glieder derselben als auch der Glieder verschiedener Reihen enthält.

Um nur ein Beispiel von der Wichtigkeit dieser Gleichung anzuführen, nehmen wir an, dass $q = -1$, und setzen zur Abkürzung $n = m+1-p$; es geht aus ihr hervor, dass

1053) $$\beta(m)_{-p} = (-)^p \frac{\beta(m-p+1)_{p-2}}{(\varphi_{m-p})^{p-1|1}}$$

Jedes Glied auf der linken Seite oder jedes Glied mit einer verneinten Stellenzahl kann also ersetzt werden durch ein Glied in einer anderen Reihe.

§. 295.

Nachdem wir den besonderen Fall, für welchen das Zeichen β festgesetzt ist, untersucht haben, gehen wir zu dem allgemeinsten, vorgestellt durch α, wieder zurück. Wir finden für ihn zwar nicht dieselben, aber ähnliche Bildungsweisen. Zuerst erhalten wir die Gleichung X

$$\alpha(m)_n = \alpha(m)_{n-p+1}.\beta(m+n-p+1)_{p-1} + \alpha(m)_{n-p}.\beta(m+n-p+2)_{p-2}.\varphi_{m+n-p}$$

Das Verfahren bei dem Auffinden dieser Gleichung, oder der Uebergang von $p-1$ zu p besteht darin, dass aus dieser schon gefundenen Gleichung X und aus der Gleichung

$$\alpha(m)_{n-p+1} = \alpha(m)_{n-p}.\beta(m+n-p)_1 + \alpha(m)_{n-p-1}.\varphi_{m+n-p-1}$$

die Grösse $\alpha(m)_{n-p+1}$ eliminirt, und dann die Gleichung

$$\beta(m+n-p)_p = \beta(m+n-p)_1 . \beta(m+n-p+1)_{p-1} + \beta(m+n-p+2)_{p-2} . \varphi_{m+n-p}$$

welche nach 1050 gebildet ist, zu Hülfe genommen wird; es entsteht die nächstfolgende Gleichung

$$\alpha(m)_n = \alpha(m)_{n-p} . \beta(m+n-p)_p + \alpha(m)_{n-p-1} . \beta(m+n-p+1)_{p-1} . \varphi_{m+n-p-1} \qquad X_1$$

Auch für das verneinte p finden wir, dass

$$\alpha(m)_n = \alpha(m)_{n+p-1} . \beta(m+n+p-1)_{-p+1} + \alpha(m)_{n+p-2} . \beta(m+n+p)_{-p} . \varphi_{m+n+p-2} \qquad Y$$

Der Uebergang von $-(p-1)$ zu $-p$ ist aber jetzt folgender: Es wird in diese schon gefundene Gleichung Y nach 1050 gesetzt

$$\beta(m+n+p-1)_{-p+1} = \beta(m+n+p-1)_1 . \beta(m+n+p)_{-p} + \beta(m+n+p+1)_{-p-1} . \varphi_{m+n+p-1}$$

und zuletzt

$$\alpha(m)_{n+p} = \alpha(m)_{n+p-1} . \beta(m+n+p-1)_1 + \alpha(m)_{n+p-2} . \varphi_{m+n+p-2}$$

Es entsteht die nächstfolgende Gleichung für $-p$, nämlich

$$\alpha(m)_n = \alpha(m)_{n+p} . \beta(m+n+p)_{-p} + \alpha(m)_{n+p-1} . \beta(m+n+p+1)_{-p-1} . \varphi_{m+n+p-1} \qquad Y_1$$

Die Gleichung X_1 ist also ganz allgemein. Setzen wir, um sie zu vereinfachen, $n-p$ statt p, so nimmt sie folgende Gestalt an:

1054) $$\alpha(m)_n = \alpha(m)_p . \beta(m+p)_{n-p} + \alpha(m)_{p-1} . \beta(m+p+1)_{n-p-1} . \varphi_{m+p-1}$$

und zeigt, wie ein Glied $\alpha(m)_{+n}$ oder $\alpha(m)_{-n}$ aus irgend zweien anderen entfernten aber aufeinanderfolgenden Gliedern

$\alpha(m)_{+p}$, $\alpha(m)_{+p-1}$ oder aus $\alpha(m)_{-p}$, $\alpha(m)_{-p-1}$ mit Hülfe der Grössen β gebildet werden kann.

Bilden wir z. B. alle Glieder aus den beiden ersten Gliedern $\alpha(m)_0$ und $\alpha(m)_1$, so geben folgende Gleichungen diese Bildungsweise an:

1055) $$\alpha(m)_n = \alpha(m)_1 . \beta(m+1)_{n-1} + \alpha(m)_0 . \beta(m+2)_{n-2} . \varphi_m$$

$$\alpha(m)_{-n} = \alpha(m)_1 . \beta(m+1)_{-n-1} + \alpha(m)_0 . \beta(m+2)_{-n-2} . \varphi_m$$

§. 296.

Die zweite Gleichung für α erhalten wir auf folgende Weise. Wir eliminiren $\Gamma_{m+p+n-1}$ aus den beiden Gleichungen

$$\alpha(m+p)_n = \alpha(m+p)_{n-1} \cdot \Gamma_{m+p+n-1} + \alpha(m+p)_{n-2} \cdot \varphi_{m+p+n-2}$$

$$\alpha(m)_{n+p} = \alpha(m)_{n+p-1} \cdot \Gamma_{m+p+n-1} + \alpha(m)_{n+p-2} \cdot \varphi_{m+n+p-2}$$

und setzen zur Abkürzung

$$\alpha(m+p)_n \cdot \alpha(m)_{n+p-1} - \alpha(m+p)_{n-1} \cdot \alpha(m)_{n+p} = E_n$$

In der Gleichung

$$E_n = - E_{n-1} \cdot \varphi_{m+p+n-2}$$

welche hiedurch entsteht, setzen wir zuerst $n = 1, 2, \ldots\ldots, n$ und dann auch $n = 0, -1, -2, -3, \ldots, -(n-1)$, und vervielfachen jene und dann auch diese miteinander. Wir erhalten die beiden Gleichungen

$$E_{+n} = (-)^n E_0 \cdot \varphi_{m+p-1} \cdot \varphi_{m+p} \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot \varphi_{m+p+n-2} = (-)^n E_0 \cdot (\varphi_{m+p-1})^{n|1}$$

$$E_{-n} = \frac{(-)^n E_0}{\varphi_{m+p-2}\, \varphi_{m+p-3} \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot \varphi_{m+p-n-1}} = (-)^n E_0 \cdot (\varphi_{m+p-1})^{-n|1}$$

welche einem und demselben Gesetze huldigen. Es ist daher ganz allgemein

1056) $\alpha(m+p)_n \cdot \alpha(m)_{n+p-1} - \alpha(m+p)_{n-1} \cdot \alpha(m)_{n+p} =$

$$= (-)^n \left(\alpha(m+p)_0 \cdot \alpha(m)_{p-1} - \alpha(m+p)_{-1} \cdot \alpha(m)_p\right) \cdot (\varphi_{m+p-1})^{n|1}.$$

§. 297.

Die dritte und allgemeinste Gleichung erhalten wir durch das Eliminiren des $\beta(m+s)_{n-s}$ aus den beiden nach 1054 gebildeten Gleichungen

$$\alpha(m+p)_{n-p} = \alpha(m+p)_{s-p} \cdot \beta(m+s)_{n-s} + \alpha(m+p)_{s-p-1} \cdot \beta(m+s+1)_{n-s-1} \cdot \varphi_{m+s-1}$$

$$\alpha(m)_n = \alpha(m)_s \cdot \beta(m+s)_{n-s} + \alpha(m)_{s-1} \cdot \beta(m+s+1)_{n-s-1} \cdot \varphi_{m+s-1}$$

und durch Hülfe der nach 1056 gebildeten Gleichung

$$\alpha(m+p)_{s-p}\,\alpha(m)_{s-1}-\alpha(m+p)_{s-p-1}\,\alpha(m)_s =$$
$$= (-)^{s-p}\left(\alpha(m+p)_0 \,.\, \alpha(m)_{p-1} - \alpha(m+p)_{-1} \,.\, \alpha(m)_p\right) . (\varphi_{m+p-1})^{s-p|1}$$

Die Endgleichung ist

$$\alpha(m+p)_{n-p}\,\alpha(m)_s - \alpha(m+p)_{s-p}\,\alpha(m)_n =$$
$$= (-)^{s-p+1}\left(\alpha(m+p)_0 \,.\, \alpha(m)_{p-1} - \alpha(m+p)_{-1} \,.\, \alpha(m)_p\right) . \beta(m+s+1)_{n-s-1} . (\varphi_{m+p-1})^{s-p+1|1}$$

oder, wenn $p = n-m$, $n = p+n-m$, $s = q$ gesetzt wird,

1057) $\alpha(n)_p . \alpha(m)_q - \alpha(n)_{q+m-n} \,.\, \alpha(m)_{p+n-m} =$

$$(-)^{q-n+m+1}\left(\alpha(n)_0 . \alpha(m)_{n-m-1} - \alpha(n)_{-1} \,.\, \alpha(m)_{n-m}\right) . \beta(q+m+1)_{n-m+p-q-1} . (\varphi_{n-1})^{q-n+m+1|1}$$

welche das allgemeinste Gesetz für den Zusammenhang der Glieder in den Reihen C_1, und für die Bildung eines Gliedes aus Gliedern derselben und verschiedener Reihen enthält.

II. Zurücklaufende Bestimmung, durch welche fortlaufende Brüche erzeugt werden.

§. 298.

Die zurücklaufende Bestimmung, aus welcher die fortlaufenden Brüche entspringen, ist

1058) $$(f_m - \Gamma_m) \cdot f_{m+1} = \varphi_m$$

Es entstehen zwei verschiedene Brüche

$$f_m = \Gamma_m + \frac{\varphi_m}{f_{m+1}} \quad \text{und} \quad f_{m+1} = \frac{\varphi_m}{-\Gamma_m + f_m}$$

und also

1059) $$f_m = \Gamma_m + \cfrac{\varphi_m}{\Gamma_{m+1} + \cfrac{\varphi_{m+1}}{\Gamma_{m+2} + \cfrac{\varphi_{m+2}}{\Gamma_{m+3} + \ldots\ldots}}}$$

und

1060) $$f_{m+1} = \cfrac{\varphi_m}{-\Gamma_m + \cfrac{\varphi_{m-1}}{-\Gamma_{m-1} + \cfrac{\varphi_{m-2}}{-\Gamma_{m-2} + \cfrac{\varphi_{m-3}}{-\Gamma_{m-3} + \ldots\ldots}}}}$$

oder, weil $f_{m+1} = -\frac{\varphi_m}{\Gamma_m - f_m}$, so ist auch

1061) $$f_{m+1} = -\cfrac{\varphi_m}{\Gamma_m + \cfrac{\varphi_{m-1}}{\Gamma_{m-1} + \cfrac{\varphi_{m-2}}{\Gamma_{m-2} + \ldots\ldots}}}$$

Ist $m = 0, 1, 2, 3, \ldots$ oder $= -1, -2, -3, \ldots$, so entstehen folgende fortlaufende Brüche:

$$f_0 = \Gamma_0 + \cfrac{\varphi_0}{\Gamma_1 + \cfrac{\varphi_1}{\Gamma_2 + \ldots\ldots}} \qquad = + \cfrac{\varphi_{-1}}{-\Gamma_{-1} + \cfrac{\varphi_{-2}}{-\Gamma_{-2} + \ldots\ldots}}$$

$$f_{+1} = \Gamma_1 + \cfrac{\varphi_1}{\Gamma_2 + \cfrac{\varphi_2}{\Gamma_3 + \ldots\ldots}} \qquad = + \cfrac{\varphi_0}{-\Gamma_0 + \cfrac{\varphi_{-1}}{-\Gamma_{-1} + \ldots\ldots}}$$

u. s. w., und

$$f_{-1} = \Gamma_{-1} + \cfrac{\varphi_{-1}}{\Gamma_0 + \cfrac{\varphi_0}{\Gamma_1 + \ldots\ldots}} \qquad = + \cfrac{\varphi_{-2}}{-\Gamma_{-2} + \cfrac{\varphi_{-3}}{-\Gamma_{-3} + \ldots\ldots}}$$

$$f_{-2} = \Gamma_{-2} + \cfrac{\varphi_{-2}}{\Gamma_{-1} + \cfrac{\varphi_{-1}}{\Gamma_0 + \ldots\ldots}} \qquad = + \cfrac{\varphi_{-3}}{-\Gamma_{-3} + \cfrac{\varphi_{-4}}{-\Gamma_{-4} + \ldots\ldots}}$$

u. s. w. Die ursprüngliche Gleichung gibt den Zusammenhang aller dieser fortlaufenden Brüche an, nämlich

$$f_0 = \Gamma_0 + \frac{\varphi_0}{f_1} \qquad f_0 = \frac{\varphi_{-1}}{-\Gamma_{-1} + f_{-1}}$$

$$f_1 = \Gamma_1 + \frac{\varphi_1}{f_2} \qquad f_1 = \frac{\varphi_0}{-\Gamma_0 + f_0}$$

u. s. w.

§. 299.

Wir haben hier eine Reihe

1062) $\quad \ldots f_{-3}\,,\ f_{-2}\,,\ f_{-1}\,,\ f_0\,,\ f_{+1}\,,\ f_{+2}\,,\ f_{+3}\,,\ \ldots\ldots$

deren Bildungsweise die ursprüngliche Gleichung 1058 angibt, und zwar aus dem vorhergehenden das folgende, oder aus dem folgenden das vorhergehende Glied. Aus diesem Gesetze können wir ein anderes herleiten, nach welchem ein Glied dieser Reihe aus einem entfernten Gliede gebildet werden kann. Die Gleichung für diesen Zweck hat folgende Gestalt:

1063) $$f_m = \frac{(m)'_n + (m)_n . f_{m+n}}{[m]'_n + [m]_n . f_{m+n}}$$

Die Gesetze, denen die Grössen $(m)_n$, $(m)'_n$, $[m]_n$, $[m]'_n$ unterworfen sind, finden wir, wenn wir in diese Gleichung das nächstfolgende Glied

$$f_{m+n} = r_{m+n} + \frac{\varphi_{m+n}}{f_{m+n+1}}$$

einführen; die Gleichung geht hiedurch in folgende über:

$$f_m = \frac{(m)_n . \varphi_{m+n} + ((m)_n . r_{m+n} + (m)'_n) . f_{m+n+1}}{[m]_n . \varphi_{m+n} + ([m]_n . r_{m+n} + [m]'_n) . f_{m+n+1}}$$

welche zeigt, dass

1064) $$(m)_{n+1} = (m)_n . r_{m+n} + (m)'_n \quad \text{und} \quad (m)'_{n+1} = (m)_n . \varphi_{m+n}$$
$$[m]_{n+1} = [m]_n . r_{m+n} + [m]'_n \qquad [m]'_{n+1} = [m]_n . \varphi_{m+n}$$

oder, wenn diese Gleichungen vereinigt werden, dass

1065) $$(m)_{n+1} = (m)_n . r_{m+n} + (m)_{n-1} . \varphi_{m+n-1}$$
$$[m]_{n+1} = [m]_n . r_{m+n} + [m]_{n-1} . \varphi_{m+n-1}$$

Diese beiden zurücklaufenden Bildungsweisen setzen die Kenntniss irgend zweier Glieder voraus; wir erhalten diese aus folgenden Gleichungen:

$$f_m = \frac{0 + 1 . f_m}{1 + 0 . f_m} \quad \text{und} \quad f_m = \frac{\varphi_m + r_m . f_{m+1}}{0 + 1 . f_{m+1}}$$

Es ergibt sich aus ihnen, dass

1066) $$(m)_0 = 1 \ , \ (m)'_0 = 0 \ , \ [m]_0 = 0 \ , \ [m]'_0 = 1$$
$$(m)_1 = r_m \ , \ (m)'_1 = \varphi_m \ , \ [m]_1 = 1 \ , \ [m]'_1 = 0$$

Wir haben jetzt alles, was zur Bildung der Grössen, welche in der Gleichung 1063 vorkommen, nöthig ist, es ist nämlich

1067) $(m)_0 = 1$ und $[m]_0 = 0$

$(m)_1 = \Gamma_m$ $[m]_1 = 1$

$(m)_2 = \Gamma_m \Gamma_{m+1} + \varphi_m$ $[m]_2 = \Gamma_{m+1}$

$(m)_3 = \Gamma_m \Gamma_{m+1} \Gamma_{m+2} + \varphi_m \Gamma_{m+2} + \varphi_{m+1} \Gamma_m$ $[m]_3 = \Gamma_{m+1} \Gamma_{m+2} + \varphi_{m+1}$

$[m]_4 = \Gamma_{m+1} \Gamma_{m+2} \Gamma_{m+3} + \varphi_{m+1} \Gamma_{m+3} + \varphi_{m+2} \Gamma_{m+1}$

u. s. w.

Vergleichen wir diese Producte mit den früheren in §. 289, so finden wir, dass

1068) $(m)_n = \beta(m)_n$ und $(m)'_n = \beta(m)_{n-1} \cdot \varphi_{m+n-1}$

$[m]_n = \beta(m+1)_{n-1}$ $[m]'_n = \beta(m+1)_{n-2} \cdot \varphi_{m+n-1}$

Die Gleichung, welche zeigt, wie irgend ein Glied der Reihe 1062 von einem entfernten Gliede abgeleitet werden kann, ist also folgende:

1069) $$f_m = \frac{\beta(m)_{n-1} \cdot \varphi_{m+n-1} + \beta(m)_n \cdot f_{m+n}}{\beta(m+1)_{n-2} \cdot \varphi_{m+n-1} + \beta(m+1)_{n-1} \cdot f_{m+n}}$$

welche nicht allein für das bejahete, sondern auch für das verneinte n gilt, so dass auch

1070) $$f_m = \frac{\beta(m)_{-n-1} \cdot \varphi_{m-n-1} + \beta(m)_{-n} \cdot f_{m-n}}{\beta(m+1)_{-n-2} \cdot \varphi_{m-n-1} + \beta(m+1)_{-n-1} \cdot f_{m-n}}$$

oder, wenn hierin $m = m+n$ gesetzt, und zugleich Anwendung von der Gleichung 1053 gemacht wird, dass

1071) $$f_{m+n} = \frac{-\beta(m)_{n-1} + \beta(m+1)_{n-2} \cdot f_m}{+\beta(m)_n - \beta(m+1)_{n-1} \cdot f_m} \cdot \varphi_{m+n-1}$$

§. 300.

Die Zähler und Nenner dieser Brüche 1069, 1070, 1071, sind auf gleiche Weise gebildet. Diese Bemerkung führt uns zu einer sehr merkwürdigen Wahrheit. Setzen wir zur Abkürzung

$$\beta(m)_{n-1} \cdot \varphi_{m+n-1} + \beta(m)_n \cdot f_{m+n} = \delta(m, n)$$

so ist nach 1069

$$\delta(m, n) = f_m \cdot \delta(m+1, n-1)$$

Bilden wir nach dieser Gleichung folgende:

$$\delta(m+1, n-1) = f_{m+1} \cdot \delta(m+2, n-2)$$

$$\delta(m+2, n-2) = f_{m+2} \cdot \delta(m+3, n-3)$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$\delta(m+n-1, 1) = f_{m+n-1} \cdot \delta(m+n, 0)$$

$$\delta(m+n, 0) = f_{m+n}$$

und vervielfachen alle diese Gleichungen mit einander, so entsteht die Gleichung

$$\delta(m, n) = f_m \cdot f_{m+1} \cdot f_{m+2} \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot f_{m+n}$$

oder

1072) $$\beta(m)_{n-1} \cdot \varphi_{m+n-1} + \beta(m)_n \cdot f_{m+n} = (f_m)^{n+1|1}$$

Eben so finden wir aus 1071, dass

1073) $$\beta(m)_n \cdot (f_{m+1})^{n|1} - \beta(m+1)_{n-1} \cdot (f_m)^{n+1|1} = (-)^n (\varphi_m)^{n|1}$$

Diese beiden Gleichungen sind um desto merkwürdiger, da bis jetzt Producte von fortlaufenden Brüchen durch andere Grössen zu ersetzen nicht bekannt war.

Diese Gleichung ist nicht die allgemeinste ihrer Art; wir suchen letztere, und fragen: wie müssen U und V beschaffen sein, damit die Summe der Producte

$$U \cdot (f_m)^{r|1} + V \cdot (f_n)^{q|1} = P$$

durch andere Geschäfte ersetzt werden kann?

Wir zerlegen die gegebenen Factoren nach 1072 in zwei Producte

$$P = x. \left(\beta(m)_{p-2} \cdot \varphi_{m+p-2} + \beta(m)_{p-1} . f_{m+p-1}\right) + y \left(\beta(n)_{q-2} \cdot \varphi_{n+q-2} + \beta(n)_{q-1} . f_{n+q-1}\right)$$

und finden hiedurch, dass, wenn wir $m + p = n + q$, also $q = m - n + p$ setzen, die Producte sich gruppiren so lassen,

$$P = \left(x.\beta(m)_{p-2} + y.\beta(n)_{m-n+p-2}\right) \varphi_{m+p-2} + \left(x.\beta(m)_{p-1} + y.\beta(n)_{m-n+p-1}\right).f_{m+p-1}$$

dass x und y durch die Gleichung 1052 ausgemittelt werden können. Indem wir nun vorstehende Producte mit der angeführten Gleichung vergleichen, ergibt sich, dass

$$x = \beta(n)_p \quad \text{und} \quad y = - \beta(m)_{p+n-m}$$

Führen wir diese Werthe ein, so finden wir durch Hülfe der Gleichungen 1052 und 1073, dass

$$\beta(n)_p \,.\, (f_m)^{p|1} - \beta(m)_{p+n-m} \,.\, (f_n)^{m-n+p|1} = (-)^p \, \beta(m)_{n-m-1} \,.\, \frac{(\varphi_{n-1})^{p+1|1}}{(f_{m+p})^{n-m+1|1}}$$

oder

1074) $$\beta(n)_p \,.\, (f_m)^{n-m+p+1|1} - \beta(m)_{n-m+p} \,.\, (f_n)^{p+1|1} = (-)^p \, \beta(m)_{n-m-1} \,.\, (\varphi_{n-1})^{p+1|1}$$

Diese Gleichung ist allgemeiner als 1073, welche entsteht, wenn $n = m$, $p = n$ und $m = m + 1$ gesetzt wird. Wir wollen von ihr Anwendung machen, setzen desshalb in ihr $m = m + 1$, $n = m + 1 - a1$, $p = a2 + a1 - 1$, und geben ihr durch Hülfe 1053 für unseren Zweck folgende Gestalt:

1075) $$(f_{m+1-a1})^{a1|1} = (-)^{a1} \frac{\beta(m+1-a2)_{-1-a1+a2}}{\beta(m+1-a2)_{-1+a2}}.(\varphi_{m-a1})^{a1|1} + \frac{\beta(m+1-a1)_{-1+a1}}{\beta(m+1-a2)_{-1+a2}}.(f_{m+1-a2})^{a2|1}$$

Ferner ist wegen 1072

1076) $$(f_{m+1})^{a|1} = \frac{\beta(m+1)_{a+b-2} \cdot \varphi_{m+a+b-1} + \beta(m+1)_{a+b-1} \cdot f_{m+a+b}}{\beta(m+a+1)_{b-2} \cdot \varphi_{m+a+b-1} + \beta(m+a+1)_{b-1} \cdot f_{m+a+b}}$$

Hat man nun nach vorstehender Gleichung 1076 aus irgend einem Werthe von f_{m+h} das Product $(f_{m+1-ap})^{ap|1}$ gefunden, so lässt sich aus diesem das Product $(f_{m+1-a1})^{a1|1}$ nach der Vorschrift 1075 herleiten, und zwar entweder unmittelbar oder auch durch Zwischenglieder auf folgende Weise:

$$1077) \quad (f_{m+1-a1})^{a1l1} = (-)^{a1} \frac{\beta(m+1-a1)_{-1+a1} \cdot \beta(m+1-a2)_{-1-a1+a2}}{\beta(m+1-a1)_{-1+a1} \cdot \beta(m+1-a2)_{-1+a2}} \cdot (\varphi_{m-1})^{a1l-1}$$

$$+ (-)^{a2} \frac{\beta(m+1-a1)_{-1+a1} \cdot \beta(m+1-a3)_{-1-a2+a3}}{\beta(m+1-a2)_{-1+a2} \cdot \beta(m+1-a3)_{-1+a3}} \cdot (\varphi_{m-1})^{a2l-1}$$

$$+ (-)^{a3} \frac{\beta(m+1-a1)_{-1+a1} \cdot \beta(m+1-a4)_{-1-a3+a4}}{\beta(m+1-a3)_{-1+a3} \cdot \beta(m+1-a4)_{-1+a4}} \cdot (\varphi_{m-1})^{a3l-1}$$

$$+ \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; .$$

$$+ (-)^{a(p-1)} \frac{\beta(m+1-a1)_{-1+a1} \cdot \beta(m+1-ap)_{-1-a(p-1)+ap}}{\beta(m+1-a(p-1))_{-1+a(p-1)} \cdot \beta(m+1-ap)_{-1+ap}} \cdot (\varphi_{m-1})^{a(p-1)l-1}$$

$$+ \frac{\beta(m+1-a1)_{-1+a1}}{\beta(m+1-ap)_{-1+ap}} \cdot (f_{m+1-ap})^{apl1}$$

Werden die Grössen a1, a2, a3,.... verneint genommen, so erhalten wir die Reihe

$$1078) \quad (f_{m+1+a1})^{-a1l1} = (-)^{a1-a1} \frac{\beta(m+1)_{-1+a1} \cdot \beta(m+1+a1)_{-1-a1+a2}}{\beta(m+1)_{-1+a1} \cdot \beta(m+1)_{-1+a2}} \cdot \frac{(\varphi_m)^{a1l1}}{(\varphi_m)^{a1l1}}$$

$$+ (-)^{a1-a2} \frac{\beta(m+1)_{-1+a1} \cdot \beta(m+1+a2)_{-1-a2+a3}}{\beta(m+1)_{-1+a2} \cdot \beta(m+1)_{-1+a3}} \cdot \frac{(\varphi_m)^{a2l1}}{(\varphi_m)^{a1l1}}$$

$$+ (-)^{a1-a3} \frac{\beta(m+1)_{-1+a1} \cdot \beta(m+1+a3)_{-1-a3+a4}}{\beta(m+1)_{-1+a3} \cdot \beta(m+1)_{-1+a4}} \cdot \frac{(\varphi_m)^{a3l1}}{(\varphi_m)^{a1l1}}$$

$$+ \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; .$$

$$+ (-)^{a1-a(p-1)} \frac{\beta(m+1)_{-1+a1} \cdot \beta(m+1+a(p-1))_{-1-a(p-1)+ap}}{\beta(m+1)_{-1+a(p-1)} \cdot \beta(m+1)_{-1+ap}} \cdot \frac{(\varphi_m)^{a(p-1)l1}}{(\varphi_m)^{a1l1}}$$

$$+ (-)^{a1-ap} \frac{\beta(m+1)_{-1+a1}}{\beta(m+1)_{-1+ap}} \cdot \frac{(\varphi_m)^{apl1}}{(\varphi_m)^{a1l1}} \cdot (f_{m+1+ap})^{-apl1}$$

Von dieser allgemeinen Reihe 1077, welche in 1078 nur in einer anderen Gestalt erscheint, kennt man bis jetzt nur zwei ganz specielle Fälle, und zwar diejenigen Reihen, welche entstehen, wenn in 1077 $a1 = 1$, $a2 = 2$, $a3 = 3$, ... und in 1078, $a1 = -1$, $a2 = +2$, $a3 = +3$, ... gesetzt werden, nämlich

1079) $$f_m = -\frac{(\varphi_{m-1})^{1|-1}}{\beta(m)_0\,\beta(m-1)_1} + \frac{(\varphi_{m-1})^{2|-1}}{\beta(m-1)_1 . \beta(m-2)_2} - \frac{(\varphi_{m-1})^{3|-1}}{\beta(m-2)_2 . \beta(m-3)_3} + \ldots - \ldots$$

$$+ (-)^{p-1} \frac{(\varphi_{m-1})^{p-1|-1}}{\beta(m-p+2)_{p-2}\,\beta(m-p+1)_{p-1}} + \frac{(f_{m-p+1})^{p|1}}{\beta(m-p+1)_{p-1}}$$

und

1080) $$f_m = \frac{1}{\beta(m+1)_1} - \frac{(\varphi_m)^{2|1}}{\beta(m+1)_1\,\beta(m+1)_2} + \frac{(\varphi_m)^{3|1}}{\beta(m+1)_2\,\beta(m+1)_3} - \ldots .$$

$$(-)^p \frac{(\varphi_m)^{p-1|1}}{\beta(m+1)_{p-2}\,\beta(m+1)_{p-1}} + (-)^{p+1} \frac{(\varphi_m)^{p|1}}{\beta(m+1)_{p-1}} . (f_{m+p+1})^{-p|1}$$

wo $(f_{m-p+1})^{p|1}$ und $(f_{m+p+1})^{-p|1}$ nach 1076 gebildet werden.

§. 301.

Wenn die Gleichung

1081) $$(F_{m+1} + \Gamma_{m+1}) . F_m = \varphi_m$$

zu Grunde gelegt wird, so entstehen folgende Brüche:

$$F_{m+1} = -\Gamma_{m+1} + \frac{\varphi_m}{F_m} \text{ und } F_m = \frac{\varphi_m}{\Gamma_{m+1} + F_{m+1}}$$

und

1082) $$F_m = -\Gamma_m + \cfrac{\varphi_{m-1}}{-\Gamma_{m-1} + \cfrac{\varphi_{m-2}}{-\Gamma_{m-2} + \cfrac{\varphi_{m-3}}{-\Gamma_{m-3} + \ldots\ldots}}}$$

1083) $$F_m = \cfrac{\varphi_m}{\Gamma_{m+1} + \cfrac{\varphi_{m+1}}{\Gamma_{m+2} + \cfrac{\varphi_{m+2}}{\Gamma_{m+3} + \ldots\ldots}}}$$

durch welche die Glieder der Reihe

1084) $$\ldots . F_{-3},\, F_{-2},\, F_{-1},\, F_0,\, F_{+1},\, F_{+2},\, F_{+3},\, \ldots .$$

bestimmt werden. Wir finden hier ähnliche Gleichungen, wie für f_m, entweder auf die Weise, welche oben gezeigt ist, oder auch dadurch, dass wir

1085) $$F_m = r_m - f_m$$

setzen, nämlich

1086) $$F_m = \frac{\beta(m+2)_{n-1} + \beta(m+2)_{n-2} \cdot F_{m+n}}{\beta(m+1)_n + \beta(m+1)_{n-1} \cdot F_{m+n}} \cdot \varphi_m$$

$$F_{m+n} = \frac{\beta(m+2)_{n-1} \cdot \varphi_m - \beta(m+1)_n \cdot F_m}{-\beta(m+2)_{n-2} \cdot \varphi_m + \beta(m+1)_{n-1} \cdot F_m}$$

1087) $$(-)^n (F_m)^{n+1|1} = \beta(m+1)_n . F_m - \beta(m+2)_{n-1} \cdot \varphi_m$$

1088) $$\beta(m+1)_n \cdot (F_m)^{n|1} + \beta(m+1)_{n-1} \cdot (F_m)^{n+1|1} = (\varphi_m)^{n|1}$$

1089) $$(-)^{r-1} \beta(m+s+1)_{q-s-1} \cdot (F_m)^{p|1} + (-)^q \beta(m+s+1)_{p-s-1} (F_m)^{q|1} =$$
$$= (-)^{1+p} \beta(m+p+1)_{q-p-1} (\varphi_{m+s})^{p-s|1} (F_m)^{s|1}$$

oder

1090) $$(F_n)^{p|1} = (-)^p \frac{\beta(m+1)_{p+n-m-1}}{\beta(m+1)_{n-m-1}} + (-)^{p+1} \frac{\beta(n+1)_{p-1}}{\beta(m+1)_{n-m-1}} \cdot (\varphi_m)^{n-m|1} \cdot (F_m)^{m-n|1}$$

Aus dieser lassen sich ähnliche Reihen wie 1077 und 1078 herleiten.

§. 302.

Wir wollen die ganze Untersuchung beschliessen mit dem besonderen Falle, wenn irgend ein Glied der Reihe 1062 verschwindet, oder wenn

1091) $$f_m = 0$$

In diesem Falle kann jedes Glied der Reihe unabhängig von allen übrigen Gliedern und einzig nur aus den Grössen Γ und φ gebildet werden; denn nach 1071 ist

1092) $$f_{m+n} = - \frac{\beta(m)_{n-1}}{\beta(m)_n} \varphi_{m+n-1} \quad \text{und} \quad f_{m-n} = \frac{\beta(m-n)_{n-1}}{\beta(m-n+1)_{n-2}}$$

und nach 1074 das Product

1093) $$(f_n)^{p|1} = (-)^p \frac{\beta(m)_{n-m-1}}{\beta(m)_{n-m-1+p}} \cdot (\varphi_{n-1})^{p|1}$$

Nur ein Glied in der Reihe erhält einen Werth, der nicht darstellbar ist, nämlich dasjenige, welches dem f_m vorhergeht,

1094) $$f_{m-1} = - \frac{1}{0} = - \infty$$

Die übrigen Glieder sind

$$f_{m+1} = - \frac{\varphi_m}{\Gamma_m}$$

$$f_{m+2} = - \cfrac{\varphi_{m+1}}{\Gamma_{m+1} + \cfrac{\varphi_m}{\Gamma_m}}$$

$$f_{m+3} = - \cfrac{\varphi_{m+2}}{\Gamma_{m+2} + \cfrac{\varphi_{m+1}}{\Gamma_{m+1} + \cfrac{\varphi_m}{\Gamma_m}}}$$

u. s. w. und

$$1095) \qquad f_{m-2} = \Gamma_{m-2}$$

$$f_{m-3} = \Gamma_{m-3} + \frac{\varphi_{m-3}}{\Gamma_{m-2}}$$

$$f_{m-4} = \Gamma_{m-4} + \frac{\varphi_{m-4}}{\Gamma_{m-3} + \frac{\varphi_{m-3}}{\Gamma_{m-2}}}$$

u. s. w.

§. 303.

Verschwindet in der anderen Reihe 1084 ein Glied, und ist

$$1096) \qquad F_m = 0$$

so kann auch hier jedes andere Glied unabhängig von den übrigen gebildet werden, und es ist nach 1086

$$1097) \quad F_{m+n} = - \frac{\beta(m+2)_{n-1}}{\beta(m+2)_{n-2}} \quad \text{und} \quad F_{m-n} = + \frac{\beta(m-n+2)_{n-1}}{\beta(m-n+1)_n} \cdot \varphi_{m-n}$$

und nach 1090 das Product

$$1098) \qquad (F_n)^{p|1} = (-)^p \frac{\beta(m+1)_{n-m-1+p}}{\beta(m+1)_{n-m-1}}$$

Auch hier ist ein Glied und zwar das nächstfolgende nicht darstellbar, nämlich

$$1099) \qquad F_{m+1} = - \frac{1}{0} = - \infty$$

Die übrigen Glieder sind

1100)
$$- F_{m+2} = + \Gamma_{m+2}$$

$$- F_{m+3} = + \Gamma_{m+3} + \frac{\varphi_{m+2}}{\Gamma_{m+2}}$$

$$- F_{m+4} = + \Gamma_{m+4} + \cfrac{\varphi_{m+3}}{\Gamma_{m+3} + \cfrac{\varphi_{m+2}}{\Gamma_{m+2}}}$$

u. s. w., und

1101)
$$F_{m-1} = \frac{\varphi_{m-1}}{\Gamma_m}$$

$$F_{m-2} = \cfrac{\varphi_{m-2}}{\Gamma_{m-1} + \cfrac{\varphi_{m-1}}{\Gamma_m}}$$

$$F_{m-3} = \cfrac{\varphi_{m-3}}{\Gamma_{m-2} + \cfrac{\varphi_{m-2}}{\Gamma_{m-1} + \cfrac{\varphi_{m-1}}{\Gamma_m}}}$$

und

$$F_{m-p} = \cfrac{\varphi_{m-p}}{\Gamma_{m-p+1} + \cfrac{\varphi_{m-p+1}}{\Gamma_{m-p+2} + \cfrac{\varphi_{m-p+2}}{\Gamma_{m-p+3} + \cdots \atop \cdots + \Gamma_{m-1} + \cfrac{\varphi_{m-1}}{\Gamma_m}}}}$$

INHALT.

THEORIE DER UNTERSCHIEDE.

THEORIE DER DIFFERENTIALE.

THEORIE DER REIHEN.

---

*) Die Seite 322 war schon abgedruckt, als wir fanden, dass mehrere Wahrheiten von Seite 404 bis 428 noch einer grösseren Allgemeinheit fähig seien. Wir machten gleich die nöthigen Verbesserungen; bitten aber jetzt den Leser, das, was Seite 322 befindlich, entweder nach den Ueberschriften Seite 404, 410, 428, oder nach diesem Inhaltsverzeichnisse zu ändern.

THEORIE DER WIEDERHOLENDEN FUNCTIONEN.

THEORIE DER ALLGEMEINSTEN FACULTÄTEN.

ALLGEMEINE THEORIE DER FORTLAUFENDEN BRÜCHE.

Zu der geschichtlichen Bemerkung des Prof. Mollweide in seinem Wörterbuche S. 625, dem im Historischen mehr Wahrheit zu wünschen wäre, gebe ich folgende Berichtigung:

Das Beispiel, wie es im Wörterbuch Seite 625. 4. Th. angeführt wird, mag beim Meissner vorkommen, aber diese Reihe ist nicht die meinige 565 Analy.; die meinige hat ein Gesetz der Vorzahlen, jene angeführte Reihe kein Gesetz. Mollweide hält sich nur bei einigen Beispielen auf, schweigt aber von den allgemeinsten Reihen, die ich in der neunten Abhandlung der Analysis gebe.

Mannheim, Buchdruckerei des katholischen Bürger-Hospitals.

Druckfehler und Verbesserungen.

Seite	8	in der Linie	10 von unten,	statt	1^{nl-1}	lies	1^{nl1}
»	40	»	7	»	P_{-3}	»	Q_{-3}
»	49	»	2	»	ΔP	»	ΔP_{-3}
»	58	»	2	»	$x_m, +$	»	$x_m +$
»	—	»	—	»	x_3, x_3	»	x_2, x_3
»	60	»	13	»	$= 4$	»	$= 4$, so ist
»	62	»	6	»	^{nl1}	»	1^{nl1}
»	64	»	9 von oben,	statt	Δ^{-n2}	»	Δ^{n-2}
»	71	»	2	»	Δ^{n}_{p+1}	»	Δ^{1}_{p+1}
»	72	»	2	»	1^{nl1}	»	1^{tl1}
»	80	»	2 von unten,	»	$\varphi x(x$	»	$\phi(x$
»	108	»	2	»	Δlg	»	$\Delta^{n} lg$
»	111	»	2	»	h^{n}	»	h^{r}
»	121	»	6	»	x	»	x_r
»	128	»	10 von oben,	»	$\frac{}{a3}$	»	$\frac{}{a2}$
»	129	»	6 von unten,	»	dX^{n2}	»	$d'X^{n2}$
»	130	»	5	»	$\Sigma_{n1,\ldots,(n5)}$	»	$\Sigma_{(n1,\ldots,n5)}$
»	—	»	8	»	$d^{n1}X^{n2\vert}$	»	$d^{n2}X^{n2}$
»	131	»	3 von oben,	»	N_{q-1}	»	N_q
»	135	»	7 von unten,	»	$X \times Z.dZ$	»	$X \times Z.d(Z$
»	136	»	4 von oben,	»	zahlen	»	Vorzahlen
»	137	»	7	»	$Y^{n})$	»	$Y)^{n}$
»	138	»	4	»	$f^{n}_{m})$	»	$f'_{m})^{n}$
»	—	»	8	»	f_m	»	$f'_{m})$
»	—	»	4 von unten,	»	zweiten	»	ersten
1	167	»	7	»	$(Z.)^{r}$	»	$(Z_1.d)^{r}$
»	177	»	2 von oben werde I ausgelöscht				
»	178	»	7	» statt	φy	lies	ϕx

Seite	185	in der Linie	8	von unten statt	$1^{q\vert 1}dy^q$	lies	dy^q
»	194	»	2	»	y_m^2	»	y_m
»	195	»	3	»	$1_{p\vert 1}$	»	$1^{p\vert 1}$
»	200	»	2	»	φ_1	»	φ_2
»	207	»	8	»	x^2	»	x_2
»	211	»	10	»	Burmann	»	Bürmann
»	212	»	2	von oben statt	$\Delta_{xm}\ldots\Delta_{x2}$	»	$\Delta_{x2}\ldots\Delta_{xm}$
»	215	»	2	»	Burmann	»	Bürmann
»	217	»	3	»	$),\ldots$	»	$,\ldots.)$
»	225	»	8	von unten statt	$1^{n-1\vert -}$	»	$1^{n-1\vert 1}$
»	247	»	8	von oben statt	$q-1)$	»	$q-1))$
»	248	»	2	von unten statt	$s^{2h+2\vert -}$	»	$s^{2h+2\vert 1}$
»	254	»	5	von oben statt	$).)$	»	$))$
»	256	»	4	»	$p+0q-1$	»	$p+0q-0$
»	—	»	2	von unten statt	$p^{v\vert 1}$	»	$p^{v\vert -1}$
»	257	»	2	von oben statt	1^m	»	$1^{m\vert 1}$
»	269	»	6	»	$p+nq-q$	»	$p+nq-0q$
»	279	»	1	von unten statt	a^p	»	a_p
»	280	»	2	von oben statt	mit und ohne	»	mit
»	295	»	9	von unten statt	$1_{,}^{u\vert -1}$	»	$1^{u^{\vert}1}$
»	303	»	2	von oben statt	A(1	»	A('1
»	310	»	5	»	$(n)_p\cdot($	»	$(n)_p+($
»	316	»	1	von unten statt	89	»	98
»	337	»	5	»	$^{an)}$	»	^{an}
»	357	»	8	von oben statt	$A_{q-1\vert 1}$	»	A_{q-1}
»	359	»	3	»	in	»	aus
»	414	»	11	»	)	»	))
»	418	nach der fünften Linie muss eine Reihe Puncte folgen.					
»	421	in der Linie	7	von oben statt	d^1	lies	$d)^1$
»	430	»	5	»	)	»	))

Seite	436	in der Linie	7 von unten,	statt	A_{11}	liess	A_1
»	437	»	6 von oben,	»	A_n	»	A_{n-1}
»	441	»	5 »	»	A	»	A_{n-1}
»	445	»	10 »	»	A_{n-1}	»	A_{n+1}
»	455	»	1 »	»	$\varphi_1^{(0)}x$	»	$\Delta\varphi_1^{(0)}x$
»	456	»	1 und 5 »	»	φ^n	»	φ_n
»	464	»	1 von unten,	»	$B^{(n)}$	»	$B^{(1)}$
»	466	»	6 von oben,	»	$n^{(l)}$	»	$n^{(l-1)}$
»	471	»	9 von unten,	»	$=$	»	$= 0$
»	504	»	4 »	»	hänge	»	hängige
»	509	»	3 von oben,	»	$-C_{n-1}$	»	$-C_{n-2}$
»	525	»	1 »	»	x_2, x_2	»	x_1, x_2
»	528	»	4 von unten,	»	A^n	»	A_n
»	530	»	4 von oben,	»	$\varphi x =$	»	$\varphi x = x$
»	553	»	3 von unten,	»	$)fx$	»	$)^2 fx$
»	556	»	6 »	»	$)^{-2}+\ldots)^2$	»	$)^2+\ldots.)^{-2}$
»	587	»	5 von oben	»	$P =$	»	$P_q =$
»	589	»	1 von unten	»	$)+$	»	$)^0 +$
»	625	»	6 von oben	»	$f($	»	$f_0($
»	626	»	2 von unten	»	$+ {}_1x$	»	$+ x_1$
»	635	»	6 von oben	»	φ_{5-m}	»	φ_{m-5}
»	—	»	7 von unten	»	$\beta(m_{n+1})$	»	$\beta(m)_{n+1}$
»	643	»	4 »	»	f_{-8}	»	f_{-3}
»	647	»	2 von oben	»	gruppiren so	lies:	so gruppiren