O zasadzie logarytmów naturalnych.[1]

II.

W № 2 „Wektora" rozpatrywaliśmy ruch punktu, poruszającego się w ten sposób, iż w dowolnym momencie prędkość jego liczbowo = odległości od pewnego początkowego punktu toru i wykazaliśmy, że, jeżeli za początkowy moment uważać będziemy ten, w którym odległość ta $=1$, w takim razie odległość punktu w dowolnym czasie t będzie

$$s=e^t.$$

Spróbujmy obecnie uogólnić powyższe zagadnienie, a mianowicie, pozostawiając bez zmiany poprzednie warunki ruchu, zażądajmy jedynie, by podczas ruchu punktu stosunek jego prędkości do odległości od początkowego punktu toru = stałej wielkości λ. Oczywiście, że w przypadku $\lambda=1$ otrzymamy poprzednie zagadnienie.

Że warunki obecnie postawionego zagadnienia również czynią zadość zasadzie ciągłości ruchu, łatwo o tym się przekonać: będąc w dowolnej skończonej odległości x od początkowego punktu, ruchomy punkt posiada również skończoną prędkość λx, przebiega w elemencie czasu θ drogę $\lambda x\theta$, w tymże czasie prędkość jego zmienia się o $\lambda^2 x\theta (=\lambda x\theta + \lambda^2 x\theta - \lambda x\theta)$, przyśpieszenie zaś — o $\lambda^3 x\theta$, — wszystkie te

[1]) Artykuł mój, umieszczony w № 2 pod tym samym tytułem, wywołał zainteresowanie śród czytelników; ta okoliczność pobudziła mnie do zabrania głosu w artykule niniejszym w dwuch sprawach, będących w ścisłym związku z poprzedniemi i stanowiących niejako ciąg dalszy tamtych, — a mianowicie, pozostając na dawnym stanowisku, obecnie podaję: a) kinematyczne znaczenie zamiennika (modułu) logarytmicznego tudzież b) rozwinięcie e^λ w szereg. *Przyp. autora.*

przyrosty tak odległości, jak prędkości oraz przyśpieszenia zmierzają do zera razem z θ.

Zobaczmy, gdzie nasz ruchomy punkt (oznaczmy go przez N dla odróżnienia od poprzedniego M, gdy $\lambda=1$) będzie w czasie $t=1$ sek.

Podobnie, jak w poprzednim zadaniu, dzielimy sekundę od $t=0$ do $t=1$ na bardzo wielką liczbę n równych elementów θ i rozpatrujemy ruch punktu N w ciągu każdego oddzielnego elementu jako jednostajny, zachodzący z prędkością, jaką faktycznie posiada punkt w początkowym momencie odnośnego elementu czasu. Otrzymamy:

po upływie 1-go elementu θ odległość punktu $=1+\lambda\theta$
„ „ 2-go „ „ „ $=1+\lambda\theta+(1+\lambda\theta)\lambda\theta=(1+\lambda\theta)^2$
„ „ 3-go „ „ „ $=(1+\lambda\theta)^2+(1+\lambda\theta)^2\lambda\theta=(1+\lambda\theta)^3$.
. . . .
„ „ $(n-1)$-go „ „ „ $=(1+\lambda\theta)^{n-1}$
„ „ n-go „ „ „ $(1+\lambda\theta)^{n-1}(1+\lambda\theta)^{n-1}\lambda\theta=$
$$=(1+\lambda\theta)^n=(1+\frac{\lambda}{n})^n.$$

Prawo tworzenia odległości punktu w końcu dowolnego elementu czasu jest widoczne, dla większej jednak ścisłości może być bardzo łatwo uogólnione drogą indukcji zupełnej: jeżeli bowiem przypuścimy, że w końcu k-go elementu odległość punktu $=(1+\lambda\theta)^k$, w takim razie w końcu następnego $(k+1)$-go będzie ona $=(1+\lambda\theta)^k+(1+\lambda\theta)^k.\lambda\theta=(1+\lambda\theta)^{k+1}$, ponieważ zaś dla 1-go elementu zależność ta jest słuszna, więc i dla każdego innego będzie również słuszna.

Przechodząc do granicy, gdy n rośnie do nieskończoności, otrzymamy, że w czasie $t=1$ odległość punktu N od początkowego punktu toru będzie

$$s_1=\lim_{n=\infty}(1+\frac{\lambda}{n})^n$$

Dowiedziemy, że granica ta $=e^\lambda$ i w ten sposób otrzymamy po drodze jedną z ważniejszych i ciekawszych zależności:

$$\lim_{n=\infty}(1+\frac{\lambda}{n})^n=e^\lambda. \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (A)$$

W tym celu przeprowadzimy rozumowanie następujące.

W zagadnieniu poprzednim mieliśmy punkt ruchomy M, którego prędkość = liczbowo odległości i którego odległość w dowolnym czasie $=e^t$. Obecnie mamy punkt ruchomy N, którego prędkość = iloczynowi λ przez odległość, to znaczy, że będąc w odległości x cm. punkt N

posiada prędkość$=\lambda x \frac{\text{cm.}}{\text{sek.}}$. Nic nie stoi nam na przeszkodzie, abyśmy chwilowo zmienili jednostkę czasu na inną w stosunku $1:\lambda$, to znaczy, byśmy mierzyli czas, zamiast w sekundach, w innych jednostkach$=\frac{1}{\lambda}$ sek.; oznaczmy nową jednostkę przez T. W takim razie prędkość punktu N w odległości x będzie $x\frac{\text{cm.}}{T}$ czyli możemy powiedzieć, że przy nowej jednostce czasu $T=\frac{1}{\lambda}$ sek. prędkość punktu N=liczbowo odległości, stąd wniosek, że przy takiej zamianie jednostki czasu ruch punktu N może być utożsamiony z ruchem poprzedniego zagadnienia, a w takim razie odległość s_1 punktu N po 1 sek. $=\lambda T$ będzie taka sama, jak odległość punktu M po upływie λ jednostek czasu, ta zaś odległość, jak to nam już wiadomo, $=e^\lambda$; tak więc słuszność zależności (A) została stwierdzona, a zarazem przekonaliśmy się, że punkt N, poruszający się z prędkością, której stosunek do odległości $=\lambda$, okaże się po 1 sek. w odległości e^λ od początkowego punktu toru.

Nic łatwiejszego, jak drogą, wskazaną wyżej w № 2, udowodnić, z początku dla całkowitych wartości t, następnie jakichkolwiek wymiernych, wreszcie dowolnych rzeczywistych, że w czasie t odległość s punktu N od początkowego punktu toru będzie

$$s=e^{\lambda t}=G^t, \text{ gdzie } G=e^\lambda. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (B)$$

Widzimy więc, że czas, w którym punkt N dosięgnie danej odległości s ($s>0$) jest logarytmem tejże odległości przy zasadzie $G=e^\lambda$. Stąd $\lambda=log_e G$=zamiennikowi (modułowi) logarytmicznemu przy przejściu od zasady e do zasady G. Ostatecznie dochodzimy do następującego ciekawego wniosku:

Zamiennik (moduł) logarytmiczny może być rozpatrywany z naszego kinematycznego stanowiska, jako stały stosunek prędkości punktu do jego odległości od początkowego punktu toru, przyczym czas w trakcie ruchu będzie logarytmem odległości przy odnośnej zasadzie. Tak np. biorąc pod uwagę zwyczajne dziesiętne logarytmy o zamienniku $\Lambda=lg_e 10=2{,}30258....$, możemy powiedzieć, że jeżeli punkt N porusza się w ten sposób, iż stosunek jego prędkości do odpowiedniej odległości$=\Lambda=lg_e 10$=zamiennikowi logarytmów dziesiętnych, wówczas w ciągu ruchu czas będzie dziesiętnym logarytmem odległości.

III.

Rozważmy, nie schodząc z dotychczasowego stanowiska kinematycznego, czy nie daloby się e^λ rozwinąć w szereg według potęg λ. Niech

$$e^\lambda = A_0 + A_1\lambda + A_2\lambda^2 + \ldots\ldots + A_k\lambda^k + A_{k+1}\lambda^{k+1} + \ldots + A_m\lambda^m .$$

Dowiedziemy, że: 1) rozwinięcie jest możliwe, 2) szereg będzie nieskończony, 3) spółczynniki A_i nieograniczenie maleją, a obok tego wyznaczymy wartości spółczynników A.

W tym celu możemy obrać jedną drogę z dwuch: albo rozpatrywać e^λ jako odległość punktu N po 1 sek., albo jako odległość punktu M po λ sek.; obydwie drogi są jednakowo dobre i obydwie prowadzą do celu. Obieramy pierwszą.

W czasie $t=1$ sek. punkt N znajduje się w odległości e^λ, w czasie $1+\theta$ odległość ta będzie $s'=e^{\lambda(1+\theta)}$ (p. B.) czyli

$$s' = A_0 + A_1\lambda.(1+\theta) + A_2\lambda^2(1+\theta)^2 + \ldots\ldots + A_m\lambda^m(1+\theta)^m \quad \ldots\ldots\ldots (1)$$

Z drugiej zaś strony możemy otrzymać s', dodając do odległości e^λ drogę, jaką przebiegł punkt N w ciągu θ sekund od $t=1$ do $t=1+\theta$; w założeniu, że drogę tę przebiegł punkt ruchem jednostajnym, otrzymamy, że ona $= \lambda.e^\lambda.\theta$; tak więc w tym przypuszczeniu punkt w czasie $1+\theta$ okaże się w odległości

$$s'' = e^\lambda + \lambda.e.^\lambda\theta = e^\lambda(1+\lambda\theta) \text{ albo}$$

$$s'' = A_0(1+\lambda\theta) + A_1\lambda(1+\lambda\theta) + A_2\lambda^2(1+\lambda\theta) + \ldots + A_m\lambda^m(1+\lambda\theta) \quad \ldots (2)$$

Z powyższego rozumowania wynika, że ściśle biorąc s'' będzie $=s'$ dopiero w granicy przy θ dążącym do zera, a to dlatego, że dodatkowa droga $\lambda.e.^\lambda\theta$ faktycznie nie została przebyta ruchem jednostajnym. Pamiętając o tym, że $s'=s''$ przy $\theta=0$, rozwińmy jak s' tak i s'' według potęg λ i zażądajmy, by spółczynniki przy jednakowych potęgach λ były równe, gdy $\theta=0$. Takie żądanie jest tu zupełnie racjonalne, gdyż równość $s'=s''$ bynajmniej nie zależy od tej lub innej wartości λ.

W rozwinięciu (1) spółczynnik przy jakimś λ^k będzie $=$

$$= A_k(1+\theta)^k = A_k + A_k\,.\,k\,.\,\theta + P\theta^2 + Q\theta^3 \ldots,$$

gdzie P, Q,... zależą jedynie od k, nie zależą zaś od θ.

W rozwinięciu (2) tenże spółczynnik przy λ^k będzie $=A_{k-1}\theta + A_k$.

Kładąc

$$A_{k-1}\,.\,\theta+A_k=A_k+A_k\,.\,k\,.\,\theta+P\,.\,\theta^2+Q\theta^3+\ldots\ldots,$$ otrzymamy

$$A_{k-1}=k\,.\,A_k+P\,.\,\theta+Q\theta^2+\ldots.$$ i stąd przy $\theta=0$

$$A_k=\frac{A_{k-1}}{k}\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;(3).$$

Zależność (3) odpowiada nam na wszystkie punkty, wyżej wymienione: rozwinięcie jest możliwe, szereg jest nieskończony, gdyż mając jakikolwiek spółczynnik A_s, dzielimy go przez $s+1$ i otrzymujemy następny i tak dalej bez końca; spółczynniki nieograniczenie maleją, gdyż stosunek jakiegokolwiek do poprzedniego $=\frac{1}{k}$ ciągle maleje w miarę posuwania się ku dalszym wyrazom.

Z zależności (3) otrzymujemy, zważywszy, że $A_0=1$ (gdyż przy $\lambda=0$, $e^{\lambda}=1=A_0$):

$$A_k=\frac{A_{k-1}}{k}$$

$$A_{k-1}=\frac{A_{k-2}}{k-1}$$

$$A_{k-2}=\frac{A_{k-3}}{k-2}$$

$$\ldots\ldots$$

$$A_3=\frac{A_2}{3}$$

$$A_2=\frac{A_1}{2}$$

$$A_1=\frac{A_0}{1}=\frac{1}{1}.$$

Stąd po pomnożeniu stron obu, otrzymamy $A_k=\frac{1}{1.\,2.\,3.....(k-1).k}$.

W ten sposób rozwinięcie e^{λ} przedstawi się, jak następuje:

$$e^{\lambda}=1+\frac{\lambda}{1}+\frac{\lambda^2}{1\,.\,2}+\frac{\lambda^3}{1.2.3}+\ldots.+\frac{\lambda^k}{1.2.3\ldots k}+\frac{\lambda^{k+1}}{1.2.3\ldots(k+1)}+\ldots\ldots$$

Pomijamy tu zwykły dowód zbieżności tego szeregu: moglibyśmy natomiast, nie schodząc z naszego stanowiska, zaznaczyć à priori, że szereg ten posiada granicę przy dowolnej wartości λ, gdyż oznacza on e^{λ}, to znaczy odległość punktu M po λ sekundach od początkowego punktu toru lub też odległość punktu N po jednej sekundzie.

Kładąc wreszcie $\lambda=1$, otrzymamy rozwinięcie dla e:

$$e=1+\frac{1}{1}+\frac{1}{1.2}+\frac{1}{1.2.3}+\frac{1}{1.2.3.4}+\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Z. Arlitewicz.

Nota historyczna. Pomysł zastosowania ruchu do wykazania własności logarytmów znajdujemy u wynalazcy ich Johna Napiera (1550—1617) w dziele: „Mirifici logarithmorum canonis descriptio" (1614). Napier rozpatruje dwa punkty, poruszające się po dwuch prostych: jeden z nich posiada ruch jednostajny, drugi zmienny. Niech pierwszy punkt porusza się po prostej AB, drugi po odcinku KL; początkowe ich prędkości w A i w K są równe, potym zaś, gdy pierwszy znajdzie się np. w C, drugi zaś — w P, prędkość drugiego tak się ma do prędkości pierwszego, jak PL do całego odcinka KL; AC nazywa Napier logarytmem PL. Według dzisiejszych oznaczeń otrzymalibyśmy, kładąc $KL=a$, i oznaczając znakiem Lg logarytm Napiera,— lg zaś logarytm naturalny, że

$$Lgz=-a\,.\,lg\,\frac{z}{a}\,.$$

Stąd widać, że $Lg\,a=0$; wartość na a Napier bierze$=10^7$. O zasadzie swych logarytmów Napier nie mówi i nic dziwnego: nie można bowiem mówić o zasadzie logarytmów w dzisiejszym pojęciu tam, gdzie $Lg10^7=0$; dodajmy do tego, że Napier zbudował swe logarytmy w specjalnym celu (jako logarytmy *sin*'ów kątów od 0 do 90^0) i to w czasie, gdy pojęcie o wykładniku potęgi jeszcze się było nie utrwaliło. Należy więc podkreślić tę okoliczność, że logarytmy Napiera nie są identyczne z logarytmami naturalnemi, o czym często zapominają autorowie podręczników algiebry. Dopiero w r. 1619, a więc już po śmierci Napiera, John Speidell wydał pierwsze tablice logarytmów naturalnych. Znak e zasady tych logarytmów (jak również znak π) wprowadzony został znacznie później (około 1735 r.) przez Leonarda Eulera. *Przyp. autora.*