

10/81

Nguyen Van Gia

ROZWIĄZANIE RÓWNAŃ DYFUZJI  
ZAWIESINY CZĄSTECZEK W KANAŁE



P. 269

WARSZAWA 1981

Praca wpłynęła do Redakcji dnia 2 lutego 1981 r.

Zarejestrowana pod nr 10/1981



57126

N a p r a w a c h r ę k o p i s u

---

Instytut Podstawowych Problemów Techniki PAN

Nakład 130 egz. Ark.wyd.1,75.Ark.druk. 1,25.

Oddano do drukarni w marcu 1981 r.

Nr zamówienia 192/10/81

---

Warszawska Drukarnia Naukowa, Warszawa,  
ul.Śniadeckich 8



## ROZWIĄZANIE RÓWNIANIA DYFUZJI ZAWIESINY CZĄSTECZEK W KANAŁE

1. Rozpatrujemy dwuwymiarowy i niestacjonarny przepływ zawiesiny cząsteczek w kanale. Badanie rozkładu cząsteczek w przepływie sprowadza się do poszukiwania rozwiązania zagadnienia początkowo-brzegowego dla równania typu parabolicznego. Koncentracja cząsteczek, ciężar których nie jest zaniedbywalny opisana jest równaniem dyfuzji, w przepływie dwuwymiarowym ma ona postać (1.1) .

Zagadnieniem dyfuzji cząsteczek zawiesiny unoszonych w przepływie zajmowało się wielu autorów. Obszerna literatura na ten temat do roku 1966, między innymi zawarta jest w pracy [19]. W ciągu ostatnich dziesięciu lat pojawiło się wiele prac teoretycznych [4,5,7,12,16,25], i eksperymentalnych [2,3,10,21,26] dla tego zagadnienia, a mimo to wiele problemów matematycznych pozostaje otwartych.

Zdaniem W.H. Grafa 1971 : "Równanie (1.1) w jego pełnej postaci nigdy nie zostało rozwiązane, a tylko pewne szczególne przypadki tego równania były badane", /zob.[11] str.200/. Do roku 1975 W.W. Sayre zrobił podobną uwagę na ten temat tak jak Graf /zob.[24], str.10/.

Następnie pojawia się kilka prac dotyczących pełnej postaci równania (1.1). M. Sumer 1977 podał wzór na pełną koncentrację zawiesiny w każdym przekroju  $x = \text{const}$ :  $C = F(y, t)$ , bez policzenia rozkładu koncentracji lokalnej  $C_0(x, y, t)$ , która powinna spełniać badane równanie (1.1), gdzie  $x, y$  - współrzędne przestrzenne odpowiednio w kierunku przepływu i prostopadłe do niego,  $t$  - czas. G. Aronsson 1978 udowodnił zasadę maksimum:

dla tego zagadnienia i otrzymał asymptotyczne rozwiązanie dla  $t \rightarrow \infty$ .

2. W pracy tej badane jest zagadnienie omówione wyżej dla równania dyfuzji zapisanego w pełnej postaci i warunków początkowo brzegowych podanych w ogólnej postaci /zob. (1.1), ..., (1.5) / przy założeniu, że współczynniki w równaniu (1.1) są stałe.

Pierwszym celem pracy jest podanie analitycznego rozwiązania dla przypadku, w którym jako warunek początkowy i warunek brzegowy dla przekroju  $x'=0$  zakłada się stałość koncentracji zawiesiny. W tym przypadku udowodnione jest twierdzenie o istnieniu, jednoznaczności rozwiązania. Pokazujemy, że warunki brzegowe są nieciągłe, ale rozwiązanie należy do klasy  $C^\infty(\omega)$  wewnątrz obszaru.

Na podstawie znalezionych asymptotycznych i analitycznych rozwiązań przeanalizujemy wpływ współczynników występujących w równaniu dyfuzji oraz zaburzeń początkowych i zaburzeń brzegowych w przekroju  $x'=0$  na rozkład koncentracji w przepływie dla dużego czasu i dużych wartości zmiennej  $x'$ . W ten sposób pokazujemy kilka własności jakościowych rozkładu koncentracji.

W jednym szczególnym przypadku porównujemy wyniki teoretyczne z wynikami eksperymentalnymi.

### 3. Praca składa się z 12 części.

Pierwsza część jest poświęcona sformułowaniu zagadnienia w ogólnej postaci.

W drugiej części równanie dyfuzji sprowadzone zostaje do bezwymiarowej postaci, czyli do równania na bezwymiarową wielkość koncentracji  $C$  oraz bezwymiarowej zmiennej  $x, y, t$ .

Dwa twierdzenia dotyczące oszacowania rozwiązania dla ogólnego przypadku warunków początkowo-brzegowych są przedstawione w trzeciej części.

W częściach od czwartej do dziewiątej przedstawia się metodę poszukiwania analitycznego rozwiązania dla przypadku, w którym dany warunek początkowy i warunek brzegowy dla przekroju  $x'=0$  jest stały. Podane są też w tym przypadku asymptotyczne postacie rozwiązania dla dużego  $t$  i dużej  $x$ .



Korzystając z otrzymanych wyników /§9/ i twierdzeń dotyczących oszacowania /§3/ znajdujemy ostatecznie /§10/ postaci asymptotyczne rozwiązania dla ogólnego przypadku.

Następnie badamy szczególne zagadnienie /ze względu na wybór warunków brzegowych i początkowych/ korzystając z teoretycznych wzorów otrzymanych wyżej.

Koncowa część zawiera wnioski.

### §1 SFORMUŁOWANIE ZAGADNIENIA .

Rozpatrujemy równanie dyfuzji /zob. [11] lub [24] / :

$$(1.1) \quad \frac{\partial C_0}{\partial t'} + U \frac{\partial C_0}{\partial x'} = K_1 \frac{\partial^2 C_0}{\partial x'^2} + K_2 \frac{\partial^2 C_0}{\partial y'^2} + V \frac{\partial C_0}{\partial y'}$$

$$(x', y', t') \in \omega' = \{x', y', t' : 0 < x' < \infty, 0 < y' < H, 0 < t' < \infty\}$$

gdzie  $C_0$  - koncentracja cząsteczek w przepływie,  $t'$ -czas,  $x', y'$ -współrzędne przestrzenne odpowiednio w kierunku przepływu i prostopadłe do niego,  $U$ - prędkość przepływu w kierunku  $x'$ ,  $K_1, K_2$ -współczynniki dyfuzji cząsteczek w kierunku  $x', y'$ , odpowiednio,  $V$  - prędkość opadania cząsteczek w cieczy,  $H$  - głębokość przepływu.

Założmy, że  $U, K_1, K_2, V$  i  $H$  są stałe.

Warunek początkowy sformułowano jako:

$$(1.2) \quad C_0|_{t'=0} = Q'_0 f_0(x', y'), \quad (x', y') \in (0, \infty) \times (0, H)$$

Warunki brzegowe mają postać:

$$(1.3) \quad C_0|_{x'=0} = Q'_1 f_1(y', t'), \quad (y', t') \in (0, H) \times (0, \infty)$$

$$(1.4) \quad C_0 \Big|_{y=0} = Q'_2 f_2(x'), \quad (x', t') \in (0, \infty) \times (0, \infty)$$

$$(1.5) \quad \left( K_2 \frac{\partial C_0}{\partial y'} + V C_0 \right) \Big|_{y'=H} = 0, \quad (x', t') \in (0, \infty) \times (0, \infty)$$

Warunki (1.2), (1.3), (1.4) są podane w ogólnej postaci. Nie zmniejszając ogólności możemy zakładać:

$$(1.6) \quad Q'_j = \text{const.}, \quad 0 \leq f_j \leq 1, \quad f_j \in C(\omega'), \quad j=0,1,2.$$

Z przesłanek fizycznych wynika, że strumień zawiesiny przez poziomą powierzchnię swobodną powinien równać się zeru. Ten warunek był stosowany przez R. P. Apmanna, R. R. Ramera [4] i F. E. Englundą [10], i zapisany w formie (1.5).

Żądamy, by rozwiązanie i jego pochodna po  $x'$  były ograniczone dla  $x' \rightarrow \infty$ , wyrazimy to następującymi nierównościami:

$$(1.7) \quad C_0 \leq M < \infty, \quad \frac{\partial C_0}{\partial x'} \leq M < \infty, \quad \text{dla } x' \rightarrow \infty$$

Założmy również, że:

$$(1.8) \quad C_0 \leq M < \infty \quad \text{dla } t \rightarrow \infty.$$

Tak sformułowane zagadnienie początkowo-brzegowe (1.1), ..., (1.8) będziemy nazywać w dalszym toku rozumowania zagadnieniem (A).

## §2 BEZWYMIAROWA POSTAC RÓWNIANIA DYFUZJI.

Doprowadzamy zagadnienie (A) do prostszej postaci z wielkościami bezwymiarowymi przy pomocy następujących przekształceń:

$$(2.1) \quad C = \frac{C_0}{Q'_2}, \quad C_0 = C_0(x', y', t')$$



$$(2.2) \quad x = \sqrt{\frac{K_2}{K_1}} \cdot \frac{x'}{H}, \quad y = \frac{y'}{H}, \quad t = \frac{K_2}{H^2} t'$$

Oznaczamy:

$$(2.3) \quad a = \frac{UH}{2\sqrt{K_1 K_2}}, \quad b = \frac{VH}{2K_2}, \quad c = a^2 + b^2$$

Gdzie funkcja koncentracji  $C$ , niezależne zmienne  $x, y, t$  i współczynniki  $a, b, c$  są bezwymiarowe.

Korzystając z (2.1), ..., (2.3) możemy napisać równanie dyfuzji (1.1) następująco:

$$(2.4) \quad \frac{\partial C}{\partial t} + 2a \frac{\partial C}{\partial x} = \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} + 2b \frac{\partial C}{\partial y}$$

$$(x, y, t) \in \omega = \{x, y, t: 0 < x < \infty, 0 < y < 1, 0 < t < \infty\}.$$

Warunki początkowo-brzegowe po tych przekształceniach mają postaci:

$$(2.5) \quad C|_{t=0} = Q_0 f_0(x, y), \quad Q_0 = \frac{Q'_0}{Q'_2}, \quad (x, y) \in (0, \infty) \times (0, 1)$$

$$(2.6) \quad C|_{x=0} = Q_1 f_1(y, t), \quad Q_1 = \frac{Q'_1}{Q'_2}, \quad (y, t) \in (0, 1) \times (0, \infty)$$

$$(2.7) \quad C|_{y=0} = f_2(x), \quad (x, t) \in (0, \infty) \times (0, \infty)$$

$$(2.8) \quad \left( \frac{\partial C}{\partial y} + 2bC \right) \Big|_{y=1} = 0, \quad (x, t) \in (0, \infty) \times (0, \infty)$$

$$(2.9) \quad C \leq M < \infty, \quad \frac{\partial C}{\partial x} \leq M < \infty, \quad \text{dla } x \rightarrow \infty$$

$$(2.10) \quad C \leq M < \infty \quad \text{dla } t \rightarrow \infty$$

$$(2.11) \quad 0 \leq f_j \leq 1, \quad f_j \in C(\omega), \quad j = 0, 1, 2.$$

Rozpatrujemy teraz zagadnienie (A) w formie (2.4), ..., (2.11)

### §3 PEWNE OSZACOWANIA ROZWIĄZANIA DLA OGÓLNEGO PRZYPADKU.

Nazwiemy  $C^+$  i  $C^-$  dwoma rozwiązaniami zagadnieniami (A) odpowiadającymi warunkom:

$$(3.1) \quad C^+ \Big|_{t=0} = Q_0$$

$$(3.2) \quad C^- \Big|_{t=0} = Q_0 \cdot \min_{(x,y)} f_0(x,y), \quad (x,y) \in (0,\infty) \times (0,1)$$

#### TWIERDZENIE 3.1

Rozwiązanie zagadnienia (A) zawarte jest w przedziale:

$$(3.3) \quad C^- \leq C \leq C^+$$

Dowód.

Nazwiemy  $\mathcal{C} = C^+ - C$ , to  $\mathcal{C}$  również jest rozwiązaniem równania (2.4) spełniającym warunki:

$$(3.4) \quad \mathcal{C} \Big|_{t=0} = Q_0 (1 - f_0(x,y)) \geq 0, \quad (x,y) \in (0,\infty) \times (0,1)$$

$$(3.5) \quad \mathcal{C} \Big|_{x=0} = 0 \quad (y,t) \in (0,1) \times (0,\infty)$$

$$(3.6) \quad \mathcal{C} \Big|_{y=0} = 0 \quad (x,t) \in (0,\infty) \times (0,\infty)$$



$$(3.7) \quad \left( \frac{\partial \mathcal{C}}{\partial y} + 2\mathcal{C} \right) \Big|_{y=1} = 0 \quad (x,t) \in (0,\infty) \times (0,\infty)$$

$$(3.8) \quad \mathcal{C} \leq M < \infty \quad \text{dla } x \rightarrow \infty \text{ lub } t \rightarrow \infty.$$

Nie rozpatrujemy trywialnego przypadku:  $f_0(x,y) \equiv 1$ . Więć rozwiązanie  $\mathcal{C}$  powinno być różne od stałej w obszarze  $\Omega$ , ponieważ stała nie spełnia warunku (3.4). Stąd na podstawie twierdzenia 5 / [22] str. 173 / wynika, że w każdym prostopadłościanie:  $0 < x < X$ ,  $0 < y < 1$ ,  $0 < t < T$  / funkcja  $\mathcal{C}$  osiągnie swoje minimum tylko na jednej z trzech ścian:  $x=0$ ,  $y=0$ ,  $y=1$ .

Jeżeli minimum funkcji  $\mathcal{C}$  pojawi się na ścianie  $y=1$ , to

$\frac{\partial \mathcal{C}}{\partial y} \Big|_{y=1} \leq 0$ , a więc z (3.7) mamy  $\mathcal{C} \Big|_{y=1} \geq 0$ , stąd ostatecznie wynika, że minimum funkcji  $\mathcal{C}$  nie jest ujemne, czyli  $\mathcal{C} \geq 0$  w rozważanym obszarze. Ponieważ  $X$  i  $T$  są dowolnymi liczbami, dlatego też  $\mathcal{C} \geq 0$ ,  $(x,y,t) \in \Omega$ , czyli  $\mathcal{C} \in C^+$ ,  $(x,y,t) \in \Omega$ .

Analogicznie pokażemy:  $\mathcal{C}^- \in C$ ,  $(x,y,t) \in \Omega$ .

A więc twierdzenie jest udowodnione.

### TWIERDZENIE 3.2

Dla funkcji  $C$  będącej rozwiązaniem zagadnienia (A) ma miejsce następujące oszacowanie:

$$(3.9) \quad C_* \leq C \leq C^*$$

$$(3.10) \quad C^{--} \leq C \leq C^{++}$$

gdzie  $C^*$ ,  $C_*$ ,  $C^{++}$ ,  $C^{--}$  są szczególnymi rozwiązaniami tego samego zagadnienia (A) odpowiadającymi odpowiednio warunkom:

$$(3.11) \quad C^* \Big|_{x=0} = Q_1$$

$$(3.12) \quad C_x \Big|_{x=0} = Q_1 \cdot \min_{(y,t)} f_1(y,t), \quad (y,t) \in (0,1) \times (0,\infty)$$

$$(3.13) \quad \begin{cases} C^{++} \Big|_{t=0} = Q_0 \\ C^{++} \Big|_{x=0} = Q_1 \end{cases}$$

$$(3.14) \quad \begin{cases} C^{--} \Big|_{t=0} = Q_0 \cdot \min_{(x,y)} f_0(x,y), \quad (x,y) \in (0,\infty) \times (0,1) \\ C^{--} \Big|_{x=0} = Q_1 \cdot \min_{(y,t)} f_1(y,t), \quad (y,t) \in (0,1) \times (0,\infty) \end{cases}$$

Dowód tego twierdzenia jest podobny do dowodu twierdzenia 3.1

#### §4 BADANIE SZCZEGÓLNEGO PRZYPADKU ZAGADNIENIA DYFUZJI.

Rozpatrujemy teraz zagadnienie (A), które nazwijmy zagadnieniem  $(A_0)$ , a mianowicie zakładamy, że

$$(4.1) \quad f_0(x,y) = f_1(y,t) = 1$$

Wprowadzamy transformację:

$$(4.2) \quad E = C e^{-ax+by+ct}, \quad C = C(x,y,t)$$

Korzystając z tego przekształcamy równanie (2.4) do postaci odpowiadającej równaniu termodyfuzji:

$$(4.3) \quad \frac{\partial E}{\partial t} = \frac{\partial^2 E}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E}{\partial y^2}, \quad (x,y,t) \in \omega$$



Warunki początkowo-brzegowe dla funkcji  $E$  przy założeniu (4.1) są następujące:

$$(4.4) \quad E|_{t=0} = Q_0 e^{-ax+by}, \quad (x,y) \in (0,\infty) \times (0,1)$$

$$(4.5) \quad E|_{x=0} = Q_1 e^{by+ct}, \quad (y,t) \in (0,1) \times (0,\infty)$$

$$(4.6) \quad E|_{y=0} = f_2(x) e^{-ax+ct}, \quad (x,t) \in (0,\infty) \times (0,\infty)$$

$$(4.7) \quad \left( \frac{\partial E}{\partial y} + \beta E \right) \Big|_{y=1} = 0, \quad (x,t) \in (0,\infty) \times (0,\infty)$$

$$(4.8) \quad E \rightarrow 0, \quad \frac{\partial E}{\partial x} \rightarrow 0 \quad \text{dla } x \rightarrow \infty$$

$$(4.9) \quad E = 0 (e^{ct}) \quad \text{dla } t \rightarrow \infty$$

$$(4.10) \quad 0 \leq f_2(x) \leq 1, \quad f_2(x) \in C(0,\infty)$$

Zauważmy, że warunki (4.8), (4.9) dla funkcji  $E$  nie są równoważne warunkom (2.9), (2.10) dla funkcji  $C$ . Należy więc skontrolować zachowanie się funkcji  $C$  ze względu na te warunki.

#### §5 ZASTOSOWANIE PRZEKSZTAŁCENIA FOURIERA I LAPLACE'A .

Z (2.9) wiemy, że funkcja  $C$  jest ograniczona, stąd wynika, że funkcja  $E$  związana z  $C$  wzorem (4.2) jest całkowana w przedziale  $x \in (0,\infty)$ , co pozwala zastosować transformację Fouriera dla funkcji  $E$  względem zmiennej  $x$  /zob. [8]/:

$$(5.1) \quad F = \int_0^{\infty} E \cdot \sin \xi x \, dx, \quad E = E(x, y, t)$$

gdzie  $\xi$  jest parametrem transformacji.

Następnie na podstawie (4.2) widać, że  $F = O(e^{ct})$  gdy  $t \rightarrow \infty$ , a więc możemy zastosować transformację Laplace'a dla funkcji  $F$  względem zmiennej  $t$ :

$$(5.2) \quad G = \int_0^{\infty} F \cdot e^{-pt} \, dt, \quad F = F(\xi, y, t)$$

gdzie  $p$  jest zespoloną zmienną przekształcenia. Warunkiem zbieżności całki (5.2) jest:  $\operatorname{Re} p > c$  /zob. [8]/.

Korzystając z przekształceń (5.1), (5.2) doprowadzimy problem ( $A_0$ ) do postaci:

$$(5.3) \quad \frac{d^2 G}{dy^2} - k^2 G = -\lambda e^{by}$$

$$(5.4) \quad G|_{y=0} = f(\xi) \frac{1}{k^2 - k_0^2}$$

$$(5.5) \quad \left( \frac{dG}{dy} + bG \right) \Big|_{y=1} = 0$$

gdzie wprowadzamy oznaczenia:

$$(5.6) \quad k^2 = k^2 + \xi^2$$

$$(5.7) \quad k_0^2 = c + \xi^2$$



$$(5.8) \quad \lambda = \xi \left( \frac{Q_0}{\xi^2 + a^2} + \frac{Q_1}{k^2 - k_0^2} \right)$$

$$(5.9) \quad f(\xi) = \int_0^{\infty} f_2(x) e^{-ax} \sin \xi x \, dx .$$

Więc  $k$  jest nową zmienną zespoloną.

Rozwiązanie równania (5.3) spełniające warunki (5.4), (5.5) jest następujące:

$$(5.10) \quad G = \Gamma(k) \frac{D(k, y)}{D(k)} - \left[ \Gamma_0(k) + \Gamma_1(k) \right] \left[ \frac{D(k, y) + B(k, y)}{D(k)} - e^{by} \right].$$

gdzie zastosowaliśmy oznaczenia:

$$(5.11) \quad \Gamma(k) = f(\xi) \cdot \frac{1}{k^2 - k_0^2}$$

$$(5.12) \quad \Gamma_0(k) = Q_0 \frac{\xi}{(\xi^2 + a^2)(k^2 - k_0^2)}$$

$$(5.13) \quad \Gamma_1(k) = Q_1 \frac{\xi}{(k^2 - k_0^2)(k^2 - k^2)}$$

$$(5.14) \quad B(k, y) = 2b e^b (e^{ky} - e^{-ky})$$

$$(5.15) \quad D(k, y) = (k+b) e^{k(1-y)} + (k-b) e^{-k(1-y)}$$

$$(5.16) \quad D(k) = (k+b) e^k + (k-b) e^{-k}$$

§6 PEWNE WŁASNOŚCI FUNKCJI G NA ZESPOLONEJ PŁASZCZYZNIE  $k$ .

W celu znalezienia odwrotnego przekształcenia Laplace'a trzeba zbadać osobliwości funkcji  $G$  na płaszczyźnie zespolonej  $k$  lub  $p$ .

LEMAT 6.1

Na płaszczyźnie  $k$  funkcja  $G$  określona przez (5.10), ..., (5.16) ma proste osobliwości tylko w punktach:

$$(6.1) \quad k = \pm k_0$$

$$(6.2) \quad k = \pm i \eta_n, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

gdzie  $\eta_n$  jest dodatnim pierwiastkiem równania:

$$(6.3) \quad \eta = -b \operatorname{tg} \eta$$

Dowód.

Z (5.10), (5.11) i (5.13) wiadomo, że  $k = \pm k_0$  są osobliwymi punktami funkcji  $G$ . Poszukując innych osobliwości w (5.10) musimy rozwiązać algebraiczne równanie  $D(k) = 0$ , gdzie  $k = \zeta + i\eta$  co prowadzi do (6.3) lub (6.2). Z (6.3) wynika, że ciąg rozwiązań  $\eta_n$  jest nieskończony i uporządkowany:

$$\frac{\pi}{2} < \eta_1 < \eta_2 < \dots < \eta_n < \eta_{n+1} < \dots, \quad \text{oraz} \quad \eta_n \approx (2n-1) \frac{\pi}{2}.$$

Zauważmy, że  $k = 0$  i  $k = \pm b$  nie są punktami osobliwymi, ponieważ istnieje granica funkcji  $G$  gdy  $k \rightarrow 0$  lub  $k \rightarrow \pm b$ .

WNIOSEK 6.1

Na  $p$ -płaszczyźnie zespolonej, gdzie  $p = k^2 - \xi^2$ , dla każdej



wartości  $\xi \in [0, \infty]$ , funkcja  $G$  określona przez (5.10), ..., (5.16) ma tylko rzeczywiste proste osobliwości, wartości których są nie większe niż  $c$ .

Wniosek ten jest bezpośrednią konsekwencją wzorów (6.1), (6.2) i (5.6), (5.7).

### WNIOSEK 6.2

Jeżeli  $\operatorname{Re} p > c$  to:

i/ Funkcja  $G$  określona przez (5.10), ..., (5.16) jest analityczna.

ii/ Moduł funkcji  $G$  ma rząd  $|p|^{-1}$  gdy  $|p| \rightarrow \infty$ .

Wniosek ten wynika z wniosku 6.1 i z konkretnej formy funkcji  $G$  podanej w (5.10), ..., (5.16).

### LEMAT 6.2

Niech  $G_0(k)$  jest funkcją:

$$(6.4) \quad G_0(k) = G \frac{k e^{k^2 t}}{k^2 - \xi^2}$$

gdzie  $G$  jest wyrażona wzorami (5.10), ..., (5.16).

Niech  $\sum_n^1$  jest krzywą całkowania określoną przez:

$$k = \zeta + i \pi n, \quad 0 \leq \zeta \leq \sqrt{(\pi n)^2 + k_*^2}, \quad k_*^2 = \text{const.} < \infty$$

Zatem dla każdej wartości  $(\xi, y, t) \in \omega$ , gdzie

$$\omega = \{ \xi, y, t : 0 < \xi < \infty, 0 < y < 1, 0 < t < \infty \},$$

istnieje zerowa granica:

$$(6.5) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\sum_n^1} G_0(k) dk = 0$$

Dowód.

Podzielimy  $\sum_n^1$  na dwie części  $\sum_n^{1'}$  i  $\sum_n^{1''}$ ,  $k = \zeta + i \pi n$

$$\Sigma_n^{1'} : 0 \leq \zeta \leq \pi n - \delta, \quad \delta = \text{const} > 0$$

$$\Sigma_n^{1''} : \pi n - \delta \leq \zeta \leq \sqrt{(\pi n)^2 + k_*^2}. \quad (\text{zob. rys. 1})$$

Dla części  $\Sigma_n^{1'}$  mamy następujące oszacowanie:

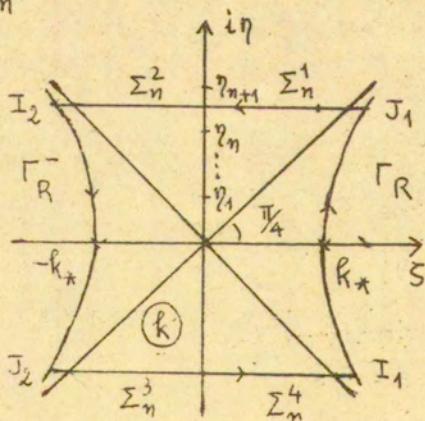
$$|e^{k^2 t}| = e^{(\zeta^2 - (\pi n)^2)t} \leq e^{-2\pi \delta n t}$$

Z lematu 6.1 wynika, że jeżeli  $n$  jest dostatecznie duża to funkcja  $G$  nie ma osobliwości na  $\Sigma_n^{1'}$ , a więc

$$|G_0(k)| = \left| G \frac{k e^{k^2 t}}{k^2 - \zeta^2} \right| \leq e^{-2\pi \delta n t}$$

Ponieważ  $t > 0$ ,  $\delta > 0$ , to

$$(6.6) \quad \left| \int_{\Sigma_n^{1'}} G_0(k) dk \right| \rightarrow 0 \quad \text{gdy } n \rightarrow \infty$$





Dla części  $\sum_n^{1''}$  wykorzystując oszacowanie:

$$|e^{k^2 t}| = |e^{(\zeta^2 - (\pi n)^2)t}| \leq e^{k_*^2 t}$$

mary

$$|G_0(k)| = \left| G \frac{k e^{k^2 t}}{k^2 - \zeta^2} \right| \sim \frac{1}{n^3}$$

więc

$$(6.7) \quad \left| \int_{\sum_n^{1''}} G_0(k) dk \right| \rightarrow 0 \quad \text{gdy } n \rightarrow \infty.$$

c.b.d.u.

LEMAT 6.3

Jeżeli funkcja  $G_0(k)$  jest podana w postaci (6.4) oraz

$$\sum_n^2 : k = \zeta + i\pi n, \quad -\sqrt{(\pi n)^2 + k_*^2} \leq \zeta \leq 0$$

$$\sum_n^3 \cup \sum_n^4 : k = \zeta - i\pi n, \quad -\sqrt{(\pi n)^2 + k_*^2} \leq \zeta \leq \sqrt{(\pi n)^2 + k_*^2}$$

$$k_*^2 = \text{const.} < \infty, \quad (\xi, y, t) \in \omega$$

to

$$(6.8) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\sum_n^2} G_0(k) dk = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\sum_n^3 \cup \sum_n^4} G_0(k) dk = 0$$

Dowód tego lematu jest podobny do dowodu lematu 6.2 .

LEMAT 6.4

Niech  $I_1, I_2,$  i  $J_1, J_2$  są parami punktów centralnie symetry-

cznych na płaszczyźnie zespolonej  $k$  i  $G_0(k)$  jest dana w postaci (6.4), wówczas

$$(6.9) \quad \int_{\Gamma_{I_1 J_1}} G_0(k) dk = \int_{\Gamma_{I_2 J_2}} G_0(k) dk$$

gdzie  $\Gamma_{I_j J_j}$ ,  $j = 1, 2$  jest krzywą łączącą dwa punkty  $I_j, J_j$  /zob. rys. 1/.

Dowód.

Po wykorzystaniu (5.10) do (5.16) w (6.4) widać, że funkcja  $G_0(k)$  jest nieparzysta. Zmieniając zatem  $k$  na  $-k$  w lewej (6.9) otrzymujemy prawą stronę tej równości.

### §7 ODWROTNA TRANSFORMACJA LAPLACE'A FUNKCJI $G_0$ .

Z wniosku 6.2 wynika, że funkcja  $G$  spełnia warunek istnienia odwrotnej transformacji Laplace'a, która wyraża się następująco /zob. [8] /:

$$(7.1) \quad F = \frac{1}{2\pi i} \frac{d}{dt} \int_{\Gamma_\infty} G \frac{e^{pt}}{p} dp$$

gdzie

$$(7.2) \quad \Gamma_\infty = \lim_{R \rightarrow \pm\infty} \Gamma_R, \quad \Gamma_R = p_* + iR, \quad p_* = \operatorname{Re} p = \operatorname{const} > c$$

Dla obliczenia tej całki wprowadzimy zmianę zmiennej  $p$  na  $k$  według wzoru (5.6). Krzywa całkowania  $\Gamma_R$  na płaszczyźnie  $k = \zeta + i\eta$  ma postać:

$$(7.3) \quad \begin{cases} \zeta^2 - \eta^2 = R_*^2, & R_*^2 = p_* + \xi^2 \\ 2\zeta\eta = R \end{cases}$$

Następnie wybieramy zamkniętą krzywą całkowania na płaszczyźnie  $k$  /zob. rys. 1 / i badamy równość wynikającą z teorii resz-dium:



$$(7.4) \quad \left( \int_{\Gamma_R} + \int_{\Sigma_m^1} + \int_{\Sigma_m^2} + \int_{\Gamma_R^-} + \int_{\Sigma_m^3} + \int_{\Sigma_m^4} \right) G_0(k) dk = 2\pi i \sum_j \operatorname{res} G_0(k_j)$$

Korzystając z lematów 6.2, 6.3, 6.4, przechodzimy z R do nieskonczoności i wówczas dostaniemy

$$(7.5) \quad \int_{\Gamma_\infty} G_0(k) dk = 2\pi i \sum_{j=0}^{\infty} \operatorname{res} G_0(k_j)$$

Na mocy lematu 6.1 wiemy, że osobliwości funkcji  $G_0(k)$  znajdują się tylko w punktach  $k = \pm k_0$ ,  $\pm i\eta_n$  oraz  $\pm \xi$ , możemy więc obliczyć wszystkie residua tej funkcji :

$$(7.6) \quad \operatorname{res} G_0(\pm k_0) = \frac{1}{2} \frac{e^{k_0^2 t}}{c} \left\{ f(\xi) \frac{D(k_0, y)}{D(k_0)} - \right. \\ \left. - Q_1 \frac{\xi}{\xi^2 + a^2} \left( \frac{D(k_0, y) + B(k_0, y)}{D(k_0)} - e^{by} \right) \right\}$$

$$(7.7) \quad \operatorname{res} G_0(\pm i\eta_n) = \frac{1}{2} \frac{e^{-\eta_n^2 t}}{\xi^2 + \eta_n^2} \left\{ \frac{f(\xi)}{\xi^2 + k_n^2} \mathcal{M}_n(y) - \right. \\ \left. - \left( \frac{Q_0}{\xi^2 + a^2} - \frac{Q_1}{\xi^2 + k_n^2} \right) \cdot \xi \rho_n(y) \right\}$$

gdzie oznaczyliśmy:

$$(7.8) \quad \mathcal{M}_n(y) = \frac{2b\eta_n \sin(\eta_n y)}{b + \cos^2 \eta_n}$$

$$(7.9) \quad P_n(y) = M_n(y) \cdot \frac{1 - 2e^{\epsilon} \cos \eta_n}{\epsilon^2 + \eta_n^2}$$

$$(7.10) \quad k_n^2 = \eta_n^2 + c$$

W końcu otrzymamy :

$$(7.11) \quad \text{res } G_0(i\xi) = \frac{1}{2} e^{\xi^2 t} \left\{ - \frac{f(\xi)}{c} \times \frac{D(\xi, y)}{D(\xi)} - \frac{\xi}{\xi^2 - \epsilon^2} \left( \frac{Q_0}{\xi^2 + a^2} - \frac{Q_1}{c} \right) \left( \frac{D(\xi, y) + B(\xi, y)}{D(\xi)} - e^{\epsilon y} \right) \right\}$$

Po zamianie zmiennej p na k i wstawieniu (7.6), (7.7), (7.11) (7.5), do (7.1) dostaniemy:

$$F = 2 \frac{d}{dt} \left( e^{-\xi^2 t} \sum_{j=0}^{\infty} \text{res } G_0(k_j) \right)$$

lub

$$(7.12) \quad F = f(\xi) \left[ e^{ct} \frac{D(k_0, y)}{D(k_0)} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-(\eta_n^2 + \xi^2)t}}{\xi^2 + k_n^2} \cdot M_n(y) \right] +$$

$$+ Q_0 \frac{\xi e^{-\xi^2 t}}{\xi^2 + a^2} \sum_{n=1}^{\infty} P_n(y) e^{-\eta_n^2 t} -$$

$$- Q_1 \left\{ \frac{e^{ct} \xi}{\xi^2 + a^2} \left( \frac{D(k_0, y) + B(k_0, y)}{D(k_0)} - e^{\epsilon y} \right) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\xi e^{-(\eta_n^2 + \xi^2)t}}{\xi^2 + k_n^2} \cdot P_n(y) \right\}.$$

### §8 BADANIE FUNKCJI F.

W celu znalezienia odwrotnego przekształcenia Fouriera dla



funkcji  $F$  przeanalizujemy odwrotne transformaty Fouriera poszczególnych składników sumy (7.12).

LEMAT 8.1

Niech funkcja  $\phi(x, t)$  wyraża się równością:

$$(8.1) \quad \phi(x, t) = \int_0^{\infty} \frac{\xi e^{-\xi^2 t}}{\xi^2 + a^2} \sin \xi x \, d\xi$$

gdzie:  $a > 0$ ,  $(x, t) \in \omega_2 = \{x, t: 0 < x < \infty, 0 < t < \infty\}$

wówczas  $\phi(x, t) = O(e^{-ax})$  gdy  $x \rightarrow \infty$ .

Dowód.

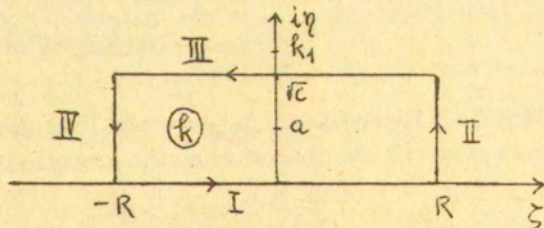
Konstruujemy pomocniczą funkcję  $J$

$$J = \oint \phi_0(k) dk$$

gdzie

$$(8.2) \quad \phi_0(k) = \frac{k e^{-k^2 t + ikx}}{k^2 + a^2}, \quad k = \zeta + i\eta$$

oraz zamkniętą krzywą całkowania podaną na rys. 2



Rys. 2

gdzie  $c = a^2 + b^2$ .

Na podstawie twierdzenia o residuum /zob. [15] / mamy:

$$(8.3) \quad \left( \int_I + \int_{II \cup IV} + \int_{III} \right) \phi_0(k) dk = 2\pi i \operatorname{res} \phi_0(ia)$$

Obliczymy wszystkie składniki tego wzoru:

a/ Na odcinku I,  $k = \zeta$ . Korzystając z symetrii funkcji  $\phi_0(\zeta)$  otrzymujemy

$$(8.4) \quad \int_I \phi_0(k) dk = \int_{-R}^R \frac{\zeta e^{-\zeta t + i\zeta x}}{\zeta^2 + a^2} d\zeta = 2i \int_0^R \frac{\zeta e^{-\zeta^2 t}}{\zeta^2 + a^2} \sin \zeta x d\zeta$$

b/ Na odcinkach II i IV,  $k = \pm R + i\eta$ ,  $0 \leq \eta \leq \sqrt{c}$ , istnieje więc oszacowanie:

$$\phi_0(k) \leq \frac{e^{-R^2 t}}{R}$$

Wynika z tego, że

$$(8.5) \quad \lim_{R \rightarrow \infty} \left| \int_{II \cup IV} \phi_0(k) dk \right| = 0$$

c/ Na odcinkach III  $k = \zeta + i\sqrt{c}$ ,  $-R \leq \zeta \leq R$ , stąd:

$$(8.6) \quad \int_{III} \phi_0(k) dk = e^{ct - x\sqrt{c}} \int_{-R}^R \frac{e^{\zeta(x - 2\sqrt{c}t) - \zeta^2 t}}{(\zeta^2 + a^2 - c) + 2\zeta\sqrt{c}i} (\zeta + i\sqrt{c}) d\zeta$$

Dokonując prostych algebraicznych przekształceń funkcji podcałkowej i przechodząc z  $R$  do nieskończoności otrzymujemy:

$$(8.7) \quad \int_{III} \phi_0(k) dk = -i\pi e^{ct - x\sqrt{c}} \cdot \sigma(x, t)$$

gdzie wprowadziliśmy oznaczenie:



$$(8.8) \quad \sigma(x,t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \psi(x,t,\zeta) d\zeta$$

$$(8.9) \quad \psi(x,t,\zeta) = \frac{\zeta(\zeta^2+c+a^2) \cdot \sin\varphi - \sqrt{c}(\zeta^2+c-a^2) \cos\varphi}{(\zeta^2+a^2-c)^2 + 4c\zeta^2} \cdot e^{-\zeta^2 t}$$

$$(8.10) \quad \varphi = \zeta \cdot (x - 2\sqrt{c}t)$$

Łatwo widać, że residuum funkcji  $\phi_0(k)$  w punkcie  $k = ia$  jest równe:

$$(8.11) \quad \text{res } \phi_0(ia) = \frac{1}{2} e^{a^2 t - ax}$$

Teraz przechodząc z  $R$  do nieskończoności w (8.4) i podstawiając ten wzór razem z (8.5), (8.7), (8.11), do (8.3) otrzymujemy:

$$(8.12) \quad \int_0^{\infty} \frac{\zeta e^{-\zeta^2 t}}{\zeta^2 + a^2} \cdot \sin \zeta x d\zeta = \frac{\pi}{2} \left( e^{a^2 t - ax} + e^{ct - x\sqrt{c}} \cdot \sigma(x,t) \right)$$

Z twierdzenia Riemanna-Lebesguea /zob. [8]/ wynika, że  $\sigma(x,t) \rightarrow 0$  gdy  $x \rightarrow \infty$  lub  $t \rightarrow \infty$ , więc lemat jest udowodniony na podstawie analizy (8.12).

#### LEMAT 8.2

Jeżeli  $k_n > \sqrt{c}$ ,  $(x,t) \in \omega_2 = \{x,t: 0 < x < \infty, 0 < t < \infty\}$  to są spełnione następujące wzory:

$$(8.13) \quad \int_0^{\infty} \frac{\xi e^{-\xi^2 t}}{\xi^2 + k_n^2} \sin \xi x d\xi = \frac{\pi}{2} e^{ct - x\sqrt{c}} \cdot \sigma_n(x,t)$$

$$(8.14) \quad \int_0^{\infty} \frac{e^{-\xi^2 t}}{\xi^2 + k_n^2} \cos \xi x d\xi = \frac{\pi}{2} e^{ct - x\sqrt{c}} \cdot \delta_n(x,t)$$

gdzie oznaczyliśmy:

$$(8.15) \quad \sigma_n(x,t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \psi_n(x,t,\zeta) d\zeta$$

$$(8.16) \quad \psi_n(x,t,\zeta) = \frac{\zeta(\zeta^2+c+k_n^2)\sin\varphi - \sqrt{c}(\zeta^2+c-k_n^2)\cos\varphi}{(\zeta^2+k_n^2-c)^2 + 4c\zeta^2} \cdot e^{-\zeta t}$$

$$(8.17) \quad \delta_n(x,t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \theta_n(x,t,\zeta) d\zeta$$

$$(8.18) \quad \theta_n(x,t,\zeta) = \frac{(\zeta^2-c+k_n^2)\cos\varphi + 2\sqrt{c}\zeta\sin\varphi}{(\zeta^2+k_n^2-c)^2 + 4c\zeta^2} \cdot e^{-\zeta t}$$

i  $\varphi$  jest zdefiniowana przez (8.10).

Dowód tego lematu jest podobny do dowodu lematu 3.1

UWAGA 8.1. Pierwszy składnik prawej strony (8.12) nie pojawia się w (8.13) i (8.14), ponieważ w lemacie 8.2  $k_n > \sqrt{c}$ , czyli nie ma biegunów w obszarze ograniczonym krzywą całkowania.

UWAGA 8.2. Funkcje  $\sigma(x,t)$ ,  $\sigma_n(x,t)$ ,  $\delta_n(x,t)$  określone przez / (8.8), (8.9), (8.10) /, / (8.15), (8.16), (8.10) / i / (8.17) (8.18), (8.10) / odpowiednio są klasy  $C^\infty(\omega_2)$ , i  $\sigma(x,t) \rightarrow 0$ ,  $\sigma_n(x,t) \rightarrow 0$ ,  $\delta_n(x,t) \rightarrow 0$  gdy  $x \rightarrow \infty$  lub  $t \rightarrow \infty$ .

Ostatnie wnioski wynikają z twierdzenia Riemanna-Lebesguea.

UWAGA 8.3. Wzór (8.12) w szczególnym przypadku, gdy  $t = 0$  jest podany w postaci: /zob. [23]/

$$(8.19) \quad \int_0^{\infty} \frac{\xi}{\xi^2+a^2} \sin \xi x d\xi = \frac{\pi}{2} e^{-ax}, \quad (x > 0)$$

LEMAT 8.3

Jeżeli  $\Phi_1(x,y)$  jest funkcją:

$$\Phi_1(x,y) = \int_0^{\infty} \frac{\xi}{\xi^2+a^2} \cdot \frac{D(k_0,y)}{D(k_0)} \sin \xi x d\xi$$



gdzie  $D(k_0, y)$ ,  $D(k_0)$ ,  $k_0$  zdefiniowane są przez (5.15), (5.16) (5.7) odpowiednio, oraz  $a > 0$ ,  $(x, y) \in \omega_0 = \{x, y: 0 < x < \infty, 0 < y < 1\}$

to  $\phi_1(x, y) = O(e^{-ax})$  gdy  $x \rightarrow \infty$ .

Dowód.

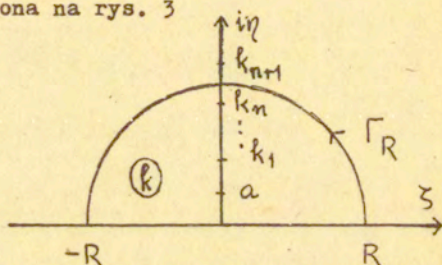
Budujemy pomocniczą funkcję:

$$(8.20) \quad \phi_2(k) = \frac{k}{k^2 + a^2} \times \frac{D(\tilde{k}_1, y)}{D(\tilde{k}_1)} e^{ikx}$$

gdzie  $k = \zeta + i\eta$ ,  $\tilde{k}_1 = k^2 + c$ ,  $\sqrt{c} > a > 0$

rozpatrujemy całkę  $\oint \phi_2(k) dk$ , gdzie zamknięta krzywa całkowania jest przedstawiona na rys. 3

Rys. 3



promień  $R$  przyjmuje wartości

$$(8.21) \quad R = \frac{R_{n+1} + R_n}{2}, \quad R_n = \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 (2n-1)^2 + c$$

Z lematu 6.1 wynika, że funkcja  $\phi_2(k)$  zdefiniowana przez (8.20) ma bieguny tylko w punktach

$$(8.22) \quad k = \pm ia, \quad k = \pm ik_n, \quad \text{gdzie } k_n^2 = \eta_n^2 + c$$

Stąd na mocy twierdzenia o residuach zachodzi równość:

$$(8.23) \quad \left( \int_{-R}^R + \int_{\Gamma_R} \right) \phi_2(k) dk = 2\pi i \left( \text{res} \phi_2(ia) + \sum_{j=1}^n \text{res} \phi_2(ik_j) \right)$$

Następnie, kolejno wyznaczamy wszystkie składniki tej równości

Dla pierwszej całki / w lewej stronie (8.23) /  $k = \zeta$ , a więc korzystając z symetrii funkcji  $\Phi_2(\zeta)$  otrzymujemy

$$(8.24) \quad \int_{-R}^R \Phi_2(k) dk = 2i \int_0^R \frac{\zeta}{\zeta^2 + a^2} \frac{D(k_0, y)}{D(k_0)} \sin \zeta x d\zeta$$

Dla drugiej całki mamy oszacowanie:

$$\left| \frac{k}{k^2 + a^2} \cdot \frac{D(\bar{k}_1, y)}{D(\bar{k}_1)} \right| \leq \frac{1}{R}$$

co pozwala zastosować lemat Jordana /zob. [15]/, z którego wynika

$$(8.25) \quad \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\Gamma_R} \Phi_2(k) dk = 0$$

Residua w prawej stronie równości (8.23) są następujące

$$(8.26) \quad \text{res } \Phi_2(ia) = \frac{1}{2} e^{-ax - by}$$

$$(8.27) \quad \text{res } \Phi_2(ik_n) = -\frac{1}{2} \omega_n(y) e^{-k_n x}$$

gdzie

$$(8.28) \quad \omega_n(y) = \frac{2b\eta_n \sin(\eta_n y)}{(b^2 + \eta_n^2)(b + \cos^2 \eta_n)}$$

Teraz podstawiając (8.24), ..., (8.27) w (8.23) i przechodząc z R do nieskończoności otrzymujemy

$$(8.29) \quad \Phi_1(x, y) = \frac{\pi}{2} \left( e^{-ax - by} - \sum_{n=1}^{\infty} \omega_n(y) e^{-k_n x} \right)$$

Ponieważ  $\forall n, k_n = \sqrt{\eta_n^2 + c} > a$ , więc lemat jest udowodniony na mocy (8.29).



LEMAT 8.4

Niech  $B(k_0, y)$ ,  $D(k_0)$  są funkcjami zdefiniowanymi przez (5.14) (5.16) i (5.7), wówczas ma miejsce równość

$$(8.30) \quad \int_0^{\infty} \frac{\xi}{\xi^2 + a^2} \cdot \frac{B(k_0, y)}{D(k_0)} \sin \xi x d\xi = \\ = \frac{\pi}{2} \left\{ e^{-ax} (e^{by} - e^{-by}) + 2e^b \sum_{n=1}^{\infty} \omega_n(y) \cos \eta_n \cdot e^{-k_n x} \right\}$$

Dowód tego lematu jest podobny do dowodu lematu 8.3.

LEMAT 8.5

Niech  $D_1(u) = \int_0^{\infty} D(\xi) \cos \xi u d\xi$ ,  $0 < \xi < u < \infty$

gdzie  $D(k)$  spełnia następujące warunki:

$$(8.31) \quad 1. \quad D(k) = + D(-k)$$

2. Wartości residuów są ograniczone:

Na płaszczyźnie zespolonej  $k$ ,  $D(k)$  ma bieguny pierwszego rzędu tylko na osi urojonej w punktach:  $k = ik_n$ , przy czym

$$0 < a < k_1 < \dots < k_n < k_{n+1} < \dots, \quad k_n \rightarrow \infty, \text{ gdy } n \rightarrow \infty \text{ oraz}$$

$$(8.32) \quad \forall_n : | \text{res } D(ik_n) | \leq M < \infty$$

3. Zachowanie w nieskończoności:

Na łukach  $\Gamma_{R_n}^1$  i  $\Gamma_{R_n}^2$  określonych przez :

$$\Gamma_{R_n}^1 = \left\{ k : k = R_n e^{i\varphi}, R_n = \frac{k_{n+1} + k_n}{2}, \varphi \in \left[ \frac{\pi}{2} - \varphi_0, \frac{\pi}{2} + \varphi_0 \right], \right. \\ \left. 0 < \varphi_0 < \frac{\pi}{2} \right\}.$$

$$\Gamma_{R_n}^2 = \left\{ k : k = R_n e^{i\varphi}, R_n = \frac{k_{n+1} + k_n}{2}, \varphi \in [0, \varphi_0] \cup \left[ \frac{\pi}{2} + \varphi_0, \pi \right], \right. \\ \left. 0 < \varphi_0 < \frac{\pi}{2} \right\}.$$

mają miejsce oszacowania:

$$(8.33) \quad |D(k)| \leq M < \infty \text{ na } \Gamma_{R_n}^1 \text{ gdy } R_n \rightarrow \infty$$

$$(8.34) \quad \forall m \quad |D(k) k^m| \rightarrow 0 \text{ na } \Gamma_{R_n}^2 \text{ gdy } R_n \rightarrow \infty$$

Przy powyższych założeniach funkcja  $D_1(u)$  ma następujące własności:

$$(8.35) \quad D_1(u) = O(e^{-k_1 u}) \text{ gdy } u \rightarrow \infty$$

$$(8.36) \quad D_1(u) \in C^\infty \quad (0 < \varepsilon \leq u < \infty)$$

Dowód.

Zbudujemy pomocniczą funkcję:

$$D_2(k) = D(k) e^{uk_i}, \quad 0 < \varepsilon \leq u < \infty$$

i rozważmy zamkniętą krzywą całkowania  $[-R, R] \cup \Gamma_{R_n}^1 \cup \Gamma_{R_n}^2$ ,  
/zob. rys. 3 /

Z twierdzenia o residuum mamy :

$$(8.37) \quad \left( \int_{-R}^R + \int_{\Gamma_{R_n}^1} + \int_{\Gamma_{R_n}^2} \right) D_2(k) dk = 2\pi i \sum_{j=1}^n \operatorname{res} D_2(ik_j)$$

Dla pierwszej całki stojącej po lewej stronie (8.37),  $k = \xi$ , i z własności (8.31) wynika:

$$(8.38) \quad \int_{-R}^R D_2(k) dk = \int_0^R D(\xi) \cos \xi u d\xi$$

Następną całkę możemy oszacować korzystając z (8.33):



$$|D_2(k)| = |D(k)| \left| e^{-R_n u \sin \varphi + i R_n u \cos \varphi} \right| \ll$$

$$\leq M e^{-R_n u \sin \varphi_0}$$

przy czym  $0 < \varepsilon \leq u < \infty$ ,  $0 < \varphi_0 < \frac{\pi}{2}$ , z czego wynika:

$$(8.39) \quad \left| \int_{\Gamma_{R_n}^1} D_2(k) dk \right| \rightarrow 0 \quad \text{gdy } R_n \rightarrow \infty$$

Podobnie dla całki na  $\Gamma_{R_n}^2$  zachodzi oszacowanie

$$|D_2(k)| \leq |D(k)| \cdot e^{-R_n u \sin \varphi}$$

stąd

$$\left| \int_{\Gamma_{R_n}^2} D_2(k) dk \right| \leq \int_{\Gamma_{R_n}^2} |D(k)| R_n d\varphi$$

co przy wykorzystaniu warunku (8.34) daje:

$$(8.40) \quad \left| \int_{\Gamma_{R_n}^2} D_2(k) dk \right| \rightarrow 0, \quad \text{gdy } R_n \rightarrow \infty$$

Zauważmy, że

$$(8.41) \quad \operatorname{res} D_2(ik_n) = \operatorname{res} D(ik_n) e^{-uk_n}$$

Podstawiając (8.38), ..., (8.41) do (8.37), przechodząc z  $R_n$  do nieskończoności otrzymujemy:

$$(8.42) \quad \int_0^{\infty} D(\xi) \cos \xi u d\xi = e^{-uk_1} \cdot \pi i \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{res} D(ik_n) e^{-u(k_n - k_1)}$$

więc przy warunku (8.32) i  $0 < \xi \leq u < \infty$  zachodzi pierwsza część tezy lematu.

Druga część tezy wynika z możliwości przechodzenia z różniczkowania względem  $u$  pod znak całki w wyrażeniu na  $D_1(u)$ , ze względu na założoną własność (8.34) różniczkowanie pod całką nie narusza jej zbieżności, z czego wynika istnienie pochodnej dowolnego rzędu. c.b.d.u.

LEMAT 8.6

Jeżeli

$$(8.43) \quad F_1(x) = e^{ax} \int_0^{\infty} f(\xi) D(\xi) \sin \xi x d\xi$$

gdzie  $f(\xi)$  podana w postaci (5.9), (4.10) i  $D(\xi)$  spełnia trzy warunki lematu 8.5

To

$$(8.44) \quad F_1(x) \leq M < \infty \quad \text{gdy } x \rightarrow \infty$$

$$(8.45) \quad F_1(x) \in C^{\infty} (0 < \xi \leq x < \infty)$$

$$(8.46) \quad \forall_m \left| \frac{d^m F_1(x)}{dx^m} \right| \leq M < \infty, \quad \text{gdy } x \rightarrow \infty$$

Dowód.

Podstawiając daną przez (5.9) postać  $f(\xi)$  do (8.43) otrzymamy

$$F_1(x) = e^{ax} \int_0^{\infty} D(\xi) \sin \xi x \left( \int_0^{\infty} f_2(x) e^{-ax} \sin \xi x dx \right) d\xi$$



Wykorzystując założenie (8.34) i warunek (4.10) możemy zmienić kolejność całkowania i otrzymać:

$$\begin{aligned}
 F_1(x) &= e^{ax} \int_0^{\infty} f_2(x) e^{-ax} \left( \int_0^{\infty} \mathcal{D}(\xi) \sin \xi x \sin \xi x d\xi \right) dx = \\
 &= \frac{e^{ax}}{2} \left\{ \int_0^x f_2(x) e^{-ax} \left( \int_0^{\infty} \mathcal{D}(\xi) \cos(x-x)\xi d\xi \right) dx + \right. \\
 &\quad + \int_x^{\infty} f_2(x) e^{-ax} \left( \int_0^{\infty} \mathcal{D}(\xi) \cos(x-x)\xi d\xi \right) dx - \\
 &\quad \left. - \int_0^{\infty} f_2(x) e^{-ax} \left( \int_0^{\infty} \mathcal{D}(\xi) \cos(x+x)\xi d\xi \right) dx \right\}
 \end{aligned}$$

Dokonując zamiany zmiennej  $u = x - X$  dla pierwszej całki i  $u = X - x$  dla drugiej sprowadzimy  $F_1(x)$  do postaci:

$$\begin{aligned}
 2F_1(x) &= \int_0^{x_0} (f_2(x-u) e^{au} + f_2(x+u) e^{-au}) \left( \int_0^{\infty} \mathcal{D}(\xi) \cos \xi u d\xi \right) du + \\
 &\quad + \int_x^{\infty} f_2(x-u) e^{au} \left( \int_0^{\infty} \mathcal{D}(\xi) \cos \xi u d\xi \right) du + \\
 &\quad + \int_{x_0}^{\infty} f_2(x+u) e^{-au} \left( \int_0^{\infty} \mathcal{D}(\xi) \cos \xi u d\xi \right) du - \\
 &\quad - e^{ax} \int_0^{\infty} f_2(x) e^{-ax} \left( \int_0^{\infty} \mathcal{D}(\xi) \cos(x+x)\xi d\xi \right) dx.
 \end{aligned}$$

gdzie  $0 < x_0 < x$ .

Do drugiej, trzeciej i czwartej całki w prawej stronie powyż-

szej równości, możemy zastosować lemat 8.5 /zob. wzór (8.42)/ w wyniku tego otrzymamy:

$$\begin{aligned}
 (8.47) \quad 2F_1(x) = & \int_0^{x_0} (f_2(x-u)e^{au} + f_2(x+u)e^{-au}) \left( \int_0^\infty D(\xi) \cos \xi u d\xi \right) du + \\
 & + \int_{x_0}^x f_2(x-u)e^{-(k_1-a)u} \left( \pi i \sum_{n=1}^\infty \operatorname{res} D(ik_n) e^{-u(k_n-k_1)} \right) du + \\
 & + \int_{x_0}^\infty f_2(x+u)e^{(k_1+a)u} \left( \pi i \sum_{n=1}^\infty \operatorname{res} D(ik_n) e^{-u(k_n-k_1)} \right) du - \\
 & - e^{-(k_1-a)x} \int_0^\infty f_2(x) e^{(k_1+a)x} \left( \pi i \sum_{n=1}^\infty \operatorname{res} D(ik_n) e^{-(x+x)(k_n-k_1)} \right) dx.
 \end{aligned}$$

W drugiej i trzeciej całce prawej strony (8.47) u zmienia się w przedziale  $[x_0, x]$   $[x_0, \infty]$ , odpowiednio, a w czwartej całce  $x \in [0, \infty]$ , z warunku (8.32) wynika, że dla takich zakresów zmienności u i X, odpowiednio, szeregi stojące pod znakiem całek są bezwzględnie zbieżne. Ponadto mamy  $0 \leq f_2(x) \leq 1$  /zob. (4.10)/ i  $k_1 - a > 0$  /zob. warunek 2 lematu 8.5/. Zatem wszystkie całki stojące po prawej stronie (8.47) są zbieżne. Stąd (8.44) jest udowodnione.

Na podstawie (8.34) i z postaci funkcji  $F_1(x)$  podanej wzorami (8.43), (5.9), (4.10) wynika bezpośrednio (8.45).

Dowód własności (8.46) można przeprowadzić w sposób podobny do powyższego. c.b.d.u.

LEMAT 8.7

Niech

$$(8.48) \quad E_n(x, t) = e^{ax} \int_0^\infty f(\xi) \frac{e^{-\xi^2 t}}{\xi^2 + k_n^2} \sin \xi x d\xi$$



gdzie  $f(\xi)$  podana w (5.9), (4.10), i  $0 < a < k_1 < \dots < k_n < k_{n+1} < \dots$   
 $k_n \rightarrow \infty$ ,  $(x, t) \in \omega_2 = \{x, t: 0 < \xi \leq x < \infty, 0 < \xi \leq t < \infty\}$ .

Wówczas

$$(8.49) \quad |E_n(x, t)| \leq M < \infty \quad \text{gdy } x \rightarrow \infty \text{ lub } t \rightarrow \infty$$

$$(8.50) \quad E_n(x, t) \in C^\infty(\omega_2)$$

$$(8.51) \quad \forall m, \quad \left| \frac{\partial^m E_n(x, t)}{\partial x^m} \right| \leq M < \infty, \quad \left| \frac{\partial^m E_n(x, t)}{\partial t^m} \right| \leq M < \infty$$

gdy  $x \rightarrow \infty$  lub  $t \rightarrow \infty$

$$(8.52) \quad E_n(x, t) \rightarrow 0 \quad \text{gdy } n \rightarrow \infty.$$

Dowód.

Postępując jak w przypadku dowodu lematu 8.6 sprowadzimy  $E_n(x, t)$  do postaci:

$$\begin{aligned} 2E_n(x, t) = & \int_0^{x_0} (f_2(x-u)e^{au} + f_2(x+u)e^{-au}) \left( \int_0^\infty \frac{e^{-\xi^2 t}}{\xi^2 + k_n^2} \cos \xi u d\xi \right) du + \\ & + \int_{x_0}^x f_2(x-u)e^{au} \left( \int_0^\infty \frac{e^{-\xi^2 t}}{\xi^2 + k_n^2} \cos \xi u d\xi \right) du + \\ & + \int_{x_0}^\infty f_2(x+u)e^{-au} \left( \int_0^\infty \frac{e^{-\xi^2 t}}{\xi^2 + k_n^2} \cos \xi u d\xi \right) du - \end{aligned}$$

$$- e^{ax} \int_0^{\infty} f_2(x) e^{-ax} \left( \int_0^{\infty} \frac{e^{-\xi^2 t}}{\xi^2 + k_n^2} \cos(x+x)\xi d\xi \right) dx.$$

gdzie  $0 < x_0 < x$ . Ten warunek pozwala zastosować lemat 8.2, z czego wynika :

$$\begin{aligned} 2 E_n(x,t) = & \int_0^{x_0} (f_2(x-u) e^{au} + f_2(x+u) e^{-au}) \left( \int_0^{\infty} \frac{e^{-\xi^2 t}}{\xi^2 + k_n^2} \cos u \xi d\xi \right) du + \\ & + \left( \int_{x_0}^x f_2(x-u) e^{-(\sqrt{c}-a)u} \delta_n(u,t) du \right) + \\ & + \left( \int_{x_0}^{\infty} f_2(x+u) e^{-(\sqrt{c}+a)u} \delta_n(u,t) du \right) - \\ & - e^{-(\sqrt{c}-a)x} \int_0^{\infty} f_2(x) e^{-(\sqrt{c}+a)x} \delta_n(x+x,t) dx) e^{ct} \end{aligned}$$

gdzie  $\delta_n(x,t)$  jest zdefiniowana przez (8.17), (8.18) i (8.10).

Ponieważ  $\sqrt{c}-a > 0$ ,  $0 \leq f_2(x) \leq 1$ , i  $\delta_n(x,t)$  jest ograniczona, więc nierówność 8.49 jest spełniona dla  $x \rightarrow \infty$

Na mocy samej definicji funkcji  $E_n(x,t)$  widać, że (8.50), (8.49) dla  $t \rightarrow \infty$  (8.52) są spełnione.

Dowód dla trzeciego wyrażenia (8.51) lematu jest podobny do dowodu dla pierwszego. c.b.d.u.

### §9 ANALITYCZNE ROZWIĄZANIE SZCZEGÓLNEGO PRZYPADKU ZAGADNIENIA DYPFUZJI.

Funkcja  $F$  określona wzorem (7.12) jest całkowalna dla zmiennej  $\xi \in (0, \infty)$ , więc odwrotna transformacja Fouriera dla transformacji (5.1) istnieje i ma ona postać /zob. [8]/:



$$E = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} F \sin \xi x \, d\xi$$

Zgodnie z tym funkcja C związana z E przekształceniem (4.2) wyraża się wzorem:

$$(9.1) \quad C = \frac{2}{\pi} e^{ax-by-ct} \int_0^{\infty} F \sin \xi x \, d\xi$$

Dla wygody wprowadzamy następujące oznaczenia:

$$(9.2) \quad \alpha = k_1 - a = \sqrt{\eta_1^2 + a^2 + b^2} - a$$

$$(9.3) \quad \delta = \sqrt{c} - a = \sqrt{a^2 + b^2} - a$$

$$(9.4) \quad \beta_n = k_n - k_1$$

$$(9.5) \quad \nu_n = \eta_n^2 - \eta_1^2$$

i zdefiniujemy funkcje:

$$(9.6) \quad C_1(x, y) = \frac{2}{\pi} e^{-by+ax} \int_0^{\infty} f(\xi) \frac{D(k_0, y)}{D(k_0)} \sin \xi x \, d\xi$$

$$(9.7) \quad C_2(x, y, t) = \frac{2}{\pi} e^{-by-(c+\eta_1^2)t} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\nu_n t} M_n(y) E_n(x, t)$$

gdzie  $f(\xi)$ ,  $D(k, y)$ ,  $D(k)$ ,  $k_0$ ,  $M_n(y)$ ,  $E_n(x, t)$

są określone odpowiednio przez (5.9), (5.15), (5.16), (5.7), (7.8) i

(8.48)

$$(9.8) \quad C_3(y,t) = e^{-by - (\eta_1^2 + \beta^2)t} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\nu_n t} \rho_n(y)$$

$$(9.9) \quad C_4(x,y,t) = e^{-\delta x - by - \eta_1^2 t} \mathcal{G}(x,t) \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\nu_n t} \rho_n(y)$$

$$(9.10) \quad C_5(x,y) = e^{-\alpha x - by} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\beta_n x} \rho_n(y)$$

$$(9.11) \quad C_6(x,y,t) = e^{-\delta x - by - \eta_1^2 t} \sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{G}_n(x,t) e^{-\nu_n t} \rho_n(y)$$

gdzie  $\rho_n(y)$ ,  $\mathcal{G}(x,t)$ ,  $\mathcal{G}_n(x,t)$  są podane odpowiednio w (7.9); / (8.8), (8.9), (8.10) /; / (8.15), (8.16), (8.10) /.

Wykorzystując lematy 8.1, 8.2, 8.3, 8.4 i uwagę 8.3 w (9.1) i (7.12) otrzymujemy:

$$(9.12) \quad C(x,y,t) = C_1(x,y) - C_2(x,y,t) + Q_0 \{ C_3(y,t) + C_4(x,y,t) \} + Q_1 \{ C_5(x,y) - C_6(x,y,t) \}$$

Wiemy, że funkcja  $\frac{D(k_0, y)}{D(k_0)}$  w (9.6) spełnia wszystkie założenia na funkcję  $\mathcal{D}(\xi)$  lematu 8.6, a więc z tego lematu wynika, że  $C_1(x,y)$  spełnia warunek (2.9). Funkcja  $C_2(x,y,t)$  spełnia warunki (2.9), (2.10) na mocy lematu 8.7, czyli  $C(x,y,t)$  spełnia warunki (2.9), (2.10). Funkcja  $C(x,y,t)$  oczywiście spełnia pozostałe warunki problemu ( $A_0$ ) i równanie (2.4), ponieważ transformacje  $C \leftrightarrow E \leftrightarrow F \leftrightarrow G$  są wzajemnie jednoznaczne.

Więc  $C(x,y,t)$  podana w postaci (9.12) jest rozwiązaniem zagadnienia ( $A_0$ ).



TWIERDZENIE 9.1

Istnieje tylko jedno rozwiązanie zagadnienia  $(A_0)$  należące do klasy  $C^\infty(\omega)$ , gdzie  $\omega = \{x, y, t: 0 < x < \infty, 0 < y < 1, 0 < t < \infty\}$ .

Dowód.

Funkcje  $C_j$  należą do klasy  $C^\infty(\omega)$  co jest oczywiste dla  $j = 3, 4, 5, 6$ , a dla  $j = 1, 2$ , wynika to z lematów 8.6 i 8.7. Więc  $C(x, y, t) \in C^\infty(\omega)$ .

Dla udowodnienia jednoznaczności rozwiązania, zakładamy, że  $C^1$  i  $C^2$  są dwoma rozwiązaniami tego zagadnienia, więc  $\tilde{C} = C^1 - C^2$  jest również tego samego zagadnienia, w którym  $Q_0 = Q_1 = 0$ ,  $f_2(x) = 0$ . Powtarzając procedurę poszukiwania funkcji  $\tilde{G}$ , która jest przekształceniem funkcji  $\tilde{C}$  przez (4.2), (5.1), (5.2) gdzie zamiast  $C, E, F$  i  $G$  znajdują się  $\tilde{C}, \tilde{E}, \tilde{F}$  i  $\tilde{G}$ , otrzymujemy  $\tilde{G} = 0$  a więc  $\tilde{F} = 0$ . Stąd wynika, że  $\tilde{E} = 0$  i w konsekwencji  $\tilde{C} = 0$ . Twierdzenie jest udowodnione.

WNIOSEK 9.1

Dla zagadnienia  $(A_0)$ , ciągłość warunku brzegowego jest tylko warunkiem wystarczającym ciągłości rozwiązania wewnątrz obszaru, ale nie jest warunkiem koniecznym.

WNIOSEK 9.2

Postać asymptotyczna rozwiązania zagadnienia  $(A_0)$  jest następująca:

1/ dla dużego czasu:

$$(9.13) \quad C_T(x, y, t) = C_1(x, y) + Q_1 C_5(x, y) + O(e^{-\eta_1^2 t})$$

2/ dla dużej odległości od źródła /przekrój  $x = 0$  / :

$$(9.14) \quad C_x(x, y, t) = C_1(x, y) - C_2(x, y, t) + Q_0 C_3(y, t) + O(e^{-\delta x})$$

3/ oraz dla dużego czasu i dużej odległości od źródła mamy:

$$(9.15) \quad C_{XT}(x,y,t) = C_1(x,y) + O(e^{-\eta_1^2 t}) + O(e^{-\delta x})$$

Asymptotyczne wzory (9.13), (9.14), (9.15) wynikają z (9.6), ..., (9.12).

#### §10 ASYMPTOTYCZNE ROZWIĄZANIA DLA OGÓLNEGO PRZYPADKU.

W tym paragrafie wyprowadzimy asymptotyczne rozwiązanie dla wyjściowego zagadnienia (A), gdzie warunki brzegowe i początkowe dane są w ogólnej postaci/ zob. (1.1), ..., (1.7) lub (2.4), ..., (2.11) / .

##### TWIERDZENIE 10.1

Asymptotyczne rozwiązania zagadnienia (A) dla dużego czasu i dużej odległości od źródła jest zapisane w postaci (9.15), gdzie  $C_1(x,y)$  jest określone przez (9.6), (5.9), (5.15), (5.16), (5.7) .

Dowód.

Wiemy, że rozwiązanie zagadnienia  $(A_0)$  podane w postaci (9.12) jest szczególnym rozwiązaniem zagadnienia (A), dla którego funkcją koncentracji jest  $C^{++}$  /zob. tw. 3.2 / .

Jeżeli zamiast  $Q_0, Q_1$  w zagadnieniu  $(A_0)$  wstawimy  $Q_0 \cdot \min f_0(x,y)$  ( $x,y \in (0,\infty) \times (0,1)$ ) i  $Q_1 \cdot \min f_1(y,t) : (y,t) \in (0,1) \times (0,\infty)$ , to otrzymujemy rozwiązanie 9.12 dla funkcji  $C^{--}$  występującej w twierdzeniu 3.2.

Ze wzoru (9.15) wynika, że funkcje  $C^{++}$  i  $C^{--}$  mają tą samą postać asymptotyczną dla dużego czasu i dużej odległości od źródła. Odwołując się do twierdzenia 3.2 otrzymujemy więc tezę twierdzenia 10.1 .

##### WNIOSEK 10.1

W przypadku gdy  $f_1(y,t) \equiv 1$ , to asymptotyczne rozwiązanie zagadnienia (A) dla dużych czasów jest określone wzorem (9.13) .

##### WNIOSEK 10.2

Dla dużej odległości od źródła asymptotyczne rozwiązanie zagad-



nienia (A), w którym  $f_0(x,y) \equiv 1$  wyraża się wzorem (9.14).

Dowód tych wniosków jest podobny do dowodu twierdzenia 10.1.

§11 ZASTOSOWANIE DO SZCZEGÓLNEGO POZATKOWO-BRZEGOWEGO ZAGADNIENIA DYFUZJI.

a/ W tej części rozpatrujemy szczególny przypadek zagadnienia (A), w którym warunek na dnie kanału jest sformułowany w postaci /bezwymiarowej /:

$$(11.1) \quad C|_{y=0} = 1, \quad (\text{Tzn. } f_2(x) \equiv 1)$$

Ten warunek był stosowany przez A. P. Apmanna, R. R. Rumei a [4] i C. C. Meia [18]. Argumentacja przemawiająca za prawdziwością tego warunku podana jest w pracy [14] w oparciu o szereg eksperymentalnych wyników.

Na podstawie twierdzenia 10.1 asymptotyczne rozwiązanie tego zagadnienia dla dużego  $t$  i dużego  $x$  przy spełnieniu warunku (11.1) jest następujące:

$$(11.2) \quad C_{XT}(x,y,t) = \frac{2}{\pi} e^{-by+ax} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-ax} \sin \xi x \sin \xi x \frac{D(k_0,y)}{D(k_0)} d\xi dx + O(e^{-\eta_1^2 t}) + O(e^{-\delta x})$$

Korzystając z lematu 8.3 /wzór(8.29)/ doprowadzimy (11.2) do postaci:

$$(11.3) \quad C_{XT}(x,y,t) = e^{-2by} + O(e^{-\eta_1^2 t}) + O(e^{-\delta x})$$

b/ W drugim szczególnym przypadku oprócz warunku (11.1) zakładamy, że

$$(11.4) \quad C|_{t=0} = Q_0, \quad (\text{Tzn. } f_0(x,y) \equiv 1)$$

Korzystając z ogólnego asymptotycznego wzoru (9.14) dla dużej odległości od źródła oraz z lematów 8.1, 8.2, 8.3 otrzymujemy rozwiązanie:

$$(11.5) \quad C_x(x,y,t) = e^{-2by} - e^{-by - (\beta^2 + \eta_1^2)t} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \omega_n(y) e^{-\gamma_n t} + \\ + Q_0 C_3(y,t) + O(e^{-\delta x})$$

gdzie  $\omega_n(y)$ ,  $C_3(y,t)$  są zdefiniowane odpowiednio przez (8.28) i (9.8).

c/ W trzecim szczególnym przypadku, założymy, że jest spełniony warunek (11.4), oraz, że spełniony jest warunek:

$$(11.6) \quad c \Big|_{x=0} = Q_1, \quad / \text{tzn. } f_1(y,t) \equiv 1 /$$

Z ogólnego wzoru (9.13) przy pomocy lematu 8.3 /wzór (8.29)/ wynika:

$$(11.7) \quad C_T(x,y,t) = e^{-2by} - e^{-\alpha x - by} \sum_{n=1}^{\infty} \omega_n(y) e^{-\beta_n x} - \\ - Q_1 C_5(x,y) + O(e^{-\eta_1^2 t})$$

gdzie  $\omega_n(y)$ ,  $C_5(x,y)$  zdefiniowane są odpowiednio przez (8.28) i (9.10).

d/ W tym przypadku zakładamy, że zagadnienie (A) przyjmujemy warunki brzegowe i początkowe (11.1), (11.4), (11.6). Z ogólnego rozwiązania (9.12) spełniającego te warunki i na podstawie lematów 8.1, 8.3 wynika:

$$(11.8) \quad C(x,y,t) = e^{-2by} - e^{-\alpha x - by} \sum_{n=1}^{\infty} \omega_n(y) e^{-\beta_n x} -$$



$$\begin{aligned}
 & - e^{-\ell y - (\eta_1^2 + \ell^2)t} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \omega_n(y) e^{-\gamma_n t} - \\
 & - e^{-\delta x - \ell y - \eta_1^2 t} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \omega_n(y) e^{-\gamma_n t} (\sigma(x,t) - \sigma_n(x,t)) + \\
 & + Q_0 (C_3(y,t) + C_4(x,y,t)) + Q_1 (C_5(x,y) - C_6(x,y,t))
 \end{aligned}$$

gdzie  $\omega_n(y)$ ,  $\sigma(x,t)$ ,  $\sigma_n(x,t)$ ,  $C_3(y,t)$ ,  $C_4(x,y,t)$ ,  $C_5(x,y)$  i  $C_6(x,y,t)$  są zdefiniowane odpowiednio wzorami (8.28), (8.8), (8.15), (9.8), (9.9), (9.10) i (9.11).

/Rozwiązanie (11.8) w szczególnym przypadku  $Q_0 = Q_1 = 0$  jest podane w [20]. /

## §12 WNIOSKI

W tej części przeanalizujemy wpływ warunku początkowego i warunku brzegowego dla przekroju  $x = 0$ , oraz wpływ współczynników  $U$ ,  $K_1$ ,  $K_2$ ,  $V$ ,  $H$  na rozkład koncentracji zawiesiny dla dużego czasu lub dużej odległości  $x$ .

Zakładamy, że wartości współczynników  $U$ ,  $K_1$ ,  $K_2$ ,  $V$  i  $H$  są fizycznie sensowne.

1. Zę wzorów (9.13), (6.3), (2.2), i (2.3) wynika, że początkowa wartość koncentracji ma mały wpływ na rozkład koncentracji w przepływie dla dużych czasów. Wpływ ten wyraża się czynnikiem exponencjalnie malejącym proporcjonalnym do:

$$(12.1) \quad S_1(t') = e^{-\eta_1^2 \frac{K_2}{H^2} t'}$$

gdzie

$$(12.2) \quad \eta_1 = -\ell \operatorname{tg} \eta_1, \quad \frac{\pi}{2} < \eta_1 < \pi; \quad \ell = \frac{VH}{2K_2}; \quad t' - \text{czas.}$$

Funkcję  $S_1(t')$  traktujemy jako tłumienie wpływu warunku początkowego, a czas  $t'$  określony warunkiem  $S_1(t') = \xi$  nazwiemy czasem tłumienia. Z wzorów (12.1) i (12.2) wynika, że:

1a/ Tłumienie wpływu warunku początkowego nie zależy od prędkości przepływu  $U$  i współczynnika dyfuzji  $K_1$ .

1b/ Im większa jest prędkość opadania cząsteczek  $V$  tym intensywniejsze jest tłumienie warunku początkowego, czyli czas tłumienia  $t'$  jest funkcją malającą zmiennej  $V$ .

2. Dość podobnie uwidacznia się wpływ warunku brzegowego w przekroju  $x' = 0$  na rozkład koncentracji w przepływie przy dużych  $x'$ . Wpływ ten wyraża się czynnikiem proporcjonalnym do:

$$(12.3) \quad S_2(x') = e^{-\frac{1}{2\sqrt{K_1}} \left( \sqrt{\frac{U^2}{K_1} + \frac{V^2}{K_2}} - \frac{U}{\sqrt{K_1}} \right) x'}$$

wynikającą z (9.14), (9.3), (2.2) i (2.3).

Funkcję  $S_2(x')$  nazwiemy tłumieniem zaburzenia źródła w przekroju  $x' = 0$ , a  $x'$  określone związkiem  $S_2(x') = \varepsilon$  będziemy nazywać odległością tłumienia. Z (12.3) wynika, że :

2a/ Tłumienie zaburzenia źródła nie zależy od głębokości przepływu.

2b/ Funkcja tłumienia zaburzenia źródła jest malająca względem zmiennej  $V$  i rosnąca względem zmiennej  $K_2$ . Tzn. odległość tłumienia zaburzenia źródła zmniejsza się, gdy wzrośnie prędkość opadania cząsteczek  $V$ , lub zmniejszy się współczynnik dyfuzji  $K_2$ .

3. Dla dostatecznie dużych czasów i odległości od źródła człony  $O(e^{-\eta^2 t})$  i  $O(e^{-\delta x})$  / zob. (9.15) / opisujące zaburzenia w chwili początkowej i w przekroju  $x' = 0$  są dostatecznie małe. Dlatego też rozkład koncentracji w przepływie zależy istotnie od warunku brzegowego na dnie  $y' = 0$ .

Własność ta odpowiada stabilności rozkładu koncentracji w przepływie.

Stabilny rozkład koncentracji wyraża się zależnością wynikającą z (9.15), (9.6), (5.9):



$$(12.4) \quad C(x,y) = \frac{2}{\pi} e^{-by+ax} \int_0^{\infty} \left( \frac{D(k_0,y)}{D(k_0)} \sin kx \right) \int_0^{\infty} f(x) e^{-ax} \sin kx dx dk$$

gdzie  $D(k_0,y)$ ,  $D(k_0)$  i  $f_2(x)$  zdefiniowane przez (5.15), (5.16) i (2.7).

4. Własność stabilności rozkładu koncentracji w przepływie została stwierdzona eksperymentalnie przez E. Parthniadesa [21]..

5. Dla zagadnienia początkowo-brzegowego rozważanego w §11 stabilny rozkład koncentracji zawiesiny spełnia zależność wynikającą z (11.8)

$$(12.5) \quad C(y) = e^{-2by}, \quad b = \frac{vH}{2K_2}, \quad y = \frac{y'}{H}$$

z tego zaś wynika, że:

5a/ Stabilny rozkład koncentracji zawiesiny  $C(y)$  nie zależy od prędkości przepływu  $U$ , współczynnika dyfuzji  $K_1$  i głębokości przepływu  $H$ . Ten wniosek potwierdzają eksperymenty wymienione w pracy [2].

5b/ Przekształćmy wzor (12.5) do postaci:

$$(12.6) \quad \frac{C_0(y)}{C_0(y_0)} = e^{-2b(y-y_0)}, \quad \text{gdzie } C_0(y) = Q_2' C(y)$$

Wzor (12.6) jest identyczny z wzorem podanym w [1].

Dla cząsteczek piasku o średnicach z przedziału 0,1-0,6mm zawieszonych w przepływie, dla różnych prędkości  $U$  i głębokości  $H$  wyniki obliczeń według teoretycznego wzoru (12.6) są zgodne z wynikami eksperymentalnymi podanymi w [2]/zob. tabl. 1, str.64 i rys. 1 str. 65, [2]/

5c/ Dla cząsteczek piasku o średnicach większych niż 0,6mm, wyniki eksperymentalne nie są zgodne z wzorem (12.6) tylko w

poobliżu dna kanału na odległościach mniejszych od 0,2 H /zob.[13] lub [3]/. Zatem, jak się wydadaje, wyniki przedstawione powyżej nie mają zastosowania do rozkładu ciężkich cząsteczek /średnica > 0,6mm/ w pobliżu dna.

Autor chciałby podziękować Prof. W. Fiszdonowi, dr W. Zajączkowskiemu i dr W. Czernuszence za cenne rady, uwagi krytyczne i pomoc w trakcie wykonywania tej pracy.

Dziękuję też mgr E. Zawistowskiej, dr M. Bratos, dr J. Skiepcie i mgr T. Słupskiemu za pomoc w pokonywaniu trudności językowych.

### O Z N A C Z E N I A .

$$a = \frac{UH}{2\sqrt{K_1 K_2}} \quad \text{- bezwymiarowy współczynnik}$$

$$b = \frac{VH}{2K_2} \quad \text{- bezwymiarowy współczynnik}$$

$$c = a^2 + b^2$$

$$C = \frac{C_0}{Q_2^2} \quad \text{- bezwymiarowa rozkład koncentracji zawiesiny.}$$

$$C_0 \quad \text{- rozkład koncentracji}$$

$$D(k, y) = (k+b) e^{k(1-y)} + (k-b) e^{-k(1-y)}$$

$$D(k) = (k+b) e^k + (k-b) e^{-k}$$

$$E = C e^{-ax+by+ct}$$

$$F = \int_0^{\infty} E \sin \xi x \, dx$$

$$G = \int_0^{\infty} F e^{-pt} \, dt$$

H - głębokość przepływu

$$k = \sqrt{\xi^2 + p} = \zeta + i\eta \quad \text{- zmienna zespolona}$$

$$k_0 = \sqrt{\xi^2 + c}$$

$$k_n^2 = \eta_n^2 + c$$

$$k_*^2 = \xi^2 + p_*, \quad p_* > c$$

$K_1, K_2$  - współczynniki dyfuzji



$p$  - zmienna zespolona w transformacji Laplace'a

$$Q_0 = \frac{Q_0'}{Q_2'} \text{ - bezwymiarowa wielkość koncentracji}$$

$$Q_1 = \frac{Q_1'}{Q_2'} \text{ ,, ,, ,,}$$

$$t = K_2 t' / H^2 \text{ - bezwymiarowa zmienna czasu}$$

$t'$  - czas

$U$  - prędkość przepływu w kierunku  $x'$

$V$  - prędkość opadania cząsteczek w cieczy

$$x = \left( \sqrt{K_2/K_1} \right) (x'/H), \quad y = y'/H \text{ - bezwymiarowe zmienne}$$

$x', y'$  - współrzędne przestrzenne w kierunku przepływu i prostopadłe do niego

$$\alpha = \sqrt{\eta_1^2 + a^2 + b^2} - a$$

$$\beta_n = k_n - k_1$$

$$\Gamma(k) = f(\xi) \frac{1}{k^2 - k_0^2}$$

$$\Gamma_0(k) = Q_0' \xi / (\xi^2 + a^2) (k^2 - b^2)$$

$$\Gamma_1(k) = Q_1' \xi / (k^2 - k_0^2) (k^2 - b^2)$$

$$\delta = \sqrt{a^2 + b^2} - a$$

$$\delta_n(x, t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \theta_n(x, t, \zeta) d\zeta$$

$$\zeta + i\eta = k$$

$$\theta_n(x, t, \zeta) = \frac{(\zeta^2 - c + k_n^2) \cos \varphi + 2\sqrt{c} \sin \varphi}{(\zeta^2 - c + k_n^2)^2 + 4c\zeta^2} e^{-\zeta^2 t}$$

$\eta_n$  - pierwiastki równania :  $\eta = -btg\eta, 0 < \eta_1 < \dots < \eta_n < \eta_{n+1} < \dots$

$$\lambda = \xi \left( \frac{Q_0}{\xi^2 + a^2} + \frac{Q_1}{k^2 - k_0^2} \right)$$

$$\mu_n = \frac{2b\eta_n \sin(\eta_n y)}{b + \cos^2 \eta_n}$$

$$\nu_n = \eta_n^2 - \eta_1^2$$

$\xi$  - rzeczywista zmienna w transformacji Fouriera

$$s_n(y) = \frac{2b\eta_n \sin(\eta_n y)}{(b^2 + \eta_n^2)(b + \cos^2 \eta_n)} \cdot (1 - 2e^b \cos \eta_n)$$

$$\sigma(x,t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \psi(x,t,\zeta) d\zeta$$

$$\sigma_n(x,t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \psi_n(x,t,\zeta) d\zeta$$

$$\varphi = \zeta \cdot (x - 2\sqrt{c}t)$$

$$\psi(x,t,\zeta) = \frac{\zeta(\zeta^2 + c + a^2) \sin \varphi + \sqrt{c}(\zeta^2 + c - a^2) \cos \varphi}{(\zeta^2 + a^2 - c)^2 + 4c\zeta^2} \cdot e^{-\zeta^2 t}$$

$$\psi_n(x,t,\zeta) = \frac{\zeta(\zeta^2 + c + k_n^2) \sin \varphi + \sqrt{c}(\zeta^2 + c - k_n^2) \cos \varphi}{(\zeta^2 + k_n^2 - c)^2 + 4c\zeta^2} \cdot e^{-\zeta^2 t}$$

$$\omega_n(y) = \frac{2b\eta_n \sin(\eta_n y)}{(b^2 + \eta_n^2)(b + \cos^2 \eta_n)}$$



L I T E R A T U R A .

1. S. M. Ancyferów, W. K. Debolskii, L. N. Krylowa, "O raspredelenii wzwezennych nanosów w odkrytom potokie." Trudy Sojuzmornii proekta, wyp. 26 /32/, M. 1969, 41-54.
2. S. M. Ancyferów, W. K. Debolskii, "O zakonomiernostiach raspredelenila wzwezonych nanosow w odkrytom potokie." Meteorologija i Hidrologija No 5, 1972, 63-67.
3. S. M. Ancyferow, R. D. Kosyan, "Sediments Suspended in Stream Flow." J. of the Hydraulics Division, ASCE, 106, No HY2, Proc. Paper 15216, Feb. 1980, 313-330.
4. R. P. Apmann and R. R. Rumer, "Diffusion of Sediment in Developing Flow." J. of the Hydraulics Division, ASCE, 96, No HY1 Proc. Paper 7018, Jan. 1970, 109-123.
5. G. Aronsson, "Diffusion of Sediment in Long Channels." J. of the Hydraulics Division, ASCE, 104, No HY6, Proc. Paper 138455, June 1978, 821-837.
6. G. I. Barenblatt, "O dwirzenii wzwezonych czasticek w turbulentnom potokie, zanimajuščem poluprostranstwo, ili ploskij odkrytyj kanal koniecznoj głubiny." Prikladnaja Matematika i Mechanika, 19, 1, 1955, 61-88.
7. M. Bayazit, "Random Walk Model for Motion of a Solid Particle in Turbulent Open-Channel Flow." J. of Hydraulic REsearch, 10, No 1, 1972, 1-14.
8. W. A. Ditkin, A. P. Prudnikow, Integralnyje preobrazowanija i operacjonnoe isczislenie. Izd. "Nauka", M. 1974, 542 str.
9. W. E. Doblins, "Effect of Turbulence on Sedimentation." Transactions ASCE, 109, Paper No 2218, 1944, 629-678.
10. F. E. Englund, "Instability of Erodible Beds." J. of Fluid Mechanics, 42, 1970, 225-244.
11. W. H. Graf, Hydraulics of Sediment Transport, McGraw-Hill Book Co., Inc., N.Y. 1971, 419 str.
12. R. Jasiewicz, "Badanie rozkładu unosin w rzekach." Gospodarka Wodna, No 11-12, 1973, 417-422.
13. R. D. Kosjan, S. M. Ancyferow, S. A. Efremow, "O primienimosti

- dyfuzionowej teorii k rasczetam raspredelenija nanosow w otkrytom potokie." *Meteorologija i Gidrologija*, No 1, 1976, 79-87.
14. J. Lambermont, G. Lebon, "Erosion of Cohensive Solids." *J. of Hydraulic Research*, 16, No 1, 1978, 27-47.
  15. M. A. Lawrentzew i B. M. Sabat, *Metody teorii funkcji kompleksnego peremennogo*, Izd. "Nauka", M. 1965.
  16. R. M. Li and H. M. Shen, "Solid Particle Settlement in Open-Channel Flow." *J. of the Hydraulics Division, ASCE*, 101, No HY7, Proc. Paper 11460, July 1975, 917-923.
  17. W. M. Makkaweew, "K teorii turbulentnego rezzima wzwezziwanija nanosow." *Izwestija Gos. Gidrologiczeskogo Instituta*, 32, Moskwa 1931, 5-27.
  18. C. C. Mei, "Nonuniform Diffusion of Suspended Sediment." *J. of the Hydraulics Division, ASCE*, 95, No HY1, Proc. Paper 6326, Jan. 1969, 581-584.
  19. N. A. Mikhailowa, *Perenos twerdych czastic turbulentnymi potokami wody. Gidromet. Izd.*, Lenigrad 1966, 232str. .
  20. Nguyen Van Gia, "Rozwiązanie początkowo- brzegowego zagadnienia dla równania typu parabolicznego." *Phuong Phap Toan Ly*, No 2, Ha noi, Wietnam, 1977, 21-35, /Po Wietnamsku./.
  21. E. Parthniades, "Erosion and Deposition of Cohensive Solids," *J. of the Hydraulics Division, ASCE*, 104, No HY1, Proc. Paper 4204, Jan. 1965, 105-139.
  22. M. H. Protter and H. F. Weinberger, *Maximum Principles in Differential Equations*, Prentice-Hall, N. J. 1967, 255 p. .
  23. M. Ryżyk i I. S. Gradsztejn, *Tablice Całek, Sum, SZeregów i Iloczynów*. Warszawa 1964.
  24. W. W. Sayre, "Dispersion of Mass in Open-Channel Flow." *Hydrology Paper*, No 75, Colorado. State University, Fort collins, Colo., Aug. 1975, 1-64.
  25. M. Sumer, "Settlement of Solid Particles in Open-channel Flow" *J. of the Hydraulics Division, ASCE*, 103, NoHY11, Proc. Paper 13368, Nov. 1977, 1323-1337.
  26. K. Zagustin, "Sediment Distribution in Turbulent Flow."



SPIS RZECZY

§1	Sformułowanie zagadnienia . . . . .	5
§2	Bezwymiarowa postać równania dyfuzji . . . . .	6
§3	Pewne oszacowania rozwiązania dla ogólnego przypadku . . . . .	8
§4	Badanie szczególnego przypadku zagadnienia dyfuzji . . . . .	10
§5	Zastosowanie przekształcenia Fouriera i Laplace'a . . . . .	11
§6	Pewne własności funkcji G na zespolonej płaszczyźnie k . . . . .	14
§7	Odwrotna transformacja Laplace'a funkcji G . . . . .	18
§8	Badanie funkcji F . . . . .	20
§9	Analityczne rozwiązanie szczególnego przypadku zagadnienia dyfuzji . . . . .	34
§10	Asymptotyczne rozwiązania dla ogólnego przypadku . . . . .	38
§11	Zastosowanie do szczególnego początkowo- brzegowego zagadnienia dyfuzji . . . . .	39
§12	Wnioski . . . . .	41
	Oznaczenia . . . . .	44
	Literatura . . . . .	47

---