EUKLIDESA
POCZATKOW
JEOMETRYI
P. czecha

B. F.

№ 106

106.

EUKLIDESA
POCZĄTKÓW
JEOMETRYI
XIĄG OŚMIORO

TOIEST SZEŚĆ PIERWSZYCH, IEDENASTA
i DWUNASTA

z DODANEMI PRZYPISAMI i TRYGONOMETRYĄ

DLA POŻYTKU MŁODZI AKADEMICKIEY TŁUMACZONE I WYDANE

PRZEZ

JÓZEFA CZECHA

FILOZOFII DOKTORA, W AKADEMII KRAKOWSKIEY PUBLICZNEGO PRZEDTEM MATEMATYKI POCZĄTKOWEY PROFESSORA: TERAZ DYREKTORA GIMNAZYUM WOŁYNSKIEGO, TOWARZYSTWA WARSZAWSKIEGO PRZYIACIÓŁ NAUK CZŁONKA.

z Figurami na miedzi rzniętemi Tablic 13.

W WILNIE

W DRUKARNI JOZEFA ZAWADZKIEGO
DRUKARZA AKADEMII WILENSKIEY.

1807.

NAYIAŚNIEYSZEMU I NAYPOTĘŻNIEYSZEMU

CESARZOWI JMCI

ALEXANDROWI I.

IMPERATOROWI WSZECH ROSSYY

etc. etc. etc.

NAYIAŚNIEYSZY MIŁOSCIWY PANIE!

Jeometryą początkową uznaną powszechnie za umieiętność potrzebną i pożyteczną, ułożoną od Euklidesa *szanowanégo od tylu wieków za wzór porządku i ścisłości; ośmielam się złożyć u Tronu* WASZEY CESARSKIEY MOSCI *iako hołd téy głębokiéy czci i wdzięczności, którą przeięty iest każdy Polák móy rodak Berłu* WASZEY CESARSKIEY MOSCI *poddany,* *za utrzymanié, rozszerzénié, i uposażénié naypięknieyszéy ustawy narodowéy w dziele Instrukcyi publiczné. Zamyká ta Xięga szereg niezaprzeczonych prawd dlá młodzi kraiowéy: na których czele odważyłem się położyć Jmie* WASZEY CESARSKIEY MOSCI; *aby młodé pokoléniá rozważaiąc té prawdy, nie spuszczały nigdy z uwagi Oycowskiéy* WASZEY

CESARSKIEY MOSCI o ich wychowanie troskliwości. Pierwsze wrażenia młodego wieku są zawsze trwałe, i często obecne: i taką też bydź powinna pamięć zrobionego przez WASZĘ CESARSKĄ MOSC dla kraiu dobrodzieystwa. Zamiarem więc moim było, poświęcaiąc WASZEY CESARSKIEY MOSCI to pismo, razem z nauką, zaszczepić w młode umysły obowiązki dla *ukochanégo* MONARCHY, *i ostrzédz czytaiących, że wypełniénié główney powinności mégo powołaniá, iest razém natchniéniém wdzięczności powszechnéy.*

WASZEY CESARSKIEY MOSCI

PANA MEGO MIŁOSCIWEGO

wierny poddany

Józef Czech

Dyrektor Gimnazyum Wołyńskiégo.

PRZEMOWA

Dwa są różné od siebie, ale walné pożytki nauk, i dwa zamiary w jch nabywaniu: albo, to są śrzodki wydobywaniá, rozwiianiá, i doskonaléniá władz umysłowych człowieka, usposabiaiącé go do porządnégo rozważaniá, myśléniá, i sądzéniá o rzeczach; albo, to są pomoce przystósowané do potrzeb i wygód społeczności, którym winniśmy wydoskonalénié sztuk, kunsztów i rzémiósł, i inné rozliczné wynalazki służącé do pożytecznégo i przyiémnégo życiá. Omamiéni chciwością używaniá, bardziéy się zazwyczáy ubiegámy o przystósowanié nauk, jak o wydoskonalénié władz naszych: i tén nieporządek wprowadzaiąc w jnstrukcyą młodzi, chybiámy obudwóch celów: bo zaniedbuiąc doskonalénié sił przyrodzonych człowieka, nie troskámy się oto, aby był uważnym, trafnym, porządnie i gruntownie myślącym, rozsądnym; prácuiąc zaś iedynie, a niewcześnie nad zbogacéniém iego pamięci wynalazkami obcémi, sposobimy go, że tak powiém, na widza i historyka dzieł cudzych, do których on przyłożyć się nié może, bo nié ma wyrobionéy téy uwagi i tych sił, których té wynalazki są owocém. Tym sposobém robiąc ludzi uczonych, a nieumieiętnych, tamuiémy postępek wynalazków; a ćwicząc znowu i zbogacaiąc samę tylko pamięć z zaniedbaniém innych władz umysłowych, tworzymy członki społeczności przybrané w różné wiadomości i talenta, ale bez uwagi, zastanowiéniá i rozsądku, a zatém bez prawdziwéy zdatności do różnych towarzyskich i rządowych usług.

Jeżeli więc widzimy na naszé nieszczęście często omyloné nadzieie instrukcyi młodégo, skuték to iest nieporządnégo iéy urządzéniá i kierowaniá, a razém skutek zaniedbaniá náyistotnieyszéy części téy instrukcyi, iaką iest doskonalénié wszystkich wládz przyrodzonych człowieka. Ta omyłka wybáczyć się może osobóm prywatnym nie zawsze mogącym zgłębić rzetelny wpływ nauk, przeznaczénié i potrzeby towarzystwa, a często uniesionym za ozdobiéniém raczéy iak doskonaléniém człowieka; ale takowé uchybiénié byłoby nie do darowaniá nauczycielóm publicznym i władzy edukacyynéy kieruiącéy dziełém instrukcyi powszechnéy, która ogarnąwszy w swym rzetelnym widoku nauki i ich pożytki, nié może dobrá społeczności i narodu, poświęcić powierzchownéy tylko okrasie.

Uwáżaiąc nauki Matematyczné, iako náyskuteczniéy pomagaiącé do doskonaléniá wládz umysłowych, łatwo się przekonámy, że w nich wszystkiégo uczyć należy gruntownie; bo uczyć ié powiérzchownie, iestto iedno, co uczyć niepożytecznie. Wszystkié władze umysłu ludzkiégo pomágać powinny rozumowi, iako władzy głównéy i náyważnieyszéy do rozwinięciá: bo iéy dziełém iest rozsądek, a pewność i trafność w stósowaniu rzeczy i myśli, są drogi nabyciá tego szacownégo daru duszy. Nauki Matematyczné będąc składém práwd prostych i pewnych, ciągnących się z siebie, i wiążących nawzaiém, rozwiiaią i doskonalą tę władzę nałogiém wnioskowaniá. Tam ciągłá uwága przechodzi przez pokolénié práwd snuiących się z siebié: prostość i pewność bydź powinny ich znamiéniém, a przekonanié ich skutkiém. Zaszczepiać słabą i powiérzchowną tylko w młody umysł naukę; iestto nie oprzéć iego myśli na mocnéy i niewzruszonéy postawie, i piérwszé działaniá wydobywaiących się sił zrobić niepewné; a zatém albo nie śmiałé, albo niebezpieczné. Chybiaią więc swégo zamiaru ci, którzy w początkowém uczéniu Matematyki przestaią na obiaśnianiu raczéy, iak gruntowném dowodzéniu; bo przez to obudzaią tylko imainacyą, zbogacaią wyobrażéniami pamięć, przepełniaią, że tak powiém, zbytniém staraniém poięcié, choć czasém niewłáściwé samych słów, ale nie prácuią nad przekonaniém: a zatém obmyśliwszy wszystkié śrzodki i pomoce, nie używaią ich do zamierzonégo celu, toiest do wydobyciá i zatrudniéniá władzy rozumu. Prawda, że młodé, choć náyszczęśliwszé umysły, dlá tego, że są przywykłé prawie do samych tylko działáń pamięci, trudné są częstokroć i tępé w piérwszém poymowaniu rzeczy dlá siebie nowych i oderwanych, iakié zachodzą w Matematyce: wypada więc częstokroć z początku zręcznie i usilnie prácować nad obeznaniém ich uwagi z témi nowémi obrazami, wypadá nawet użyć obiaśniéń właściwych, byleby na nich nie przestać, ale skoro za odsklepianiém się, że tak powiém, rozumu, promiéń nowégo pojęciá zabłyśnie, i odezwié się piérwszé czucié związku práwd między sobą: należy wydobywaiącą się tę siłę zatrudniać i przyzwyczaiać do pewnégo, mocnégo, i właściwégo sobie działania, toiest do wywiiania szeregu práwd snuiących się z siebie, co nazywać zwykliśmy *rozumowaniém*. W tém początkowém zagaiéniu robót przekonaniá, ledwo nie té samé zachodzą do zachowaniá prawidłá, którym podlégá doskonalénié się w kunsztach. Wybór przykładów i stąd więcéy znaczącym, iak ich liczba. Kilka prawd dobrze zgłębionych więcéy oświécá, niż wielká liczba teoryy niedokładnie wyłożonych. Tu wielé pomódz może rada d'Alemberta, który żalącému się przed sobą uczniowi na trudność w zrozumiéniu niektórych dowodzéń Jeometrycznych, odpowiedziáł: *Postępuy daléy, a oświecisz się.* Jakoż ciągłá uwagá práwd Matematycznych, zagłębiaiąc się coráz barddziéy w przedmiot nauki, wyrabiá i doskonali stopniami iego poięcié. Práwdy czasém wnioskowé skoro są dobrze wyprowadzoné, i dobrze uporządkowané, odbiiaią mocnieyszé światło na práwdy poprzednié, niż go samé przez się w swoiém mieyscu tłumaczoné udzielić mogły; co sám często dostrzegáłém w ciągu prác moich nauczycielskich, śledząc różné stopnie poiętności uczniów, i zwáżaiąc skutki różnych do tego używanych pomocy.

Ale żádna z umieiętności ludzkich nie może do rozwinięciá rozumu tak szczęśliwie i skutecznie pomódz, iak Jeometryá początkowá wziętá w téy prostocie, porządku i ścisłości, iak nám ią ze starożytnych mędrców zebrál i ułożył Euklides. Przedmiot téy nauki, chociaż iest oderwany i ogólny, rozebrany atoli na swoié części i wymiary, stopniami przyzwyczaiá i prowadzi uwagę do iego obięciá i zrozumiéniá, idąc przedziwnym porządkiém wyobrażéń zmysłowych opartych na wykreśléniu figury od rzeczy náyprostszych do zawilszych. Cóż może bydź prostszégo i łatwieyszégo do poięciá, iak wyobrażénié liniy prostych, ich do siebie pochyłości, punktów, w których się przecinaią; mieysc témi liniiami zamkniętych, osobliwie gdy to poięcié wsparté iest fizycznêm rzeczy wykréśléniém? Oczy wlepioné w rysunek skazuią prawie uwádze szereg práwd wynikaiących z piérwszégo opisaniá, z práwd innych prostych i oczywistych do rysunku przystósowanych: a nie dopuszczaiąc nic do myśli, coby nie było pewném i wprzód gruntownie dowiedzioném, trzymá, że tak powiém, na ciągłéy wodzy uwágę, aby nie wystąpiła nigdy z granic przekonaniá i pewności w całym ciągu nauki. W tym obwodzie zamknięty umysł przechodzi pasmo práwd snuiących się z siebie, a porównywaiąc zawsze liniie z liniiami, pochyłości z pochyłościami, figury z figurami, dostrzégá i odkrywá nowé stosunki i práwdy, oswaiá poięcié z obrazami, wybiiá się do coráz czyścieyszégo i ogólnieyszégo swégo przedmiotu ogarniéniá. Mechanizm rysunku prosty z siebie i łatwy, pomágá tylko rozumowi do działaniá, nie zasłaniaiąc mu práwd wprzód poiętych i dowiedzionych: tén mechanizm iestto raczéy skazówką, iak zasłoną przebieżonych práwd i myśli.

Z téy uwagi łatwo iest ocenić błąd i wadę, ledwo nie powszechnie w xiążkach Jeometryi spotykaną, gdzie z początku zaráz piérwszé twiérdzéniá i zagádniéniá Jeometryi stósuią autorowie do wymiarów praktycznych, chcąc przez to, iak mowią, obiaśnić poięcié i przywiązać ciekawość ucznia. Gdzie idzie o czysté ćwiczénié rozumu, o wdrożénié go w ciągłé i ścisłé wnioskowanié, o trzymanié go nieprzestanné w granicach ścisłości i pewności; tam żádné obcé i grubé wyobrażéniá przerywać uwági niepowinny. Prácuiémy z jednéy strony nad wyrobiéniém w młodéy głowie wyobrażéń Jeometrycznych, a z drugiéy strony mieszámy i ćmimy té wyobrażéniá mechanizmém: starámy się trzymać go ciągle w granicach náyskrupulatnieyszéy precyzyi, a wystawiámy mu roboty takiéy precyzyi przyiąć nié mogącé. Wprawiać młodégo w przystósowanié nauki, któréy ieszcze dobrze nie zrozumiáł i nie obiął, skazywać mu roboty, których wád i niedokładności nie iest ieszcze w stanie ocenić, nie iest że to zepsuć i skrzywić wydobywaiący się rozum? nie iest że drobném przystósowaniém ścieśniać rosnący dopiéro umysł, i zniewáżać naukę tak rozległy i wielki wpływ wszędzie maiącą? Archimedes wielkié swoie wynalazki Mechaniczné z dzieł Jeometrycznych wyrzucił, bo nie chciáł przerywać uwági tam, gdzie idzie o pokazanié i wydoskonalénié samèy siły czystégo rozumu. Nadto, źle poznáł skłonności młodych ludzi, kto rozumié, że ich można do nauki takiémi drobnostkami niewcześnie poddawanémi przywiązać. Długá praktyka uczéniá przekonała mnie, że, ze wszystkich nauk náywięcéy przywięzuie i zapalá młodzież Jeometryá dobrze wystawioná i szczęśliwie poiętá: dlá czegoż? bo w każdym wieku żądza i chluba celowaniá władzami umysłu więcéy nás zaymuie i cieszy, iak zręczność i sztuka w robotach mechanicznych. Kiedy młody człowiek poczuie w sobie przez Jeometryą, nową dlá siebie siłę rozumu, kiedy tę siłę potrafi szczęśliwie wywiérać i okazać w dowodzéniu czystém, porządném práwd z sobą związkowych; to czucié swéy przenikłości, ta dzielność iego umysłu, bardziey go cieszy, unosi i zapalá, iak drobné przystósowaniá. Jnné nauki, które mu nie otwiéraią takiégo pola popisu, nie tak go silnie przywięzuią. Przekonámy się ieszcze tém mocniey o nieprzyzwoitości tak nieporządnégo uczéniá Jeometryi, kiedy pomyślimy, że iako w pięknych sztukach i kunsztach, do utworzéniá práwdziwégo *gustu* náywalnieyszą rzeczą iest, nabycié práwdziwéy piękności *idealnéy*, któráby służyć mogła za wzór do sądzéniá o dziełach w oczy wpadaiących; tak w doskonaléniu władzy rozumu náypierwszą iest rzeczą nabycié práwdziwéy i gruntownéy ścisłości idealnéy czyli Jeometrycznéy, do któréy odnosząc potém inné práwdy i myśli nasuwaiącé się uwadze, potráfimy, że tak powiém, mierzyć i cenić stopiéń ich pewności. Tén iest práwdziwy zamiar, i ta wielká usługa, którą przynosi rozumowi ludzkiému czystá Matematyka. Wyrabiaiąc w młodym umyśle czucié takowéy ścisłości przez Jeometryą, usuwać powinniśmy z początku wszystkié działaniá kazić ią mogącé, i dopiéro po gruntowném całéy Nauki wyłożéniu przystąpić do iéy przystósowaniá i użyciá.

Náywiększá zaleta Jeometryi początkowéy zależy na tém, że ciągle zatrudniaiąc rozum, tylé tylko używá mechanizmu, ilé go istotnie potrzeba poięciu: i ieszcze często tén mechanizm wykréśléniá, nie wykonywá się i nie poymuie, tylko za pomocą rozumowaniá stósuiącégo práwdy iuż ogarnioné do práwd lub wypadków szukanych, tak dalece, że działanié rozumu nigdy prawie nie ustaie, nigdy nás na krok nie odstępuie: co iest istotnym warunkiém rozwiianiá i doskonaléniá włádz ludzkich, któré ráz wydobyté, nie rosną i nie doskonalą się, tylko ciągłém i nieustannėm ćwiczéniém. Zle więc czynią ci nauczyciele i Autorowie, którzy wprowadzaią do Jeometryi znaki Analityczné z Algiebry, i skracaiąc niby ięzyk, do mechanizmu wykréśléniá przydaią mechanizm rachunkowy: folguią przez to pamięci tam, gdzie iéy folgować nie należy w rozważaniu práwd przez siebie prostych i do zatrzymaniá łatwych: wystawuią té prawdy poiedyncze i odosobnioné, kiedy ié umysłowi dlá właśnego dobra i pożytku nie należy widziéć i pamiętać, tylko w związku ciągłym z prawdami innémi: przyzwyczaiaią uwágę do nowégo ięzyka, kiedy wszystkié prawdy, i ich od siebie zawisłość, cały ciąg działáń umysłowych nie powinién bydź wykłádany tylko ięzykiém pospolitym; bo tu nie idzie w jnstrukcyi młodégo człowieka o rozwinięcié i doskonalénié władzy rozumu dlá postępku nauk, ale dlá życiá spółecznégo; nie oto, żeby człowiek umiáł rozumować za pomocą formuł i rachunku, ale za pomocą ięzyka powszechnie używanégo. Nic łatwieyszégo, iak całą Jeometryą początkową w kilku formułach Algiebraicznych zamknąć i wyłożyć: ale ktoby się w uczéniu młodégo człowieka téy nieuwági dopuścił, więcéyby okazáł nierozsądku iak umieiętności; boby z Jeometryi zrobił tylko narzędzié pomagaiącé pamięci i innym naukóm, ale nie rozwiiaiącé i doskonalącé władzę rozumu. Dlá tego starożytność bácznieyszá na istotné pożytki z nauk, rozsądnieyszá w jch wyborze, użyciu i całéy sztuce uczéniá, więcéy się troszcząc o wydoskonalénié człowieka, iak o zewnętrzné przystósowaniá nauk, uwáżała Jeometryą, iako Loikę praktyczną; i podáwáłá ią młodzi w całéy ścisłości za wzór i sztukę czystégo, porządnégo, i gruntownégo myśléniá. Plato chcąc ubezpieczyć młódź Grecką przeciw zwodniczym sidłóm sofistów, i usposobić ią do porządnégo rozumowaniá, zamykáł szkołę swoię dlá tych uczniów, którzy się nie uczyli Jeometryi.

Ale pożytki Jeometryi starożytnéy nie kończą się na samém wprawianiu umysłu ludzkiégo w rozumowanié pewné i porządné; lecz nadto prowadzą do coráz rozlegleyszégo rzeczy widzéniá, toiest, do coráz ogólnieyszych myśli i wyobrażéń, które są istotną cechą, i że tak powiém, miarą rozumu: a sposób takowy uczéniá iedną z náyważnieyszych potrzéb i wárunków do wydoskonaléniá, téy władzy. Kiedy Euklides w piątéy xiędze porównywá liniie z sobą mierząc iednę przez drugą, czyli dochodząc, wielé razy iedna zamyká się w drugiéy, lub ią przewyższá, prowadzi nás przez uwágę liniy, do wyobrażéniá czystégo stosunków, do sposobu ich wynáydowaniá i wyrażéniá, czyli do liczb i rachunku; a w reszcie do wyobrażéniá ogólnégo ilości. Jego xięgi Arytmetyczné są szacownym składém własności liczb, i tych początków czystych i ogólnych, z których wypadá cały mechanizm rachunku arytmetycznégo. Té xięgi są dziś wyięté i opuszczoné w kursie Jeometryi, iako bardziéy należącé do Arytmetyki i rachunku Analitycznégo ledwo w piérwszym swym zarodzie starożytności znanégo, a dziś stanowiącégo naukę oddzielną i niezmiernie rozległą. Zatrzymané są wszelako náyważnieyszé xięgi obeymuiącé przystósowanié Arytmetyki do Jeometryi, czyli sposób wymiérzaniá płaszczyzn, powierzchni, i brył wráz z jch stosunkami do siebie. Rozciągniénié téy nauki do liniy i kątów zrodziło Trygonometryą. Zagłębiwszy uwágę w tén nowy rodzáy wiadomości przekonámy się, że tu od wyobrażéń szczególnych liniy, postępuie uwága do wyobrażéniá ogólnégo stosunków i liczb, a przez rozumowanié za pomocą wykréśléniá, wchodzi do rozumowaniá daleko powszechnieyszégo i zawilszégo przez rachunek: tu się uczymy, iak przez drogę rozumowaniá wchodzi się na drogę wynáydowaniá práwd.

Z tych czystych o Jeometryi rzuconych myśli, wypádaią następuiące do zachowania w jéy uczéniu prawidła.

„Ze w téy nauce náypiérwszy iest zamiar wydobycié i doskonalénié siły rozumu: trzeba zatém prowadzić ucznia samą tylko drogą mocnégo przekonaniá, i starać się o náygruntownieyszą i náyporządnieyszą ścisłość w rozumowaniu, nic nie przypuszczaiąc, co nie iest dowiedzionėm.

„Ze należy w niczém nie folgować iego sile rozumu i ciągłému téy władzy działaniu; ani z początku drobnémi przystósowaniami do wymiarów, iego uwagi przerywać.

„Że cała pomoc zmysłowa zasadzać się i kończyć powinna na wykréśléniu figury, w wykładaniu zaś nauki nie godzi się używać tylko ięzyka pospolitégo i właściwych nazwisk rzeczy, a zatém, że znaki symboliczné Algiebry, mieysca tu miéć nie powinny.

„Że dla wsparcia poięcia w początkowych definicyach i opisach można czasém użyć obiaśniénia, byleby na niém nie przestać tam, gdzie potrzeba dowodzić, i byleby té obiaśniénia nie kaziły czystości wyobrażéń Jeometrycznych.

„Że rozsądnie należy rozróżniać to, co bydź tylko powinno opisané, od tego co bydź powinno dowiedzioné; bo są prawdy niektóré tak prosté, tak wzruszaiącé przekonanié, iż chciéć ié dowodzić, iestto ié zaćmić.

„Że nic nie szkodzi, iż początkowé czasém prawdy, nie są w całéy swéy czystości poięté, bo to poięcié wyrobi się potém ciągłém innych prawd i rzeczy rozważaniém: i tak próżno byłoby mordować z początku młody umysł gruntownêm poięciém linii, punktu, lub powiérzchni Jeometry-cznéy: poymié on potém, że iedén wymiar iest granicą, toiest zaczęciém lub zakończé-niém drugiego, toiest: powiérzchniá bryły, liniia powiérzchni, a punkt linii; i sám sobie wyprácuie właśną uwágą czysté tych rzeczy poięcié„.

Té ostatnié uwági, podałyby nám odpowiédź ledwo nie na wszystkié krytyki Euklidesa wyrzucaiącé mu, iakoby on wielé rzeczy opisywál tylko, któré potrzeba dowodzić. Jeometryá iego nie przestanie nigdy bydź dziełém klassycznêm wszystkich wieków przez swoię przedziwną prostość, ścisłość i porządek; póki práwdziwy i náywalnieyszy zamiár téy nauki dobrze będzie rozumiany. Im daléy postępuią nauki Matematyczné, tym się bardziéy utwiérdzá i rośnie szacunek tego dzieła. Newton żałowál w życiu swoiém, że się z Euklidesa Jeometryi, nie uczył. Wszelako kiedy na początku i we śrzodku zeszłégo wieku namnożyło się Autorów téy nauki, z których iedni fałszowali ią błędném tłumaczéniém, drudzy kazili wywróćéniém porządku, trzeci ćmili niepotrzebnémi obiaśniéniami, inni znowu skracali literalnym rachunkiém: iedné w Europie szkoły Angielskié zawsze ią podawały i tłumaczyły młodzi w prawdziwéy swéy czystości. To przywiązanié do sposobu starożytnych Jeometrów tak daleko w Anglii było przesadzoné, iż Newton głębokié swoié wynalazki analityczné, nie takim, iakim ié odkrył, ale sposobém dawnych Jeometrów na tén rodzáy práwd nadto trudnym i zwikłanym starał się dowodzić, ulegaiąc uprzedzéniu swoiégo narodu. Należy to także do pochwał Akademii Krakowskiéy, że kiedy przed ustanowiéniém kommissyi edukacyyney wszystkié prawie nauki były zepsuté i skażoné, Jeometryá Euklidesa zawsze była w całéy swéy czystości uczącym się wykładaná.

Zróbmy w tém mieyscu krótką ale potrzebną uwágę nad niesprawiedliwém prawie znieważaniém i okrzykniéniém *sposobu syntetycznégo,* który, nierozsądná, obłąkaná i porywczá opiniiá potępiá, iako zły do tłumaczéniá nauk: wszakże tén sposób panuie w náypięknieyszych dziełach i wynalázkach starożytnych Jeometrów, wszakże nim Euklides tłumaczy nám swoię naukę powszechnie uznaną za náyskutecznieyszą i za náydzielnieyszą do rozwinięciá i wydoskonaléniá wládzy rozumu. Wielkié są zaiste pożytki i usługi sposobu analitycznégo, ale tén w wykładaniu nauk nie zawsze i nie wszędzie ani użyty bydź może, ani użyty bydź powinién. Wáżną byłoby rzeczą dlá oświécéniá powszechnégo, aby dokładné opisanié i użycié tych dwóch sposobów było przedsięwzięté i wyłuszczoné. Kondyllak w swoiéy Loice niewiernéṃ opisaniém sposobu analitycznégo pomógł do obłąkaniá opinii: zle zrozumiany i nadto daleko rozciągniony wyráz, posłużył do nadaniá fáłszywéy wartości rzeczóm i do zafundowaniá uczonégo przesądu, którému przypisać należy wielé wád i niedokładności niektórych xiążek eleméntarnych na szkoły narodowé przyiętych.

Sposób upowszechniańiá myśli, toiest wynoszeniá ich do coráz ogólnieyszégo i rozlegleyszégo znaczeniá i poięciá, zaczyná w nás Jeometryá, ale ciągle ćwiczy i doskonali rachunek analityczny. Wypadałoby tu z porządku wyłożyć prawidłá, których się trzymać należy w pożyteczném uczéniu części Matematyki, tén rachunek obeymuiących; ale té ze staraniém są dokładnie wyłożoné i w swém mieyscu przytoczoné w dwóch częściach Algiebry przez Jana Sniadeckiégo w języku narodowym w Krakowie roku 178~~[illegible]~~ wydanych. 3

Skończmy iuż na wyłożéniu zwięzłém niektórych powszechnych rád i przestróg do pożytecznégo nauk Matematycznych uczéniá potrzebnych:

„Wybór gruntownych dowodów iest piérwszym i istotnym do zachowaniá warunkiém w uczéniu nauk Matematycznych. Częstokroć dowody zdaią się bydź pozorné i mamiącé raczéy iak gruntowné, gdy nie prowadzą prosto i iasno do okazaniá założonégo podaniá; i są w tym przypádku albo fałszywé, albo nie w swoiém mieyscu i związku zastósowané. Wielká liczba xiążek początkowych iest zarażoná wadami tego rodzaiu, i dlá tego więcéy są szkodliwémi, niż ułatwiaiącémi sposób uczéniá się. Nié może bydź nic ważnieyszégo w instrukcyi młodégo, iak ubezpieczać go od przypádków błędnégo rozumowaniá i sideł zwodniczégo paralogizmu, a nié może go nic mocniéy wprawiać w nieufność do skorych wniosków, do ni dokładnych w swoiém wyrażéniu twiérdzéń, iak kiedy w podaniach nauki prostym ięzykiém wyrażonych, w porządnym i iasnym związku dowiedzionych, poznaie ich oczywistość i utwiérdzá się w wyborze śrzodków, których, chcąc doskonalić się w nauce, użyć powinién.

„Z różnych sposobów dowodzéniá iednégo i tego samégo podaniá, lepiéy iest zawsze wybrać iedén náylepszy, iak ich wielé przebiegać, a tém nudzić ucznia i czas mu wycieńczać. Gdzie idzie o iasné wyłożéńié nauki, tak rozległéy, iak iest nauka Matematyki w każdéy swoiéy części; o dopilnowanié ucznia, aby ią pożytecznie w czasie oznaczonym mógł skończyć; o utrzymanié uwági iego od początku do końca na związek práwd osnowę całéy nauki obeymuiących; tam nié ma czasu nauczyciel i nie powinién rozciągać się nád okazywaniém wielorakich sposobów dowodzéniá iednégo podaniá.

„W wyborze dowodzéń przekładać należy sposób dowodzéniá ogólny nad szczególny, bo tamtén prowadzi uczniów do práwdziwégo nauki wyobrażéniá, i do gruntownégo w niéy doskonaléniá się. Grubym iest błędém utrzymywać bez wyłączéniá, iakoby wykłád ogólny bydź zawsze powinién poprzedzany wyłożéniém sposobów szczególnych; iakoby té ostatnié były więcéy eleméntarnémi niż piérwszé, a zatém skutecznieyszé w porządku uczéniá i więcéy oświécaiącé w drodze uczéniá się. Sposoby ogólné wystáwianiá rzeczy, rozszerzaiąc uwágę i poięcié, nie zawsze potrzebuią wywodu i obiaśnién iá: staią się łatwémi do poięcia uczniów, gdy ich umysły od pierwszych nauki początków ciągle do ogólnégo rzeczy poymowaniá są prowadzoné. Jeometrowie wieków náydáwnieyszych nie przestaną nigdy bydź náylepszémi nauczycielami wszystkich swoich następców, a ogólność sposobu ich w wykładaniu nauki, będzie zawsze klassycznym wzorém uczéniá się dlá wszystkich chcących zgłębiać naukę i rozszérzać pomoc iéy doskonaléniá.

„Co do sposobu wykładaniá nauk Matematycznych, należy rozróżniać piszącégo od uczącégo. Autor nie powinién bydź rozwlekłym w dziele, któré pisze, bo czytaiący, woli raczéy własną uwágą zwyciężać małé trudności, na któré napadá w xiążce zwięźle napisanéy, a niżeli tęż uwagę przeprowadzać przez długi szereg szczegółów przedłużaiących postępek iego w nauce. Xiążka wystawiá do niezatarciá oczóm czytelnika wszystkié części podaniá każdégo i iego dowodzéniá, lecz głosowé wyrazy ulatuiąc, że tak powiém, uwádze ucznia, obowiązuią uczącégo do pewnych powtórzéń, iakich piszący pozwalać sobie nié może. Tę iednak potrzebę powtarzaniá ograniczać powinién uczący do zbiorowégo tylko i zwięzłégo wykładaniá tego, co iuż wprzód w całéy rozległości wytłumaczył, i przedstawiać często uwádze ucznia, w każdéy teoryi pewné punkta stałé, na których się zasadzá, aby w każdém mieyscu nauki, okazáł nieprzerwany związek iey części. Uczéń i nauczyciel, czytelnik i piszący, winni sobie wzaiémną pomoc. Każdá nauka má swóy ięzyk, każdá má właściwy sobie sposób i porządek do iéy tłumaczéniá potrzebny, ale tu náywiększá usilność uczącégo nie dokaże bez własnégo dołożéniá się ucznia, aby myśli dobrze poięté uszykowáł w swoiéy uwádze. Tłumaczenié się uczącégo iest codziénnym wzorém dlá ucznia, z którégo on dopiéro własną pracą i ćwiczéniém stworzyć sobie powinién łatwość iasnégo i porządnégo w nauce mowiéniá.

„Czyli w uczéniu się nauk Matematycznych uważać będziémy samo tylko ćwiczénié rozumu i rozwiianié się władz umy-

nie

słowych, czyli téż wpływ ich istotny do róžnych nau , a szczególniéy fizycznych: záwsze iest użyteczné, owszém konieczné dlá młodégo zachowanié w pamięci głównych práwd i podáń nauki. Ta zaś pamięć w Matematyce nie powinna przywięzywać się do rzeczy urywkowych, do słów i do mechanicznégo rzeczy porządku, iaká iest potrzebná w nauce ięzyków, ale do początków i práwd fundamentalnych, do ich związku i zawisłości od siebie, i taká pamięć nabywá się przez częsté ćwiczénié, przez przyzwoité porównywanié i łączénié wiadomości poprzednich z práwdami następnie zrozumianémi. Skoro uczéń tak prowadzony będzie w nauce, aby w każdém podaniu poznáł drogę w sposobie dowodzéniá przedsięwziętą, i uczuł związek práwd poprzednich z práwdą zadanégo podaniá, potráfi mocno zatrzymać w pamięci to, czego się uczy.

„Zapewniénié się nakoniec o rzetelnym postepku ucznia w nauce, iest istotnym i bardzo ważnym w powołaniu uczącégo obowiązkiém. Tému zaś obowiązkowi uczący zadosyć uczynić może dwoiakim sposobém: albo drogą doświádczaniá ustnégo, albo rozstrząsaniém wyrabianéy przez ucznia i na piśmie podawanéy włásnéy iego prácy. *W doświádczaniu ustném* powinién uczący z náywiększą przezornością i pilnością postępować, aby wprawiáł i ucznia w ścisłé i porządné tłumaczénié się, i uczący w każdém mieyscu tłumaczéniá się ucznia mógł rozeznać, czyli z daru tylko saméy pamięci popisuie się; czyli téż z dobrégo poięcia i rozumiénia tego, co mówi. Zgoła uczéń w tłumaczéniu się ustném z nauk Matematycznych tak pilnowanym bydź powinién, co do czystości i dokładności ięzyka, aby rozumieiąc znaczénié każdégo wyrazu, żádnégo zbytniégo nie używáł, ani potrzebnégo nie opuszczáł. *W doświádczaniu z prác piśmiénnych* powinién uczący czynić wybór podáń zadáwać się maiących do wyrobiéniá, aby té z jstoty swoiéy zawiérały przystósowaniá tego, czego uczéń nauczyć się iuż był powinién, i opierały się o głównieyszé fundaménta nauki. Chcąc zaś usposobić ucznia do łatwégo w tym rodzaiu popisywaniá się, należy go wprawiać w porządné każdéy lekcyi powtárzanié, i w zbiorowé na piśmie wykładanié każdéy głównieyszéy w kursie nauki wytłumaczonéy materyi. Zgoła w pożytecznym wykładzie umieiętności Matematycznych zachować należy uczącému porządek, że tak powiém, Jenealogiczny w szykowaniu práwd, ścisłą gruntowność w dowodzéniu, w tłumaczéniu się iasność, zwięzłość, i dokłádność. Ze strony zaś uczącégo się potrzebná iest nieprzerwáná báczność i trafność w poymowaniu, częsté zatrudnianié umysłu rozwáżaniém práwd poiętych, i ćwiczénié się ciągłé ich powtárzaniém ustnie i na piśmie.

JEOMETRYI EUKLIDESA.

XIĘGA PIERWSZA.

DEFINICYE, OPISANIA.

1. Punktém lub znakiém iest, co nié ma żadnych części, lub co nié ma żadnéy wielkości.

2. Liniia zaś iest długością bez szérokości.

3. Linii końce, czyli granicé, są punkta.

4. Liniia prostá iest, którá między swoiémi punktami w równym i iednostaynym kierunků iest położoná.

5. Powiérzchniá iest to, co má tylko długość i szerokość.

6. Powiérzchni końcami czyli granicami są liniie.

7. Powiérzchnia płaská iest ta, na któréy

wziąwszy gdziekolwiek dwa punkta, liniia prostá témiż punktami ograniczoná, całá leży na téy powiérzchni.

8. Kąt płaski iest dwóch liniy prostych schodzących się, a nie w jednym kierunku położonych, iednéy względém drugiéy nachylénié się.

9. Kąt płaski prostokréślny iest dwóch liniy prostych schodzących się, a nie w jednym kierunku położonych, iednéy względém drugiéy nachylénié się.

„Liniie prosté schodzącé się, i wzaiemném „do siebie nachyléniém się czyniącé kąt, zo„wią ramionami kąta, punkt zaś zeyścia się „liniy prostych wierzchołkiém kąta. Jeżeli „kilka kątów maią swoié wierzchołki przy „iednym punkcie B, każdy z nich oznáczá się „i wymawiá trzéma Alfabetu głoskami, z któ„rych położoná przy wierzchołku, wymawiá „się w śrzodku dwóch pozostałych; tak kąt „zawarty liniiami prostémi AB, CB, oznáczá „się wymówiéniém głosek ABC, lub CBA; „kąt zawarty liniiami prostémi AB, DB, ozná„czá się wymówiéniém głosek ABD, lub DBA,

„a kąt zawarty liniiami prostémi DB, CB, „oznácza się wymówiéniém głosek DBC, lub „CBD. Jeżeli zaś przy punkcie iedén tylko „kąt znayduie się może bydź oznáczony wy- „mówiéniém iednéy głoski, przy tym punkcie, „toiest: przy wierzchołku kąta położonéy; „tak kąt przy E. Fig. 1 i 2.

10. Jeżeli zaś liniia prostá padaiąc na liniią prostą czyni z nią kąty przyległé równé między sobą; każdy z kątów równych iest prosty, a padaiącá liniia prostá nazywá się prostopadłą do téy linii, na którą padá. Fig. 3.

11. Kąt roztwarty iest tén, który iest większy od kąta prostégo. Fig. 4.

12. Kąt ostry iest tén, który iest mnieyszy od kąta prostégo. Fig. 5.

13. Krésém czyli granicą iest to, na czém się rzecz iaká kończy.

14. Figurą iest to, co iest zawarté, iedną lub kilką granicami.

15. Koło iest figura płaská zawartá liniią, *okręgiém* zwaną, do którégo okręgu wszystkié liniie prosté z jednégo punktu wewnątrz figury

położonégo poprowadzoné, są między sobą równé. Fig. 6.

16. Tén zaś punkt nazywá się śrzodkiém koła.

17. Srzednicą koła iest liniia prostá przez śrzodek poprowadzoná, i z obudwóch stroń na okręgu koła zakończoná.

18. Półkole iest figura zawartá śrzednicą, i częścią okręgu koła, którą śrzednica obeymuie.

19. Odcinek koła iest figura zawartá liniią prostą i częścią okręgu koła.

20. Figury prostokréślné są té, które ograniczoné są liniiami prostémi.

21. Figury tróykątné prostokréślné są té, które są ograniczoné trzéma liniiami prostémi.

22. Figury czworoboczné, lub czworokątné prostokréślné są té, które ograniczoné są cztéréma liniiami prostémi.

23. Figury wieloboczné, lub wielokątné prostokréślné są té, które ograniczoné są, więcéy niż cztéréma liniiami prostémi.

24. Między figurami prostokréślnémi tróy-

kątnémi; tróykąt równoboczny iest tén, który má trzy boki równé. Fig. 7.

25. Tróykąt równoramienny iest tén, który má tylko dwa boki równé. Fig. 8.

26. Tróykąt różnoboczny iest tén, który má trzy boki nie równé. Fig. 11.

27. Nadto: między figurami tróykątnémi prostokréślnémi, tróykąt prostokątny iest tén, który ma kąt prosty. Fig. 9.

28. Tróykąt roztwartokątny iest tén, który ma kąt roztwarty. Fig. 10.

29. Tróykąt ostrokątny iest tén, który má trzy kąty ostré. Fig. 11.

30. Między figurami czworobocznémi; kwadrat iest figura maiącá boki równé i kąty prosté. Fig. 12.

31. Prostokąt iest figura czworobocznà maiącá kąty prosté, lecz boki nie równé. Fig. 13.

32. Kwadrat ukośny iest figura czworoboczná, maiącá boki równé, lecz nie maiącá kątów prostych. Fig. 14.

33. Równoległobok ukośny iest figura

czworoboczná maiącá boki przeciwné równé, lecz nié maiącá kątów prostych. Fig. 15.

34. Wszystkié inné figury czworoboczné prócz wyżéy wymiénionych, nazywaią się różnobokami.

35. Liniie równo - odległé są té liniie prosté, któré na téyże saméy płaszczyźnie położoné, i z obudwóch strón w odległość nie skończoną przedłużoné, z żadnéy strony z sobą nie schodzą się. Fig. 16.

ŻĄDANIA.

1. Z którégokolwiek punktu poprowadzić liniią prostą do którégokolwiek punktu.

2. Liniią prostą oznaczonéy długości, w jéy kierunku przedłużyć w którąkolwiek stronę.

3. Z punktu którégokolwiek, iako ze śrzodka, i iakąkolwiek linii prostéy długością zakréślić koło.

PEWNIKI.

1. Wielkości równé téyże saméy wielkości, są równé i między sobą.

2. Jeżeli do równych wielkości, dodané będą wielkości równé, całé wielkości będą równé.

5. Jeżeli od równych wielkości, odięté będą równé wielkości, pozostałé wielkości będą równé.

4. Jeżeli do nierównych wielkości dodané będą wielkości równé, całé wielkości będą nierówné.

5. Jeżeli od nierównych wielkości odięté będą wielkości równé, pozostałé wielkości będą nierówné.

6. Wielkości które są podwóynémi téyże samėy wielkości, są między sobą równé.

7. Wielkości które są połowami téyże saméy wielkości są między sobą równé.

8. Wielkości które przystaią do siebie wzaiemnie, są między sobą równé.

9. Całość, większá iest od swoiéy części.

10. Dwie liniie prosté nie zawiéraią mieysca.

11. Wszystkie kąty prosté są między sobą równé.

12. Jeżeli liniia prostá padaiąc na dwie liniie prosté czyni kąty wewnętrzné, i po téyże saméy stronie położoné, mnieyszé od dwóch kątów prostych; dwie té liniie prosté w odle-

głość nieskończoną przedłużoné, zeydą się z téy strony, z któréy kąty są mnieyszé od dwóch kątów prostych. *Zobacz przypiski do Podania 29. Xięgi I.*

PODANIE PIERWSZE.

ZAGADNIENIE.

Na danéy linii prostéy oznaczonéy, wykréślić tróykąt równoboczny. Fig. 17.

Niech będzie daná liniia prostá oznáczoná AB, potrzeba na linii prostéy AB, wykréślić tróykąt równoboczny.

Ze środka A, długością linii prostéy AB, zakréślmy (III. żąd.) koło BCD; i znowu ze środka B, długością linii prostéy AB, zakréślmy koło ACE; a z punktu C, w którym okręgi tych kół przecinaią się nawzaiem, poprowadźmy (II. żąd.) do punktów A, B, liniie prosté CA, CB, będzie tróykąt ABC, równoboczny.

Ponieważ punkt A, środkiém iest koła BCD, będzie liniia prostá AC, równá linii prostéy AB; (XV. def.) i znowu ponieważ punkt B, śrzodkiém iest koła CAE, będzie liniia prostá BC, równá linii prostéy BA; dowiedzioná zaś liniia prostá CA, bydź równą linii prostéy AB; każdá więc z dwóch liniy prostych CA, CB, iest równą linii prostéy AB. Wielkości zaś równé téyże saméy wielkości są równé i między sobą; (I. pew.) liniia przeto prostá CA, iest równá linii prostéy CB; trzy więc liniie prosté CA, AB, BC, są między sobą równé, a zatém tróykąt ABC, iest równoboczny i wykréślony na danéy linii prostéy oznaczonéy AB. Co było do rozwiązaniá.

PODANIE II.

ZAGADNIENIE.

Z punktu danégo poprowadzić liniią prostą równą linii prostéy danéy. Fig. 18. X

Niech będzie dany punkt A, i daná liniia prostá BC; potrzeba z punktu A, poprowadzić liniią prostą równą danéy linii prostéy BC.

Poprowadźmy z punktu A, do punktu B, liniią prostą AB, (I. żąd.) i na niéy wykréślmy tróykąt równoboczny DAB; (I. I.) przedłużmy liniie prosté AE, BF, w kierunku boków DA, DB, (II. żąd.) i ze śrzodka B, długością linii prostéy BC, zakréślmy koło CGH, (III. żąd.) i znowu ze śrzodka D, długością linii prostéy DG, zakréślmy koło GKL.

Ponieważ punkt B, śrzodkiém iest koła CGH, będzie liniia prostá BC, równá linii prostéy BG, (XV. def.) i znowu; ponieważ punkt D, iest śrzodkiém koła GKL, będzie liniia prostá DL, równá linii prostéy DG, z których liniia prostá DA, iest równá linii prostéy DB, zaczém i pozostałá liniia prostá AL, iest równá pozostałéy linii prostéy BG; (III. pew.) każdá więc z dwóch liniy prostych AL, BC, iest równá linii prostéy BG, wielkości zaś równé téyże samey wielkości są równé i między sobą, zatém liniia prostá AL, równa iest linii prostéy BC. Z punktu więc danégo A, poprowadzoná iest liniia prostá AL, równá danéy linii prostéy BC. Co było do rozwiązaniá.

PODANIE III.

ZAGADNIENIE.

Maiąc dané dwie liniie prosté nierówné, z większéy odciąć liniią prostą równą mnieyszéy. Fig. 19.

X

Niech będą dané dwie liniie prosté nierówné AB, i C, z których większą niech będzie liniia prostá AB; potrzebá z większéy AB, odciąć liniią prostą równą mnieyszéy C.

Z punktu A, wyprowadźmy liniią prostą AD, równą linii prostéy C, (II. I.) i ze śrzodka A, długością linii prostéy AD, zakréślmy koło DEF, (III. żąd.) ponieważ punkt A, śrzodkiém iest koła DEF, będzie liniia prostá AE, równá linii prostéy AD; lecz i liniia prostá C, iest równą linii prostéy AD; każdá więc z dwóch liniy prostych AE, C, będzie równą linii prostéy AD, dlá czego i liniia prostá AE, iest równą linii prostéy C, (I. pew.) Maiąc więc dané dwie liniie prosté nierówné AB, i C, z większéy odciętá iest liniia prostá AE, równá mnieyszéy C. Co było do rozwiązaniá.

PODANIE IV.

TWIERDZENIE.

Jeżeli dwa boki w jednym tróykącie, są równé dwóm bokóm w drugim tróykącie, iedén drugiému; i ieżeli kąty zawarté między bokami równémi są także równé; będzie i podstawa piérwszégo tróykąta, równá podstawie drugiégo tróykąta; i té dwa tróykąty będą między sobą równé, i pozostałé kąty zawarté między bokami równémi tych dwóch tróykątów, będą równe między sobą. Fig. 20.

Niech będą dwa tróykąty ABC, DEF, które maią dwa boki AB, AC, równe dwóm bokóm DE, DF, iedén drugiému, to iest: bok AB, równy bokowi DE, bok zaś AC, równy bokowi DF; i kąt BAC, równy kątowi EDF; powiadam że i podstawa BC, iest równá podstawie EF, i tróykąt ABC równy tróykątowi DEF; i pozostałé kąty, są równé pozostałym kątóm iedén drugiému, które są równémi bokami zawarté, toiest kąt ABC, iest równy kątowi DEF, i kąt ACB, iest równy kątowy DFE.

Przyłożywszy tróykąt ABC, do tróykąta DEF, tak: żeby punkt A, padł na punkt D, liniia zaś prostá AB, żeby przystała do linii prostéy DE; przystanie i punkt B, do punktu E, iest bowiém liniia prostá AB, równá linii prostéy DE; za przystaniém zaś linii prostéy AB, do linii prostéy DE, przystanie i liniia prostá AC, do linii prostéy DF, bo kąt BAC, iest równy kątowi DEF, przystanie i punkt C, do punktu F, bo liniia prostá AC, iest równá linii prostéy DF. Lecz przystał i punkt B, do punktu E; dlá czego podstawa BC, przystanie do podstawy EF. Gdyby albowiém za przystaniém punktu B, do punktu E, i za przystaniém punktu C, do punktu F, podstawa BC, nie przystała do podstawy EF; dwie liniie prosté ograniczyłyby mieyscé, co bydź nie może (X. pew.). Przystanie więc podstawa BC, do podstawy EF, i będzie iéy równą. Dlá czego i cały tróykąt ABC, przystanie do całégo tróykąta DEF, i będzie onému równy, i pozostałé kąty, przystaną do pozostałych kątów, i będą im równé, toiest: kąt ABC, kątowi DEF, i kąt ACB, kątowi DFE. Jeżeli więc dwa boki w jednym tróykącie, równé są dwóm bokóm w drugim tróykącie, iedén drugiému, i ieżeli kąty zawarté między bokami równémi są także równé; będzie i podstawa piérwszégo tróykąta równá podstawie drugiégo tróykąta; i té dwa tróykąty będą między sobą równé, i pozostałé kąty zawarté między bokami równémi tych dwóch tróykątów, będą równé między sobą.

PODANIE V.

TWIERDZENIE.

X W tróykątach równoramiennych kąty przy podstawie są między sobą równé, a przedłużywszy boki równé, będą i kąty pod podstawą równé między sobą. Fig. 21.

Niech będzie tróykąt równoramienny ABC, w którym bok AB, iest równy bokowi AC; przedłużmy liniie prosté BD, CE, w kierunku liniy prostych AB, AC, powiadam: że kąt ABC, iest równy kątowi ACB, kąt zaś CBD, iest równy kątowi BCE.

Weźmy na linii prostéy BD, punkt gdziekolwiek F, i z większéy AE odetniymy liniią prostą AG, równą mnieyszéy AF, (III. I.) i poprowadźmy liniie prosté FC, GB. Ponieważ liniia prostá AF, iest równá linii prostéy AG, liniia zaś prostá AB, równá linii prostéy AC; są dwie liniie prosté FA, AC, równé dwóm liniióm prostym GA, AB, iedna drugiéy; i zawiéraią kąt spólny FAG; podstawa więc FC, iest równá podstawie GB; (IV. I.) i tróykąt AFC, równy tróykątowi AGB, i pozostałé kąty, będą równé pozostałym kątóm, iedén drugiému, bokami równémi zawartym: toiest kąt ACF, będzie równy kątowy ABG, kąt zaś AFC, kątowi AGB, a ponieważ cała liniia prostá AF, iest równá całéy linii prostéy AG, z których liniia prostá AB, iest równá linii prostéy AC, będzie i pozostałá liniia prostá BF, równá pozostałéy linii prostéy CG, (III. pew.) dowiedliśmy zaś, że liniia prostá FC, równá iest linii prostéy GB; dwie więc liniie proste BF, FC, są równé dwóm liniióm prostym CG, GB, iedná drugiéy, i kąt BFC, iest równy kątowi CGB; podstawa oraz CB, w tych dwóch tróykątach iest spólná, będzie przeto i tróykąt BFC, równy tróykątowi CGB, i pozostałé kąty równé pozostałym kątóm równémi bokami zawartym iedén drugiému, kąt zatém FBC, iest równy kątowi GCB, i kąt BCF, równy kątowi CBG. Ponieważ więc cały kąt ABG, równy iest całému kątowi ACF, z których kąt CBG, iest równy kątowi BCF, będzie pozostały kąt ABC, równy pozostałému kątowi ACB, a té są kątami przy podstawie tróykąta ABC, dowiedliśmy zaś: że i kąt FBC, iest równy kątowi GCB, a té znowu równé kąty są kątami pod podstawą tróykąta ABC.

W tróykątach więc równoramiennych i t. d. C. B. d. D.

Wniosek. Każdy zatém tróykąt równoboczny, iest oraz równokątny.

PODANIE VI.

TWIERDZENIE.

Jeżeli w tróykącie dwa kąty są między sobą równé; będą i boki kątóm równym przeciwné między sobą równé. Fig. 22.

Niech będzie tróykąt ABC, w którym kąt ABC, iest równy kątowi ACB; powiadam: że i bok AB, iest równy bokowi AC.

Jeżeli liniia prostá AB, nie iest równą linii prostéy AC, iedna z nich iest większą od drugiéy; niech będzie większą liniia prostá AB; z większéy AB, odetniymy liniią prostą DB, równą mnieyszéy AC, (III. I.) i poprowadźmy liniią prostą DC. Ponieważ liniia prostá DB, równá iest linii prostéy AC, i spólną iest liniia prostá BC, będą dwie liniie prosté DB, BC, równé dwóm liniióm prostym AC, CB, iedna drugiéy, i kąt DBC, równy iest kątowi ACB. Podstawa przeto DC, iest równą podstawie AB, i tróykąt DBC, równy (IV. I.) tróykątowi ACB, mnieyszy większému; co bydź nie może; nie iest

2

zatém liniia prostá AB, nie równá linii prostéy AC. Jeżeli zatém w tróykącie dwa kąty etc. etc. C. B. d. D.

Wniosek. Każdy zatém tróykąt równokątny, iest oraz równoboczny.

PODANIE VII.

TWIERDZENIE.

Na téyże saméy podstawie, i z téyże saméy iéy strony, nié mogą bydź wykréśloné dwa tróykąty takié, iżby boki w tych tróykątach, przy obudwóch końcach spólnéy podstawy były między sobą równé. Fig. 23.

Jeżeli bowiém bydź to może, na téyże saméy podstawie AB, i z téyże saméy iéy strony wykréślmy dwa tróykąty ACB, ADB, któré maią i boki CA, DA, między sobą równé, i równé boki CB, DB.

Złączmy wierzchołki tych tróykątów liniią prostą CD; albo więc wierzchołek iednégo tróykąta nie padnie wewnątrz drugiégo tróykąta, albo wierzchołek iednégo tróykąta padnie wewnątrz tróykąta drugiégo. Niech náprzód wierzchołek żadnégo tróykąta, nie pada wewnątrz tróykąta drugiégo. Ponieważ liniia prostá AC, równá iest linii prostéy AD, będzie i kąt ACD, równy kątowi ADC, iest zaś kąt ACD, większy od kąta BCD, zaczém i kąt ADC, większy iest od kąta BCD, dlá czego kąt BDC, nie równie większym będzie od kąta BCD, znowu: ponieważ liniia prostá CB, iest równá linii prostéy DB, będzie i kąt BDC, równy kątowi BCD, (V. I.). Dowiedliśmy zaś, że kąt BDC, iest większy od kąta BCD, tyłby więc kąt BDC, razém i większym od kąta BCD, i równym temuż samému kątowi BCD, co bydź nié może.

Lecz niech wierzchołek iednégo tróykąta na przykład D, pada wewnątrz tróykąta drugiégo ACB; przedłużmy liniie prosté AC, AD, do punktów E. F, ponieważ liniia prostá AC, iest równá linii prostéy AD, będą kąty ECD, FDC, pod podstawą równé między sobą, iest zaś kąt ECD, większy od kąta BCD, dlá czego kąt FDC, większy iest od kąta BCD, nie równie więc kąt BDC, większy iest od kąta BCD. Znowu: ponieważ liniia prostá CB, równá iest linii prostéy DB, będzie kąt BDC, równy kątowi BCD, (V. I.) dowiedliśmy zaś, że ténże sam kąt BDC, iest i większy od kąta BCD, co bydź nié może.

Przypadek ostatni, w którymby wierzchołek iednégo tróykąta padał na bok iednégo z boków tróykąta drugiégo, nie potrzebuie dowodzéniá. Więc na téyże saméy podstawie, i z téyże saméy iéy strony etc. etc. C. B. d. D.

PODANIE VIII.

TWIERDZENIE.

Jeżeli dwa boki iednégo tróykąta są równé dwóm bokóm tróykąta drugiégo, ieden drugiému, i podstawa iednégo tróykąta iest równá podstawie drugiégo tróykąta, będą też kąty między bokami równémi zawarté, równé między sobą. Fig. 24.

Niech będą dwa tróykąty ABC, DEF, maiącé dwa boki AB, AC, równé dwóm bokóm DE, DF, iedén drugiému, toiest bok AB, równy bokowi DE, i bok AC, równy bokowi DF, i podstawę BC, równą podstawie EF. Powiadam, że i kąt BAC, iest równy kątowi EDF.

Przyłożywszy tróykąt ABC, do tróykąta DEF, tak: żeby punkt B, przypadł do punktu E, liniia zaś prostá BC, przystała do linii prostéy EF, przystanie i punkt C, do punktu F; ponieważ linia prostá BC, iest równá linii prostéy EF, za przystaniém więc lini prostéy BC, do linii prostéy EF, przystaną i liniie prosté BA, AC, do liniy prostych ED, DF; ieżeli bowiém z przystaniém podstawy BC, do podstawy EF, boki BA, AC, nie przystaią do boków ED, DF, lecz odmieniaią położénié, iak pokazuią liniie prosté EG, GF; na téyże samém podstawie, i z téyże samém iéy strony będą wykréślone tróykąty maiącé boki przy obudwóch końcach spólnéy podstawy między sobą równé; takié zaś tróykąty nié mogą bydź wykréślone, (VII. I.) z przystaniém więc podstawy BC, do podstawy EF, nié mogą nie przystać boki BA, AC, do boków ED, DF, a zatém przystaną, dlá czego i kąt BAC, przystanie do kąta EDF, i będzie onému równy (VIII. p.). Jeżeli więc dwa tróykąty etc. etc. C. B. d. D.

PODANIE IX.

ZAGADNIENIE.

Dany kąt prostokréślny podzielić na dwie równé części. Fig. 25.

Niech będzie dany kąt prostokréślny BAC; potrzeba kąt BAC, podzielić na dwie równé części.

Wziąwszy na linii prostéy AB, punkt gdziekolwiek D, odetniymy z linii prostéy AC, liniią prostą AE, równą linii prostéy AD, (III. I.) a poprowadziwszy liniią prostą DE, wykréślmy na niéy tróykąt (I. I.) równoboczny DEF i poprowadźmy liniią prostą AF. Powiadam: że kąt BAC, przecięty iest liniią prostą AF, na dwie równé części.

Ponieważ liniia prostá AD, iest równą linii prostéy AE, spólną zaś iest liniia prostá

AF; są dwie liniie prosté DA, AF, równé dwóm liniióm prostym EA, AF, iedna drugiéy; i podstawa DF, iest równá podstawie EF; kąt więc DAF iest równy kątowi EAF; (VIII. I.) dany zatém kąt prostokréślny BAC, iest liniią prostą AF, przecięty na dwie równé części C. B. d. R.

PODANIE X.

ZAGADNIENIE.

Daną liniią prostą oznáczoną podzielić na dwie równé części. Fig. 26.

Niech będzie daná liniiá prostá oznáczoná AB; potrzeba liniią prostą AB, podzielić na dwie równé części.

Wykréślmy na linii prostéy AB, (III. I.) tróykąt równoboczny ABC, i przetniymy kąt ACB, (IX. I.) na dwie równé części liniią prostą CD, powiadam: że liniia prostá AB, przeciętá iest w punkcie D, na dwie równé części.

Ponieważ liniia prostá AC, równá iest linii prostéy CB, spólną zaś iest liniia prostá CD, są dwie liniie prosté AC, CD, równé dwóm liniióm prostym BC, CD, iédna drugiéy i kąt ACD, iest równy kątowi BCD; podstawa więc AD, iest równá podstawie DB, (IV. I.) zatém liniia prostá oznáczoná AB, przeciętá iest w punkcie D, na dwie równé części. C. B. d. R.

PODANIE XI.

ZAGADNIENIE.

Z punktu danégo na danéy linii prostéy wyprowadzić liniią prostopadłą do téyże danéy linii prostéy. Fig. 27.

Niech będzie daná liniia prostá AB, i dany na niéy punkt C; potrzeba z punktu C, do linii prostéy AB, wyprowadzić liniią prostopadłą.

Weźmy na linii prostéy AC, punkt gdziekolwiek D, i linii prostéy CD, odetniymy równą liniią prostą CE, (III. I.) na linii prostéy DE, wykréślmy tróykąt równoboczny (I. I.) DFE, i poprowadźmy liniią prostą FC, powiadam; że do danéy linii prostéy AB, z punktu C, na niéy danégo wyprowadzoná iest liniia prostopadłá FC.

Ponieważ liniia prostá CD, iest równá linii prostéy CE, i spólną iest liniia FC, są dwie liniie prosté DC, CF, równé dwóm liniióm prostym EC, CF, iedna drugiéy, i podstawa DF, iest równá podstawie FE. Kąt więc DCF, iest równy kątowi ECF (VIII. I.), a té kąty są kątami przyległémi; kiedy zaś liniia prostá padaiąc na liniią prostą czyni z nią kąty przyległé równé między sobą (X. d. I.), każdy z kątów równych iest prosty, i liniia padaiącá, iest prostopadłą do téy linii, na którą padá; przeto każdy z kątów DCF, FCE, iest prosty, i liniia prostá FC, iest prostopadłą do linii prostéy AB. Do danéy więc linii prostéy AB, z punktu na niey danégo C, wyprowadzoná iest liniia prostopadłá FC. C. B. d. R.

Wniosek. Można stąd dowieśdź że dwie linii prosté, spólnégo odcinka mięć nié mogą. Fig. 28.

Jeżeli bowiém bydź to może, niechay dwie liniie prosté ABC, ABD, maią spólny odcinek

X

AB. Z punktu B, wyprowadźmy prostopadłą BE, do linii prostéy AB; ponieważ liniia ABC, iest liniią prostą, będzie kąt CBE, równy kątowi EBA; podobnież ponieważ liniia ABD, iest liniią prostą, będzie kąt DBE, równy kątowi EBA. Jest przeto kąt DBE, równy kątowi CBE, mnieyszy większému co bydź nié może. Dwie więc liniie prosté spólnego odcinka miéć nié mogą.

PODANIE XII.

ZAGADNIENIE.

Z punktu danégo nad daną liniią prostą nie ograniczoną, wyprowadzić do niéy prostopadłą. Fig. 29.

Niech będzie daná liniia prostá AB, i nad nią punkt dany C, potrzeba do danéy linii prostéy AB, nie ograniczonéy, z punktu nad nią danégo C, wyprowadzić liniią prostopadłą.

Wziąwszy z drugiéy strony linii prostéy AB, nie ograniczonéy punkt gdziekolwiek D, ze środka C, długością linii próstéy CD, zakréślmy koło (III. żąd.) EGF, któregoby okrąg spotykał liniią prostą AB, w punktach F, G, przetniymy liniią prostą FG, w punkcie H, (X. I.) na dwie równé części, i poprowadźmy liniie prosté CF, CH, CG. Powiadam: że do danéy linii prostéy nie ograniczonéy AB, z punktu nie na niéy danégo C, wyprowadzoná iest liniia prostopadłá CH.

Ponieważ liniia prostá FH, iest równá linii prostéy HG, spólną zaś iest liniia prostá HC, są dwie liniie prosté FH, HC, równé dwóm liniióm prostym GH, HC, iedna drugiéy i podstawa CF, iest równá podstawie CG, (def. XV.) kąt przeto CHF, iest równy kątowi CHG, (VIII. I.) a są kątami przyległémi. Kiedy zaś liniia prostá padaiąc na liniią prostą czyni z nią kąty przyległé równé między sobą, każdy z kątów równych iest prosty, i liniia padaiącá nazywá się prostopadłą do téy na którą pada. Do danéy przeto linii prostéy nie ograniczonéy AB, z punktu nie na niéy danégo C, wyprowadzoná iest liniia prostopadłá CH. C. B. d. R.

PODANIE XIII.

TWIERDZENIE.

Jeżeli liniia prostá padaiąc na drugą liniią prostą czyni z nią dwa kąty; té uczyni albo prosté albo równé dwóm kątóm prostym. Fig. 30.

Niech liniia prostá AB, padaiąc na liniią prostą CD, czyni z nią dwa kąty CBA, ABD, powiadam: że té dwa kąty albo są prosté, albo równé dwóm kątóm prostym.

Jeżeli kąt CBA, iest równy kątowi ABD, obadwa są prosté (X. def.) ieżeli zaś kąt CBA, nie iest równy kątowi ABD, wyprowadźmy z punktu B, do linii prostéy CD, liniią prostopadłą BE, (XI. I.) z kątów więc CBE, EBD, każdy iest prosty, a ponieważ kąt CBE, iest równy dwóm kątóm CBA, ABE, przydawszy kąt spólny EBD, będą kąty CBE, EBD, równé trzém kątóm CBA, ABE, EBD, (II. p.) znowu ponieważ kąt DBA, równy iest dwóm kątóm DBE, EBA, przydawszy spólny kąt ABC, będą kąty DBA, ABC, równé trzém kątóm DBE, EBA, ABC, tym zas samym trzem kątóm DBE, EBA, ABC, dowiodły się bydź równé kąty CBE, EBD. a wielkości równé téyże saméy wielkości są równé między sobą (I. p.) więc i kąty CBE, EBD, są równé kątóm DBA, ABC. Lecz kąty CBE, EBD, są dwa kąty prosté, zaczém kąty DBA, ABC, są równé dwóm kątóm prostym. Jeżeli więc liniia prostá etc. etc. C. B. d. D.

PODANIE XIV.

TWIERDZENIE.

Jeżeli przy linii prostéy i przy punkcie na niéy wziętym dwie liniie prosté nie po iednéy stronie położoné czynią kąty przyległé równé dwóm kątóm prostym; té dwie liniie prosté będą w tymże samym kierunku, to-iest: nie uczynią tylko iednę, i tęż samę liniią prostą. Fig. 31.

Niechay przy linii prostéy AB, i przy punkcie na niéy B, dwie liniie prosté BC, BD, nie po iednéy stronie położoné czynią kąty przyległé ABC, ABD, równé dwôm kątóm prostym; powiadam: że liniie prosté BD, CB, są w tymże samym kierunku, to-iest: że nie czynią tylko iednę i tęż samę liniią prostą.

Jeżeli bowiém liniia prostá BD, nie iest w kierunku linii prostéy CB, niech liniia prostá BE, będzie w kierunku linii prostéy CB. Ponieważ więc liniia prostá AB, padaiąc na liniią prostą CBE, czyni z nią kąty ABC, ABE, té kąty ABC, ABE, są równé dwóm kątóm prostym (XIII. I.) są zaś i kąty ABC, ABD, równé dwóm kątóm prostym, kąty więć CBA, ABE, będą równé kątóm CBA, ABD, odiąwszy kąt spólny ABC, pozostały kąt ABE, równy iest (III. p.) pozostałému kątowi ABD, mnieyszy większému, co bydź nié może. Przeto liniia prostá BE, nie iest w kierunku linii prostéy BC. Podobnież dowiedziemy: że żadna inná liniia prostá, prócz linii prostéy BD, nie iest w kierunku linii prostéy BC. Jest zatém liniia prostá BC, w kierunku linii prostéy BD, toiest: dwie liniie prosté CB, BD, czynią iednę i tęż samę liniią prostą CBD. Jeżeli więc przy linii prostéy etc. etc. C. B. d. D.

PODANIE XV.

TWIERDZENIE.

Jeżeli dwie liniie prosté przecinaią się, czynią kąty w wierzchołku przeciwległé równé między sobą. Fig. 32.

Niechay dwie liniie prosté AB, CD, przecinaią się nawzaiem w punkcie E. Powiadam: że kąt AEC, równy iest kątowi DEB: kąt zaś CEB, iest równy kątowi AED.

Ponieważ liniia prostá AE, padaiąc na liniią prostą CD, czyni kąty CEA, AED, będą kąty CEA, AED, równé dwóm kątóm prostym i znowu ponieważ liniia prostá DE, padaiąc na liniią prostą AB, czyni kąty AED, DEB; będą kąty AED, DEB, równé dwóm kątóm prostym (XIII. I.) z dowodzéniá zaś, kąty także CEA, AED, są równé dwóm kątóm prostym; kąty zatém CEA, AED, są równé kątóm AED, DEB, odiąwszy spólny kąt AED; pozostały kąt CEA, iest równy pozostałému kątowi BED, podobnymże sposobem dowiedziemy, że i kąt CEB, iest równy kątowi AED. Jeżeli więc dwie liniie prosté przecinaią się etc. etc. C. B. d. D.

Wniosek I. Wnosi się stąd oczywiście: że dwie liniie prosté przecinaiącé się, czynią kąty w punkcie przecięciá się, równé cztérém kątóm prostym.

Wniosek II. J dlá tégo téż wszystkié kąty przy iednym punkcie wykréślóné są równé cztérém kątóm prostym.

PODANIE XVI.

TWIERDZENIE.

W każdym tróykącie przedłużywszy bok, kąt zewnętrzny większy iest od każdégo z dwóch wewnętrznych sobie przeciwległych. Fig. 33.

Niech będzie tróykąt ABC, i bok iego iedén BC, przedłużmy do D, powiadam: że kąt zewnętrzny ACD, większy iest od każdégo z wewnętrznych sobie przeciwległych, toiest od kątów CBA, BAC.

Przetniéymy bok AC, na dwie równé części w punkcie E, (X. I.) a poprowadziwszy liniią prostą BE, przedłużmy ią do F, tak: żeby liniia prostá EF, była równá linii prostéy BE, poprowadźmy ieszcze liniią prostą FC, i liniią prostą AC, przedłużmy do G.

Ponieważ liniia prostá AE, równá iest linii prostéy EC, i liniia prostá BE, iest równá linii prostéy EF, są dwie liniie prosté AE, EB, równé dwóm liniióm prostym CE, EF, iedna drugiéy, i kąt AEB, równy iest kątowi CEF, (XV. I.) są bowiem w wierzchołku przeciwległé; podstawa więc AB, równá iest podstawie CF, i tróykąt AEB, równy tróykątowi CEF, i pozostałé kąty równé są pozostałym kątóm (IV. I.) iedén drugiému, zawartym między bokami równémi; kąt przeto BAE, iest równy kątowi ECF, większy zaś iest kąt ECD, od kąta ECF; więc kąt ACD, większy iest od kąta BAE. Przeciąwszy liniią prostą BC, na dwie równé części dowiedziemy podobnież; że kąt BCG, toiest: kąt ACD, (XV. I.) większy iest od kąta ABC. W każdym więc tróykącie etc. etc. co było do dowodzéniá.

PODANIE XVII.

TWIERDZENIE.

W każdym tróykącie dwa którékolwiek kąty mnieyszé są od dwóch kątow prostych. Fig. 34.

Niech będzie tróykąt ABC, powiadam: że dwa którekolwiek kąty tróykąta mnieyszé są od dwóch kątów prostych.

Przedłużmy bok BC, do D; ponieważ kąt ACD, iest kątém zewnętrznym tróykąta ABC, będzie kąt ACD, większy od wewnętrznégo sobie przeciwległégo ABC (XVI. I.), przydawszy spólny kąt ACB; są kąty ACD, ACB, większé od kątów ABC, ACB; lecz kąty ACD, ACB, są równé dwóm kątóm prostym (XIII. I.). Kąty przeto ABC, BCA, mnieyszé są od dwóch kątów prostych. Dowiedziemy podobnież: że i kąty BAC, ACB, iako też CAB, ABC, są mnieyszé od dwóch kątów prostych. W każdym więc tróykącie etc. etc. C. B. d. D.

PODANIE XVIII.

TWIERDZENIE.

W każdym tróykącie, bok większy przeciwległy iest kątowi większému. Fig. 35.

Niech będzie tróykąt ABC, maiący bok AC, większy od boku AB, powiadam: że i kąt ABC, większy iest, od kąta BCA.

Ponieważ bok AC, większy iest od boku AB, na boku AC, odetnijmy liniią prostą AD, rówą linii prostéy AB, i poprowadźmy liniią prostą BD, (III. I.) kąt ADB, będąc zewnętrznym tróykąta BDC, większy iest od kąta wewnętrznégo i przeciwległégo DCB, (XVI. I.) iest zaś kąt ADB, równy kątowi ABD, stąd: że bok AB, iest równy bokowi AD (V. I.); iest przeto i kąt ABD, większy od kąta ACB; dlá czego kąt ABC, nie równie będzie większy od kąta ACB. W każdym więc tróykącie etc. etc. C. B. d. D.

PODANIE XIX.

TWIERDZENIE.

W każdym tróykącie, kąt większy przeciwległy iest bokowi większému. Fig. 36.

Niech będzie tróykąt ABC, maiący kąt ABC, większy od kąta BCA, powiadam: że i bok AC, większy iest od boku AB.

Jeżeli bowiem bok AC, nie iest większy od boku AB, iest bok AC, albo równy bokowi AB, albo mnieyszy od boku AB. Nie iest zaś bok AC, równy bokowi AB, bo byłby i kąt ABC, równy kątowi ACB, (V. I.) lecz nie iest kąt ABC, równy kątowi ACB, zaczém bok AC, nie iest równy bokowi AB; ani iest bok AC, mnieyszy od boku AB, byłby bowiém i kąt ABC, mnieyszy od kąta ACB, (XVIII. I.) nie iest zaś kąt ABC, mnieyszy od kąta ACB, przeto i bok AC, nie iest mnieyszy od boku AB; a dowiedliśmy, że bok AC, ani iest równy bokowi AB, bok zatém AC, większy iest od boku AB.

W każdym więc tróykącie kąt większy etc. etc. C. B. d. D.

PODANIE XX.

TWIERDZENIE.

W każdym tróykącie dwa którékolwiek boki większé są od boku trzeciégo. Fig. 37.

Niech będzie tróykąt ABC, powiadam: że dwa którékolwiek boki tróykąta ABC, większé są od boku trzeciégo, toiest: że boki BA, AC, większé są od boku BC; że boki AB, BC, większé są od boku AC; i że boki BC, CA, większé są od boku AB.

Przedłużmy bok BA, do punktu D, tak: żeby liniia prostá AD, była równá linii prostéy CA. (III. I.) i poprowadźmy liniią prostą DC.

Ponieważ liniia prostá DA, iest równá linii prostéy AC, będzie i kąt ADC, równy kątowi ACD, (V. I.) lecz kąt BCD, większy iest od kąta ACD, kąt przeto BCD, większy iest od kąta ADC, a ponieważ tróykąt DCB, ma kąt BCD, większy od kąta BDC, więkkszému zaś kątowi przeciwległy iest bok większy, (XIX. I.) będzie bok DB, większy od boku BC, lecz bok DB, równy iest bokóm BA, AC, większé więc są boki BA, AC, od boku BC. Podobnież okażemy: że i boki AB, BC, większé są od boku CA, tak iako: że i boki BC, CA, większé są od boku AB. W każdym zatém tróykącie dwa którékolwiek etc. etc. C. B. d. D.

PODANIE XXI.

TWIERDZENIE.

Jeżeli z końców iednégo boku tróykąta poprowadzoné będą dwie liniie prosté wewnątrz tróykąta aż do ich zeyściá się z sobą, té dwie liniie prosté będą mnieyszé, od dwóch pozostałych tróykąta boków, zawiérać iednak będą kąt większy od kąta zawartégo między pozostałémi tróykąta bokami. Fig. 38.

Z końców B, C, iednégo boku BC, tróykąta ABC, wyprowadźmy dwie liniie prosté, BD, DC, wewnątrz tróykąta ABC, aż do ich zeyściá się w punkcie D; powiadam: że liniie prosté BD, DC, mnieyszé wprawdzie są od dwóch pozostałych tróykąta boków BA, AC, zawiéraią iédnak kąt BDC, większy od kąta BAC.

Przedłużmy liniią prostą BD, do E; ponieważ w każdym tróykącie dwa boki, większé są od boku trzeciégo (XX. I.) będą w tróykącie ABE, dwa boki BA, AE, większé od boku trzeciégo BE, przydawszy bok spólny EC; będą boki BA, AC, większé od boków BE, EC, i znowu ponieważ w tróykącie CED, dwa boki CE, ED, większé są od boku CD, przydawszy bok spólny DB, będą boki CE, EB, większé od boków CD, DB, lecz dowiedliśmy: że boki BA, AC, większé są od boków BE, EC, nie równie więc boki BA, AC, są większé od liniy prostych BD, DC.

Ponieważ znowu w każdym tróykącie kąt zewnętrzny większy iest od kąta wewnętrznégo sobie przeciwległégo (XVI. I.) będzie tróykąta CDE, kąt zewnętrzny BDC, większy od kąta CED; dla téy saméy przyczyny i tróykąta

ABE, kąt zewnętrzny CEB, większy iest od kąta BAC; lecz kąt BDC, z dowodzéniá większy iest od kąta CEB, nie równie więc kąt BDC, większy iest od kąta BAC. Jeżeli więc z końców iednégo boku tróykąta etc. etc. C. B. d. D.

PODANIE XXII.

ZAGADNIENIE.

Z trzech liniy prostych, równych trzém danym liniióm prostym, wykréślić tróykąt, potrzeba zaś aby z trzech liniy prostych danych, dwie którékolwiek były większé od trzeciéy. (XX. I.) Fig. 39.

Niech będą trzy dané liniie prosté A, B, C, z których dwie którékolwiek są większé od trzeciéy, toiest: maią liniie prosté A, B, bydź większé od linii prostéy C, liniie zaś prosté A, C, bydź większé od linii prostéy B; i liniie prosté B, C, bydź większé od linii prostéy A; potrzeba z liniy prostych równych liniióm prostym A, B, C, wykréślić tróykąt.

Poprowadźmy liniią prostą DE, zakończoną z jednéy strony w punkcie D, z drugiéy zaś strony ku E, nie ograniczoną; na niéy odetniéymy liniią prostą DF, równą linii prostéy A, (III. I.) i liniią prostą FG, równą linii prostéy B, i liniią prostą GH, równą linii prostéy C, ze śrzodka F, długością równą linii prostéy FD, zakréślmy (III. żąd.) koło DKL; i znowu ze śrzodka G, długością równą linii prostéy GH, zakréślmy inné koło KLH, poprowadźmy oraz liniie prosté KF, KG. Powiadam, że z trzech liniy prostych równych liniióm prostym A, B, C, wykréślony iest tróykąt KFG.

Ponieważ punkt F, śrzodkiém iest koła DKL, będzie liniia prostá FD, równá linii FK, (XV. d.) lecz liniia prostá FD, iest równá linii prostéy A, więc liniia prostá FK, iest równá linii prostéy A; i znowu ponieważ punkt G, śrzodkiém iest koła LKH, będzie liniia prostá GH, równá linii prostéy GK, lecz liniia prostá GH, iest równá linii prostéy C, zatém i liniia prostá GK, będzie równá linii prostéy C, iest zaś i liniia prostá FG, równá linii prostéy B; trzy więc liniie prosté KF, FG, GK, są równé trzém liniióm prostym A, B, C. Z trzech zatém liniy prostych KF, FG, GK, równych trzém danym liniióm prostym A, B, C, wykréślony iest tróykąt KFG. Co było do rozwiązaniá.

PODANIE XXIII.

ZAGADNIENIE.

Na danéy linii prostéy, i przy punkcie na niéy danym wykréślić kąt prostokréślny, równy kątowi prostokréślnému danému. Fig: 40.

Niech będzie daná liniia prostá AB, dany zaś na niéy punkt A, i dany kąt prostokréślny DCE; potrzeba na danéy linii prostéy AB, i przy punkcie na niéy danym A, wykréślić kąt prostokréślny równy kątowi prostokréślnému danemu DCE.

Weźmy na liniiach prostych CD, CE, punkta gdziekolwiek D, E, i poprowadźmy liniią prostą DE; z trzech zaś liniy prostych równych trzém liniióm prostym CD, DE, EC, wykreślmy tróykąt AFG, (XXII. I.) tak: żeby liniia prostá CD, była równá linii prostéy AF, i liniia prostá CE, była równá linii prostéy AG, i liniia prostá DE, była równá linii prostéy FG.

Ponieważ więc dwie liniie prosté DC, CE, są równé dwóm liniióm prostym FA, AG, iedna drugiéy, i podstawa DE, iest równá podstawie FG; będzie kąt DCE, równy kątowi FAG, (VIII. I.) Na danéy więc linii prostéy AB, i przy danym na niéy punkcie A, danému kątowi prostokréślnému DCE, wykréślony iest równy kąt prostokréślny FAG. C. B. d. R.

PODANIE XXIV.

TWIERDZENIE.

Jeżeli dwa boki iednégo tróykąta, są równé dwóm bokóm drugiégo tróykąta, z kątów zaś między bokami równémi zawartych iedén większy iest od drugiégo; będzie też i podstawa iednégo tróykąta, większá od podstawy drugiégo tróykąta. Fig: 41.

Niech będą dwa tróykąty ABC, DEF, w których dwa boki AB, AC, są równé dwóm bokóm DE, DF, iedén drugiému, toiest: że bok AB, równy iest bokowi DE, bok zaś AC, równy bokowi DF; lecz niech kąt BAC, większy będzie od kąta EDF; powiadam, że podstawa BC, większá iest od podstawy EF.

Na linii prostéy DE, mnieyszéy od linii prostéy DF, wykréślmy przy punkcie D, kąt EDG, równy kątowi BAC, (XXIII. I.) uczyńmy liniią prostą DG, równą każdéy z dwóch liniy prostych AC, DF, (III. I.) i poprowadźmy liniie prosté EG, GF.

Ponieważ liniia prostá AB, równá iest linii prostéy DE, i liniia prostá AC, równá linii prostéy DG, są dwie liniie prosté BA, AC, równé dwóm liniióm prostym ED, DG, iedna drugiéy; iest i kąt BAC, równy kątowi EDG; podstawa więc BC, iest równá podstawie EG, (IV. I.) znowu: ponieważ liniia prostá DG, równá iest linii prostéy DF, iest kąt DFG, równy kątowi DGF; (V. I.) większy zaś iest kąt DGF, od kąta EGF, będzie więc kąt DFG, większy od kąta EGF, nierównie więc kąt EFG, większy iest od kąta EGF, i ponieważ w tróykącie EFG, kąt EFG, większy iest od kąta EGF, większému zaś kątowi przeciwległy iest bok większy; (XIX. I.) będzie bok EG, większy od boku EF, lecz bok EG, równy iest bokowi BC, więc i bok BC, większy będzie od boku EF. Jeżeli zatém dwa boki iednégo tróykąta etc: etc: C. B. d. D.

PODANIE XXV.

TWIERDZENIE.

Jeżeli dwa boki iednégo tróykąta, są równé dwóm bokóm drugiégo tróykąta, lecz podstawa iednégo tróykąta większá iest od podstawy drugiégo tróykąta; będzie i z kątów między bokami równémi zawartych iedén większy od drugiégo. Fig: 42.

Niech będą dwa tróykąty ABC, DEF, w których boki AB, AC, są równé dwóm bokóm DE, DF, iedén drugiému, toiest że bok AB, iest równy bokowi DE, i bok AC, równy bokowi DF; podstawa zaś BC, niech będzie większą od podstawy EF, powiadam: że i kąt BAC, większy iest od kąta EDF.

Jeżeli bowiem kąt BAC, nie iest większy od kąta EDF, albo kąt BAC, iest równy kątowi EDF, albo iest mnieyszy od kąta EDF. Nie iest zaś kąt BAC, równy kątowi EDF, byłaby albowiem i podstawá BC, równá podstawie EF, (IV. I.) a nie iest podstawa BC, równá podstawie EF; nie iest zatém kąt

BAC, równy kątowi EDF, lecz kąt BAC, ani iest mnieyszym od kąta EDF, bo i podstawa BC, byłaby mnieyszą od podstawy EF, (XXIV. I.) dlá czego i kąt BAC, nie iest mnieyszym od kąta EDF, a dowiedliśmy: że kąt BAC, ani iest równy kątowi EDF; kąt więc BAC, większy będzie od kąta EDF. Jeżeli zatém dwa boki iednégo tróykąta etc: etc: C. B. d. D.

PODANIE XXVI.

TWIERDZENIE.

Jeżeli dwa kąty iednégo tróykąta są równé dwóm kątóm drugiégo tróykąta i bok iedén przyległy obudwóm kątóm, albo iednému w piérwszym tróykącie równa się bokowi iednému przyległému obudwóm kątóm, albo iednému w drugim tróykącie; będą i dwa boki pozostałé równé dwóm bokóm pozostałym, i kąt trzeci w jednym tróykącie będzie równy kątowi trzeciému w drugim tróykącie. Fig: 43. i 44.

Niech będą dwa tróykąty ABC, DEF,

których w pierwszym ABC, dwa kąty ABC, BCA, są równé dwóm kątóm DEF, EFD, w tróykącie drugim DEF, iedén drugiému, toiest: że kąt ABC, równy iest kątowi DEF, kąt zaś BCA, równy kątowi EFD, i niech bok iedén będzie równy bokowi iednému; a naprzód przyległy kątóm równym, toiest: niech bok BC, będzie równy bokowi EF; powiadam: że i pozostałé boki są równe pozostałym bokóm iedén drugiému, toiest bok AB, że iest równy bokowi DE, a bok AC, równy bokowi DF, i że kąt trzeci BAC, iest równy trzeciému kątowi EDF.

Jeżeli bowiem liniia prostá AB, iest nie rówwná linii prostéy DE, iedna z nich iest większą od drugiéy. Niech będzie większá liniia prostá AB, na któréy odetniéymy liniią prostą BG, równą linii prostéy DE, i poprowadźmy liniią prostą GC. Ponieważ liniia prostá BG, iest równą linii prostéy DE, i liniia prostá BC, iest równá linii prostéy EF, są dwie liniie prosté GB, BC, równé dwóm liniióm prostym DE, EF, iedna drugiéy; i kąt GBC, iest równy kątowi DEF: podstawa przeto GC, iest równá podstawie DF, (IV. I.) i tróykąt GBC, równy tróykątowi DEF, i pozostałé kąty, równé pozostałym, między bokami równémi zawartym kątóm, iedén drugiému; więc kąt GCB, iest równy kątowi DFE; lecz kąt DFE, z założéniá iest równy kątowi BCA; dlá czégo i kąt BCG, równy iest kątowi BCA, mnieyszy większému, co bydź nié może; nie iest przeto liniia prostá AB, nié równą linii prostéy DE, a zatém liniia prostá AB, iest równą linii prostéy DE, iest zaś i liniia prostá BC, równá linii prostéy EF, dwie więc liniie prosté AB, BC, są równé dwóm liniióm prostym DE, EF, iedna drugiéy i kąt ABC, iest równy kątowi DEF, zaczém podstawa AC, iest równá podstawie DF, i pozostały kąt BAC, iest równy pozostałému kątowi EDF.

Niech znowu boki przyległé, iednému z kątów równych będą w obudwóch tróykątach równé, toiest: niech bok AB, będzie równy bokowi DE, powiadam: że i pozostałé boki są równé pozostałym bokóm toiest: bok AC, bokowi DF, i bok BC, bo-

4

kowi EF, i ieszcze kąt pozostały BAC, iest równy kątowi pozostałému EDF.

Jeżeli bowiém liniia prostá BC, iest nie równą linii prostéy EF, iedna z nich większą iest od drugiéy. Niech będzie większą liniia prostá BC, na któréy odetniymy linią prostą BH, równą linii prostéy EF, i poprowadźmy liniią prostą AH. Ponieważ liniia prostá BH, iest równá linii prostéy EF, liniia zaś prostá AB, iest równą linii prostéy DE, są dwie liniie prosté AB, BH, równé dwóm liniióm prostym DE, EF, iedna drugiéy, i zawiéraią kąty równé. Podstawa więc AH, iest równá podstawie DF, i tróykąt ABH, iest równy tróykątowi DEF, i pozostałé kąty będą równé pozostałym między bokami równémi zawartym kątóm iedén drugiému. Kąt zatém BHA, równy iest kątowi EFD, lecz kąt EFD, z założéniá iest równy kątowi BCA; więc i kąt BHA, iest równy kątowi BCA, toiest tróykąta AHC, kąt zewnętrzny BHA, iest równy kątowi wewnętrznému i przeciwległému BCA, co bydź nié może (XVI. I.) nie iest przeto bok BC, nie równy bokowi EF, a zatém iest bok BC, równy bokowi EF; iest zaś i bok AB, równy bokowi DE; dwie więc liniie prosté AB, BC, są równé dwóm liniióm prostym DE, EF, iedna drugiéy, i zawiéraią kąty równé; zaczém podstawa AC, iest równá podstawie DF, i pozostały kąt BAC, iest równy pozostałému kątowi EDF. Jeżeli więc dwa kąty iednégo tróykąta etc. etc. C. B. d. D.

PODANIE XXVII.

TWIERDZENIE.

Jeżeli na dwie liniie prosté padaiąc liniia prostá czyni kąty naprzemian równé między sobą; té dwie liniie prosté będą równoodległé. Fig. 45.

Niechay liniia prostá EF, padaiąc na dwie liniie prosté AB, CD, czyni kąty naprzemian AEF, EFD, równé między sobą; powiadam: że liniia prostá AB, iest równoodległą, względém linii prostéy CD.

Jeżeli bowiém liniie prosté AB, CD, nie są równoodległé, przedłużoné zniydą się albo ze strony BD, albo ze strony AC. Przedłużmy i przypuśćmy, że się zniydą zestrony BD, w punkcie G; przeto tróykąta GEF, kąt zewnętrzny AEF, większy iest od wewnętrznégo przeciwległégo EFG, (XVI. I.), lecz z założénia iest kąt AEF, równy kątowi EFG, co bydź nié może, liniie zatém prosté AB, CD, przedłużoné ze strony BD, nie zeydą się. Podobnież dowiedziemy: że liniie prosté AB, CD, przedłużoné nie zeydą się z strony AC. Które zaś liniie prosté z obudwóch stron przedłużoné nie schodzą się, té są równoodległé (XXXV. def.) więc liniie prosté AB, CD, są równoodległé. Jeżeli zatém na dwie liniie prosté etc. etc. C. B. d. D.

PODANIE XXVIII.

TWIERDZENIE.

Jeżeli liniia prostá padaiąc na dwie liniie prosté, czyni kąt zewnętrzny, równy kątowi wewnętrznému przeciwległému, i po iedney stronie położonému; lub ieżeli czyni kąty wewnętrzné i po iednéy stronie położoné, równé dwóm kątóm prostym; té dwie liniie prosté, będą względém siebie równoodległé. Fig. 46.

Niechay liniia prostá EF, padaiąc na dwie liniie prosté AB, CD, czyni kąt zewnętrzny EGB, równy kątowi wewnętrznému, przeciwległému, i po iednéy stronie położonému GHD; lub kąty wewnętrzné, po iednéy stronie położoné BGH, GHD, równé dwóm kątóm prostym, powiadam: że liniia prostá AB, iest równoodległą względém linii prostéy CD.

Ponieważ kąt EGB, równy iest kątowi GHD, kąt zaś EGB, równy iest kątowi AGH, (XV. I.) będzie i kąt AGH, równy kątowi GHD; a są kątami naprzemian; liniia więc prostá AB, iest równoodległá względém linii prostéy CD, (XXVII. I.). Znowu ponieważ kąty BGH, GHD, są równé z założéniá dwóm kątóm prostym; i kąty AGH, BGH, są téż równé dwóm kątóm prostym (XIII. I.); będą kąty AGH, BGH, równé kątóm BGH, GHD, odiąwszy kąt spólny BGH; iest pozostały kąt AGH, równy pozostałému kątowi GHD, a są kątami naprzemian, więc liniia prostá AB, iest równoodległą, względém linii prostéy CD. Jeżeli zatém liniia prostá etc. etc. C. B. d. D.

PODANIE XXIX.

TWIERDZENIE.

Jeżeli liniia prostá padá na dwie linie prosté równoodległé; czyni kąty naprzemian między sobą równé, i kąt zewnętrzny równy kątowi wewnętrznému przeciwległému, po iednéy stronie położonému, i kąty wewnętrzné po iednéy stronie położoné równé dwóm kątóm prostym. Fig. 46.

Niechay liniia prostá EF, padá na dwie

liniie prosté równoodległé AB, CD; powiadam: że kąty naprzemian AGH, GHD, będą między sobą równé: że kąt zewnętrzny EGB, będzie równy kątowi wewnętrznému przéciwległému, i po iednéy stronie położonému GHD, i że kąty wewnętrzné po iednéy stronie położoné BGH, GHD, będą równé dwóm kątóm prostym.

Jeżeli bowiém kąt AGH, iest nie równy kątowi GHD, iedén z nich iest większy od drugiégo; niech kąt AGH, większy będzie od kąta GHD. Ponieważ kąt AGH, większy iest od kąta GHD, przydawszy kąt spólny BGH, będą kąty AGH, BGH, większé od kątów BGH, GHD; lecz kąty AGH, BGH, są równé dwóm kątóm prostym (XIII. I.); więc kąty BGH, GHD, są mnieyszé od dwóch kątów prostych. Któré zaś liniie prosté czynią z jnną liniią prostą kąty wewnętrzné po iednéy stronie położoné mnieyszé od dwóch kątów prostych, té dwie liniie prosté przedłużoné schodzą się z sobą (XII. pew. zobacz notę); więc liniie prosté AB, CD, przedłużoné zeydą się z sobą, lecz się nie schodzą, są bowiém z założéniá równoodległé; nie iest przeto kąt AGH, nie równy kątowi GHD, iest więc kąt AGH, równy kątowi GHD. Kąt zaś AGH, równy iest kątowi EGB (XV. I.); więc i kąt EGB, będzie równy kątowi GHD, przydawszy kąt spólny BGH; będą kąty EGB, BGH, równé kątóm BGH, GHD, lecz kąty EGB, BGH, równé są dwóm kątóm prostym zaczém i kąty BGH, GHD, są równé dwóm kątóm prostym. Jeżeli więc liniia prostá etc. etc. C. B. d. D.

PODANIE XXX.

TWIERDZENIE.

Liniie prosté równoodległé względém téyże saméy linii prostéy; są równoodległé i względém siebie. Fig. 47.

Niech z dwóch liniy prostych AB, CD, będzie każdá równoodległą względém linii prostéy EF, powiadam: że i liniia prostá AB, iest równoodległą względém linii prostéy CD.

Niechay na té liniie prosté padá liniia prostá GHK. Ponieważ na liniie prosté równoodległé AB, EF, padá liniia prostá GK, iest kąt AGH, równy kątowi GHF, (XXIX. I.), i znowu ponieważ na liniie prosté równoodległé EF, CD, padá liniia prostá GK, kąt GHF, iest równy kątowi GKD, iest zaś z okazaniá i kąt AGK, równy kątowi GHF: więc i kąt AGK, równy będzie kątowi GKD, a są kątami naprzemian; liniia przeto prostá AB, iest równoodległą względém linii prostéy CD, (XXVII. I.). Liniie więc prosté etc. etc. Co było do dowodzéniá.

PODANIE XXXI.

ZAGADNIENIE.

Poprowadzić przez punkt dany liniią prostą, względém danéy linii prostéy równoodległą. Fig. 48.

Niech będzie dany punkt A, daná zaś liniia prostá BC, potrzeba przez punkt A, do linii prostéy BC, poprowadzić liniią równoodległą.

Weźmy na linii prostéy BC, punkt gdziekolwiek D, poprowadźmy liniią prostą AD; a na téyże linii prostéy DA, i przy punkcie na niéy A, wykréślmy kąt DAE, równy kątowi ADC, (XXIII. I.) przedłużmy oráz liniią prostą AE, ku F.

Ponieważ liniia prostá AD, padaiąc na dwie liniie prosté BC, EF, czyni kąty naprzemian EAD, ADC, między sobą równé, będzie liniia prostá EF, równoodległą do linii prostéy BC, (XXVII. I.). Przez dany więc punkt A, poprowadzoná iest liniia prostá EAF, równoodległá względém danéy linii prostéy BC. C. B. d. R.

PODANIE XXXII.

TWIERDZENIE.

W każdym tróykącie przedłużywszy bok iedén, kąt zewnętrzny iest równy dwóm wewnętrznym sobie przeciwległym; a trzy kąty wewnętrzné tróykąta są równé dwóm kątóm prostym. Fig. 49.

Niech będzie tróykąt ABC, przedłużmy iedén iego bok BC, do D; powiadam: że kąt zewnętrzny ACD, iest równy dwóm wewnętrznym sobie przeciwległym CAB, ABC; i że trzy kąty wewnętrzné ABC, BCA, CAB, są równé dwóm kątóm prostym.

Przez punkt C, poprowadźmy do linii prostéy AB, liniią równoodległą (XXXI. I.) CE, ponieważ liniia prostá AB, iest równoodległą do linii prostéy CE, a na té dwie liniie równoodległé padá liniia prostá AC, są kąty naprzemian BAC, ACE, równé między sobą (XXIX. I.). J znowu ponieważ liniia prostá AB, równoodległá iest względém linii prostéy CE, a na té dwie liniie równoodległé padá liniia prostá BD, iest kąt zewnętrzny ECD, równy kątowi wewnętrznému przeciwległému ABC, z okazaniá zaś iest kąt ACE, równy kątowi BAC; dlá czego cały kąt zewnętrzny ACD, iest równy dwóm kątóm wewnętrznym przeciwległym CAB, ABC, przydawszy kąt spólny ACB; są kąty ACD, ACB, równé trzém kątóm CBA, BAC, ACB; lecz kąty ACD, ACB, są równé dwóm kątóm prostym (XIII. I.) więc i kąty CBA, BAC, ACB, są równé dwóm kątóm prostym. W każdym więc tróykącie przedłużywszy etc. etc. C. B. d. D.

Wniosek. I. Wszystkié kąty wewnętrzné iakiéykolwiek figury prostokréślnéy razém wzięté, wraz z cztéréma kątami prostémi, czynią dwa razy tylé kątów prostych, ilé iest boków w figurze prostokréślnéy. Fig. 50.

Każdá bowiém figura prostokréślná ABCDE, może być rozdzieloná na tylé tróykątów, ilé figura prostokréślná ma boków przez poprowadzénié liniy prostych z punktu F, wewnątrz figury do wszystkich kątów téyże figury. W tróykątach zaś wszystkié kąty podług podaniá poprzedzaiącégo, równé są dwóm kątóm prostym, tylé razy wziętym, ilé iest tróykątów, toiest: ilé iest boków figury, a wszystkié té kąty są równé kątóm figury wráz z kątami przy punkcie F, spólnym wierzchołku tróykątów, toiest wraz z cztéréma kątami prostémi (II. w. XV. I.) więc wszystkié kąty figury, wraz z cztéréma kątami prostémi, równé są dwóm kątóm prostym tylé razy powtórzonym, ilé iest boków figury prostokréślnéy.

Wniosek. II. Wszystkié kąty zewnętrzné iakiéykolwiek figury prostokréślnéy równé są cztérém kątóm prostym. Fig. 51.

Kąt albowiém wewnętrzny ABC, wraz z przyległym sobie kątém zewnętrznym ABD, równy iest dwóm kątóm prostym; więc wszystkié kąty wewnętrzné, wraz z kątami zewnętrznémi są równé dwóm kątóm prostym tylé razy powtórzonym, ilé iest boków figury, toiest podług wniosku poprzedzaiącégo, są równé wszystkim kątóm wewnętrznym figury wraz z cztéréma kątami prostémi. Zewnętrzné więc kąty są równé cztérém kątóm prostym.

PODANIE XXXIII.

TWIERDZENIE.

Liniie prosté łączącé z jednéy strony końce liniy prostych równych i równoodległych, są téż równé i równoodległé względém siebie. Fig: 52.

Niech będą liniie prosté AB, CD, równé, i równoodległe, i niech końce tychże liniy z jednéy strony połączoné będą liniiami prostémi AC, BD, powiadam: że liniie prosté AC, BD, będą równé i równoodległé względém siebie.

Poprowadźmy liniią prostą BC, ponieważ liniia prostá AB, iest równoodległą względém linii prostéy CD, i na téż liniie prosté, padá liniia prostá BC, są kąty naprzemian ABC, BCD, równé (XXIX. I.) i ponieważ liniia prostá AB, iest równá linii prostéy CD, spólną zaś iest liniia prostá CB, są dwie liniie prosté AB, BC, równé dwóm liniióm prostym DC, CB; i kąt ABC, równy iest kątowi BCD, podstawa więc AC, równá iest podstawie BD, (IV. I.) i tróykąt ABC, równy tróykątowi BCD, i pozostałé kąty będą równé pozostałym między bokami równémi zawartym kątóm, iedén drugiému, kąt zatém ACB, iest równy kątowi CBD, że zaś liniia prostá BC, padaiąc na dwie liniie prosté AC, BD, czyni kąty naprzemian ACB, CBD, równé między sobą, są té dwie liniie prosté AC, BD, równoodległé (XXVII. I.); i okazały się bydź także równémi. Liniie więc prosté łączące etc: etc: C. B. d. D.

PODANIE XXXIV.

TWIERDZENIE.

W równoległobokach boki i kąty przeciwné są między sobą równé; a przekątná dzieli ié na dwie równé części. Fig 52.

Niech będzie równoległobok ABCD, którégo przekątná iest liniia prostá BC, powiadam: że boki i kąty przeciwné równoległoboku ABCD, są między sobą równé; i przekątná BC, dzieli ténże równoległobok ABCD, na dwie równé części.

Ponieważ liniia prostá AB, iest równoodległą względém linii prostéy CD, i padá na téż liniie równoodległé, liniia prostá BC, są kąty naprzemian ABC, CBD, równé między sobą (XXIX. I.) i znowu; ponieważ liniia prostá AC, iest równoodległą względém linii prostéy BD, a padá na téż liniie równoodległé liniia prostá BC, są kąty naprzemian ACB, CBD, równé między sobą, są przeto dwa tróykąty ABC, CBD, które maią dwa kąty ABC, BCA, równé dwóm kątóm BCD, CBD, iedén drugiému, i bok iedén przyległy kątóm równym

BC, spólny w obudwóch tróykątach, dlá czego i pozostałé boki, będą równé pozostałym bokóm, i pozostały kąt będzie równy pozostałému kątowi (XXVI. I.), bok zatém AB, równy iest bokowi CD, bok zaś AC, równy bokowi BD, i kąt BAC, równy kątowi BDC, a ponieważ kąt ABC, iest równy kątowi BCD, i kąt CBD, równy kątowi ACB, będzie cały kąt ABD, równy całému kątowi ACD; dowiedliśmy zaś że i kąt BAC, równy iest kątowi BDC; w równoległobokach więc boki i kąty przeciwné są między sobą równé. Powiadam: że i przekątná dzieli ié na dwie równé części, ponieważ albowiém liniia prostá AB, iest równá linii prostéy CD, i spólną iest liniia prostá BC; są dwie liniie prosté AB, BC, równé dwóm liniióm prostym DC, CB, iedna drugiéy; i kąt ABC, iest równy kątowi BCD, tróykąt więc ABC, będzie równy tróykątowi BCD, (IV. I.), a zatém przekątná BC, dzieli równoległobok ACDB, na dwie równé części C. B. d. D.

PODANIE XXXV.

TWIERDZENIE.

Równoległoboki wystawioné na téyże saméy podstawie i w tychże samych liniiach równoodległych zakończoné, są między sobą równé.

Niech będą równoległoboki ABCD, EBCF, na téyże saméy podstawie BC, wystawioné, i w tychże samych liniiach równoodległych AF, BC, zakończoné, powiadam: że równoległobok ABCD, równy iest równoległobokowi EBCF. Fig. 53.

Jeżeli bowiém w równoległobokach ABCD, EBCF, boki AD, DF, przeciwné podstawie BC, zakończoné będą w tymże samym punkcie D, oczywistá iest: że kazdy z równoległoboków podwóyny będzie tróykąta BDC, (XXXIV. I.); dlá czego téż równoległoboki będą między sobą równé.

Lecz niech w równoległobokach ABCD, EBCF, boki AD, EF, przeciwné podstawie BC, nie będą w tymże samym punkcie zakończoné; ponieważ czworokąt ABCD, iest równoległobokiém, iest bok AD, równy bokowi BC: dlá téy saméy przyczyny i bok EF, iest równy bokowi BC, dlá czego i bok AD, równy będzie bokowi EF (I. p.), a spólną iest liniia prostá DE; całá więc lub pozostałá liniia prostá AE, iest równá całéy lub pozostałéy linii prostéy DF, (II. III. p.) iest zaś i liniia prostá AB, równá linii prostéy DC; zatém dwie liniie prosté EA, AB, są równé dwóm liniom prostym, FD, DC, iedna drugiéy; i kąt FDC, równy iest kątowi EAB, zewnętrzny wewnętrznému (XXIX. I.) podstawa przeto EB, równá iest podstawie FC, i tróykąt EAB, równy tróykątowi (IV. I.) FDC, odiąwszy tróykąt FDC, od różnoboku ABCF, i z tegoż różnoboku, odiąwszy tróykąt EAB, będzie pozostały równoległobok ABCD, równy pozostałému równoległobokowi EBCF, (III. p.). Równoległoboki więc wystawioné na téyże saméy podstawie etc: etc: C. B. d. D.

PODANIE XXXVI.

TWIERDZENIE.

Równoległoboki wystawioné na równych podstawach, i w tychże samych liniiach równoodległych zakończoné, są między sobą równé. Fig: 54.

Niech będą równoległoboki ABCD, EFGH, wystawioné na równych podstawach BC, FG, i w tychże samych liniiach równoodległych AH, BG, zakończoné; powiadam: że równoległobok ABCD, równy iest równoległobokowi EFGH.

Poprowadźmy liniie prosté BE, CH, ponieważ liniia prostá BC, iest równá linii prostéy FG, a liniia prostá FG, iest równá linii prostéy EH, (XXXIV. I.), będzie i liniia prostá BC, równá linii prostéy EH, są oráz té liniie prosté i równoodległé, a końce ich połączoné są liniiami prostémi BE, CH, liniie zaś prosté łączącé z iednéy strony końce liniy prostych i równoodległych, są równé i równoodległe względém siebie (XXXIII. I.)

przeto liniie prosté EB, CH, są równé i równoodległé względém siebie; iest zatém czworokąt EBCH, równoległobokiém i równym równoległobokowi ABCD, (XXXV. I.) tęż samę bowiém má z nim podstawę BC, i w tychże samych liniiach równoodległych BC, AD, iest zakończony, dlá téy saméy przyczyny i równoległobok EFGH, iest témuż samému równoległobokowi EBCH, równy. Więc i równoległobok ABCD, iest równy równoległobokowi EFGH. Równoległoboki przeto wystawioné na równych podstawach etc. etc. C. B. d. D.

PODANIE XXXVII.

TWIERDZENIE.

Tróykąty wystawioné na téyżé saméy podstawie i w tychże samych liniiach równoodległych zakończoné, są między sobą równé. Fig. 55.

Niech będą tróykąty ABC, DBC, wystawioné na téyże saméy podstawie BC, i w tychże samych liniiach równoodległych AD, BC, zakończoné, powiadam: że tróykąt ABC, iest równy tróykątowi DBC.

Przedłużmy z obudwóch stroń liniią prostą AD, ku punktóm E, F, a przez punkt B, poprowadźmy liniią rownoodległą BE, do linii prostéy CA; przez punkt zaś C, liniią CF, równoodległą do linii prostéy BD, (XXXI. I.); każdy więc z dwóch czworokątów EBCA, DBCF, iest równoległobokiém; i równoległobok EBCA, równy iest równoległobokowi DBCF (XXXV. I.); stoią bowiém na téyże samey podstawie BC, i są w tychże samych liniiach równoodległych BC, EF, zakończoné, iest zaś tróykąt ABC, połową równoległoboku EBCA, bo przekątná AB, dzieli go na dwie równé części; i tróykąt DBC, iest połową równoległoboku DBCF, (XXXIV. I.) przeciná go bowiém przekątná DC, na dwie równé części, a równych wielkości połowy są między sobą równé (VII. p.); przeto tróykąt ABC, iest równy tróykątowi DBC. Tróykąty więc wystawioné na téyże saméy podstawie etc. etc. C. B. d. D.

PODANIE XXXVIII.

TWIERDZENIE.

Tróykąty wystawioné na równych podstawach, i w tychże samych liniiach równoodległych zakończoné, są między sobą równé. Fig. 56.

Niech będą tróykąty ABC, DEF, na równych podstawach, BC, EF, wystawioné, i w tychże samych liniiach równoodległych BF, AD, zakończoné, powiadam: że tróykąt ABC, równy iest tróykątowi DEF.

Przedłużmy liniią prostą AD, z obudwóch stroń ku punktóm G, H, przez punkt B, poprowadźmy liniią prostą BG, równoodległą względém linii prostéy CA, przez punkt zaś F, poprowadźmy liniią prostą FH, równoodległą względém linii prostéy ED (XXXI. I.). Czworokąty GBCA, DEFH, będą równoległobokami; i iest równoległobok GBCA, równy równoległobokowi DEFH (XXXVI. I.); stoią bowiém na równych podstawach BC, EF, i są w tychże samych liniiach równoodległych BF, GH, zakończoné; równoległoboku zaś GBCA, połową iest tróykąt ABC, bo przekątná AB, dzieli go na dwie równé części; i równoległoboku DEFH, połową iest tróykąt DEF, (XXXIV. I.) przekątná bowiém DF, dzieli go na dwie równé części; a równych wielkości połowy są między sobą równé (VII. p.); więc tróykąt ABC, równy iest tróykątowi DEF. Tróykąty zatém na równych podstawach etc. etc. C. B. d. D.

PODANIE XXXIX.

TWIERDZENIE.

Tróykąty równé, na téyże samėy podstawie, i z jednéy strony téyże podstawy wystawioné, są w tychże samych liniiach równoodległych zakończoné, Fig. 57.

Niech będą równé tróykąty ABC, DBC, wystawioné na téyże saméy podstawie BC, i z jednéy strony téyże podstawy BC; powiadam: że tróykąty ABC, DBC, są w tychże samych liniiach równoodlégłych zakończoné.

Poprowadźmy liniią prostą AD, powiadam: że liniia prostá AD, iest równoodległą względém linii prostéy BC; ieżeli bowiém liniia prostá AD, nie iest równoodległą względém linii prostéy BC, poprowadźmy przez punkt A, liniią prostą AE, równoodległą względém linii prostéy BC, (XXXI. I.) i poprowadźmy nadto liniią prostą EC. Tróykąt ABC, iest równy tróykątowi EBC, (XXXVII. I.) stoią bowiém na téyże podstawie BC, i są w tychże samych liniiach równoodległych BC, AE, zakończoné; lecz tróykąt ABC, równy iest tróykątowi DBC; więc i tróykąt DBC, iest równy tróykątowi EBC, większy mnieyszému, co bydź nié może. Nie iest przeto liniia prostá AE, równoodległą względém linii prostéy BC, podobnież dowiedziemy: że żadná inná liniia prostá nie iest równoodległą, prócz linii prostéy AD, iest przeto liniia prostá AD, równoodległą względém linii prostéy BC. Tróykąty więc równé etc. etc. C. B. d. D.

PODANIE XL.

TWIERDZENIE.

Tróykąty równé wystawioné na równych podstawach i z jednéy strony tychże podstaw, są w tychże samych liniiach równoodległych zakończoné. Fig. 58.

Niech będą równé tróykąty ABC, DEF, wystawioné na równych podstawach BC, EF, i z jednéy strony tychże podstaw; powiadam: że tróykąty ABC, DEF, są w tychże samych liniiach równoodległych zakończoné.

Poprowadźmy liniią prostą AD, powiadam: że liniia prostá AD, iest równoodległą względém linii prostéy BF. Jeżeli bowiém liniia prostá AD, nie iest równoodległą względém linii prostéy BF, poprowadźmy przez punkt A, liniią prostą AG, (XXXI. I.) równoodległą względém linii prostéy BF, i poprowadźmy ieszcze liniią prostą GF; tróykąt ABC, iest równy tróykątowi GEF, (XXXVIII. I). stoią bowiém na równych podstawach BC, EF, i są w tychże samych liniiach równoodległych BF, AG, zakończoné; lecz tróykąt ABC, równy iest tróykątowi DEF; więc i tróykąt DEF, równy będzie tróykątowi GEF, większy mnieyszému; co bydź nié może, nie iest przeto liniia prostá AG, równoodległą względém linii prostéy BF; podobnież okażemy że żadna inná liniia prostá nie iest równoodległą prócz linii prostéy AD, iest przeto liniia prostá AD, równoodległą względém linii prostéy BF. Tróykąty więc równé wystawioné etc. etc. C. B. d. D.

PODANIE XLI.

TWIERDZENIE.

Jeżeli równoległobok i tróykąt maią tęż samę podstawę, i są w tychże samych liniiach równoodległych zakończoné; tróykąt iest połową równoległoboku. Fig. 59.

Niechay rownoległobok ABCD, i tróykąt EBC, maią tęż samę podstawę BC, i niechay będą w tychże samych liniiach równoodległych BC, AE; powiadam: że tróykąt EBC, iest połową równoległoboku ABCD.

Poprowadźmy linią prostą AC; tróykąt ABC, iest równy tróykątowi EBC, (XXXVII. I.) stoią bowiem na téyże samey podstawie BC, i są w tychże samych liniiach równoodległych BC, AE, zakończoné; lecz tróykąt ABC, iest połową równoległoboku ABCD, (XXXIV. I.) przekątná bowiém AC, dzieli go na dwie równé części; dlá czego i tróykąt EBC, będzie połową równoległoboku ABCD. Jeżeli więc równoległobok i tróykąt etc. etc. C. B. d. D.

PODANIE XLII.

ZAGADNIENIE.

Danému tróykątowi wykréślić równy równoległobok, któregoby kąt iedén, był równy kątowi danému. Fig: 60.

Niech będzie dany tróykąt ABC, dany zaś kąt prostokréślny D, potrzeba danému tróykątowi ABC, wykréślić równy równoległobok, któregoby kąt był równy kątowi prostokréślnému D.

Podzielmy bok BC, (X. I.) w punkcie E,

na dwie równé części; poprowadźmy liniią prostą AE, a na linii prostéy EC, i przy punkcie na niéy E, wykréślmy kąt CEF, równy kątowi D, (XXIII. I.) przez punkt zaś A, poprowadźmy liniią prostą AG, równoodległą względém linii prostéy EC, (XXXI. I.) oraz przez punkt C, liniią prostą CG, równoodległą względém linii prostéy EF, czworokąt więc FECG, iest równoległobokiém. Ponieważ liniia prostá BE, równá iest linii prostéy EC, będzie i tróykąt ABE, równy tróykątowi AEC, stoią bowiem na równych podstawach BE, EC, i są w tychże samych liniiach równoodległych BC, AG, zakończoné, więc tróykąt AEC, iest połową tróykąta ABC, iest zaś tróykąt AEC, połową i równoległoboku FECG, maią bowiém tęż samę podstawę i są w tych samych liniiach równoodległych zakończoné, więc równoległobok FECG, równy iest tróykątowi ABC, i ma równoległobok FECG, kąt CEF, równy kątowi danému C, danému zatém tróykątowi ABC, wykréślony iest równy równoległobok FECG, z kątém CEF, równym kątowi danému C. C. B. d. R.

PODANIE XLIII.

TWIERDZENIE.

W każdym równoległoboku, dopełniéniá równoległoboków około przekątnéy położonych, są między sobą równé. Fig. 61.

Niech będzie równoległobok ABCD, którégo przekątną iest liniia prostá AC, a około téy przekątnéy AC, niech będą równoległoboki EH, FG, których dopełniéniá są równoległoboki BK, KD, powiadam: że dopełniénié BK, iest równé dopełniéniu KD.

Ponieważ figura ABCD, iest równoległobokiém, i iego śrzednicą liniia prosta AC, tróykąt ABC, iest równy tróykątowi ADC, znowu, ponieważ figura EKHA, iest równoległobokiém, którégo śrzednicą liniia prostá AK, tróykąt AEK, iest równy tróykątowi AHK, [XXXIV. I.] dlá teyże samey przyczyny i tróykąt KGC, równy iest tróykątowi KFC. Ponieważ więc tróykąt AEK, równy iest tróykątowi AHK, i tróykąt KGC, iest równy tróykątowi KFC; będzie tróykąt AEK, wraz z tróykątém KGC, równy tróykątowi AHK, wraz z tróykątém KFC, iest zaś i cały tróykąt ABC, równy całému tróykątowi ADC; pozostałé więc dopełniénié BK, iest równé pozostałému dopełniéniu KD. W każdym zatém równoległoboku etc. etc. C. B. d. D.

PODANIE XLIV.

ZAGADNIENIE.

Na danéy linii prostéy wykréślić równy tróykątowi danému równoległobok, którégoby kąt iedén był równy kątowi danému. Fig: 62.

Niech będzie daná liniia prostá AB, dany zaś tróykąt C, i dany kąt prostokréślny D, potrzeba na danéy linii prostéy AB, danému tróykątowi C, wykréślić równy równoległobok, którégoby kąt iedén był równy kątowi danému D.

Wykréślmy tróykątowi C, równy równoległobok BEFG, z kątém EBG, równym kątowi D, (XLII. I.) i ustawmy równoległobok BEFG, tak: iżby bok iego BE, był w kierunku i przedłużéniu linii prostéy BA, przedłużmy ieszcze bok FG, do H, a przez punkt A, poprowadźmy liniią prostą AH, równoodległą do każdéy z dwóch liniy prostych BG, EF, (XXXI. I.) poprowadźmy oraz liniią prostą HB.

Ponieważ na liniie równoodległé AH, EF, padá liniia prostá HF, kąty AHF, HFE, są równé dwóm kątóm prostym (XXIX. I.), dlá czego kąty BHF, HFE, są mnieyszé od dwóch kątów prostych, któré zaś liniie prosté z jnną liniią prostą czynią kąty wewnętrzné z jednéy strony mnieyszé od dwóch kątów prostych, téż liniie przedłużoné zeydą się (XII. p.) przeto liniie prosté HB, FE, zeydą się, przedłużmy ie aż do ich zeyściá się w punkcie K, i przez punkt K, poprowadźmy liniią prostą KL, równoodległą do każdéy z dwóch liniy prostych EA, FH, przedłużmy oraz liniie prosté HA, GB, do punktów L, M, czworokąt HLFK, będzie równoległobokiém, którégo przekątną iest liniia prostá HK, około téy przekątnéy HK, są równoległoboki AG, ME, ich zaś dopełniéniami są równoległoboki LB, BF; więc równoległobok LB. iest równy równoległobokowi BF, (XLIII. I.) lecz równoległobok BF, równy iest tróykątowi C; przeto i równoległobok LB, równy będzie tróykątowi C, a ponieważ kąt GBE, równy iest kątowi ABM, (XV. I.) i ténże sam kąt GBE, równy iest kątowi D; będzie i kąt ABM, równy kątowi D. Na danéy więc linii prostéy AB, danému tróykątowi C, wykréślony iest równy równoległobok LB, w kącie ABM, równym kątowi D.

PODANIE XLV.

ZAGADNIENIE.

Wykréślić równy danéy figurze prostokréślnéy równoległobok, którégoby kąt iedén był równy kątowi danému. Fig. 63.

Niech będzie daná figura prostokréślná ABCD, dany zaś kąt prostokréślny E, potrzeba wykréślić równy figurze prostokréślnéy, ABCD, równoległobok w kącie równym kątowi danému E.

Poprowadźmy przekątną DB, i wykréślmy tróykątowi ADB, równy równoległobok FH, (XLII. I.) w kącie HKF, równym kątowi E, a na linii prostéy GH, wystawmy tróykątowi DBC, równy równoległobok GM, w kącie GHM, równym kątowi E, (XLIV. I.), ponieważ kąt E, iest równy każdému z kątów FKH, GHM, będzie kąt FKH, równy kątowi GHM; przydawszy kąt spólny KHG, będą kąty FKH, KHG, równé kątóm KHG, GHM, lecz kąty FKH, KHG, są równé dwóm kątóm prostym (XXIX. I.); więc i kąty KHG, GHM, będą równé dwóm kątóm prostym, ponieważ więc przy linii prostéy GH, i przy punkcie na niéy H, dwie liniie prosté KH, HM, nie po téyże saméy stronie położoné, czynią kąty przyległé, równé dwóm kątóm prostym, będą té dwie liniie prosté KH, HM, w tymże samym kierunku (XIV. I.). A ponieważ na dwie liniie równoodległé KM, FG, padá liniia prostá HG, są kąty naprzemian MHG, HGF, równé; przydawszy spólny HGL; będą kąty MHG, HGL, równé kątóm HGF, HGL, lecz kąty MHG, HGL, są równé dwóm kątóm prostym; dlá czego i kąty HGF, HGL, będą równé dwóm kątóm prostym; dwie zatém liniie prosté FG, GL, są w tymże samym kierunku; a że liniia prostá KF, iest równoodległą względém linii prostéy HG, liniia zaś prostá HG, iest równoodległą względém linii ML, będzie liniia prostá KF, równoodległą względém linii prostéy ML, (XXX. I.); lecz i liniie prosté KM, FL, są równoodległé, czworokąt więc KFLM, iest równoległobokiém, a ponieważ tróykąt ABD, równy iest równoległobokowi HF, tróykąt zaś DBC, równy iest równoległobokowi GM; będzie cała figura prostokréślná ABCD, równa całému równoległobokowi KFLM, danéy więc figurze prostokréślnéy ABCD, wykréślony iest równy równoległobok KFLM, w kącie FKM, równym danému kątowi E. C. B. d.R.

Wniosek. Z rozwiązanych powyżéy zagadnién pokazuie się oczywiście, iakby możná, na danéy linii prostéy wykréślić równy danéy figurze prostokréślnéy równoległobok, w kącie równym kątowi danému, a to przez wystawiénie na danéy linii prostéy równoległoboku równégo piérwszému tróykątowi ABD, i w kącie równym kątowi danému.

PODANIE XLVI.

ZAGADNIENIE.

Na danéy linii prostéy wykréślić kwadrat.

Niech będzie daná liniia prostá AB, potrzeba na linii prostéy AB, wykréślić kwadrat. Fig. 64.

Z końca A, linii prostéy AB, wyprowadźmy do téyże linii prostéy AB, (XI. I.) liniią prostopadłą AC, na niéy odetniymy liniią prostą AD, równą linii prostéy AB (III. I.); przez punkt D, poprowadźmy liniią prostą DE, równoodległą względém linii prostéy AB, (XXXI. I.), a przez punkt B, liniią prostą BE, równoodległą względém linii prostéy AD. Czworokąt więc ADEB, iest równoodległobokiém; w nim przeto liniia prostá AB, iest równá linii prostéy DE, i liniia prostá AD, iest równá linii prostéy BE; lecz liniia prostá BA, równá iest linii prostéy AD, cztéry więc liniie prosté BA, AD, DE, EB, są między sobą równé, i dlá tego równoległobok ADEB, iest równoboczny, iest téż i prostokątny; bo ponieważ na liniie równoodległé AB, DE,

6 *

padá liniia prostá AD, kąty BAD, ADE, są równé dwóm kątóm prostym (XXIX. I.); iest zaś kąt BAD, prosty, więc i kąt ADE, będzie prosty, lecz w równoległobokach boki i kąty przeciwné są między sobą równé; każdy więc z kątów przeciwnych ABE, BED, iest prosty, dlá czego równoległobok ADEB, iest prostokątny; okazaliśmy zaś: że równoległobok ADEB, iest i równoboczny; iest zatém kwadratém, i wykréślonym na danéy linii prostéy AB. C. B. d. R.

Wniosek. Każdy więc równoległobok maiąc iedén kąt prosty iest prostokątny.

PODANIE XLVII.

TWIERDZENIE.

W tróykątach prostokątnych, kwadrat wystawiony z boku przeciwnégo kątowi prostému, równy iest kwadratóm z boków kąt prosty zawiéraiących. Fig. 65.

Niech będzie tróykąt prostokątny ABC, w którym kąt BAC, iest prosty; powiadám: że kwadrat z linii prostéy BC, wykréślony, równy iest kwadratóm wykréślonym z liniy prostych BA, AC.

Wykréślmy na linii prostéy BC, kwadrat (XLVI. I.) BDEC, równie i na liniiach prostych BA, AC, kwadraty GB, HC; przez punkt A, poprowadźmy liniią prostą AL, (XXXI. I.) równoodległą do każdéy z dwóch liniy prostych BD, CE; poprowadźmy oraz liniie prosté AD, FC.

Ponieważ każdy z kątów BAC, BAG, prosty iest, (XXX. d.) przy linii więc prostéy BA, i przy punkcie na niéy A, dwie liniie prosté AC, AG, z obudwóch strón linii prostéy BA, położoné, czynią kąty przyległé równé dwóm kątóm prostym; przeto té dwie liniie prosté CA, AG, są w tymże samym kierunku (XIV. I.) dlá téy saméy przyczyny i liniie prosté AB, AH, są w tymże samym kierunku, a ponieważ kąt DBC, równy iest kątowi FBA, każdy bowiém z nich iest prosty przydawszy kąt spólny ABC, cały kąt DBA, będzie równy całému kątowi FBC, (II. p.) gdy więc dwie liniie prosté AB, DB, są równé dwóm liniióm prostym FB, BC, iedna drugiéy, i kąt DBA, iest równy kątowi FBC, będzie i podstawa AD, równá podstawie FC, i tróykąt ABD, iest równy tróykątowi FBC, (IV. I.), lecz tróykąt ABD, iest połową równoległoboku BL, (XLI. I.) stoią bowiém na téyże saméy podstawie BD, i są w tychże samych liniiach równoodległych BD, AL, zakończoné; tróykąt zaś FBC, połową iest kwadratu GB, bo znowu maią tęż samę podstawę FB, i są w tychże samych liniiach równoodległych FB, GC, zakończoné; a wielkości które są podwóynémi, wielkości równych są między sobą równé (VI. p.); równoległobok więc BL, równy iest kwadratowi GB. Podobnież poprowadziwszy liniie prosté AE, BK, okaże się: że równoległobok CL, równy iest kwadratowi HC; cały przeto kwadrat BDEC, równy iest dwóm kwadratóm GB, HC, lecz kwadrat BDEC, wykréślony iest na linii prostéy BC, kwadraty zaś GB, HC, wykréślone są na liniiach prostych BA, AC, więc kwadrat BE, wykréślony na boku BC, równy iest kwadratóm wykréślonym na bokach BA, AC. W tróykątach zatém prostokréślnych etc. etc. C. B. d. D.

PODANIE XLVIII.

TWIERDZENIE.

Jeżeli kwadrat wykréślony na iednym z boków tróykąta, równy iest kwadratóm wykréślonym na dwóch pozostałych bokach tróykąta; kąt zawarty między dwóma pozostałémi tróykąta bokami, będzie prosty. Fig. 66.

Niechay kwadrat wykréślony na iednym boku BC, tróykąta ABC, równy będzie kwadratóm wykréślonym na dwóch pozostałych tróykąta bokach BA, AC, powiadam: że kąt BAC, iest prosty.

Z punktu A, do linii prostéy AC, wyprowadźmy liniią prostopadłą AD, (XI. I.) daymy iéy długość równą linii prostéy BA, i poprowadźmy liniią prostą DC. Ponieważ liniia prostá DA, równá iest linii prostéy BA, będzie i kwadrat z linii prostéy DA, równy kwadratowi z linii prostéy AB; przydawszy spólny kwadrat z linii prostéy AC, będą kwadraty z liniy prostych DA, AC, równé kwadratóm z liniy prostych DA, AC, Lecz kwadratóm z liniy prostych DA, AC, równy iest kwadrat z linii prostéy DC, (XLVII. I.) kąt albowiém DAC, iest prosty; kwadratóm zaś z liniy prostych BA, AC, równy iest z założéniá kwadrat z linii prostéy BC, kwadrat więc z linii prostéy DC, równy iest kwadratowi z linii prostéy BC, przeto i bok DC, równy iest bokowi CB; a ponieważ liniia prostá DA, równá iest linii prostéy AB, spólną zaś iest liniia prostá AC, są dwie liniie prosté DA, AC, równé dwóm liniióm prostym BA, AC, i podstawa DC, iest równá podstawie BC; kąt zatém DAC, równy iest kątowi BAC, (VIII. I.) iest zaś kąt DAC, prosty, więc i kąt BAC, będzie prosty. Jeżeli więc kwadrat wykréślony etc. etc. Co było do dowodzéniá.

KONIEC XIĘGI PIERWSZEY.

JEOMETRYI EUKLIDESA.

XIĘGA DRUGA.

DEFINICYA PIERWSZA.

Każdy równoległobok prostokątny wyrażá się i wykréślá dwięma liniiami prostémi, kąt prosty obeymuiącémi.

DEFINICYA II.

W równoległoboku poprowadziwszy przekątną i przez punkt gdziekolwiek na téyże przekątnéy obrany, dwie liniie równoodległé do boków równoległoboku; z cztérech części równoległobocznych, na które przez takowé wykréślénié podzieli się równoległobok, każdą z dwóch, któréy przekątną, iest część przekątnéy całégo równoległoboku wziętą z dwiéma iey przyległémi zwać będziémy węgielnicą. Tak część równoległoboczná HG, wraz z częściami iéy przyległémi AF, FC, iest węgielnicą, która dlá skróceniá oznaczá i wymawia się literami AGK, lub EHC, położonémi przy wierzchołkach kątów przeciwnych w równoległobokach składaiących węgielnicę (Gnomon). Fig: 67.

PODANIE I.

TWIERDZENIE.

Jeżeli z dwóch danych liniy prostych podzielimy iednę którąkolwiek na ilékolwiek części (które zwać będziémy odcinkami) równoległobok prostokątny zawarty dwiéma liniiami prostémi, równać się będzie równoległobokóm prostokątnym wykréślonym z linii prostéy nie przeciętéy i z odcinków drugiéy prostéy linii. Fig: 68.

Niech będą dwie liniie prosté A, BC, i niech liniia prostá BC, będzie podzieloną iakokolwiek w punktach D, E, powiadam: że równoległobok prostokątny liniiami prostémi A, BC, zamknięty, równá się równoległobokowi prostokątnému zawartému liniiami prostémi A, BD, i równoległobokowi prostokątnému zawartému liniiami A, DE, i ieszcze równoległobokowi liniiami prostémi A, CE, zawartému.

Wyprowadźmy bowiém z punktu B, do BC, liniią prostopadłą BF, (XI. I.) i na niéy weźmy liniią BG, równą A, (III. I.) nadto przez punkt G, poprowadźmy liniią GH, równoległą do BC, a przez punkta D, E, C, niech będą poprowadzoné liniie DK, EL, CH, równoległé do BG, (XXXI. I.) równoległobok więc prostokątny BH, iest równy równoległobokóm prostok: BK, DL, EH. Jest zaś równoległobok prostokątny BH, zawarty liniiami A, BC, bo się zawiera liniiami GB, BC; a BG, iest równá linii prostéy A; i równoległobok prostok: BK, zawiérá się liniiami A, BD, bo się zamyka liniiami GB, BD, z których GB, iest równá linii A; i równoległobok prostok: DL, iest zawarty liniiami A, DE, bo

DK, toiest BG, (XXXIV. I.) równé iest linii A, i podobnież równoległobok prostokątny EH, zawarty iest liniiami A, EC, równoległobok więc prostokątny liniiami A, BC, zawarty, iest równy równoległobokowi zawartému liniiami A, BD, i zawartému liniiami A, DE, i ieszcze zawartému liniiami A, EC. Jeżeli więc z dwóch danych liniy prostych etc. etc: C. B. d. D.

PODANIE II.

TWIERDZENIE.

Jeżeli liniią prostą podzielimy iakokolwiek, równoległoboki prostokątné zawarté całą liniią i iéy oddzielnémi odcinkami, będą równé kwadratowi z całéy linii. Fig: 69.

Niech będzie liniia prostá AB, podzieloná iakokolwiek w punkcie C, powiadam: że równoległobok prostokątny zawarty liniiami AB, BC, wraz z prostokątnym równoległobokiém liniiami

AB, AC, ograniczonym, iest równy kwadratowi z całéy linii AB.

Wystawiwszy bowiém na linii AB. kwadrat ADEB, (XLVI. I.) i przez punkt C, poprowadziwszy liniią CF, równoległą do AD, BE, (XXXI. I.) będzie kwadrat AE, równy równoległobokóm prostokątnym AF, CE, że kwadrat AE, iest kwadratém z linii AB, równoległobok zaś prostokątny AF, zawarty iest liniiami BA, AC, bo go ograniczaią liniie DA, AC, z których DA, równá się BA, i równoległobok prostokątny CE, zawarty iest liniiami AB, BC, iest bowiém BE, równá AB, więc równoległobok prostokątny zawarty liniiami AB, AC, wraz z równoległobokiém prostokątnym liniiami AB, BC, ograniczonym, iest równy kwadratowi z linii AB. Jeżeli więc liniią prostą podzielimy etc: etc: C. B. d. D.

PODANIE III.

TWIERDZENIE.

Jeżeli liniią prostą podzielimy na dwa iakiékolwiek odcinki, równoległobok prostokątny całą liniią i iednym onéyże odcinkiém zawarty, będzie równy równoległobokowi prostokątnému odcinkami linii prostéy zawartému wráz z kwadratém z odcinka wziętégo za bok drugi równoległoboku prostokątnégo piérwszégo. Fig: 70.

Niech będzie liniia prostá AB, podzieloná iakokolwiek w punkcie C; powiadam: że równoległobok prostokątny zawarty liniiami AB, BC, iest równy równoległobokowi prostokątnému zawartému odcinkami AC, CB, wráz z kwadratém z odcinka BC.

Wystawiwszy bowiém na linii BC, kwadrat CDEB, (LXVI. I.) przedłużmy bok iego ED, do F, i przez punkt A, poprowadźmy liniią AF, równoległą do linii CD, BE, (XXXI. I.) będzie więc AE, równé AD, i CE; a że AE, iest równoległobokiém prostokątnym zawartym liniiami AB, BC, iest bowiém ograniczony liniiami AB, BE, z których liniia BE, iest równá linii BC; AD, zaś iest równoległobokiém prostokątnym ograniczonym liniiami AC, CB, liniia bowiém CD, równá się linii CB, i DB, iest kwadratém z BC. Równoległobok więc prostokątny ograniczony liniiami AB, BC, iest równy równoległobokowi prostokątnému liniiami AC, CB, zawartému, wráz z kwadratém z BC. Jeżeli więc liniią prostą podzielimy etc. etc. Co było do dowodzéniá.

PODANIE IV.

TWIERDZENIE.

Jeżeli liniią prostą podzielimy na dwa iakiékolwiek odcinki, kwadrat z całéy linii będzie równy kwadratóm z obudwóch odcinków linii, i dwa razy wziętému prostokątnému równoległobokowi zawartému odcinkami linii. Fig. 71.

Niech będzie liniia prostá AB, podzieloná iakokolwiek w punkcie C, powiadam: że kwadrat z linii AB, iest równy kwadratóm z odcinków AC, CB, wráz z dwa razy wziętym równoległobokiém prostokątnym odcinkami AC, CB, zawartym.

Wystawiwszy bowiém na linii AB, kwadrat ADEB, poprowadźmy w nim przekątną BD, a przez punkt C, liniią CGF, równoległą do linii AD, BE, iako téż przez punkt G, liniią HGK, równoległą do liniy AB, DE. Ponieważ liniia CF, iest równoległá linii AD, padá zaś na obiedwie liniia BD, będzie kąt zewnętrzny BGC, równy wewnętrznému przeciwległému kątowi ADB, (XXIX. I.) kąt zaś ADB, iest równy kątowi ABD, (V. I.) ponieważ i bok BA, równy iest bokowi AD; zaczém kąt CGB, będzie równy kątowi GBC, i dlá tego bok BC, będzie równy bokowi CG, (VI. I.) iest zaś bok CB, równy bokowi GK, i bok CG, równy bokowi BK, (XXXIV. I.) więc i bok GK, iest równy bokowi KB; czworokąt zatém CGKB, iest równobocznym, iest nadto i prostokątnym; iest bowiém liniia CG, równoległá linii BK, a na nie padá trzeciá liniia CB, kąty więc KBC, GCB, są równé dwóm kątóm prostym, iest zaś kąt KBC, prostym, więc iest prostym i kąt GCB, dlá czégo i kąty tymże przeciwné CGK, BKG, prosté będą. Czworokąt więc CGKB, iest równoległobokiém prostokątnym, dowiódł się zaś bydź wyżéy i równobocznym, iest zatém kwadratém, a kwadratém z odcinka CB. Dlá téy saméy przyczyny i HF, iest kwadratém, a kwadratém z HG, toiest: kwadratém z odcinka AC. HF, więc i CK, są kwadratami z AC, i CB, odcinków linii AB. A ponieważ AG, równoległobok prostokątny, iest równy równoległobokowi prostokątnému GE, (XLIII.I.) i równoległobok prostokątny AG, zawarty iest odcinkami AC, CB, bo GC, iest równá CB; będzie więc i równoległobok prostokątny GE, równy równoległobokowi prostokątnému zawartému odcinkami AC, CB; dlá czego równoległoboki prostokątné AG, GE, są równé dwa razy wziętému równoległobokowi prostokątnému odcinkami AC, CB, zawartému. Są zaś HF, CK, kwadratami z odcinków AC, CB; cztéry więc równoległoboki prostokątné HF, CK, AG, GE, są równé kwadratóm z odcinków AC, CB, i dwa razy wziętému równoległobokowi prostokątnému témiż odcinkami AC, CB, ograniczonému. Lecz HF, CK, AG, GE, składaią kwadrat ADEB, który iest kwadratém z AB; kwadrat więc z AB, równy iest kwadratóm z odcinków AC, CB, wraz z dwa razy wziętym prostokątnym równoległobokiém témiż odcinkami AC, CB, zawartym. Jeżeli więc liniią prostą podzielimy na dwa iakiékolwiek odcinki, kwadrat z całéy linii będzie równy kwadratóm z obudwóch odcinków linii etc. etc. C. B. d. D.

Wniosek. W kwadracie więc dwa równoległoboki prostokątné, których przekątnémi są części przekątnéy kwadratu całégo, są zawsze kwadratami.

PODANIE V.

TWIERDZENIE.

Jeżeli liniią prostą podzielimy na dwa odcinki równé i na dwa odcinki nierówné; równoległobok prostokątny odcinkami nierównémi zawarty wráz z kwadratém z odcinka między podziałami zawartégo, będzie równy kwadratowi z połowy linii. Fig. 72.

Niech będzie liniia prostá AB, podzieloná na równé odcinki w punkcie C, i na nierówné odcinki w punkcie D, powiadam: że prostokątny równoległobok odcinkami nie równémi AD, DB, zawarty wráz z kwadratém z odcinka między podziałami zawartégo CD, iest równy kwadratowi z CB, toiest z połowy linii AB.

Wystawmy bowiém na BC, kwadrat BCEF, (XLVI. I.) i poprowadźmy w nim przekątną EB; przez punkt zaś D, poprowadźmy liniią DHG, równoległą do liniy CE, BF, tak iako i przez punkt H, liniią KLM, równoległą do linii CB, EF; i nakoniec przez punkt A, liniią AK, równoległą do liniy CL, BM, (XXXI. I.); ponieważ równoległobok prostokątny CH, iest równy równoległobokowi prostokątnému HF, (XLIII. I.) przydawszy więc spólnie kwadrat DM, będzie cały równoległobok prostokątny CM, równy całému równoległobokowi prostokątnému DF, a że równoległobok prostokątny CM, iest równy równoległobokowi prostokątnému AL, (XXXVI. I.) iest bowiém liniia AC, równá linii CB, więc téż równoległobok prostokątny AL, iest równy równoległobokowi prostokątnému DF, przydawszy spólnie równoległobok prostokątny CH, będzie cały równoległobok prostokątny AH, równy równoległobokóm prostokątnym DF, CH. Ze zaś równoległobok prostokątny AH, zawarty iest odcinkami nierównémi AD, DB, iest bowiém liniia DH, równá linii DB, (wnios: IV. II.) i równoległoboki prostokątné DF, CH, składaią węgielnicę CMG; węgielnica więc CMG, równá iest równoległobokowi prostokątnému odcinkami nierównémi AD, DB, zawartému. Przydawszy spólnie kwadrat LG, który iest kwadratém z CD; będzie węgielnica CMG, z kwadratém LG, równá równoległobokowi prostokątnému odcinkami nierównémi AD, DB, zawartému wráz z kwadratém z CD. Ze zaś węgielnica CMG, z kwadratém LG, składaią cały kwadrat CEFB, który iest kwadratém z CB, więc prostokąt odcinkami nierównémi AD, DB, zawarty wraz z kwadratém z CD, równy iest kwadratowi z CB. Jeżeli więc liniią prostą podzielimy etc: etc: C. B. d. D.

PODANIE VI.

TWIERDZENIE.

Jeżeli liniią prostą na dwa równé odcinki podzieloną przedłużymy podług upodobaniá, równoległobok prostokątny zawarty liniią prostą wráz z przedłużeniém wziętą, i samém przedłużéniém, wráz z kwadratém z połowy linii; będzie równy kwadratowi wystawionému na połowie linii, wráz z przedłużéniém wziętéy. Fig: 73.

Niech będzie liniia prostá AB, na dwa równé odcinki podzieloną w punkcie C, i przedłużoną podług upodobaniá do D; powiadam: że równoległobok prostokątny liniiami AD, DB, zawarty wraz z kwadratém z linii CB, iest równy kwadratowi z linii CD.

Wystawmy bowiém na CD, kwadrat CEFD, (XLVI. I.) i poprowadźmy w nim przekątną DE; przez punkt zaś B, poprowadźmy liniią BHG, równoległą do liniy CE, DF, a przez punkt H, liniią KLM, równoległą do liniy AD, EF; przez punkt nakoniec A, liniią AK, równoległą do liniy CL, DM, (XXXI. I.), ponieważ liniia AC, iest równá linii CB, będzie i równoległobok prostokątny AL, równy równoległobokowi prostokątnému CH, (XXXVI. I.); a że równoległobok prostokątny CH, iest równy równoległobokowi prostokątnému HF, (XLIII. I.) więc i równoległobok prostokątny AL, będzie równy równoległobokowi prostokątnému HF; przydawszy spólnie równoległobok prostokątny CM, cały równoległobok prostokątny AM, będzie równy węgielnicy CMG. A że równoległobok prostokątny AM, zawarty iest liniami AD, DB, bo liniia DM, iest równá linii DB, (wnios: IV. II.) więc węgielnica CMG, iest równá równoległobokowi prostokątnému liniiami AD, DB, zawartému. Przydawszy spólnie kwadrat LG, który iest kwadratém z CB, będzie równoległobok prostokątny liniiami AD, DB, zawarty wraz z kwadratém z CB, równy węgielnicy CMG, wraz z kwadratém LG, węgielnica zaś CMG, i kwadrat LG, składaią cały kwadrat CEFD, który iest kwadratém z CD; więc równoległobok prostokątny liniiami AD, DB, zawarty wráz z kwadratém z CB, iest równy kwadratowi z CD. Jeżeli więc liniią prostą na dwa równé odcinki podzieloną przedłużymy podług upodobaniá, równoległobok prostokątny zawarty liniią prostą etc. etc. C. B. d. D.

PODANIE VII.

TWIERDZENIE.

Jeżeli liniią prostą podzielimy na dwa odcinki nierówne; kwadraty: *piérwszy* z całéy linii, *drugi* z jednégo iéy odcinka, będą równé dwa razy wziętému równoległobokowi prostokątnému całą liniią, i tymże samym odcinkiém zawartému, wráz z kwadratém z odcinka drugiégo. Fig. 74.

Niech będzie liniia prostá AB, podzieloná na dwa nie równé odcinki w punkcie C, powiadam: że kwadraty z AB, BC, są równé dwa razy wziętému prostokątnému równoległobokowi liniią AB, i odcinkiém BC, zawartému, wráz z kwadratém z odcinka AC.

Wystawmy bowiém na linii AB, kwadrat ADEB, (XLVI. I.); poprowadźmy w nim przekątną DB, przez punkt zaś C, poprowadźmy liniią CGF, równoległą do liniy AD, BE, iako też przez punkt G, liniią HGK, równoległą do liniy AB, DE (XXXI. I.). Ponieważ równoległobok prostokątny AG, iest równy równoległobokowi prostokątnému GE, (XLIII. I.) przydawszy więc spólnie kwadrat CK, będzie cały równoległobok prostokątny AK, równy równoległobokowi prostokątnému CE; równoległoboki więc prostokątné AK, CE, będą rówNé dwa razy wziętému równoległobokowi prostokątnému AK. Ze zaś równoległoboki prostokątné AK, CE, składaią węgielnicę AKF, i kwadrat CK; zaczém węgielnica AKF, i kwadrat CK, są równé dwa razy wziętému równoległobokowi prostokątnému AK. A ponieważ i dwa razy wzięty równoległobok prostokątny liniiami AB, BC, zawarty, równá się dwa razy wziętému równoległobokowi prostokątnému AK, bo liniia BK, iest równá linii BC (wnios. IV. II.); więc węgielnica AKF, i kwadrat CK, są równé dwa razy wziętému równoległobokowi prostokątnému liniiami AB, BC, zawartému. Przydawszy spólnie kwadrat HF, który iest kwadratém z AC, będzie węgielnica AKF, z kwadratami CK, HF, równá dwa razy wziętému równoległobokowi prostokątnému liniiami AB, BC, zawartému i kwadratowi z AC. A że węgielnica AKF, i kwadraty CK, HF, składaią cały kwadrat ADEB, i kwadrat CK, którė są kwadratami z AB, BC; kwadraty więc z AB, BC, równé są dwa razy wziętému równoległobokowi prostokątnému, liniiami AB, BC, zawartému wráz z kwadratém z AC. Jeżeli zatém liniią prostą etc. etc. C. B. d. D.

PODANIE VIII.

TWIERDZENIE.

Jeżeli liniią podzielimy na dwa odcinki nierówné; cztéry razy wzięty prostokąt całą liniią i iednym iéy odcinkiém zawarty wraz z kwadratém z odcinka drugiégo, będzie równy kwadratowi wystawionému na linii złożonéy z całéy linii i z odcinka piérwszégo. Fig. 75.

Niech będzie liniia prostá AB, podzielona na dwa odcinki nierówné w punkcie C, powiadam: że cztéry razy wzięty prostokąt liniiami AB, BC, zawarty wraz z kwadratém z AC, iest równy kwadratowi wystawionému na linii, złożonéy z całéy linii AB, i z odcinka piérwszégo BC.

Przedłużmy bowiém liniią prostą AB, tak zeby przedłużénié BD, było równé odcinkowi CB, i na linii AD, wystawmy kwadrat AEFD; poprowadźmy przekątną DE, przez punkta C, B, poprowadźmy liniie CH, BL, równoległé do liniy AE, DF; przez punkta zaś K, P, liniie MN, XO, równoległé do liniy AD, EF.

Ponieważ liniia CB, iest równá linii BD, i liniia CB, iest równá linii GK, (XXXIV. I.) liniia zaś BD, równá linii KN, będzie i liniia GK, równá linii KN. Dlá téy saméy przyczyny iest i liniia PR, równá linii RO. A że liniia CB, iest równá linii BD, i liniia GK, równá linii KN, będzie równoległobok prostokątny CK, równy równoległobokowi prostokątnému BN, równol: zaś prostokątny GR, będzie równy równoległobokowi prostokątnému RN, (XXXVI. I.). Jest zaś równoległobok prostokątny CK, równy równoległobokowi prostokątnému RN, (LXIII. I.) są bowiém za przekątną w równoległoboku CO, więc i równoległobok prostokątny BN, iest równy równol: prostok: GR. Cztéry zatém równol. prostok. BN, CK, GR, RN, są między sobą równé, razém więc wzięté równaią się cztéry razy wziętému równol. prostok. CK. Znowu ponieważ liniia CB, iest równá linii BD, a liniia BD, równá linii BK, (wnios. IV. II.) toiest linii CG; liniia zaś CB, równá linii GK, toiest linii GP, będzie i liniia CG, równá linii GP. Gdy więc liniia CG, iest równá linii GP, liniia zaś PR, równá iest linii RO, będzie i równoległobok prostokątny AG, równy równoległobokowi prostokątnému MP, i równol. prost. PL, równoległobokowi prost. RF. Ze zaś równol. prost. MP, iest równy równol. prost. PL, iako za przekątnią położoné w równol. prost. ML; więc i równoległobok prostokątny AG, iest równy równol. prost. RF. Cztéry zatém równoległoboki prostokątné AG, MP, PL, RF, są między sobą równé; i dlá tego razém wzięté równaią się cztéry razy wziętému równoległobokowi prostokątnému AG. Dowiedliśmy zaś wyżéy, że i cztéry równ. prostokątné CK, BN, GR, RN, są równé cztéry razy wziętému równ. prost. CK, ośm więc równoległoboków prost. składaiącé węgielnicę AOH, są równé cztéry razy wziętému równ. prost. AK. A ponieważ równ. prost. AK, zawarty iest liniiami AB, BC, iest bowiém liniia BK, równá linii BC; więc cztéry razy wzięty prost. równ. liniiami AB, BC, zawarty, będzie równy cztéry razy wziętému równ. prost. AK. Dowiedzioná zaś wyżéy węgielnica AOH, bydź równą cztéry razy wziętému równoległobokowi prost. AK, więc i cztéry razy wzięty równol. prost. liniiami AB, BC, zawarty, iest równy węgielnicy AOH. Przydawszy spólnie kwadrat HX, który iest kwadratém z AC; będzie cztéry razy wzięty równ. prost. liniiami AB, BC, zawarty wraz z kwadratém z AC, równy węgielnicy AOH, i kwadratowi HX. Lecz węgielnica AOH, i kwadrat HX, składaią cały kwadrat AEFD, który iest kwadratem z AD; cztéry razy więc wzięty równ. prost. zawarty liniiami AB, BC, wráz z kwadratém z AC, iest równy kwadratowi z linii AD, toiest: kwadratowi wystawionému na linii, złożonéy z linii AB, i z jéy odcinka BC. Jeżeli więc liniią prostą podzielimy etc. etc. C. B. d. D.

PODANIE IX.

TWIERDZENIE.

Jeżeli liniią prostą podzielimy na dwa odcinki równé, i na dwa odcinki nierówné; kwadraty z odcinków nierównych będą dwa razy większé od kwadratów: z których iedén byłby wystawiony na połowie linii, drugi na linii między podziałami zawartéy Fig: 76.

Niech będzie liniia prostá AB, podzieloná na dwá odcinki równé w punkcie C, na dwa zaś odcinki nierówné w punkcie D; powiadam: że kwadraty z AD, DB, są dwa razy większé od kwadratów z AC, CD.

Wyprowadźmy bowiém z punktu C, do linii AB, prostopadłą liniią CE, (XI. I.) dawszy iey długość równą linii AC, lub CB, i złączmy punkta E, A, B, liniiami EA, EB; nadto przez punkt D, poprowadźmy liniią DF, równoległą do linii CE, (XXXI. I.) przez punkt zaś F, liniią FG, równoległą do linii AB, złączmy nakoniec punkta A, F, liniią AF. Ponieważ liniia AC, iest równá linii CE, będzie i kąt EAC, równy kątowi AEC; i ponieważ kąt ACE, iest prosty, pozostałé kąty AEC, EAC, będą równé iednému kątowi prostému, (XXXII. I.) a są między sobą równe, każdy więc z nich AEC, EAC, będzie połową kąta prostégo. Podobnym sposobém dowodzi się: że iest połową kąta prostégo każdy z dwóch kątów CEB, EBC; cały zatém kąt AEB, iest kątém prostym. J gdy kąt GEF, iest połową kąta prostégo, prostym zaś iest kąt EGF, iako równy wewnętrznému przeciwległému (XXIX. I.) ECB, będzie więc pozostały kąt EFG, połową kąta prostégo; równym więc iest kąt GEF, kątowi EFG, dlá czego i bok EG, iest równy bokowi GF, (VI. I.) ponieważ znowu kąt FBD, iest połową kąta prostégo, kąt zaś FDB, prostym iest, iako równy kątowi wewnętrznému przeciwległému ECB, będzie więc pozostały BFD, połową kąta prostégo; kąt zatém FBD, równy iest kątowi BFD, dlá czego i bok DF, iest równy bokowi DB. J ponieważ liniia AC, iest równá linii CE, będzie kwadrat z linii AC, równy kwadratowi z linii CE. Kwadraty więc z AC, CE, będą dwa razy większé od kwadratu z AC. Kwadratóm zaś z AC, CE, równy iest kwadrat z AE, (XLVII. I.) iest bowiém kąt ACE, prostym, więc kwadrat z AE, będzie dwa razy większy od kwadratu z AC. Ponieważ znowu liniia EG, równá iest linii GF, będzie i kwadrat z linii EG, równy kwadratowi z linii GF, kwadraty więc z liniy EG, GF, są dwa razy większé od kwadratu z linii GF; kwadratóm zaś z linii EG, GF, równy iest kwadrat z linii EF, więc kwadrat z linii EF, będzie dwa razy większy od kwadratu z linii GF. Jest zaś liniia GF, równá linii CD, (XXXIV. I.) kwadrat zatém z linii EF, iest dwa razy większy od kwadratu z linii CD. Lecz i kwadrat z linii AE, iest dwa razy większy od kwadratu z linii AC; kwadraty więc z liniy AE, EF, są dwa razy większé od kwadratów z liniy AC, CD. Kwadratóm zaś z linii AE, EF, równy iest kwadrat z linii AF, iest bowiém kąt AEF, prostym;

kwadrat zatém z linii AF, iest dwa razy większy od kwadratów z liniy AC, CD. Lecz kwadratowi z linii AF, równé są kwadraty z liniy AD, DF, kąt bowiém ADF, iest prostym, więc kwadraty z liniy AD, DF, będą dwa razy większé od kwadratów z liniy AC, CD. Jest zaś liniia DF, równá linii DB, kwadraty zatém z odcinków nierównych AD, DB, są dwa razy większé od kwadratów z AC, CD, toiest: od kwadratów z połowy linii i z linii między podziałami zawartéy. Jeżeli więc liniią prostą podzielimy etc. etc. C. B. d. D.

PODANIE X.

TWIERDZENIE.

Jeżeli liniią prostą na dwa odcinki równé podzieloną przedłużymy podług upodobaniá; kwadraty: *piérwszy* z całéy linii, wraz z przedłużéniém wziętéy, *drugi* z samégo przedłużéniá, będą dwa razy większé od kwadratów, z których piérwszy byłby wystawiony na połowie linii, drugi na połowie linii wráz z przedłużéniém wziętéy. Fig. 77.

Niech liniia prostá AB, podzieloná na dwa odcinki równé w punkcie C, przedłużoná będzie podług upodobaniá do D; powiadam: że kwadraty z liniy AD, DB, są dwa razy większé od kwadratów z liniy AC, CD.

Wyprowadźmy bowiém z punktu C, do linii AB, liniią prostopadłą CE, (XI. I.) dawszy iey długość równą linii AC, lub CB, i złączmy punkta E, A, B, liniiami AE, EB; nadto przez punkt E, poprowadźmy liniią EF, (XXXI. I.) równoległą do linii AB; przez punkt zaś D, liniią DF, równoległą do linii CE. A ponieważ na liniie równoległé EC, FD, padá trzeciá liniia EF, kąty więc CEF, EFD, są równé dwóm kątóm prostym [XXIX. I.] dlá czego kąty BEF, EFD, są mnieyszé od dwóch kątów prostych, które zaś dwie liniie prosté czynią z trzecią kąty wewnętrzné mnieyszé od dwóch kątów prostych, té przedłużoné schodzą się (XII. p.); liniie więc EB, FD, przedłużoné zniydą się że strony BD, przedłużmy ié i niech się zniydą w punkcie G, który punkt G, z punktém A, złączmy liniią prostą AG. Ponieważ liniia AC, iest równá linii CE, będzie i kąt CEA, równy kątowi

EAC, (V. I.) iest zaś kąt ACE, prostym, więc każdy z dwóch kątów CEA, EAC, iest połową kąta prostégo. Podobnym sposobém dowodzi się, że i każdy z kątów CEB, EBC, iest połową kąta prostégo; więc cały kąt AEB, iest prostym. A ponieważ kąt EBC, iest połową kąta prostégo, będzie połową kąta prostégo i kąt DBG, (XV. I.). Lecz i kąt BDG, iest prostym iako równy kątowi DCE, naprzemian; pozostały więc trzeci kąt DGB, iest połową kąta prostégo; iest zatém kąt DGB, kątowi DBG, równy, więc i bok BD, iest równy bokowi DG, (VI. I.). Ponieważ znowu kąt EGF, iest połową kąta prostégo, a kąt EFG, iest prosty, iest bowiém równy kątowi przeciwnému ECD (XXXIV. I.), będzie i kąt pozostały FEG, połową kąta prostégo, iest więc kąt EGF, równy kątowi FEG, dlá czego i bok GF, iest równy bokowi FE. A że liniia EC, iest równá linii CA, będzie i kwadrat z linii EC, równy kwadratowi z linii CA, więc kwadraty z liniy EC, CA, są dwa razy większé od kwadratu z linii CA. Kwadratóm zaś z liniy EC, CA, równy iest kwadrat z linii EA (XLVII. I.); kwadrat zatém z linii EA, iest dwa razy większy od kwadratu z linii AC. Ponieważ znowu liniia GF, iest równá linii EF, będzie i kwadrat z linii GF, równy kwadratowi z linii EF; kwadraty więc z liniy GF, FE, są dwa razy większé od kwadratu z liniy EF. Lecz kwadratóm z liniy GF, FE, równy iest kwadrat z linii EG; kwadrat więc z linii EG, iest dwa razy większy od kwadratu z linii EF. Jest zaś liniia EF, równá linii CD, kwadrat zatém z linii EG, iest dwa razy większy od kwadratu z linii CD. Dowiedliśmy wyżéy; że kwadrat z linii AE, dwa razy iest większy od kwadratu z linii AC, więc kwadraty z liniy AE, EG, są dwa razy większé od kwadratów z liniy AC, CD. Kwadratóm zaś z liniy AE, EG, równá się kwadrat z linii AG, zaczém kwadrat z linii AG, dwa razy iest większy od kwadratów z liniy AC, CD. Lecz kwadratowi z linii AG, równé są kwadraty z liniy AD, DG, więc kwadraty z liniy AD, DG, są dwa razy większé od kwadratów z liniy AC, CD. Ze na koniec liniia

DG, iest równá linii DB, kwadraty zatém z liniy AD, DB, są dwa razy większé od kwadratów z liniy AC, CD. Jeżeli więc liniią prostą podzieloną etc. etc. C. B. d. D.

PODANIE XI.

ZAGADNIENIE.

Daną liniią prostą podzielić na dwa odcinki tak: iżby równoległobok prostokątny całą liniią i iednym iey odcinkiém zawarty, był równy kwadratowi z odcinka drugiégo. Fig. 78.

Niech będzie daná liniia prostá AB, trzeba też liniią AB, podzielić tak: aby równoległobok prostokątny całą liniią i iednym iéy odcinkiém zawarty, równy był kwadratowi z odcinka drugiégo.

Wystawmy na linii AB, kwadrat ABDC, (XLVI. I.) i podzielmy bok iego (X. I.) AC, na dwa odcinki równé w punkcie E, złączmy punkta B, E, liniią BE, i przedłużmy bok CA, do F, tak: iżby liniia EF, była równą linii EB, (III. I.) na przedłużéniu AF, wystawmy kwadrat FGHA, i przedłużmy bok tegoż kwadratu GH, do K, powiadam: że liniia AB, zostanie podzieloną w punkcie H, tak: iż równoległobok prostokątny zawarty całą liniią AB, i iednym iéy odcinkiém HB, równy będzie kwadratowi z odcinka drugiégo AH.

Jest bowiém liniia prostá AC, podzieloná na dwa odcinki równé w punkcie E, i przedłużoná do F; równoległobok więc prostokątny liniiami CF, AF, zawarty, wraz z kwadratém z linii AE, równy będzie kwadratowi z linii EF (VI. II.). Lecz liniia EF, iest równá linii EB; równoległobok więc prostokątny liniiami CF, AF, zawarty, wraz z kwadratém z linii AE, równy będzie kwadratowi z linii EB. Kwadratowi zaś z linii EB, równaią się kwadraty z liniy BA, AE, (XLVII. I.) iest bowiém kąt EAB, prostym; zatém równoległobok prostokątny liniiami CF, FA, zawarty, wraz z kwadratem z linii AE, będzie równy kwadratóm z liniy BA, AE. Odciągnąwszy spólny kwadrat z linii AE, pozostanie równoległobok prostokątny liniiami CF, FA, zawarty, równy kwadratowi z linii AB.

A że równoległobok prostokątny FK, iest liniiami CF, FA, zawarty, liniia bowiém AF, równá iest linii FG; kwadrat zaś AD, iest kwadratém z linii AB, iest więc równoległobok prostokątny FK, równy kwadratowi AD. Odciągnąwszy spólny równoległobok prostokątny AK, będzie pozostały kwadrat FH, równy pozostałému równoległobokowi prostokątnému HD. Jest zaś równoległobok prostokątny HD, zawárty liniiami AB, BH, bo liniia AB, iest równá linii BD; i kwadrat FH, iest kwadratém z AH; równoległobok więc prostokątny liniiami AB, BH, zawarty, iest równy kwadratowi z linii AH; iest przeto daná liniia prostá AB, podzieloná w punkcie H, tak: iż równoległobok prostokątny całą liniią AB, i iednym iéy odcinkiém BH, zawarty, iest równy kwadratowi z odcinka drugiégo AH. C. B. d. R.

PODANIE XII.

TWIERDZENIE.

W tróykątach roztwartokątnych, kwadrat z boku kątowi roztwartému przeciwnégo, większy iest od kwadratów z ramion kąta roztwartégo, o dwa razy wzięty równoległobok prostokątny, zawarty ramieniém kąta roztwartégo i przedłużéniém tegoż ramieniá zamkniętém między wierzchołkiém kąta roztwartégo i punktém, w którym liniia prostopadłá z końca drugiégo ramienia kąta roztwartégo spuszczoná na piérwszé ramie, spotyká przedłużénié onegoż. Fig. 79.

Niech będzie tróykąt roztwartokątny ABC, maiący kąt roztwarty ACB, z punktu A, spuśćmy liniią prostopadłą AD, do ramienia przedłużonégo BC (XII. I.). Powiadam: że kwadrat z linii AB, większy iest od kwadratów z liniy AC, CB, o dwa razy wzięty prostokąt liniiami BC, CD, zawarty.

Jest bowiém liniia prostá BD, podzieloná w punkcie C, na dwa iakiékolwiek odcinki; będzie więc kwadrat z linii BD, równy kwadratóm z odcinków BC, CD, i dwa razy wziętému równoległobokowi prostokątnému, témiż samémi odcinkami BC, CD, zawartému (IV. II.). Przydawszy spólnie kwadrat z linii AD; będą kwadraty z liniy BD, DA, równé kwadratóm z liniy BC, CD, DA, i dwa razy wziętému równoległobokowi prostokątnému odcinkami BC, CD, zawartému. Lecz kwadratóm z liniy BD, DA, równy iest kwadrat z linii BA, (XLVII. I.) iest bowiém kąt ADB, prosty; kwadratóm zaś z liniy CD, DA, równy iest kwadrat z linii CA; więc kwadrat z linii BA, równy iest kwadratóm z liniy BC, CA, i dwa razy wziętému równoległobokowi prostokątnému liniiami BC, CD, zawartému, iest zatém kwadrat z linii BA, większy od kwadratów z liniy CB, CA, o dwa razy wzięty równoległobok prostokątny liniiami BC, CD, zawarty. W roztwartokątnych więc tróykątach kwadrat z boku etc. etc. C. B. d. D.

PODANIE XIII.

TWIERDZENIE.

W każdym tróykącie, kwadrat z boku przeciwnégo kątowi ostrému, mnieyszy iest od kwadratów z ramion ténże kąt ostry obeymuiących, o dwa razy wzięty równoległobok prostokątny zawarty ramieniém tégoż kąta ostrégo i odcinkiém, lub przedłużéniém tégoż ramieniá zamkniętém między wierzchołkiém kąta ostrégo i punktém, w którym liniia prostopadłá z końca drugiégo ramiénia kąta ostrégo spuszczoná na piérwszé ramie spotyká tożramie, lub przedłużénié onego. Fig. 80. 1° 2do 3°.

Niech będzie tróykąt ABC, maiący kąt ostry ABC, z punktu A, spuśćmy liniią prostopadłą AD, do ramienia BC, kąta ostrégo ABC (XII. I.). Powiadam: że kwadrat z linii AC, mnieyszy iest od kwadratów z liniy CB, BA, o dwa razy wzięty równoległobok prostokątny z liniy CB, BD.

Niech naprzód liniia prostopadłá AD, padá wewnątrz tróykąta ABC; ponieważ liniia prostá CB, podzieloná iest na dwa iakiékolwiek odcinki w punkcie D, będą kwadraty z liniy CB, BD, równé dwa razy wziętému równoległobokowi prostokątnému liniiami CB, BD, zawartému i kwadratowi z linii CD, (VII. II.). Przydaymy spólnie kwadrat z linii AD; będą kwadraty z liniy CB, BD, DA, równé dwa razy wziętému równoległobokowi prostokątnému zawartému liniiami CB, BD, i kwadratóm z liniy AD, DC. Lecz kwadratóm z liniy BD, DA, równy iest kwadrat z linii BA, iest bowiém kąt ADB, prosty; kwadratóm zaś z liniy AD, DC, równy iest kwadrat z linii AC, więc kwadraty z liniy CB, BA, równé są kwadratowi z linii CA, i dwa razy wziętému równoległobokowi prostokątnému liniiami CB, BD, zawartému; sám zatém kwadrat z linii AC, mnieyszy iest od kwadratów z liniy CB, BA, o dwa razy wzięty równoległobok prostokątny liniiami CB, BD, zawarty.

Niech powtóré liniia prostopadłá AD, padá zewnątrz tróykąta ABC. Ponieważ kąt ADB, iest prosty, będzie kąt ACB, większy od kąta prostégo (XVI. I.); kwadrat więc z linii AB, równy iest kwadratóm z liniy AC, CB, i dwa razy wziętému równoległobokowi prostokątnému, liniiami BC, CD, zawartému (XII. II.) przydawszy spólnie kwadrat z linii BC, będą kwadraty z linii AB, BC, równé kwadratowi z linii AC, dwa razy wziętému kwadratowi z linii BC, i dwa razy wziętému równoległobowi prostokątnému liniiami BC, CD, zawartému. Ponieważ zaś liniia prostá BD, podzielona iest na dwa iakiékolwiek odcinki w punkcie C, iest równoległobok prostokątny, liniiami DB, BC, zawarty, równy równoległobokowi prostokątnému liniiami BC, CD, zawartému, wráz z kwadratém z linii BC, (III. II.) więc dwa razy wzięty równoległobok prostokątny liniiami DB, BC, zawarty, będzie równy dwa razy wziętému równoległobokowi prostokątnému liniiami BC, CD, zawartému, i dwa razy wziętému kwadratowi z linii BC. Kwadraty zatém z liniy AB, BC, równé są kwadratowi z linii AC, i dwa razy wziętému równoległobokowi prostokątnému liniiami DB, BC, zawartému; sám więc kwadrat z linii AC, mnieyszy iest od kwadratów z liniy AB, BC, o dwa razy wzięty równoległobok prostokątny liniiami CB, BD, zawarty.

Niech nakoniec bok AC, prostopadłym będzie do boku BC, będzie więc liniia prostá BC, od linii AC, przy kącie ostrym B, zaiętá, i oczywistá: że kwadraty z liniy AB, BC, są równé kwadratowi z linii AC, i dwa razy wziętému kwadratowi z linii BC, (XLVII. I.). W każdym więc tróykącie etc. etc. C. B. d. D.

PODANIE XIV.

ZAGADNIENIE.

Figurze danéy prostokréślnéy równy kwadrat wykréślić. Fig: 81.

Niech będzie daná figura prostokréślná A, trzeba wykréślić kwadrat, równy téyże figurze prostokréślnéy A.

Wykréślmy równoległobok prostokątny BCDE, równy figurze prostokréślnéy A, (XLV. I.). Jeżeli więc liniia BE, iest równá linii ED, będziémy mieli rozwiązané zagadniénié; będzie bowiém kwadrat BD, równy figurze prostokréślnéy A. Jeżeli zaś liniia BE, nie będzie równą linii ED, przedłużmy którąkolwiek z nich naprzykład liniią BE, do punktu F, tak: żeby przedłużénié EF, było równé linii ED, i podzielmy liniią BF, na dwa odcinki równé w punkcié G: z którego punktu G, iako ze śrzodka długością linii GB, lub GF, zakréślmy półkole BHF, przedłużmy liniią DE, aż do zeyściá się z okręgiém półkola w punkcie H, i poprowadźmy liniią GH.

Ponieważ liniia prostá BF, podzieloná iest na dwa odcinki równé w punkcie G, na dwa zaś odcinki nieróẃné w puukcie E, będzie równoległobok prostokątny odcinkami BE, EF, zawarty wráz z kwadratém z linii EG, równy kwadratowi z linii GF, (V. II.). Jest zaś liniia GF, równá linii GH; równoległobok więc prostokątny odcinkami BE, EF, zawarty wráz z kwadratém z linii EG, iest równy kwadratowi z linii GH; lecz kwadratowi z linii GH, równe są kwadraty z liniy GE, EH, (XLVII. I.) rownoległobok więc prostokątny odcinkami BE, EF, zawarty wráz z kwadratém z linii

EG, równy iest kwadratóm z liniy HE, EG. Odciągnąwszy spólnie kwadrat z linii EG, pozostanie równoległobok prostokątny odcinkami BE, EF, zawarty, równy kwadratowi z linii EH. Lecz równoległobok prostokątny odcinkami BE, EF, zawarty, iest równoległobok prostokątny BD; odcinek bowiém EF, równy iest linii ED; więc równoległobok prostokątny BD, iest równy kwadratowi z linii EH. Jest zaś równoległobok prostokątny BD, równy figurze prostokréślnéy A; zaczém figura prostokréślná A, będzie równą kwadratowi z linii EH. Wykréślony więc iest na linii EH, kwadrat figurze danéy prostokréślnéy A, równy. C. B. d. R.

KONIEC XIĘGI DRUGIEY.

JEOMETRYI EUKLIDESA.

XIĘGA TRZECIA.

DEFINICYE.

1ᵃ Koła równé są, których śrzednice lub promienie są równé. „Wyrażénié to nie „iest definicyą; iak raczéy twiérdzéniém, któ-„régo prawda iest iasná; ieżeli bowiém koła „z równémi promieniami będą na sobie tak „położoné, aby ich śrzodki przystały, przy-„staną i samé koła do siebie.

2gá. Mówi się: że liniia prostá dotyká się koła, gdy będąc styczną z kołém, przedłużo-ná z obudwóch stron, nie przeciná z żadnéy strony okręgu koła. Fig. 82.

3ciá. Mówi się: że koła dotykaią się

wzaiemnie, gdy też koła prócz iednégo punktu stykaniá się ich okręgów, samé się nie przecinaią. Fig. 82.

4tá. Mówi się: że liniie prosté równoodległé są od śrzodka koła, gdy prostopadłé ze śrzodka koła na nié spuszczoné są równé.

5tá. Mówi się: że ta liniia prostá bardziéy iest odległá od śrzodka koła, na którą prostopadłá ze śrzodka koła spuszczoná iest większá. Fig. 83.

6tá. Odcinek koła iest figura czyli część koła ograniczoná liniią prostą i okręgém koła. Fig. 84.

7má. Kąt zaś odcinka iest który liniią prostą i okręgiém koła zawiérá się.

8má. Jeżeli na okręgu koła wzięty będzie punkt, i od niego poprowadzoné będą liniie prosté do końców linii prostéy za podstawę odcinkowi służącéy, kąt między témiż liniiami prostémi zawarty, iest kątém w odcinku. Fig. 85.

9tá. Kiedy zaś liniie prosté kąt zawiéraiącé zaymuią część okręgu, mówi się, że tén kąt wspiérá się na okręgu koła. Fig. 85.

10tá. Jeżeli kąt má wierzchołek swóy

we śrzodku koła; figura czyli część koła zawartá między ramionami tegoż kąta, toiest promieniami koła i łukiém, nazywá się wycinek koła. Fig: 86.

11tá. Odcinkami podobnémi kół nazywaią się té, które zaymuią kąty równé, lub w których kąty są między sobą równé. Fig. 87.

PODANIE I.

ZAGADNIENIE.

Wynaleśdź śrzodek koła danégo. Fig. 88.

Niech będzie dané koło ABC, trzeba wynaleśdź śrzodek koła ABC.

Poprowadźmy w kole daném liniią prostą iakąkolwiek AB, i podzielmy ią w punkcie D, na dwie równé części (X. I.), z punktu zaś D, wyprowadźmy do AB, liniią prostopadłą DC, (XI. I.), przedłużmy ią do E, i podzielmy CE, na dwie równé części w punkcie F; powiadam: że punkt F, iest śrzodkiém koła ABC.

Przypuśćmy bowiém: że punkt F, nie iest

środkiém koła ABC, pozwólmy ieżeli bydź może, że punkt G, iest środkiém, i poprowadźmy liniie prosté GA, GD, GB. Ponieważ liniia prostá DA, iest równá linii prostéy DB, spólná zaś iest liniia prostá GD, będą dwie liniie prosté AD, DG, równé dwóm liniióm prostym BD, DG, iedna drugiéy, i podstawa GA, równá iest podstawie GB, są bowiém ze środka G, poprowadzoné: kąt więc ADG, iest równy kątowi GDB, (VIII. I.) gdy zaś liniia prostá schodząc się z drugą liniią prostą czyni kąty przyległé równé, każdy z nich iest prostym; kąt więc GDB, prosty iest, lecz i kąt FDB, iest prosty, zaczém kąt FDB, iest równy kątowi GDB, większy mnieyszému, co bydź nié może; dlá czego punkt G, nie iest środkiém koła ABC, a podobnież okażémy, że każdy inny punkt prócz punktu F, nie iest środkiém koła, więc punkt F, iest środkiém koła ABC. C. B. d. R.

Wniosek. Wnosi się stąd oczywiście; że ieżeli w kole z dwóch liniy prostopadłych do siebie, iedna drugą przecina na dwie równé

9 *

części, na przecinaiącéy znayduie się śrzodek koła.

PODANIE II.

TWIERDZENIE.

Jeżeli na okręgu koła obierzémy dwa gdziekolwiek punkta, liniiá prostá łączącá téż punkta padnie wewnątrz koła. Fig. 89.

Niech będzie koło ABC, i na okręgu iego niech będą wzięté dwa gdziekolwiek punkta A, B; powiadam: że liniia prostá od punktu A, do punktu B, poprowadzoná padá wewnątrz koła.

Przypuśćmy bowiém, że nie padá wewnątrz koła, pozwólmy, ieżeli to bydź może, że padá zewnątrz iak AEB; wynaydźmy śrzodek koła ABC, (I. III.) tén niech będzie punkt D, poprowadźmy promienie AD, DB, i niech liniia prostá DE, spotyká się z okręgiém koła w punkcie F. Ponieważ liniia prostá DA, iest równá linii prostéy DB, będzie i kąt DAE, równy kątowi DBE, (V. I.) i ponieważ tróykąta DAE, iedén bok AE, iest przedłużony, będzie kąt DEB, większy od kąta DAE, (XVI. I.) zaś kąt DAE, iest równy kątowi DBE, więc kąt DEB, większy iest od kąta DBE; lecz większému kątowi przeciwległy iest bok większy (XIX. I.) większá więc iest liniia prostá DB, od linii prostéy DE. Jest zaś liniia prostá DB, równá linii prostéy DF, więc liniia prostá DF, iest większá od linii prostéy DE, mnieyszá od większéy, co bydź nié może. Liniia więc prostá od punktu A, poprowadzoná do punktu B, nie padnie zewnątrz koła. Podobnie okażémy że nie padnie i na sám okrąg koła, padnie zatém wewnątrz. Jeżeli więc na okręgu koła etc. etc. C. B. d. D.

PODANIE III.

TWIERDZENIE.

Jeżeli w kole liniia prostá przez śrzodek poprowadzoná przeciná liniią prostą nie przez śrzodek poprowadzoną na dwie równé części, będzie piérwszá prostopadłą do drugiéy; i ieżeli piérwszá iest prostopadłą do drugiéy, przeciná ią na dwie równé części. Fig. 90.

Niech będzie koło ABC, a w niém liniia prostá przez śrzodek poprowadzoná CD, niech przeciná liniią prostą AB, nie przez śrzodek poprowadzoną na dwie równé części w punkcie F, powiadam: że będzie do niéy prostopadłą.

Wynaydźmy śrzodek koła ABC, tén niech będzie punkt E, i poprowadźmy promienie EA, EB. Ponieważ liniia prostá AF, iest równá linii prostéy FB, spólná zaś iest liniia prostá FE, dwie więc liniie prosté AF, FE, są równé dwóm liniióm prostym BF, FE, i podstawa EA, iest równą podstawie EB; zatém i kąt AFE, będzie równy kątowi BFE, (VIII. I.) gdy zaś liniia prostá schodząc się z drugą liniią prostą czyni kąty przyległé równé, każdy z nich iest prostym (def. X. I.), każdy więc z kątów AFE, BFE, iest prostym, i liniia CD, iest prostopadłą do linii AB. Liniia przeto prostá CD, przez śrzodek poprowadzoná, przecinaiąc liniią prostą

AB, nie przez śrzodek poprowadzoną na dwie równé części, będzie do niéy prostopadłą.

Niech znowu liniia prostá CD, będzie prostopadłą do linii prostéy AB, powiadam: że ią przetnie na dwie równé części, toiest: będzie liniia AF, równá linii prostéy FB.

Uczyniwszy bowiém to samo wykréślénié, ponieważ promiéń EA, iest równy promieniowi EB, będzie i kąt EAF, równy kątowi EBF, (V. I.) iest zaś i kąt prosty AFE, równy kątowi prostému BFE, są więc dwa tróykąty EAF, EBF, maiącé dwa kąty równé dwóm kątóm, i iedén bok równy iednému bokowi, toiest bok EF, spólny przeciwległy kątóm równym w obudwóch tróykątach, będą zatém miały i pozostałé boki równé pozostałym bokóm, (XXVI. I.) toiest będzie bok AF, równy bokowi FB. Jeżeli więc w kole liniia prostá etc. etc. C. B. d. D.

PODANIE IV.

TWIERDZENIE.

Jeżeli w kole dwie liniie prosté nie przez śrzodek koła poprowadzoné przecinaią się nawzaiem, nie przetną się na dwie równé części. Fig. 91.

Niech będzie koło ABCD, i niechay w niém dwie liniie prosté AC, BD, nie przez śrzodek koła poprowadzoné przecinaią się nawzaiem w punkcie E, powiadam: że té liniie nie przecinaią się na dwie równé części.

Jeżeli bowiém bydź to może, niech się przecinaią na dwie równé części tak, żeby liniia prostá AE, była równá linii prostéy EC, i liniia prostá BE, równá linii prostéy ED. Jeżeli więc iedna z dwóch danych liniy prostych przechodzi przez śrzodek koła, oczywistá rzecz iest, że taż liniia nié może bydź na dwie równé części przeciętá od drugiéy, która nie przechodzi przez śrzodek koła. Jeżeli zaś żadna z nich przez śrzodek koła nie przechodzi, wynaydźmy koła ABCD, śrzodek, (I. III.) tén niech będzie w punkcie

F, i poprowadźmy liniią prostą FE. Ponieważ więc liniia prostá FE, przez śrzodek koła poprowadzoná liniią prostą AC, nie przez śrzodek koła poprowadzoną na dwie równé części przeciná, przecinać ią będzie pod kątámi prostémi (III. III.); dlá czego kąt FEA, iest prosty. J znowu ponieważ liniia prostá FE, liniią prostą BD, nie przez śrzodek koła poprowadzoną na dwie równé przeciná części, przecinać ią będzie pod kątami prostémi; iest zatém kąt FEB, prosty. Dowiedziono zaś, że i kąt FEA, iest prosty, więc i kąt FEA, będzie równy kątowi FEB, mnieyszy większému, co bydź nié może. Liniie zatém prosté AC, BD, nie przecinaią się na dwie równé części. Jeżeli więc w kole etc. etc. C. B. d. D.

PODANIE V.

TWIERDZENIE.

Jeżeli dwa koła przecinaią się nawzaiem, spólnégo śrzodka mieć nié mogą. Fig. 92.

Niechay dwa koła ABC, CDG, przecinaią

się nawzaiem w punktach B, C. Powiadam: że téż koła spólnégo śrzodka nié maią.

Jeżeli bowiém bydź może, niech będzie spólny śrzodek w punkcie E; poprowadziwszy liniią prostą EC, poprowadźmy drugą w jakiémkolwiek położéniu EFG. Ponieważ punkt E, iest śrzodkiém koła ABC, będzie liniia prostá CE, równá linii prostéy EF, i znowu ponieważ punkt E, iest śrzodkiém koła CDG, iest liniia prostá CE, równá linii prostéy EG, lecz z okazaniá liniia prostá CE, iest równá linii prostéy EF, więc liniia prostá FE, będzie równą linii prostéy EG, mnieyszá większéy, co bydź nié może. Punkt zatém E, nie iest śrzodkiém kół ABC, CDG. Jeżeli więc dwa koła etc. etc. C. B. d. D.

PODANIE VI.

TWIERDZENIE.

Jeżeli dwa koła dotykaią się wewnątrz, spólnégo śrzodka mieć nie będą. Fig. 93.

Niechay dwa koła ABC, CDE, dotykaią się

wewnątrz w punkcie C. Powiadam: że téż koła spólnégo śrzodka nié maią.

Jeżeli bowiém bydź może, niech będzie spólny śrzodek w punkcie F; poprowadźmy liniią prostą FC, i drugą w jakiémkolwiek położéniu FEB. Ponieważ więc punkt F, iest śrzodkiém koła ABC, iest liniia prostá CF, równá linii prostéy FB. J znowu ponieważ punkt F, iest śrzodkiém koła CDE, będzie liniia prostá CF, równá linii prostéy FE. Lecz okazano że liniia prostá CF, iest równá linii prostéy FB, więc i liniia prostá FE, iest równą linii prostéy FB, mnieyszá większéy, co bydź nie może. Punkt zatém F, nie iest śrzodkiém kół ABC, CDE. Jeżeli więc dwa koła etc. etc. C. B. d. D.

PODANIE VII.

TWIERDZENIE.

Jeżeli na śrzednicy koła wzięty będzie punkt którykolwiek prócz śrzodka koła, i od tego punktu poprowadzoné liniie prosté do okręgu, ze wszystkich liniy náywiększą będzie część śrzednicy, na któréy się znáyduie śrzodek koła, a náymnieyszą pozostałá część śrzednicy; z jnnych zaś liniy prostych każdá bliższá przechodzącéy przez śrzodek kołá, większą będzie od odlegleyszéy, z tego nakoniec punktu dwie tylko równé liniie prosté z obudwóch stron náymnieyszéy linii prostéy mogą bydź do okręgu poprowadzoné. Fig: 94.

Niech będzie koło ABCD, śrzednicą zaś iego AD, na któréy prócz śrzodka koła weźmy którykolwiek punkt F; i od tegoż punktu F, poprowadźmy do okręgu A,B,C,D, liniie prosté FB, FC, FG. Powiadam: że liniia prostá FA, będzie náywiększą, a liniia prostá FD, náymnieyszą, z pozostałych zaś, będzie liniia prostá FB, większą od linii prostéy FC, i liniia prostá FC, większą od linii prostéy FG.

Poprowadźmy promienie BE, CE, GE; ponieważ w każdym tróykącie dwa boki większé są od trzeciégo (XX. I.); będą boki BE, EF, większé od BF, iest zaś AE, równá BE, więc liniie BE, EF, są równé linii AF, większa zatém iest liniia prostá AF, od linii prostéy FB. I znowu ponieważ BE, iest równá CE, spólná zaś FE; będą dwie liniie BE, EF, równé dwóm liniióm CE, EF, lecz kąt BEF, większy iest od kąta CEF, podstawa więc BF, większá iest od podstawy FC, (XXIV. I.) dlá téyże saméy przyczyny i CF, większá iest od FG, znowu ponieważ GF, FE, większé są od EG; EG, zaś równá ED, będą GF, FE, większé iak ED, odiąwszy spólną FE, będzie pozostałá GF, większą od pozostałéy FD, náywiększą więc iest liniia prostá FA, a náymnieyszą liniia prostá FD, większą zaś iest liniia prostá BF, od linii prostéy FC, i liniia prostá FC, większą od linii prostéy FG.

Powiadam: że i od punktu F, dwie tylko liniie prosté równé, mogą bydź do okręgu ABCD, z obudwóch stron náymnieyszéy linii FD, poprowadzoné. Wykréślmy bowiém na linii prostéy EF, i przy punkcie na niéy E, kąt FEH, równy kątowi GEF, (XXIII. I.) i poprowadźmy liniią prostą FH. Ponieważ liniia prostá GE, iest równá linii prostéy EH, spolną zaś iest liniia prostá EF, dwie więc liniie prosté GE, EF, są równé dwóm liniióm prostym HE, EF; i kąt GEF, iest równy kątowi HEF; podstawa więc FG, będzie równą podstawie FH, (IV. I.) powiadam, że od punktu F, nié może bydź żadna inná do okręgu poprowadzoná liniia prostá równá linii prostéy FG. Jeżeli bowiém to mogłoby bydź, niechby taką drugą liniią prostą, była liniia prostá FK, ponieważ liniia prostá FK, miałaby bydź równą linii prostéy FG, linii zaś prostéy FG, iest równá liniia prostá FH, więc liniia prostá FK, byłaby téż równą linii prostéy FH, to iest bliższá przechodzącéy przez śrzodek koła równá odlegleyszéy, co bydź nié może. Jeżeli więc na śrzednicy koła etc. etc. C. B. d. D.

PODANIE VIII.

TWIERDZENIE.

Jeżeli z punktu zewnątrz koła obranégo, poprowadzoné będą do okręgu liniie prosté, z których iedna przechodziłaby przez śrzodek koła, a inné padały gdziekolwiek, z liniy prostych padaiących na część okręgu wklęsłą, náywiększá iest liniia prostá przechodzącá przez śrzodek koła, z jnnych zaś liniy prostych, każdá przechodzącéy bliższá przez śrzodek iest większá od odlegleyszéy. Lecz z liniy prostych padaiących na część okręgu wypukłą, náymnieyszá iest liniia prostá zawartá między punktém zewnątrz koła i śrzednicą, z jnnych zaś liniy prostych każdá bliższá naymnieyszéy, mnieyszą iest od odlegleyszéy; nakoniec dwie tylko równé liniie prosté z tego punktu po obudwóch stronach náymnieyszéy linii prostéy mogą bydź do okręgu poprowadzoné. Fig; 95.

Niech będzie koło ABC, i zewnątrz iego wzięty punkt D; od którégo niech do okręgu poprowadzoné będą liniie prosté DA, DE, DF, DC, i niech liniia prostá DA, przechodzi przez śrzodek koła. Powiadam: że z liniy prostych padaiących na okręgu część wklęsłą AEFC, náywiększą iest liniia prostá DA, przechodzącá przez śrzodek; każdá zaś bliższá przechodzącéy przez śrzodek, większą iest od odleglcyszéy, toiest liniia prostá DE, większą iest od linii prostéy FD, liniia zaś prostá DF, większą iest od linii prostéy DC; lecz z liniy prostych padaiących na okręgu część wypukłą HLKG, náymnieyszą iest liniia prostá DG, między punktém D, i śrzednicą AG, zawartá, a bliższá náymnieyszéy zawsze iest mnieyszą od odlegleyszéy, toiest liniia prostá DK, mnieyszą iest od linii prostéy DL, i liniia prostá DL, mnieyszą iest od linii prostéy DH.

Znaydźmy bowiém śrzodek koła ABC, tén niech będzie w punkcie M, i poprowadźmy liniie prosté ME, MF, MC, MK, ML, MH. Ponieważ liniia prostá AM, iest równá linii prostéy ME, przydawszy spólnie liniią prostą MD, będzie liniia prostá AD, równá liniióm prostym EM, MD; lecz liniie prosté EM, MD, są większé od linii prostéy ED, więc i liniia prostá AD, iest większą od linii prostéy

ED. J znowu ponieważ liniia prostá ME, iest równá linii prostéy MF; spólną zaś iest liniia prostá MD, będą liniie proste EM, MD, równé liniióm prostym FM, MD, lecz kąt EMD, większy iest od kąta FMD, podstawa więc ED, większá będzie od podstawy FD, (XXIV. I.). Podobnież okażémy, że i liniia prostá FD, większą iest od linii prostéy CD; więc náywiększá iest liniia prostá DA; większą zaś iest liniia prostá DE, od linii prostéy DF, i liniia prostá DF, większą iest od linii prostéy DC. A ponieważ liniie prosté MK, KD, są większé od linii prostéy MD, liniia zaś prostá MK, iest równá linii prostéy MG, zaczém pozostałá liniia prostá KD, iest większą od pozostałéy linii prostéy GD, (IV. pew.) zaczém liniia prostá GD, iest mnieyszą od linii prostéy KD; náymnieyszą więc iest liniia prostá GD. A ponieważ na iednym boku MD, tróykąta MLD, dwie liniie prosté MK, KD, wewnątrz tróykąta tegoż są wyprowadzoné, będą liniie prosté MD, KD, mnieyszé od liniy prostych ML, LD, (XXI. I.) z których, że liniia prostá MK, iest równá linii prostéy ML, pozostałá więc liniia prostá DK, mnieyszá iest od pozostałéy linii prostéy DL. Podobnież okażémy że i liniia prostá DL, mnieyszą iest od linii prostéy DH. Liniia więc prostá DG, iest náymnieyszá, mnieyszą zaś iest liniia prostá DK, od linii prostéy DL, i liniia prostá DL, mnieyszą od linii prostéy DH. Powiadam ieszcze: że dwie tylko równé liniie prosté z punktu D, po obudwóch stronach linii prostéy náymnieyszéy mogą bydź do okręgu poprowadzoné.

Wykréślmy bowiém na linii prostéy MD, i przy punkcie na niéy M, kąt DMB, równy kątowi KMD, i poprowadźmy liniią prostą DB. Ponieważ więc liniia prostá MK, iest równą linii prostéy MB, spólną zaś iest liniia prostá MD, dwie więc liniie prosté KM, MD, są równé dwóm liniióm prostym BM, MD, iedna drugiéy, i kąt KMD, iest równy kątowi BMD, podstawa więc DK, iest równá podstawie DB, (IV. I.). Powiadam zaś: że od punktu D, nié może bydź żadna inná do okręgu poprowadzoná liniia prostá, równá linii prostéy DK. Jeżeli bowiem bydźby to mogło, niechby taką drugą liniią prostą była liniia prostá DN; a ponieważ liniia prostá DK, miałaby bydź równą linii prostéy DN, linii zaś prostéy DK, równą iest liniia prostá DB, więc i liniia prostá DB, równą byłaby linii prostéy DN, toiest bliższá náymnieyszéy byłaby równą odlegleyszéy, co dowiedzioném bydź nie podobné. Jeżeli więc z punktu zewnątrz koła etc. etc. C. B. d. D.

PODANIE IX.

TWIERDZENIE.

Jeżeli z punktu wewnątrz koła obranégo poprowadzoné do okręgu więcéy niż dwie liniie prosté, są między sobą równé: punkt tén będzie śrzodkiém koła. Fig. 96.

Z punktu D, wewnątrz koła ABC, wziętégo, niech poprowadzoné do okręgu więcéy niż dwie liniie prosté DA, DB, DC, będą sobie równé, powiadam: że punkt D, iest śrzodkiém koła ABC.

Przypuśćmy bowiém, ieżeli to bydź może,

że punkt D, nie iest śrzodkiém koła, pozwólmy że punkt E, iest śrzodkiém koła, i liniią prostą DE, przez punkta D, E, poprowadzoną przedłużmy do punktów F, G, więc liniia prostá FG, iest śrzednicą koła ABC. Zatém ponieważ na śrzednicy FG, koła ABC, wzięty iest punkt D, który nie iest śrzodkiém koła, náywiększą będzie liniia prostá DG, większą zaś liniia prostá DC, od linii prostéy DB, i liniia prostá DB, większą od linii prostéy DA, (VII. III.) lecz téż liniie prosté są i równémi, co bydź nié może; punkt więc E, nie iest śrzodkiém koła ABC. Podobnież okażémy, że każdy inny punkt prócz punktu D, nie iest śrzodkiém koła. Jest zatém punkt D, śrzodkiém koła ABC. Jeżeli więc z punktu wewnątrz koła etc. etc. C. B. d. D.

PODANIE X.

TWIERDZENIE.

W przecięciu się kół, okręgi ich w dwóch tylko punktach przecinaią się. Fig. 97.

Jeżeli bowiém bydźby to mogło, niech okrąg koła ABC, przeciná w więcéy niż w dwóch punktach okrąg koła DEF, toiest w punktach B, G, F. Weźmy śrzodek koła ABC, w punkcie K, i poprowadźmy liniie prosté KB, KG, KF. Ponieważ więc z punktu K, wewnątrz koła DEF, obranégo, poprowadzoné więcéy niż dwie liniie prosté KB, KG, KF, są między sobą równé; będzie punkt K, śrzodkiém koła DEF, (IX. III.) iest zaś punkt K, śrzodkiém i koła ABC, dwóch zatém kół przecinaiących się iest spólny śrzodek, co bydź nié może, (V. III.) zaczém okręgi dwóch kół w więcéy iak w dwóch punktach nie przecinaią się. C. B. d. D.

PODANIE XI.

TWIERDZENIE.

W dwóch kołach stykaiących się z sobą wewnątrz liniia prostá łączącá śrzodki tychże kół przedłużoná, padá na punkt dotykaniá się kół. Fig. 98.

Niechay bowiém dwa koła ABC, DEA, stykaią się z sobą wewnątrz w punkcie A, i niech śrzodkiém koła ABC, będzie punkt F; śrzodkiém zaś koła ADE, niech będzie punkt G, powiadam: że liniia prostá łączącá punkta G, F, ieżeli przedłużoną będzie, padá na punkt stykaniá się kół, toiest na punkt A.

Przypuśćmy, ieżeli bydź może, że taż liniia prostá przedłużoná nie padnie na punkt stykaniá się A, lecz miéć będzie położénié FGDH, i poprowadźmy linie proste AF, AG. Ponieważ więc liniie prosté AG, GF, większé są od linii prostéy FA, (XX. I.) toiest od linii prostéy FH, (iest bowiém liniia prostá FA, równá linii prostéy FH, iako promienie iednégo koła) odiąwszy spólnie liniią prostą FG, pozostałá liniia prostá AG, większą iest od pozostałéy linii prostéy GH; lecz liniia prostá AG, iest równą linii prostéy GD, więc liniia prostá GD, większá iest od linii prostéy GH, mnieyszá od większéy, co bydź nié może. Liniia więc prostá punkta F, G, łącząca nie padnie z żadnéy strony punktu stykaniá się, padnie zatém na sám punkt stykaniá się. W dwóch więc kołach stykających się z sobą wewnątrz etc. etc. C. B. d. D.

PODANIE XII.

TWIERDZENIE.

Jeżeli dwa koła dotykaią się z sobą zewnątrz, liniia prostá łącząca ich śrzodki przeydzie przez punkt dotykaniá się. Fig. 99.

Dwa koła ABC, ADE, niechay się dotykaią zewnątrz w punkcie A, i niech śrzodkiém koła ABC, będzie punkt F, koła zaś ADE, śrzodkiém niech będzie punkt G. Powiadam: że liniia prostá, punkta FG, łącząca, przechodzi przez punkt dotykaniá się kół A.

Przypuśćmy, ieżeli bydź może, że liniia

prostá łączącá śrzodki kół nieprzechodząc przez punkt dotykaniá się ich okręgów, padá w jnném położéniu iak FC, DG, i poprowadźmy liniie prosté FA, AG. Ponieważ punkt F, iest śrzodkiém koła ABC, będzie liniia prostá AF, równá linii prostéy FC, i znowu ponieważ punkt G, iest śrzodkiém koła ADE, będzie liniia prostá AG, równá linii prostéy GD, są więc liniie prosté FA, AG, równé liniióm prostym FC, DG; całá zatém liniia prostá FG, większá iest od liniy prostych FA, AG, lecz iest i mnieyszá (XX. I.) co bydź nié może; liniia więc prostá łączącá punkta F, G, nié może nie przechodzić przez punkt dotykaniá się, a zatém przez ténże punkt przeydzie. Jeżeli więc dwa koła dotykaią się siebie zewnątrz etc. etc. C. B. d.D.

PODANIE XIII.

TWIERDZENIE.

Okrąg koła nié może się dotykać okręgu koła drugiégo w więcéy punktach iak w jednym, bądź to dotknięcié miałoby mieyscé wewnątrz, bądź zewnątrz. Fig. 100.

Jeżeli bowiém bydź to może, niech okrąg koła ABC, dotyká się wewnątrz okręgu koła drugiégo w więcéy punktach iak w jednym, toiest w punktach B, D.; poprowadźmy liniią prostą BD, i drugą liniią prostą GH, przecinaiącą liniią prostą BD, pod kątami prostémi na dwie równé części (X. XI. I.). Ponieważ punkta B, D, są na okręgach obudwóch kół, liniia prostá BD, padnie wewnątrz obudwóch kół, (II. III.) na linii więc prostéy GH, przecinaiącéy pod kątami prostémi na dwie równé części liniią prostą BD, będą znaydować się śrzodki obudwóch kół (wn. I. III.); liniia zatém prostá GH, przedłużoná padnie na punkt stykaniá się tychże kół (XI. III.); lecz nie padá na punkt stykaniá się, ponieważ punkta stykaniá się okręgów B, D, nie są na linii prostéy GH, więc nié może razém liniia prostá GH, i padać na punkt stykaniá się, iak powinna, i nie padać, iak nie padá, okrąg więc koła nie dotyká się okręgu koła drugiégo w więcéy punktach iak w jednym.

Powiadam: równie, że nie iest podobną rzeczą, aby okrąg koła dotykáł się zewnątrz okręgu koła drugiégo w więcéy punktach iak w jednym: gdyby albowiém bydź to mogło, niech okrąg koła AKC, dotyká się okręgu koła ABC, w więcéy punktach iak w jednym, toiest w punktach A, C, i poprowadźmy liniią prostą AC; ponieważ na okręgu koła AKC, wzięté są dwa punkta A, C, liniia prostá AC, łącząca téż punkta, padnie wewnątrz koła AKC, iest zaś koło AKC, zewnątrz koła ABC, dlá czego i liniia prostá AC, iest zewnątrz koła ABC; że zaś punkta A, C, są na okręgu koła ABC, liniia prostá AC, iest wewnątrz tegoż koła ABC; iedna zatém i taż sama liniia prostá AC, iest i zewnątrz i wewnątrz koła ABC, co bydź nié może. Okrąg więc koła nie dotyká się okręgu koła drugiégo zewnątrz w więcéy punktach iak w jednym. Toż samo dowiedliśmy o okręgach kół dotykaiących się wewnątrz. Okrąg więc koła nié może się dotykać okręgu koła etc. etc. C. B. d. D.

PODANIE XIV.

TWIERDZENIE.

W kole liniie prosté równé, na okręgu iego zakończoné, są równoodległé od śrzodka; i które liniie prosté w kole na okręgu iego zakończoné są równoodległé od śrzodka, są téż między sobą równé. Fig. 101.

Niech będzie koło ABCD; a w niém niech będą równé liniie prosté AB, CD, na okręgu tegoż koła zakończoné, powiadam: że téż liniie prosté AB, CD, są równoodległé od śrzodka.

Wynaydźmy śrzodek koła ABDC, tén niech będzie w punkcie E, z którégo wyprowadźmy do liniy prostych AB, CD, liniie prostopadłé EF, EG, i poprowadźmy liniie prosté AE, EC. Ponieważ liniia prostá EF, przez śrzodek koła poprowadzoná liniią prostą AB, nie przez śrzodek koła poprowadzoną pod kątami prostémi przeciná; przetnie ią na dwie równé części, (III. III.) liniia zatém prostá AF, iest równą linii prostéy FB, dlá czego liniia prostá AB, iest podwóyną linii prostéy AF; dlá téy saméy przyczyny i liniiá prostá CD, iest podwóyną linii prostéy CG, a że liniia prostá AB, iest równá linii prostéy CD; iest więc i liniia prostá AF, równá linii prostéy CG, i ponieważ liniia prostá AE, iest równá linii prostéy CE, będzie i kwadrat z linii prostéy AE, równy kwadratowi z linii prostéy EC, lecz kwadratowi z linii prostéy AE, równé są kwadraty z liniy prostych AF, FE, (XLVII. I.) kąt bowiém przy F, prosty iest, kwadratowi zaś z linii prostéy EC, równé są kwadraty z liniy prostych EG, GC, kąt bowiém przy G, iest prosty. Kwadraty więc z liniy prostych AF, FE, są równé kwadratóm z liniy prostych CG, GE, z których kwadratów ponieważ kwadrat z linii prostéy AF, iest równy kwadratowi z linii prostéy CG, iest bowiém liniia prostá AF, równá linii prostéy CG, pozostały więc kwadrat z linii prostéy FE, iest równy pozostałému kwadratowi z linii prostéy EG, dlá czego liniia prostá FE, iest równá linii prostéy EG. W kole zaś równo od śrzodka koła odległémi twiérdzą się bydź liniie prosté, gdy ze śrzodka koła poprowadzoné do nich prostopadłé są równé (IV. def: III.) liniie więc prosté AB, CD, są od śrzodka koła równoodległé.

Niechay znowu liniie prosté AB, CD, będą równoodległé od śrzodka koła, toiest niech prostopadłá FE, będzie równą prostopadłéy EG; powiadam: że liniia prostá AB, będzie równą linii prostéy CD. Uczyniwszy bowiém toż samo wykréślénié, dowiedziémy podobnież że liniia prostá AB, iest podwóyną linii prostéy AF, i że liniia prostá CD, iest podwóyną linii prostéy CG. Ponieważ liniia prostá AE, iest równą linii prostéy EC, będzie i kwadrat z linii prostéy AE, równy kwadratowi z linii prostéy EC, lecz kwadratowi z linii prostéy AE, równé są kwadraty z liniy prostych EF, FA, kwadratowi zaś z linii prostéy EC, są równé kwadraty z liniy prostych EG, GC, kwadraty więc z liniy prostych EF, FA, są równé kwadratóm z liniy prostych EG, GC; z których kwadratów, ponieważ kwadrat z linii prostéy FE, iest równy kwadratowi z linii prostéy EG, iest bowiém liniia prostá FE, równá linii prostéy EG, pozostały więc kwadrat z linii prostéy AF, iest równy pozostałému kwadratowi z linii prostéy CG, iest zatém liniia prostá AF, równá linii prostéy CG. Ze zaś liniia prostá AB, iest podwóyną linii prostéy AF, tak iako liniia prostá CD, iest podwóyną linii prostéy CG; iest więc liniia prostá AB, równá linii prostéy CD. W kole więc liniie prosté równé etc. etc. C. B. d. D.

PODANIE XV.

TWIERDZENIE.

Ze wszystkich liniy prostych w kole poprowadzonych, i na okręgu iego zakończonych, náywiększá iest śrzednica, z jnnych zaś każdá bliższá śrzodka koła, większá iest od odlegleyszéy; i z dwóch liniy prostych nierównych, większá bliższą iest śrzodka koła od mnieyszéy. Fig. 102.

Niech będzie koło ABCD, którégo śrzednicą iest liniia prostá AD, śrzodkiém zaś punkt E, i niech bliższą śrzodka koła będzie liniia prostá BC, odlegleyszą zaś od niego liniia prostá FG; powiadam: że śrzednica AD, iest náywiększą ze wszystkich liniy prostych w kole ABCD, poprowadzonych, a na okręgu iego zakończonych, i że liniia prostá BC, większą iest od linii prostéy FG.

Wyprowadźmy ze śrzodka koła do liniy prostych BC, FG, prostopadłé EH, EK, i wykréślmy liniie prosté EB, EC, EF. Ponieważ liniia prostá AE, iest równą linii prostéy EB, i liniia prostá ED, równá linii prostéy EC, będzie śrzednica AD, równá liniióm prostym BE, EC, lecz liniie prosté BE, EC, większé są od linii prostéy BC, (XX. I.) dlá czego i śrzednica AD, większą będzie od linii prostéy BC.

A że liniia prostá BC, bliższą iest śrzodka koła, odlegleyszą zaś od niego liniia prostá FG, będzié liniia prostopadłá EK; większą od linii prostopadłéy EH, (V. def. III.) iest zaś iak w poprzedzaiącém twiérdzéniu dowiedziono, liniia prostá BC, podwóyná linii prostéy

BH, i liniia prostá FG, podwóyná linii prostéy FK, a kwadraty z liniy prostych EH, HB, są równé kwadratóm z liniy prostych EK, KF, z których kwadratów, kwadrat z linii prostéy EH, iest mnieyszy od kwadratu z linii prostéy EK, iest bowiém liniia prostá EH, mnieyszá od linii prostéy EK, pozostały więc kwadrat z linii prostéy BH, większy będzie od pozostałégo kwadratu z linii prostéy FK, dlá czego i liniia prostá BH, większą będzie od linii prostéy FK, a zatém i liniia prostá BC, większą będzie od linii prostéy FG.

Niech znowu liniia prostá BC, większą będzie od linii prostéy FG, będzie liniia prostá BC, bliższą śrzodka niż liniia prostá FG, to-iest uczyniwszy tož samo wykréślénié, będzie liniia prostá EH, mnieyszą od linii prostéy EK. Ponieważ bowiém liniia prostá BC, większą iest od linii prostéy FG, będzie i liniia prostá BH, większą od linii prostéy FK. Kwadraty zaś z liniy prostych BH, HE, są równé kwadratóm z liniy prostych FK, KE, z których kwadratów, kwadrat z linii prostéy BH, iest większy od kwadratu z liniy prostéy FK, iest bowiém liniia prostá BH, większá od linii prostéy FK, pozostały więc kwadrat z linii prostéy EH, mnieyszy będzie od pozostałégo kwadratu z linii prostéy EK, i liniia prostá EH, mnieyszá będzie od linii prostéy EK. Ze wszystkich więc liniy prostych w kole etc. etc. C. B. d. D.

PODANIE XVI.

TWIERDZENIE.

Prostopadłá do śrzednicy koła z końca iéy wyprowadzoná, padá całá zewnątrz koła, a między tą prostopadłą i okręgiém żadna inná liniia prostá nie padnie: albo co iedno iest, okrąg koła przechodzi między prostopadłą do śrzednicy, i liniią prostą, którá z śrzednicą kąt ostry iakokolwiek wielki zawiera: czyli którá zawiera kąt iakokolwiek mały z prostopadłą do śrzednicy. Fig. 103.

Niech będzie koło ABC, którégo śrzodkiém iest punkt D, a śrzednicą liniia prostá

AB; powiadam: ze prostopadłá z końca A, śrzednicy AB, do téyże śrzednicy wyprowadzoná, padá całá zewnątrz koła.

Przypuściwszy bowiém, ieżeli to bydź może, że padá wewnątrz iak liniia prostá AC, poprowadźmy liniią prostą DC. Ponieważ liniia prostá DA, iest równá linii prostéy DC, będzie i kąt DAC, równy kątowi ACD, (V. I.) iest zaś kąt DAC, prosty, prostym więc iest i kąt ACD; dlá czego kąty DAC, ACD, są równé dwóm kątóm prostym, co bydź nié może (XVII. I.). Z punktu więc A, do śrzednicy BA, wyprowadzoná prostopadłá nie padnie wewnątrz koła, a podobnież okażémy, że nie padnie ani na okrąg koła, padnie więc zewnątrz w położéniu iak AE.

Mówię ieszcze: że między tąż prostopadłą AE, i okręgiém ABC, żadna inná liniia prostá nie padá. Jeżeli bowiém bydź to może, niech padá w położéniu iak liniia prostá FA, i z punktu D, do linii prostéy FA, wyprowadźmy prostopadłą DHG, (XII. I.), ponieważ kąt AGD, iest prosty, kąt zaś DAG, mnieyszy iest od prostégo, będzie liniia prostá DA, więkkszą od linii prostéy DG, iest zaś liniia prostá DA, równá linii prostéy DH; więc liniia prostá DH, większą iest od linii prostéy DG, mnieyszá od większéy co bydź nié może; zaczém między liniią prostopadłą i okręgiém, żadna inná liniia prostá nie padnie: albo co iedno iest okrąg koła przechodzi między prostopadłą do śrzednicy i liniią prostą która z śrzednicą kąt ostry iakokolwiek wielki zawiéra, lub którá zawiera kąt iakokolwiek mały z prostopadłą do śrżednicy.

Wniosek. Wypadá stąd oczywiście: że prostopadłá do śrzednicy koła z końca iey wyprowadzoná dotyka się okręgu koła, i że taż prostopadłá dotyká się go w jednym tylko punkcie, ponieważ dowiedziono iest, że którá liniia prostá w punktach dwóch schodzi się z okręgiém koła, ta wewnątrz koła padá (II. III.) Nakoniec że w jednym i tymże samym punkcie okręgu, iedna tylko liniia prostá może się dotykać koła.

PODANIE XVII.

ZAGADNIENIE.

Z danégo punktu za kołém, lub na iego okręgu wyprowadzić liniią prostą, któraby się danégo koła dotykała. Fig. 104.

Náprzód. Niech będzie dany punkt A, za danéın kołém BCD, potrzeba z punktu A, wyprowadzić liniią prostą koła danégo dotykaiącą się.

Wynaydźmy śrzodek koła E, (I. III.) i poprowadźmy liniią prostą AE; ze śrzodka zaś E, długością linii prostéy EA, wykréślmy koło AFG; i z punktu D, do linii prostéy EA, wyprowadźmy prostopadłą liniią DF, (XI. I.) poprowadźmy ieszcze liniie prosté EBF, AB. Powiadam: że z punktu A, poprowadzoná liniia prostá AB, dotyká się koła BCD.

Ponieważ punkt E, śrzodkiém iest kół BCD, AFG, będzie liniia prostá EA, równá linii prostéy EF, i liniia prostá ED, równá linii prostéy EB; dwie więc liniie prosté AE, EB, są równé dwóm liniióm prostym FE, ED, i obeymuią kąt spólny przy E, iest więc podstawa DF, równá podstawie AB, i tróykąt EDF, równy tróykątowi EBA, i pozostałé kąty równé pozostałym kątom (IV. I.) kąt zatém EBA, iest równy kątowi EDF, prosty zaś iest kąt EDF, więc i kąt EBA, iest prosty, iest zaś liniia prostá EB, że śrzodka koła wyprowadzoná, a prostopadłá do śrzednicy kołá z końca iey wyprowadzoná dotyká się koła (w. XVI. III.) zaczém liniia prostá AB, dotyká się koła.

Niech znowu dany będzie punkt na okręgu koła, iak iest punkt D; poprowadźmy do śrzodka liniią prostą DE, a z punktu D, prostopadłą DF, do linii prostéy DE, ta dotykać się będzie koła. Z punktu więc danégo wyprowadzoná iest liniia prostá dotykaiącá się koła danégo. C. B. d. R.

PODANIE XVIII.

TWIERDZENIE.

Jeżeli liniia prostá dotyká się okręgu koła, a ze śrzodka koła wyprowadzoná będzie liniia prostá do punktu dotykaniá się, ta będzie prostopadłą do stycznéy. Fig. 105.

Niech liniia prostá DE, dotyká się okręgu koła ABC, w punkcie C, ze śrzodka F, tegoż koła ABC, poprowadźmy liniią prostą FC, powiadam: że liniia prostá FC, do linii prostéy DE, iest prostopadłą.

Gdyby albowiém nie była prostopadłą, wyprowadźmy z punktu F, do téyże linii prostéy DE, prostopadłą FBG, (XII. I.). Ponieważ kąt FGC, iest prosty, będzie kąt GCF, ostrym, (XVII. I.) większému zaś kątowi przeciwległy iest bok większy, (XIX. I.) większá zatém iest liniia prostá FC, od linii prostéy FG, toiest mnieyszá od większéy, co bydź nié może, nie iest przeto liniia prostá FG, prostopadłą do linii prostéy DE: podobnież okażemy, że żadna inná liniia prócz saméy linii prostéy FC, nie iest prostopadłą do linii prostéy DE, iest zatém liniia prostá FC, prostopadłą do linii prostéy DE. Jeżeli więc liniia prostá dotyká się okręgu koła etc. etc. C. B. d. D.

PODANIE XIX.

TWIERDZENIE.

Jeżeli liniia prostá dotyká się okręgu koła, z punktu zaś dotknięciá wyprowadzoná będzie do téyże stycznéy prostopadłá, na prostopadłéy będzie śrzodek koła. Fig. 106.

Niech liniia prostá DE, dotyká się okręgu koła ABC, w punkcie C, i z punktu C, do stycznéy DE, niech wyprowadzoná będzie prostopadłá CA. Powiadam: że na prostopadłéy CA, znayduie się śrzodek koła.

Przypuściwszy bowiém, że na linii prostéy CA, nie znayduie się śrzodek koła ABC, pozwólmy ieżeli bydź może, że śrzodek tegoż koła iest w punkcie F, i poprowadźmy liniią prostą, CF. Ponieważ okręgu koła ABC, dotyká się liniia prostá DE, a ze śrzodka koła do punktu dotknięciá poprowadzoná iest liniia prostá FC, będzie liniia prostá FC, do linii prostéy DE, prostopadłą (XVIII. III.); kąt więc FCE, prosty iest, iest zaś i kąt ACE, prosty, kąt zatém FCE, iest równy kątowi ACE, mnieyszy większému, co bydź nié może. Nie iest przeto punkt F, śrzodkiém koła ABC, podobnież okażémy, że żaden inny punkt prócz punktu na linii prostéy CA, nie iest śrzodkiém koła ABC, zaczém ténże śrzodek iest na linii prostéy CA. Jeżeli więc liniia prostá dotyká się okręgu koła etc. etc. C. B. d. D.

PODANIE XX.

TWIERDZENIE.

W kole, kąt maiący swóy wiérzchołek we śrzodku, iest podwóyny kąta maiącégo swóy wiérzchołek na okręgu koła, gdy tęż samę część okręgu maią za podstawę: czyli co iedno iest, gdy ramionami swémi tęż samę część okręgu obeymuią. Fig. 107.

Niech będzie koło ABC, i we śrzodku koła maiący swóy wiérzchołek kąt BEC, na okręgu zaś koła kąt BAC, i niech obadwa kąty tęż samę część okręgu BC, maią za podstawę; powiadam: że kąt BEC, iest podwóyny kąta BAC.

Náprzód. Niech śrzodek E, będzie wewnątrz kąta BAC, poprowadźmy liniią prostą AE, i tę do punktu F, przedłużmy. Ponieważ liniia prostá EA, iest równá linii prostéy EB, będzie i kąt EAB, równy kątowi EBA, (V. I.), kąty więc EAB, EBA, są podwóynémi samégo kąta EAB; lecz kąt BEF, iest równy kątóm EAB, EBA, (XXXII. I.) więc i kąt BEF, iest samégo kąta EAB, podwóyny, diá téyże samey przyczyny i kąt FEC, podwóyny iest samégo kąta EAC, cały zatém kąt BEC, podwóyny będzie całégo kąta BAC.

Niech znowu kąt BDC, má takié położénié, iżby śrzodek E, był zewnątrz kąta BDC, poprowadziwszy liniią prostą DE, przedłużmy ią do G; dowiedziémy podobnież: że kąt GEC, podwóynym iest kąta GDC, z których kąt GEB, iest podwóyny samégo kąta GDB; pozostały zatém kąt BEC, iest podwóynym pozostałégo kąta BDC. W kole więc, kąt maiący swóy wiérzchołek etc. etc. C. B. d. D.

PODANIE XXI.

TWIERDZENIE.

Kąty w tymże samym odcinku koła, są między sobą równé. Fig. 108.

Niech będzie koło ABCD, a w tymże samym odcinku BAED, niech będą kąty BAD, BED; powiadam: że té kąty są między sobą równé.

Wynaydźmy śrzodek koła ABCD, tén niech będzie w punkcie F; i niech náprzód odcinek BAED, większy będzie od półkola, poprowadźmy liniie prosté BF, FD. Ponieważ kąt BFD, iest we śrzodku, kąt zaś BAD, iest przy okręgu, i tęż samę okręgu część BCD, za podstawę maią, będzie kąt BFD, podwóyny kąta BAD, (XX. III.) dlá téy saméy przyczyny kąt BFD, iest też podwóyny kąta BED, kąt więc BAD, będzie równy kątowi BED.

Niech znowu odcinek BAED, mnieyszy będzie od półkola, a w niém niech będą kąty BAD, BED, będą té między sobą równé.

Poprowadziwszy bowiém do śrzodka F,

liniią prostą AF, przedłużmy ią do punktu C, i poprowadźmy liniią prostą CE. Odcinek więc BAEC, większy iest od półkola, dlá czego kąty w nim BAC, BEC, są między sobą równé; dlá téy saméy przyczyny są równé między sobą kąty CAD, CED, cały więc kąt BAD, iest równy całému kątowi BED. Kąty zatém w tymże samym odcinku koła etc. etc. C. B. d. D.

PODANIE XXII.

TWIERDZENIE.

Kąty przeciwné czworokątów w koła wpisanych, są równé dwóm kątóm prostym. Fig. 109.

Niech będzie koło ABCD, i wpisany w niego czworokąt ABCD, powiadam: że kąty przeciwné tegoż czworokąta, są równé dwóm kątóm prostym.

Poprowadźmy liniie prosté AC, BD; ponieważ w każdym tróykącie trzy kąty są równé dwóm kątóm prostym (XXXII. I.) będą tróykąta ABC, trzy kąty CAB, ABC, BCA, równé dwóm kątóm prostym (XXI. III.), równy zaś iest kąt CAB, kątowi CDB, w tym samym bowiém są odcinku BADC; kąt zaś ACB, równy iest kątowi ADB, są albowiém w tym samym odcinku ADCB, cały więc kąt ADC, iest równy kątóm BAC, ACD, przydawszy spólny kąt ABC; będą kąty ABC, CAB, BCA, równé kątóm ABC, ADC, lecz kąty ABC, CAB, BCA, są równé dwóm kątóm prostym; więc i kąty ABC, ADC, równé będą dwóm kątóm prostym: podobnież okażémy że i kąty BAD, DCB, są równé dwóm kątóm prostym. Kąty zatém przeciwné czworokątów etc. etc. C. B. d. D.

PODANIE XXIII.

TWIERDZENIE.

Na téyże samého linii prostéy nié możná wykréślić dwóch odcinków kół po téyże samey stronie podobnych, któreby nie przystały do siebie. Fig. 110.

Jeżeliby albowiém bydź to mogło, na téyże saméy linii prostéy AB, z jednéy i teyże saméy strony wykréślmy dwa podobné kół odcinki ACB, ADB, do siebie nawzaiém nieprzystaiącé. Ponieważ koła ACB, okrąg, przeciná okrąg koła ADB, we dwóch punktach A, B, piérwszy więc okrąg nie będzie w jnnym więcéy punkcie przecinać okręgu drugiégo (X. III.), odcinek więc iedén musi padać wewnątrz odcinka drugiégo: niech odcinek ACB, padá wewnątrz odcinka ADB, i poprowadźmy liniią prostą BCD, tak iako i liniie prosté CA, DA. Ponieważ odcinek ACB, podobny iest odcinkowi ADB, podobné zaś kół odcinki obeymuią kąty równé (XI. def. III.) będzie kąt ACB, równy kątowi ADB, zewnętrzny wewnętrznému, co bydź nié może (XVI. I.). Więc na téyże saméy linii prostéy nié możná etc. etc. C. B. d. D.

PODANIE XXIV.

TWIERDZENIE.

Wykréślone na równych liniiach prostych podobné kół odcinki, są między sobą równé.

Niech będą na równych liniiach prostych

AB, CD, wykréślóné podobné kół odcinki AEB, CFD, powiadam: że odcinek AEB, iest równy odcinkowi CFD. Fig. 111.

Przyłożywszy bowiém odcinek AEB, do odcinka CFD, tak, żeby punkt A, padł na punkt C, i żeby liniia prostá AB, przystała do linii prostéy CD, padnie i punkt B, na punkt D, dlá tego że liniia prostá AB, iest równá linii prostéy CD; za przystaniém więc linii prostéy AB, do linii prostéy CD, nié może nie przystać odcinek AEB, do odcinka CFD, (XXIII. III.) przystanie zatém i będzie iemu równy. Wykréśloné zatém na równych liniiach prostych etc. etc. C. B. d. D.

PODANIE XXV.

ZAGADNIENIE.

Maiąc dany odcinek koła, opisać koło, którego iest odcinkiém. Fig. 112. 1°, 2do, 3tio.

Niech będzie dany koła odcinek ABC; trzeba opisać koło, którego część ABC, iest odcinkiém.

Podzielmy liniią prostą AC, na dwie równé części (X. I.) w punkcie D, i z punktu D, do linii prostéy AC, wyprowadźmy prostopadłą DB, (XI. I.) poprowadźmy nadto liniią prostą AB; ieżeliby kąty ABD, BAD, były między sobą równé, będzie liniia prostá BD, równá linii prostéy DA, (VI. I.) a zatém i linii prostéy DC, a ponieważ trzy liniie prosté DA, DB, CD, są między sobą równé, będzie punkt D, śrzodkiém koła (IX. III.) ze śrzodka więc D, długością równą iednéy z liniy prostych DA, DB, DC, zakréśliwszy koło; okrąg iego przeydzie przez pozostałé punkta, i będzie opisané koło, którégo ABC, iest odcinkiém. Jeżeliby zaś kąty ABD, BAD, były między sobą nie równémi, na linii prostéy AB, i przy punkcie na niéy A, wykréślmy kąt BAE, równy kątowi ABD, (XXIII. I.) liniią prostą DB, przedłużmy do E, i poprowadźmy liniią prostą EC. Ponieważ kąt ABE, iest równy kątowi BAE, będzie i liniia prostá BE, równá linii prostéy EA; i ponieważ liniia prostá AD, iest równá linii prostéy DC, spólną zaś iest liniia prostá DE, dwie więc liniie prosté AD, DE, są równé dwóm liniióm prostym CD, DE, iedna drugiéy i kąt ADE, iest równy kątowi CDE, są albowiém prosté, zaczém i podstawa AE, iest równą podstawie EC, (IV. I.) lecz dowiedzioná liniia prostá AE, bydź równą linii prostéy EB, przeto i liniia prostá BE, iest równá linii prostéy CE: i dlá tego trzy liniie prosté, AE, EB, EC, są między sobą równé, dlá czego i punkt E, iest śrzodkiém koła, ze śrzodka więc E, długością równą iednéy ze trzech liniy prostych AE, EB, EC, zakréśliwszy koło, okrąg koła przeydzie przez inné punkta, i będzie opisané koło, którégo ABC, iest odcinkiém: oczywistá zaś iest, że ieżeli kąt ABD, większy był od kąta BAD, śrzodek E, padnie zewnątrz danégo odcinka ABC, który dlá tego w tym przypadku mnieyszy będzie od półkola. Jeżeliby zaś kąt ABD, był mnieyszy od kąta BAD, śrzodek E, padnie wewnątrz odcinka ABC, który dlá tego większy będzie od półkola. Maiąc więc dany odcinęk koła, opisané iest koło do którégo odcinek należy C. B. d. R.

PODANIE XXVI.

TWIERDZENIE.

W kołach równych, kąty równé w śrzodkach lub przy okręgach wspiéraią się na równych łukach. Fig. 113.

Niech będą koła równé ABC, DEF, a w nich kąty równé w śrzodkach BGC, EHF; przy okręgach zaś BAC, EDF. Powiadam: że łuk BKC, iest równy łukowi ELF.

Poprowadźmy liniie prosté BC, EF; ponieważ koła ABC, DEF, są równé, promienie tychże kół będą równé, dwie więc liniie prosté BG, GC, są równé dwóm liniióm prostym EH, HF: i kąt przy śrzodku G, iest równy kątowi przy H, podstawa więc BC, iest równá podstawie EF, (IV. I.) i że kąt przy okręgu A, iest równy kątowi przy okręgu D, odcinek więc BAC, podobny będzie odcinkowi EDF (XI. def: III.); są zaś obadwa odcinki na równych liniiach prostych BC, EF; a odcinki kół podobné na równych liniiach prostych wykréśloné są równé i przystaią do siebie (XXIV. III.); odcinek więc BAC, iest równy odcinkowi EDF, lecz i całé koło ABC, iest równé całému kołu DEF, pozostały zatém odcinek, BKC, iest równy pozostałému odcinkowi ELF, łuk więc BKC, będzie równy łukowi ELF. W kołach zatém równych, kąty równé etc. etc. C. B. d. D.

PODANIE XXVII.

TWIERDZENIE.

W kołach równych, kąty we śrzodkach lub przy okręgach na równych łukach wspieraiącé się, są między sobą równé. Fig. 114.

Niech w kołach równych ABC, DEF, wspiéraią się na łukach równych BC, EF, kąty we śrzodkach BGC, EHF: przy okręgach zaś kąty BAC, EDF; powiadam: że kąt BGC, iest równy kątowi EHF, i że kąt BAC, iest równy kątowi EDF.

Jeżeli albowiém kąt BGC, iest równy kątowi EHF, oczywistá iest, że i kąt BAC, iest równy kątowi EDF, (XX. III.). Gdyby zaś kąt BGC, nie był równy kątowi EHF, iedén z nich byłby koniecznie większy od drugiégo. Przypuściwszy że kąt BGC, większy iest od kąta EHF, wykréślmy na linii prostéy BG, i przy punkcie na niéy G, kąt BGK, równy kątowi EHF, (XXIII. I.) kąty zaś równé we śrzodkach kół równych wspiéraią się na równych łukach, (XXVI. III.): iest więc łuk BK, równy łukowi EF, lecz łuk EF, iest równy łukowi BC, więc i łuk BK, iest równy łukowi BC, mnieyszy większému, co bydź nié może; nie iest zatém kąt BGC, nierówny kątowi EHF, więc kąt BGC, iest równy kątowi EHF, lecz kąta BGC, iest połową kąt przy okręgu A, kąta zaś EHF, iest połową kąt przy okręgu D, kąt zatém przy okręgu A, iest równy kątowi przy okręgu D. W kołach więc równych etc. etc. C. B. d. D.

PODANIE XXVIII.

TWIERDZENIE.

W kołach równych, cięciwy równé obeymuią łuki równé, tak: że łuk większy większému, mnieyszy mnieyszému iest równy. Fig. 115.

Niech będą równé koła ABC, DEF, a w nich cięciwy równé BC, EF, obeymuiącé łuki większé BAC, EDF, mnieyszé zaś BGC, EHF, powiadam: że łuk większy BAC, iest równy łukowi większému EDF, i że łuk mnieyszy BGC, iest równy łukowi mnieyszému EHF.

Wynalazłszy śrzodki kół [I. III.] w punktach K, L, poprowadźmy liniie prosté BK, KC, EL, LF, ponieważ koła są równé, będą i ich promienie równé, dwie zatém liniie prosté BK, KC, są równé dwóm liniióm prostym EL, LF, i podstawa BC, iest równá podstawie EF, kąt więc BKC, iest równy kątowi ELF, (VIII. I.) równé zaś kąty we śrzodkach kół wspieraią się na równych łukach, (XXVI. III.) łuk więc BGC, iest równy łukowi EHF, lecz cały okrąg, ABC, iest równy całému okręgowi EDF, pozostały zatém łuk BAC, iest równy pozostałému łukowi EDF. W kołach więc równych etc. etc. C. B. d. D.

PODANIE XXIX.

TWIERDZENIE.

W kołach równych, równé łuki obeymuią cięciwy równé. Fig. 115.

Niech będą koła równé ABC, DEF, na ich okręgach niech będą wzięté łuki równé BGC, EHF, poprowadźmy cięciwy BC, EF; powiadam: że cięciwa BC, równá iest cięciwie EF.

Wynalazłszy śrzodki (I. III.) kół w punktach K, L, poprowadźmy liniie prosté BK, KC, EL, LF. Ponieważ łuk BGC, iest równy łukowi EHF, będzie i kąt BKC, równy kątowi ELF, (XXVII. III) i ponieważ koła ABC, DEF, są równé, będą i promienie tychże kół równé; dwie więc liniie prosté BK, KC, są równé dwóm liniióm prostym EL, LF, obeymuią nadto téż liniie kąty równé, podstawa zatém BC, iest równá podstawie EF, (IV. I.). W kołách więc równych, równé łuki etc. etc. C. B. d. D.

PODANIE XXX.

ZAGADNIENIE.

Dany łuk podzielić na dwie równé części. Fig. 116.

Niech będzie dany łuk ADB, potrzeba łuk ADB, podzielić na dwie równé części.

Poprowadźmy liniią prostą AB, i tę w punkcie C, podzielmy na dwie równé części (X. I.); z punktu zaś C, do linii prostéy AB, wyprowadźmy prostopadłą CD, i poprowadźmy liniie prosté AD, DB: ponieważ liniia prostá AC, iest równá linii prostéy CB, spólną zaś iest liniia prostá CD; dwie więc liniie prosté AC, CD, są równé dwóm liniióm prostym BC, CD, i kąt ACD, iest równy kątowi BCD, iako prosty prostému; przeto i podstawa AD, iest równá podstawie BD, (IV. I.) równé zaś liniie prosté toiest: równé cięciwy zaymuią łuki równé (XXVIII. III), toiest łuk większy równy łukowi większému, łuk zaś mnieyszy równy łukowi mnieyszému, a każdy z łuków AD, DB, mnieyszy iest od półokręgu, łuk zatém DA, równy iest łukowi DB. Przeto dany łuk podzielony iest na dwie równé części. C. B. d. R.

PODANIE XXXI.

TWIERDZENIE.

W kole, kąt w półkolu iest prosty; z kątów zaś w odcinkach nierównych: kąt w większym odcinku mnieyszy iest od prostégo; a w mnieyszym odcinku większy od prostégo. Fig. 117.

Niech będzie koło ABCD, śrzednicą zaś iego niech będzie liniia prostá BC, śrzodkiém punkt E; poprowadźmy cięciwę CA, dzielącą koło na odcinki ABC, ADC, i liniie prosté BA, AD, DC. Powiadam: że kąt w półkolu BAC, iest prosty, kąt zaś w większym od półkola odcinku ABC, toiest kąt ABC, że iest mnieyszy od prostégo, i że kąt ADC, w mnieyszym od półkola odcinku ADC, większy iest od prostégo.

Poprowadźmy liniią prostą AE, i liniią prostą BA, przedłużmy do F. Ponieważ liniia prostá BE, iest równá linii prostéy EA, będzie i kąt EAB, równy kątowi EBA, (V. I.) znowu ponieważ liniia prostá AE, iest równá linii prostey EC, będzie i kąt EAC, równy kątowi ECA, cały więc kąt BAC, iest równy kątóm dwóm ABC, ACB, iest zaś i kąt FAC, zewnętrzny tróykąta ABC, równy dwóm kątóm ABC, ACB (XXXII. I.); kąt zatém BAC, iest równy kątowi FAC, i dlá tego każdy z nich iest prosty (X. def. I.) iest więc w półkolu kąt CAB, prosty.

A ponieważ tróykąta ABC, dwa kąty ABC, BAC, są mnieyszé od dwóch kątów prostych, (XVII. I.) prostym zaś iest kąt BAC, będzie kąt ABC, mnieyszy od kąta prostégo; iest zaś kątém w odcinku ABC, większym od półkola.

J ponieważ czworokąt ABCD, iest wpisany w koło, w czworokątach zaś w koła wpisanych kąty przeciwné są równé dwóm kątóm prostym (XXII. III.) będą kąty ABC, ADC, równé dwóm kątóm prostym; lecz kąt ABC, mnieyszy iest od prostégo, pozostały więc kąt

ADC, będzie większy od prostégo, toiest kąt w odcinku ADC, mnieyszym od półkola C. B. d. D.

Wniosek. Wypadá stąd oczywiście: że ieżeli w tróykącie kąt iedén równy iest dwóm pozostałym, ténże kąt iest prosty; bo iému przyległy iest równy tymże samym dwóm kątóm: kiedy zaś kąty przyległé są równé, każdy z nich iest prosty (def: X. I.).

PODANIE XXXII.

TWIERDZENIE.

Jeżeli okręgu koła dotyká się liniia prostá, z punktu zaś dotknięciá poprowadzoná będzie cięciwa, kąty zawarté między cięciwą i styczną, będą równé kątóm w odcinkach koła naprzemian. Fig. 118.

Niech okręgu koła ABCD, dotyká się liniia prostá EF, w punkcie B, i z punktu B, niech będzie w jakiémkolwiek położéniu poprowadzoná cięciwa BD; powiadam: że kąty którė cięciwa BD, ze styczną EF, czyni, są równé kątóm w odcinkach koła naprzemian, toiest, że kąt FBD, iest równy kątowi w odcinku DAB; kąt zaś DBE, że iest równy kątowi w odcinku BCD.

Z punktu B, wyprowadźmy do linii stycznéy EF, prostopadłą BA, (XI. I.) i wziąwszy na łuku BD, punkt gdziekolwiek C, poprowadźmy liniie prosté AD, DC, CB.

Ponieważ okręgu koła ABCD, dotyká się liniia prostá EF, w punkcie B, z punktu zaś dotknięciá B, wyprowadzoná iest do linii stycznéy EF, prostopadłá BA; będzie na téyże prostopadłéy BA, śrzodek koła ABCD, (XIX. III.); kąt zatém ADB, w półkolu iest prosty (XXXI. III.); dlá czego pozostałé kąty BAD, ABD, są równé iednému kątowi prostému (XXXII. I.) lecz i kąt ABF, iest prosty; więc kąt ABF, równy iest kątóm BAD, ABD: odiąwszy kąt spólny ABD, będzie pozostały kąt DBF, równy kątowi w odcinku koła naprzemian, toiest kątowi BAD, a ponieważ w koło wpisany iest czworokąt ABCD, kąty iego przeciwné są równé dwóm kątóm prostym (XXII. III.) będą więc kąty BAD, BCD, równé kątóm DBF, DBE, (XIII. I.) z których kąt DBF, dowiedziony bydź równym kątowi BAD; pozostały więc kąt DBE, będzie równy pozostałému w odcinku koła naprzemian kątowi DCB. Jeżeli zatém okręgu koła dotyká się liniia prostá etc. etc. C. B. d. D.

PODANIE XXXIII.

ZAGADNIENIE.

Na danéy linii prostéy wykréślić odcinek koła, któryby zawiérał kąt równy kątowi danému. Fig. 119. 1°, 2do, 3tio.

Niech będzie daná liniia prostá AB, i kąt dany C, trzeba na danéy linii prostéy AB, wykréślić odcinek koła, któryby zawiérał kąt równy kątowi danému C.

Naprzód niechby kąt dany C, był prostym, podzielmy liniią prostą AB, w punkcie F, na dwie równé części i długością linii prostéy AF, zakréśliwszy półkole AHB, będzie kąt AHB, w półkolu, równy kątowi prostému C, (XXXI. III.).

Jeżeliby zaś kąt dany C, niebył prosty, na linii prostéy AB, i przy punkcie na niéy A, wykréślmy kąt BAD, równy kątowi C, (XXIII. I.) z punktu zaś A, wyprowadźmy do linii prostéy AD, prostopadłą AE (XI. I); przetniymy liniią prostą AB, w punkcie F, na dwie równé części, z punktu F, wyprowadźmy do linii prostéy AB, prostopadłą FG, i poprowadźmy liniią prostą GB. Ponieważ liniia prostá AF, iest równá linii prostéy FB, spólną zaś iest liniia prostá FG, dwie liniie prosté AF, FG, są równé dwóm liniióm prostym BF, FG, i kąt AFG iest równy kątowi BFG; podstawa więc AG iest równá podstawie GB, (IV. I.) z punktu zatém G, iako ze śrzodka długością linii prostéy GA, zakréślony okrąg koła, przechodzić będzie i przez punkt B. Niech tak zakréślony okrąg koła będzie AHB. Ponieważ z punktu A, końca śrzednicy AE wyprowadzoná iest liniia prostopadłá AD, do śrzednicy AE, liniia prostopadłá AD, dotykać się będzie okręgu koła, i ponieważ liniia prostá AD dotyká się okręgu koła AHB, a z punktu dotknięciá A, poprowadzoná iest cięciwa AB, będzie kąt DAB, równy kątowi w odcinku koła naprzemian AHB. Lecz kąt DAB równy iest kątowi danému C, więc i kąt C, iest równy kątowi w odcinku koła naprzemian AHB. Przeto na danéy linii prostéy AB wykreślony iest odcinek koła AHB, który zaymuie kąt równy kątowi danému C. B. d. R.

PODANIE XXXIV.

ZAGADNIENIE.

Z koła danégo oddzielić odcinek, któryby zawiérał kąt równy kątowi danému. Fig: 120.

Niech będzie dané koło ABC i dany kąt D; trzeba z koła ABC, oddzielić odcinek, któryby zawiérał kąt równy kątowi D.

Poprowadźmy liniią prostą EF, dotykaiącą się okręgu koła ABC, w punkcie B, (XVII. III.) i na linii prostéy BF, przy punkcie na niéy B, wykréślmy kąt FBC, równy kątowi D. Ponieważ okręgu koła ABC, dotyká się liniia prostá EF, i z punktu dotknięciá B, poprowadzoná iest cięciwa BC, będzie kąt FBC, równy kątowi w odcinku koła naprzemian BAC, (XXXII. III.) lecz kąt FBC iest równy kątowi D; kąt więc w odcinku BAC, będzie równy kątowi D. Z danégo przeto koła BAC, oddzielony iest odcinek BAC zawiéraiący kąt równy kątowi danému D. C. B. d. R.

PODANIE XXXV.

TWIERDZENIE.

Jeżeli w kole dwie cięciwy przecinaią się nawzaiem, prostokąt zawarty odcinkami iednéy cięciwy, będzie równy prostokątowi zawartému odcinkami cięciwy drugiéy. Fig: 121. 1°, 2do, 3tio, 4to.

Niechay w kole ABCD, przecinaią się nawzaiem dwie cięciwy AC, BD, w punkcie E, powiadam: że prostokąt zawarty odcinkami AE, EC iednéy cięciwy AC, iest równy prostokątowi zawartému odcinkami BE, ED, cięciwy drugiéy.

Jeżeli cięciwy AC, BD, przez śrzodek koła przechodzą, tak, że punkt E, iest śrzodkiém koła ABCD, oczywistá iest, że przy równości liniy prostych AE, EC, BE, ED, iest i prostokąt zawarty odcinkami AE, EC, równy prostokątowi zawartému odcinkami BE, ED.

Lecz niech iedna z cięciw BD, przechodzi przez śrzodek, i niech przeciná pod kątami prostémi drugą cięciwę AC, nieprzechodzącą przez śrzodek w punkcie E. Przeciąwszy cięciwę BD, na dwie równé części w punkcie F, będzie punkt F, śrzodkiém koła ABCD, poprowadźmy nadto liniią prostą AF. Ponieważ liniia prostá BD, przez śrzodek koła poprowadzoná przeciná liniią prostą AC, nie przez śrzodek koła poprowadzoną pod kątami prostémi w punkcie E, będą równé liniie prosté AE, EC,(III. III.). Że zaś liniia prostá BD, przeciętá iest na równé części w punkcie F, a na nierówne części w punkcie E, będzie prostokąt zawarty odcinkami BE, ED, wraz z kwadratém z linii prostéy EF, między podziałami zawartéy, równy kwadratowi z linii prostéy FB, (V. II.) toiest z linii prostéy FA; kwadratowi zaś z linii prostéy FA, równé są kwadraty z liniy prostych AE, EF, (XLVII. I.) prostokąt więc zawarty odcinkami BE, ED, wraz z kwadratém z linii prostéy FE, równy iest kwadratóm z linii prostéy AE, EF: odiąwszy spólny kwadrat z linii prostéy EF, będzie pozostały prostokąt zawarty odcinkami BE, ED, równy pozostałému kwadratowi z linii prostéy AE, toiest prostokątowi zawartému odcinkami AE, EC.

Niechay ieszcze cięciwa BD, przez śrzodek poprowadzoná przeciná drugą cięciwę AC, nie przez śrzodek poprowadzoną, ani pod kątami prostémi w punkcie E. Podzieliwszy znowu liniią prostą BD, na dwie równé części w punkcie F, punkt F, będzie śrzodkiém koła. Wyprowadźmy liniią prostą AF, ze śrzodka zaś F, wyprowadźmy do linii prostéy AC, prostopadłą FG (XII. I.); iest więc liniia prostá AG, równá linii prostéy GC, i dlá tego prostokąt zawarty odcinkami AE, EC, wraz z kwadratém z linii prostéy między podziałami zawartéy EG, równy kwadratowi z linii prostéy AG, przydawszy spólny kwadrat z linii prostéy GF, będzie prostokąt zawarty odcinkami AE, EC, wraz z kwadratami z liniy prostych EG, GF, równy kwadratóm z liniy prostych AG, GF, lecz kwadratóm z liniy prostych EG, GF, równy iest kwadrat z linii prostéy EF; kwadratóm zaś z liniy prostych AG, GF równy iest kwadrat z linii prostéy AF, więc prostokąt z odcinków AE, EC, wraz z kwadratém z linii prostéy EF, równy iest kwadratowi z linii prostéy AF, toiest z linii prostéy FB. Kwadratowi znowu z linii prostéy FB, równy iest prostokąt z odcinków BE, ED, wraz z kwadratém z linii prostéy EF; zaczém prostokąt z odcinków AE, EC, wraz z kwadratém z linii prostéy EF, równy iest prostokątowi z odcinków BE, ED, wraz z kwadratém z linii prostéy EF: odiąwszy spólny kwadrat z linii prostéy EF, będzie pozostały prostokąt z odcinków AE, EC, równy pozostałému prostokątowi z odcinków BE, ED.

Niechay nakoniec żadna z cięciw AC, BD, nie przechodzi przez śrzodek koła, wynaydźmy śrzodek koła ABCD, tén niech będzie w punkcie F, i przez punkt E, przecięciá się wzaiemnégo cięciw AC, BD, poprowadźmy śrzednicę

GEFH. Ponieważ prostokąt zawarty odcinkami AE, EC, dowiedziony iest bydź równy prostokątowi z odcinków GE, EH: i podobnież prostokąt z odcinków BE, ED, iest równy temuż samému prostokątowi z odcinków GE, EH; będzie prostokąt zawarty odcinkami AE, EC, równy prostokątowi z odcinków BE, ED. Jeżeli więc w kole dwie cięciwy etc. etc. C. B. d. D.

PODANIE XXXVI.

TWIERDZENIE.

Jeżeli z punktu za kołém obranégo, poprowadzimy dwie liniie prosté, z których iedna przecinałaby koło, a drugá była styczną: prostokąt zawarty całą liniią przecinaiącą, i odcinkiém iéy za kołem, równy będzie kwadratowi ze styczney. Fig. 122 1° i 2do.

Z obranégo za kołém ABC, punktu D, niech poprowadzoné będą dwie liniie prosté DCA, DB; tak: żeby liniia prostá DCA, przecinała koło, w punktach A, C, okręgu iego, drugá zaś liniia prostá DB, była styczną. Powiadam: że prostokąt zawarty liniiami prostémi AD, DC, równy będzie kwadratowi z linii prostéy DB.

Albo liniia przecinaiącá DCA, przechodzi przez śrzodek koła albo nie; niechay náprzód przechodzi przez śrzodek, niech punkt E, będzie śrzodkiém koła ABC: poprowadziwszy liniią prostą EB, będzie kąt EBD, prosty (XVIII. III.). Ponieważ liniia prostá AC, przeciętá iest na dwie równé części w punkcie E, i przedłużoná do punktu D: będzie prostokąt z linii prostéy AD, i z przedłużéniá DC, wraz z kwadratém z linii prostéy EC, równy kwadratowi z linii prostéy ED, (VI. II.): równá zaś iest liniia prostá CE, linii prostéy EB, zaczém prostokąt z liniy prostych AD, DC, wraz z kwadratém z linii prostéy EB, iest równy kwadratowi z linii prostéy ED; lecz kwadrat z linii prostéy ED, iest równy kwadratóm z linii prostych EB, BD, (LXVII. I.), iest bowiém kąt EBD, prosty: prostokąt więc z liniy prostych AD, DC, wraz z kwadratém z linii prostéy EB, iest

13*

równy kwadratóm z liniy prostych, EB, BD: Odiąwszy spólny kwadrat z linii prostéy EB, pozostały prostokąt z liniy prostych AD, DC, równy będzie kwadratowi ze stycznéy DB.

Lecz niech przecinaiącá liniia prostá DCA, nie przechodzi przez śrzodek koła ABC; wynalazłszy śrzodek w punkcie E, (I. III.) wyprowadźmy do linii prostéy AC, prostopadłą EF, (XII I.) i poprowadźmy liniie prosté EB, EC, ED; będzie więc kąt EFD, prosty. Ponieważ liniia prostá EF, przez śrzodek koła poprowadzoná, przeciná pod kątami prosténi liniią prostą AC, nie przez śrzodek koła poprowadzoną, przetnie ią zatém na dwie równé części (III. III.); iest więc liniia prostá AF, równá linii prostéy FC, a że liniia prostá AC, przedłużoná iest do punktu D, będzie prostokąt z liniy prostych AD, DC, wraz z kwadratém z linii FC, równy kwadratowi z linii próstéy FD, przydawszy spólny kwadrat z linii prostéy FE, iest prostokąt z linii prostych AD, DC, wráz z kwadratami z liniy prostych CF, FE, równy kwadratóm z liniy prostych DF, FE. Lecz kwadratóm z liniy prostych FD, FE, równy iest kwadrat z linii prostéy ED, iest bowiem kąt EFD, prosty: kwadratóm zaś z liniy prostych CF, FE, równy iest kwadrat z linii prostéy CE; prostokąt więc z liniy prostych AD, DC, wraz z kwadratém z linii prostéy CE, iest równy kwadratowi z linii prostéy ED; a że liniia prostá CE, iest rówuá linii prostéy EB, zaczém prostokąt z liniy prostych AD, DC, wraz z kwadratém z linii prostéy EB, iest równy kwadratowi z linii prostéy ED: lecz kwadratowi z linii prostéy ED, równé są kwadraty z liniy prostych EB, BD, iest albowiém kąt EBD, prostym, więc prostokąt z liniy prostych, AD, DC, wraz z kwadratém z linii prostéy EB, iest równy kwadratóm z liniy prostych EB, BD: odiąwszy kwadrat spólny z linii prostéy EB, pozostały prostokąt z liniy prostych AD, DC, równy będzie kwadratowi z linii prostéy DB. Jeżeli więc z punktu za kołém obranégo etc. etc. C. B. d. D.

Wniosek. Stąd wypadá, że ieżeli z punktu za kołém obranégo poprowadzimy liniie prosté AB, AC, przecinaiącé koło, prostokąty zawarté całémi liniiami prostémi przecinaiącémi, i odcinkami tychże liniy prostych za kołém będącémi, toiest prostokąty z liniy prostych BA, AE; CA, FA; będą między sobą równé. Każdy albowiém z takowych prostokątów iest równy kwadratowi ze styczney AD. Fig. 123.

PODANIE XXXVII.

TWIERDZENIE.

Jeżeli ze dwóch liniy prostych od iednégo punktu zewnątrz koła obranégo poprowadzonych, iedna przeciná koło, a drugá padá na okrąg tegoż koła: i ieżeli prostokąt z całéy linii przecinaiącéy i odcinka iey za kołém będącégo, iest równy kwadratowi z linii padaiącéy na okrąg koła: będzie liniia padaiącá na okrąg koła, styczną. Fig. 124.

Niechay z punktu D, zewnątrz koła ABC, obranégo, poprowadzoné będą dwie liniie prosté DCA, DB; niech liniia prostá DCA, przeciná koło w punktach A, C, okręgu iego, liniia zaś prostá DB, niech tylko padá na okrąg tegoż koła: i niech prostokąt z liniy prostych AD, DC, równy będzie kwadratowi z linii prostéy DB, powiadam: że liniia prostá DB, będzie styczną z kołém ABC.

Wyprowadźmy bowiém liniią prostą DE, dotykaiącą się okręgu koła ABC, toiest styczną (XVII. III.); wynalazłszy śrzodek koła w punkcie F, poprowadźmy liniie prosté FE, FB, FD, będzie kąt FED prosty, (XVIII. III.). Ponieważ DE, iest styczną z kołém ABC, przeciná zaś koło liniia prostá DCA, będzie prostokąt z liniy prostych AD, DC, równy kwadratowi z linii prostéy ED, (XXVI. III.): lecz prostokąt z liniy prostych AD, DC, przypuszczá się bydź równym kwadratowi z linii prostéy DB; kwadrat więc z linii prostéy DE, iest równy kwadratowi z linii prostéy DB; a zatém liniia prostá DE, iest równá linii prostéy DB: iest zaś i liniia prostá FE, równá linii prostéy FB: dwie więc liniie prosté DE, EF, są równé dwóm liniióm prostym DB, BF, i podstawa spólná FD; kąt więc DEF, iest równy kątowi DBF, (VIII. I.): iest zaś kąt DEF prosty; zaczém prosty iest i kąt

DBF: a że liniia prostá FB, iest śrzednicą, pod kątami zaś prostémi do śrzednicy liniia prostá z końca śrzednicy wyprowadzoná dotyká się okręgu koła, iest więc liniia prostá DB, styczną koła ABC. Jeżeli więc z dwóch liniy prostych od iednégo punktu zewnątrz koła etc. etc. C. B. d. D.

KONIEC XIĘGI TRZECIEY.

JEOMETRYI EUKLIDESA.

XIĘGA CZWARTA

DEFINICYE.

1. Mówi się, że figura prostokréślná wpisuie się w figurze prostokréślnéy, kiedy każdy kąt figury wpisanéy, dotyká się każdégo boku figury w którą się wpisuie. Fig: 125.

2. Podobnież mówi się, że figura opisuie się około figury, kiedy każdy bok figury opisanéy, dotyká się kąta każdégo figury, około któréy opisuie się. Fig: 125.

3. Figura prostokréślná wpisuie się w koło, kiedy każdy kąt figury wpisanéy, dotyká się okręgu koła. Fig: 126.

4. Figura prostokréślná opisuie się około

koła, kiedy każdy bok figury opisanéy, dotyká się okręgu koła. Fig: 127.

5. Podobnież koło wpisuie się w figurze prostokréślnéy, kiedy każdy bok figury, w któréy się koło wpisuie, dotyká się okręgu koła. Fig: 127.

6. Koło opisuie się około figury prostokréślnéy, gdy okrąg koła dotyká się każdego kąta figury, około którey opisuie się koło. Fig: 126.

7. Mówi się, że liniia prostá kréśli się w kole, gdy iéy końce są na okręgu tegoż koła.

PODANIE I.

ZAGADNIENIE.

W kole daném wykréślić liniią prostą równą danéy linii prostéy, któráby od śrzednicy koła większą nie była. Fig. 128.

Niech będzie dané koło ABC, i daná liniia prostá D, niewiększá od śrzednicy koła; trzeba w kole ABC, wykréślić liniią prostą równą danéy linii prostéy D.

Poprowadźmy w kole ABC, śrzednicę BC; ieżeliby śrzednica BC, znalazła się bydź równą linii prostéy D, iuż tém samém będzie rozwiązané zagadniénié: byłaby albowiém w kole ABC, wykréśloná liniia prostá BC, równá linii prostéy D. Jeżeli zaś śrzednica BC, iest większą od linii prostéy D, odetniymy na śrzednicy BC, część CE, równą linii prostéy D, (III. I.) i z punktu C, iako ze śrzodka długością równą linii prostéy CE, zakréślmy koło AEF; poprowadźmy oraz liniią prostą CA. Ponieważ punkt C, iest śrzodkiém koła AEF, będzie liniia prostá CA, równá linii prostéy CE, lecz liniia prostá D, iest równá linii prostéy CE, więc i liniia prostá D, będzie równá linii prostéy CA. W daném więc kole ABC, wykréśloná iest liniia prostá AC, równá danéy linii prostéy, niewiększéy od śrzednicy koła. C. B. d. R.

PODANIE II.

ZAGADNIENIE.

W daném kole wpisać tróykąt równokątny względém tróykąta danégo. Fig. 129.

Niech będzie dané koło ABC, i dany tróykąt DEF; potrzeba w kole ABC, wpisać tróykąt równokątny z tróykątém DEF.

Poprowadźmy liniią prostą GAH, styczną z kołém ABC, w punkcie A, (XVII. III.) i na linii prostéy AH, przy punkcie na niéy A, wykréślmy kąt HAC, równy kątowi DEF, (XXIII. I.) na linii zaś prostéy AG, przy punkcie na niéy A, wykréślmy kąt GAB, równy kątowi DFE, i poprowadźmy liniią prostą BC. Ponieważ liniia prostá HAG, iest styczną z kołém ABC, z punktu zaś dotknięciá poprowadzoná iest cięciwa AC, będzie kąt HAC, równy kątowi w odcinku koła naprzemian, to iest kątowi ABC, (XXXII. III.) lecz kąt HAC, iest równy kątowi DEF, więc i kąt ABC, iest równy témuż samému kątowi DEF, dlá téy samey przyczyny i kąt ACB, iest równy kątowi DFE; pozostały więc kąt BAC, iest równy pozostałému kątowi EDF, (XXXII. I.) więc tróykąt ABC, iest równokątny z tróykątém DEF, i iest wpisany w kole ABC. W danéın więc kole wpisany iest tróykąt równokątny z tróykątém danym. C. B. d. R.

PODANIE III.

ZAGADNIENIE.

Około koła danégo, opisać tróykąt równokątny względém tróykąta danégo. Fig. 130.

Niech będzie dané koło ABC, i dany tróykąt DEF, potrzeba około koła ABC, opisać tróykąt równokątny tróykątowi DEF.

Przedłużmy z obudwóch stron bok EF, do punktów G, H, wynaydźmy śrzodek koła ABC, w punkcie K, i poprowadźmy w któremkolwiek położéniu liniią prostą KB; wykréślmy na linii prostéy KB, przy punkcie na niéy K, kąt BKA, równy kątowi DEG (XXIII. I.), kątowi zaś DFH, równy kąt BKC, przez punktà A,B,C, poprowadźmy styczné z kołém ABC, liniie prosté LAM, MBN, NCL, (XVII. III.). Ponieważ więc liniie prosté LM, MN, NL, są stycznémi z kołém ABC, w punktach A, B, C, ze śrzodka zaś K, do punktów A, B, C, poprowadzoné są liniie prosté KA, KB, KC, będą kąty przy punktach A,B,C, prosté (XVIII. III.)

a ponieważ czworokąta AMBK, cztéry kąty są równé cztérém kątóm prostym, czworokąt bowiém rozdzielá się na dwa tróykąty; z których kątów, kąty KAM, KBM, są prosté, będą kąty pozostałé AKB, AMB, równé dwóm kątóm prostym: są zaś i kąty DEG, DEF, równé dwóm kątóm prostym (XIII. I) kąty zatém AKB, AMB, są równé kątóm DEG, DEF, z których, że kąt AKB, iest równy kątowi DEG; będzie więc pozostały kąt AMB, równy pozostałému kątowi DEF: podobnież okaże się kąt LNM, bydź równy kątowi DFE; więc i pozostały kąt MLN, iest równy pozostałému kątowi EDF, (XXXI. I.) tróykąt zatém LMN, iest równokątny tróykątowi DEF, i opisany iest około koła ABC. Około więc koła danégo, opisany iest tróykąt równokątny z tróykątém danym. C. B. d. R.

PODANIE IV.

ZAGADNIENIE.

W danym tróykącie wpisać koło. Fig. 131.

Niech będzie dany tróykąt ABC, potrzeba w tróykącie ABC, wpisać koło.

Podzielmy kąty ABC, BCA, na dwie równé części liniiami prostémi BD, CD, (IX. I.) schodzą émi się w punkcie D, i z punktu D, do liniy prostych AB, BC, CA, wyprowadźmy liniie prostopadłé DE, DF, DG, (XII. I.). Ponieważ kąt EBD, iest równy kątowi FBD, na dwie bowiém części równé podzielony iest kąt ABC: iest zaś i kąt prosty BED, równy kątowi prostému BFD: będą dwa tróykąty EBD, FBD, miały dwa kąty równé dwóm kątóm, i ieden bok BD spólny obudwóm tróykątóm przeciwległy iednému z kątów równych; będą więc miały i pozostałé boki równé pozostałym bokóm (XXVI. I.): i będzie liniia prostá DE, równá linii prostéy DF, dlá téy saméy przyczyny będzie i liniia prostá DG, równá linii prostéy DF; trzy zatém liniie prosté DE, DF, DG, są między sobą równé, dlá czego z punktu D, iako ze śrzodka długością równą iednéy z tychże samych liniy prostych DE, DF, DG, zakréślone koło, okrąg iego przechodzić będzie przez pozostałe dwa punkta, i dotykać się liniy prostych AB, BC, CA, stąd: że prosté są kąty przy punktach E, F, G, a prostopadłá do śrzednicy z końca iéy wyprowadzoná iest styczną z kołém (XVI. III.), styczną więc będzie z kołém każdá z liniy prostych AB, BC, CA, i będzie koło wpisané w tróykącie ABC. W danym zatém tróykącie ABC, wpisané iest koło EFG. C. B. d. R.

PODANIE V.

ZAGADNIENIE.

Około danégo tróykąta opisać koło. Fig. 132. 1^{o}, 2^{do}, 3^{tio}.

Niech będzie dany tróykąt ABC; potrzeba około danégo tróykąta ABC, opisać koło.

Przetniymy boki AB, AC, w punktach D, E, na dwie równé części (X. I.) i z punktów D, E, wyprowadźmy do liniy prostych

AB, AC, liniie prostopadłé DF, EF, (XI. I.) któré przedłużoné zeydą się koniecznie: gdyby albowiém nie zeszły się, byłyby między sobą równoodległé, dlá czego liniie prosté AB, BC, do nich prostopadłé, byłyby téż równoodległé, co bydź nié może: niech więc zeydą się w punkcie F, poprowadźmy liniie proste BF, FC, FA. Ponieważ liniia prostá AD, iest równá linii prostéy DB, spólną zaś i pod kątami prostémi iest liniia prostá DF, będzie podstawa AF, równá podstawie FB, (IV. I.). Podobnież okażémy że i liniia prostá BF, iest równá linii prostéy FC, trzy więc liniie prosté FA, FB, FC, są między sobą równé. Z punktu zatém F, iako ze śrzodka długością równą iednéy z tychże samych liniy prostych FA, FB, FC, zakréśloné koło, okrąg iego przechodzić będzie przez pozostałé dwa punkta; i będzie koło opisané około tróykąta ABC. Około więc danégo tróykąta opisané iest koło. C. B. d. R.

Wniosek. Wypadá stąd oczywiście, że, ieżeli śrzodek koła padnie wewnątrz tróykąta, każdy z kątów iego mnieyszy będzie od kąta prostégo (XXXI. III.), ponieważ każdy kąt, iest w odcinku większym od półkola: iężeliby zaś śrzodek koła padáł na iednym z boków tróykąta, kąt przeciwległy tému bokowi, zostaiąc w półkolu, prostym będzie, ieżeli nakoniec śrzodek koła padnie zewnątrz tróykąta pod iednym z boków iego, kąt przeciwległy tému bokowi położony w odcinku mnieyszym od półkola, większy będzie od prostégo (XXXI. III.). Jeżeli więc dany tróykąt będzie ostrokątny, śrzodek koła padnie wewnątrz tróykąta: ieżeli będzie prostokątny, będzie śrzodek koła na boku kątowi prostému przeciwległym: ieżeli nakoniec tróykąt będzie roztwartokątnym, padnie śrzodek koła pod bokiém kątowi roztwartému przeciwległym.

PODANIE VI.

ZAGADNIENIE.

W daném kole wpisać kwadrat. Fig. 133.

Niech będzie dané koło ABCD, potrzeba w kole ABCD, wpisać kwadrat.

Poprowadźmy w kole ABCD, śrzednice AC, BD, pod kątami prostémi, i liniie prosté AB, BC, CD, DA. Ponieważ liniia prostá BE, iest równá linii prostéy ED, iest albowiém śrzodek w punkcie E, spólną zaś i pod kątami prostémi iest liniia prostá EA; będzie podstawa BA, równá podstawie AD, (IV. I.) i dlá téy saméy przyczyny każdá z liniy prostych BC, CD, iest równá każdéy z liniy prostych BA, AD, iest zatém czworokąt ABCD, równoboczny. Powiadam że iest i prostokątny. Ponieważ albowiém liniia prostá BD, iest śrzednicą koła ABCD, będzie BAD, półkolé: dlá czego kąt BAD, iest prosty (XXXI. III.) dlá téy saméy przyczyny każdy z kątów ABC, BCD, CDA, iest prosty, więc iest czworokąt ABCD, prostokątny, dowiedziony zaś iest bydź i równobocznym: iest zatém kwadratém wpisanym w kole ABCD. W daném więc kole ABCD, wpisany iest kwadrat ABCD. C. B. d. R.

PODANIE VII.

ZAGADNIENIE.

Około koła danégo opisać kwadrat. Fig: 134.

Niech będzie dané koło ABCD, potrzeba około koła ABCD, opisać kwadrat.

Poprowadźmy w kole ABCD, dwie śrzednice AC, BD, pod kątami prostémi, a przez punkta A, B, C, D, styczné z kołém ABCD, (XVII. III.) FG, GH, HK, KF. Ponieważ liniia prostá FG, iest styczną z kołém ABCD, ze śrzodka zaś E, do punktu dotknięciá poprowadzoná iest liniia prostá EA, będą kąty przy A, prosté (XVIII. III.); dlá téy saméy przyczyny i kąty przy punktach B,C,D, prosté są: i ponieważ kąt AEB, iest prosty, iest zaś prosty i kąt EBG, będzie liniia prostá GH, do do linii prostéy AC równoodległą (XXVIII. I.), dlá tey saméy przyczyny iest i liniia prostá AC, równoodległą do linii prostéy FK. Podobnież dowiedziémy że i każdá z liniy prostych GF, HK, iest równoległá do linii prostéy BED. Są więc równoległobokami czworokąty GK, GC, AK, FB, BK, a zatém liniia prostá GF, (XXXIV. I.) iest równá linii prostéy HK. Liniia zaś prostá GH, iest równá linii prostéy FK. A ponieważ liniia prostá AC, iest równá linii prostéy BD, liniia zaś prostá AC, iest równá każdéy z liniy prostych GH, FK; tak iako liniia prostá BD, iest równá każdéy z liniy prostych GF, HK; będzie więc i każdá z liniy prostych GH, FK, równá każdéy z liniy prostych GF, HK; zaczém czworokąt FGHK, iest równoboczny. Powiadam że iest i prostokątny: ponieważ albowiém czworokąt GBEA, iest równoległobokiém, i iest kąt AEB prosty, będzie też prosty i kąt AGB. Podobnie okażemy że téż i kąty przy H, K, F, są prosté: czworokąt więc FGHK, iest prostokątny, dowiedziony zaś iest bydź równobocznym; iest zatém kwadratém; i opisanym około koła ABCD. Około więc koła danégo iest opisany kwadrat. C. B. d. R.

PODANIE VIII.

ZAGADNIENIE.

W danym kwadracie koło wpisać. Fig. 135.

Niech będzie dany kwadrat ABCD, potrzeba w kwadracie ABCD, wpisać koło.

Przetniymy boki AB, AD, na dwie równé części (X. I.) w punktach F, E, i przez punkt E, poprowadźmy do liniy prostych AB, CD, liniią równoodległą EH, (XXXI. I.) przez punkt zaś F, do liniy prostych AD, BC, liniią równoległą FK, każdy zatém z czworokątów AK, KB, AH, HD, AG, GC, BG, GD, iest równoległobokiém i boki ich przeciwné są równé (XXXIV.). Ponieważ liniia prostá AD, iest równá linii prostéy AB, a linii prostéy AD, iest połową liniia prostá AE, tak iako linii prostéy AB, połową iest liniia prostá AF; będzie liniia prostá AE, równá linii prostéy AF, dlá czego i boki przeciwné są równé: więc liniia prostá FG, iest równá linii prostéy GE. Podobnież dowiedziemy: że i każdá z liniy prostych GH, GK, iest równá każdéy z liniy prostych FG, GE, cztéry więc liniie prosté GE, GF, GH, GK, są między sobą równé. Przeto z punktu G, iako ze środka długością równą iednéy z liniy prostych GE, GF, GH, GK, zakréśliwszy koło, okrąg iego przechodzić będzie przez punkta E, F, H, K, i dotykać się liniy prostych AB, BC, CD, DA; stąd, że kąty przy E, F, H, K, są prosté (XXIX. I.): do śrzednicy zaś z końca iéy wyprowadzoná liniia prostá dotyká się okręgu koła (XVI. III.) każdá więc z liniy prostych AB, BC, CD, DA, dotykać się będzie okręgu koła, i będzie koło w kwadracie ABCD, wpisané. W danym więc kwadracie wpisané iest koło C. B. d. R.

PODANIE IX.

ZAGADNIENIE.

Około danégo kwadratu opisać koło. Fig. 136.

Niech będzie dany kwadrat ABCD, potrzeba około kwadratu ABCD, opisać koło.

Poprowadźmy liniie prosté AC, BD, przecinaiącé się nawzaiém w punkcie E. Ponieważ liniia prostá DA, iest równá linii prostéy AB, spólną zaś iest liniia prostá AC, dwie więc liniie prosté DA, AC, równé są dwóm liniióm prostym BA, AC, i podstawa DC, iest równá podstawie BC, dlá czego kąt DAC, równy będzie kątowi BAC (VIII. I.): kąt zatém DAB, przecięty iest na dwie równé części przez liniią prostą AC. Podobnież dowiedziémy: że każdy z kątów ABC, BCD, CDA, przez liniie prosté AC, BD, przecięty iest na dwie równé części. Ponieważ więc kąt DAB, równy iest kątowi ABC, kąt zaś EAB, iest połową kąta DAB, kąta zaś ABC, połową iest kąt EBA, będzie i kąt EAB, równy kątowi EBA; więc i bok EA, iest równy bokowi EB, (VI. I.). Podobnież dowiedziémy że i każdá z liniy prostych EC, ED, iest równá każdéy z liniy prostych EA, EB, cztery zatém liniie prosté EA, EB, EC, ED, są między sobą równé. Z punktu więc E, iako ze śrzodka długością równą iednéy z liniy prostych EA, EB, EC, ED, zakreśliwszy koło, okrąg iego przechodzić będzie przez punkta A, B, C, D, i będzie około kwadratu ABCD, opisané koło. Około więc danégo kwadratu opisané iest koło. C. B. d. R.

PODANIE X.

ZAGADNIENIE.

Wykréślić tróykąt równoramienny, którégoby każdy kąt przy podstawie był podwóynym kąta trzeciégo. Fig. 137.

Poprowadźmy liniią prostą AB, i tę przetniymy w punkcie C, tak, żeby prostokąt zawarty liniią prostą AB, i iey odcinkiém BC, był równy kwadratowi z odcinka CA, (XI. II.) z punktu A, iako ze śrzodka długością równą linii prostéy AB, zakréślmy koło BDE, na którégo okręgu poprowadźmy cięciwę BD, równą linii prostéy AC, którá nie iest większą od śrzednicy koła BDE, (I. IV.): poprowadźmy ieszcze liniie prosté DA, DC, i około tróykąta ADC, opiszmy koło ACD, (V. IV.): tróykąt równoramienny ABD, będzie miáł każdy z kątów ABD, ADB, przy podstawie podwóyny kąta pozostałégo trzeciégo BAD.

Ponieważ prostokąt z liniy prostych AB, BC, równy iest kwadratowi z linii prostéy AC, iest zaś liniia prostá AC, równá linii prostéy BD; będzie prostokąt z liniy prostych AB, BC, równy kwadratowi z linii prostéy BD. A ponieważ zewnątrz koła ACD, wzięty iest punkt B, i z punktu B, padaią na koło dwie liniie prosté BCA, BD, z których iedna przeciná koło, drugá zaś padá na okrąg iego, a prostokąt z liniy prostych AB, BC, równy iest kwadratowi z linii prostéy BD, więc liniia prostá BD, iest styczną koła ACD, (XXXVII. III.).

Gdy zatém liniia prostá BD, iest styczną, z punktu zaś dotknięciá D, poprowadzoná iest cięciwa DC, będzie kąt BDC, równy kątowi w odcinku koła naprzemian, toiest kątowi DAC (XXXII. III.): przydawszy spólny kąt CDA, cały kąt BDA, iest równy dwóm kątóm CDA, DAC: lecz kątóm CDA, DAC, równy iest kąt zewnętrzny BCD (XXXII. I.); więc i kąt BDA, równy iest kątowi BCD, kąt znowu BDA, iest równy kątowi CBD, ponieważ i bok AD, iest równy bokowi AB (V. I.); więc i kąt CBD, toiest kąt DBA, będzie równy kątowi BCD: trzy zatém kąty BDA, DBA, BCD, są między sobą równé: a ponieważ kąt DBC, równy iest kątowi BCD, będzie i bok BD, równy bokowi DC, lecz liniia prostá BD, iest równá linii prostéy CA; więc i liniia prostá CA, iest równá linii prostéy CD: dlá czégo i kąt CDA, równy iest kątowi DAC, razém więc wzięté kąty CDA, DAC, są podwóyné kąta DAC, iest zaś i kąt BCD, równy kątóm CDA, DAC, więc kąt BCD, iest też podwóynym kąta DAC: lecz kąt BCD, równy iest każdému z kątów BDA, DBA; każdy zatém z kątów BDA, DBA, iest podwóyny kąta DAB. Jest zatém wykréślony tróykąt równoramienny ABD, maiący każdy z kątów przy podstawie BD, podwóyny kąta pozostałégo trzeciégo. C. B. d. R.

PODANIE XI.

ZAGADNIENIE.

W danèm kole wpisać pięciokąt równoboczny, i równokątny. Fig. 138.

Niech będzie dané koło ABCDE, potrzeba w kole ABCDE, wpisać pięciokąt równoboczny i równokątny.

Wykréślmy tróykąt równoramienny FGH, maiący każdy z kątów przy G, i H, podwóyny kąta przy F, i wpiszmy w kole ABCDE, tróykąt ACD, równokątny z tróykątém FGH, (II. IV.); tak, żeby kątowi przy F, był równy kąt CAD; każdemu zaś z kątów przy G, i H, żeby był równy każdy z kątów ACD, CDA; każdy więc z kątów ACD, CDA, będzie podwóyny kąta CAD. Przetniymy każdy z kątów ACD, CDA, na dwie równé części (IX. I.)

liniiami prostémi CE, DB, i poprowadźmy liniie prosté AB, BC, DE, EA.

Ponieważ każdy z kątów ACD, CDA, iest podwóyny kąta CAD, a też samé kąty przecięté są na dwie równé części liniiami prostémi CE, DB; pięć zatém kątów DAC, ACE, ECD, CDB, BDA, są między sobą równé: równé zaś kąty na równych łukach wspiéraią się (XXVI. III.); więc pięć łuków AB, BC, CD, DE, EA, są równé między sobą: lecz równych łuków równé są cięciwy (XXIX. III.); zaczém i pięć cięciw, toiest liniie prosté AB, BC, CD, DE, EA, są między sobą równé. Pięciokąt więc ABCDE, iest równobocznym. Powiadam że iest i równokątnym: ponieważ albowiém łuk AB, iest równy łukowi DE, przydawszy spólny łuk BCD; cały łuk ABCD, będzie równy całému łukowi EDCB. Na łuku zaś ABCD, wspiérá się kąt AED, a na łuku EDCB, wspiérá się kąt BAE; więc i kąt BAE, równy iest kątowi AED, dlá téyże saméy przyczyny i każdy z kątów ABC, BCD, CDE, każdému z kątów BAE, AED, iest równy: przeto pięciokąt ABCDE, iest równokątny: dowiedliśmy zaś, że iest i równoboczny; w danéın więc kole wpisany iest pięciokąt równoboczny i równokątny. C. B d. R.

PODANIE XII.

ZAGADNIENIE.

Około danégo koła opisać pięciokąt równoboczny i równokątny. Fig. 139.

Niech będzie dané koło ABCDE, potrzeba około koła ABCDE, opisać pięciokąt równoboczny i równokątny.

Wystawmy sobie, że punkta A, B, C, D, E, są wiérzchołkami kątów pięciokąta w kole wpisanégo tak: żeby łuki AB, BC, CD, DE, EA, były równé (XI. IV.): i przez punkta A, B, C, D, E, poprowadźmy styczné (XVII. III.) GH, HK, KL, LM, MG: wynaydźmy śrzodek koła w punkcie F, i poprowadźmy liniie prosté FB, FK, FC, FL, FD. Ponieważ liniia prostá KL, iest styczną koła ABCDE, w punkcie C, a ze śrzodka F, do punktu dotknięciá C, poprowadzoná iest liniia prostá FC: będzie liniia prostá FC, do linii prostéy KL, prostopadłą (XVIII. III.) każdy więc ze dwóch kątów przy C, iest prosty: dlá téyże saméy przyczyny i kąty przy punktach B, D, są prosté. A ponieważ prosty iest kąt FCK, kwadrat z linii prostéy FK, równy iest kwadratóm z liniy prostych FC, CK, (XLVII. I.): dlá téy saméy przyczyny kwadratóm z liniy prostych FB, BK, równy iest kwadrat z linii prostéy FK. Kwadraty więc z liniy prostych FC, CK, są równé kwadratóm z liniy prostych FB, BK, z których kwadratów kwadrat z linii prostéy FC, iest równy kwadratowi z linii prostéy FB; pozostały zatém kwadrat z linii prostéy CK, będzie równy pozostałému kwadratowi z linii prostéy BK; równá więc iest liniia prostá BK, linii prostéy CK. A ponieważ liniia prostá FB, równá iest linii prostéy FC; spólną zaś iest liniia prostá FK, są dwie liniie prosté BF, FK, równé dwóm liniióm prostym CF, FK, i podstawa BK, iest równá podstawie KC; kąt więc BFK, równy iest kątowi KFC, (VIII I.) i kąt BKF, równy kątowi FKC. Kąt zatém BFC, iest podwóyny kąta KFC, i kąt BKC, iest podwóyny kąta FKC; dlá téy saméy przyczyny i kąt CFD, iest podwóyny kąta CFL, a kąt CLD, iest podwóyny kąta CLF. A ponieważ łuk BC, iest równy łukowi CD, będzie i kąt BFC, równy kątowi CFD,(XXVII.III.) iest zas kąt BFC, podwóyny kąta KFC, a kąt CFD, podwóyny kąta CFL, więc kąt KFC, iest równy kątowi CFL; iest nadto kąt prosty FCK, równy kątowi prostému FCL: dwa zatém tróykąty FKC, FLC, maią dwa kąty dwóm kątóm równé, iedén drugiému, i bok iedén równy bokowi iednému, obudwóm spólny FC, kątóm równym przyległy; więc i pozostałé boki będą równé pozostałym bokóm, i kąt pozostały będzie równy kątowi pozostałému (XXVI. I.); liniia więc prostá KC, iest równá linii prostéy CL, kąt zaś FKC, iest równy kątowi FLC. A ponieważ liniia prostá KC, iest równá linii prostéy CL, będzie liniia prostá KL, podwóyną linii prostéy KC: dlá téy saméy przyczyny i liniia prostá HK, dowiedzie się bydź podwóyną linii prostéy BK. A że liniia prostá BK, dowiedziona iest bydź równą linii prostéy KC, iest zaś linia prostá KL, podwóyną linii prostéy KC, liniia zaś prostá HK, podwóyną linii prostéy BK, będzie liniia prostá HK, równá linii prostéy KL. Podobnież i każdá z linii prostych GH, GM, ML, dowiedzie się bydź równą każdéy z liniy prostych HK, KL: pięciokąt więc GHKLM, iest równobocznym: powiadam że iest i równokątnym. Albowiém kąt FKC, iest równy kątowi FLC, a dowiedziony iest kąt HKL, bydź podwóynym kąta FKC, tak iako i kąt KLM, że iest podwóyny kąta FLC, będzie i kąt HKL, równy kątowi KLM. Podobnież okaże się że i każdy z kątów KHG, HGM, GML, iest równy każdému z kątów HKL, KLM; pięć zatém kątów GHK, HKL, KLM, LMG, MGH, są między sobą równé; iest przeto pięciokąt GHKLM, równokątny, dowiedziony zaś bydź i równobocznym, i iest opisanym około koła ABCDE. Więc około koła danégo opisany iest pięciokąt równoboczny i równokątny. C. B. d. R.

PODANIE XIII.

ZAGADNIENIE.

W danym pięciokącie równobocznym i równokątnym wpisać koło. Fig. 140.

Niech będzie dany pięciokąt równoboczny i równokątny ABCDE; potrzeba w pięciokącie ABCDE, wpisać koło.

Przetniymy każdy z dwóch kątów BCD, CDE, na dwie równé części (IX. I.), liniiami prostémi CF, DF, a z punktu F, zeyściá się liniy prostych CF, DF, poprowadźmy liniie prosté FB, FA, FE. Ponieważ liniia prostá BC, iest równá linii prostéy CD, spólną zaś iest liniia prostá CF, są dwie liniie prosté BC, CF, równé dwóm liniióm prostym CD, CF, i kąt BCF iest równy kątowi DCF, podstawa więc BF, iest równá podstawie DF (IV. I.), i tróykąt BFC, iest równy tróykątowi DFC, i pozostałé kąty są równé pozostałym kątóm przeciwległym bokóm równym; kąt więc CBF, będzie równy kątowi CDF. A ponieważ kąt CDE, iest podwóyny kąta CDF, i kąt CDE

15

równy kątowi CBA, kąt zaś CDF, równy kątowi CBF, będzie i kąt CBA, podwóyny kąta CBF; kąt zatém ABF, iest równy kątowi CBF; dlá czego kąt ABC, iest podzielony na dwie równé części liniią prostą BF. Podobnież okaże się, że każdy z kątów BAE, AED, przez liniie prosté AF, FE, iest na dwie równé części podzielony. Z punktu F, wyprowadźmy do linii prostych AB, BC, CD, DE, EA, prostopadłé (XII. I.) FG, FH, FK, FL, FM. Ponieważ kąt HCF, iest rówwny kątowi KCF, iest zaś i prosty kąt FHC, równy kątowi prostému FKC, będą dwa tróykąty FHC, FKC, miały dwa kąty równé dwóm kątóm i bok iédén spólny obudwóm, to iest liniią prostą FC, przeciwległą iednému z kątów równych, więc i pozostałé boki będą miały równé pozostałym bokóm (XXVI. I.) prostopadłá więc FH, iest równá prostopadłéy FK. Podobnież okaże się że i każdá z prostopadłych FL, FM, FG, równá iest każdéy z dwóch prostopadłych FH, FK; pięć zatém liniy prostych FG, FH, FK, FL, FM, są między sobą równé. Dlá czego z punktu F, iako ze śrzodka długością równą iednéy z liniy prostych FG, FH, FK, FL, FM, zakréśliwszy koło, okrąg iego przechodzić będzie przez punkta G, H, K, L, M, i dotykać się będzie liniy prostych AB, BC, CD, DE, EA ; kąty bowiém przy G, H, K, L, M, są prosté, a prostopadłá do śrzednicy z końca iéy wyprowadzoná, iest styczną z kołém (XVI. III.). Dotykać się więc będzie okręgu koła każdá z liniy prostych AB, BC, CD, DE, EA, i będzie koło w pięciokącie ABCDE, wpisané. W danym więc pięciokącie równobocznym i równokątnym wpisané iest koło. C. B. d. R.

PODANIE XIV.

ZAGADNIENIE.

Około danégo pięciokąta równobocznégo i równokątnégo opisać koło. Fig. 141.

Niech będzie dany pięciokąt równoboczny i równokątny ABCDE, potrzeba około pięciokąta ABCDE, opisać koło.

Przetniymy każdy z dwóch kątów BCD, CDE na dwie równé części (IX. I.) liniiami prostémi CF, FD, a z punktu F, zeyściá się tych liniy prostych do punktów B, A, E, poprowadźmy liniie prosté FB, FA, FE. Dowiedziémy podobnie iak w poprzedzaiącém twierdzéniu, że każdy z kątów CBA, BAE, AED, przez liniie prosté BF, FA, FE, iest na dwie równé części podzielony: a ponieważ kąt BCD, iest równy kątowi CDE, kąta zaś BCD, połową iest kąt FCD, tak iako i kąta CDE, połową kąt CDF, będzie i kąt FCD, równy kątowi FDC, dlá czego i bok CF, równy iest bokowi FD [VI. I.], podobnież dowiedziémy że i każdá z liniy prostych FB, FA, FE, równá iest każdey z liniy prostych FC, FD: pięć więc liniy prostych FA, FB, FC, FD, FE, są między sobą równé. Z punktu więc F, iako ze śrzodka długością równą iednéy z liniy prostych FA, FB, FC, FD, FE, zakréśliwszy koło, okrąg iego przechodzić będzie przez punkta A, B, C, D, E, i będzie opisané koło około pięciokąta równoboczného i równokątného. Około więc danégo pięciokąta równoboczného i równokątnégo opisané iest koło. C. B. d. R.

PODANIE XV.

ZAGADNIENIE.

W daném kole wpisać sześciokąt równoboczny i równokątny. Fig. 142.

Niech będzie dané koło ABCDEF, potrzebá w kole ABCDEF, wpisać sześciokąt równoboczny i równokątny.

Wynaydźmy śrzodek koła ABCDEF, w punkcie G, poprowadźmy śrzednicę AGD, a z punktu D, iako ze śrzodka długością równą linii prostéy DG, zakréślmy koło EGCH, poprowadzoné liniie prosté EG, CG, przedłużmy do do punktów B, F, i poprowadźmy liniie prosté AB, BC, CD, DE, EF, FA. Powiadam: że sześciokąt ABCDEF, iest równoboczny i równokątny.

Ponieważ albowiém punkt G, śrzodkiém iest koła ABCDEF, będzie liniia prostá GE, rówwná linii prostéy GD. Znowu ponieważ punkt D, iest śrzodkiém koła EGCH, będzie liniia prostá DE, równą linii prostéy DG, lecz liniia prostá GE, dowiedzioná iest bydź równą linii prostéy GD, więc liniia prostá GE, iest równá linii prostéy ED; tróykąt zatém EGD iest równobocznym, przeto trzy iego kąty EGD, GDE, DEG, są między sobą równé, ponieważ w tróykątach równoramiennych kąty przy podstawie są między sobą równé (V. I.): a że w tróykącie trzy kąty są równé dwóm kątóm prostym (XXXII. I.); więc kąt EGD, iest trzecią częścią dwóch kątów prostych. Podobnież dowiedziémy, że i kąt DGC, iest trzecią częścią dwóch kątów prostych, a ponieważ liniia prostá GC, stoiąc na linii prostéy EB, czyni kąty przyległé EGC, CGB, równé dwóm kątóm prostym; będzie pozostały kąt CGB, trzecią częścią dwóch kątów prostych; kąty więc EGD, DGC, CGB, są między sobą równé: a że w wierzchołkach przeciwległé im kąty BGA, AGF, FGE, są równé kątóm EGD, DGC, CGB, (XV. I.). Sześć więc kątów EGD, DGC, CGB, BGA, AGF, FGE, są między sobą rówwné: lecz równe kąty wspiéraią się na równych łukach (XXVI. I.). Sześć więc łuków AB, BC, CD, DE, EF, FA, są między sobą równé: równych znowu łuków równé są cięciwy (XXIX. III.); więc i sześć cięciw są między sobą równé. Sześciokąt więc ABCDEF, iest równoboczny: powiadam nadto, że iest i równokątny. Ponieważ albowiem łuk AF, iest równy łukowi ED, przydawszy łuk spólny ABCD; będzie łuk FABCD, równy łukowi EDCBA, na łuku zaś FABCD, wspiérá się kąt FED, a na łuku EDCBA, wspiérá się kąt AFE, kąt więc AFE, iest równy kątowi DEF. Podobnież dowiodą się i pozostałé kąty sześciokąta ABCDEF, w szczególności bydź równé każdému z kątów AFE, DEF. Jest przeto sześciokąt ABCDEF, równokątnym, dowiedziono zaś że iest i równobocznym, a iest wpisány w kole ABCDEF. W danéın więc kole wpisány iest sześciokąt równoboczny i równokątny. C. B. d. R.

Wniosek. Wnosi się stąd oczywiście, że bok sześciokąta, iest równy połowie śrzednicy, toiest promieniowi koła na sześciokącie opisanégo.

I ieżeli przez punkta A, B, C, D, E, F, poprowadzimy styczné z kołém, opisze się około koła sześciokąt równoboczny i równokątny, trzymaiąc się tego samégo sposobu wykréśléniá i dowodzéniá, iaki w pięciokącie był podany i okazany; i prócz tego podobnie w danym sześciokącie równobocznym i równokątnym wpisać możémy koło, i drugié około niego opisać.

PODANIE XVI.

ZAGADNIENIE.

W daném kole wpisać piętnastokąt równoboczny i równokątny. Fig. 143.

Niech będzie dané koło ABCD, potrzeba w kole ABCD, wpisać piętnastokąt równoboczny i równokątny.

Wpiszmy w kole ABCD, bok AC, tróykąta równobocznégo (II. IV.) i bok AB, pięciokąta równobocznégo i równokątnégo (XI. IV.). Ponieważ okrąg koła cały ma bydź podzielony na piętnaście części równych, łuk ABC, który iest trzecią częścią całégo okręgu, będzie zamykáł takowych części pięć, a łuk AB, który iest piątą częścią całégo okręgu, będzie tychże części zamykáł trzy, pozostały więc łuk BC, będzie ich zawiérał dwie. Przetniymy łuk BC, (XXX. III.) na dwie równé części w punkcie E; dlá czego każdy z łuków BE, EC, będzie piętnastą częścią całégo okręgu ABCD. Jeżeli więc liniie prosté równé równym cięciwóm BE, EC, przeniesiémy następnie na okrąg koła ABCD, w danêm kole wpisze się piętnastokąt równoboczny i równokątny. C. B. d. R.

Trzymaiąc się zaś sposobu wykreśléniá i dowodzéniá podanégo na pięciokąt; ieżeli przez punkta podziału okręgu koła poprowadzimy styczné, opiszémy około koła piętnastokąt równoboczny i równokątny, tak iako i w danym piętnastokącie równobocznym i równokątnym podobnie wpisać możémy koło, i drugié około piętnastokąta opisać.

KONIEC XIĘGI CZWARTEY.

JEOMETRYI EUKLIDESA,

XIĘGA PIĄTA.

DEFINICYE.

1. Mówi się: iż wielkość iest częścią drugiéy wielkości, mnieyszá większéy, kiedy mnieyszá mierzy większą.

2. Mówi się: że większá wielkość iest wielokrotną wielkości mnieyszéy, kiedy mnieyszá mierzy większą.

3. Stosunek iest, wzaiemné dwóch wielkości iednégo rodzaiu, co do ilości, porównánié.

4. Mówi się: że wielkości maią stosunek między sobą, kiedy mnieyszá z nich powtórzoná wielokrotnie, może przewyższyć większą.

5. Mówi się: że wielkości są w jednym i tymże samym stosunku, piérwszá do drugiéy, i trzeciá do czwartéy; kiedy wziąwszy piérwszéy i trzeciéy równie wielokrotné, drugiéy i czwartéy równie wielokrotné; w każdéy odmianie wielokrotnégo wielokrotnych powtórzéniá, każdá z dwóch piérwszych wielokrotnych, każdą z dwóch drugich wielokrotnych, albo razém iedna drugą przewyższá, albo razém iedną drugiéy iest równá, albo razém iedna od drugiéy iest mnieyszá, toiest: gdy wielokrotná piérwszéy wielkości iest większą, równą lub mnieyszą od wielokrotnéy trzeciéy wielkości, iest téż wielokrotná drugiéy wielkosci, większą, równą lub mnieyszą od wielokrotnéy czwartéy wielkości.

6. Wielkości które maią iedén i ténże sám stosunek zowią się proporcyonalnémi.

7. Jeżeli zaś z równie wielokrotnych, wielokrotná piérwszéy przewyższá wielokrotną drugiéy, lecz wielokrotná trzeciéy nie przewyższá wielokrotnéy czwartéy, na tén czas mówi się: że piérwszá do drugiéy większy ma stosunek niż trzeciá do czwartéy, lub, co iedno

iest: że trzeciá do czwartéy mnieyszy má stosunek niż piérwszá do drugiéy.

8. Proporcya iest podobieństwo stosunków.

9. Proporcyą zaś náymniéy z trzech wyrazów się skłádá.

10. Gdy trzy wielkości są proporcyonalné mówi się: że piérwszá wielkość do trzeciéy iest w stosunku dwumnożnym piérwszéy do drugiéy.

11. Gdy zaś cztéry wielkości są ciągło proporcyonalné, mówi się: że piérwszá wielkość do czwartéy iest w stosunku tróymnożnym piérwszéy do drugiéy; i tak następnie ilékolwiek byłoby wielkości ciągło proporcyonalnych.

Opisanié A, stosunku złożonégo.

Gdy będzie ilékolwiek wielkości iednégo rodzaiu, mówi się: że piérwszá do ostatniéy iest w stosunku złożonym, ze stosunku piérwszéy do drugiéy, i ze stosunku drugiéy do trzeciéy, i ze stosunku trzeciéy od czwartéy i tak następnie aż do ostatniéy.

Naprzykład niech będą wielkości A,B,C,D, iednégo rodzaiu, piérwszá A, mówi się że iest do ostatniéy D, w stosunku złożonym ze stosunku A do B, i ze stosunku B do C, i ze stosunku C do D, czyli że stosunek A do D, iest złożony ze stosunków A do B, B do C, i C do D.

Jeżeli więc stosunek A do B, będzie ténże sam, czyli równy stosunkowi E do F; i stosunek B do C, równy stosunkowi G do H; i stosunek C do D, równy stosunkowi K do L; A do D, iest w stosunku złożonym, ze stosunków równych stosunkóm E do F, G do H, K do L, toż samo rozumié się kiedy dlá skróćéniá mówi się: że A do D, iest w stosunku złożonym ze stosunków E do F; G do H; i K do L.

Podobnież ieżeli stosunek M do N, równy iest stosunkowi A do D, mówi się dlá skróćéniá, że stosunek M do N, równy iest stosunkowi złożonému ze stosunków E do F; G do H; i K do L.

12. Odpowiadaiącémi wielkościami, w wielkościach proporcyonalnych nazywaią się i uważaią poprzedniki z poprzednikami, i następniki z następnikami. „Dawni Jeometrowie następuiącémi wy-

„razami tłumaczą i oznáczaią sposoby odmie-
„nianiá w wielkościach proporcyonalnych, albo
„porządku, albo ich wielkości tak iednak aże-
by się zostały proporcyonalnémi.

13. *Permutando;* tego wyrazu używaią; kiedy cztéry wielkości są proporcyonalné, a wnosi się: że má się piérwszá do trzeciéy iak drugá do czwartéy; który wniosek dowodzi się w podaniu XVI téy Xięgi piątéy. „Możná więc
„tę odmianę nazywać odmianą porządku w wy-
„razach śrzednich„.

14. *Jnvertendo*; tego wyrazu używaią; kiedy cztéry wielkości są proporcyonalné, a wnosi się, że drugá do piérwszéy, má się iak czwartá do trzeciéy, co się dowodzi w podaniu B. Xięgi piątéy. „Możná więc tę odmianę nazy-
„wać odmianą przełożéniá wyrazów śrzednich
„na mieyscé skraynych, i wyrazów skraynych
„na mieyscé śrzednich„.

15. *Componendo*; tego wyrazu używaią: kiedy cztéry wielkości są proporcyonalné, a wnosi się: że piérwszá wráz z drugą má się do drugiéy, iak trzeciá wráz z czwartą do czwartéy, co się dowodzi w podaniu XVIIIm Xięgi

piątéy. „Możná więc tę odmianę nazywać „odmianą dodawaniá wyrazów„.

16. *Dividendo*; tego wyrazu używaią: kiedy cztéry wielkości są proporcyonalné, a wnosi się: że przewyszka piérwszéy nad drugą má się do drugiéy, iak przewyszka trzeciéy nad czwartą, do czwartéy. Co się dowodzi w podaniu XVII Xięgi piątey. „Możná więc tę od„mianę nazywać odmianą odciąganiá lub dzieléniá wyrazów„.

17. *Convertendo*; tego wyrazu używaią: kiedy cztéry wielkości są proporcyonalné, a wnosi się: że piérwszá má się do przewyszki nad drugą, iak trzeciá do przewyszki nad czwartą; co się dowodzi w podaniu VI Xięgi piątéy. „Możná więc tę odmianę nazywać od„mianą porównywaniá poprzedników z różni„cami między niémi i następnikami„.

18. *Ex aequo sive ex aequali* tego wyrazu używaią: kiedy z jlukolwiek znayduiących się wielkości, i z jnnych wielkości, w równéy liczbie piérwszym, biorą się po dwie w każdą proporcyą w tym porządku: że następniki stosunków piérwszéy proporcyi są poprzednika-

mi stosunków drugiéy proporcyi, i znowu następniki stosunków drugiéy proporcyi są poprzednikami stosunków trzeciéy proporcyi, i tak daléy; a wnosi się: że się má piérwszá do ostatniéy w piérwszych wielkościach, iak w drugich wielkościach piérwszá do ostatniéy. „Możná tę odmianę nazywać, odmianą porównywaniá wielkości naprzemian„. Dwa zaś gatunki są takowéy odmiany.

19. Albo *ex aequali simpliciter* tego wyrazu używaią: kiedy piérwszá má się do drugiéy w piérwszych wielkościach tak, iak w drugich wielkościach piérwszá do drugiéy; iak zaś w piérwszych, má się drugá do trzeciéy tak w drugich, drugá do trzeciéy, i tak daléy; a wnosi się: że się má piérwszá do ostatniéy w piérwszych wielkościach, iak w drugich wielkościach piérwszá do ostatniéy. Co się dowodzi w podaniu XXII. Xięgi piątéy. „Możná tén gatunek odmiany nazywać odmianą „porównywaniá wielkości naprzemian w po„rządku prostym.

20. Albo *ex aequali in proportione perturbata seu inordinata*; tego wyrazu używa-

ią: kiedy w piérwszych wielkościach pierwszá má się do drugiéy tak, iak w drugich przedostatniá do ostatniéy; iak zaś w piérwszych má się drugá do trzeciéy, tak w drugich, drugá od ostatniéy do przedostatniéy; i iak w piérwszych trzeciá do czwartéy, tak w drugich trzeciá od ostatniéy, do drugiéy od ostatniéy, i tak daléy; a wnosi się: że się má pierwszá do ostatniéy w pierwszych wielkościach, iak w drugich wielkościach piérwszá do ostatniéy. Co się dowodzi w podaniu XXIII. Xięgi piątéy. „Możná tę odmianę nazywać odmianą porównywaniá wielkości naprzemian w porządku pomieszanym„.

PEWNIKI.

1. Równie wielokrotné iednéy lub równych wielkości, są między sobą równé.

2. Których wielkości iedna iest równie wielokrotną, lub których wielkości równé, są równie wielokrotné, té wielkości są między sobą równé.

3. Wielokrotná wielkość większéy, większá iest od równie wielokrotnéy wielkości mnieyszéy.

4. Wielkość, któréy wielokrotná większá iest, od równie wielokrotnéy wielkości drugiéy, większą iest od téyże drugiéy wielkości.

PODANIE I.

TWIERDZENIE.

Jeżeli ilékolwiek wielkości są ilukolwiek w równéy liczbie wielkości, każdá każdéy równie wielokrotnémi; ilokrotną iest wielkość iedna, wielkości iednéy, tylokrotnémi będą i wszystkie wszystkich. Fig. 144.

Niech będzie ilékolwiek wielkości AB, CD, ilukolwiek w równey liczbie wielkości E, F, każdá każdéy równie wielokrotnémi. Powiadam: iak wielokrotná iest wielkość AB, wielkości E, tak wielokrotnémi są razém wzięté wielkości AB, CD, względém razém wziętych wielkości E, F.

Ponieważ wielkość AB, równie iest wielokrotną wielkości E, iak wielkość CD, wielkości F, ilé więc iest wielkości w AB, równych wielkości E, tylé będzie i w CD, równych wielkości F. Podzielmy AB, na części równé E, té niech będą AG, GB; CD, zaś na części równé F, toiest CH, HD, będzie zatém wielość części CH, HD, równá wielości części AG, GB. A ponieważ AG, iest równá E, i CH, równá F, będą i AG, CH, równé E, F, (p. II. I.) dlá téyże samév przyczyny ponieważ GB, iest równá E, i HD, równá F, będą GB, HD, równé E, F. Jlé więc iest w AB, równych E, tylé iest i w AB, CD, równych E, F, a zatém iak wielokrotná wielkość AB, wielkości E, tylokrotné są wielkości AB, CD, razém wzięté, wielkości E, F, razém wziętych.

Jeżeli więc ilékolwiek wielkości są ilukolwiek w równéy liczbie wielkości, każdá każdéy równie wielokrotnémi; ilokrotną iest wielkość iedna wielkości iednéy, tylokrotnémi będą i wszystkié wszystkich. Toż samo albowiém dowodzénié má mieyscé w jakiéykolwiek liczbie wielkości. C. B. d. D.

PODANIE II.

TWIERDZENIE.

Jeżeli piérwszá wielkość iest równie wielokrotną drugiéy, iak iest trzeciá czwartéy, piątá zaś iest równie wielokrotną drugiéy, iak iest wielokrotná szóstá czwartéy; będzie téż piérwszá wielkość z piątą, równie wielokrotną drugiéy, iak trzeciá z szóstą, czwartéy. Fig. 145.

Niech piérwszá wielkość AB, będzie równie wielokrotną wielkości drugiéy C, iak iest trzeciá DE, czwartéy F; i niech piątá BG, drugiéy C, będzie równie wielokrotną iak szóstá EH, czwartéy F. Powiadam: że piérwszá wráz z piątą, toiest AG, iest wielokrotną drugiéy C, iak iest trzeciá wráz z szóstą, toiest DH, wielokrotną czwartéy F.

ty

Ponieważ AB, równie iest wielokrotná C, iak DE, wielkości F; ilé w wielkości AB, iest równych C, tylé będzie, i w wielkości DE, równych F. Dlá téy saméy przyczyny, ilé iest w BG, równych C, tylé i w EH, będzie równych F; ilé więc iest w całéy wielkości AG, równych C, tylé będzie i w całéy wielkości DH, równych F. Jak zatém wielokrotná iest AG, wielkości C, tak wielokrotną iest i DH, wielkości F, i piérwszá więc wraz z piątą AG, będzie równie wielokrotną drugiéy C; iak iest trzeciá z szóstą DH, wielokrotną czwartéy F. Dlá czego etc. etc. C. B. d. D.

Wniosek. Wypadá stąd: że ieżeli iest ilékolwiek wielkości AB, BG, GH, wielokrotnych wielkości C, i tyléż innych wielkości DE, EK, KL, równie wielokrotnych wielkości F, każdá każdéy; będą wszystkié piérwszé razém, toiest będzie AH, równie wielokrotną wielkości C, iak wszystkié razém drugié, toiest DL, wielkości F. Fig. 146.

PODANIE III.

TWIERDZENIE.

Jeżeli piérwszá wielkość iest równie wielokrotną drugiéy, iak iest trzeciá czwartéy; wzięté zaś będą równie wielokrotné piérwszéy i trzeciéy; będzie téż z wziętych piérwszá równie wielokrotną drugiéy, a drugá czwartéy. Fig. 147.

Niech będzie piérwszá wielkość A, równie wielokrotną drugiéy wielkości B, iąk trzeciá C, czwartéy D; i niech będą wzięté wielkości FE, HG, równie wielokrotné wielkości A, C. Powiadam: że wielkość EF, iest równie wielokrotną wielkości B, iąk iest GH, wielkości D.

Ponieważ albowiém EF, równie wielokrotná iest wielkości A, iak iest GH, wielkości C, ilé więc iest wielkości w EF, równych A, tylé będzie i w GH, równych C. Podzielmy EF, na wielkości EK, KF, równé wielkości A, GH zaś na wielkości GL, LH, równé wielkości C; będzie więc wielość części EK, KF, równá wielości części GL, LH; a ponieważ równie wielokrotná iest A, wielkości B, iak C, wielkości D, równá zaś iest EK, wielkości A, i GL, wielkości C; będzie EK, równie wielokrotną wielkości B, iak GL, wielkości D, dlá téy samméy przyczyny równie wielokrotną będzie KF, wielkości B, iak LH, wielkości D, i podobnież gdyby więcéy znaydowało się części w EF, GH, równych wielkościóm A, C. Ponieważ więc piérwszá EK, równie wielokrotną iest drugiéy B, iak trzeciá GL, czwartéy D; iest zaś i piątá KF, drugiéy B, równie wielokrotná iak szóstá LH, czwartéy D; będzie i piérwszá wráz z piątą, toiest wielkość EF, równie wielokrotną drugiéy B, (II. V.) iak trzeciá z szóstą toiest GH, czwartéy D. Jeżeli więc piérwszá wielkość etc. etc. C. B. d. D.

PODANIE IV.

TWIERDZENIE.

Jeżeli piérwszá wielkość do drugiéy iest w tymże samym stosunku, iak wielkość trzeciá do czwartéy; będą téż i równie wielokrotné piérwszéy i trzeciéy, do równie wielokrotnych drugiéy i czwartéy w każdéy odmianie wielokrotnégo powtórzéniá porównané, w równym stosunku między sobą. Fig. 148.

Niechay piérwszá wielkość A, do drugiéy

B, má tén sám stosunek, iaki wielkość trzeciá C, do czwartéy D; i niechay wzięté będą iakożkolwiek równie wielokrotné wielkości E, F, względém wielkości A, C, i iakożkolwiek równie wielokrotné wielkości G, H, względém wielkości B, D, powiadam: że E má się do G, iak F do H.

Weźmy wielkościom E, F, iakożkolwiek równie wielokrotné wielkości K, L: i wielkościóm G, H, inné iakożkolwiek równie wielokrotné wielkości M, N. Ponieważ wielkość E iest równie wielokrotną wielkości A, iak F, wielkości C; biorą się zaś wielkościóm E, F, równie wielokrotné wielkości K, L; będzie K, równie wielokrotną wielkości A, (III. V.) iak iest L, wielkości C, dlá téy saméy przyczyny M, równie wielokrotną będzie wielkości B, iak N wielkości D. A ponieważ má się A do B, tak, iak C do D; wzięté zaś są wielkości A, C, równie wielokrotné K, L; tak iako i wielkości B, D, wzięté są inné równie wielokrotné M, N: ieżeli więc wielkość K, przewyższá, równą lub mnieyszą iest od wielkości M; wielkość téż L, przewyższać, równą lub mnieyszą będzie od wielkości N. (d. V. V.)

a wielkości K, L, są iakożkolwiek równie wielokrotné wielkości E, F; wielkości zaś M, N, są iakożkolwiek równie wielokrotnémi wielkości G, H; iak zatém E má się do G, tak się miéć będzie F do H. Jeżeli więc piérwszá wielkość do drugiéy etc. etc.

Wniosek. I podobnie ieżeli piérwszá wielkość do drugiéy má się iak trzeciá do czwartéy, będą téż równie wielokrotné piérwszéy i trzeciéy w każdéy odmianie wielokrotnégo powtórzéniá do drugiéy i czwartéy, w równym stosunku, i podobnie piérwszá i trzeciá do każdych równie wielokrotnych drugiéy i czwartéy, będą w tymże samym stosunku.

Niechay bowiém piérwszá wielkość A, má się do drugiéy B, iak wielkość trzeciá C, do czwartéy D, i niechay będą wzięté iakożkolwiek równie wielokrotné E, F, względém wielkości A, C; będzie E do B, iak F do D. Wziąwszy bowiém K, L, iakożkolwiek równie wielokrotné, względém wielkości E, F; i inné iakożkolwiek równie wielokrotné G, H, względém wielkości B, D; okaże się iak w poprzedzaiącém twiérdzéniu, że K iest wielokrotną wielkości A, iak L wielkości C. A ponieważ A má się do B, iak C do D, wzięté zaś są równie wielokrotné K, L, względém wielkości A, C, i inné równie wielokrotné G, H, względém wielkości B, D; ieżeli więc K przewyższá, równą lub mnieyszą iest od wielkości G, wielkość téż L przewyższać, równą lub mnieyszą będzie od wielkości H. A wielkości K, L, są iakożkolwiek równie wielokrotné względém wielkości E, F; wielkości zaś G, H, są iakożkolwiek równie wielokrotné względém wielkości B, D; iak więc má się E do B, tak się má F do D. Podobnież dowodzi się przypadek drugi.

PODANIE V.

TWIERDZENIE.

Jeżeli wielkość iest równie wielokrotną wielkości, iak część części; będzie i pozostałá część pozostałéy części równie wielokrotná, iak całá całéy. Fig. 149.

Niechay wielkość AB, będzie wielkości CD, równie wielokrotną, iak część AE, części CF, powiadam: że i pozostałá część EB, iest pozostałéy części FD, równie wielokrotną, iak całá wielkość AB, całéy wielkości CD.

Jak wielokrotná albowiém iest AE, względém CF, tylokrotną uczyńmy AG, względém FD, będzie więc (I. V.) AE, równie wielokrotná względém CF, iak EG, względém CD; przypuszczá się zaś AE, bydź równie wielokrotną względém CF, iak AB, względém CD; są więc EG, AB, równie wielokrotnémi względém CD; i dlá tego EG, iest równá AB, (I. p. V.) odiąwszy spólną AE, pozostałá AG, iest równá pozostałéy EB. Ponieważ więc AE, równie iest wielokrotną CF, iak AG, względém FD, i AG, iest równá EB; będzie AE, równie wielokrotná CF, iak EB, względém FD, równie zaś wielokrotną przypuszczá się AE, względém CF, iak AB, względém CD; więc EB równie wielokrotną iest względém FD, iak AB względém CD. Jeżeli więc wielkość etc. etc. C. B. d. D.

PODANIE VI.

TWIERDZENIE.

Jeżeli dwie wielkości są równie wielokrotnémi dwóch drugich wielkości, i pewné części piérwszych, są równie wielokrotnémi wielkości drugich; będą i pozostałé części piérwszych wielkości, albo równé wielkościóm drugim, albo względém nich równie wielokrotné. Fig. 150. 1° i 2do.

Niechay dwie wielkości AB, CD, będą równie wielokrotnémi dwóch drugich wielkości E, F, i niechay części AG, CH, będą też wielokrotnémi tychże wielkości E, F. Powiadám: że i pozostałé części GB, HD, albo są równé wielkościóm E, F, albo są równie wielokrotnémi wielkości E, F.

Niech będzie náprzód GB, równé E, mówię: że i HD, iest równá F. Wykréślmy CK, równą F. Ponieważ AG, równie iest wielokrotną E, iak CH względém F, i iest GB, równá E; CK, zaś równá F; będzie AB, równie wielokrotną E, iak KH względém F, równie zaś wielokrotną przypuszczá się AB, względém E, iak CD względém F; więc KH równie wielokrotną iest względém F, iak CD względém F, więc KH, iest równá CD, (I. p. V.) odiąwszy spólną CH, więc pozostałá KC, iest równá pozostałéy HD, lecz K, C, iest równá F, zatém i HD iest równá F, ieżeli więc GB iest równá E, będzie i HD równá F.

Niech znowu GB będzie wielokrotną względém E, będzie HD, równie wielokrotną względém F. Jak bowiém iest wielokrotná GB, względém E, tak wielokrotną uczyńmy CK względém F; a ponieważ równie wielokrotná iest AG, względém E, iak CH, względém F, równie zaś wielokrotną iest GB, względém E, iak CK, względém F, będzie (II. V.) AB, równie wielokrotną względém E, iak KH, względém F, równie zaś wielokrotną przypuszczá się AB, względém E, iak CD, względém F; więc KH, równie wielokrotną iest względém F, iak CD względém F, iest zatém KH, równá CD; spólną odiąwszy CH, pozostałá KC, iest równá pozostałéy HD. Jak wielokrotną zaś iest GB względém E, tak wielokrotną iest KC, względém F, a KC, iest rówwná HD, więc iak wielokrotną iest HD, względém F, tak wielokrotną iest GB, względém E. Jeżeli więc dwie wielkości etc. etc. C. B. d. D.

PODANIE A.

TWIERDZENIE.

Jeżeli wielkość piérwszá má się do drugiéy, iak wielkość trzeciá do czwartéy; a iest piérwszá większá, rówwná, lub mnieyszá od drugiéy, będzie trzeciá większá, równá lub mnieyszá od czwartéy.

Weźmy albowiém iakożkolwiek równie wielokrotné wszystkich cztérech wielkości naprzykład podwóyné; ieżeli więc podwóyná piérwszéy większą iest od podwóynéy drugiéy, będzie podwóyná trzeciéy, większá od podwóynéy czwartéy (IV. V.) ieżeli zaś piérwszá większą iest od drugiéy, będzie podwóyná pierwszéy większá od podwóynéy drugiéy, dlá czego i podwóyná trzeciéy większá będzie od podwóynéy czwartéy; zatém trzeciá większá będzie od czwartéy. Jeżeli więc piérwszá iest większą od drugiéy, będzie i trzeciá większą od czwartéy. Podobnież ieżeli piérwszá iest równá drugiéy, lub od niéy mnieyszą, okaże się: że i trzeciá będzie równą czwartéy lub od niéy mnieyszą. C. B. d. D.

PODANIE B.

TWIERDZENIE.

Jeżeli cztéry wielkości są proporcyonalné, będą i odwrótnie proporcyonalné. Fig. 151.

Niechay się má wielkość A do wielkości B, iak wielkość C do wielkości D, będzie odwrótnie B do A, iak D do C.

Weźmy albowiém iakożkolwiek równié wielokrotné wielkości E, F, względém B, D, i inné iakożkolwiek równie wielokrotné wielkości G, H, względém A, C. A naprzód niechay E, większá będzie od G; będzie więc G mnieyszá od E, ponieważ má się A do B, iak C do D, a wzięté są G, H, równie wielokrotné względém A, C, i inné równie wielokrotné E, F, względém B, D, i iest G mnieyszá od E, będzie téż H mnieyszá od F, (V. def. V.) iest zatém F większą od H. Jeżeli więc E większą iest od G, będzie i F większą od H. Podobnież ieżeliby E, była równá lub mnieyszá od G, okaże się F, bydź równą lub mnieyszą od H. Są zaś E, F, iakożkolwiek równie wielokrotné wielkości B, D; i inne G, H, iakożkolwiek równie wielokrotné względém A, C; więc iak się má B do A, tak się má D do C. Przeto ieżeli cztéry wielkości są proporcyonalné etc. etc. C. B. d. D.

PODANIE C.

TWIERDZENIE.

Jeżeli piérwszá wielkość równie wielokrotną iest, lub tąż samą częścią względém drugiéy, iak wielkość trzeciá względém czwartéy; będzie piérwszá wielkość miała się do drugiéy, iak wielkość trzeciá do czwartéy. Fig. 152. 1°, 2do.

Niechay piérwszá wielkość A, będzie równie wielokrotną drugiéy iak trzeciá czwartéy; będzie A do B, iak C do D.

Weźmy iakożkolwiek równie wielokrotné E, F, względém wielkości A, C: i inné iakożkolwiek równie wielokrotné G, H, względém wielkości B, D. A ponieważ A, iest równie wielokrotną względém B, iak C względém D; E zaś iest równie wielokrotną względém A, iak F względém C, będzie E równie wielokrotną względém B, iak F względém D; są zaś G, H, równie wielokrotnémi względém B, D: więc ieżeli E, iest większá wielokrotná względém B, iak G, względém B, będzie i F, większá wielokrotná względém D, iak H względém D; toiest ieżeli E, większá iest od G, będzie F, większá od H; podobnież ieżeli E, byłaby równą G, albo od niéy mnieyszą, dowiedzie się F, bydź równą H, albo od niéy mnieyszą. Są zaś E, F, iakożkolwiek równie wielokrotné względém A, C; i wielkości inné G, H, iakożkolwiek równie wielokrotné względém B, D; więc się má A do B, iak C do D (def. V. V.).

Niechay ieszcze wielkość piérwszá A, będzie tąż samą częścią względém drugiéy wielkości B, iak trzeciá C, względém czwartéy D, będzie A, miéć się do B, iak C do D. Będzie albowiém B, tyléż wielokrotną względém A, iak D względém C; dlá czego podług przypadku piérwszégo iest B do A, iak D do C, a odwrótnie (B. V.) będzie A do B, iak C do D. Jeżeli więc piérwszá wielkość etc. etc. C. B. d. D.

PODANIE D.

TWIERDZENIE.

Jeżeli piérwszá wielkość ma się do drugiéy, iak trzeciá do czwartéy; i iest piérwszá wielokrotną lub częścią drugiéy; będzie trzeciá równie wielokrotną, lub tąż samą częścią czwartéy. Fig. 153.

Niechay się má A do B, iak C do D; i niech A, będzie wielokrotną względém B; będzie C, równie wielokrotną względém D.

Weźmy wielkość E, równą wielkości A, i iak wielokrotną iest A, czyli E, względém B, tylokrotną uczyńmy F, względém D. Ponieważ więc A, má się do B, iak C do D: a drugiéy B, i czwartéy D, równie wielokrotné są wzięté E, F: będzie (w. IV. V.) A do E, iak C do F, aże A, iest równá E; będzie C, równá F, (pod. A. V.) iest zaś F, równie wielokrotną względém D, iak E czyli A, względém B, więc C, równie wielokrotną iest względém D, iak A względém B.

Niechay ieszcze piérwszá wielkość A, będzie częścią drugiéy B, będzie trzeciá C, tąż samą częścią względém czwartéy D. Fig. 152. 2do.

Ponieważ albowiém má się A do B, iak C do D, będzie odwrótine (B. V.) B do A, iak D do C, iest zaś A, część wielkości B, toiest B, wielokrotną względém A: zaczém podług przypadku poprzedzaiącégo D, iest równie wielokrotną względém C, toiest C, tąż samą częścią D, iaką A względém B. Jeżeli więc piérwszá wielkość etc. etc. C. B. d. D.

PODANIE VII.

TWIERDZENIE.

Wielkości równé są do iednéy i téyże saméy wielkości w jednym i tymże samym stosunku; i iedna a taż sama wielkość, iest w jednym i tymże samym stosunku do równych wielkości. Fig. 154.

Niechay będą równé wielkości A, B, i inná każdá wielkość C. Powiadám: że każdá z wielkości A, B, są w równym stosunku do C, i że C, do każdéy z dwóch wielkości A, B, podobnież w równym iest stosunku.

Weźmy albowiém wielkościóm A, B, iakożkolwiek równie wielokrotné D, E, i inną F, iakożkolwiek wielokrotną względém C. Ponieważ więc równie wielokrotną iest D względém A, iak E względém B; iest zaś A równá B, będzie i D równá E (I. p. V.). Jeżeli zatém D, przewyższá, równá lub mnieyszá iest od F, wielkość téż E, przewyższać, równą lub mnieyszą będzie od F: są zaś D, E, iakożkolwiek równie wielokrotné względém A, B; a inná F, iakożkolwiek równie wielokrotná względém C, będzie więc A do C, iak B do C, (V. d. V.).

Powiadam ieszcze: że wielkość C, iest w równym stosunku względém każdéy z wielkości A, B. Uczyniwszy bowiém toż samo wykréślénié, okażémy podobnie że D, równá E. Jeżeli więc F przewyższá, iest równą, lub mnieyszą od D: taż sama wielkość F, przewyższać, równą, lub mnieyszą będzie od wielkości E. Lecz F, iest iakożkolwiek wielokrotną względém C, inné zaś wielkości D, E, są iakożkolwiek równie wielokrotnémi względém A, B; więc iak się má C do A, tak się mieć będzie C do B. Wielkości zatém równé etc. etc. C. B. d. D.

PODANIE VIII.

TWIERDZENIE.

Z nierównych wielkości, większá do trzeciéy w większym iest stosunku, niż mnieyszá; a trzeciá do mnieyszéy w większym iest stosunku niż do większéy. Fig. 155. 1°, 2do, 3tio.

Niechay będą nierówné wielkości AB, BC, i niech AB, będzie większą; inná zaś trzeciá wielkość niech będzie D; będzie AB do D, w większym stosunku niż BC do D; a D do BC, będzie w większym stosunku, niż do AB.

Jeżeli mnieyszá z wielkości AC, CB, nie iest mnieyszą od wielkości D, weźmy wielkości AC, CB, podwóyné EF, FG, *iak na Figurze I.*, ieżeli zaś mnieyszá z wielkości AC, CB, mnieyszą iest od D, *iak na Figurach* 2giéy i 3ciéy, ta czyliby była AC, czyli CB, powtórzoná wielokrotnie, stać się musi większą od D. Powtórzmy ią tylokrotnie, póki się nie stanie większą od D, a ilé razy będzie powtórzoną, tylé razy powtórzmy i drugą: niech tą wielokrotną względém AC, będzie EF, a równie wielokrotną względém CB, niech będzie FG; każdá więc z dwóch EF, FG, większą iest iak D: we wszystkich zaś przypadkach, weźmy H, podwóyną względém D: L, potróyną względém D, i tak następnie raz zawszé więcéy, pókiby ta, którá się bierze, nie stała się wielokrotną względém D, i piérwszy ráz większą od FG Niech tak wziętą będzie L, wielokrotną względém D, i piérwszy ráz większą od FG: K. zaś niechay będzie wielokrotną względém D, a náybliżéy mnieyszą od L.

Ponieważ więc L, iest wielokrotną względém D, piérwszy ráz większą od FG, nie będzie K, większą od FG, a zatém FG, nie będzie mnieyszą od K, a gdy EF, iest równie wielokrotną względém AC, iak FG, względém CB, będzie (I. V.) i FG, równie wielokrotną względém CB, iak EG, względém AB; dlá czego EG, FG, są równie wielokrotné względém AB, CB: dowiedzioná zaś była FG, nie mnieyszą od K, a z wykréśléniá iest EF, większá od D; więc całá EG, od obudwóch K, D, razém wziętych większą będzie; lecz obiedwie K, D, razém wzięté są równé L; przewyższá więc wielkość EG, wielkość L; toiest EG, większá iest od L; FG, zaś nie przewyższá L; są zaś EG, FG, równie wielokrotné względém AB, BC, i inná wielkość L, iest wielokrotną względém D; więc AB do D, w większym iest stosunku niż BC do D (def. VII. V.). Prócz tégo D, w większym będzie stosunku do BC, niż do AB; uczyniwszy bowiém toż samo wykréślénié podobnież dowiedzie się: że L, przewyższá FG, nie przewyższá zaś wielkości EG, lecz L, iest wielokrotną względém D, inné zaś FG, i EG, są równie wielokrotnémi względém CB, AB. Więc D do CB, w większym iest stosunku iak D do AB. Z nierównych zatém wielkości etc. etc. C. B. d. D.

PODANIE IX.

TWIERDZENIE.

Wielkości w równym stosunku będącé względém iednéy i téyże saméy wielkości, są równé między sobą; i względém których wielkości iedna i taż sama wielkość, iest w równym stosunku, té wielkości są między sobą równé. Fig. 156. 1^o, i 2^{do}.

Niechay z dwóch wielkości A, B, każdá będzie w jednym stosunku do C; powiadám: że A, iest równá B. Jeżeli albowiém iedna nie iest równą drugiéy, iedna z nich iest większą; niech A, będzie większą; są więc, iak w poprzedzaiącém podaniu dowiedzioné było, pewné wielkości równie wielokrotné względém A, B, i pewná wielkość wielokrotná względém C, takié: że wielokrotná wielkości A, przewyższá wielokrotną wielkości C, wielokrotná zaś wielkości B, nie przewyższá wielokrotną wielkości C. Niechay D, E, będą równie wielokrotné względém A, B, a F, niech będzie wielokrotną względém C, tak że D przewyższá F; E zaś téyże F nieprzewyższá. Ponieważ A, má się do C, iak B do C, a wzięté są równie wielokrotné D, E, względém A, B, i wziętá iest F wielokrotná względém C, a iest D, większá od F, będzie E, (V. def. V.) większá od F: iest zaś i E, nie większá od F, co bydź nié może: nie iest więc wielkość A, nie równá wielkości B; będzie zatém A, równá B.

Niechay znowu C, do każdéy z dwóch wielkości A, B, má iedén ténże sám stosunek. Powiadam: że A, iest równá B. Jeżeli bowiém nie iest, iedna z nich iest większą; niech będzie większą A, iest zatém (VIII. V.) pewná wielkość F, wielokrotná względém C, i są pewné wielkości E, D, równie wielokrotné względém B, A, takié: iż F, przewyższá E, nie przewyższá zaś wielkości D. Ponieważ iest C do B, iak C do A, a iest F, wielokrotná piérwszéy C, większá od E, wielokrotnéy względém drugiéy B, będzie F, wielokrotná trzeciéy C, większá od D, wielokrotnéy czwartéy A: iest zaś F, i nie większá od D, co bydź nié może, iest zatém A, równá B. Wielkości więc w równym stosunku etc. etc. Co było do dowodzéniá.

PODANIE X.

TWIERDZENIE.

Z wielkości porównywanych z jedną i tąż samą wielkością, ta którá do niéy má większy stosunek większá iest; ta zaś, do którey taż sama wielkość, większy má stosunek mnieyszá iest. Fig. 156. 1°, i 2do.

Niechay wielkość A, do wielkości C, w większym będzie stosunku, iak wielkość B, do wielkości C. Powiadam: że A, większá iest od B. Ponieważ bowiém A do C, w większym iest stosunku iak B do C, są (def. VII. V.) pewné wielkości, równie wielokrotné wielkości A, B, i pewná wielkość wielokrotná wielkości C, takié: że wielokrotná wielkości A, przewyższá wprawdzie wielokrotną wielkości C, wielokrotná iednak wielkości B, nie przewyższá wielokrotnéy wielkości C. Niechay będą wielkości D, E, równie wielokrotné względém A, B, i wielkość F, wielokrotná względém C, tak: że D przewyższá F; E zaś nie przewyższá F: iest więc D, większá od E, a ponieważ D, E, są równie wielokrotné względém A, B, i iest D, większá od E, będzie A, większá od B, (p. IV. V.).

Niechay znowu C do B, większy má stosunek iak C do A, powiadám: że B, mnieyszá iest od A, iest bowiém pewná wielkość F, wielokrotná wielkości C, i są pewné wielkości E, D, równie wielokrotné wielkości B, A, tak że F przewyższá E, nie przewyższá zaś D; iest więc E, mnieyszá od D; aże E, D, są równie wielokrotné względém B, A, będzie B, mnieyszá od A. Z wielkości więc porównywanych etc. etc. C. B. d. D.

PODANIE XI.

TWIERDZENIE.

Stosunki wielkości, równé témuż samému stosunkowi, są równé i między sobą. Fig: 157.

Niechay má się A do B, iak C do D; iak zaś C do D, tak E do F. Powiadám: że má się A do B, iak E do F.

Weźmy albowiém wielkości G, H, K, równie wielokrotné względém A, C, E, i inné wielkości L, M, N, iakożkolwiek równie wielokrotné względém B, D, F. Ponieważ A, má się do B, iak C do D, i są wzięté wielkości G, H, równie wielokrotné względém A, C, tak iako i wielkości L, M, równie wielokrotné względém B, D; ieżeli G, przewyższá, równą lub mnieyszą iest od L, i wielkość H, przewyższać, równą lub mnieyszą będzie od wielkości M, (V. def. V.). Znowu ponieważ C, má się do D, iak E do F, a wzięté są H, K, równie wielokrotné względém C, E, i inné M, N, równie wielokrotné względém D, F; ieżeli H, przewyższá równą lub mnieyszą iest od M, i K, przewyższać, równą lub mnieyszą będzie od N: a są G, K, równie wielokrotné względém A, E, inné zaś L, N, także iakożkolwiek równie wielokrotné względém B, F. Więc má się A do B, iak E do F. Stosunki przeto wielkości, równé etc. etc. C. B. d. D.

PODANIE XII.

TWIERDZENIE.

Jeżeli iest ilékolwiek wielkości proporcyonalnych; iak się má iedna z poprzedników, do iednéy z następników, tak się będą miały poprzedniki wszystkié razém wzięté, do wszystkich następników razém wziętych. Fig. 157.

Niechay będzie ilékolwiek wielkości proporcyonalnych A, B, C, D, E, F; i A do B, niech się má iak C do D, i iak E do F. Powiadám: że iak się má A do B, tak się maią A, C, E, do B, D, F.

Weźmy wielkości G, H, K, iakożkolwiek równie wielokrotné względém A, C, E, i inné L, M, N, iakożkolwiek równie wielokrotné względém B, D, F. Ponieważ iak się má A do B, tak C do D, i E do F; a wzięté są G, H, K, równie wielokrotné względém A,C,E, i inné L, M, N, równie wielokrotné względém B, D, F; ieżeli (V. d. V.) G, przewyższá, równą lub mnieyszą iest od L, i wielkości H, K, przewyższać, równé lub mnieyszé będą od M, N. Dlá czego ieżeli i G, przewyższá, równą lub mnieyszą iest od L, i wielkości G, H, K, przewyższać, równé lub mnieyszé będą od L, M, N; są zaś G, oráz G, H, K, iakożkolwiek równie wielokrotné względém A, oráz względém A, C, E: ponieważ ieżeli ilékolwiek wielkości, są ilukolwiek w równéy liczbie wielkości każdá każdéy równie wielokrotnémi, ilokrotną iest wielkość iedna, wielkości iednéy, tylokrotnémi będą i wszystkié wszystkich (I. V.) dlá téy saméy przyczyny L, oraz L, M, N, są iakożkolwiek równie wielokrotné względém B, oraz B, D, F. Má się zatém A do B, iak A, C, E, do B, D, F. Dlá czego ieżeli iest ilékolwiek wielkości etc. etc. Co było do dowodzéniá.

PODANIE XIII.

TWIERDZENIE.

Jeżeli piérwszá wielkość iest w tym samym stosunku do drugiéy, iak trzeciá do czwartéy, trzeciá żaś do czwartéy má większy stosunek, iak piątá do szóstéy; będzie i piérwszá do drugiéy miéć większy stosunek, iak piątá do szóstéy. Fig. 158.

Niechay piérwszá wielkość A, do drugiéy B, má tén sám stosunek, iaki trzeciá C, do czwartéy D: trzeciá zaś C. do czwartéy D, niech má większy stosunek iak piątá E, do szóstéy F. Powiadám: że i piérwszá A, do drugiéy B, większy má stosunek iak piątá E, do szóstéy F.

Ponieważ albowiém C do D, większy má stosunek iak E do F, są pewné wielkości, równie wielokrotné względém C, E, i inné pewné wielkości równie wlelokrotné względém D, F, takié: że wielokrotná wielkość C, przewyższá wprawdzie wielokrotną wielkości D; wielokrotná zaś wielkości E, nie przewyższá wielokrotnéy wielkości F (VII. d. V). Niech takiémi będą G, H, równie wielokrotné względém C, E, i inné K, L, równie wielokrotné względém D, F; tak że G, przewyższá wprawdzie K: H, zaś nie przewyższá L; i iak wielokrotná iest G, względém C, tak wielokrotną uczyńmy M, względém A: iak zaś wielokrotná iest K, względém D, tak wielokrotną uczyńmy N, względém B. A ponieważ má się A do B, iak C do D, i wzięté są M, G, równie wielokrotné względém A, C; tak iako i N, K, równie wielokrotné względém B, D; ieżeli M, przewyższá, równą lub mnieyszą iest od N, i wielkość G, przewyższać, równą lub mnieyszą będzie od K; lecz G, przewyższá K, więc i M, przewyższać będzie N: H zaś nieprzewyższá L, i są M, H, równie wielokrotné względém A, E, a N, L, równie wielokrotné względém B, F, zaczém A do B, większy miéć będzie stosunek iak E do F. Jeżeli więc piérwszá wielkość etc etc. Co było do dowodzéniá.

Wniosek. Jeżeli piérwszá do drugiéy większy má stosunek iak trzeciá do czwartéy: trzeciá zaś do czwartéy iest w tym samym stosunku iak piątá do szóstéy; dowiedzie się podobnież: że piérwszá do drugiéy má większy stosunek, iak piątá do szóstéy.

PODANIE XIV.

TWIERDZENIE.

Jeżeli wielkość piérwszá má ténże sám stosunek do drugiéy, iaki trzeciá do czwartéy, piérwszá zaś iest większą, równą, lub mnieyszą od trzeciéy; będzie téż drugá większą, równą lub mnieyszą od czwartéy. Fig. 159. 1^o, 2^{do}, 3^{tio}.

Niechay piérwszá wielkość A, má ténże sám stosunek do drugiéy B, iaki má trzeciá C, do czwartéy D; niech zaś A, większą będzie od C, powiadám: że i B, większą iest od D.

Ponieważ albowiém A, większą iest od C, a iest inná iakáżkolwiek wielkość B, będzie A, (VIII. V.) w większym stosunku do B, iak C do B, lecz iak C do D, tak się má A do B; więc i C do D (XIII. V.) większy má stosunek iak C do B, do któréy zaś wielkości taż sama wielkość większy má stosunek, ta mnieyszá iest, (X. V.) iest zatém D, mnieyszá iak B, a więc B, większá będzie iak D.

Powtóré. Niechay A, będzie równą C, będzie B równą D. Ponieważ albowiém má się A do B, iak C, toiest: A do D; będzie B, równá D (IX. V.).

Potrzecié. Niech A, będzie mnieyszą od C, będzie B, mnieyszą od D, będzie albowiém C, większá od A, a ponieważ má się C do D, iak A do B, będzie D, większá od B, podług przypadku pierwszégo, dlá czego B mnieyszá będzie od D. Jeżeli więc wielkość etc. etc. C. B. d. D.

PODANIE XV.

TWIERDZENIE.

Części wielkości porównané między sobą, maią ténże sám stosunek iaki maią równie wielokrotné tychże części. Fig. 160.

Niechay wielkość AB, będzie równie wielokrotną względém C, iak iest DE, względém F. Powiadam: że C má się do F, iak się má AB do DE.

Ponieważ albowiém AB, iest równie wielokrotną względém C, iak DE względem F, ilé iest w AB, wielkości równych C, tylé będzie i w DE, równych F. Podzielmy AB, na wielkosci równé C, té niech będą AG, GH, HB, i podzielmy DE, na wielkości równé F, toiest: na DK, KL, LE; będzie więc wielość AG, GH, HB, równá wielości DK, KL, LE, a ponieważ AG, GH, HB, są równé między sobą; i są równé między sobą DK, KL, LE, będzie iak AG do DK, tak GH do KL, i HB do LE, (VII. V.); lecz iak iedna z poprzedników má się do iednéy z następników, tak się miéć będą wszystkié poprzedniki do wszystkich następników (XII. V.) iest zatém iak AG do DK, tak AB do DE; lecz AG, iest równą C, i DK, równą F, więc iak C do F, tak się miéć będzie AB do DE. Części zatém wielkości, porównané etc. etc. C. B. d. D.

PODANIE XVI.

TWIERDZENIE.

Jeżeli cztéry wielkości iednégo rodzaiu są proporcyonalné, będą i z odmianą porządku w wyrazach śrzednich proporcyonalné. Fig. 161.

Niechay będą cztéry wielkości iednégo rodzaiu proporcyonalné A, B, C, D, tak że się má A do B, iak C do D. Powiadám: że i z odmianą porządku w wyrazach śrzednich będą proporcyonalné, toiest: że się má A do C, iak B do D.

Weźmy wielkości E, F, iakożkolwiek równie wielokrotné względém A, B; i inné wielkości G, H, iakożkolwiek równie wielokrotné względém C, D; ponieważ E, iest równie wielokrotną względém A, iak iest F, względém B; części zaś wielkości porównané między sobą [XV. V.] maią ténże sám stosunek, iaki maią równie wielokrotné tychże części; będzie iak A do B, tak E do F; iak zaś A do B, tak C do D, więc iak C do D, tak E do F. Znowu ponieważ G, H, są wielokrotné względém C, D, będzie iak C do D, tak G do H; iak zaś C do D, tak E do F. Więc iak E do F, tak G do H (XI. V.). Lecz ieżeli z cztérech wielkości proporcyonalnych, piérwszá iest większą, równą lub mnieyszą od trzeciéy, będzie téż drugá większą, równą lub mnieyszą od czwartéy (XIV. V.) ieżeli więc E, przewyższá, równą lub mnieyszą iest od G, i wielkość F, przewyższać, równą, lub mnieyszą będzie od H; są zaś E, F, iakożkolwiek równie wielokrotné względém A, B;

a inné G, H, iakożkolwiek równie wielokrotné względém C, D, iak się zatém (d. V. V.) má A do C, tak B do D. Jeżeli więc cztéry wielkości iednégo rodzaiu etc. etc. C. B. d. D.

PODANIE XVII.

TWIERDZENIE.

Jeżeli złożoné wielkości są proporcyonalné, i rozdzielоné będą proporcyonalné. Fig. 162.

Niechay złożoné wielkości AB, BE, CD, DF, będą proporcyonalné, toiest: że iak się má AB do BE, niech się tak má CD do DF. Powiadám: że téż wielkości i rozdzielоné są proporcyonalné, toiest: że AE, iak się má do EB, tak się má CF do FD.

Weźmy wielkości GH, HK, LM, MN, iakożkolwiek równie wielokrotné względém AE, EB, CF, FD, i weźmy znowu inné wielkości KX, NP, równie wielokrotné względém EB, FD. Ponieważ GH, równie wielokrotną iest względém AE, iak HK, względém EB; będzie GH, równie wielokrotną względém AE, iak

GK, względém AB. GH zaś równie wielokrotną iest względém AE, iak LM, względém CF; więc GK, równie wielokrotną względém AB, iak LM, względém CF. Znowu ponieważ LM, równie wielokrotną iest względém CF, iak iest MN, względém FD, będzie (I. V.) LM, równie wielokrotną względém CF, iak iest LN, względém CD. Lecz LM, była równie wielokrotną względém CF, iak iest GK względém AB; GK, zatém równie wielokrotną iest względém AB, iak iest LN, względém CD; dlá czego GK, LN, będą równie wielokrotnémi względém AB, CD. J znowu ponieważ HK, równie wielokrotną iest względém EB, iak iest MN, względém FD; iest zaś i KX, równie wielokrotną względém EB, iak iest NP, względém FD; będzie i złożoná HX (II. V.) równie wielokrotną względém EB, iak iest złożoná MP, względém FD; a ponieważ iak się má AB, do BE, tak CD do DF, a wzięté są GK, LN, równie wielokrotné względém AB, CD, i inné HX, MP, równie wielokrotné względém EB, FD; ieżeli GK, przewyższá, równą lub mnieyszą iest od HX, (V. d. V.) i wielkość LN, przewyższać, równą lub mnieyszą będzie od MP, ieżeli zaś GH, przewyższá KX, przydawszy spólną HK, GK, przewyższać będzie HX, dlá czego i LN, przewyższać będzie MP, a odiąwszy spólną MN, będzie LM, przewyższać NP. Dlá czego, ieżeli GH, przewyższá KX, będzie i LM, przewyższać NP. Dowiedziémy podobnież, że ieżeli GH, iest równą lub mnieyszą od KX, iest i LM, równá lub mnieyszá od NP; są zaś GH, LM, iakożkolwiek równie wielokrotné względém AE, CF, a inné KX, NP, iakożkolwiek równie wielokrotné względém EB, FD; iak się zatém má AE do EB, tak się miéć będzie CF do FD. Jeżeli więc złożoné wielkości etc. etc. C. B. d. D.

PODANIE XVIII.

TWIERDZENIE.

Jeżeli rozdzieloné wielkości są proporcyonalné będą i złożoné proporcyonalné. Fig. 163. 1°, 2do, 3tio.

Niechay rozdzieloné wielkości AE, EB, CF, FD, będą proporcyonalnémi: toiest iak się má AE do EB, niech się tak má CF do FD, powiadám: że i złożoné są proporcyonalné; toiest, że iak się má AB do BE, tak CD do DF.

Weźmy wielkości GH, HK, LM, MN, iakożkolwiek równie wielokrotné względém AB, BE, CD, DF, i znowu weźmy KO, NP, iakożkolwiek równie wielokrotné względém BE, DF. Ponieważ KO, NP, równie wielokrotné są względém BE, DF, i względém tychże samych BE, DF, są KH, NM, równie wielokrotné; ieżeli KO, wielokrotná względém BE, większą iest, równą lub mnieyszą od KH, wielokrotnéy względém téyże saméy BE; będzie i NP, wielokrotná względém DF, większą, równą lub mnieyszą od NM, wielokrotnéy względém téyże saméy DF.

Niech náprzód KO, nie będzie większą od KH, będzie więc NP, nie większą od NM. Ponieważ GH, HK, są równie wielokrotné względém AB, BE, a iest AB, większá od BE, będzie GH, większá od KH, (III. p. V.); iest zaś KO, nie większá od KH; dlá czego GH, większá iest od KO. Podobnież dowiedzie się, że LM, większá iest od NP; więc ieżeli KO, nie większą iest od KH, będzie GH, wielokrotná względém AB, zawsze większá od KO, wielokrotnéy względém BE, i razém LM, wielokrotná względém CD, większá będzie od NP, wielokrotnéy względém DF.

Lecz niechay KO, większą będzie od KH; będzie więc iak dowiedziono NP, większá od NM, a ponieważ całá GH, iest równie wielokrotná względém AB, iak część HK, względém części BE, będzie (V. V.) i pozostałá część GK, równie wielokrotną względém pozostałéy części AE, iak iest GH, względém AB, toiest iak LM, względém CD. Podobnież ponieważ LM, równie wielokrotną iest względém CD, iak część MN, względém części DF, będzie i pozostałá LN, równie wielokrotną względém pozostałéy CF, iak iest LM, względém CD; lecz LM, dowiedzioná iest bydź równie wielokrotną względém CD, iak iest GK, względém AE, równie zatém wielokrotná iest GK, względém AE, iak LN, względém CF; dlá czego GK, LN, są równie wielokrotné względém AE, CF. Ponieważ zaś KO, NP, są równie wielokrotnémi względém BE, DF, i części KH, NM, są tychże równie wielokrotnémi, będą pozostałé HO, MP, albo równé względém BE, DF, albo tychże równie wielokrotné (VI. V.). Niech náprzód HO, MP, będą równé względém BE, DF; a ponieważ má się AE do EB, iak CF do FD, i wzięté są GK, LN, równie wielokrotné względém AE, CF, będzie (w. IV. V.) GK, mieć się do EB, iak LN do FD; iest zaś HO, równá EB, i MP, równá FD: przeto má się GK do HO, iak LN do MP; ieżeli więc GK, przewyższá, równą lub mnieyszą iest od HO, i wielkość LN, przewyższać, równą lub mnieyszą będzie od MP (A. V.).

Lecz niechay HO, MP, będą równie wielokrotné względém EB, FD; ponieważ má się AE do EB, iak CF, do FD, i wzięté są GK, LN, równie wielokrotné względém AE, CF, tudzież inné HO, MP, równie wielokrotné względém EB, FD; ieżeli GK, przewyższá, równą lub mnieyszą iest od HO, i wielkość LN, przewyższać, równą lub mnieyszą będzie od wielkości MP, (V. d. V.) co téż dowiedzioné było w poprzedzaiącym przypadku. Jeżeli więc GH, przewyższá KO, odiąwszy spólną KH, GK, przewyższać będzie HO, dlá czego i LN, przewyższać będzie MP; a przydawszy spólną NM, będzie LM, przewyższać NP, więc ieżeli GH, przewyższá KO, i LM, przewyższać będzie NP. Podobnież dowiedzie się: ieżeli GH, równą lub mnieyszą iest od KO, że téż LM, będzie równą lub mnieyszą od NP, a w przypadku, w którym KO, nie większą iest od KH, dowiedzioné było, że GH, zawsze większą iest od KO, i razém że LM, większą iest od NP. Są zaś GH, LM, iakożkolwiek równie wielokrotné względém AB, CD; i inné KO, NP, iakożkolwiek równié wielokrotné względém BE, DF; przeto iak się má AB do BE, tak CD, do DF. Jeżeli więc rozdzieloné wielkości etc. etc. C. B. d. D.

PODANIE XIX.

TWIERDZENIE.

Jeżeli wielkość całá má się do wielkości całéy iak część do części; będzie i część pozostałá do pozostałéy części, iak całá do całéy. Fig. 164.

Niechay wielkość całá AB, má się do wielkości całéy CD, iak część AE, do części EF. Powiadám: że i część pozostałá EB, má się do części pozostałéy FD, iak się má wielkość całá AB, do wielkości całéy CD.

Ponieważ albowiém iak się má całá AB, do całéy CD, tak AE do CF, i z odmianą porządku w wyrazach śrzednich (XVI. V.) będzie BA do AE, iak DC do CF. Ponieważ zaś złożoné wielkości są proporcyonalné, będą i rozdzieloné proporcyonalné (XVII. V.); iak więc BE má się do EA, tak DF do FC; odmieniwszy znowu porządek w wyrazach śrzednich, będzie; iak BE do DF, tak EA do FC; lecz iak się má AE do CF, tak z założéniá iest AB do CD, i pozostałá zatém EB będzie do pozostałéy FD, iak cała AB do całéy CD. Jeżeli więc wielkość etc. etc. C. B. d. D.

Wniosek. Jeżeli má się wielkość całá do wielkości całéy iak część do części, będzie i pozostałá część do pozostałéy części, iak część piérwszá do części piérwszéy. To bowiém w samém dowodzéniu ostatniégo twiérdzéniá okazané zostało.

PODANIE E.

TWIERDZENIE.

Jeżeli cztéry wielkości są proporcyonalné, będą i poprzedniki z różnicami między niémi, i następnikami proporcyonalné. Fig. 165.

Niechay tak się má BA do BE, iak CD do DF; będzie téż iak BA do AE, tak DC do CF.

Ponieważ albowiém iak się má AB do BE, tak CD do DF, będzie téż (XVII. V.) rozdzieliwszy iak AE do EB, tak CF do FD, a przełożywszy wyrazy śrzednié na mieyscé skraynych, skrayné zaś na mieyscé śrzednich (B. V.) będzie BE do EA, iak DF do FC, przeto dodawszy wyrazy (XVIII. V.) będzie BA do AE, iak DC do CF. Jeżeli więc cztéry wielkości etc. etc. C. B. d. D.

PODANIE XX.

TWIERDZENIE.

Jeżeli są trzy wielkości, i inné w równéy liczbie pierwszym, tak: żeby z każdych po dwie, brané były w każdéy proporcyi; gdy piérwszá większą, równą lub mnieyszą iest od trzeciéy, będzie téż czwartá większą, równą, lub mnieyszą od szóstéy. Fig. 166. 1, 2do, 3tio.

Niechay będą trzy wielkości A, B, C, i inné w równéy liczbie D, E, F, tak że z każdych biorą się po dwie w każdéy proporcyi: toiest niech, iak się má A do B, tak D do

E; i iak B do C, tak E do F, niech zaś A, większą, równą lub mnieyszą będzie iak C. Powiadám: że i D, równą, większą lub mnieyszą iest od F.

Ponieważ albowiém A, większá iest od C, inná zaś iest wielkość B, a większá do trzeciéy większy má stosunek niż mnieyszá (VIII. V.) będzie A do B, w większym stosunku iak C do B, lecz iak D do E, tak A do B; więc i (XIII. V.) D do E, większy má stosunek iak C do B. A ponieważ iest B do C, iak E do F; przełożywszy wyrazy będzie C do B, iak F do E; dowiedzioná zaś D, mieć większy stosunek do E, iak C do B; więc D do E, większy má stosunek iak F do E, (W. XIII. V.) z wielkości zaś porównywanych z tąż samą wielkością, ta którá do niéy większy má stosunek większá iest (X. V.); więc D większá iest od F.

Powtóré niech A, równą będzie C, będzie i D równą F. Ponieważ albowiém równé są A, C, a iest inná wielkość B, będzie (VII. V.) A do B, iak C do B, iest zaś A do B, iak D do E; i C do B, iak F do E, więc (XI. V.)

iest D do E, iak F do E, i dlá tego (IX. V.) D, iest równá F.

Potrzecie. Niech A, będzie mnieyszą od C, będzie i D, mnieyszą od F, ponieważ albowiém A, mnieyszá iest od C, będzie C większą od A, aże z przypuszczéniá, i po przełożéniu wyrazów iest C do B, iak F do E; tudzież B do A, iak E do D; a iest C większą od A; będzie i F większą od D, podług przypadku piérwszégo, a dlá tego D, mnieyszą będzie od F. Jeżeli więc są trzy wielkości etc. etc. C. B. d. D.

PODANIE XXI.

TWIERDZENIE.

Jeżeli są trzy wielkości, i inné w równéy im liczbie, tak: żeby z każdych po dwie brané były w każdéy proporcyi; niech oráz będzie między niémi pomieszaná proporcya; gdy piérwszá większą, równą, lub mnieyszą iest od trzeciéy, będzie i czwartá większą, równą lub mnieyszą od szóstéy. Fig. 167. 1°, 2do, 3tio.

Niech będą trzy wielkości A, B, C, i inné w równéy im liczbie D, E, F, brané z każdych po dwie w każdéy proporcyi, niech zaś będzie pomieszaná między niémi proporcya, toiest iak się má A do B, tak niech się má E do F; iak się zaś má B do C, tak niech się má E do F, iak się zaś má B do C, tak niech się má D do E. Powiadám: że gdy A większą, równą, lub mnieyszą iest od C, iest téż D większą, równą lub mnieyszą od F.

Ponieważ albowiém A, większá iest od C, a iest inná wielkość B; będzie (VIII. V.) A, do B, w większym stosunku iak C do B: Lecz iak się má E do F, tak A do B; więc (XIII. V.) i E do F, większy miéć będzie stosunek iak C do B. Ponieważ zaś B, má się do C, iak D do E, przełożywszy wyrazy będzie C do B, iak E do D, dowiedziono zaś, że E w większym iest stosunku do F, iak C do B, więc (W. XIII. V.) E do F, w większym iest stosunku iak E do D, do któréy zaś taż sama wielkość, większy ma stosunek, ta mnieyszá iest (X. V.) mnieyszá zatém iest F od D, a dlá tego D, większą będzie od F.

Powtóré. Niech A, będzie równą C; będzie i D, równą F. Ponieważ albowiém równé są A, C, inná zaś wielkość iest B, będzie (VII. V.) A do B, iak C do B, iest zaś A do B, iak E do F: i C do B, iak E do D. Więc má się (XI. V.) E do F, iak E do D, iest zatém D, równą F. (IX. V.).

Potrzecié. Niechay A, mnieyszą będzie od C; będzie i D, mnieyszą od F. Ponieważ albowiém A, mnieyszą iest od C, będzie C większą od A; aże z założéniá i po przełożéniu wyrazów iest C do B, iak E do D; i B do A, iak F do E; a iest C, większą od A, będzie F, większą od D, podług przypadku pierwszégo, i dlá tego D, mnieyszą będzie od F. Jeżeli więc są trzy wielkości etc. etc. C. B. d. D.

PODANIE XXII.

TWIERDZENIE.

Jeżeli znayduie się ilékolwiek wielkości, i inné w równéy im liczbie, brané po dwie w każdéy proporcyi; będą i w odmianie porównywaniá naprzemian, proporcyonalné. Fig. 168.

Niechay náprzód będą trzy wielkości A, B, C, i inné w równéy im liczbie D, E, F, brané po dwie w każdéy proporcyi, toiest, że iak się má A do B, tak D do E, iak zaś B, do C, tak E do F. Powiadam: że iak się má A do C, tak się má D do F.

Weźmy albowiém wielkości G, H, iakożkolwiek równie wielokrotné względém A, D, i inne K, L, iakożkolwiek równie wielokrotné względém B, E, i ieszcze inné M, N, iakożkolwiek równie wielokrotné względém C, F. Ponieważ więc iak się má A do B, tak D do E, a wzięté są G, H, równie wielokrotné względém A, D, i inné K, L, równie wielokrotné względém B, E, iak się miéć będzie G do K, tak H do L. Dlá téyże saméy przyczyny będzie, iak K do M, tak L do N. A gdy są trzy wielkości G, K, M, i inné w równéy im liczbie H, L, N, brané po dwie w każdéy proporcyi; ieżeli G większą, równą lub mnieyszą iest od M, iest i H, większą, równą lub mnieyszą od N, (XX. V.) i są G, H, iakożkolwiek równie wielokrotné względém A, D; a M, N, iakożkolwiek ró-wnie wielokrotné względém C, F: iak więc A, má się do C, tak się mieć będzie (V. d. V.) D do F.

Niechayby były cztéry wielkości A, B, C, D, i inné w równéy im liczbie E, F, G, H, brané po dwie w każdéy proporcyi, toiest: że A má się do B, iak E do F; iak zaś B do C, tak F do G, i iak C do D, tak G do H, będzie A do D, iak E do H. Fig. 169.

Ponieważ albowiém trzy są wielkości A, B, C, i inné w równéy im liczbie E, F, G, brané po dwie w każdéy proporcyi, będzie podług przypadku piérwszégo A do C, iak E do G; iest zaś i C do D, iak G do H; więc znowu podług przypadku piérwszégo má się A do D, iak E do H, i tak podobnie, ilékolwiek byłoby wielkości. Jeżeli więc etc. etc. C. B. d. D.

PODANIE XXIII.

TWIERDZENIE.

Jeżeli znayduie się ilékolwiek wielkości, i inne w równéy im liczbie brané po dwie w każdéy proporcyi; a niech między niémi będzie w porządku pomieszanym proporcya, będą i w odmianie porównywaniá naprzemian proporcyonalné. Fig. 170.

Niech naprzód będą trzy wielkości A, B, C, i inné w równéy im liczbie brané z pierwszémi po dwie w każdéy proporcyi D, E, F; niech między témiż wielkościami będzie w porządku pomieszanym proporcya, toiest: niech się má A do B, iak E do F, i iak B do C, tak D do E. Powiadam: że iak się má A do C, tak się má D do F.

Weźmy albowiém G, H, K, iakożkolwiek równie wielokrotné względém A, B, D, i inné L, M, N, iakożkolwiek równie wielokrotné względém C, E, F. Ponieważ G, H, równie są wielokrotné względém A, B, części zaś maią ténże sám stosunek, iaki maią wielokrotné tychże części (XV. V.), będzie iak A do B, tak G do H, i dlá podobnéy przyczyny iak E do F, tak M do N; má się zaś A do B, iak E do F, iak więc má się G do H, tak (XI. V.) M do N, a ponieważ iest iak B do C, tak D do E, i wzięté są H, K, równie wielokrotné względém B, D, i inné L, M, równie wielokrotné względém C, E, będzie (IV. V.) iak H do L, tak K do M; dowiedliśmy zaś: że iak G do H, tak M do N, ponieważ więc są trzy wielkości G, H, L, i inné w równéy im liczbie K, M, N, brané z piérwszémi po dwie w każdéy proporcyi; iest między niémi w porządku pomieszanym proporcya; ieżeli więc (XXI. V.) G, przewyższá, równą lub mnieyszą iest od L, i K przewyższać, równą lub mnieyszą będzie od N, są zaś G, K, iakożkolwiek równie wielokrotné względ A, D, tak iako i L, N, iakożkolwiek równie wielokrotné względém C, F; iak więc (d. V. V.) má się A do C, tak D do F.

Niechayby były cztéry wielkości A, B, C, D, i inné w równéy im liczbie E, F, G, H, brané z piérwszémi po dwie w każdéy proporcyi; i niech będzie między témiż wielkościami w porządku pomieszanym proporcya, toiest: że się má A do B, iak G do H; iak się má B do C, tak F do G; i iak C do D, tak E do F: będzie A do D, iak E do H. Fig. 171.

Ponieważ albowiém trzy są wielkości A, B, C, i inné w równéy im liczbie F, G, H, brané z piérwszémi po dwie w każdéy proporcyi, iest oráz między niémi w porządku pomieszanym proporcya, będzie podług przypadku piérwszégo, iak A do C, tak F do H; iest zaś C do D, iak E do F; więc znowu podług przypadku piérwszégo, ma się A do D, iak E do H, i tak podobnie ilékolwiek byłoby wielkości. Jeżeli więc znayduie się ilékolwiek wielkości etc. etc. C. B. d. D.

PODANIE XXIV.

TWIERDZENIE.

Jeżeli wielkość piérwszá do drugiéy ma ténże sám stosunek, iaki trzeciá do czwartéy; niech oraz piątá do drugiéy má tén sám stosunek, iąki szóstá do czwartéy; będzie i złożoná z piérwszéy i piątéy mieć ténże sám stosunek do drugiéy, iaki złożoná z trzeciéy i szóstéy do czwartéy. Fig. 172.

Niechay piérwszá wielkość AB, má do drugiéy C, ténże sąm stosunek, iaki trzeciá DE do czwartéy F; niech zaś má i piątá BG, do drugiéy C, tén sám stosunek iaki szóstá EH, do czwartéy F. Powiadám: że i złożoná piérwszá z piątą AG, má ténże sám stosunek do drugiéy C, iaki złożoná trzeciá z szóstą DH, do czwartéy F.

Ponieważ albowiém iest iak BG do C, tak EH do F; przełożywszy wyrazy, będzie C do BG, iak F do EH, a ponieważ iak AB do C, tak DE do F, iak zaś C do BG, tak F do EH, wprowadziwszy odmianę porównywaniá wielkości naprzemian (XXII. V.) będzie iak AB do BG, tak DE do EH, aże rozdzielone wielkości są proporcyonalné, i złożoné proporcyonalnémi zostaną (XVIII. V.); iak więc AG do GB, tak iest DH do

HE, lecz iak GB do C, tak HE do F, więc wprowadziwszy odmianę porównywaniá wielkości naprzemian iak się má AG do C, tak DH do F. Jeżeli więc wielkość piérwszá etc. etc. C. B. d. D.

Wniosek. 1. Utrzymuiąc warunki podaniá, będzie się miéć przewyszka piérwszéy i piątéy do drugiéy, iak przewyszka trzeciéy i szóstéy do czwartéy. Dowodzénié iest to samo z dowodzéniém podaniá, używaiąc tylko dzieléniá wyrazów na mieyscé ich dodawaniá.

Wniosek 2. Prawda podaniá ostatniégo rozciągá się do ilukolwiek wielkości, z których piérwszé do spólnéy drugiéy maią téż samé stosunki, iakié maią pozostałé do spólnéy czwartéy, toiest: że każdá z piérwszych do drugiéy má tén sám stosunek, iaki każdá wielkość z pozostałych do czwartéy; co przez się oczywistá.

PODANIE XXV.

TWIERDZENIE.

Jeżeli cztéry wielkości są proporcyonalné, náywiększá z nich i náymnieyszá większé będą od dwóch pozostałych. Fig. 173.

Niech będą cztéry wielkości proporcyonalné AB, CD, E, F, i niech się má AB do CD, iąk E do F; niech zaś náywiększą z nich będzie AB, i dlá tego (A. i XIV. V.) F, náymnieyszą. Powiadám; że AB, i F, są większé od CD i E.

Zróbmy albowiém AG, równą E; CH, zaś równą F. Ponieważ má się AB do CD, iak E do F, a iest AG, równá E, i CH, równá F; będzie iak AB do CD, tak AG do CH, a ponieważ iak się má cała AB do całéy CD, tak część AG do części CH, będzie i pozostałá część GB, miéć się do pozostałéy części HD, iak całá AB do całéy CD, (XIX. V.) iest zaś AB, większą od CD; więc i GB, (A. V.) większą będzie od HD. A ponieważ AG iest równá E, CH zaś równá F; będą AG, i F, równé CH i E, przy nierównych więc wielkościach GB, HD, z których GB, większą iest, ieżeli dodamy AG, i F do GB, i dodamy CH, E do HD, staną się AB, i F, większé od CD i E. Jeżeli więc cztéry wielkości są proporcyonalné etc. etc. Co było do dowodzéniá.

PODANIE F.

TWIERDZENIE.

Stosunki złożoné ze stosunków równych, są między sobą równé. Fig. 174.

Niechay A, má się do B, iak D do E; i iak B má się do C, tak niech się má E do F; będzie stosunek złożony ze stosunków A do B, i B do C, toiest: podług opisaniá stosunku złożonégo, będzie stosunek A do C, równy stosunkowi D do F, który to stosunek złożony iest ze stosunków D do E, i E do F.

Ponieważ albowiém trzy są wielkości A, B, C, i inné w równéy im liczbie D, E, F, brané z piérwszémi po dwie w każdéy proporcyi, będzie przez odmianę porównywaniá wielkości naprzemłan (XXII. V.), miéć się A do C, iak D do F.

Niech znowu má się A do B, iak E do F, iak zaś B do C, tak D do E, będzie przez odmianę porównywaniá wielkości naprzemian w porządku pomieszanym (XXIII. V.) mieć się A do C, iak D do F, toiest stosunek A do C, złożony ze stosunków A do B, i B do C, równy iest stosunkowi D do F, złożonému ze stosunków D do E, i E do F, i podobnież, gdyby ilékolwiek było stosunków w obudwóch przypadkach. Stosunki więc etc. etc. C. B. d. D.

PODANIE G.

TWIERDZENIE.

Jeżeli pewné stosunki są równé pewnym stosunkóm każdy każdému, stosunek złożony ze stosunków, któré są równé piérwszym stosunkóm każdy każdému, będzie równy stosunkowi złożonému ze stosunków, któré są równé drugim stosunkóm, każdy każdému. Fig. 175.

Niech się má A do B, iak E do F; i iak C do D, tak G do H, i niech będzie iak A do B, tak K do L, iak zaś C do D, tak L do M, stosunek więc K do M, podług opisaniá stosunku złożonégo, złożony iest ze stosunków K do L, i L do M, któré równé są stosunkóm A do B, i C do D. Niech prócz tego będzie iak E do F, tak N do O, iak zaś G do H, tak O do P, stosunek więc N do P, złożony iest ze stosunków N do O, i O do P, któré równé są stosunkóm E do F, i G do H. Dowieśdź przeto potrzeba: że stosunek K do M, równy iest stosunkowi N do P, czyli że iak się má K do M, tak się má N do P.

Ponieważ K do L, má się iak A do B, toiest iak E do F: toiest iak N do O: iak zaś L do M, tak iest C do D, i tak G do H, iak O do P: będzie przez odmianę porównywaniá wielkości naprzemian (XXII. V.) K do M, iak N do P. Jeżeli więc pewné stosunki etc. etc. Co było do dowodzéniá.

PODANIE H.

TWIERDZENIE.

Jeżeli stosunek złożony z pewnych stosunków, równy iest stosunkowi złożonému z innych pewnych stosunków i iest iedén stosunek z piérwszych lub stosunek z kilku piérwszych złożony, równy iednému stosunkowi z drugich, lub stosunkowi z kilku drugich złożonému, będzie pozostały stosunek z piérwszych, lub stosunek z pozostałych piérwszych złożony równy stosunkowi pozostałému z drugich, lub stosunkowi z pozostałych drugich złożonému. Fig. 176.

Niechay będą stosunki A do B, B do C, C do D, D do E, i E do F; i inné stosunki G do H, H do K, K do L, i L do M; i niech będzie stosunek A do F, toiest: (def. stos. złoż.) złożony z piérwszych równy stosunkowi G do M, złożonému z drugich, a prócz tego stosunek A do D, który złożony iest ze stosunków A do B, B do C, i C do D, niech będzie równy stosunkowi G do K, który złożony iest ze stosunków G do H, i H do K; będzie stosunek D do F, który złożony iest z pozostałych piérwszych stosunków D do E, i E do F, równy stosunkowi K do M, który złożony iest z pozostałych drugich stosunków K do L, i L do M.

Ponieważ albowiém z założéniá má się A do D, iak G do K, będzie przełożywszy wyrazy (B. V.) D do A, iak K do G; iak zaś A do F, tak się má G do M: więc przez odmianę porównywaniá wielkości naprzemian, będzie D do F, iak K do M, (XXII. V.). Jeżeli więc stosunek złożony etc. etc. C. B. d. D.

PODANIE K.

TWIERDZENIE.

Jeżeli będzie ilékolwiek stosunków, któré nazwiymy piérwszémi, i ilékolwiek innych stosunków, które nazwiymy drugiémi, i niech będzie stosunek złożony ze stosunków, któré są równé stosunkóm piérwszym każdy każdému, równy stosunkowi złożonému ze stosunków, któré są równé stosunkóm drugim każdy każdému; niech zaś iedén stosunek z piérwszych, albo stosunek złożony ze stosunków, które są każdy każdému z piérwszych w równéy wielości równé, będzie równy iednému stosunkowi z drugich, albo stosunkowi złożonému ze stosunków, które są każdy każdému z drugich w równéy wielości równé; będzie pozostały stosunek z piérwszych stosunków, lub ieżeliby ich kilka było, będzie stosunek złożony ze stosunków równych pozostałym z piérwszych, każdy każdému; równy stosunkowi pozostałému z drugich, lub ieżeliby ich kilka było, stosunkowi złożonému ze stosunków równych pozostałym z drugich. Fig. 177.

Niechay będą stosunki A do B, C do D, E do F, piérwszé; drugié zaś niech będą stosunki G do H, K do L, M do N, O do P, Q do R, i niech A, má się do B, iak S do T; i iak C do D, tak T do V; iak zaś E do F, tak V do X; będzie więc z opisania stosunku złożonégo stosunek S do

X, złożony ze stosunków S do T, T do V, V do X, które to stosunki równé są każdy każdému, stosunkóm A do B, C do D, E do F; niech ieszcze będzie iak G do H, tak Y do Z, i iak K do L, tak Z do a, i iak M do N, tak a do b, iak O do P, tak b do c, i iak Q do R, tak c do d; iest więc z opisaniá stosunku złożonégo, stosunek Y do d, złożony ze stosunków Y do Z, Z do a, a do b, b do c, i c do d; które to stosunki równé każdy każdému, stosunkóm G do H, K do L, M do N, O do P, i Q do R, z założéniá więc iest S do X, iak Y do d. Prócz tego niech stosunek A do B, czyli stosunek S do T, toiest iedén z piérwszych będzie równy stosunkowi e do g, który złożony iest ze stosunków e do f, i f do g, równych z założéniá stosunkóm G do H; i K do L, z stosunków drugich; i niech będzie stosunek h do l, złożony ze stosunków h do k, i k do l, równych stosunkóm pozostałym z piérwszych, toiest: stosunkóm C do D, i E do F; i niech ieszcze będzie stosunek m do p, złożony ze stosunków m do n, n do o, o do p, równych każdy każdému pozostałym z drugich stosunków, toiest stosunkóm M do N, O do P, Q do R: będzie stosunek h do l, równy stosunkowi m do p, toiest, będzie h do l, iak m do p.

Ponieważ e, má się do f, iak G do H, toiest iak Y do Z; iest zaś f do g, iak K do L, toiest iak Z do a; będzie przez odmianę porównywaniá wielkości naprzemian, e do g, iak Y do a; z założéniá zaś iest A do B, czyli S do T, iak e do g; iest przeto S do T, iak Y do a; przełożywszy zaś wyrazy, będzie T do S, iak a do Y; lecz iest S do X, iak Y do d; więc przez odmianę porównywaniá wielkości naprzemian, będzie T do X, iak a do d, prócz tego ponieważ iest h do K; iak C do D, toiest: iak T do V; iak zaś K do l, tak E do F, toiest iak V do X; będzie przez odmianę porównywaniá wielkości naprzemian h do l, iak T do X. Podobnież dowiedzie się: że się má m do p, iak a do d; dowiedliśmy zaś: że się má T do X, iak a do d; więc má się (XI. V). h do l, iak m do p. Jeżeli więc będzie ilékolwiek stosunków etc. etc. C. B. d. D.

Dáwni i teraźnieysi Jeometrowie, podaniá G, i K, zawiérać zwykli w wyrażéniu podań F, i H, iedynie dlá skrócéniá; w jakiém to zaś znaczéniu może się czynić, istotną rzeczą było okazać; té bowiém podaniá są w częstém bardzo u Jeometrów używaniu.

KONIEC XIĘGI PIĄTEY.

JEOMETRYI EUKLIDESA,

XIĘGA SZOSTA.

DEFINICYE.

1. Figury prostokréślné są podobné, których kąty są równé, każdy każdému, i boki około kątów równych, są proporcyonalné.

2. Figury odwrótné, tróykąty naprzykład i równoległoboki są, gdy około dwóch kątów boki tak są proporcyonalné, że iak się má bok piérwszéy do boku figury drugiéy, tak bok pozostały drugiéy do boku pozostałégo piérwszéy.

3. Mówi się, że liniia prostá przeciná się w skraynym i śrzednim stosunku, gdy się przeciná tak: że iak się má całá do odcinka więk-

kszégo, tak się má odcinek większy do odcinka mnieyszégo.

4. Wysokością każdéy figury iest liniia prostá z wiérzchołka figury do iéy podstawy prostopadle poprowadzoná.

PODANIE I.

TWIERDZENIE.

Tróykąty i równoległoboki maiącé tęż samę wysokość, są między sobą iak podstawy. Fig. 178.

Niechay będą tróykąty ABC, ACD, równoległoboki zaś EC, CF, maiącé tęż samę wysokość, toiest prostopadłą z punktu A, do BD, poprowadzoną. Powiadám: że iak się má podstawa BC, do podstawy CD, tak tróykąt ABC, do tróykąta ACD, i równoległobok EC, do równoległoboku CF.

Przedłużmy albowiém liniią prostą BD, z obudwóch strón do punktów H, L, a podstawie BC, zróbmy ilékolwiek odcinków równych BG, GH; tak iako i podstawie CD, połóżmy ilékolwiek odcinków równych DK, KL; i poprowadźmy liniie prosté AG, AH, AK, AL. Ponieważ więc CB, BG, GH, są między sobą równé, będą i tróykąty AHG, AGB, ABC, między sobą równé (XXXVIII. I.) iak zatém wielokrotná iest podstawa HC, względém podstawy BC, tak wielokrotnym iest tróykąt AHC, względém tróykąta ABC. Dlá téy saméy przyczyny iak wielokrotná iest podstawa LC, względém podstawy CD; tak wielokrotnym iest i tróykąt ALC, względém tróykąta ACD. J ieżeli podstawa HC, iest równą, przewyższá lub iest mnieyszą od podstawy CL, i tróykąt AHC, będzie równy, większy, lub mnieyszy od tróykąta ALC; z cztérech więc wielkości, toiest dwóch podstaw BC, CD, i dwóch tróykątów ABC, ACD, wzięté są iakożkolwiek równie wielokrotné względém podstawy BC, i względém tróykąta ABC, toiest podstawa HC, i tróykąt AHC; podstawy zaś CD, i tróykąta ACD, wzięté są inné iakożkolwiek równie wielokrotné, toiest podstawa CL, i tróykąt ALC, i dowiedziono iest: że ieżeli podstawa HC, przewyższa, równą lub mnieyszą iest od podstawy LC, i tróykąt AHC, przewyższá, równym lub mnieyszym iest od tróykąta ALC, iest więc iak podstawa BC, do podstawy CD, tak tróykąt ABC, do tróykąta ACD.

Aże równoległobok EC, podwóyny iest tróykąta ABC, (XLI. I.) i równoległobok CF, podwóyny iest tróykąta ACD, części zaś maią ténże sám stosunek między sobą iaki ich równie wielokrotné (XV. V.); będzie iak tróykąt ABC, do tróykąta ACD, tak równoległobok EC, do równoległoboku CF. Ponieważ więc dowiedliśmy: że iak się má podstawa BC, do podstawy CD, tak tróykąt ABC, do tróykąta ACD, iak zaś tróykąt ABC, do tróykąta ACD, tak równoległobok EC, do równoległoboku CF, będzie (XI. V). iak podstawa BC, do podstawy CD, tak równoległobok EC, do równoległoboku CF. Tróykąty zatém i równoległoboki etc. etc. C. B. d. D.

Wniosek. Tróykąty więc i równoległoboki maiącé równą wysokość, są między sobą iak podstawy. Fig. 179.

Ułożywszy bowiém figury tak, żeby podstawy ich były na téyże saméy linii prostéy, i poprowadziwszy prostopadłé z wiérzchołków tróykątów do podstaw, będzie liniia prostá łączącá wiérzchołki, równoległą do linii prostéy na któréy są podstawy (XXXIII. I.); prostopadłé albowiém są między sobą równé i równoodległé, a uczyniwszy też samo wykréślénié, co wyżéy, dowodzénié będzie tož samo z dowodzeniém poprzedzaiącégo podania.

PODANIE II.

TWIERDZENIE.

Jeżeli w tróykącie poprowadzoná będzie liniia prostá równoległá do iednégo z boków iego, ta przetnie pozostałé boki tróykąta, lub boki przedłużoné, proporcyonalnie. J ieżeli boki tróykąta, lub boki przedłużoné przecięté są proporcyonalnie, liniia prostá łączącá punkta przecięć, będzie do pozostałégo boku tróykąta równoległá. Fig. 180.

W tróykącie ABC, do iednégo z boków BC, poprowadźmy równoległą DE. Powiądam;

że iak się má BD, do DA, tak się má CE, do EA.

Poprowadźmy albowiém liniie prosté BE, CD; tróykąt więc BDE, iest równy tróykątowi CDE, (XXXVII. I.) są bowiém na téyże saméy podstawie DE, i między témiż samémi równoległémi DE, BC; iest zaś inny tróykąt ADE: równé zaś wielkości do téyże saméy wielkości maią ténże sám stosunek (VII. V.), więc iak tróykąt BDE, do tróykąta ADE, tak iest tróykąt CDE, do tróykąta ADE, lecz iak tróykąt BDE, do tróykąta ADE, tak iest BD, do DA, (I. VI.) bo maiąc tęż samę wysokość, toiest prostopadłą z punktu E do AB, wyprowadzoną, są między sobą iak podstawy, i dlá téy saméy przyczyny iak tróykąt CDE, do tróykąta ADE, tak CE do EA, iak się więc má BD do DA, tak się má CE, do EA, (XI. V.).

Niech znowu tróykąta ABC, boki AB, CA, lub boki przedłużoné będą proporcyonalnie przecięté w punktach D, E, toiest iak BD do DA, tak niech się má CE do EA, i poprowadźmy liniią prostą DE, powiadám: że liniia prostá DE, iest równoległą do linii BC.

Uczyniwszy bowiém toż samo wykréślénié, ponieważ iest iak BD do DA, tak CE do EA; iak zaś BD do DA, tak iest tróykąt BDE, do tróykąta ADE: i iak CE do EA, tak tróykąt CDE, do tróykąta ADE; będzie iak tróykąt BDE, do tróykąta ADE, tak CDE tróykąt do tróykąta ADE. Każdy więc z tróykątów BDE, CDE, do tróykąta ADE, ténże sám má stosunek: dlá czego tróykąt BDE, iest równy tróykątowi CDE, (IX. V.), a są na téyże saméy podstawie DE: równé zaś tróykąty i na téyże saméy podstawie stoiącé, są w tychże samych równoległych (XXXIX. I.); więc liniia prostá DE, iest równoległą do boku BC. Jeżeli więc w tróykącie etc. etc. C. B. d. D.

PODANIE III.

TWIERDZENIE.

Jeżeli kąt tróykąta przecięty iest na dwie równé części, liniia zaś prostá przecinaiącá kąt, przeciná i podstawę, odcinki podstawy będą miały ténże sám stosunek, iaki boki tróykąta pozostałé. I ieżeli odcinki podstawy maią ténże sám stosunek, iaki maią pozostałé tróykąta boki; liniia prostá z wiérzchołka do punktu przecięciá podstawy poprowadzoná, przetnie kąt tróykąta na dwie równé części, Fig. 181.

Niech będzie tróykąt ABC, i kąt w nim BAC, na dwie równé części przecięty liniią prostą AD. Powiadám; że iak BD do DC, tak BA do AC.

Poprowadźmy bowiém przez punkt C, do linii prostéy DA, liniią prostą równoległą CE, (XXXI. I.) którá z przedłużoną liniią prostą BA, niech się znidzie w punkcie E. Ponieważ więc na liniie prosté równoległé AD, EC, padá liniia prostá AC, będzie kąt ACE, rôwny kątowi naprzemian CAD (XXIX. I.): lecz kąt CAD, iest z założéniá równy kątowi BAD, więc i kąt BAD, będzie równy kątowi ACE. Znowu ponieważ na liniie prosté równoległé AD, EC, padá liniia prostá BAE, iest zewnętrzny kąt BAD, równy kątowi wewnętrznému i przeciwległému AEC. Dowiedziono zaś, że i kąt ACE, iest równy kątowi BAD; więc i kąt ACE, będzie równy kątowi AEC; i dlá tego bok AE, iest równy bokowi AC, (VI. I.) a ponieważ do iednégo z boków tróykąta BCE, toiest do boku EC, poprowadzoná iest liniia prostá równoległá AD; będzie iak BD do DC, tak BA do AE, (II. VI.) równá zaś iest liniia prostá AE, linii prostéy AC; iest więc (VII. V.) iak BD do DC, tak BA do AC.

Niech zaś będzie iak BD do DC; tak BA do AC, i poprowadźmy liniią prostą AD, powiadám: że kąt BAC, liniią prostą AD, przecięty iest na dwie równé części.

Uczyniwszy bowiém toż samo wykréślénié, ponieważ iest iak DB do DC, tak BA do AC; lecz i iak BD do DC, tak BA do AE, bo do iednégo z boków tróykąta BCE, toiest do boku CE, poprowadzoná iest liniia prostá równoległá AD, będzie i iak (XI. V.) BA do AC, tak BA do AE, więc liniia prostá AC, iest równá linii prostéy AE, (IX. V.) a dlá tego i kąt AEC, równy kątowi ACE, (V. I.) lecz kąt AEC, iest równy kątowi zewnętrznému BAD; kąt zaś ACE, równy kątowi naprzemian CAD, dlá czego i kąt BAD, równy będzie kątowi CAD. Kąt zatém BAC, przecięty iest na dwie równé części liniią prostą AD. Więc ieżeli kąt tróykąta etc. etc. C. B. d. D.

PODANIE A.

TWIERDZENIE.

Jeżeli tróykąta, przedłużywszy bok iedén, kąt zewnętrzny przecięty iest na dwie równé części, liniia zaś prostá przecinaiącá kąt przeciná i podstawę przedłużoną; odcinki przedłużonéy podstawy zawarté między liniią przecinaiącą, i końcami podstawy; miéć będą ténże sám stosunek, iaki pozostałé tróykątá boki. I ieżeli przedłużonéy podstawy odcinki, maią ténże sám stosunek iaki pozostałé boki tróykąta, liniia prostá z wiérzchołka do końca podstawy przedłużonéy poprowadzoná, przecinać będzie kąt zewnętrzny tróykąta na dwie równe części. Fig. 182.

Niech będzie tróykąt ABC, a liniia prostá AD, niech przeciná tróykąta kąt zewnętrzny CAE, na dwie równé części, i niech schodzi się z podstawą BC, przedłużoną w punkcie D, będzie iak BD do DC, tak BA do AC.

Poprowadźmy bowiém (XXXI. I.) przez punkt C, liniią prostą CF, równoległą do linii prostéy AD. Ponieważ na liniie prosté równoległé AD, FC, padá liniia prostá AC, będzie kąt (XXIX. I.) ACF, równy kątowi naprzemian CAD: lecz kąt CAD, z założéniá iest równy kątowi DAE; więc i kąt DAE, będzie równy kątowi ACF. Znowu ponieważ na równoległé AD, FC, padá liniia prostá FAE, kąt DAE, zewnętrzny równy iest kątowi wewnętrznemu i przeciwległému CFA, dowiedziono zaś, że i kąt ACF, iest równy kątowi DAE, więc i kąt ACF, równy będzie kątowi CFA, a dlá tego bok AF, iest równy bokowi AC (VI. I.), a że do iednégo z boków tróykąta BCF, toiest do boku FC, poprowadzoná iest liniia prostá równoległá AD, będzie (II. VI.) iak BD do DC, tak BA do AF; iest zaś liniia prostá AF, równá linii prostéy AC; iest więc iak BD do DC, tak BA do AC.

Niech znowu będzie iak BD do DC, tak BA do AC, i poprowadźmy liniią prostą AD, będzie kąt CAE, liniią prostą AD, przecięty na dwie równé części.

Uczyniwszy bowiém toż samo wykréślénié, ponieważ iest iak BD do DC, tak BA do AC, iest zaś iak BD do DC, tak BA do AF; bo do iednégo z boków tróykąta BCF, toiest do boku FC, poprowadzoná iest liniiá prostá równoległá AD; będzie iak BA do AC, tak BA do AF, (XI. V.) więc liniia prostá AC, iest równá linii prostéy AF, [IX. V] dlá czego i kąt AFC, iest równy kątowi ACF; lecz kąt AFC, iest równy kątowi zewnętrznému EAD, kąt zaś ACF, iest równy kątowi naprzemian CAD, więc i kąt EAD, będzie równy kątowi CAD, kąt zatem CAE, przecięty iest liniią prostą AD, na dwie równé części. Jeżeli więc tróykąta etc. etc. C. B. d. D.

PODANIE IV.

TWIERDZENIE.

Równokątnych tróykątów, boki około kątów równych są proporcyonalné, i tegoż samégo stosunku są boki równémi kątami zaięté. Fig. 183.

Niech będą równokątné tróykąty ABC, DCE, maiącé kąt ABC, równy kątowi DCE, kąt zaś ACB, równy kątowi DEC, a zatém (XXXII. I.) i kąt BAC, równy kątowi CDE; powiadám: że tróykątów ABC, DCE, proporcyonalné są boki około kątów równych, i że tegoż samégo stosunku są boki równémi kątami zaięté.

Postawmy tróykąt DEC, tak (XXII. I.) żeby bok iego CE, był na przedłużéniu linii prostéy BC; a ponieważ kąty ABC, ACB, są mnieyszé od dwóch kątów prostych (XVII. I.) iest zaś kąt ACB, równy kątowi DEC; będą kąty ABC, DEC, mnieyszé od dwóch kątów prostych; dlá czego liniie prosté BA, ED, przedłużoné zniydą się z sobą (p. XII. I.); przedłużmy ié, i niech się zniydą w punkcie

F. Ponieważ kąt DCE, iest równy kątowi ABC; będzie liniia prostá BF, równoległá do linii prostéy CD (XXVIII. I.); znowu ponieważ kąt ACB, iest równy kątowi DEC, będzie liniia prostá AC, równoległá do linii prostéy FE, iest więc czworokąt FACD, równoległobokiem, i dlá tego liniia prostá AF, iest równá linii prostéy CD, liniia zaś prostá AC, równá linii prostéy FD, (XXXIV. I.) a ponieważ do iednégo z boków tróykąta FBE, toiest do boku FE, poprowadzoná iest liniia prostá równoległá AC; będzie (II. VI.) iak BA do AF, tak BC do CE. Jest zaś liniia prostá AF, równá linii prostéy CD; iak więc (VII. V.) BA do CD, tak BC do CE; a odmieniaiąc porządek w wyrazach śrzednich, iak AB do BC, tak DC do CE. Znowu ponieważ liniia prostá CD, równoległá iest do linii prostéy BF, będzie iak BC do CE, tak AC do DE; odmieniwszy zaś porządek w wyrazach śrzednich; iak BC do CA, tak CE do ED. Ponieważ więc dowiedliśmy, że iak AB do BC, tak DC do CE, iak zaś BC do CA, tak CE do ED; będzie przez odmianę porównywaniá wielkości naprzemian (XXII. V.) iak BA do AC, tak CD do DE. Równokątnych więc tróykątów etc. etc. C. B. d. D.

PODANIE V.

TWIERDZENIE.

Jeżeli dwa tróykąty maią boki proporcyonalné, równokątné będą tróykąty, i będą miały kąty równé bokámi tegoż samégo stosunku zaięté. Fig. 184.

Niech będą dwa tróykąty ABC, DEF, maiącé boki proporcyonalné, toiest niech się má AB do BC, iak DE do EF: iak zaś BC do CA, tak EF do FD, i ieszcze BA do AC, iak ED, do DF. Powiadám: że tróykąt ABC, iest równokątny z tróykątém DEF, i że maią kąty równé bokami tegoż samégo stosunku zaięté, toiest kąt ABC, równy kątowi DEF, kąt zaś BCA, równy kątowi EFD, i prócz tego kąt BAC, równy kątowi EDF.

Wykréślmy bowiém (XXIII. I.) na linii prostéy EF, i przy punktach na niéy E, F, kątowi ABC, równy kąt FEG, kątowi zaś BCA, równy kąt EFG, dlá czego pozostały kąt BAC, iest równy pozostałému kątowi EGF, (XXXII. I.) iest zatém tróykąt ABC, równokątny z tróykątém EGF. Tróykątów zaś ABC, EGF, równokątnych proporcyonalné są boki zaymuiącé kąty równé (IV. VI.), więc iak AB do BC, tak GE do EF. Lecz iak AB do BC, tak DE do EF, iak więc DE do EF, tak GE do EF, (XI. V.): dlá czego każdá z liniy prostych DE, GE, má ténże sám stosunek do linii prostéy EF, iest więc liniia prostá DE, równá linii prostéy GE. Dlá téy saméy przyczyny i liniia prostá DF, iest równá linii prostéy FG. Ponieważ liniia prostá DE, iest równá linii prostéy EG, spólná zaś liniia prostá EF; są dwie liniie prosté DE, EF, równé dwóm liniióm prostym GE, EF, i podstawa DF, iest równą podstawie FG; kąt więc DEF, iest równy kątowi GEF, (VIII. I.) i tróykąt DEF, równy tróykątowi GEF, i pozostałé kąty równé pozostałym kątóm boki równé obeymuiącym (IV. I.); więc kąt DFE, iest równy kątowi GFE, kąt zaś EDF, równy kątowi EGF. A ponieważ kąt DEF, iest równy kątowi GEF, i kąt GEF, równy kątowi ABC, będzie i kąt ABC, równy kątowi DEF; dla téy saméy przyczyny i kąt ACB, równy kątowi DFE, i kąt ieszcze przy A, równy kątowi przy D. Tróykąt więc ABC, będzie równokątny z tróykątém DEF. Jeżeli przeto dwa tróykąty etc. etc. C. B. d. D.

PODANIE VI.

TWIERDZENIE.

Jeżeli dwa tróykąty maią kąt iedén równy kątowi iednému, około zaś kątów równych boki proporcyonalné: równokątné będą tróykąty, i miéć będą kąty równé bokami tegoż samégo stosunku zaięté. Fig. 185.

Niech będą dwa tróykąty ABC, DEF, maiącé kąt iedén BAC, równy kątowi iednému EDF, około zaś kątów równych boki proporcyonalné, toiest iak BA do AC, tak niech się má ED do DF; powiadám: że tróykąt ABC, równokątny iest z tróykątém DEF, i że kąt ABC, iest równy kątowi DEF, kąt zaś ACB, kątowi DFE.

Wykréślmy bowiém na linii prostéy DF, (XXIII. I.) i przy punktach na niéy D, F, kąt FDG, równy kątowi BAC, czyli EDF, i kąt DFG, równy kątowi ACB; pozostały więc kąt przy B, równy iest pozostałému kątowi przy G, (XXXII. I.). Tróykąt zatém ABC, iest równokątny z tróykątém GDF, iest przeto iak BA do AC, tak GD do DF, (IV. VI.) z założéniá zaś iest iak BA do AC, tak ED do DF, iak zatém ED do DF, tak GD do DF (XI. V.); dlá czego liniia prostá ED, iest równá linii prostéy DG (IX. V.); a spólną iest liniia prostá DF, więc dwie liniie proste ED, DF, są równé dwóm liniióm prostym GD, DF, i kąt EDF, iest równy kątowi GDF: podstawa zatém (IV. I.) EF, iest równá podstawie FG, i tróykąt EDF, równy tróykątowi GDF, i pozostałé kąty równé pozostałym kątóm, iedén drugiému, boki równé zaymuiącym. Kąt więc DFG, iest równy kątowi DFE; kąt zaś przy G, równy kątowi przy E; lecz kąt DFG, równy iest kątowi ACB; kąt przeto ACB, równy iest kątowi DFE: iest zaś z założéniá i kąt BAC, równy kątowi EDF, więc i pozostały kąt przy B, iest równy pozostałému kątowi przy E, równokątny zatém iest tróykąt ABC, z tróykątém DEF. Jeżeli więc dwa tróykąty etc. etc. C. B. d. D.

PODANIE VII.

TWIERDZENIE.

Jeżeli dwa tróykąty maią kąt iedén równy kątowi iednému, około zaś innych kątów boki proporcyonalné, z pozostałych zaś kątów obadwa albo razém mnieyszé albo nie mnieyszé od kąta prostégo, lub ieżeli iedén z nich prosty iest; równokątné będą tróykąty, i miéć będą kąty równé około których są boki proporcyonalné. Fig. 186. 1°, 2do, 3tio.

Niech będą dwa tróykąty ABC, DEF, maiącé kąt iedén równy kątowi iednému, toiest kąt BAC, równy kątowi EDF, około zaś innych kątów ABC, DEF, boki proporcyonalné, toiest: że má się AB do BC, iak DE do EF; a z pozostałych kątów przy C, F, niech *náprzód* obadwa razém mnieyszé bę lą od kąta prostégo; powiadám: że tróykąt ABC, iest równokątny z tróykątém DEF, że kąt ABC, iest równy kątowi DEF, i że kąt pozostały toiest przy C, iest równy kątowi pozostałému przy F.

Jeżeli albowiém kąt ABC, iest nie równy kątowi DEF, iedén z nich większy będzie; niech większy będzie kąt ABC, i wykréślmy (XXIII. I.) na linii prostéy AB, i przy punkcie na niéy B, kąt ABG, równy kątowi DEF. A ponieważ kąt A, iest równy kątowi D, kąt zaś ABG, równy kątowi DEF; będzie (XXXII. I.) pozostały kąt AGB, równy pozostałému kątowi DFE. Równokątny więc iest tróykąt ABG, z tróykątém DEF: dlá czego iak AB do BG, tak DE do EF, (IV. VI.) iak zaś DE do EF, tak z założéniá iest AB do BC; iak więc (XI. V.) AB do BC, tak AB do BG; przeto liniia prostá AB, má ténże sám stosunek do każdéy z dwóch liniy prostych BC, BG. Będzie zatém liniia prostá BC, równá linii prostéy BG, (IX. V.) dlá czego kąt BGC, iest równy kątowi BCG, (V. I.) mnieyszym zaś iest od prostégo kąt BCG, więc i kąt BGC, mnieyszy iest od prostégo, (XIII. I.) iému zatém przyległy AGB, większy iest od prostégo; lecz dowiedziono że iest kąt AGB, równy kątowi przy F; kąt zatém przy F, większy iest od prostégo, z założéniá zaś iest mnieyszym od prostégo, co bydź nié może, nie iest więc kąt ABC, nie równy kątowi DEF; a zatém iému iest równy; iest prócz tego kąt przy A, równy kątowi przy D; dlá czego i pozostały kąt przy C, iest równy kątowi pozostałému przy F, iest więc tróykąt ABC, równokątny z tróykątém DEF.

Niech znowu obadwa kąty przy C i F, będą nie mnieyszé od kąta prostégo. Powiadám: że i tak tróykąt ABC, iest równokątny z tróykątém DEF.

Uczyniwszy bowiém toż samo wykréślénié, dowiedziemy podobnież że liniia prostá BC, iest równa linii prostéy BG, i że kąt przy C, iest równy kątowi BGC. Lecz kąt przy C, nie mnieyszy iest od prostégo; nie iest więc mnieyszym od prostégo kąt BGC. Dlá czego, tróykąta BGC, dwa kąty nie są mnieyszé od dwóch kątów prostych, co bydź nié może (XVII. I.) i dlá tego tróykąt ABC, iest równokątny z tróykątém DEF, tak iak w poprzedzaiącym przypadku dowiedzioné było.

Niech nakoniec iedén z kątów przy C, F, naprzykład przy C, prostym będzie, i w tym przypadku tróykąt ABC, równokątny iest z tróykątém DEF.

Jeżeli albowiém nie iest równokątnym, na linii prostéy AB, i przy punkcie na niéy B, wykréślmy kąt ABG, równy kątowi DEF; a iak w piérwszym przypadku, dowiedzie się: liniia prostá BG, równá linii prostéy BC, i kąt BCG, równy kątowi BGC; iest zaś kąt BCG prosty, dlá czego i kąt

BGC, prostym będzie, tróykąta więc BGC, dwa kąty nie są mnieyszé od dwóch kątów prostych, co bydź nié może; i dlá tego tróykąt ABC, równokątny iest z tróykątém DEF. Jeżeli więc dwa tróykąty etc. etc. C. B. d. D.

PODANIE VIII.

TWIERDZENIE.

Jeżeli w tróykącie prostokątnym z kąta prostégo poprowadzoná będzie prostopadłá do podstawy, zrobioné przy prostopadłéy tróykąty, są i całému, i między sobą podobné. Fig. 187.

Niech będzie tróykąt prostokątny ABC, mający kąt prosty BAC; i z punktu A do BC, niech będzie poprowadzoná prostopadłá AD. Powiadám: że tróykąty ABD, ADC, całému tróykątowi, i między sobą, są podobné.

Ponieważ albowiém kąt BAC, iest równy kątowi ADB, iako prosty prostému, i kąt przy B, spólny iest obudwóm tróykątóm ABC, ABD, będzie pozostały (XXXII. I.) kąt ACB, równy pozostałému kątowi BAD. Równokątny więc iest tróykąt ABC z tróykątém ABD; mają przeto boki około kątów równych proporcyonalné, (IV. VI.) i są zatém między sobą podobné (I. def. VI), podobnymże sposobém dowiedzie się, że i tróykąt ADC, iest podobny tróykątowi ABC.

Są nadto tróykąty ABD, ADC, podobnémi między sobą.

Ponieważ albowiém prosty kąt BDA, iest równy kątowi prostému ADC, kąt zaś BAD, dowiedziony iest równy kątowi przy C; będzie pozostały kąt przy B, równy pozostałému kątowi DAC, równokątny więc i podobny iest tróykąt ABD, z tróykątém ADC. W tróykącie zatém prostokątnym etc. etc. C. B. d. D.

Wniosek. Wypadá stąd oczywiście: że w tróykącie prostokątnym, prostopadłá z kąta prostégo do podstawy wyprowadzoná, iest śrzednią proporcyonalną między odcinkami podstawy: i prócz tego, że między podstawą i każdym iéy odcinkiém, przyległy bok odcinkowi iest śrzednim proporcyonalnym. Jest albowiém BD do DA, iak DA do DC, (IV. VI.) w tróykątach równokątnych BDA, ADC; i BC do BA, iak BA do BD, w tróykątach równokątnych ABC, DBA; i BC do CA, iak CA do CD, w tróykątach równokątnych ABC, DAC.

PODANIE IX.

ZAGADNIENIE.

Z danéy linii prostéy odciąć część żądaną.

Niech będzie daná liniia prostá AB; potrzeba z linii prostéy AB, odciąć część żądaną. Fig. 188.

Z punktu A, wyprowadźmy liniią prostą AC, czyniącą kąt iakikolwiek z liniią prostą AB, i weźmy na linii prostéy AC, punkt gdziekolwiek, a iak wielokrotną iest liniia prostá AB, względém maiącéy bydź odciętéy części; tylokrotną uczyńmy liniią prostą AC, względém iéy części AD: poprowadźmy potém liniią prostą BC, a przez punkt D, liniią prostą DE, równoległą do linii prostéy BC.

Ponieważ do iednégo z boków tróykąta ABC, toiest do boku BC, poprowadzoná iest liniia równoległá ED; będzie (II. VI.) iak CD do DA, tak BE do EA; a składaiąc wyrazy (XVIII. V.) iak CA do AD, tak BA do AE: iest zaś liniia prostá CA, wielokrotná linii prostéy AD; więc liniia prostá BA, iest równié wielokrotná linii prostéy AE (def. V.), przeto iaką częścią iest AD, względém linii prostéy AC, taką częścią iest AE, względém linii prostéy AB; iest więc AE, częścią z linii prostéy AB, maiącą bydź odciętą. Z danéy przeto linii prostéy AB, iest część żądaná odciętá C. B. d. R.

PODANIE X.

ZAGADNIENIE.

Daną liniią prostą nieprzeciętą, przeciąć podobnie z daną liniią prostą przeciętą. Fig. 189.

Niech będzie daná liniia prosta nieprzeciętá AB, przeciętá zaś AC; potrzeba liniią prostą nieprzeciętą AB, przeciąć podobnie, iak iest przeciętá AC.

Niech liniia prostá AC, przeciętą będzie w punktach D, E, obiedwie liniie prosté AB, AC, ustawiwszy pod iakimkolwiek kątém, poprowadźmy liniią prostą BC, przez punkta zaś D, E, do linii prostéy BC, (XXXI. I.) liniie równoległé DF, EG, i przez punkt D, do linii prostéy AB, równoległą DHK. Z czworokątów więc FH, i HB, każdy iest równoległobokiém; i dlá tego liniia prostá DH, iest równá linii prostéy FG, (XXXIV. I.) liniia zaś prostá HK, równá linii prostéy GB. A ponieważ do iednégo z boków tróykąta DKC, toiest do boku KC, poprowadzoná iest równoległá HE, będzie (II. VI.) iak CE do ED, tak KH do HD: równá zaś iest liniia prostá KH, linii prostéy BG, a liniia prostá HD, równá linii prostéy GF, iest przeto iak CE, do ED, tak BG do GF. Znowu ponieważ do iednégo z boków tróykąta AGE, toiest do boku EG, poprowadzoná iest liniia równoległá FD; iak iest ED do DA, tak GF do FA, lecz dowiedziono: że iak CE do ED, tak BG do GF, iak więc CE do ED, tak iest BG do GF, i iak ED do DA, tak GF do FA. Daná zatém liniia prostá nieprzeciętá AB, iest przeciętą podobnie z daną liniią prostą przeciętą AC. C. B. d. R.

PODANIE XI.

ZAGADNIENIE.

Do dwóch danych liniy prostych wynaléśdź trzecią proporcyonalną. Fig. 190.

Niech będą dané dwie liniie prosté AC, AB, które złączmy pod iakimkolwiek kątém; potrzeba do liniy prostych AB, AC, wynaléśdź trzecią proporcyonalną.

Przedłużmy liniie prosté AB, AC, do punktów D, E, i uczyńmy liniią prostą BD, równą linii prostéy AC, a poprowadziwszy liniią prostą BC, poprowadźmy (XXXI. I.) iescze przez punkt D, liniią prostą DE, równoległą do linii prostéy BC, ponieważ więc do iednégo z boków tróykąta, toiest do boku DE, poprowadzoná iest równoległá liniia prostá BC, będzie [II. VI.] iak AB do BD, tak AC do CE, równá zaś iest liniia prostá BD, linii prostéy AC, iak więc AB do AC, tak AC do CE. Do dwóch przeto liniy prostych AB, AC, wynaleziona iest trzeciá proporcyonalná CE. C. B. d. R.

PODANIE XII.

ZAGADNIENIE.

Do trzech danych liniy prostych wynaléśdź czwartą proporcyonalną. Fig. 191.

Niech będą dané trzy liniie prosté A, B, C, potrzeba do trzech liniiy prostych A, B, C, wynaléśdź czwartą proporcyonalną.

Wykréślmy dwie linii proste DE, DF, pod iakimkolwiek kątém EDF; na których odetnijmy liniią prostą DG, równą linii prostéy A, liniią prostą GE, równą linii prostéy B, i liniią prostą DH, równą linii prostey C; poprowadziwszy zaś liniią prostą GH, przez punkt E, poprowadźmy liniią prostą EF, równoległą do liniy prostéy GH, (XXXI. I.). Ponieważ więc do iednégo z boków tróyką a DEF, toiest do boku EF, poprowadzoná iest równoległá liniia prostá GH, będzie iak DG do GE, tak DH do HF (II. VI.); iest zas liniia prostá DG, równá linii prostéy A, liniia zaś prostá GE, równá linii prostey B, i liniia prostá DH, równá linii prostéy C; iak więc A do B, tak C do HF, do trzech zatém liniy prostych A, B, C, wynaleziona iest czwartá proporcyonalná HF. C. B. d. R.

PODANIE XIII.

ZAGADNIENIE.

Między dwiéma danémi liniiami prostémi, wynaléśdź śrzednią proporcyonalną. Fig. 192.

Niech będą dané dwie liniie prosté AB, BC; potrzeba między dwiéma liniiami prostémi AB, BC, wynaléśdź śrzednią proporcyonalną.

Dwie dané liniie prosté AB, BC, złączmy w jednę liniią prostą AC, i na linii prostéy AC, zakréślmy półkole ADC, a z punktu B, (XI. I) wyprowadźmy do linii prostéy AC, pod kątámi prostémi liniią prostą BD, i poprowadźmy liniie prosté AD, DC. Ponieważ więc kąt ADC, w półkolu iest prosty (XXXI III.) i ponieważ w tróykącie prostokątuym ADC, z kąta prostégo do podstawy wyprowadzoná iest prostopadłá DB: będzie taż prostopadłá DB. śrzednią proporcyonalną między odcinkami podstawy AB, BC, (w. VIII. VI.); przeto między danémi dwiéma liniiami prostémi AB, BC, wynalezioná iest śrzedniá proporcyonalná DB. C. B. d. R.

PODANIE XIV.

TWIERDZENIE.

Równoległoboków równych maiących po iednym kącie równym, boki około kątów równych są odwrótnie proporcyonalné: i których równoległoboków maiących po iednym kącie równym, boki około kątów równych są odwrótnie proporcyonalné; té równoległoboki są między sobą równé. Fig. 193.

Niech będą równé równoległoboki AB, BC, maiącé kąty równé przy B, ustawiwszy boki ich DB, BF, na iednéy linii prostéy, będą i boki FB, BG, na iednéy linii prostéy (XIV. I.). Powiadám: że równoległoboków AB, BC, boki około kątów równych, są odwrótnie proporcyonalné; toiest, że się má DB do BE, iak BG do BF.

Dopełniymy równoległoboku FE; ponieważ

równoległobok AB, równy iest równoległobokowi BC, i iest in y równoległobok FE, będzie iak AB do FE, tak BC do FE (VII. V.); lecz iak AB do FE, tak iest DB do BE; iak zaś BC do FE, tak BG do BF (I. VI.); iak więc DB do BE, tak BG do BF, [XI. V] więc równoległoboków AB, BC, boki około kątów równych, są odwrótnie proporcyonalné.

Niech znowu będą boki około kątów równych odwrótnie proporcyonalné; toiest niech będzie iak DB do BE, tak GB do BF; powiadám, że równoległobok AB, iest równy równoległobokowi BC.

Poniewaz albowiém iest iak DB do BE, tak GB do BF; iak zaś DB, do BE, tak AB równoległobok, do równoległoboku FE; i iak GB do BF, tak równoległobok BC, do równoległoboku FE: będzie (IX. V.) i iak AB, do FE, tak BC do FE. Równy więc iest równoległobok AB, równoległobokowi BC. Równoległoboków zatém równych etc. etc. C. B. d. D.

PODANIE XV.

TWIERDZENIE.

Tróykątów równych maiących po iednym kącie równym, boki około kątów równych są odwrótnie proporcyonalné; i których tróykątów maiących po iednym kącie równym, boki około kątów równych są odwrótnie proporcyonalné, té tróykąty są między sobą równé. Fig. 194.

Niech będą równé tróykąty ABC, ADE, maiącé po iednym kącie równym, toiest kąt DAE, równy kątowi BAC; powiadam: że tróykątów BAC, DAE, boki około kątów równych, są odwrótnie proporcyonalné, toiest: że iak CA do AD, tak iest EA do AB.

Ustawmy tróykąty ABC, ADE, tak: żeby boki CA, AD, były na iednéy linii prostéy; będą więc i boki EA, AB, na linii iednéy prostéy (XIV. I.); i poprowadźmy liniią prostą BD. Ponieważ więc tróykąt ABC, iest równy tróykątowi ADE, i iest inny tróykąt ABD: będzie, iak tróykąt CAB, do tróykąta BAD, tak (VII. V.) tróykąt EAD, do tróykąta DAB. Lecz iak tróykąt CAB, do tróykąta BAD, tak CA, do AD (I. VI.); iak zaś tróykąt EAD, do tróykąta BAD, tak EA do AB; iak więc (XI. V.) CA do AD, tak EA do AB. Dlá czego tróykątów ABC, ADE, boki około kątów równych, są odwrótnie proporcyonalné.

Niech znowu boki tróykątów ABC, ADE, około kątów równych będą odwrótnie proporcyonalné, toiest: iak się má CA do AD, tak niech się má EA do AB; powiadam: że tróykąt ABC, iest równy tróykątowi ADE. Poprowadziwszy albowiém liniią prostą BD: ponieważ iak CA do AD, tak iest EA do AB: iak zaś CA do AD, tak iest tróykąt BAC, do tróykąta BAD: i iak EA do AB, tak tróykąt EAD, do tróykąta BAD; będzie iak tróykąt BAC, do tróykąta BAD, tak tróykąt EAD, do tróykąta BAD. Równy zatém (IX. V.) iest tróykąt ABC, tróykątowi ADE. Tróykątów więc równych etc. etc. C. B. d. D.

PODANIE XVI.

TWIERDZENIE.

Jeżeli cztéry liniie prosté są proporcyonalné, równoległobok prostokątny zawarty skraynémi liniiami, równy iest równoległobokowi prostokątnému zawartému śrzedniémi liniiami: i ieżeli równoległobok prostokątny zawarty skraynémi liniiami, równy iest równoległobokowi prostokątnému zawartému śrzedniémi liniiami, té cztéry liniie prosté będą proporcyonalné. Fig. 195.

Niech będą cztéry liniie prosté proporcyonalné AB, CD, E, F, toiest: iak się má AB do CD, tak niech się má E do F; powiadám: że równoległobok prostokątny zawarty liniiami prostémi AB, F, równy iest równoległobokowi prostokątnému zawartému liniiami prostémi CD, E.

Wyprowadźmy albowiém (XI. I.) z punktów A, C, do liniy prostych AB, CD, pod kątami prostémi liniią prostą AG, równą linii prostéy F, i liniią prostą CH, równą linii prostéy E, i dopełniymy równoległoboków BG, DH. Ponieważ iest iak AB do CD, tak E do F; iest zaś liniia prostá E, równá linii prostéy CH, a liniia prostá F, równá linii prostéy AG; będzie (VII. V.) iak AB do CD, tak CH do AG. Równoległoboków zatém BG, DH, boki około kątów równych, są odwrótnie proporcyonalné. Których zaś równoległoboków boki, około kątów równych, są odwrótnie proporcyonalné, té równoległoboki są między sobą równé (XIV. VI.). Więc równoległobok BG, iest równy równoległobokowi DH. Lecz równoległobok BG, iest zawarty liniiami prostémi AB, F: iest bowiém liniia prostá AG, równá linii prostéy F. Rownoległobok zaś DH, iest zawarty liniiami prostémi CD, E, iest bowiém liniia prostá CH, równá linii prostéy E. Równoległobok więc prostokątny, zawarty liniiami prostémi AB, F, iest równy równoległobokowi prostokątnému zawartému liniiami prostémi CD, E.

Niech znowu równoległobok prostokątny zawarty liniiami prostémi AB, F, równy będzie równoległobokowi prostokątnému zawartému liniami prostémi CD, E, powiadám: że té cztéry liniie prosté są proporcyonalné, toiest: że má się AB do CD, iak E do F.

Uczyniwszy bowiém toż samo wykréślénié, ponieważ równoległobok prostokątny zawarty liniiami prostémi AB, F, iest równy równoległobokowi prostokątnemu zawartému liniiami prostémi CD, E: a równoległobok BG, iest zawarty liniiami prostémi AB, F, iest bowiém liniia prostá AG, równá linii prostéy F: i równoległobok DH, zawarty iest liniiami prostémi CD, E, iest bowiém liniia prostá CH, równá linii prostéy E. Będzie równoległobok BG, równy równoległobokowi DH, a są równokątné: równych zaś i równokątnych równoległoboków, boki około kątów równych, są odwrótnie proporcyonalne; więc iak AB do CD, tak CH do AG: iest zaś liniia prostá CH, równá linii prostéy E, i liniia prostá AG, równá linii prostéy F; iak zatém má się AB do CD, tak się má E do F. Jeżeli więc cztéry liniie prosté etc. etc. C. B. d. D.

PODANIE XVII.

TWIERDZENIE.

Jeżeli trzy liniie prosté są proporcyonalné, równoległobok prostokątny zawarty skraynémi, równy iest kwadratowi ze śrzedniéy: i ieżeli równoległobok prostokątny zawarty skraynémi, równy iest kwadratowi ze śrzedniéy, té trzy liniie prosté będą proporcyonalné. Fig. 196.

Niech będą trzy liniie prosté proporcyonalné A, B, C, toiest: iak się má A do B, tak niech się má B do C; powiadám: że równoległobok prostokątny zawarty liniiami prostémi A, C, równy iest kwadratowi ze śrzedniéy B.

Wykréślmy liniią prostą D, równą linii prostéy B, a ponieważ iak A do B, tak B do C; liniia zaś prostá B, iest równá linii prostéy D; będzie iak (VII. V.) A do B, tak D do C. Gdy zaś cztéry liniie prosté są proporcyonalné, równoległobok prostokątny zawarty skraynémi, równy iest równoległobokowi prostokątnému zawartému śrzedniémi (XVI. VI.); równoległobok więc prostokątny zawarty liniiami prostémi A, C, równy iest równoległobokowi prostokątnému zawartému liniiami prostémi B, D. Lecz równoległobok prostokątny zawarty liniiami prostémi B, D, równy iest kwadratowi z linii prostéy B: iest bowiém liniia prostá B, równá linii prostéy D. Równoległobok więc prostokątny zawarty liniiami prostémi A, C, iest równy kwadratowi z linii prostéy B.

Niech znowu równoległobok prostokątny zawarty liniiami prostémi A, C, równy będzie kwadratowi z linii prostéy B; powiadám: że iak się má A do B, tak się má B do C.

Uczyniwszy bowiém toż samo wykréślénié, ponieważ równoległobok prostokątny zawarty liniiami prostémi A, C, równy iest kwadratowi z linii prostéy B, a kwadrat z linii prostéy B, iest równoległobok prostokątny zawarty liniiami prostémi B, D; iest bowiém liniia prostá B, równá linii prostéy D. Będzie równoległobok prostokątny zawarty liniiami prostémi A, C, równy równoległobokowi prostokątnému zawartému liniiami prostémi B, D. Gdy zaś równoległobok prostokątny zawarty liniiami skraynémi, równy iest równoległobokowi prostokątnému zawartému śrzedniémi; té cztéry liniie prosté są proporcyonalné. Jest więc iak A do B, tak D do C; liniia zaś prostá D, równá iest linii prostéy B, zaczém iak A do B, tak B do C. Jeżeli więc trzy liniie prosté etc. etc. C. B. d. D.

PODANIE XVIII.

ZAGADNIENIE.

Na danéy linii prostéy, wykréślić figurę prostokréślną podobną, i podobnie położoną względém figury danéy prostokréślnéy. Fig. 197.

Niech będzie daná liniia prostá AB, daná zaś figura prostokréślná czworokątná CDEF; potrzeba na linii prostéy AB, wykréślić figurę prostokréślną podobną, i podobnie położoną względém figury prostokréślnéy CDEF.

Poprowadźmy liniią prostą DF, a na linii prostéy AB, i przy punktach na niéy A, B, wykréślmy kąt BAG, równy kątowi przy C, i kąt ABG, równy kątowi CDF, (XXIII. I.) pozostały więc kąt CFD, iest równy pozostałému kątowi AGB, (XXXII. I.). Jest zatém tróykąt FCD, równokątny z tróykątém GAB. Wykréślmy znowu na linii prostéy BG, i przy punktach na niéy G, B, kąt BGH, równy kątowi DFE, i kąt GBH, równy kątowi FDE; pozostały więc kąt FED, iest równy pozostałému kątowi GHB. Jest zatém tróykąt FDE, równokątny z tróykątém GBH. A ponieważ kąt AGB, równy iest kątowi CFD, i kąt BGH, równy kątowi DFE; będzie cały kąt AGH, równy całému kątowi CFE. Dlá téyże saméy przyczyny i kąt ABH, iest równy kątowi CDE; i prócz tego kąt przy A, równy iest kątowi przy C; kąt zaś GHB, równy kątowi FED. Figura więc prostokréślná ABHG, iest równokątná z figurą prostokréślną CDEF. Lecz obiedwie figury maią i boki około kątów równych proporcyonalné, ponieważ tróykąty

GAB, FCD, są równokątné, będzie BA do AG, iak DC do CF, (IV. VI.) i ponieważ iest AG do GB, iak CF do FD; iak zaś GB do GH, tak dlá równokątnych tróykątów BGH, DFE, iest FD do FE; będzie przez odmianę porównywaniá wielkości naprzemian (XXII. V.) AG do GH, iak CF do FE. Podobnież dowiedzie się, że AB do BH, iak CD do DE: i iest GH do HB, iak FE do ED. Gdy więc figury prostokréślné są równokątné, i boki około kątów równych maią proporcyonalné, będą między sobą podobné (I. def. VI.).

Niechby ieszcze na linii prostéy AB, potrzeba było wykréślić figurę prostokréślną podobną, i podobnie położoną względém pięciokąta danégo CDKEF.

Poprowadźmy liniią prostą DE, i na danéy linii prostéy AB, wykréślmy czworokąt ABHG, podobny, i podobnie położony względém czworokąta CDEF: a na linii prostéy BH, i przy punktach na niéy danych B, H, wykréślmy kąt HBL, równy kątowi EDK, i kąt BHL, równy kątowi DEK: pozostały więc kąt przy K, iest równy pozostałému kątowi przy L. Ponieważ zaś podobné są czworokąty ABHG, CDEF; będzie kąt GHB, równy kątowi FED; a iest kąt BHL, równy kątowi DEK; cały więc kąt GHL, iest równy całému kątowi FEK. Dlá téy saméy przyczyny i kąt ABL, iest równy kątowi CDK; zatém są równokątné pięciokąty AGHLB, CFEKD. A ponieważ podobné są czworokąty AGHB, CFED, będzie GH do HB, iak FE do ED; iak zaś HB do HL, tak ED do EK; więc przez odmianę porównywaniá wielkości naprzemian, (XXII. V.) iest GH do HL, iak FE do EK. Dlá téy saméy przyczyny iest AB do BL, iak CD do DK: a iest BL do LH, iak DK do KE, tróykąty bowiém BLH, DKE, są równokątné. Ponieważ więc pięciokąty AGHLB, CFEKD, są równokątné, i boki około kątów równych maią proporcyonalné, będą między sobą podobné. Podobnymże sposobém na danéy linii prostéy możná wykréślić figurę prostokréślną, podobną, i podobnie położoną względém danégo sześciokąta, i tak następnie daléy.

PODANIE XIX.

TWIERDZENIE.

Podobné tróykąty są między sobą w stosunku dwumnożnym boków odpowiadaiących. Fig. 198.

Niech będą podobné tróykąty ABC, DEF, maiącé kąt przy B, równy kątowi przy E, i niech będzie: iak AB do BC, tak DE do EF, żeby bok BC, był odpowiadaiącym bokowi EF; powiadám: że tróykąty ABC, DEF, są w stosunku dwumnożnym boków BC, EF.

Wynaydźmy do liniy prostych BC, EF, trzecią proporcyonalną BG, (XI. VI.) ażeby było: iak BC do EF, tak EF do BG: i poprowadźmy liniią prostą GA. Ponieważ iak się má AB do BC, tak się má DE do EF, będzie przez odmianę porządku w wyrazach śrzednich (XVI. V.); iak AB do DE, tak BC do EF; lecz iak BC do EF, tak EF do BG; iak więc AB do DE, tak EF do BG, (XI. V.) dlá czego tróykątów ABG, DEF, boki około kątów równych są odwrótnie proporcyonalné; których zaś tróykątów maiących po iednym kącie równym, boki około kątów równych są odwrótnie proporcyonalné, té tróykąty są między sobą równé; tróykąt zatém ABG, (XV. VI.) iest równy tróykątowi DEF. A ponieważ iest, iak BC do EF, tak EF do BG: ieżeli zaś trzy liniie prosté są proporcyonalné, mówi się: że piérwszá do trzeciéy, iest w stosunku dwumnożnym piérwszéy do drugiéy (X. def. V.); będzie więc liniia prostá BC, do linii prostéy BG, w stosunku dwumnożnym linii prostéy BC, do linii prostéy EF. Jak zaś BC do BG, tak tróykąt ABC, do tróykąta ABG (I. VI.); więc i tróykąt ABC, do tróykąta ABG, iest w stosunku dwumnożnym BC do EF. Lecz tróykąt ABG, równy iest tróykątowi DEF; i tróykąt więc ABC, do tróykąta DEF, będzie w stosunku dwumnożnym boków odpowiadaiących BC, EF. Podobné więc tróykąty etc. etc. C. B. d. D.

Wniosek. Wnosi się stąd oczywiście: że ieżeli trzy liniie prosté są proporcyonalné, má się piérwszá do trzeciéy, iak tróykąt wykréślony na piérwszéy do iému podobnégo tróykąta wykréślonégo na linii drugiéy. Dowiedziono albowiém: że CB, má się do BD, iak tróykąt ABC, do tróykąta DEF.

PODANIE XX.

TWIERDZENIE.

Podobné wielokąty mogą się rozdzielić na równą liczbę tróykątów podobnych sobie, i całym wielokątóm proporcyonalnych: a podobné wielokąty maią się do siebie w stosunku dwumnożnym boków odpowiadaiących. Fig. 199.

Niech będą wielokąty podobné ABCDE, FGHKL, których bokami odpowiadaiącémi niech będą boki AB, FG. Powiadám: że wielokąty ABCDE, FGHKL, mogą się rozdzielić na równą liczbę tróykątów podobnych sobie, i wielokątóm całym proporcyonalnych;

i że też podobné wielokąty maią się do siebie w stosunku dwumnożnym boków AB, FG.

Poprowadźmy liniie prosté BE, EC, GL, LH. Ponieważ wielokąt ABCDE, podobny iest wielokątowi FGHKL, kąt BAE, iest równy kątowi GFL (I. def. VI); i iak się má BA do AE, tak GF do FL. Dwa więc tróykąty ABE, FGL, maiąc po iednym kącie równym, i boki około kątów równych proporcyonalné, są równokątné (VI. VI.) i podobné (IV. VI.); kąt zatém ABE, iest równy kątowi FGL. Jest zaś i cały kąt ABC, równy całému kątowi FGH, dlá podobieństwa wielokątów; więc i pozostały kąt EBC, iest równy pozostałému kątowi LGH. A ponieważ dlá podobieństwa tróykątów ABE, FGL, iak iest EB do BA, tak LG do GF: a dlá podobieństwa wielokątów, iest iak AB do BC, tak FG do GH; będzie przez odmianę porównywaniá wielkości naprzemian, iak EB do BC, tak LG do GH (XXII. V.); toiest są około kątów równych EBC, LGH, boki proporcyonalné. Równokątny więc i podobny iest tróykąt EBC, tróykątowi LHG. Dlá téy saméy przyczyny i tróykąt ECD, podobny iest tróykątowi LHK. Podobné zatém wielokąty, rozdzielaią się na równą liczbę tróykątów podobnych sobie.

Są nadto téż tróykąty proporcyonalné całym wielokątóm, i wielokąty całé są między sobą w stosunku dwumnożnym boków odpowiadaiących sobie AB, FG.

Ponieważ albowiém tróykąt ABE, podobny iest tróykątowi FGL, będą oné w stosunku dwumnożnym boków BE, GL (XIX. VI.); dlá téy saméy przyczyny i tróykąt BEC, do tróykąta GLH, má się w stosunku dwumnożnym BE do GL. Jest więc tróykąt ABE, do tróykąta FGL, iak tróykąt BEC, do tróykąta GLH (XI. V.). Znowu ponieważ tróykąt EBC, iest podobny tróykątowi LGH, będą tróykąty EBC, LGH, w stosunku dwumnożnym boków CE, HL. Dlá téyże saméy przyczyny i tróykąty ECD, LHK, są w stosunku dwumnożnym boków CE, HL. Jest więc iak tróykąt EBC, do tróykąta LGH, tak tróykąt ECD, do tróykąta LHK. Dowiedliśmy zaś, że iak tróykąt EBC, do tróykąta LGH, tak tróykąt ABE, do tróykąta FGL; iest więc tróykąt ABE, do tróykąta FGL, iak tróykąt EBC, do tróykąta LGH, i iak tróykąt ECD, do tróykąta LHK. Jak się má zatém iedén z poprzedników do iednégo z następników; tak wszystkié poprzedniki do wszystkich następników (XII. V.). Zaczém iak tróykąt ABE, do tróykąta FGL, tak wielokąt ABCDE, do wielokąta FGHKL; lecz tróykąt ABE, do tróykąta FGL, iest w stosunku dwumnożnym boków odpowiadaiących AB, FG. Więc i wielokąt ABCDE, do wielokąta FGHKL, iest w stosunku dwumnożnym boków odpowiadaiących AB, FG. Wielokąty zatém podobné etc. etc. C. B. d. D.

Wniosek 1. Podobnymże sposobém i w czworokątach podobnych, i w wielokątach podobnych iakichkolwiek, okaże się, że się maią w stosunku dwumnożnym boków odpowiadaiących sobie. Dowiedziono zaś, że iest ténże sám stosunek i w tróykątach podobnych. Zaczém powierzchnie figur prostokréślnych podobnych, są w stosunku dwumnożnym boków odpowiadaiących.

Wniosek 2. Jeżeli do dwóch liniy prostych AB, FG, weźmiémy trzecią proporcyonalną M; będzie AB do M, w stosunku dwumnożnym AB do FG (X. def. V.). Lecz i wielokąty podobné, i czworokąty podobné, na liniiach prostych AB, FG, wykréśloné, są w stosunku dwumnożnym boków odpowiadaiących, toiest boków AB, FG: więc iak AB do M, tak figura na AB, do figury podobnéy na FG. Lecz toż samo dowiedzioné iest i w tróykątach (w. XIX. VI.). Oczywistą więc iest rzeczą ogólnie: że ieżeli trzy liniie prosté są proporcyonalné, iak się má piérwszá do trzeciéy, tak się má figura prostokréślná wykréślоná na piérwszéy, do figury prostokréślnéy podobnéy, i podobnie wykréślonéy na drugiéy linii.

PODANIE XXI.

TWIERDZENIE.

Figury prostokréślné podobné iednéy i téyże saméy figurze prostokréślnéy, są między sobą podobné. Fig. 200.

Niech z dwóch figur prostokréślnych A, B, każdá będzie podobną figurze prostokréślnéy

C, powiadám: że i figura prostokréślná A, iest podobną figurze prostokréślnéy B. Fig. 200.

Ponieważ albowiém figura prostokréślná A, iest podobną figurze prostokréślnéy C, będzie z nią równokątną, i boki około kątów równych będzie miałą proporcyonalné (I. def. VI.). Znowu, ponieważ figura prostokréślná B, podobná iest figurze prostokréślnéy C, będzie z nią równokątną, i miéć będzie boki około kątów równych proporcyonalné. Każdá więc z figur prostokréślnych A, B, iest równokątná z figurą prostokréślną C, i má boki około kątów równych proporcyonalné. Dlá czego i figura prostokréślná A, iest równokątną z figurą prostokréślną B, (I. p. I.) i má boki około kątów równych proporcyonalné (XI. V.). Zaczém figura prostokréślná A, iest podobná figurze prostokréślnéy B. C. B. d. D.

PODANIE XXII.

TWIERDZENIE.

Jeżeli cztéry liniie prosté są proporcyonalné, podobné, i podobnie na tychże liniiach prostych wykréśloné, figury prostokréślné będą téż proporcyonalné. I ieżeli figury prostokréślné podobné, i podobnie wykréślonė na cztérech liniiach prostych, są proporcyonalné, będą i téż liniie prosté proporcyonalné. Fig. 201.

Niech będą cztéry liniie prosté AB, CD, EF, GH, proporcyonalné, toiest: że iak AB, má się do CD, tak EF do GH, i niech będą na liniiach prostych AB, CD, podobné, i podobnie wykréślonė figury prostokréślné KAB, LCD: na liniiach zaś prostych EF, GH, niech będą podobné, i podobnie wykréślonė figury prostokréślné MF, NH. Powiadám: że figura prostokréślná KAB, má się do figury prostokréślnéy CLD, iak figura prostokréślná MF, do figúry prostokréślnéy NH.

Weźmy do liniy prostych AB, CD, trzecią proporcyonalną X (XI. VI.); do linii zaś prostych EF, GH, trzecią proporcyonalną O. Ponieważ iest iak AB do CD, tak EF do GH; będzie iak CD do X, tak GH do O (XI. V.);

a przez odmianę porównywaniá wielkości naprzemian (XXII. V.) iak AB do X, tak EF do O. Lecz iak AB do X, tak iest figura prostokréślná KAB, do figury prostokréślnéy LCD (II. w. XX. VI.); iak zaś EF do O, tak figura prostokréślná MF, do figury prostokréślnéy NH, iak więc figura prostokréślná KAB, do figury prostokréślnéy LCD, tak iest figura prostokréślná MF, do figury prostokréślnéy NH.

Niech znowu figura prostokréślná KAB, má się do figury prostokréślnéy LCD, iak figura prostokréślná MF, do figury prostokréślnéy NH; powiadám, że iak AB, má się do CD, tak się má EF do GH. Wynaydźmy czwartą proporcyonalną PR, do trzech liniy prostych AB, CD, EF, tak, żeby było AB do CD, iak EF do PR, (XII. VI.) i wykréślmy (XVIII. VI.) na linii prostéy PR, podobną, i podobnie położoną figurę prostokréślną RS, względém któréykolwiek z dwóch figur prostokréślnych MF, NH. Ponieważ iest iak AB do CD, tak EF do PR: a wykréśloné są na liniiach prostych AB, CD, podobné, i podobnie położoné figury prostokréślné KAB, LCD. Na liniiach zaś prostych EF, PR, wykréśloné są podobné, i podobnie położoné figury prostokréślné MF, SR: będzie z wyżéy dowiedzionych, iak figura prostokréślná KAB, do figury prostokréślnéy LCD, tak figura prostokréślná MF, do figury prostokréślnéy SR. Jest zaś z założéniá: iak figura prostokréślná KAB, do figury prostokréślnéy LCD, tak figura prostokréślná MF, do figury prostokréślnéy NH: figura więc prostokréślná MF, má ténże sám stosunek do każdéy z dwóch figur prostokréślnych NH, SR. Figura zatém prostokréślná NH, iest równá figurze prostokréślnéy SR (IX. V.). Jest zaś onéy podobná i podobnie położoná; więc liniia prostá GH, iest równá linii prostéy PR. A ponieważ iak AB do CD, tak EF do PR: równá zaś iest liniia prostá PR, linii prostéy GH, będzie więc iak AB do CD, tak EF do GH. Jeżeli więc cztéry liniie prosté etc. etc. C. B. d. D.

PODANIE XXIII.

TWIERDZENIE.

Równokątné równoległoboki są między sobą w stosunku złożonym ze stosunków boków. Fig. 202.

Niech będą równokątné równoległoboki AC, CF, maiącé kąt BCD, równy kątowi ECG. Powiadám: że równoległoboki AC, CF, maią się do siebie w stosunku złożonym ze stosunków boków.

Ustawmy równoległoboki AC, CF, tak: żeby boki ich BC, CG, były na iednéy linii prostéy; będą więc i boki DC, CE, na iednéy linii prostéy (XIV. I.): i dopełniymy równoległoboku DG, wziąwszy iakiéykolwiek długości linią prostą K, wynaydźmy czwartą proporcyonalną L, (XII. VI.) do trzech liniy prostych BC, CG, K, tak: żeby było BC do CG, iak K do L; i czwartą proporcyonalną M, do trzech liniy prostych DC, CE, L, tak: żeby było DC do CE, iak L do M. Stosunki więc

K do L, i L do M, będą równé stosunkóm boków BC do CG, i DC do CE. Lecz stosunek K do M, mówi się (A. def. V.) że iest stosunkiém złożonym ze stosunku K do L, i ze stosunku L do M. Dlá czego i stosunek K do M, iest stosunkiém złożonym ze stosunków boków. A ponieważ iest iak BC do CG, tak równoległobok AC, do równoległoboku CH; lecz i iak BC do CG, tak K do L; będzie iak K do L, tak równoległobok AC, do równoległoboku CH. Znowu ponieważ iest, iak DC do CE, tak równoległobok CH, do równoległoboku CF; iak zaś DC do CE, tak L do M; będzie iak L do M, tak równoległobok CH, do równoległoboku CF Gdy więc dowiedziono iest: że K do L, má się iak równoległobok AC, do równoległoboku CH; iak zaś L do M, tak równoległobok CH, do równoległoboku CF; będzie przez (XXII. V.) odmianę porównywaniá wielkości naprzemian K do M, iak równoległobok AC, do równoległoboku CF. Stosunek zaś K do M, iest stosunkiém złożonym ze stosunków boków; więc i równoległobok AC, do równoległoboku CF, iest stosunkiém złożonym ze stosunków boków. Równokątné zatém równoległoboki etc. etc. C. B. d. D.

PODANIE XXIV.

TWIERDZENIE.

W każdym równoległoboku, rownoległoboki około iego przekątnéy, są podobné i całému, i między sobą. Fig. 203.

Niech będzie równoległobok ABCD, któré-go przekątną iest liniia AC; i niech będą około przekątnéy AC, równoległoboki EG, HK. Powiadám: że równoległoboki EG, HK, podobné są i całému równoległobokowi ABCD, i między sobą.

Ponieważ liniie prosté DC, GF, są równoległé, będzie kąt ADC, równy kątowi AGF (XXIX. I.). Dlá téy samćy przyczyny, ponieważ liniie prosté BC, EF, są równoległé, będzié kąt ABC, równy kątowi AEF. Każdy zaś z kątów BCD, EFG, iest równy kątowi przeciwległému DAB, (XXXIV. I.) więc są równé i między sobą. Równoległoboki zatém ABCD, AEFG, są między sobą równokątné. A ponieważ kąt ABC, równy iest kątowi AEF, spólny zaś iest kąt BAC, będą tróykąty BAC, EAF, między sobą równokątné; iak więc AB do BC (IV. VI.) tak iest AE do EF. A ponieważ boki w równoległobokach przeciwné, są między sobą równé: będzie (VII. V.) i AB do AD, iak AE do AG; i DC do CB, iak GF do FE; a prócz tego CD do DA, iak FG do GA. Więc równoległoboków ABCD, AEFG, boki około kątów równych są proporcyonalné; iest zatém równoległobok ABCD, podobny równoległobokowi AEFG (I. def. VI.). Dlá téy saméy przyczyny równoległobok ABCD, podobny iest równoległobokowi FHCK, każdy więc z równoległoboków GE, KH, iest podobny równoległobokowi DB. Figury zaś prostokréślné, podobné téyże saméy figurze prostokréślnéy, są i między sobą podobné (XXI. VI.) Równoległobok więc GE, podobny iest równoległobokowi KH. W każdym przeto równoległoboku etc. etc. C. B. d. D.

PODANIE XXV.

ZAGADNIENIE.

Maiąc dané dwie figury prostokréślné, wykréślić trzecią figurę prostokréślną podobną piérwszéy, a równą drugiéy. Fig. 204.

Niech będą dané dwie figury prostokréślné ABC, i D; potrzeba wykréślić trzecią figurę prostokréślną, podobną figurze prostokréślnéy ABC, a równą figurze prostokréślnéy D.

Wykréślmy na linii prostéy BC, równoległobok BE, równy figurze prostokréślnéy ABC; na linii zaś prostéy CE, równoległobok CM, równy figurze prostokréślnéy D, tak, żeby kąt FCE, był równy kątowi CBL (w. XLV. I.) będą więc na iednéy linii prostéy boki BC, CF, [XXIX. I.] (XIV. I.) tak, iako i boki LE, EM. Między liniiami prostémi BC, CF, weźmy śrzednią proporcyonalną GH, (XIII. VI.) i na linii prostéy GH, wykréślmy (XVIII. VI.) figurę prostokréślną KGH, podobną, i podobnie położoną względém figury prostokréślnéy ABC.

Ponieważ iest iak BC do GH, tak GH do CF, ieżeli zaś trzy liniie prosté są proporcyonalné, iak się má piérwszá do trzeciéy tak figura na piérwszéy do figury podobnéy, i podobnie położonéy na drugiéy (II. w. XX. VI.); będzie iak BC do CF, tak figura prostokréślná ABC, do figury prostokréślnéy KGH. Lecz i iak BC do CF, tak równoległobok BE, do równoległoboku EF (I. VI.); iak więc figura prostokréślná ABC, do figury prostokréślnéy KGH, tak równoległobok BE, do równoległoboku EF. Jest zaś figura prostokréślná ABC, równá równoległobokowi BE; iest przeto i figura prostokréślná KGH (XIV. V.) równá równoległobokowi EF. Lecz równoległobok EF, iest równy figurze prostokréślnéy D. Więc i figura prostokréślná KGH, iest równá figurze prostokréślnéy D. Jest zaś figura prostokréślná KGH, podobná figurze prostokréślnéy ABC; danéy więc figurze prostokréślnéy ABC, podobná, a drugiéy danéy figurze prostokréślnéy D, równá, wykréślona iest figura prostokréślná KGH. C. B. d. R.

PODANIE XXVI.

TWIERDZENIE.

Jeżeli od równoległoboku odéymiémy równoległobok podobny całému, i w podobném z nim położéniu maiący kąt spólny; przekątná odiętégo równoległoboku, będzie częścią przekątnéy równoległoboku całégo. Fig. 205.

Od równoległoboku ABCD, odéymmy równoległobok AEFG, podobny równoległobokowi ABCD, i podobnie położony kąt maiący z nim spólny DAB. Powiadám: że przekątná równoległoboku AEFG, iest częścią przekątnéy AC, całégo równoległoboku ABCD.

Gdyby albowiém przekątná równoległoboku EG, nie była częścią przekątnéy całégo równoległoboku BD; pozwólmy, ieżeli bydź może, że przekątną równoległoboku BD, iest liniia prostá AHC, przecinaiącá bokGF, w punkcie H, i poprowadźmy przez punkt H, liniią HK, równoległą do liniy prostych AD, BC. Ponieważ równoległobok ABCD, z równoległobokiém AKHG, są około téyże saméy przekątnéy; będzie równoległobok ABCD, podobny rownoległobokowi AKHG (XXIV. VI). Więc iak DA do AB, tak GA do AK (I. def. VI.). Jest zaś i dlá podobieństwa równoległoboków ABCD, AEFG, iak DA do AB, tak GA do AE; iest przeto i GA do AE, iak GA do AK (XI. V.). Dlá czego liniia GA, má do każdéy z dwóch liniy prostych AE, AK, ténże sám stosunek. Będzie więc liniia prostá AE, równá linii prostéy AK, (IX. V.) większá mnieyszéy, co bydź nié może. Nie iest przeto równoległobok ABCD, około téyże saméy przekątnéy z równoległobokiém AKHG. Jest zatém około téyże saméy przekątnéy z równoległobokiém AEFG; toiest że przekątná AF, równoległoboku AEFG, iest częścią przekątnéy AC, równoległoboku całégo ABCD. Jeżeli więc od równoległoboku etc. etc. C. B. d. D.

„Aby następuiącé trzy podaniá mogły bydź „łatwiéy zrozumiané wypadá przypuścić, co „następuie Fig. 206.

„1. Mówi się náprzód: że równoległobok „przystawiá się do linii prostéy, kiedy się na

„téyże linii prostéy wykréślá. Naprzykład „równoległobok AC, mówi się: że się przy„stawiá do linii prostéy AB, kiedy na linii pro„stéy AB wykréślá się„.

„2. Mówi się znowu: że równoległobok AE, „przystawiá się do linii prostéy AB, i bra„kuie mu figury równoległoboczněy: kiedy li„niia prostá AD, podstawa tegoż równoległo„boku AE, mnieyszá iest od linii prostéy AB, „i dlá tego równoległobok AE, mnieyszy iest „od równoległoboku AC, wystawionégo na li„nii prostéy AB, w tymże samym kącie i „między témiż samémi liniiami równoległémi „o figurę równoległoboczną DC, któráto fi„gura równoległoboczná nazywá się niedosta„tkiém równoległoboku AE„.

„3. Mówi się nakoniec: że równoległo„bok AG, przystawiá się do linii prostéy AB, „z nadmiarém w figurze równoległoboczněy, „kiedy liniia prostá AF, podstawa równole„głoboku AG, większá iest od linii prostéy „AB, i dlá tego równoległobok AG, przewyż„szá równoległobok AC, o figurę równoległobo„czną BG; którąto figurę równoległoboczną

„BG, możná nazwać nadmiarém równoległo-„boku AC. „

PODANIE XXVII.

TWIERDZENIE.

Ze wszystkich równoległoboków przystawionych do téyże samey linii prostéy, a którymby brakowało figur równoległobocznych podobnych, i podobnie położonych względém wykréślonéy na połowie linii prostéy, náywiększy iest równoległobok przystawiony do połowy linii prostéy podobny niedostatkowi. Fig. 207 i 208.

Niech będzie liniia prostá AB, i ta przeciętá w punkcie C, na dwie równé części; do linii prostéy AB, przystawmy równoległobok AD, którémuby brakowało figury równoległoboczney CE; na linii prostéy CB, toiest na połowie linii prostéy AB, wykréślonéy, któréy podobny iest równoległobok AD. Powiadám: że, ze wszystkich równoległoboków przystawionych do linii prostéy AB, a którymby brakowało figur równoległobocznych podobnych, i podobnie położonych względém równoległoboku CE, náywiększy iest równoległobok AD.

Przystawmy albowiém do linii prostéy AB, równoległobok AF, któremuby brakowało figury równoległoboczné KH, podobnéy, i podobnie położonéy względém równoległoboku CE; powiadám: że równoległobok AD, większy iest od równoległoboku AF.

Niech náprzód liniia prostá AK, podstawa równoległoboku AF, większá będzie od linii prostéy AC; ponieważ równoległobok CE, podobny iest równoległobokowi KH, są więc około téyże saméy przekątnéy (XXVI. VI.) poprowadźmy przekątną DB, i wykréślmy figurę; ponieważ równoległobok CF, iest równy równoległobokowi FE, (XLIII. I.) przydawszy spólny równoległobok KH, będzie cały równoległobok CH, równy całému równoległobokowi KE. Lecz równoległobok CH, iest równy równoległobokowi CG,

(XXXVI. I.) ponieważ i liniia prostá AC, iest równá linii prostéy CB; więc i rownoległobok CG, iest równy równoległobokowi KE. Przydawszy spólny równoległobok CF, cały równoległobok AF, iest równy części CHL: dlá czego równoległobok CE, toiest równoległobok AD, większy iest od równoległoboku AF.

Niech powtóré liniia prostá AK, podstawa równoległoboku AF, mnieyszą będzie od linii prostéy AC. Uczyniwszy toż samo wykréślénié, ponieważ równoległobok DH, równy iest równoległobokowi DG, iest bowiém liniia prostá HM, równá linii prostéy MG, (XXXIV. I.) będzie równoległobok DH, większy od równoległoboku LG; iest zaś równoległobok DH, równy równoległobokowi DK, większy więc iest równoległobok DK, od równoległoboku LG: przydawszy spólny równoległobok AL, będzie cały równoległobok AD, większy od całégo równoległoboku AF. Ze wszystkich więc równoległoboków etc. etc. C. B. d. D.

PODANIE XXVIII.

ZAGADNIENIE.

Do danéy linii prostéy przystawić równoległobok równy figurze prostokréślnéy danéy z niedostatkiém figury równoległobocznéy podobnéy względém drugiéy figury prostokréślnéy danéy. Nié má zaś figura prostokréślná daná, któréy równy potrzeba przystawić równoległobok, bydź większą od równoległoboku przystawionégo do połowy danéy linii prostéy. Fig. 209.

Niech będzie daná liniia prostá AB, i daná figura prostokréślná C, któréy równy równoległobok potrzeba do danéy linii prostéy AB, przystawić, niewiększá od równoległoboku przystawionégo do połowy linii; drugá oraz figura prostokréślná D, któréy má bydź podobny niedostatek równoległoboku przystawionégo. Potrzeba do danéy linii prostéy AB, przystawić równoległobok równy danéy figurze prostokréślnéy C, z niedostatkiém figury równoległoboczného podobného figurze prostokréślnéy D.

Przetniymy liniią prostą AB, na dwie równé części w punkcie E, (X. I.) i na linii prostéy EB, wykréślmy (XVIII. VI.) równoległobok EBFG, podobny, i podobnie położony względém równoległoboku danégo D, dopełniymy ieszcze równoległoboku AG. Równoległobok AG, albo iest równy figurze prostokréślnéy C, albo z oznaczéniá iest od niéy większy. Jeżeli równoległobok AG, iest równy figurze prostokréślnéy C, będzie już rozwiązané zagadniénié: do linii albowiém prostéy AB, przystawiony równy figurze prostokréślnéy C, równoległobok AG, z niedostatkiém figury równoległoboczného EF, podobnéy danému równoległobokowi D. Jeżeli zaś nie iest równy, będzie równoległobok AG, większy od figury prostokréślnéy C, że zaś równoległobok EF, równy iest równoległobokowi AG; więc i równoległobok EF, większy iest od figury prostokréślnéy C. Czém zaś równoległobok EF, przewyższá figurę prostokréślną C, téy przewyszce równy, równoległobokowi zaś D, podobny, i podobnie położony wystawmy (XXIII. VI.) równoległobok KLMN. Lecz równoległobok D, podobny iest równoległobokowi EF; dlá czego i równoległobok KM, podobny będzie równoległobokowi EF, (XXI. VI.) niech więc liniia prostá KL, będzie odpowiadaiącą linii prostéy EG, liniia zaś prostá LM, linii prostéy GF. Ponieważ równoległobok EF, równy iest razém wziętym figurze prostokréślnéy C, i równoległobokowi KM, będzie równoległobok EF, większy od samégo równoległoboku KM; większá więc iest liniia prostá GE, od linii prostéy LK, i liniia prostá GF, większá od linii prostéy LM. Weźmy liniią prostą GX, równą linii prostéy LK, a liniią prostą GO, równą linii prostéy LM; i dopełniymy równoległoboku XGOP; równy więc i podobny iest równoległobok XO, równoległobokowi KM, lecz równoległobok KM, podobny iest równoległobokowi EF, więc i równoległobok XO, podobny iest równoległobokowi EF, są więc równoległoboki XO, EF, około téyże samey przekątnéy

(XXVI. VI.) niech będzie ich przekątná GPB, i wykréślmy figurę. Ponieważ równoległobok EF, równy iest figurze prostokréślnéy C, i równoległobokowi KM, razém wziętym, z których równoległobok XO, iest równy równoległobokowi KM, będzie pozostałá część ERO, równá pozostałéy figurze prostokréślnéy C. A ponieważ równoległobok OR, iest równy równoległobokowi XS, (XLIII. I.) przydawszy spólny równoległobok SR; cały równoległobok OB, iest równy całému równoległobokowi XB. Lecz równoległobok XB, iest równy równoległobokowi TE, (XXXVI. I.) ponieważ i bok AE, iest równy bokowi EB; dlá czego i równoległobok TE, iest równy równoległobokowi OB: przydawszy spólny równoległobok XS, będzie cały równoległobok TS, równy całéy części ERO. Lecz część ERO, iuż dowiedzioná, że iest równą figurze prostokréślnéy C; będzie więc i równoległobok TS, równy figurze prostokréślnéy C. Do danéy przeto linii prostéy AB, danéy figurze prostokréślnéy C, równy przystawiony iest równoległobok TS, z niedostatkiém figury równoległoboczněy SR, podobnéy równoległobokowi D, ponieważ i równoległobok SR podobny iest równoległobokowi EF, (XXIV. VI.). C. B. d. R.

PODANIE XXIX.

ZAGADNIENIE.

Do danéy linii prostéy, przystawić równy danéy figurze prostokréślnéy równoległobok z nadmiarém figury równoległoboczn éy podobnéy względém drugiéy danéy figury prostokréślnéy. Fig. 210.

Niech będzie daná liniia prostá AB, daná zaś figura prostokréślná, któréy równą do linii prostéy AB, przystawić potrzeba niech będzie C, względém któréy zaś nadmiar má bydź podobny, niech będzie równoległobok D: potrzeba do linii prostéy AB, przystawić równy danéy figurze prostokréślnéy C, równoległobok z nadmiarém figury równoległoboczn éy podobnéy równoległobokowi D.

Przetniymy liniią prostą AB, na dwie równé części w punkcie E, i na linii prostéy EB, wykréślmy (XVIII. VI.) równoległobok

EL, podobny, i podobnie położony względém równoległoboku D, obudwóm zaś figuróm prostokréślnym EL, C, razém wziętym równy, a równoległobokowi D, podobny, i podobnie położony wykréślmy równoległobok GH, (XXV. VI.). Jest więc równoległobok GH, podobny równoległobokowi EL, (XXI. VI.) niech KH, będzie bokiém odpowiadaiącym bokowi FL: KG zaś bokowi FE. A ponieważ równoległobok GH, większy iest od równoległoboku EL, będzie bok KH, większy od boku FL, a bok KG, większy od boku FE. Przedłużmy boki FL, FE, tak, żeby liniia prostá FLM, była równá linii prostéy KH, a linia prostá FEN, równá linii prostéy KG, i dopełniymy równoległoboku MN. Równoległobok więc MN, równy iest i podobny równoległobokowi GH; lecz równoległobok GH, iest podobny równoległobokowi EL; równoległobok więc MN, podobny będzie równoległobokowi EL; a zatém obadwa są około téyże samėy przekątnéy (XXVI. VI.). Poprowadźmy przekątną FX, i wykréślmy figurę. Ponieważ równoległobok GH, równy iest równoległobokowi EL, i figurze prostokréślnéy C, razém wziętym; a równoległobok GH, równy iest równoległobokowi MN; będzie i równoległobok MN, równy równoległobokowi EL, i figurze prostokréślnéy C, razém wziętym. Odiąwszy spólny równoległobok EL, pozostałá część NOL, równá iest figurze prostokréślnéy C. Ponieważ liniia prostá AE, iest równá linii prostéy EB, będzie (XXXVI. I.) i równoległobok AN, równy równoległobokowi NB, toiest równoległobokowi BM (XLIII. I.). Przydawszy część spólną NO, cały równoległobok AX, będzie równy części NOL. Lecz część NOL, równá iest figurze prostokréślnéy C; więc i równoległobok AX, będzie równy figurze prostokréślnéy C. Do danéy więc linii prostéy AB, przystawiony iest równy danéy figurze prostokréślnéy C, równoległobok AX, z nadmiarém figury równoległoboczném PO, podobnéy równoległobokowi D, ponieważ równoległobokowi EL, podobny iest równoległobok PO (XXIV. VI.). C. B. d. R.

PODANIE XXX.

ZAGADNIENIE.

Daną liniią prostą oznaczoną, przeciąć w skraynym i śrzednim stosunku. Fig. 211.

Niech będzie daná liniia prostá AB, potrzeba liniią prostą AB, przeciąć w skraynym i śrzednim stosunku.

Wykréślmy na linii prostéy (XLVI. I.) AB, kwadrat BC, a do linii prostéy AC, równy kwadratowi BC, (XXIX. VI.) przystawmy równoległobok CD, z nadmiarém AD, podobnym kwadratowi BC, będzie więc i nadmiar AD, kwadratém. Ponieważ kwadrat BC, równy iest równoległobokowi CD; odiąwszy spólny równoległobok CE; pozostały równoległobok BF, będzie równy pozostałému kwadratowi AD. Jest zaś równoległobok BF, i równokątny z kwadratém AD; więc boki tych równoległoboków około kątów równych są odwrótnie proporcyonalné (XIV. VI.). Jak więc

FE do ED, tak AE do EB. Aże liniia prostá FE, iest rówńá linii prostéy AC, (XXXIV. I.) toiest linii prostéy AB; a liniia prostá ED, równá linii prostéy AE, więc iak BA do AE, tak AE do EB. Lecz AB, większá iest od AE, zaczém i AE, większá iest od EB [XIV. V.]. Liniia więc prostá AB, przeciętá iest w skraynym i śrzednim stosunku w punkcie E, (III. d. VI.) C. B. d. R.

JNACZEY.

Niech będzie daná liniia prostá AB, potrzeba liniią prostą AB, przeciąć w skraynym i śrzednim stosunku. Fig. 212.

Przetniymy liniią prostą AB, w punkcie C, tak, żeby prostokąt zawarty liniiami prostémi AB, BC, był równy kwadratowi z linii prostéy AC. Ponieważ prostokąt zawarty liniiami prostémi AB, BC, równy iest kwadratowi z linii prostéy AC, będzie iak BA, do AC, tak AC do CB, więc liniia prostá AB, przeciętá iest w skraynym i śrzednim stosunku w punkcie C. C. B. d. R.

PODANIE XXXI

TWIERDZENIE.

W tróykątach prostokątnych figura prostokréślná naprzeciw prostokątnéy wystawioná, równá iest figuróm podobnym i podobnie wykréślonym na bokach kąt prosty zawieraiących. Fig. 213.

Niech będzie tróykąt prostokątny ABC, maiący kąt prosty BAC. Powiadam: że figura prostokréślná wystawioná naprzeciw prostokątnéy BC, równá iest figuróm podobnym, i podobnie położonym na bokach BA, AC, kąt prosty BAC, zawieraiących.

Wyprowadźmy prostopadłą AD; ponieważ w tróykącie prostokątnym ABC, z kąta prostégo przy A, wyprowadzoná iest do podstawy BC, prostopadłá AD, będą (VIII. VI.) tróykąty ABD, ADC, podobné całému tróykątowi ABC, i między sobą. Ze więc tróykąt ABC, podobny iest tróykątowi ABD, będzie iak CB do BA, tak BA do BD (IV. VI.); gdy zaś trzy liniie prosté są proporcyonalné iak się má piérwszá do trzeciéy, tak figura na piérwszéy do figury podobnéy, i podobnie wykréślonéy na drugiéy (II. w. XX. VI.). Jak więc má się CB do BD, tak figura na CB, do figury podobnéy i podobnie wykréślonéy na BA. A przez odmianę przełożéniá wyrazów śrzednich na mieyscé skraynych, (B. V.) będzie: iak DB do BC, tak figura na BA, do figury na BC. Dlá téy saméy przyczyny i iak DC do CB, tak figura na AC, do figury na CB. Dlá czego i iak BD, DC, razém wzięte do BC; tak figury na BA, AC, razém wzięté do figury na BC (XXIV. V.). Są zaś liniie prosté BD, DC, razém wzięté równé linii prostéy BC. Więc figura na linii prostéy BC, iest równá figuróm podobnym i podobnie wykréślonym na liniiach BA, AC (A. V.). W tróykątach zatém prostokątnych etc. etc. C. B. d. D.

PODANIE XXXII.

TWIERDZENIE.

Jeżeli dwa tróykąty maiącé dwa boki dwóm bokóm proporcyonalné, przystawioné będą w jednym kącie tak: iżby boki ich proporcyonalné, były równoległé; pozostałé tróykątów boki, będą na téyże saméy linii prostéy. Fig. 214.

Niech będą dwa tróykąty ABC, DCE, maiącé dwa boki BA, AC, dwóm bokóm CD, DE, proporcyonalné, toiest: że iak się má BA do AC, tak CD do DE; niech zaś będą równoległé, bok AB do boku DC, a bok AC do boku DE; powiadám: że boki BC, CE, leżą na téyże saméy prostéy linii.

Ponieważ albowiém liniia prostá AB, równoległą iest do linii prostéy DC, a padá na nié liniia prostá AC; będą kąty naprzemian BAC, ACD, między sobą równé; dlá téy saméy przyczyny i kąt CDE, równy iest kątowi ACD; dlá czego i kąt BAC, iest równy kątowi CDE. Ponieważ więc dwa tróykąty ABC, DEC, iedén kąt przy A, iednému kątowi przy D, maiącé równy, maią oraz boki około kątów równych proporcyonalné, toiest iak BA do AC, tak CD do DE; będzie tróykąt ABC, równokątny z tróykątém DCE, (VI. VI.) więc kąt ABC, iest równy kątowi DCE. Dowiedziono zaś, że iest i kąt BAC, równy kątowi ACD, cały więc kąt ACE, iest równy dwóm kątóm ABC, BAC. Przydawszy spólny kąt ACB, są kąty ACE, ACB, równé kątóm ABC, BAC, ACB. Lecz kąty ABC, BAC, ACB, są równé dwóm kątóm prostym (XXXII. I.); i kąty więc ACE, ACB, będą równé dwóm kątóm prostym. Zatém na linii prostéy AC, i przy punkcie na niéy C, dwie liniie prosté BC, CE, nie po iednéy stronie położoné, czynią kąty przyległé ACE, ACB, równé dwóm kątóm prostym. Liniie więc prosté BC, CE, są na téyże saméy linii prostéy (XIV. I.) Jeżeli przeto dwa tróykąty etc. etc. C. B. d. D.

PODANIE XXXIII.

TWIERDZENIE.

W kołach równych, kąty tak w śrzodkach iako i przy okręgach, tudzież wycinki, maią ténże sám stosunek z stosunkiém łuków, na których się wspiéraią. Fig. 215.

Niech będą koła równé ABC, DEF, w śrzodkach zaś tychże kół kąty BGC, EHF, przy okręgach kąty BAC, EDF, tudzież wycinki BGC, EHF. Powiadám: że iak się má łuk BC, do łuku EF, tak i kąt BGC, do kąta EHF, i kąt BAC, do kąta EDF, i wycinek BGC, do wycinka EHF.

Łukowi albowiém BC, połóżmy ilékolwiek łuków równych następnie CK, KL; łukowi zaś EF, znowu ilékolwiek równych łuków FM, MN; i poprowadźmy liniie prosté GK, GL, HM, HN. Ponieważ łuki BC, CK, KL, są między sobą równé, będą i kąty BGC, CGK, KGL, między sobą równé (XXVII. III.). Jak wielokrotny więc iest łuk BL. względém łuku BC, tak wielokrotny iest i kąt BGL, względém kąta BGC. Dlá téy saméy przyczyny, i iak wielokrotny iest łuk EN, względém łuku EF, tak wielokrotny iest i kąt EHN, względém kąta EHF. A ieżeli łuk BL, iest równy, większy lub mnieyszy od łuku EN, i kąt téż BGL, będzie równy, większy, lub mnieyszy od kąta EHN. Do cztérech więc wielkości, toiest dwóch łuków BC, EF, i dwóch kątów BGC, EHF, wzięté są iakożkolwiek równie wielokrotné względem łuku BC, i kątą BGC, toiest łuk BL, i kąt BGL; łuku zaś EF, i kąta EHF, wzięté są inné iakożkolwiek równie wielokrotné toiest łuk EN, i kąt EHN: i dowiedziono iest, że ieżeli łuk BL, przewyższá, iest równy lub mnieyszy od łuku EN, i kąt BGL, przewyższá, iest równy lub mnieyszy od kąta EHN. Jak więc (V. def. V.) łuk BC, do łuku EF, tak kąt BGC, do kąta EHF, lecz iak kąt BGC, do kąta EHF, tak kąt BAC, do kąta EDF, (XV. V.) iedén bowiém drugiégo iest podwóynym (XX. III.) więc i iak łuk BC, do łuku EF, tak i kąt BGC, do kąta EHF, i kąt BAC, do kąta EDF.

W kołach zatém równych kąty tak w śrzodkach iako i przy okręgach maią stosunek równy stosunkowi łuków, na których się wspiéraią. C. B. d. D.

Fig. 216. Powiadám nadto: że iak łuk BC, do łuku EF: tak się má wycinek BGC, do wycinka EHF. Poprowadźmy liniie prosté BC, CK, a wziąwszy na łukach BC, CK, punkta X, O, poprowadźmy liniie prosté BX, XC, CO, OK. Ponieważ dwie liniie prosté BG, GC, są równé dwóm liniióm prostym CG, GK, i zamykaią kąty równé, będzie i podstawa BC, równá podstawie CK, i tróykąt BGC, równy tróykątowi CGK (IV. I.). Ze zaś łuk BC, równy łukowi CK, iest i pozostały łuk dopełniaiący całégo okręgu koła ABC, równy pozostałému łukowi dopełniaiącému całégo okręgu tegoż samégo koła: dlá czego i kąt BXC, iest równy kątowi COK; odcinek więc BXC, podobny iest odcinkowi COK (XI. d. III); są zaś na równych liniiach prostych BC, CK: a na równych liniiach prostych podobné kół odcinki, są między sobą równé (XXIV. III). Więc odcinek BXC, równy iest odcinkowi COK.

Lecz iest i tróykąt BGC, równy tróykątowi CGK; cały zatém wycinek BGC, równy będzie całému wycinkowi CGK; dlá téy saméy przyczyny i wycinek KGL, będzie równy każdému z wycinków BGC, CGK. Podobnież i wycinki EHF, FHM, MHN, są między sobą równé. Jak wielokrotny więc iest łuk BL, względém łuku BC; tak wielokrotny iest wycinek BGL, względém wycinka BGC. Dlá téyże saméy przyczyny, i iak wielokrotny iest łuk EN, względém łuku EF; tak wielokrotny iest i wycinek EHN, względém wycinka EHF. I ieżeli łuk BL, iest równy, większy lub mnieyszy od łuku EN, wycinek też BGL, iest równy, większy lub mnieyszy od wycinka EHN. Do cztérech zatém wielkości, toiest do dwóch łuków BC, EF, i do dwóch wycinków BGC, EHF, wzięté są iakożkolwiek równie wielokrotné łuk BL, i wycinek BGC, względém łuku BC, i wycinka BGC, i inné iakożkolwiek równie wielokrotné: łuk EN, i wycinek EHF, względém łuku EF, i wycinka EHF; i dowiedzioné iest; że ieżeli łuk BL, iest równy, większy lub mnieyszy od łuku EN, i wycinek też BGL, iest równy, większy lub mnieyszy od wycinka EHN. Zaczém má się łuk BC, do łuku EF, iak wycinek BGC, do wycinka EHF. C. B. d. D.

PODANIE B.

TWIERDZENIE.

Jeżeli kąt tróykąta, przecięty będzie na dwie równé części, liniia zaś prostá przecinaiącá kąt, przeciná i podstawę; rownoległobok prostokątny zawarty bokami tróykąta, równy będzie równoległobokowi prostokątnému zawartému odcinkami podstawy wráz z kwadratém z linii przecinaiącéy kąt na dwie równé części. Fig. 217.

Niech będzie tróykąt ABC, i niechay kąt BAC, przez liniią prostą AD, przecięty będzie na dwie równé części; będzie równoległobok prostokątny zawarty liniiami prostémi BA, AC, równy równoległobokowi prostokątnému zawartému liniiami prostémi BD, DC, wráz z kwadratém z linii prostéy AD.

Opiszmy (V. IV.) około tróykąta koło ACB, przedłużmy liniią prostą AD, do zeyściá się z okręgiém w punkcie E, i poprowadźmy liniią prostą EC. Ponieważ kąt BAD, równy iest kątowi CAE, i kąt ABD, kątowi AEC, (XXI. III.) są albowiém w tymże samym odcinku; będą tróykąty ABD, AEC, między sobą równokątné. Zaczém iak BA do AD, tak iest (IV. VI.) EA do AC, i równoległobok prostokątny zawarty liniiami prostémi BA, AC, równy będzie (XVI. VI.) równoległobokowi prostokątnému zawartému liniiami prostémi AE, AD, toiest (III. II.) równoległobokowi prostokątnému zawartému liniiami prostémi ED, DA, wráz z kwadratém z linii prostéy AD. Jest zaś prostokąt zawarty liniiami prostémi ED, DA, równy (XXXV. III.) równoległobokowi prostokątnému zawartému liniiami prostémi BD, DC. Równoległobok więc prostokątny zawarty liniiami prostémi BA, AC, równy iest równoległobokowi prostokątnému zawartému liniiami prostémi BD, DC, wráz z kwadratém z linii prostéy AD. Jeżeli zatém kąt tróykąta etc. etc. C. B. d. D.

PODANIE C.

TWIERDZENIE.

Jeżeli z kąta tróykąta, wyprowadzoná będzie prostopadłá do podstawy, równoległobok prostokątny zawarty bokami tróykąta, równy będzie równoległobokowi prostokątnému zawartému liniią prostopadłą i śrzednicą koła około tróykąta opisanégo. Fig. 218.

Niech będzie tróykąt ABC, i z kąta A, wyprowadzoná prostopadłá AD, do podstawy BC, będzie równoległobok prostokątny zawarty liniiami prostémi AB, AC, równy równoległobokowi prostokątnému zawartému prostopadłą AD, i śrzednicą koła około tróykąta opisanégo.

Opiszmy (V. IV.) około tróykąta koło ABC, poprowadźmy śrzednicę AE, i liniią prostą EC. Ponieważ kąt prosty BDA, równy iest kątowi ECA, w półkolu (XXXI. III.), iest zaś kąt ABD, równy (XXI. III.) kątowi AEC, w tymże samym odcinku: będą tróykąty ABD, AEC, równokątné: iak więc BA, má się do AD, tak się má (IV. VI.) EA, do AC; i dlá tego równoległobok prostokątny zawarty liniiami prostémi BA, AC, równy iest równoległobokowi prostokątnému zawartému liniiami prostémi EA, AD. Jeżeli więc z kąta tróykąta etc. etc. C. B. D. d.

KONIEC XIĘGI SZOSTEY.

JEOMETRYI EUKLIDESA,

XIĘGA JEDENASTA.

DEFINICYE.

1. Bryłą iest, co má długość, széròkość i grubość.

2. Granicami bryły są powierzchnie.

3. Liniia prosta, iest prostopadłą do płaszczyzny: kiedy ze wszystkiémi liniiami prostémi dotykaiącémi się iéy, a na teyże płaszczyźnie poprowadzonémi, czyni kąty prosté.

4. Płaszczyzna iest prostopadłą do płaszczyzny: kiedy liniie prosté pod kątami prostémi do spólnégo płaszczyzn przecięciá na iednéy z płaszczyzn poprowadzoné, są oraz pod kątami prostémi do płaszczyzny drugiéy.

5. Nachylénié się linii prostéy do płaszczyzny, oznaczá się kątém ostrym, zawartym między tąż liniią prostą nachylaiącą się, i liniią prostą łączącą punkt na płaszczyźnie, w którym spotyká ią liniia prostopadłá z wierzchniégo końca linii nachylaiącéy się do płaszczyzny wyprowadzoná, z punktém, w którym liniia nachylaiącá się dotyká się płaszczyzny.

6. Nachylénié się płaszczyzny do płaszczyzny, oznaczá się kątém ostrym zawartym liniiami prostémi prostopadłémi do spólnégo płaszczyzn przecięciá, z tegoż samégo punktu spólnégo przecięciá na obudwóch płaszczyznach wyprowadzonémi.

7. Nachylénié się dwóch płaszczyzn, iest podobné lub równé nachyléniu się dwóch drugich płaszczyzn, gdy wyżéy opisané kąty ich pochyłości są między sobą równé.

8. Płaszczyzny równoległé są, któré przedłużoné z sobą nie schodzą się.

9. Kąt bryłowy iest, który zawiérá się więcéy niż dwoma kątami płaskiémi znayduiącémi się nie na téyże saméy płaszczyźnie, a przy iednym punkcie wykréślonémi.

10. Bryły są podobné i równé té, które są ograniczoné równą liczbą płaszczyzn podobnych i równych.

11. Bryły podobné są té, w których i kąty bryłowé odpowiadaiącé są równé, i które ograniczoné są figurami płaskiémi w równéy liczbie podobnémi względém siebie.

12. Ostrosłup iest bryła ograniczoná płaszczyznami, które na iednéy płaszczyźnie wystawioné, w jednym punkcie się schodzą.

13. Graniastosłup iest bryła ograniczoná płaszczyznami, z których dwie przeciwległé są równé, podobné i równoległe: inné zaś są równoległobokami.

14. Kula iest bryła ograniczoná powierzchnią opisaną łukiém półkola obraaiącégo się około śrzednicy nieruchoméy, dopókiby nie wróciło się do położéniá mieysca, z którégo się obracać zaczęło.

15. Osią kuli iest owa śrzednica nieruchomá, około którégy obracá się półkole.

16. Srzodek kuli iest ténże sám który śrzodek i półkola.

17. Srzednicą kuli iest liniia prostá popro-

wadzoná przez śrzodek, a z obudwóch strón na powierzchni kuli zakończoná.

18. Ostrokrąg iest bryła ograniczoná powierzchnią opisaną dwoma bokami tróykąta prostokątnégo obracaiącégo się około iednégo z boków kąta prostégo, iako nieruchomégo, dopókiby nie wrócił się do tegoż samégo położéniá mieysca z którégo się obracać zaczął. A ieżeli bok nieruchomy równy iest drugiému bokowi kąta prostégo, będzie ostrokrąg prostokątny; ieżeli mnieyszy, ostrokrąg roztwartokątnym, ieżeli większy ostrokrąg, ostrokątnym nazywać się będzie.

19. Osią ostrokręgu iest owa liniia prostá nieruchomá, około któréy tróykąt obracá się.

20. Podstawą ostrokręgu iest koło opisané obrótém drugiégo boku kąta prostégo.

21. Walec iest bryła ograniczoná powierzchnią opisaną trzema bokami równoległoboku prostokątnégo, obracaiącégo się około boku czwartégo, iako nieruchomégo, dopókiby nie powrócił do tegoż samégo położéniá mieysca z którégo się obracać zaczął.

22. Osią walca, iest owa liniia prostá nie-

ruchomá, około któréy równoległobok obracá się.

23. Podstawami walca są koła opisané obrótém dwóch boków przeciwnych równoległoboku.

24. Ostrokręgi i walce są podobné, których osie i śrzednice podstaw są proporcyonalné.

25. Sześcian iest bryła ograniczoná sześcią równémi kwadratami.

26. Czworościan iest bryła ograniczoná cztéréma równémi i równobocznémi tróykątami.

27. Ośmiościan iest bryła ośmią równémi i równobocznémi tróykątami ograniczoná.

28. Dwunastościan iest bryła dwunastą równémi, równobocznémi i równokątnémi pięciokątami ograniczoná.

29. Dwudziestościan iest bryła dwudziestą równémi i równobocznémi tróykątami ograniczoná.

DEFINICYA A.

Równoległościan iest bryła ograniczoná sześcią równoległobokami, z których każdé dwa przeciwné są równoległé.

PODANIE I.

TWIERDZENIE.

Nié może część linii prostéy bydź na płaszczyźnie, a inná część téyże linii prostéy nad płaszczyzną. Fig. 219.

Jeżeli bowiém to bydź może, przypuśćmy: że linii prostéy ABC, część AB, iest na płaszczyźnie, część zaś BC, nad płaszczyzną, przedłużoná więc liniia prostá AB, znáydować się będzie, na téyże saméy płaszczyźnie, na któréy i liniia prostá AB, niech tém przedłużeniém będzie liniia prostá DB, dwóch zatém liniy prostych, spólnym odcinkiém będzie liniia prostá AB, co bydź nié może (w. XI. I.) Linii więc prostéy część etc. etc. C. B. d. D.

PODANIE II.

TWIERDZENIE.

Jeżeli dwie liniie prosté przecinaią się nawzaiém, są na iednéy płaszczyźnie, i każdé trzy liniie prosté schodzącé się z sobą, są na iednéy płaszczyźnie. Fig. 220.

Niechay dwie liniie prosté AB, CD, przecinaią się nawzaiém w punkcie E, będą liniie prosté AB, CD, na iednéy płaszczyźnie, i trzy liniie prosté EC, CB, BE, schodzącé się z sobą, są na iednéy płaszczyźnie.

Przez liniią prostą EB, poprowadźmy płaszczyznę, i około téyże linii prostéy EB, przedłużonéy, ieżeliby potrzeba było, niechay obracá się płaszczyzna, póki nie przeydzie przez punkt C. Ponieważ więc punkta E, C, są na téy płaszczyźnie, na téyże saméy (VII. def. I.) płaszczyźnie będzie liniia prostá EC; dlá téy przyczyny na téy saméy płaszczyźnie iest liniia prostá BC, i na téyże saméy płaszczyźnie z przypuszczéniá iest liniia prostá EB. Trzy zatém liniie prosté EC, CB, BE, na iednéy są płaszczyźnie, lecz na któréy są płaszczyźnie liniie prosté EC, EB, na niéy są (I. XI.) i liniie prosté CD, AB; więc liniie prosté AB, CD, są na iednéy płaszczyźnie.

Przeto ieżeli dwie liniie prosté etc. etc. C. B. d. D.

PODANIE III.

TWIERDZENIE.

Jeżeli dwie płaszczyzny przecinaią się nawzaiém, spólném ich przecięciém będzie liniia prostá. Fig. 221.

Niechay dwie płaszczyzny AB, BC, przecinaią się nawzaiém, spólném zaś ich przecięciém niech będzie liniia DB. Powiadám, że taż liniia DB, prostá iest.

Jeżeli bowiém nie iest, poprowadźmy z punktu D do B, na płaszczyźnie AB, liniią prostą DEB; na płaszczyźnie zaś BC, liniią prostą DFB. Dwóch zatém liniy prostych DEB, DFB, będą téż samé granice czyli końce, i też liniie prosté zamkną mieyscé co bydź nié może (X. p. I.). Płaszczyzn więc AB, BC, spólné przecięcié DB, nié może nie bydź liniią prostą, iest zatém liniią prostą. Przeto ieżeli dwie płaszczyzny etc. etc. Co było do dowodzéniá.

PODANIE IV.

TWIERDZENIE.

Jeżeli liniia prostá iest do dwóch liniy prostych przecinaiących się nawzaiém prostopadłą w punkcie ich przecięciá, będzie téż prostopadłą do płaszczyzny przez téż liniie prosté przecinaiącé się poprowadzonéy. Fig. 222.

Niechay liniia prostá EF, będzie prostopadłą do dwóch liniy prostych AB, CD, przecinaiących się w punkcie E. Powiadám: że liniia prostá EF, prostopadłą iest do płaszczyzny przez liniie prosté AB, CD, poprowadzonéy.

Weźmy liniie prosté AE, EB, EC, ED, między sobą równé, i przez punkt E, na płaszczyźnie liniy prostych AB, CD, poprowadźmy w iakiémkolwiek położéniu liniią prostą GEH, i liniie prosté AD, CB; z któregokolwiek potém na linii prostéy EF, wziętégo punktu F, poprowadźmy liniie prosté FA, FG, FD, FC, FH, FB. Ponieważ dwie liniie prosté AE, ED, są równé dwóm liniióm prostym BE, EC, i zawiéraią kąty równé AED, BEC, [XV. I.] będzie podstawa AD, równá podstawie CB, i kąt DAE, równy kątowi EBC, (IV. I) iest zaś i kąt AEG, równy kątowi BEH; dwa więc tróykąty AGE, BHE, maiącé dwa kąty dwóm kątóm równé, iedén drugiému, i bok iedén AE, równy bokowi iednému EB, kątóm równym przyległému, będą miały i pozostałé boki równé pozostałym bokóm (XXVI. I.) więc bok GE, iest równy bokowi EH, bok zaś AG, bokowi BH; a ponieważ liniia prostá AE, iest równá linii prostéy EB, spólná zaś i pod kątami prostémi iest liniia prostá FE, będzie podstawa AF, równá podstawie FB; dlá téyże saméy przyczyny i liniia prostá CF, będzie równá linii prostéy FD. Prócz tego ponieważ liniia prostá AD, iest równá linii prostéy BC, i liniia prostá AF, równá linii prostéy FB, będą dwie liniie prosté FA, AD, równé dwóm liniióm prostym FB, BC, iedna drugiéy i dowiedzioná iest podstawa DF, równá podstawie FC; kąt zatém (VIII. I.) FAD, równy iest kątowi FBC. Z okazaniá znowu liniia prostá AG, iest równá linii prostéy BH, i liniia prostá AF, iest równá linii prostéy FB; dwie więc liniie prosté FA, AG, są równé dwóm liniióm prostym FB, BH, i kąt FAG, okazany iest równy kątowi FBH; podstawa przeto GF, iest równą podstawie FH. J znowu ponieważ liniia prostá GE, dowiedzioná iest bydź równą linii prostéy EH, spólną zaś iest liniia prostá EF; będą dwie liniie prosté GE, EF, równé dwóm liniióm prostym HE, EF; i podstawa GF, iest równá podstawie FH; kąt więc GEF, iest równy kątowi HEF, i dlá tego każdy z kątów GEF, HEF, iest prosty (X. def. I.). Liniia przeto prostá FE, iest prostopadłą do linii prostéy GH, w jakiémkolwiek położéniu przez punkt E, poprowadzonéy. Podobnież dowiedziémy, że liniia prostá FE, iest téż do wszystkich liniy prostych dotykaiących się iéy, a na płaszczyźnie danéy poprowadzonych prostopadłą. Liniia zaś prostá prostopadłą iest do płaszczyzny, kiedy iest prostopadłą do wszystkich liniy prostych iéy się dotykaiących, i na téyże saméy płaszczyźnie poprowadzonych (III. def. XI.); zaczém liniia prostá FE, iest prostopadłą do płaszczyzny danéy. Jeżeli więc liniia prostá etc. etc. C. B. d. D.

PODANIE V.

TWIERDZENIE.

Jeżeli liniia prostá prostopadłą iest do trzech liniy prostych przecinaiących się, w spólném ich przecięciu; té trzy liniie prosté będą na iednéy płaszczyźnie. Fig. 223.

Niechay liniia prostá AB, będzie prostopadłą do trzech liniy prostych BC, BD, BE, w spolném ich przecięciu B; powiadám: że liniie prosté BC, BD, BE, są na iednéy płaszczyźnie.

Przypuściwszy bowiém, ieżeli to bydź może, że liniie prosté BD, BE, są na iednéy płaszczyźnie, a liniia prostá BC, na innéy płaszczyźnie wyniesionéy nad piérwszą;

przedłużmy płaszczyznę przez liniie prostę AB, BC, poprowadzoną, spólném więc przecięciém téy płaszczyzny, z płaszczyzną daną, będzie liniia prostá (III. XI.); niech tém spólném przecięciém będzie liniia prostá BF, na iednéy przeto płaszczyźnie, przez liniie prosté AB, BC, poprowadzonéy, są trzy liniie prosté AB, BC, BF. A ponieważ liniia prostá AB, iest prostopadłą do dwóch liniy prostych BD, BE, będzie prostopadłą i do płaszczyzny przez liniie prosté DB, BE, poprowadzonéy, (IV. XI.) płaszczyzna zaś przez liniie prosté DB, BE, poprowadzoná iest płaszczyzna daná, więc liniia prostá AB, iest prostopadłą do płaszczyzny danéy; dlá czego iest prostopadłą i do wszystkich liniy prostych, iéy się dotykaiących, i na téyże saméy płaszczyźnie poprowadzonych(III.def.XI) lecz iéy się dotyká liniia prostá BF, na danéy płaszczyźnie znáyduiącá się; więc kąt ABF, iest prosty; z założéniá zaś iest i kąt ABC, prosty, równy więc iest kąt ABF, kątowi ABC, a są na iednéy płaszczyźnie, co bydź nié może; liniia zatém prostá BC, nie iest nad płaszczyzną daną; trzy przeto liniie prosté BC, BD, BE, na iednéy są płaszczyźnie. Jeżeli więc liniia prostá etc. etc. C. B. d. D.

PODANIE VI.

TWIERDZENIE.

Jeżeli dwie liniie prosté są prostopadłé do téyże saméy płaszczyzny; będą między sobą równoodległé. Fig. 224.

Niechay dwie liniie prosté AB, CD, będą prostopadłé do danéy płaszczyzny; powiadám: że liniia prostá AB, iest równoległą do linii prostéy CD.

Liniie prosté AB, CD, niecháy spotykaią płaszczyznę daną w punktach B, D, poprowadźmy liniią prostą BD, a do niéy na danéy płaszczyźnie prostopadłą DE; weźmy liniią prostą DE, równą linii prostéy AB, i poprowadźmy liniie prosté BE, AE, AD. Ponieważ liniia prostá AB, prostopadłą iest do płaszczyzny danéy, będzie prostopadłą i do wszystkich liniy prostych iéy się dotykaiących, a na téyże płaszczyźnie poprowadzonych (III. def. XI.) dotykaią się zaś linii prostéy AB, dwie liniie prosté BD, BE, na danéy płaszczyźnie znáyduiącé się, więc każdy z kątów ABD, ABE, iest prosty. Dlá téyże saméy przyczyny każdy z kątów CDB, CDE, iest prosty; a ponieważ liniia prostá AB, równá iest linii prostéy DE, spolną zaś iest liniia prostá BD, będą dwie liniie prosté AB, BD, równé dwóm liniióm prostym ED, DB; i zawieraią kąty prosté; podstawa więc AD, równá iest podstawie BE, (IV. I.). Znowu ponieważ liniia prostá AB, równá iest linii prostéy DE, i liniia prostá BE, równá linii prostéy AD, są dwie liniie prosté AB, BE, równé dwóm liniióm prostym ED, DA, i podstawa AE, spólná; więc kąt ABE, równy kątowi EDA, (VIII. I.) lecz kąt ABE, iest prosty, prostym przeto iest i kąt EDA; a dlá tego liniia prostá ED, iest prostopadłą do linii prostéy DA; lecz iest prostopadłą i do dwóch liniy prostych BD, DC, dlá czego liniia prostá ED, iest prostopadłą do trzech liniy prostych BD, DA, DC, w spólném onychże przecięciu D; trzy zatém liniie prosté BD, DA, DC, są na iednéy płaszczyźnie (V. XI.). na któréy zaś płaszczyźnie są liniie prosté BD, DA, na téyże saméy płaszczyźnie iest liniia prostá AB, każdé bowiém trzy liniie prosté schodzącé się z sobą na iednéy są płaszczyźnie (II. XI.); są więc liniie prosté AB, BD, DC, na iednéy płaszczyźnie; lecz każdy z kątów ABD, BDC, prosty iest, równoległá iest zatém liniia prostá AB, od linii prostéy CD, (XXVIII. I.). Jeżeli więc dwie liniie prosté etc. etc. C. B. d. D.

PODANIE VII.

TWIERDZENIE.

Jeżeli dwie liniie prosté są równoodległé, na każdéy zaś z nich wzięté będą gdziekolwiek punkta; liniia prostá łącząca téż punkta będzie na téyże saméy płaszczyźnie na któréy się i dwie liniie prosté równoodległé znáyduią. Fig. 225.

Niech będą dwie liniie prosté równoodległé AB, CD, i na każdéy z nich, weźmy gdziekolwiek punkta E, F, powiadám: że liniia prostá łączącá punkta E, F, na téyże saméy iest z liniiami równoodległémi płaszczyźnie.

Przypuśćmy albowiém, ieżeli to bydź może, że rzeczoná liniia prostá iest nad płaszczyzną w położéniu naprzykład EGF; na płaszczyźnie ABCD, na któréy są liniie prosté równoodległé, poprowadźmy z punktu E do F, liniią prostą EHF; mamy zaś liniią prostą EGF, więc dwie liniie prosté EHF, EGF, zawieraó będą mieyscé, co bydź nié może (X. p. I.) liniia zatém prostá poprowadzoná z punktu E do F, nie iest nad płaszczyzną, będzie przeto na płaszczyźnie, przez liniie prosté AB, CD, przechodzącéy. Jeżeli więc dwie liniie prosté etc. etc. C. B. d. D.

PODANIE VIII.

TWIERDZENIE.

Jeżeli dwie liniie prosté są równoodległé, iedna zaś z nich iest do iakiéy płaszczyzny prostopadłą; i drugá będzie prostopadłą do téyże saméy płaszczyzny. Fig. 226.

Niech dwie liniie prosté AB, CD, będą równoległé i iedna z nich AB, niech będzie prostopadłą do płaszczyzny danéy. Powiadám: że i drugá CD, iest do téyże saméy płaszczyzny prostopadłą.

Niechay liniie prosté AB, CD, spotykaią płaszczyznę daną w punktach B, D, poprowadźmy liniią prostą BD. Liniie więc prosté AB, CD, BD, są na iednéy płaszczyźnie; do linii prostéy BD, na płaszczyźnie danéy wyprowadźmy DE, prostopadłą, dawszy iey długość równą linii prostéy AB, i poprowadźmy liniie prosté BE, AE, AD. Ponieważ liniia prostá AB, prostopadłą iest do płaszczyzny danéy, będzie prostopadłą, i do wszystkich liniy prostych, iéy się dotykaiących, a na téyże płaszczyźnie poprowadzonych (III. def. XI.) iest przeto każdy z kątów ABD, ABE, prosty. Ponieważ zaś na liniie prosté równoodległé AB, CD, padá liniia prostá BD, będą kąty ABD, CDB, równé dwóm kątóm prostym (XXIX, I.) iest zaś kąt ABD, prosty, więc iest prosty i kąt CDB; dlá czego liniia prostá CD, prostopadłą iest do linii prostéy BD, aże liniia prostá AB, iest równá linii prostéy DE, i spólną iest liniia prostá BD, są dwie liniie prosté AB, BD, równé dwóm liniióm prostym ED, DB, i kąt ABD, iest równy kątowi EDB, iest bowiém każdy prosty; podstawa przeto AD, iest równá podstawie BE (IV. I.). Znowu ponieważ liniia prostá AB, równá iest linii prostéy DE, i liniia prostá BE, równá linii prostéy AD, będą dwie liniie prosté AB, BE, równé dwóm liniiom prostym ED, DA, i podstawa spólná AE; dlá czego kąt ABE, iest równy kątowi EDA, (VIII. I.) iest zaś kąt prosty ABE, więc i kąt ADE, iest prosty, i liniia prostá ED, iest prostopadłą do linii prostéy DA; lecz iest prostopadłą i do linii prostéy BD; więc liniia prostá ED, będzie téż prostopadłą do płaszczyzny przez liniie proste BD, DA, poprowadzonéy (IV. XI.) i do wszystkich liniy prostych iéy się dotykaiących, a na danéy płaszczyźnie poprowadzonych (III. def. XI.). Lecz na płaszczyźnie przez liniie prosté BD, DA, poprowadzonéy, iest liniia prostá DC, wszystkié bowiém trzy leżą na płaszczyźnie, na któréy są liniie prosté równoodległé AB, CD; iest przeto liniia prostá ED, prostopadłą do linii prostéy CD; i liniia prostá CD, iest prostopadłą do linii prostéy DE, lecz liniia prostá CD, iest prostopadłą i do linii prostéy DB; liniia przeto prostá CD, iest prostopadłą do dwóch liniy prostych DE, DB, przecinaiących się nawzaiém w spólném onychże przecięciu D; i dlá tego iest prostopadłą do płaszczyzny przez liniie prosté DE, DB, poprowadzonéy. Płaszczyzna zaś przez liniie prosté DE, DB, poprowadzoná iest płaszczyzna daná. Więc liniia prostá CD, będzie do danéy płaszczyzny prostopadłą. C. B. d. D.

PODANIE IX.

TWIERDZENIE.

Liniie prosté równoodległé względém téyże samey linii prostéy, która na odmiénnéy od nich leży płaszczyźnie; będą téż równoodległé i względém siebie. Fig. 227.

Niech każdá z liniy prostych AB, CD, będzie równoległą względém linii prostéy EF, któ á na odmiénnéy z pierwszémi leży płaszczyźnie. Powiadám: że liniia prostá AB, iest równoléglą względém linii prostéy CD.

Weźmy na linii prostéy EF, punkt gdziekolwiek G, z którégo do téyże linii prostéy EF, na płaszczyźnie przechodzącéy przez liniie prosté EF, AB, poprowadźmy liniią prostopadłą GH, na płaszczyźnie zaś przechodzącéy przez liniie prosté EF, CD, poprowadźmy znowu do téyże samey linii prostéy EF, liniią prostopadłą GK. Ponieważ liniia prostá EF, do każdéy z dwóch liniy prostych GH, GK, iest prostopadłą, będzie też liniia prostá

EF, prostopadłą do płaszczyzny przechodzącéy przez liniie prosté GH, GK, (IV. XI.) lecz liniia prostá EF, iest równoległą względém linii prostéy AB; więc i liniia prostá AB, iest prostopadłą do płaszczyzny HGK, (VIII. XI.) dlá téyże saméy przyczyny i liniia prostá CD, iest prostopadłą do płaszczyzny HGK. Każdá przeto z dwóch liniy prostych AB, CD, będzie prostopadłá do płaszczyzny HGK. Jeżeli zaś dwie liniie prosté są prostopadłé do téyże saméy płaszczyzny, są równoległé względém siebie (VI. XI.). Więc liniią prostá AB, iest równoległą względém linii prostéy CD. C. B. d. D.

PODANIE X.

TWIERDZENIE.

Jeżeli dwie liniie prosté schodzącé się są równoodległé względém dwóch liniy prostych schodzących się, a na odmiénnéy z piérwszémi płaszczyźnie położonych; kąt zawarty między dwie-ma piérwszémi prostémi liniiami, równy będzie kątowi zawartému między dwiéma drugiémi prostémi liniiami. Fig. 228,

Niechay dwie prosté liniie schodzącé się AB, BC, będą równoodległé względém dwóch liniy prostych schodzących się DE, EF, na odmiénnéy z piérwszémi płaszczyźnie położonych, powiadám: że kąt ABC, iest równy kątowi DEF.

Weźmy liniie prosté BA, BC, ED, EF, między sobą równé, i poprowadźmy liniie prosté AD, CF, BE, AC, DF.

Ponieważ liniia prostá BA, iest równá i równoodległá względém linii prostéy ED. będzie i liniia prostá AD, równá, i równoodległá względém linii prostéy BE, (XXXIII. I.) dlá téy saméy przyczyny i liniia prostá CF, iest równá i równoodległá, od linii prostéy BE. Każdá zatém z dwóch liniy prostych AD, CF, iest równá i równoodległá od linii prostéy BE. Ktoré żaś liniie prosté na odmiénnych płaszczyznach położoné są równoodległé względém téyże saméy linii prostéy, są równoodległé i względém siebie. Więc liniia prostá AD, iest równoległą od linii prostéy CF (IX. XI.); i są téż liniie prosté AD, CF, równé względém siebie (I. p. I.) będą więc i liniie prosté AC, DF, równé i równoodległé względém siebie; przeto ponieważ dwie liniie prosté AB, BC, są równé dwóm liniióm prostym DE, EF, i podstawa AC, iest równą podstawie DF, będzie kąt ABC, równy kątowi DEF (VIII. I.). Jeżeli więc dwie liniie prosté etc. etc. C. B. d. D.

PODANIE XI.

ZAGADNIENIE.

Z punktu danégo nad płaszczyzną daną, wyprowadzić do téyże płaszczyzny liniią prostopadłą. Fig. 229.

Niech będzie dany punkt A, nad płaszczyzną daną, którą niech będzie płaszczyzna BH. Potrzeba z punktu A, wyprowadzić liniią prostą, do płaszczyzny danéy prostopadłą.

Na danéy płaszczyźnie poprowadźmy liniią prostą BC, w jakiémkolwiek położéniu, a z punktu A, do linii prostéy BC, wyprowadźmy liniią prostopadłą AD, (XII. I.) ieżeli taż liniia prostopadłá AD, prostopadłą będzie i do danéy płaszczyzny, otrzymámy w niéy rozwiązanié zagadniéniá; w przypadku przeciwnym, wyprowadźmy z punktu D, do linii prostéy BC, na danéy płaszczyźnie prostopadłą DE (XI. I.); i z punktu A, do linii prostéy DE, prostopadłą AF; nakoniec przez punkt F, poprowadźmy liniią prostą GH, równoodległą od linii prostéy BC, (XXXI. I.) ponieważ liniia prostá BC, iest prostopadłą do liniy prostych ED, DA; będzie liniia prostá BC, prostopadłą i do płaszczyzny przez liniie prosté ED, DA, przechodzącéy (IV. XI.) do linii zaś prostéy BC, iest równoległą liniia prostá GH; a ieżeli dwie liniie prosté są równoodległé, z których iedna iest prostopadłą do iakiéy płaszczyzny, prostopadłą będzie i drugá prostá liniia do téyże saméy płaszczyzny, (VIII. XI.) iest przeto i liniia prostá GH, prostopadłą do płaszczyzny przez liniie prosté ED, DA, przechodzącéy, a zatém iest prostopadłą do wszystkich liniy prostych, na téyże saméy płaszczyźnie poprowadzonych z nią się spotykaiących (III. def. XI.) dotyká się zaś iéy liniia prostá AF, znáyduiącá się na płaszczyźnie przez liniie prosté ED, DA, poprowadzonéy; więc liniia prostá GH, prostopadłą iest do linii prostéy AF, czyli liniia prostá AF, prostopadłą iest do linii prostéy GH; iest zaś liniia prostá AF, prostopadłą do linii prostéy DE, przeto liniia prostá AF, iest prostopadłą do każdéy z dwóch liniy prostych GH, DE. Lecz ieżeli liniia prostá, iest prostopadłą do dwóch liniy prostych przecinaiących się w spólném przecięciu, będzie téż prostopadłą do płaszczyzny przez téż dwie liniie prosté poprowadzonéy, dlá czego liniia prostá AF, iest prostopadłą do płaszczyzny przez liniie prosté ED, GH, poprowadzonéy. Płaszczyzna zaś przez liniie prosté ED, GH, poprowadzoná iest płaszczyzna daná; więc liniia prostá AF, iest prostopadłą do danéy płaszczyzny. Z danégo zatém punktu A, nad płaszczyzną daną, iest wyprowadzoná liniia prostá do téyże płaszczyzny prostopadłá etc. etc. C. B. d. R.

PODANIE XII.

ZAGADNIENIE.

Z punktu danégo, na danéy płaszczyźnie wyprowadzić liniią prostą do téyże płaszczyzny prostopadłą. Fig. 250.

Niech będzie dany punkt A, na płaszczyźnie danéy; potrzeba z punktu A, wyprowadzić liniią prostą do płaszczyzny danéy prostopadłą.

Wziąwszy w jakiémkolwiek położéniu nad płaszczyzną daną punkt B, z niego do téyże danéy płaszczyzny wyprowadźmy liniią prostą prostopadłą BC, (XI. XI.) przez punkt zaś A, do linii prostéy BC, wyprowadźmy liniią równoległą AD (XXXI. I.). Ponieważ dwie liniie prosté AD, CB, są równoodległé, iedna zaś z nich liniia prostá BC, iest prostopadłą do danéy płaszczyzny, będzie i drugá liniia prostá AD, do płaszczyzny danéy prostopadłą (VIII. XI.). Z punktu więc danégo na danéy płaszczyźnie wyprowadzoná iest liniia prostá do danéy płaszczyzny prostopadłá. C. B. d. R.

PODANIE XIII.

TWIERDZENIE.

Z punktu danégo na płaszczyźnie danéy nié można z jednéy strony wyprowadzić dwóch liniy prostych do téyże płaszczyzny prostopadłych: i z punktu danégo nad płaszczyzną, iednę tylko można wyprowadzić liniią prostą do danéy płaszczyzny prostopadłą. Fig. 231.

Przypuściwszy bowiém, że to bydź może, z punktu danégo A, na płaszczyźnie danéy, wyprowadźmy z jednéy strony dwie liniie prosté AB, AC, prostopadłé do danéy płaszczyzny; i poprowadźmy płaszczyznę przez liniie prosté BA, AC, która z płaszczyzną daną przetnie się w linii prostéy (III. XI.) tą niech będzie liniia prostá DAE, więc liniie prosté AB, AC, DAE, na iednéy są płaszczyźnie, a ponieważ liniia prostá CA, iest prostopadłą do płaszczyzny danéy, będzie prostopadłą i do wszystkich liniy prostych, na płaszczyźnie danéy poprowadzonych iéy się dotykaiących. Dotyká się zaś iéy liniia prostá DAE, znáyduiącá się na danéy płaszczyźnie; kąt zatém CAE, iest prosty, dlá téyże saméy przyczyny iest prosty i kąt BAE, więc kąt CAE, iest równy kątowi na téyże saméy płaszczyźnie BAE, co bydź nié może; z punktu przeto danégo na płaszczyźnie danéy nié możná z jednéy strony wyprowadzić dwóch liniy prostych do téyże saméy płaszczyzny prostopadłych. Równie i z punktu nad płaszczyzną danégo, iedna tylko może bydź wyprowadzoná liniia prostá do płaszczyzny danéy prostopadłá. Gdyby albowiém z jednego punktu mogły bydź wyprowadzoné dwie prostopadłé, té byłyby między sobą równoległé (VI. XI.); co bydź nié może. Jedna zatém tylko może bydź wyprowadzoná. C. B. d. D.

PODANIE XIV.

TWIERDZENIE.

Płaszczyzny, do których taż sama liniia prostá iest prostopadłá są równoległé. Fig. 232.

Niech liniia prostá AB, będzie prostopadłą do każdéy z dwóch płaszczyzn CD, EF. Powiadám: że téż płaszczyzny są równoodległé.

Gdyby albowiém nie były równoodległé przedłużoné zeszłyby się, i spólném ich przecięciém będzie liniia prostá; niech nią będzie liniia prosta GH, na któréy wziąwszy punkt gdziekolwiek K, poprowadźmy liniie prosté AK, KB. Ponieważ liniia prostá AB, prostopadłą iest do płaszczyzny EF, będzie prostopadłą i do linii prostéy BK, znáyduiącéy się na płaszczyźnie EF, przedłużonéy (III. d. XI.) dlá czego kąt ABK, prosty iest, dlá téy saméy przyczyny i kąt BAK, iest prosty; a zatém tróykąta ABK, dwá kąty ABK, BAK, są równé dwóm kątóm prostym co bydź nié może (XVII. I.) płaszczyzny więc CD, EF, przedłużoné nie zeydą się z sobą: są zatém płaszczyzny CD, EF, równoległé [VIII. d. XI.]. Płaszczyzny więc do których etc. etc.

PODANIE XV.

TWIERDZENIE.

Jeżeli dwie liniie prosté dotykaiącé się, są równoodległé względém dwóch liniy prostych dotykaiących się, na odmiénnéy zaś z piérwszémi położonych płaszczyźnie: będą i płaszczyzny przechodzącé przez téż liniie prosté równoodległé względém siebie. Fig. 233.

Niechay dwie liniie prosté dotykaiącé się AB, BC, będą równoodległé względém dwóch liniy prostych dotykaiących się DE, EF, na odmiénnéy z piérwszémi położonych płaszczyźnie; powiadám: że płaszczyzny przez ABC, DEF, przechodzącé, przedłużoné, nie zeydą się z sobą.

Z punktu B, (XI. XI.) do płaszczyzny przechodzącéy przez DEF, wyprowadźmy liniią prostopadłą BG, spotykaiącą płaszczyznę w punkcie G, a przez punkt G, poprowadźmy liniią prostą GH, równoodległą względém linii prostéy ED, do linii zaś prostéy EF, liniią równoodległą GK. Ponieważ więc liniia prostá BG, prostopadłą iest do płaszczyzny przez liniie prosté DE, EF, przechodzącéy, będzie prostopadłą i do wszystkich liniy prostych iéy się dotykaiących, a na téyże saméy płaszczyźnie poprowadzonych (III. def. XI.) dotyká się zaś iéy każdá z dwóch liniy prostych GH, GK, na téy saméy płaszczyźnie znáyduiących się, prostym więc iest każdy z dwóch kątów BGH, BGK, aże liniia prostá BA, iest równoodległá względém linii prostéy GH, (IX. XI.) każdá albowiém z nich iest równoodległá względém linii prostéy DE, nie na téyże saméy z nią płaszczyźnie. Kąty GBA, BGH, są równé dwóm kątóm prostym (XXIX. I.) prosty zaś iest kąt BGH, więc i kąt GBA, będzie prosty, dlá czego liniia prostá GB, iest prostopadłą do linii prostéy BA; dlá téyże saméy przyczyny i liniia prostá GB, prostopadłą iest do linii prostéy BC. Ponieważ więc liniia prostá GB, prostopadłą iest do dwóch liniy prostych BA, BC, przecinaiących się nawzaiém, będzie liniia prostá GB, prostopadłą do płaszczyzny przez liniie prosté BA, BC, poprowadzonéy (IV. XI.) lecz iest prostopadłą i do płaszczyzny przez liniie prosté, DE, EF, poprowadzonéy; więc liniia prostá BG, iest prostopadłą do dwóch płaszczyzn przez ABC, DEF, przechodzących, płaszczyzny zaś do których taż sama liniia prostá iest prostopadłą, są równoodległé (XIV. XI.); płaszczyzna zatém przechodzącá przez AB, BC, iest równoodległą do płaszczyzny przez DE, EF, przechodzącéy. Jeżeli więc dwie liniie prosté etc. etc. Co było do dowodzéniá.

PODANIE XVI.

TWIERDZENIE.

Jeżeli dwie płaszczyzny równoodległé, przeciná trzeciá płaszczyzna, spólné tych płaszczyzn przecięciá będą równoodległé. Fig. 234.

Niechay dwie płaszczyzny równoodległé AB, CD, przecináá trzeciá płaszczyzna EFHG, spólnémi zaś tych płaszczyzn przecięciami niech będą liniie prosté EF, GH; powiadám: że liniia prostá EF, iest równoodległą od linii prostéy GH.

Gdyby albowiém té spólné przecięciá nie były równoodległé, przedłużoné zeszłyby się albo ze strony FH, albo ze strony EG. Przedłużmy ié náprzód ze strony FH, i przypuśćmy, że się zeydą w punkcie K. Ponieważ liniia prostá EFK, iest na płaszczyźnie AB, będą wszystkié punkta na linii prostéy EFK, brané, znaydować się na téyże saméy płaszczyźnie; iednym zaś z punktów na linii prostéy EFK, iest punkt K; zaczém punkt K, iest na płaszczyźnie AB, dlá téyże saméy przyczyny punkt K, iest i na płaszczyźnie CD; płaszczyzny więc AB, CD, przedłużoné zeydą się z sobą; nie schodzą się zaś będąc z założéniá równoodległémi, liniie przeto prosté EF, GH, przedłużoné nie zeydą się ze strony FH. Podobnież dowiedziémy: że liniie prosté EF, GH, przedłużoné ze strony EG, nie zeydą się. Liniie zaś prosté na téyże samém płaszczyźnie z obudwóch strón nie schodzącé się są równoodległé. Więc liniia prostá EF, iest równoodległá od linii prostéy GH. Jeżeli więc dwie płaszczyzny etc. etc. C. B. d. D.

PODANIE XVII.

TWIERDZENIE.

Jeżeli dwie liniie prosté przecięté są przez płaszczyzny równoodległé, przecinaią się proporcyonalnie. Fig. 235.

Niechay dwie liniie prosté AB, CD, przez płaszczyzny równoodległé GH, KL, MN, przecięté będą w punktach A, E, B, C, F, D; powiadám: że iak się má AE do EB, tak się má CF do FD.

Poprowadźmy liniie prosté AC, BD, AD, niech liniia prostá AD, spotyká płaszczyznę

KL, w punkcie X. i poprowadźmy liniie prosté EX, XF. Ponieważ dwie płaszczyzny równoodległé KL, MN, przeciná płaszczyzna EBDX, spólné tych płaszczyzn przecięciá EX, BD, są równoodległé (XVI. XI.) dlá téyże samèy przyczyny, ponieważ dwie płaszczyzny równoodległé GH, KL, przeciná trzeciá płaszczyzna AXFC, spólné tych płaszczyzn przecięciá AC, XF, są równoodległé; aże do iednégo z boków tróykąta ABD, toiest do boku BD, poprowadzoná iest liniia równoodległá EX, iest: iak AE do EB, tak AX do XD (II. VI.). Znowu ponieważ do iednégo z boków tróykąta ADC, toiest do boku AC, poprowadzoná iest liniia równoodległá XF, będzie: iak AX do XD, tak CF do FD; z dowodzéniá zaś iest: iak AX do XD, tak AE do EB; iak zatém AE do EB, tak CF do FD (XI. V.). Jeżeli więc dwie liniie prosté etc. etc. C. B. d. D.

PODANIE XVIII.

TWIERDZENIE.

Jeżeli liniia prostá iest prostopadłą do iakiéy płaszczyzny, i wszystkié przez tęż liniią prostą przechodzącé płaszczyzny, będą do téyże samey płaszczyzny prostopadłé. Fig. 236.

Niech liniia prostá AB, będzie do płaszczyzny danéy prostopadłá, powiadám: że wszystkié płaszczyzny przez liniią prostą AB, przechodzącé, będą do téyże saméy płaszczyzny prostopadłé.

Płaszczyznę przez liniią prostą AB, poprowadzoną przedłużmy, i niech spólném płaszczyzny DE, z płaszczyzną daną przecięciém, będzie liniia prostá CE, na którém przecięciu wziąwszy punkt gdziekolwiek F, z niego na płaszczyźnie DE, wyprowadźmy do linii prostéy CE, liniią prostopadłą FG. Ponieważ liniia prostá AB, iest do płaszczyzny danéy prostopadłą, będzie i do wszystkich liniy prostych iéy się dotykaiących a na płaszczyźnie danéy poprowadzonych, prostopadłą (III. d. XI.); dla czego téż iest prostopadłą do linii prostéy CE. Kąt więc ABF, iest prosty; lecz i kąt GFB, iest prosty, więc liniia prostá AB, iest równoodległą od linii prostéy FG, (XXVIII. I.) iest zaś liniia prostá AB, do płaszczyzny danéy prostopadłą, zaczém i liniia prostá FG, będzie do téyże saméy płaszczyzny prostopadłą (VIII. XI.) lecz płaszczyzna iest prostopadłą do płaszczyzny, kiedy do spólnégo płaszczyzn przecięciá wyprowadzoné liniie prostopadłé, na iednéy z płaszczyzn, są do płaszczyzny drugiéy prostopadłémi (IV. d. XI.) do spólnégo zaś płaszczyzn przecięciá CE, na iednéy płaszczyźnie DE, wyprowadzoná prostopadłá FG, dowiedzioná iest bydź prostopadłą do płaszczyzny danéy; więc płaszczyzna DE, iest prostopadłą do płaszczyzny danéy. Podobnież dowiedzie się, że i wszystkié przez liniią prostą AB, przechodzącé płaszczyzny, są do danéy płaszczyzny prostopadłé. Jeżeli więc liniia prostá etc. etc. C. B. d. D.

PODANIE XIX.

TWIERDZENIE.

Jeżeli dwie płaszczyzny przecinaiącé się nawzaiém są prostopadłé do iakiéy płaszczyzny; i spólné przecięcié płaszczyzn będzie prostopadłé do téyże saméy płaszczyzny. Fig. 237.

Niechay dwie płaszczyzny przecinaiącé się nawzaiém AB, BC, będą prostopadłé do danéy płaszczyzny; spolném zaś tych płaszczyzn przecięciém niech będzie liniia prostá BD, powiadám: że liniia prostá BD, iest prostopadłą do danéy płaszczyzny.

Przypuściwszy bowiém, że liniia prostá BD, nie iest prostopadłą do danéy płaszczyźny, z punktu D, wyprowadźmy na płaszczyznie AB, prostopadłą DE, do linii prostéy AD, na płaszczyźnie zaś BC, do linii prostéy DC, prostopadłą DF. Ponieważ płaszczyzna AB, iest do płaszczyzny danéy prostopadłą, a do spólnégo tych płaszczyzn przecięciá wyprowadzoná iest na płaszczyźnie AB, liniia prostopadłá DE, będzie liniia prostá DE, prostopadłą do płaszczyzny danéy (IV. def. XI.). Dowiedziémy podobnież, że i liniia prostá DF, prostopadłą iest do płaszczyzny danéy, z jednégo przeto punktu D, wyprowadzoné są dwie liniie prosté, do płaszczyzny danéy z jednéy strony prostopadłé, co bydź nié może (XIII. XI.) do płaszczyzny więc danéy z punktu D, nié może bydź inná liniia prostopadłá wyprowadzoná, prócz linii prostéy DB, którá iest spolném płaszczyzn AB, BC, przecięciém, iest zatém liniia prostá DB, do płaszczyzny danéy prostopadłá. Jeżeli więc dwie płaszczyzny etc. etc. C. B. d. D.

PODANIE XX.

TWIERDZENIE.

Jeżeli kąt bryłowy zawarty iest trzéma kątami płaskiémi; dwa którékolwiek z nich wzięté, większé są od kąta trzeciégo. Fig. 238.

Niech będzie kąt bryłowy przy A, zawarty trzéma kątami płaskiémi BAC, CAD, DAB, Powiadám: że z kątów BAC, CAD, DAB, dwa którékolwiek wzięté, większé są od kąta trzeciégo.

Jeżeli albowiém kąty BAC, CAD, DAB, są między sobą równé, oczywistá iest, że dwa którékolwiek większé są od kąta trzeciégo. Jeżeli zaś téż kąty są nierówné, przypuśćmy że kąt BAC, nie iest mnieyszym od każdégo z dwóch pozostałych, większym zaś od kąta DAB: na linii prostéy AB, i przy punkcie na niéy A, wykréślmy kątowi DAB, (XXIII. I.) na płaszczyźnie przez liniie prosté BA, AC, przechodzącéy, równy kąt BAE: weźmy oráz liniią prostą AE, równą lini prostéy AD; i przez punkt E, poprowadzoná liniia prostá BEC, niech przeciná liniie prosté AB, AC, w punktach B, C, poprowadźmy nakoniec liniie prosté DB, DC. Ponieważ liniia prostá DA, iest równá linii prostéy AE, spólną zaś iest liniia prostá AB; są dwie liniie prosté DA, AB, równé dwóm liniióm prostym EA, AB, i kąt DAB, iest równy kątowi BAE; podstawa więc DB, iest równá podstawie BE, (IV. I.) aże dwie liniie prosté BD, DC, są większé od linii prostéy CB, (XX. I.) z których liniia prostá BD, z okazaniá równą iest linii prostéy BE; będzie pozostałá liniia prostá DC, większá od pozostałéy linii prostéy EC, ponieważ zaś liniia prostá DA, iest równá linii prostéy AE, i spólną iest liniia prostá AC, lecz podstawa DC, większá iest od podstawy EC, będzie kąt DAC, większy od kąta EAC, (XXV. I.) a z wykréśléniá kąt DAB, iest równy kątowi BAE, zaczém dwa kąty DAB, DAC, większé są od kąta BAC; iest zaś kąt BAC, nie mnieyszy od każdégo z dwóch kątów DAB, DAC, więc kąt BAC, razém z jednym z tych dwóch kątów, będzie większy od pozostałégo trzeciégo. Jeżeli więc kąt bryłowy etc. etc. C. B. d. D.

PODANIE XXI.

TWIERDZENIE.

Każdy kąt bryłowy zawarty iest kątami płaskiémi, mnieyszémi od cztérech kątów prostych. Fig. 239.

Niech náprzód kąt bryłowy przy A, zawarty będzie trzéma kątami płaskiémi BAC, CAD, DAB, powiadám: że kąty BAC, CAD, DAB, mnieyszé są od cztérech kątów prostych.

Weźmy na każdéy z liniy prostych AB, AC, AD, punkta gdziekolwiek B, C, D, i poprowadźmy liniie prosté BC, CD, DB, ponieważ kąt bryłowy przy B, zawarty iest trzéma kątami płaskiémi CBA, ABD, DBC, dwa którékolwiek z nich większé są od kąta trzeciégo (XX. XI.) kąty więc CBA, ABD, większé są od kąta DBC, dlá téyże saméy przyczyny i kąty BCA, ACD, większé są od kąta DCB: kąty zaś CDA, ADB, większé są od kąta BDC, dlá czego sześć kątów CBA, ABD, BCA, ACD, CDA, ADB, większé są od trzech kątów DBC, BCD, CDB, lecz trzy kąty DBC, BCD, CDB, są równé dwóm kątóm prostym (XXXII. I.) sześć więc kątów CBA, ABD, BCA, ACD, CDA, ADB, są większé od dwóch kątów prostych, a ponieważ każdégo z tróykątów ABC, ACD, ADB, trzy kąty, są równé dwóm kątóm prostym, będą trzech tróykątów dziewięć kątów CBA, BAC, ACB, ACD, CDA, DAC, ADB, DBA, BAD, rówńé sześciu kątóm prostym, z których dziewięciu kątów, sześć CBA, ACB, ACD, CDA, ADB, DBA, są większé od dwóch kątów prostych, pozostałé więc trzy kąty BAC, CAD, DAB, kąt bryłowy zawiéraiącé, mnieyszé są od cztérech kątów prostych.

Lecz niech będzie kąt bryłowy przy A, zawarty iląkolwiek kątami płaskiémi BAC, CAD, DAE, EAF, FAB, będą té wszystkié razém mnieyszé od cztérech kątów prostych. Niech płaszczyzna iaká spotyká się z płaszczyznami na których się znáyduią kąty, i niech spólnémi iéy przecięciami z témiż płaszczyznami będą liniie prosté BC, CD, DE, EF, FB. Ponieważ kąt bryłowy przy B, zawarty iest trzéma kątami płaskiémi CBA, ABF, FBC, dwa którékolwiek większé są od trzeciégo (XX. XI.); kąty więc CBA, ABF, większé są od kąta FBC, dlá téy samésy przyczyny i dwa kąty płaskié przy każdym z punktów C, D, E, F, które są kątami przy podstawach tróykątów, maiących spólny wiérzchołek przy A, większé są od kąta trzeciégo przy tymże samym punkcie, który kąt iest kątém wielokąta BCDEF. Wszystkié zatém kąty przy podstawach tróykątów razém wzięté, są większé od wszystkich kątów wielokąta. Ponieważ zaś wszystkié kąty tróykątów razém wzięté, równé są dwóm kątóm prostym, tylé razy powtórzonym, ilé iest tróykątów (XXXII. I.) to iest ilé iest boków wielokąta BCDEF; wszystkié zaś kąty wielokąta wráz z cztéréma kątami prostémi, są téż równé dwóm kątóm prostym tylé razy powtórzonym, ilé iest boków wielokąta (I. w. XXXII. I.) będą wszystkié tróykątów kąty, równé wszystkim kątóm wielokąta, wráz z cztéréma kątami prostémi. Wszystkié zaś kąty przy podstawach tróykątów, większé są z okazaniá od wszystkich kątów wielokąta, więc pozostałé tróykątów kąty, toiest té, którémi kąt bryłowy przy A, iest zawarty, mnieyszé są od cztérech kątów prostych. Każdy więc kąt bryłowy zawarty iest kątami płaskiémi mnieyszémi od cztérech kątów prostych. C. B. d. D.

PODANIE XXII.

TWIERDZENIE.

Jeżeli są trzy kąty płaskié, z których dwa którékolwiek większé są od trzeciégo, i liniie prosté obéymuiącé téż kąty, są między sobą równé; może bydź wykréślony tróykąt z liniy prostych łączących boki równé trzech kątów. Fig. 240.

Niech będą trzy kąty płaskié ABC, DEF, GHK, z których dwa którékolwiek większé są od trzeciégo; niech zaś té kąty, zawarté będą równémi prostémi liniiami AB, BC, DE, EF, GH, HK, i poprowadźmy liniie prosté AC, DF, GK, powiadám: że z liniy prostych AC, DF, GK, może bydź wykréślony tróykąt, toiest: że dwie którékolwiek z tych liniy prostych większé są od trzeciéy.

Jeżeli kąty przy B, E, H, są równé; będą równé i liniie prosté AC, DF, GK, (IV. I.) i dwie każdé większé od trzeciéy. Lecz niech będą kąty przy B, E, H, nie równé, i niech kąt przy B, nie będzie mnieyszy od każdégo z dwóch przy E, H; nie iest więc mnieyszá i liniia prostá AC, od każdéy z dwóch liniy prostych DF, GK, (IV. lub XXIV. I.) i równie oczywistá, że liniia prostá AC, wráz z jedną z dwóch liniy prostych DF, GK, większá iest od pozostałéy trzeciéy; powiadám: że i liniie prosté DF, GK, większé są od linii prostéy AC. Wykréślmy na linii prostéy AB, i przy punkcie na niéy B, (XXIII. I.) kątowi GHK, równy kąt ABL, a wziąwszy liniią prostą BL, równą iednéy z liniy prostych AB, BC, DE, EF, GH, HK, poprowadźmy liniie prosté AL, LC. Ponieważ dwie liniie prosté AB, BL, są równé dwóm liniióm prostym GH, HK, iedna drugiéy, i zawiéraią kąty równé, będzie podstawa AL, równá podstawie GK, a ponieważ kąty przy E, H, większé są od kąta ABC, z których kąt GHK, iest równy kątowi ABL, będzie kąt pozostały przy E, większy od kąta LBC; że zaś dwie liniie prosté LB, BC, są równé dwóm liniióm prostym DE, EF, iedna drugiéy, i kąt DEF, większy od kąta LBC, będzie podstawa DF, większá od podstawy LC, (XXIV. I.) a z okazaniá iest liniia prostá GK, równá linii prostéy AL, więc liniie prosté DF, GK, są większé od liniy prostych AL, LC; le z liniie prosté AL, LC, większé są od linii prostéy AC (XX. I.); tém bardziéy więc liniie prosté DF, GK, większé są od linii prostéy AC. Dlá czego z liniy prostych AC, DF, GK, dwie którékolwiek większé są od pozostałéy trzeciéy; może zatém z liniy (XXII. I.) prostych, równych liniióm prostym AC, DF, GK, bydź wykréślony tróykąt. C. B. d. D.

PODANIE XXIII.

ZAGADNIENIE.

Z trzech danych kątów płaskich, z których dwa którékolwiek większé są od trzeciégo, wykréślić kąt bryłowy; potrzeba zaś aby trzy kąty dané, mnieyszé były od cztérech kątów prostych. Fig. 241.

Niech będą dané tróykąty płaskié ABC, DEF, GHK, z których dwa którékolwiek większé są od trzeciégo, i niech téż trzy kąty mnieyszé będą od cztérech kątów prostych. Potrzeba z kątów równych kątóm ABC, DEF, GHK, wykréślić kąt bryłowy.

Zróbmy liniie prosté AB, BC, DE, EF, GH, HK, równémi względém siebie, i poprowadźmy liniie prosté AC, DF, GK. Z liniy prostych, równych liniióm prostym AC, DF, GK, może bydź wykréślony tróykąt (XXII. XI.). Wykréślmy tróykąt LMN, (XXII. I.) tak żeby liniia prostá AC, była równá linii prostéy LM, liniia zaś prostá DF, równá linii prostéy MN, i prócz tego liniia prostá GK, równá linii prostéy NL; i około tróykąta LMN, opiszmy koło LMN (V. IV.). Weźmy śrzodek tegoż koła X, który będzie, albo wewnątrz tróykąta LMN, albo na iednym z boków iego, albo zewnątrz.

Niech będzie naprzód śrzodek koła wewnątrz tróykąta LMN, poprowadźmy liniie prosté LX, MX, NX, powiadám: że liniia prostá AB, większá iest od linii prostéy LX. Jeżeli bowiém nie iest, będzie liniia prostá AB, albo równá linii prostéy LX, albo od niéy mnieyszą: niech naprzód będzie iéy równą. Ponieważ liniia prostá AB, iest równá linii prostéy LX, a iest liniia prostá AB, równá linii prostéy BC, i liniia prostá LX, równá linii prostéy XM, dwie liniie prosté AB, BC, będą równé dwóm liniióm prostym LX, XM, iedna drugiéy, i podstawa AC, z wykréśléniá iest równą podstawie LM; dlá czego kąt ABC, iest równy kątowi LXM, (VIII. I.) dlá téy samév przyczyny i kąt DEF, iest równy kątowi MXN, kąt zaś GHK, równy kątowi NXL, trzy zatém kąty ABC, DEF, GHK, są równé trzém kątóm prostym LXM, MXN, NXL; lecz trzy kąty LXN, MXN, NXL, są równé cztérém kątóm prostym (II. w. XV. I.) więc i trzy kąty ABC, DEF, GHK, równé będą cztérém kątóm prostym, a są z założéniá mnieyszé od cztérech kątów prostych, co bydź nié może; nie iest przeto liniia prostá AB, równá linii prostéy LX. Powiadám ieszczé: że liniia prostá AB, ani iest mnieyszą od linii prostéy LX. Jeżeli albowiém bydź to może, niech będzie mnieyszą: na linii prostéy LM, ze strony śrzodka koła X, wykréślmy tróykąt LOM, którégo boki LO, OM, niech będą równé liniióm prostym AB, BC; ponieważ podstawa LM, równá iest podstawie AC, będzie kąt LOM, równy kątowi ABC, iest zaś z założéniá liniia prostá AB, toiest liniia prostá LO, mnieyszá od linii prostéy LX, dlá czego liniie prosté LO, MO, padną wewnątrz tróykąta LXM, gdyby albowiém przystały do liniy prostych LX, XM, lub padały zewnątrz, byłyby równé lub większé od liniy prostych LX, XM, (XXI. I.) kąt zatém LOM, toiest kąt ABC, większy iest od kąta LXM: podobnież dowiedzie się, że kąt DEF, większy iest od kąta MXN, i kąt GHK, większy od kąta NXL, trzy więc kąty ABC, DEF, GHK, są od trzech kątów LXM, MXN, NXL, toiest od cztérech kątów prostych większé, kąty zaś ABC, DEF, GHK, z założéniá są mnieyszé od cztérech kątów prostych, co bydź nié może; nie iest przeto liniia prostá AB, mnieyszą od linii prostéy LX; dowiedziono zaś, że nie iest ani iéy równą, większą iest zatém liniia prostá AB, od linii prostéy LX.

Lecz niechay śrzodek koła będzie na iednym z boków tróykąta, toiest, na boku MN, w punkcie X, i poprowadźmy liniią prostą LX; powiadám znowu: że liniia prostá AB, większá iest od linii prostéy LX. Jeżeli bowiém nie iest, będzie liniia prostá AB, albo równá linii prostéy LX, albo od niéy mnieyszá. Niech náprzód będzie równá; dwie więc liniie prosté AB, BC, toiest: DE, EF, są równé dwóm liniióm prostym MX, XL, toiest linii prostéy MN, lecz liniia prostá MN, z wykréśléniá iest równá linii prostéy DF, więc liniie prosté DE, EF, są równé linii prostéy DF, co bydź nié może (XX. I.) nie iest przeto liniia prostá AB, równą linii prostéy LX, tém bardziéy ani mnieyszą; iest przeto liniia prostá AB, większą od linii prostéy LX.

Niech nakoniec koła śrzodek X, będzie zewnątrz tróykąta LMN, poprowadźmy liniie prosté LX, MX, NX; powiadám: że i w tém położéniu śrzodka koła, liniia prostá AB, większą iest od linii prostéy LX. Jeżeli bowiém nie iest, będzie liniia prostá AB, albo równá linii prostéy LX, albo od niéy mnieyszá. Niech náprzód będzie równá, podobnież iak w piérwszym przypádku okaże się: że kąt ABC, iest równy kątowi MXL, kąt zaś GHK, równy kątowi LXN; cały więc kąt MXN, iest rówwny dwóm kątóm ABC, GHK. Lecz kąty ABC, GHK, razém wzięté, większé są od kąta DEF; za zém i kąt MXN, większy iest od kąta DEF. Ponieważ zaś dwie liniie prosté DE, EF, są równé dwóm liniióm prostym MX, XN, i podstawa DF, iest równá podstawie MN, będzie kąt MXN, równy kątowi DEF, a iest z dowodzéniá i większy, co bydź nié może; nie iest przeto liniia prostá AB, równá linii prostéy LX. Powiadám: że liniia prostá AB, ani iest mnieyszą od linii prostéy LX; ieżeli bowiém bydź to może, niech będzie mnieyszá, będzie więc, iak w piérwszym przypádku dowiedzioné było, kąt ABC, większy od kąta MXL, kąt zaś GHK, większy od kąta LXN. Wykréślmy na linii prostéy BC, i przy punkcie na niéy B, kątowi GHK, równy kąt CBP, weźmy liniią prostą BP, równą linii prostéy HK, i poprowadźmy liniie prosté CP, AP. Ponieważ liniia prostá CB, iest równá linii prostéy GH, są więc dwie liniie prosté CB, BP, równé dwóm liniióm prostym GH, HK, i zawiéraią kąty równé; zaczém podstawa CP, iest równá podstawie GK, czyli LN: w tróykątach zaś równoramiennych ABC, MXL, ponieważ kąt ABC, większy iest od kąta MXL, będzie kąt MLX, przy podstawie, większy od kąta przy podstawie ACB, (XXXII. I.), dlá téyże samėy przyczyny, ponieważ kąt GHK, toiest: kąt CBP, większy iest od kąta LXN, będzie i kąt XLN, większy od kąta BCP, cały zatém kąt MLN, większy: iest od kąta całégo ACP, ażc dwie liniie prosté ML, LN, są równé dwóm liniióm prostym AC, CP, a kąt MLN, większy iest od kąta ACP, będzie i podstawa MN, większá od podstawy AP, (XXIV. I.) lecz liniia prostá MN, równá iest linii prostéy DF; przeto i liniia prostá DF, większą będzie od linii prostéy AP. Ponieważ więc dwie liniie prosté DE, EF, są równé dwóm liniióm prostym AB, BP, iedna drugiéy, i podstawa DF, większá od podstawy AP, będzie kąt DEF, większy od kąta ABP, (XXV. I.) równy zaś iest kąt ABP, kątóm ABC, CBP, toiest kątóm ABC, GHK, więc kąt DEF, większy iest od kątów ABC, GHK, lecz i mnieyszy, co bydź nié może: liniia przeto prostá AB, nie iest mnieyszą od linii prostéy LX; dowiedziono zaś że ani iest iéy równą, więc liniią prostá AB, większą iest od linii prostéy LX.

Wyprowadźmy z punktu X, do płaszczyzny koła LMN, liniią prostopadłą XR, (XII. XI.) a ponieważ we wszystkich przypadkach dowiedzioná iest liniia prostá AB, większá od linii prostéy LX, niech prostopadłá XR, má długość boku kwadratu pokazuiącégo różnicę między kwadratami z liniy prostych AB, LX, i poprowadźmy liniie prosté RL, RM, RN. Ponieważ liniia prostá RX, prostopadłá iest do płaszczyzny koła LMN, będzie prostopadłą i do każdéy z liniy prostych LX, MX, NX, (III. def. XI.) i ponieważ liniia prostá LX, równá iest linii prostéy XM, spólną zaś pod kątami prostémi iest liniia prostá XR, będzie podstawá RL, równá podstawie RM; dlá téy saméy przyczyny, i liniia prostá RN, równá iest każdéy z dwóch liniy prostych RL, RM; trzy zatém liniie prosté RL, RM, RN, są między sobą równé; a ponieważ kwadrat z linii prostéy RX, okazuie różnicę między kwadratami z liniy prostych AB, LX, będzie kwadrat z AB, równy kwadratowi z LX, XR. Kwadratóm zaś z liniy prostych LX, XR, (XLVII. I.) równy iest kwadrat z linii prostéy RL, kąt albowiém LXR, iest prosty; więc kwadrat z linii prostéy AB, równy iest kwadratowi z linii prostéy RL; a zatém liniia prostá AB, iest równą linii prostéy RL. Lecz linii prostéy AB, równá iest każdá z liniy prostych BC, DE, EF, GH, HK, linii zaś prostéy RL, równá iest każdá z dwóch liniy prostych RM, RN, każdá więc z liniy prostych AB, BC, DE, EF, GH, HK, iest równá każdéy z liniy prostych RL, RM, RN: aże dwie liniie prosté RL, RM, są równé dwóm liniióm prostym AB, BC, i podstawa LM, iest równá podstawie AC; będzie kąt LRM, równy kątowi ABC: dlá téy saméy przyczyny i kąt MRN, kątowi DEF, kąt zaś NRL, kątowi GHK, iest równy. Z trzech więc kątów płaskich LRM, MRN, NRL, równych trzém kątóm danym ABC, DEF, GHK, wykréślony iest kąt bryłowy przy R. C. B. d. R.

PODANIE

PRZYBRANE.

Jakim zaś sposobém wynayduie się liniia prostá RX, za bok kwadratu pokazuiącégo różnicę między kwadratami z liniy prostych AB, LX, okaże następuiącé wykréślénié.

Na linii prostéy większéy AB, zakréślmy półkole ACB, w którégo okręgu z punktu A, poprowadźmy cięciwę AC, równą linii prostéy mnieyszéy LX, i poprowadźmy ieszcze liniią prostą CB. Ponieważ kąt ACB, iest w półkolu, będzie więc kąt ACB, prosty (XXXI. III.): zatem kwadrat z linii prostéy AB, iest równy kwadratóm z liniy prostych AC, CB, (XLVII. I.) przeto kwadrat z linii prostéy AB, większy iest od kwadratu z linii prostéy AC, o kwadrat z linii prostéy CB: czyli co iedno iest, kwadrat z linii prostéy CB, iest różnicą między kwadratami z liniy prostych AB, AC, iest zaś liniia prostá AC, z wykréśléniá równá linii prostéy LX, więc dawszy linii prostéy RX, długość równą linii prostey CB, będzie kwadrat z linii prostéy RX, różnicą między kwadratami z liniy prostych AB, LX. C. B. d. R.

PODANIE A.

TWIERDZENIE.

Jeżeli są dwa kąty bryłowé, z których każdy zawarty iest trzéma kątami płaskiémi równémi, każdy każdému, w obudwóch kątach bryłowych; płaszczyzny, na których się kąty równé znáyduią, będą równie względém siebie nachyloné. Fig. 242.

Niech będą dwa kąty bryłowé przy A, B, niech kąt przy A, będzie zawarty trzéma kątami płaskiémi CAD, CAE, EAD; kąt zaś przy B, trzéma kątami płaskiémi FBG, FBH, HBG, z których kąt CAD, iest równy kątowi FBG; kąt CAE, kątowi FBH; i kąt EAD, kątowi HBG; będą płaszczyzny na których są kąty równé, równie względém siebie nachylone.

Weźmy na linii prostéy AC, punkt gdziekolwiek K, i z punktu K, do linii prostéy AC, na płaszczyźnie CAD, wyprowadźmy liniią prostopadłą KD, na płaszczyźnie zaś CAE, do téyże saméy linii prostéy AC, i z tegoż samégo punktu K, prostopadłą KL. Kąt zatém DKL, iest pochyłością płaszczyzny CAD, do płaszczyzny CAE (VI. def. XI.). Na linii prostéy BF, wziąwszy liniią prostą BM, równą linii prostéy AK, z punktu M, wyprowadźmy na płaszczyznach FBG, FBH, liniie prosté MG, MN, prostopadłé do linii prostéy BF; będzie zatém kąt GMN, pochyłością płaszczyzny FBG, do płaszczyzny FBH. Poprowadźmy liniie prosté LD, NG; ponieważ w tróykątach KAD, MBG, równé są kąty KAD, MBG, tak iako i kąty AKD, BMG, każdy bowiém z nich iest prosty, i są boki AK, BM, kątóm równym przyległé, między sobą równé, będzie liniia prostá KD, równá linii prostéy MG, liniia zaś prostá AD, równá linii prostéy BG (XXVI. I.); dlá téy samé przyczyny w tróykątach KAL, MBN, będzie liniia prostá KL, równá linii prostéy MN, liniia zaś prostá AL, równá linii prostéy BN: w tróykątach LAD, NBG, są dwie liniie prosté LA, AD, równé z dowodzéniá dwóm liniióm prostym NB, BG, iedna drugiéy, i równé zawiéraią kąty, podstawa więc LD, iest równá podstawie NG (IV. I.). W tróykątach nakoniec KLD, MNG, dwie liniie prosté DK, KL, są równé dwóm liniióm prostym GM, MN, i iest podstawa LD, równá podstawie NG; kąt więc DKL, równy iest kątowi GMN, (VIII. I.) iest zaś kąt DKL, pochyłością płaszczyzny CAD, do płaszczyzny CAE, a kąt GMN, pochyłością płaszczyzny FBG, do płaszczyzny FBH, są przeto téż płaszczyzny równie względém siebie nachyloné, (VII. def. XI.) i podobnież dowiedziémy, że i pozostałé płaszczyzny na których się kąty równé znáyduią, są równie względém siebie pochyloné. Jeżeli więc są dwa kąty bryłowé etc. etc. C. B. d. D.

PODANIE B.

TWIERDZENIE.

Jeżeli są dwa kąty bryłowé, z których każdy zawarty iest trzéma kątami płaskiémi równémi względém siebie i podobnie położonémi, będą kąty bryłowé między sobą równé. Fig. 213.

Niech będą kąty bryłowé przy punktach A, B; i niech kąt przy A, zawarty będzie trzéma kątami płaskiémi CAD, CAE, EAD; kąt zaś przy B, trzéma kątami płaskiémi FBG, FBH, HBG: z których kąt CAD, iest równy kątowi FBG; kąt CAE, kątowi FBH, i kąt EAD, kątowi HBG; będzie kąt bryłowy przy A, równy kątowi bryłowému przy B.

Przyłożywszy bowiém kąt bryłowy przy A, do kąta bryłowégo przy B, tak: żeby z przystaniém płaskiégo kąta CAD, do kąta płaskiégo FBG, punkt A, padł na punkt B, i żeby liniia prostá AC, przystała do linii prostéy BF, przystanie i liniia prostá AD, do linii prostéy BG, dlá równości kątów CAD, FBG. Ponieważ zaś pochyłość płaszczyzny CAE, do płaszczyzny CAD, równá iest pochyłości płaszczyzny FBH, do płaszczyzny FBG, (A. XI.) a płaszczyzna CAD, przystaie do płaszczyzny FBG, przystanie i płaszczyzna CAE, do płaszczyzny FBH: i dlá tego liniia prostá AE, przystanie do linii prostéy BH, iest bowiém kąt CAE, równy kątowi FBH. Z okazaniá zaś liniia prostá AD, przystaie do linii prostéy BG; dlá czego płaszczyzna EAD, przystanie do płaszczyzny HBG. Kąt zatém bryłowy przy A, przystaie do kąta bryłowégo przy B, i są między sobą równé (VIII. p. I.) C. B. d. D.

PODANIE C.

TWIERDZENIE.

Bryły zawarté płaszczyznami podobnémi, co do wielości i wielkości równémi, i podobnie położonémi, i w których żádén kąt bryłowy nie zawiérá się więcéy iak trzéma kątami płaskiémi, są między sobą równé i podobné. Fig. 244.

Niech będą bryły AG, KQ, zawarté płaszczyznami podobnémi co do wielości i wielkości równémi i podobnie położonémi, i niech będzie płaszczyzna AC, podobná i równá płaszczyźnie KM; płaszczyzna AF, równá i podobná płaszczyźnie KP; płaszczyzna BG, równá i podobná płaszczyźnie LQ; płaszczyzna GD, równá i podobná płaszczyźnie QN; płaszczyzna DE, równá i podobná płaszczyźnie NO; i nakoniec płaszczyzna FH, równá i podobná płaszczyźnie PR. Będzie bryła AG, równá i podobná bryle KQ.

Ponieważ kąt bryłowy przy A, zawarty iest trzéma kątami płaskiémi BAD, BAE, EAD, które, iedén drugiému, z założénia równé są kątóm płaskim LKN, LKO, OKN, zawieraiącym kąt bryłowy przy K; będzie kąt bryłowy przy A, równy kątowi bryłowému przy K (B. XI.). Dowiedzie się podobnież, że i pozostałé w bryłach kąty bryłowé, są między sobą równé. Przyłożywszy więc bryłę AG, do bryły KQ, tak naprzód żeby z przystaniém figury płaskiéy AC, do figury płaskiéy KM, liniia prostá AB, padła na liniią prostą KL, przystanie figura AC, do figury KM; są bowiém równé i podobné sobie; przystaną zatém liniie prosté AD, DC, CB, do liniy prostych KN, NM, ML, iedna do drugiéy, i przystaną punkta A, D, C, B, do punktów K, N, M, L, kąt zaś bryłowy przy A, przystanie do kąta bryłowégo przy K; dlá czego i płaszczyzna AF, przystanie do płaszczyzny KP, i figura AF, do figury KP, są bowiém równé i podobné między sobą. Przystaną więc liniie prosté AE, EF, FB, do liniy prostych KO, OP, PL, i punkta E, F, do punktów O, P. Podobnież okaże się: że figura AH, przystanie do figury KR; liniia prostá DH, do linii prostéy NR; i punkt H, do punktu R. A ponieważ kąt bryłowy przy B, równy iest kątowi bryłowému przy L; okaże się podobnież, że figura BG, przystaie do figury LQ, i liniia prostá CG, do linii prostéy MQ, i punkt G, do punktu Q. Ponieważ więc płaszczyzny, i boki wszystkié bryły AG, przystaią do płaszczyzn i boków bryły KQ, będzie bryła AG, równá i podobná bryle KQ. Podobnież dowodzi się, że inné iakékolwiek bryły zawarté płaszczyznami podobnémi co do wielości i wielkości równémi i podobnie położonémi, w których żádén kąt bryłowy nie iest zawarty więcéy iak trzéma kątami płaskiémi, są równé i podobné między sobą. C. B. d. D.

PODANIE XXIV.

TWIERDZENIE.

Jeżeli bryła zawartá iest sześcią płaszczyznami równoodległémi, przeciwné w takiéy bryle płaszczyzny, będą podobnémi i równémi równoległobokami. Fig. 245.

Niechay bryła CDGH, zawiérá się równoodległémi płaszczyznami AC, GF, BG, CE FB, AE; powiadám: że płaszczyzny przeciwné, są podobnémi i równémi sobie równoległobokami.

Ponieważ dwie płaszczyzny równoodległé BG, CE, przecięté są od trzeciéy płaszczyzny AC, spólné tych płaszczyzn przecięciá są równoodległé. Więc liniia prostá AB, iest równoodległą od linii prostéy CD. Znowu ponieważ dwie płaszczyzny równoodległé BF, AE, przeciná płaszczyzna AC, spólné tych płaszczyzn przecięciá, są równoodległé(XVI.XI.) iest zatém liniia prostá AD, równoodległá od linii prostéy BC. Z okazaniá zaś liniia prostá AB, iest równoodległá od linii prostéy CD; więc czworokąt AC, będzie równoległobokiém. Dowiedziemy podobnież że i każdy z czworokątów CE, FG, GB, BF, AE, iest równoległobokiém. Poprowadźmy liniie prosté AH, DF, ponieważ liniia prostá AB, względém linii prostéy DC, i liniia prostá BH, względém linii prostéy CF, są równoodległé; będą dwie liniie prosté AB, BH, schodzącé się, równoodległé, względém dwóch liniy prostych DC, CF, schodzących się, a na odmiénnéy płaszczyźnie położonych; równé przeto kąty zawiérać będą (X. XI.). Kąt więc ABH, iest równy kątowi DCF, ponieważ zaś dwie liniie prosté AB, BH, są równé dwóm liniióm prostym DC, CF, i kąt ABH, iest równy kątowi DCF; będzie podstawa AH, równá podstawie DF, i tróykąt ABH, będzie równy tróykątowi DCF (IV. I.). A iest tróykąt ABH, połową równoległoboku BG, (XXXIV. I.) tróykąt znowu DCF, połową równoległoboku CE; będzie zatém równoległobok BG, równy i podobny równoległobokowi CE. Dowiedziémy podobnie, że i równoległobok AC, równoległobokowi GF, i równoległobok AE, równoległobokowi BF, iest równy i podobny. Jeżeli więc bryła etc. etc. C. B. d. D.

PODANIE XXV.

TWIERDZENIE.

Jeżeli równoległościan przecięty iest płaszczyzną równoodległą od płaszczyzn przeciwnych; będą bryły z przecięciá otrzymané, miéć się do siebie, iak ich podstawy. Fig. 246.

Niech równoległościan ABCD, przecięty będzie płaszczyzną EV, równoodległą od płaszczyzn przeciwnych AR, HD; powiadám: że iak podstawa AEFY, do podstawy EHCF, tak się má bryła ABFV, do bryły EGCD.

Przedłużmy liniią prostą AH, z obudwóch stron, i zróbmy linii prostéy EH, ilékolwiek równych liniy prostych HM, MN; linii zaś prostéy EA, równych ilékolwiek liniy prostych AK, KL. Dopełniymy równoległoboków LO, KY, HQ, MS, i brył LP, KR, HU, MT. Ponieważ są między sobą równé liniie prosté LK, KA, AE, będą i równoległoboki LO, KY, AF, między sobą równé, będą i równoległoboki KX, KB, AG, i ieszcze równoległoboki LZ, KP, AR, między sobą równé, są bowiém przeciwné. Dlá téy samély przyczyny i równoległoboki EC, HQ, MS, są między sobą równé, tak iako i równoległoboki (XXXVI. I.) HG, HI, IN; i prócz tego równoległoboki (XXIV. XI.) HD, MU, NT, są między sobą równé. Trzy więc płaszczyzny bryły LP, równé i podobné są, trzém płaszczyznóm bryły KR, iako też bryły AV. Lecz trzy płaszczyzny, trzém przeciwnym są równé i podobné, i żádén z kątów bryłowych tychże brył nie iest zawarty więcéy iak trzéma kątami płaskiémi. Trzy zatém bryły LP, KR, AV, będą między sobą równé, (C. XI.) dlá téy saméy przyczyny, i trzy bryły ED, HU, MT, są między sobą równé. Jak wielokrotná iest więc podstawa LF, względém podstawy AF; tak wielokrotná iest i bryła LV, względém bryły AV. Dlá téy saméy przyczyny, iak wielokrotná iest podstawa NF, względém podstawy HF; tak wielokrotná iest i bryła NV, względém bryły ED. I ieżeli podstawa LF, iest równą, większą lub mnieyszą od podstawy NF; będzie też bryła LV, równá, większá lub mnieyszá od bryły NV. Do cztérech więc wielkości, toiest: do dwóch podstáw AF, FH, i do dwóch brył AV, ED, wzięté są iakożkolwiek równie wielokrotné, toiest podstawa LF, i bryła LV, względém podstawy AF i bryły AV; i znowu wzięté są inné iakożkolwiek równie wielokrotné, toiest: podstawa FN, i bryła NV, względém podstawy FH, i bryły ED; i dowiedziono, że ieżeli podstawa FL, przewyższá podstawę FN, iest iéy równą lub od niéy mnieyszą; przewyższá téż i bryła LV, bryłę NV, iest iéy równą lub od niéy mnieyszą. Jest zatém iak podstawa AF, do podstawy FH, tak bryła AV, do bryły ED (V. def. V.). Jeżeli więc równoległościan etc. etc. C. B. d. D.

PODANIE XXVI.

ZAGADNIENIE.

Na danéy linii prostéy, i przy punkcie na niéy danym, wykréślić kąt bryłowy, równy kątowi danému bryłowému, trzéma kątami płaskiémi zawartému. Fig. 247.

Niech będzie daná liniia prostá AB, dany zaś na niéy punkt A, i dany kąt bryłowy przy D, trzéma kątami płaskiémi EDC, EDF, FDC, zawarty; potrzeba na danéy linii prostéy AB, i przy danym na niéy punkcie A, danému kątowi bryłowému przy D, równy kąt bryłowy wykréślić.

Weźmy na linii prostéy DF, punkt gdziekolwiek F, z którégo do płaszczyzny przez liniie prosté ED, DC, przechodzącéy, wyprowadźmy liniią prostopadłą FG (XI. XI.): ta niech spotyká płaszczyznę w punkcie G, poprowadźmy liniią prostą DG; na linii prostéy AB, przy punkcie na niéy danym A, kątowi EDC, wykréślmy równy kąt BAL; kątowi zaś EDG, wykréślmy kąt równy BAK, (XXIII. I.) a wziąwszy liniią prostą AK, równą linii prostéy DG, z punktu K, do płaszczyzny BAL, wyprowadźmy (XII. XI.) prostopadłą KH, daiąc iéy długość równą linii prostéy GF, i poprowadźmy liniią prostą HA; powiadám: że kąt bryłowy przy A, zawarty kątami płaskiémi BAL, BAH, HAL, równy iest kątowi bryłowému przy D, zawartému kątami płaskiémi EDC, EDF, FDC.

Weźmy równé liniie prosté AB, DE, i poprowadźmy liniie prosté HB, KB, FE, GE. Ponieważ liniia prostá FG, iest prostopadłą do płaszczyzny danéy, będzie prostopadłą i do wszystkich liniy prostych, iéy się dotykaiących, na danéy płaszczyźnie poprowadzonych (III. def. XI.). Każdy więc z dwóch kątów FGD, FGE, iest prosty: i dlá téy saméy przyczyny każdy z dwóch kątów HKA, HKB, iest prosty. Ponieważ dwie liniie prosté KA, AB, są równé dwóm liniióm prostym GD, DE, iedna drugiéy, i równé kąty zawiéraią; będzie podstawa BK, równá podstawie EG (IV. I.); iest zaś i liniia prostá KH, równá linii prostéy GF, i kąty prosté zawiéraią, będzie więc liniia prostá HB, równá linii prostéy FE. Znowu ponieważ dwie liniie prosté AK, KH, są równé dwóm liniióm prostym DG, GF, i zawiéraią kąty prosté; będzie podstawa AH, równá podstawie DF; a iest liniia prostá AB, równá linii prostéy DE; dwie więc liniie prosté HA, AB, są równé dwóm liniióm prostym FD, DE, i podstawa HB, iest równá podstawie FE. Będzie zatém kąt BAH, równy kątowi EDF, (VIII. I.). Dlá téy saméy przyczyny i kąt HAL, iest równy kątowi FDC. Wziąwszy liniie prosté AL, DC, równé, poprowadźmy liniie proste KL, HL, GC, FC. Ponieważ cały kąt BAL, iest równy całému kątowi EDC, z których kąt BAK, z wykréśléniá iest równy kątowi EDG, będzie kąt pozostały KAL, równy pozostałému kątowi GDC. Ponieważ więc dwie liniie prosté KA, AL, są równé dwóm liniióm prostym GD, DC, i równé zawiéraią kąty: będzie podstawa KL, równá podstawie GC; iest zaś i liniia prostá KH, równá linii prostéy GF, dwie zatém liniie prosté LK, KH, są równé dwóm liniióm prostym CG, GF; i kąty prosté zawiéraią; będzie podstawa HL, równá podstawie FC. Znowu ponieważ dwie liniie prosté HA, AL, są równé dwóm liniióm prostym FD, DC, i podstawa HL, równá podstawie FC, będzie kąt HAL, równy kątowi FDC. Ponieważ więc trzy kąty płaskié BAL, BAH, HAL, zawiéraiącé kąt bryłowy przy A, równé są trzém kątóm płaskim EDC, EDF, FDC, zawiéraiącym kąt bryłowy przy D, każdy każdému, i podobnie są położoné; będzie kąt bryłowy przy A, równy kątowi bryłowému przy D, (B. XI.). Na danéy więc linii prostéy i przy danym na niéy punkcie, danému kątowi bryłowému trzéma kątami płaskiémi zawartému, równy kąt bryłowy iest wykréślony. C. B. d. R.

PODANIE XXVII.

ZAGADNIENIE.

Na danéy linii prostéy, danému równoległościanowi podobny, i podobnie położony równoległościan, wykréślić. Fig. 248.

Niech będzie daná liniia prostá AB, dany zaś równoległościan CD, potrzeba na danéy linii prostéy AB, danému równoległościanowi CD, podobny, i podobnie położony równoległościan wykréślić.

Zróbmy na linii prostéy AB, i przy danym na niéy punkcie A, kątowi bryłowému przy C, równy kąt (XXVI. XI.) zawarty kątami płaskiémi BAK, KAH, HAB, tak, iżby kąt BAK, kątowi ECG: kąt KAH, kątowi GCF, i ieszcze kąt HAB, był równy kątowi FCE, i niech będzie iak EC, do CG, tak BA do AK, iak zaś GC do CF, tak KA do AH, (XII. VI.) będzie więc przez odmianę porównywaniá wielkości naprzemian iak EC do CF, tak BA, do AH (XXII. V.). Dopełniymy równoległoboku BH, i bryły AL. Ponieważ iest iak EC do CG, tak BA do AK, a zatém około kątów równych ECG, BAK, są boki proporcyonalné: podobny więc iest równoległobok BK, równoległobokowi EG, dlá téyże samémy przyczyny równoległobok KH, podobny iest równoległobokowi GF, i równoległobok HB, podobny równoległobokowi FE, trzy przeto równoległoboki bryły AL, podobné są trzém równoległobokóm bryły CD; lecz trzy równoległoboki są podobné, i równé trzém sobie przeciwnym (XXIV. XI.) i ponieważ kąty płaskié zawiéraiącé kąty bryłowé, w obudwóch bryłach są między sobą równé i podobnie położoné, będą i kąty bryłowé między sobą równé (B. XI.): więc bryła AL, będzie podobną bryle CD, (XI. d. XI.). Na danéy przeto linii prostéy AB, danému równoległościanowi CD, wykréślony iest podobny, i podobnie położony równoległościan AL. C. B. d. R.

PODANIE XXVIII.

TWIERDZENIE.

Jeżeli równoległościan przecięty iest płaszczyzną przez przekątne płaszczyzn przeciwnych poprowadzoną, przecięty będzie tąż płaszczyzną na dwie równé części. Fig. 249.

Niech będzie równoległościan AB, a płaszczyzn sobie przeciwnych AH, GB, przekątnémi niech będą liniie prosté DE, CF, ponieważ każdá z liniy prostych CD, FE, równoodległá iest od linii prostéy GA, na odmiénnéy z niémi płaszczyźnie: będą liniie prosté CD, FE, równoodległé między sobą (IX. XI.) dlá czego przekątné CF, DE, są na płaszczyźnie tychże liniy równoodległych, i będą między sobą równoodległé (XVI. XI.). Powiadám: że bryła AB, przez płaszczyznę CDEF, iest przeciętą na dwie równé części.

Ponieważ tróykąt CGF, równy iest tróykątowi CBF, tróykąt zaś DAE, równy tróykątowi DHE (XXXIV. I.); a iest równoległobok CA, równy równoległobokowi BE, (XXIV. XI.) są bowiém sobie przeciwné; i równoległobok GE, iest równy równoległobokowi CH; będzie graniastosłup zawarty dwoma tróykątami CGF, DAE, i trzéma równoległobokami CA, GE, EC, równy graniastosłupowi zawartému dwoma tróykątami CBF, DHE, i trzéma równoległobokami BE, CH, EC (C. XI.); té bowiém dwa graniastosłupy zawarté są płaszczyznami podobnémi, co do wielości i wielkości równémi i podobnie położonémi, a żádén z kątów bryłowych tychże graniastosłupów, nie iest zawarty więcéy iak trzéma kątami płaskiémi. Całá więc bryła AB, przeciętá iest przez płaszczyznę CDEF, na dwie równé części. C. B. d. D.

PODANIE XXIX.

TWIERDZENIE.

Równoległościany stoiącé na téyże saméy podstawie, i maiącé téż samę wysokość, w których boki scián pobocznych są zakończoné na tychże samych liniiach prostych, są między sobą równé. Fig. 250. 1°, 2do, 3tio.

Niech będą na téyże saméy podstawie AB, równoległościany AH, AK, i niech maią tęż samę wysokość; boki zaś scián pobocznych, toiest: liniie prosté AF, AG, LM, LN, CD, CE, BH, BK, niechay będą zakończoné na tychże samych liniiach prostych FN, DK. Powiadám: że równoległościan AH, równy iest równoległościanowi AK.

Niech náprzód równoległoboki DG, HN, przeciwné podstawie AB, maią bok spólny HG. Ponieważ równoległościan AH, przecięty iest płaszczyzną AGHC, przez przekątné AG, CH, płaszczyzn przeciwnych ALGF, CBHD; będzie równoległościan AH, przez płaszczyznę AGHC, na dwie równé części przecięty (XXVIII. XI.). Jest przeto równoległościan AH, podwóyny graniastosłupa AH, zawartégo tróykątami ALG, CBH, dlá téyże saméy przyczyny, ponieważ równoległościan

AK, przecięty iest płaszczyzną LGHB, przez przekątné LG, BH, płaszczyzn przeciwnych ALNG, CBKH, będzie równoległościan AK, podwóyny tegoż samégo graniastosłupa zawartégo tróykątami ALG, CBH. Równoległościan więc AH, równy iest równoległościanowi AK.

Niech znowu przeciwné podstawie równoległoboki DM, EN, nié maią boku spólnégo. Ponieważ każdá z figur CH, CK, iest równoległobokiém: będzie liniia prostá CB, równá każdéy z dwóch liniy prostych DH, EK, (XXXIV. I.) więc i liniia prostá DH, iest równá linii prostéy EK: przydáwszy lub odiąwszy spólną liniią prostą HE, będzie liniia prostá DE, równá linii prostéy HK. Dlá czego i tróykąt CDE, iest równy tróykątowi BHK (XXXVIII. I.). Równoległobok zaś DG, iest równy równoległobokowi HN (XXXVI. I.). Dlá téy saméy przyczyny i tróykąt AFG, równy iest tróykątowi LMN, i iest równoległobok CF, równy równoległobokowi BM, równoległobok zaś CG, równoległobokowi BN, (XXIV. XI.): są bowiém przeciwné. Więc i graniastosłup, zawarty dwoma tróykątami AFG, CDE, i trzéma równoległobokami AD, DG, GC, iest równy (C. XI.) graniastosłupowi zawartému dwoma tróykątami LMN, BHK, i trzéma równoległobokami BM, MK, KL. Odiąwszy więc graniastosłup LMNBHK, od bryły, któréy podstawą iest równoległobok AB, a ścianą iéy przeciwną FDKN, i z téy saméy bryły graniastosłup AFGCDE: będzie pozostałá bryła, toiest równoległościan AH, równy pozostałéy bryle, toiest równoległościanowi AK. Równoległościany więc etc. etc. Co było do dowodzéniá.

PODANIE XXX.

TWIERDZENIE.

Równoległościany stoiącé na téyże saméy podstawie, i maiącé tęż samę wysokość, w których boki scián pobocznych, nie są zakończoné na tychże samych liniiach prostych, są między sobą równé. Fig. 251.

Niech będą na téyże saméy podstawie AB,

równoległościany CM, CN, i niech maią tęż samę wysokość: boki zaś scián pobocznych AF, AG; LM, LN; CD, CE; BH, BK, nie są na tychże samych liniiach prostych zakończoné; powiadám: że równoległościan CM, iest równy równoległościanowi CN.

Przedłużmy liniie prosté FD, MH, i liniie prosté NG, KE, aż do zeyściá się ich z sobą w punktach O, P, Q, R, i poprowadźmy liniie prosté AO, LP, BQ, CR. Ponieważ płaszczyzna LBHM, równoodległá iest od płaszczyzny sobie przeciwnéy ACDF, a płaszczyzna LBHM, iest tą, na któréy znáyduią się liniie prosté równoodległé LB, MH, PQ, i na któréy iest téż i figura BLPQ; płaszczyzna zaś ACDF, iest tą, na któréy się znáyduią liniie prosté równoodległé AC, FD, OR, i na któréy iest téż figura CAOR; będą figury BLPQ, CAOR, na płaszczyznach między sobą równoodległych. Podobnież: ponieważ płaszczyzna ALNG, iest równoodległą względém przeciwnéy sobie płaszczyzny CBKE, a płaszczyzna ALNG, iest tą, na któréy znáyduią się liniie prosté równoodległé AL, OP, GN, i na któréy téż iest figura ALPO; płaszczyzna zaś CBKE, iest tą, na któréy są linije prosté równoodległé CB, RQ, EK, i na któréy téż iest figura CBQR, będą figury ALPO, CBQR, na płaszczyznach między sobą równoodległych. Są prócz tego płaszczyzny ACBL, ORQP, między sobą równoodległé; bryła więc CP, iest równoległościanném. Równoległościan zaś CM, którégo podstawa ACBL, a przeciwny iéy równoległobok FDHM, równy iest (XXIX. XI.) równoległościanowi CP, którégo podstawą iest równoległobok ACBL, a iéy przeciwny równoległobok ORQP: stoią bowiém na téyże saméy podstawie, i boki ścián pobocznych, toiest liniie prosté AF, AO, CD, CR, LM, LP, BH, BQ, są na tychże samych liniiach prostych, FR, MQ, zakończoné; a równoległościan CP, iest równy równoległościanowi CN: stoią bowiém na téyże saméy podstawie AC, BL, i boki ścián pobocznych, toiest liniie prosté AO, AG, LP, LN; CR, CE, BQ, BK, są na tychże samych liniiach prostych ON, RK, zakończoné; więc równoległościan CM, równy iest równoległościanowi CN. Równoległościany więc etc. etc. C. B. d. D.

PODANIE XXXI.

TWIERDZENIE.

Równoległościany, które stoią na równych podstawach, i maią tęż samę wysokość, są między sobą równé. Fig. 252. 1°, 2do, 3tio,

Niech na równych podstawach AB, CD, stoią równoległościany AE, CF, i niech maią tęż samę wysokość, powiadám: że równoległościan AE, iest równy równoległościanowi CF.

Niechay náprzód boki ścián pobocznych będą prostopadłémi do podstáw AB, CD. Ustáwmy zaś té równoległościany tak: aby podstawy ich były na téyże saméy płaszczyźnie, i żeby podstáw boki CL, LB, były na téyże saméy linii prostéy. Liniia zatém prostá LM, która iest bokiém ściany poboczném, prostopadłym w punkcie L, będzie bokiém spólnym w równoległościanach AE, CF, (XIII. XI.). Jnné zaś boki ścián pobocznych niech będą iak liniie prosté AG, HK, BE, DF, OP, CN. A náprzód niech kąt ALB, równy będzie kątowi CLD; będą przeto na téyże samey linii prostéy, liniie prosté AL, LD. Przedłużmy liniie prosté OD, HB, aż do ich zeyściá się w punkcie Q, i dopełniymy równoległościanu LR, którégo podstawą iest równoległobok LQ, a iednym z boków ścián pobocznych liniia prostá LM. Ponieważ równoległobok AB, iest równy równoległobokowi CD: będzie iak podstawa AB, do podstawy LQ, tak podstawa CD, do téyże podstawy LQ, (VII. V.). J ponieważ równoległościan AR, przecięty iest płaszczyzną LMEB, równoodległą względém płaszczyzn AK, DR: będzie iak podstawa AB, do podstawy LQ, tak bryła AE, do bryły LR, (XXV. XI.). Dlá téy saméy przyczyny, ponieważ równoległościan CR, przecięty iest płaszczyzną LF, równoodległą względém płaszczyzn CP, BR: będzie iak podstawa CD, do podstawy LQ, tak bryła CF, do bryły LR. Lecz iak podstawa AB, do podstawy LQ, tak była z dowodzéniá podstawa CD, do podstawy LQ. Jak więc bryła AE, do bryły LR, tak bryła CF, do bryły LR. Jest przeto równoległościan AE, równy równoległościanowi CF, (IX. V.).

Niech znowu równoległościany SE, CF, stoią na równych podstawach SB, CD, niech maią też samę wysokość, i boki ścián pobocznych niech będą prostopadłé do podstáw: lecz ustawiwszy podstawy SB, CD, na iednéy płaszczyźnie, tak: żeby podstáw boki CL, LB, były na téyże saméy linii prostéy: niech kąt SLB, będzie równy kątowi CLD: będzie równoległościan SE, równy równoległościanowi CF. Przedłużmy liniie prosté DL, TS, aż do zeyściá się ich w punkcie A, a przez punkt B, poprowadźmy liniią prostą BH, równoległą względém linii prostéy DA: przedłużonych zaś liniy prostych HB, OD, zeyście się niech będzie w punkcie Q; i dopełniymy równoległościanów AE, LR. Równoległościan AE, którégo podstawą iest równoległobok LE, a przeciwną ścianą równoległobok AK, równy iest równoległościanowi SE, którego podstawą iest równoległobok LE, a ścianą przeciwną równoległobok SX (XXIX. XI.): stoią albowiém na téyże samév podstawie LE, maią tęż samę wysokość, a boki ścián pobocznych, toiest liniie proste LA, LS, BH, BT; MG, MV, EK, EX, są na tychże samych liniiach prostych AT, GX, zakończoné. Ponieważ zaś równoległobok AB, równy iest równoległobokowi SB, (XXXV. I.) maią bowiém tęż samę podstawę LB, i są w tychże samych równoodległych LB, AT; a iest podstawa SB, równá podstawie CD, będzie podstawa AB, równá podstawie CD; i iest kąt ALB, równy kątowi CLD; będzie więc z wyższégo okazaniá równoległościan AE, równy równoległościanowi CF. Równoległościan zaś AE, dowiedziono, że iest równy równoległościanowi SE: więc i równoległościan SE, iest równy równoległościanowi CF.

Niech nakoniec boki ścián pobocznych AG, HK, BE, LM, CN, RS, DF, OP, nie będą prostopadłémi do podstáw AB, CD, powiadám:

że równoległościan AE, iest równy równoległościanowi CF. Z punktów (XI. XI.) G, K, E, M; N, S, F, P; do płaszczyzn, na których są podstawy AB, CD, wyprowadźmy liniie prostopadłé GQ, KT, EV, MX; NY, SZ, FT, PU; té niech spotykaią płaszczyzny w punktach Q, T, V, X; Y, Z, I, U, i poprowadźmy liniie prosté QT, TV, VX, XQ; YZ, ZI, IU, UY. Ponieważ liniie prosté GQ, KT, są prostopadłé do téyże saméy płaszczyzny, będą względém siebie równoodległé (VI. I.) a są względém siebie równoodległé liniie prosté MG, EK; płaszczyzny więc MQ, ET, z których iedna przechodzi przez liniie prosté MG, GQ, a drugá przez liniie prosté EK, KT, równoległé względém piérwszych, i nie na téyże saméy płaszczyźnie, są względém siebie równoodległé (XV. XI.): dlá téyże saméy przyczyny i płaszczyzny MV, GT, są względém siebie równoodległé. Bryła więc QE, iest równoległościaném. Podobnież okaże się: że bryła YF, iest równoległościaném. Jest zaś z poprzedzaiącégo dowodzéniá równoległościan EQ, równy równoległościanowi FY: na równych albowiém stoią podstawach MK, PS, maią tęż samę wysokość, i boki ścián pobocznych są prostopadłé do podstáw; a równoległościan EQ, równy iest równoległościanowi AE (XXIX. lub XXX. XI.): stoią bowiém na téyże saméy podstawie, i maią tęż samę wysokość. Więc i równoległościan AE, będzie równy równoległościanowi CF. Równoległościany więc etc. etc. C. B. d. D.

PODANIE XXXII.

TWIERDZENIE.

Równoległościany maiącé tęż samę wysokość, są między sobą iak podstawy. Fig. 253.

Niech będą równoległościany AB, CD, maiącé tęż samę wysokość. Powiadám: że są między sobą iak podstawy, toiest: iak podstawa AE, do podstawy CF, tak równoległościan AB, do równoległościanu CD.

Przystáwmy do linii prostéy FG, równoległobokowi AE, równy równoległobok FH; tak, żeby kąt FGH, był równy kątowi LCG;

(w. XLV. I.) i dopełniymy równoległościanu GK, którégo podstawą niech będzie równoległobok FH, a iednym z boków ścián pobocznych niech będzie liniia prostá FD. Równoległościan więc AB, iest równy równoległościanowi GK, (XXXI. XI.) na równych albowiém stoią podstawach, i maią też samę wysokość. Aże równoległościan CK, przecięty iest płaszczyzną DG, równoległą względém płaszczyzn sobie przeciwnych; będzie iak podstawa HF, do podstawy FC, tak równoległościan HD, do równoległościanu DC, (XXV. XI.). Lecz podstawa FH, równá iest podstawie AE, a równoległościan GK, równy równoległościanowi AB; iest zatém iak podstawa AE, do podstawy CF, tak równoległościan AB, do równoległościanu CD. Dlá czego równoległościany etc. etc. C. B. d. D.

Wniosek. Graniastosłupy więc tróykątné, maiącé tęż samę wysokość, są między sobą iak podstawy.

Niech albowiém groniastosłupy, których podstawy są tróykąty AEM, CFG, i im przeciwné NBO, PDQ, maią tęż samę wysokość;

dopełniymy równoległoboków AE, CF, i ró-wnoległościanów AB, CD, z których w piérwszym niech linia prostá MO, będzie iednym z boków ściany poboczné y, liniia zaś prostá GQ, iednym z boków ściany poboczné y w drugim. Ponieważ równoległościany AB, CD, téż samę maią wysokość, będą między sobą iak podstawa AE, do podstawy CF: dlá czego graniastosłupy, które ich są połowami (XXVIII. XI.) są międy sobą iak podstawa AE, do podstawy CF, toiest iak tróykąt AEM, do tróykąta CFG.

PODANIE XXXIII.

TWIERDZENIE.

Równoległościany podobné, są między sobą w stosunku tróymnożnym boków odpowiadaiących. Fig. 254.

Niech będą równoległościany podobné AB, CD; bok zaś AE, niech będzie odpowiadaiącym bokowi CF. Powiadám: że równoległościan AB, do równoległościanu CD, są między sobą w stosunku tróymnożnym boków AE, CF.

Przedłużmy linie prosté AE, GE, HE, tak, żeby liniia prostá EK, była równá linii prostéy CF; liniia prostá EL, równá linii prostéy FN, i ieszcze liniia prostá EM, równá linii prostéy FR: i dopełniymy równoległoboku KL, iako téż równoległościanu KO. Ponieważ dwie liniie prosté KE, EL, są równé dwóm liniióm prostym CF, FN, i kąt KEL, równy iest kątowi CFN, bo i kąt AEG, iest równy kątowi CFN: dlá podobiéństwa równoległościanów AB, CD, będzie i równoległobok KL, podobny i równy równoległobokowi CN: dlá téyże saméy przyczyny i równoległobok MK, równy i podobny iest równoległobokowi CR, i nadto równoległobok OE, równy iest i podobny równoległobokowi FD. Trzy więc równoległoboki równoległościanu KO, są równé i podobné trzém równoległobokóm równoległościanu CD. Lecz trzy równoległoboki trzém sobie przeciwnym są równé i podobné (XXIV. XI.); równoległościan zatém KO, równy iest i podobny równoległościanowi

CD, (C. XI.). Dopełniymy równoległoboku GK, a na równoległobokach GK, KL, iako na podstawach dopełniymy równoległościanów EX, LP, téyże samey wysokości z równoległościaném AB, tak iednak, żeby liniia prostá EH, była iednym z boków ścián pobocznych w tych równoległościanach. Ponieważ dlá podobieństwa równoległościanów AB, CD, iest, iak AE do CF, tak EG do FN, i EH do FR; równá zaś iest liniia prostá FC, linii prostéy EK, i liniia prostá FN, równá linii prostéy EL, i liniia prostá FR, równá linii prostéy EM. Będzie więc, iak AE do EK, tak EG do EL, i HE do EM; lecz iak AE do EK, tak (I. VI.) równoległobok AG, do równoległoboku GK; iak zaś GE do EL, tak równoległobok GK, do równoległoboku KL, i iak HE do EM, tak równoległobok PE, do równoległoboku KM. Jak więc równoległobok AG, do równoległoboku GK, tak równoległobok GK, do równoległoboku KL, i tak równoległobok PE, do równoległoboku KM. Lecz iak równoległobok AG, do równoległoboku GK, tak równoległościan AB, do równoległościanu EX, (XXV. XI.). Jak zaś równoległobok GK, do równoległoboku KL, tak równoległościan EX, do równoległościanu PL; i iak równoległobok PE, do równoległoboku KM, tak równoległościan PL, do równoległościanu KO. Jak przeto równoległościan AB, do równoległościanu EX, tak równoległościan EX, do równoległościanu PL, i tak równoległościan PL, do równoległościanu KO. Jeżeli zaś cztéry wielkości są ciągło proporcyonalné, mówi się: że piérwszá do czwártéy, iest w stosunku tróymnożnym piérwszéy do drugiéy. Więc i równoległościan AB, do równoległościanu KO, iest w stosunku tróymnożnym równoległościanów AB, EX. Lecz iak równoległościan AB, do równoległościanu EX, tak równoległobok AG, do równoległoboku GK, i tak liniia prostá AE, do linii prostéy EK. Dlá czego i równoległościan AB, do równoległościanu KO, iest w stosunku tróymnożnym liniy prostych AE, EK. Równy zaś iest równoległościan KO, równoległościanowi CD; i liniia prostá EK, równá linii prostéy CF;

więc i równoległościan AB, do równoległościanu CD, iest w stosunku tróymnożnym boków odpowiadaiących sobie AE, CF. Równoległościany więc etc. etc. C. B. d. D.

Wniosek. Wnosi się stąd oczywiście: że ieżeli cztéry liniie prosté są ciągło proporcyonalné, iak piérwszá má się do czwartéy; tak się má równoległościan z piérwszéy do równoległościanu podobnégo, i podobnie wykréślonégo z drugiéy linii prostéy: ponieważ i piérwszá do czwartéy, iest w stosunku tróymnożnym piérwszéy do drugiéy (XI. def. V.)

PODANIE D.

TWIERDZENIE.

Równoległościany zawarté równokątnémi względém siebie równoległobokami, toiest których kąty bryłowé są między sobą równé, maią między sobą stosunek równy, stosunkowi złożonému ze stosunków boków swoich. Fig. 255.

Niech będą równoległościany AB, CD, z których równoległościan AB, zawarty iest równoległobokami AE, AF, AG, równokątnémi, każdy każdému; względém równoległoboków CH, CK, CL, którémi zawarty iest równoległościan CD. Będzie stosunek równoległościanu AB, do równoległościanu CD, równy stosunkowi złożonému ze stosunków boków AM do DL, AN do DK, i AO do DH.

Przedłużmy liniie prosté MA, NA, OA, do punktów P, Q, R, tak, żeby liniia prostá AP, była równá linii prostéy DL, liniia prostá AQ, równá linii prostéy DK, i liniia prostá AR, równá linii prostéy DH, i dopełniymy równoległościanu AX, maiącégo się zawiérać równoległobokami AS, AT, AV, podobnémi, i równémi każdy każdému, względém równoległoboków CH, CK, CL. Równoległościan zatém AX, równy iest równoległościanowi CD (C. XI.). Dopełniymy ieszczé równoległościanu AY, którégo podstawą iest równoległobok AS, a iednym z boków ścián pobocznych liniia prostá AO. Wziąwszy iakiéykolwiek długości liniią prostą a, wynaydźmy: iak MA do AP, tak a, do linii prostéy b: iak zaś NA do AQ, tak b, do linii prostéy c: i iak OA do AR, tak c, do linii prostéy d. Ponieważ równoległobok AE, równokątny iest z równoległobokiém AS; będzie równoległobok AE, do równoległoboku AS, iak liniia prostá a, do linii prostéy c: to bowiém w podaniu XXIII. Xięgi szóstéy dowiedziono było. Równoległościany zaś AB, AY, zawarté między płaszczyznami równoodległémi, maią tęż samę wysokość: iest więc równoległościan AB, do równoległościanu AY, iak podstawa AE, do podstawy AS (XXXII. XI.), toiest iak liniia prostá a, do linii prostéy c: równoległościan zaś AY, iest do równoległościanu AX, iak podstawa OQ, do podstawy QR (XXV. XI.), toiest iak liniia prostá OA, do linii prostéy AR, toiest iak liniia prostá c, do linii prostéy d. Ponieważ więc równoległościan AB, má się do równoległościanu AY, iak liniia prostá a, do linii prostéy c; iak zaś równoległościan AY, do równoległościanu AX, tak liniia prostá c, do linii prostéy d; będzie przez odmianę porównywaniá wielkości naprzemian równoległościan AB, do równoległościanu AX, czyli do równoległościanu CD; iak liniia prostá a, do linii prostéy d. Stosunek zaś linii prostéy a, do linii prostéy d, złożony iest (A. def. V.) ze stosunków, a do b, b do c, i c do d, któré są równé, każdy każdému, stosunkóm boków MA do AP, NA do AQ, i OA do AR. A boki AP, AQ, AR, równé są bokóm DL, DK, DH, każdy każdému. Więc równoległościan AB, má się do równoległościanu CD, w stosunku równym stosunkowi złożonému ze stosunków boków AM do DL, AN do DK, i AO do DH. Równoległościany więc etc. etc. C. B. d. D.

PODANIE XXXIV.

TWIERDZENIE.

Równoległościanów równych, podstawy są odwrótnie proporcyonalné wysokościóm; i których równoległościanów podstawy są odwrótnie proporcyonalné wysokościóm, té równoległościany są między sobą równé. Fig. 256. 1^{o}, 2^{do}, 3^{tio}, 4^{to}, 5^{to}, et 6^{to}.

Niech będą równé równoległościany AB, CD; powiadám: że ich podstawy są odwrótnie proporcyonalné wysokościóm, toiest: że iak się má podstawa EH, do podstawy NP, tak się má wysokość równoległościanu CD, do wysokości równoległościanu AB.

Niechay náprzód boki ścián pobocznych AG, EF, LB, HK; CM, NX, OD, PR, będą prostopadłé do podstáw równoległościanów (1^{o} et 3^{tio}). Powiadám: iak podstawa EH, do podstawy NP, tak wysokość CM, do wysokości AG. Jeżeli podstawa EH, równá iest podstawie NP, ponieważ i równoległościan AB, równy iest równoległościanowi CD: będzie i wysokość CM, równá wysokości AG. Gdyby albowiém przy równych podstawach EH, NP, nie były wysokości AG, CM, równé, nie byłby równoległościan AB, równy równoległościanowi CD; są zaś z założéniá té równoległościany równé: nie iest przeto wysokość CM, nie równá wysokości AG; a zatém iest iey równá: iest więc iak podstawá EH, do podstawy NP, tak się má wysokość CM, do wysokosci AG.

Lecz niech nie będzie podstawa EH, równá podstawie NP, ale od niéy większą (2do et 4to). Ponieważ równoległościan AB, równy iest równoległościanowi CD; będzie wysokość CM, większá od wysokości AG: inaczéy albowiém nie byłyby znowu równoległościany AB, CD, równé, tak iak są z założéniá równé. Wziąwszy liniią prostą CT, równą linii prostéy AG, na podstawie NP, dopełniymy równoległościanu CV, maiącégo za wysokość liniią prostą CT. Ponieważ równoległościan AB, równy iest równoległościanowi CD, będzie iak równoległościan AB, do równoległościanu CV, tak równoległościan CD, do równoległościanu CV (VII. V.). Lecz iak równoległościan AB, do równoległościanu CV, tak podstawa EH, do podstawy NP, (XXXII. XI.) maią bowiém równoległościany AB, CV, równé wysokości; iak zaś równoległościan CD, do równoległościanu CV, tak podstawa MP, do podstawy PT (XXV. XI.), i liniia prostá

MC, do linii prostéy CT (I. VI). Jak zatém podstawa EH, do podstawy NP, tak liniia prostá MC, do linii prostéy CT. Jest zaś liniia prostá CT, równá linii prostéy AG; więc i iak podstawa EH, do podstawy NP, tak wysokość MC, do wysokości AG. Przeto równoległościanów równych AB, CD, podstawy, są odwrótnie proporcyonalné względém wysokości.

Niech znowu w równoległościanach AB, CD, podstawy będą odwrótnie proporcyonalné wysokościóm; toiest niech będzie: iak podstawa EH, do podstawy NP, tak wysokość równoległościanu CD, do wysokości równoległościanu AB; powiadám: że równoległościan AB, równy iest równoległościanowi CD. Niech podobnież náprzód boki ścián pobocznych będą prostopadłé do podstaw. Jeżeli podstáwa EH, równá iest podstawie NP: a iest iak podstawa EH do podstawy NP, tak wysokość równoległościanu CD, do wysokości równoległościanu AB: będzie wysokość równoległościanu CD, równá wysokości równoległościanu AB (A. V.). Równoległościany zaś równych podstáw i równych wysokości, są między sobą równé (XXXI. XI.). Więc równoległościan AB, równy iest równoległościanowi CD.

Lecz niech podstawa EH, nie będzie równą podstawie NP, ale od niéy większą. Ponieważ iest iak podstawa EH, do podstawy NP, tak wysokość CM, równoległościanu CD, do wysokości AG, równoległościanu AB; będzie wysokość CM, większá od wysokości AG. Weźmy liniią prostą CT, równą linii prostéy AG, i dopełniymy podobnież iak wyżéy równoległościanu CV. Ponieważ iest iak podstawa EH, do podstawy NP, tak wysokość CM, do wysokości AG: iest zaś liniia prostá AG, równá linii prostéy CT: będzie iak podstawa EH, do podstawy NP, tak wysokość MC, do wysokości CT. Lecz iak podstawa EH, do podstawy NP, tak równoległościan AB, do równoległościanu CV: równé albowiém maią wysokości równoległościany AB, CV. Jak zaś MC, do CT, tak i podstawa MP, do podstawy PT, i równoległościan CD, do równoległościanu CV. Jak więc równoległościan AB, do równoległościanu CV, tak równoległościan CD, do równoległościanu CV. Każdy przeto z równoległościanów AB, CD, do tegoż samégo równoległoscianu CV, iest w tymże samym stosunku. A zatém równoległościan AB, równy iest równoległościanowi CD. C. B. d. D.

Niech znowu boki ścián pobocznych, liniie prosté FE, BL, GA, KH; XN, DO, MC, RP; nie będą prostopadłé do podstáw równoległościanów (f. 5to et 6to). Z punktów F, B, K, G; X, D, R, M, wyprowadźmy liniie prostopadłé, do płaszczyzn podstáw EH, NP, i niech spotykaią się z témiż płaszczyznami w punktach S, Y, V, T; Q, J, U, Z. Dopełniymy brył FV, XU, któré, iak w ostatnim przypádku podaniá XXXI, téy księgi, dowiedzioné było, będą równoległościanami. Powiadám: że i przy tak założonéy równości równoległościanów AB, CD, podstawy ich są odwrótnie proporcyonalné wysokościóm, toiest: że iak podstawa EH, má się do podstawy NP, tak się má wysokość równoległościanu CD, do wysokości równoległościanu AB. Ponieważ równoległościan AB, równy iest równoległościanowi CD; równoległościan zaś AB, równy iest równoległościanowi BT, (XXIX. lub XXX. XI.) są bowiém na téyże saméy podstawie FK, i maią tęż samę wysokość: i równoległościan DC, równy iest równoległościanowi DZ: dlá téyże saméy przyczyny, będzie i równoległościan BT, równy równoległościanowi DZ. Równych równoległościanów, których boki ścián pobocznych są prostopadłé do podstáw, podstawy są odwrótnie proporcyonalné wysokościóm, iakośmy dowiedli. Jest więc iak podstawa FK, do podstawy XR, tak wysokość równoległościanu DZ, do wysokości równoległościanu BT. Lecz podstawa FK, równá iest podstawie EH, podstawa zaś XR, równá podstawie NP. Dlá czego, iak podstawa EH, do podstawy NP, tak się má wysokość równoległościanu DZ, do wysokości równoległościanu BT. Téż samé zaś są wysokości równoległościanów DZ, DC, i równoległościanów BT, BA: iest więc iak podstawa EH, do podstawy NP, tak wysokość równoległościanu DC, do wysokości równoległościanu BA. Równoległościanów przeto równych AB, CD, podstawy są odwrótnie proporcyonalné wysokościóm.

Niech znowu równoległościanów AB,CD, podstawy będą odwrótnie proporcyonalné wysokościóm, toiest: niech będzie iak podstawa EH, do podstawy NP, tak wysokość równoległościanu CD, do wysokości równoległościanu AB. Powiadám: że równoległościan AB, równy iest równoległościanowi CD. Uczyniwszy toż samo wykréślénié, ponieważ iak podstawa EH, do podstawy NP, tak wysokość równoległościanu CD, do wysokości równoległościanu AB: a podstawa EH, iest równá podstawie FK; podstawa zaś NP, równá iest podstawie XR, będzie iak podstawa FK, do podstawy XR, tak wysokość równoległościanu CD, do wysokości równoległościanu AB. Lecz téż samé są wysokości równoległościanów AB, BT, i wysokości równoległościanów CD, DZ; iest przeto: iak podstawa FK, do podstawy XR, tak wysokość równoległościanu DZ, do wysokości równoległościanu BT. Dlá czego równoległościanów BT, DZ, podstawy są odwrótnie proporcyonalné wysokościóm; boki zaś scián pobocznych są prostopadłé do podstáw. Więc iak wyżéy dowiedziono, równoległościan BT, równy iest równoległościanowi DZ: lecz równoległościan BT, równy iest równoległościanowi BA, a równoległościan DZ, iest równy równoległościanowi DC, są albowiém na tychże samych podstawach, i maią też samę wysokość. Więc i równoległościan AB, równy iest równoległościanowi CD. Co było do dowodzéniá.

PODANIE XXXV.

TWIERDZENIE.

Jeżeli maiąc dwa kąty płaskié równé, dwíe liniie prosté nad płaszczyznami tych kątów w wiérzchołkach ich schodzącé się, czynią z ramionami tychże kątów kąty iedné względém drugich równé: z punktów gdziekolwiek wziętych na tych liniiach prostych, wyprowadziwszy prostopadłé do płaszczyzn, na których się kąty płask znáyduią, i punkta, w których prostopadłé spotykaią płaszczyzny, połączywszy liniiami prostémi, z wiérzchołkami tychże kątów, kąty między piérwszémi i ostatniémi liniiami prostémi zawarté, będą między sobą równé. Fig. 257.

Niech będą dwa kąty płaskié równé BAC, EDF; z punktów A, D, niech będą wyprowadzoné nad płaszczyznami tych kątów liniie prosté AG, DM, tak: żeby z ramionami kątów czyniły kąty równé iedén drugiému, toiest kąt GAB, równy kątowi MDE, kąt zaś GAC, równy kątowi MDF; wziąwszy na liniiach prostych AG, DM, punkta gdziekolwiek G, M, i z nich wyprowadziwszy do płaszczyzn BAC, EDF, prostopadłé GL, MN, spotykaiącé się z płaszczyznami w punktach L, N: poprowadźmy liniie prosté LA, ND, powiadám: że kąt GAL, równy iest kątowi MDN.

Weźmy linii prostéy DM, równą liniią prostą AH, i z punktu H, poprowadźmy liniią prostą HK, równoodległą względém linii prostéy LG: iest zaś liniia prostá LG, prostopadłá do płaszczyzny BAC, będzie więc i liniia prostá HK, do płaszczyzny BAC, prostopadłą (VIII. XI.). Z punktów K, N, wyprowadźmy do liniy prostych AB, AC; DE, DF, prostopadłé KB, KC; NE, NF; i poprowadźmy liniie prosté HB, BC; ME, EF. Ponieważ liniia prostá HK, prostopadłą iest do płaszczyzny BAC, będzie i płaszczyzna HBK, przez liniią prostą HK, przechodzącá, prostopadłą do płaszczyzny BAC, (XVIII. XI.) na płaszczyźnie zaś BAC, poprowadzoná iest liniia prostá AB, prostopadłá do linii prostéy BK, spólnégo płaszczyzn przecięciá; dlá czego liniia prostá AB, prostopadłą iest do płaszczyzny HBK, (IV. def. XI.) i będzie prostopadłą do wszystkich liniy prostych iéy się dotykaiących, a na téy płaszczyźnie poprowadzonych (III. def. XI.). Dotyká się zaś iéy liniia prostá BH, zostaiącá na płaszczyźnie BHK; więc kąt ABH, iest prosty. Dlá téy saméy przyczyny i kąt DEM, iest prosty; zaczém kąt ABH, iest równy kątowi DEM: iest zaś i kąt HAB, równy kątowi MDE; są więc dwa tróykąty HAB, MDE, maiącé dwa kąty dwóm kątóm równé, iedén drugiému, i bok iedén równy bokowi iednému, przyległy iednému z kątów równych, toiest bok HA, równy bokowi DM; będą zatém i pozostałé boki równé pozostałym bokóm, iedén drugiému (XXVI. I.). Jest przeto liniia prostá AB, równá linii prostéy DE. Podobnież poprowadziwszy liniie prosté HC, MF, okażémy: że i liniia prostá AC, iest równą linii prostéy DF. Ponieważ więc liniia prostá AB, iest równá linii prostéy DE, i liniia prostá AC, równá linii prostéy DF; będą dwie liniie prosté BA, AC, równé dwóm liniióm prostym ED, DF: lecz i kąt BAC, iest równy kątowi EDF; podstawa więc BC, iest równá podstawie EF, i pozostałé kąty są równé pozostałym kątóm (IV. I.). Kąt zatém ABC, iest równy kątowi DEF; iest zaś i prosty kąt ABK, równy kątowi prostému DEN, dlá czego i pozostały kąt CBK, równy iest pozostałému kątowi FEN. Dlá téy saméy przy-i kąt BCK, równy iest kątowi EFN. Są zatém dwa tróykąty CBK, EFN, maiącé dwa kąty równé dwóm kątóm, iedén drugiému, i bok iedén, równy bokowi iednému, przyległy kątóm równym, toiest bok BC, rowny bokowi EF, więc miéć będą i pozostałé boki równé pozostałym bokóm (XXVI. I.). Jest przeto liniia prostá BK, równá linii prostéy EN, iest zaś i liniia prostá AB, równá linii prostéy DE, dlá czego dwie liniie prosté AB, BK, są równé dwóm liniióm prostym DE, EN, i zawiéraią kąty prosté. Podstawa więc AK, iest równá podstawie DN. A że liniia prostá AH, iest równá linii prostéy DM, będzie kwadrat z linii prostéy AH, równy kwadratowi z linii prostéy DM: lecz kwadratowi z linii prostéy AH, równé są (XLVII. I.) kwadraty z liniy prostych AK, KH; iest bowiém kąt AKH, prosty; kwadratowi zaś z linii prostéy DM, równé są kwadraty z liniy prostych DN, NM; bo kąt DNM, iest prosty; kwadraty zatém z liniy prostych AK, KH, są równé kwadratóm z liniy prostych DN, NM, z których kwadratów, kwadrat z linii prostéy AK, równy iest kwadratowi z linii prostéy DN: iest więc pozostały kwadrat z linii prostéy KH, równy pozostałému kwadratowi z linii prostéy NM; dlá czego i liniia prostá HK, iest równá linii prostéy MN. A ponieważ dwie liniie prosté HA, AK, są równé dwóm liniióm prostym MD, DN, i z dowodzéniá podstawa HK, iest równá podstawie MN; będzie kąt HAK, równy kątowi MDN, (VIII. I.). Co było do dowodzéniá.

Wniosek. Wypadá stąd oczywiście: że ieżeli są dwa kąty płaskié równé i z wiérzchołków tychże kątów nad ich płaszczyznami wyprowadzoné będą dwie liniie prosté równé, tak: iżby z ramionami kątów czyniły kąty równé iedén drugiému: prostopadłé z końców takowych liniy do płaszczyzn kątów równych wyprowadzoné, są między sobą równé.

INNE TEGOZ WNIOSKU DOWODZENIE.

Niech będą dwa kąty płaskié BAC, EDF, między sobą równé, i liniie prosté AH, DM, niech z liniiami prostémi BA, AC; i ED, DF, obéymuią kąty równé iedén drugiému, toiest kąt HAB, równy kątowi MDE, i kąt HAC, równy kątowi MDF; wyprowadźmy do płaszczyzn BAC, EDF, prostopadłé HK, MN; będzie liniia prostopadłá HK, równá linii prostopadłéy MN.

Ponieważ kąt bryłowy przy A, zawarty iest trzéma kątami płaskiémi BAC, BAH, HAC, które, każdy każdému, są równé trzém kątóm płaskim EDF, EDM, MDF, zawiéraiącym kąt bryłowy przy D; będą kąty bryłowé przy A i D, między sobą równé, i przystaną do siebie, toiest: ieżeli kąt płaski BAC, przyłożony będzie do kąta płaskiégo EDF, przystanie liniia prostá AH, do linii prostéy DM, iak dowiedzioné było w podaniu B, téy xięgi. A ponieważ liniia prostá AH, równá iest linii prostéy DM, punkt H, przystanie do punktu M, dlá czego prostopadłá HK, do płaszczyzny BAC, przystanie (XIII. XI.) do MN, prostopadłéy do płaszczyzny EDF, té bowiém płaszczyzny przystaią do siebie: iest więc liniia prostá HK, równá linii prostéy MN, C. B. d. D.

PODANIE XXXVI.

TWIERDZENIE.

Jeżeli trzy liniie prosté są proporcyonalné, równoległościan z tych trzech liniy prostych zrobiony, równy iest równoległościanowi zrobionému ze śrzedniéy linii prostéy, maiącému wszystkié ściany równé, a którychby kąt iedén bryłowy zawarty był trzéma kątami płaskiémi równémi względém kątów płaskich zawiéraiących iedén kąt bryłowy, w równoległościanie z trzech liniy prostych zrobionym. Fig. 258.

Niech będą trzy liniie proporcyonalné A, B, C, toiest; niech się má A do B, iak B do C; powiadám: że równoległościan zrobiony z trzech liniy prostych A, B, C, równy iest równoległościanowi zrobionému z linii prostéy B, równościennému, równokątnému zaś z piérwszym równoległościanem.

Niech będzie kąt bryłowy przy D, zawarty trzéma kątami płaskiémi EDF, FDG, GDE, uczyńmy każdą z liniy prostych ED, DF, DG, równą względém linii prostéy B, i dopełniymy równołegłościanu DH. Wykreśliwszy zaś liniią prostą LK, równą linii prostéy A, na linii prostéy LK, i przy punkcie na niéy K, zróbmy (XXVI. XI.) kąt bryłowy zawarty kątami płaskiémi LKM, MKN, NKL, równémi względém kątów płaskich EDF, FDG, GDE: niech liniia prostá KN, będzie rówą linii prostéy B, liniia prostá KM, rówą linii prostéy C, i dopełniymy równołegłościanu KO. Ponieważ iest: iak A do B, tak B do C: równá zaś iest liniia prostá A, linii prostéy LK, i liniia prostá B, równá każdéy z liniy prostych DE, DF, i liniia prostá C, równá linii prostéy KM; będzie, iak LK do ED, tak DF do KM: około więc kątów równych boki są odwrótnie proporcyonalné; więc równoległobok LM, iest równy równoległobokowi EF (XIV. VI.). I ponieważ dwa kąty płaskié EDF, LKM, są równé, a nad ich płaszczyznami z wiérzchołków tychże kątów wyprowadzone są dwie równé liniie prosté DG, KN, z ramionami kątów EDF, LKM, czyniącé kąty równé iedén drugiému; będą prostopadłé z punktów G, N, wyprowadzoné do płaszczyzn EDF, LKM, między sobą równé (w. XXXV. XI). Więc równoległościany KO, DH, maią tęż samę wysokość: na równych zaś podstawach wystawioné równych wysokości równoległościany, są między sobą równé (XXXI. XI.). Więc równoległościan KO, równy iest równoległościanowi DH; lecz równoległościan KO, iest zrobiony z trzech liniy prostych A, B, C; równoległościan zaś DH, iest zrobiony z linii prostéy B. Jeżeli więc trzy liniie prosté etc. etc. C. B. d. D.

PODANIE XXXVII.

TWIERDZENIE.

Jeżeli cztéry liniie prosté są proporcyonalné, i wystawioné na nich podobné, i podobnie wykréśloné równoległościany będą proporcyonalné; i ieżeli wystawioné na cztérech liniiach prostych podobné, i podobnie wykréśloné równoległościany są proporcyonalné, będą i té cztéry liniie prosté proporcyonalné. Fig. 259.

Niech będą cztéry liniie prosté AB, CD, EF, GH, proporcyonalné, oiest, że iak się má AB do CD, tak EF do GH: i wykréślmy na nich podobné, i podobnie położoné równoległościany AK, CL, EM, GN. Powiadám: że iak się má AK do CL, tak się má EM do GN.

Wynaydźmy liniie ciągło proporcyonalné (XI. VI.) AB, CD, O, P; iako też EF, GH, Q, R. Ponieważ iest, iak AB do CD, tak EF do GH; będzie iak CD do O, tak GH do Q; i O do P, iak Q do R (XI. V.) więc przez odmianę porównywaniá wielkości naprzemian iest AB do P, iak EF do R (XXII. V.). Lecz iąk AB do P, tak równoległościan AK, do równoległościanu CL; i iak EF do R, tak się má równoległościan EM, do równoległościanu GN (w. XXXIII. XI.). Jak się więc má równoległościan AK, do równoległościanu CL, tak się má równoległościan EM, do równoległościanu GN.

Niech znowu má się równoległościan AK, do równoległościanu CL, iak równoległościan EM, do równoległościanu GN. Powiadám: że iak się má liniia prostá AB, do linii prostéy CD, tak się má liniia prostá EF, do linii prostéy GH.

Wynaydźmy do trzech liniy prostych AB, CD, EF, czwártą proporcyonalną ST, i na linii prostéy ST, wykréślmy (XXVII. XI.) równoległościan SV, podobny, i podobnie położony każdému z dwóch równoległościanów EM, GN. Ponieważ iest iak AB do CD, tak EF do ST, a są na liniiach prostych AB, CD, wykréśloné podobné, i podobnie położoné równoległościany AK, CL; na liniiach zaś prostych EF, ST, są wykréślone podobné, i podobnie położoné równoległościany EM, SV; będzie, iak AK do CL, tak EM do SV. Jest zaś z założéniá, iak AK do CL, tak EM do GN; równy więc (IX. V.) iest równoległościan GN, równoległościanowi SV: iest mu zaś podobny i podobnie położony; i płaszczyzny zatém, którémi są téż równoległościany zawarté, podobné są i równé, i boki ich odpowiadaiącé GH, ST, będą między sobą równé. Ponieważ więc iak AB do CD, tak EF do ST, równá zaś iest liniia prostá ST, linii prostéy GH, będzie iak AB do CD, tak EF do GH. Jeżeli więc cztéry liniie prosté etc. etc. C. B. d. D.

PODANIE XXXVIII.

TWIERDZENIE.

Jeżeli płaszczyzna iest prostopadłą do płaszczyzny, a z punktu gdziekolwiek wziętégo na iednéy płaszczyźnie wyprowadzimy prostopadłą do drugiéy płaszczyzny; ta padnie na spólné płaszczyzn przecięcié. Fig. 260.

Niechay płaszczyzna CD, będzie prostopadłą do płaszczyzny AB, spólném zaś ich przecięciém niech będzie liniia prostá AD, i weźmy na płaszczyźnie CD, punkt gdziekolwiek E. Powiadám: że z punktu E, wyprowadzoná prostopadłá do płaszczyzny AB, padá na liniią prostą AD.

Gdyby albowiém nie padła, przypuśćmy, ieżeli bydź może, że padá zewnątrz w położéniu linii prostéy EF; i że spotyká płaszczyznę AB, w punkcie F. Z punktu zaś F, na płaszczyźnie AB, wyprowadźmy do linii prostéy DA, prostopadłą FG, (XII. I.) która oráz będzie i do płaszczyzny CD, prostopadłą (IV. d. XI.) i poprowadźmy liniią prostą EG. Ponieważ liniia prostá FG, prostopadłą iest do płaszczyzny CD, dotyká się zaś iéy liniia prostá EG, będącá na téyże saméy płaszczyźnie CD, będzie kąt FGE, prosty (III. def. XI.) lecz i liniia prostá EF, prostopadłą iest do płaszczyzny AB; prosty zatém iest kąt EFG. Dlá czego tróykąta EFG, dwa kąty są równé dwóm kątóm prostym, co bydź nié może. Z punktu przeto E, liniia prostopadłá do płaszczyzny AB, wyprowadzoná, nie padnie zewnątrz linii prostéy AD; padnie zatém na tęż liniią prostą AD. Jeżeli więc płaszczyzna etc. etc. C. B. d. D.

PODANIE XXXIX.

TWIERDZENIE.

Jeżeli w równoległościanie boki płaszczyzn przeciwnych, przecięté będą na dwie równé części: przez punkta zaś przecięć poprowadzoné zostaną płaszczyzny: spólné płaszczyzn przecięcié i średnica równoległościanu, przecinać się będą na dwie równé części. Fig. 261.

W równoległościanie AF, płaszczyzn przeciwnych CF, AH, przetniymy boki na dwie równé części w punktach K, L, M, N; O, X, P, R; i poprowadźmy liniie prosté KL, MN, XO, PR. Ponieważ liniie prosté DK, CL, równé są i równoodległé; będą liniie prosté KL, DC, równoodległé (XXXIII. I.). Dlá téy saméy przyczyny równoodległé są liniie prosté MN, BA. Jest zaś liniia prostá BA, równoodległá względém linii prostéy DC; gdy przeto każdá z dwóch liniy prostych KL, BA, równoodległá iest względém linii prostéy DC, na odmiénnéy z nią płaszczyźnie; będzie liniia prostá KL, równoodległá względém (IX. XI.) linii prostéy BA. I znowu, ponieważ każdá z dwóch liniy prostych KL, MN, równoodległá iest względém linii prostéy BA, na odmiénnéy z nią płaszczyźnie; będzie liniia prostá KL, równoodległá względém linii prostéy MN; dlá czego liniie prosté KL, MN, są na téyże saméy płaszczyźnie. Podobnież i liniie prosté XO, PR, dowiodą się, że są na téyże saméy płaszczyźnie. Spólném zaś płaszczyzn KN, XR, przecięciém, niech będzie liniia prostá YS, a śrzednicą równoległościanu AF, niech będzie liniia prostá DG. Powiadám: że liniie prosté YS, DG, zeydą się z sobą, i przecinać się będą na dwie równé części.

Poprowadźmy liniie prosté DY, YE, BS, SG. Ponieważ liniia prostá DX, iest równoodległą względém linii prostéy OE, kąty naprzemian DXY, YOE, są między sobą równé (XXIX. I.). I ponieważ liniia prostá DX, równá iest linii prostéy OE, liniia zaś prostá XY, równá linii prostéy YO, a zawiéra-

33 *

ią kąty równé; będzie podstawa DY, równá podstawie YE, i pozostałé kąty, równé pozostałym kątóm (IV. I.). Kąt zatém XYD, iest równy kątowi OYE, i dlá tego liniia DYE, iest liniia prostá (XIV I.). Dlá téyże samey przyczyny i liniia BSG, iest linią prostą; i iest liniia prostá BS, równá linii prostéy SG. Ponieważ liniia prostá CA, iest równá i równoodległá, względém linii prostéy DB, i liniia prostá CA, iest równá i równoodległá względém linii prostéy EG; będzie i liniia prostá DB, równá i równoodległá względém linii prostéy EG. Złączoné zaś są liniiami prostémi DE, BG; równoodległá więc i równá iest liniia prostá DE, względém linii prostéy BG. A wzięté są na każdéy z tych liniy prostych punkta D, Y, G, S, i poprowadzoné liniie prosté DG, YS; więc liniie prosté DG, YS, na iednéy są płaszczyźnie; a zatém oczywistá, że się z sobą zeydą: niech się zeydą w punkcie T. Ponieważ liniiá prostá DE, równoodległá iest względém linii prostéy BG, będzie i kąt EDT, równy kątowi BGT, są bowiém kątami naprzemian; iest zaś i kąt

DTY, równy kątowi (XV. I.) GTS. Dwa przeto tróykąty DTY, GTS, maiącé dwa kąty równé dwóm kątóm, i bok iedén równy bokowi iednému, przyległému iednému z kątów równych, toiest bok DY, równy bokowi GS; są bowiém połowami liniy prostych DE, BG: będą miały i pozostałé boki, równé pozostałym bokóm (XXVI. I.). Dlá czego liniia prostá DT, iest równá linii prostéy TG; liniia zaś prostá YT, iest równá linii prostéy TS. Jeżeli więc w równoległościanie etc. etc. C. B. d. D.

PODANIE XL.

TWIERDZENIE.

Jeżeli są dwa graniastosłupy tróykątné równéy wysokości, z których iednégo podstawą iest równoległobok podwóyny tróykąta, będącégo podstawą drugiégo graniastosłupa; takié graniastosłupy będą między sobą równé. Fig. 262.

Niech będą równéy wysokości graniastosłupy ABCDEF, GHKLMN, z których piérwszy zawarty iest dwoma tróykątami ABE, CDF, i trzéma równoległobokami AD, DE, EC; drugi zaś zawarty dwoma tróykątami GHK, LMN, i trzéma równoległobokami LH, HN, NG; iedén z nich niech má za podstawę równoległobok AF, drugi zaś za podstawę tróykąt GHK, i niech równoległobok AF, będzie podwóyny tróykąta GHK. Powiadám; że graniastosłup ABCDEF, równy iest graniastosłupowi GHKLMN. Dopełniymy albowiém równoległościanów AX, GO. A ponieważ równoległobok AF, podwóyny iest tróykąta GHK; iest zaś i równoległobok HK, podwóyny tróykąta GHK (XXXIV. I.); będzie równoległobok AF, równy równoległobokowi HK. Lecz równoległościany z równémi podstawami i wysokościami, są między sobą równé (XXXI. XI.); równy więc iest równoległościan AX, równoległościanowi GO, Równoległościanu zaś AX, iest połową (XXVIII. XI.) graniastosłup ABCDEF, i równoległościanu GO, połową iest graniastosłup GHKLMN; graniastosłup zatém ABCDEF, równy iest graniastosłupowi GHKLMN. Jeżeli więc są dwa graniastosłupy etc. etc. C. B. d. D.

KONIEC XIĘGI IEDENASTEY.

JEOMETRYI EUKLIDESA,

XIĘGA DWUNASTA.

PODANIE PRZYBRANE,

potrzebné do dowodzéniá podáń niektórych téy xięgi, iest zaś podaniém piérwszém xięgi dziesiątéy.

Maiąc dwie nierówné wielkości dané, ieżeli od większéy odiętá będzie część większá od iéy połowy, i od pozostałéy odiętá znowu będzie część większá od iéy połowy, i podobné odeymowanié powtarzać się zawszé będzie; pozostanie się nakoniec wielkość mnieyszá od danéy wielkości mnieyszéy. Fig. 263.

Niech będą wielkości nierówné AB, C, a z nich większá AB. Powiadám; że ieżeli od wielkości AB, odiętá będzie część większá od iéy połowy, i od pozostałéy wielkości część znowu większá od iéy połowy, i toż samo powtarzać się będzie zawsze; zostanie się nakoniec pewná wielkość mnieyszá od wielkości C.

Wielkość albowiém C, powtórzoná wielokrotnie, stanie się za pewném wielokrotném powtórzéniém, większą od wielkości AB. Powtórzmy ią, i niech wielkość DE, będzie wprawdzie wielkością wielokrotną wielkości C, większą zaś od wielkości AB; podzielmy DE, na części, wielkości C, równé: DF, FG GE, a od wielkości AB, odeymiymy część większą od iéy połowy BH; od wielkości zaś AH, odeymiymy znowu część wiekszą od iéy połowy HK; i podobnież czyńmy, póki podziały na wielkości AB, nie staną się co do wielości równémi podziałóm zrobionym na wielkości DE; niech témi podziałami będą AK, KH, HB, w równéy wielości względém podziałów DF, FG, GE. Ponieważ DE, większá iest od AB, i iest z wielkości DE, odiętá mnieyszá od połowy część EG, z wielkości zaś AB, iest odiętá większá od połowy część HB; będzie pozostałá wielkość GD, większá od pozostałéy wielkości HA. Znowu ponieważ GD, większá iest od HA, i iest z wielkości GD, odiętá część równá iéy połowie GF; z wielkości zaś HA, iest odiętá większá od iéy połowy część HK, będzie pozostałá wielkość FD, większá od pozostałéy wielkości AK. Lecz wielkość FD, równá iest wielkości C; wielkość przeto C, większá iest od wielkości AK. Mnieyszá iest zatém AK, od C. Z wielkości więc AB, pozostała się wielkość AK, mnieyszá od danéy mnieyszéy wielkości C. C. B. d. D.

PODANIE I.

TWIERDZENIE.

Wpisané w koła wielokąty podobné, są między sobą iak kwadraty ze śrzednic. Fig. 264.

Niech będą koła ABCDE, FGHKL, i w nié wpisané wielokąty podobné ABCDE, FGHKL, śrzednicami zaś kół, niech będą liniie prosté BM, GN. Powiadam: iak się má kwadrat z BM, do kwadratu z GN, tak się má wielokąt ABCDE, do wielokąta FGHKL.

Poprowadźmy liniie prosté BE, AM, GL, FN. Ponieważ wielokąt ABCDE, podobny iest wielokątowi FGHKL, będzie i kąt BAE, równy kątowi GFL, (I. def. VI.): i iak BA do AE, tak GF do FL. Dwa zatém tróykąty BAE, GFL, maiącé kąt iedén, równy iednému kątowi, toiest kąt BAE, kątowi GFL: około zaś kątów równych, boki proporcyonalné, będą równokątné (VI. VI.); a przeto kąt AEB, równy kątowi FLG. Lecz kąt AEB, równy iest kątowi AMB, (XXI. III.) bo ténże sám obeymuią łuk; i kąt FLG, równy iest kątowi FNG, więc i kąt AMB, równy iest kątowi FNG. Jest zaś i kąt prosty BAM, równy kątowi prostému GFN, (XXXI. III.): dlá czego i kąt pozostały, będzie równy kątowi pozostałému. Równokątny więc iest tróykąt ABM, z tróykątém FGN. Zatém iak się má BM do GN, tak BA do GF, (IV. VI.) i stosunek dwumnożny BM do GN, równy będzie (X. def. V. i XXII. V.) stosunkowi dwumnożnému BA do GF. Lecz stosunku BM do GN, stosunek dwumnożny iest stosunek kwadratu z BM, do kwadratu z GN, (XX. VI.) stosunku zaś BA do GF, stosunek dwumnożny iest stosunek wielokąta ABCDE, do wielokąta FGHKL. Zaczém i iak kwadrat z BM, do kwadratu z GN, tak wielokąt ABCDE, do wielokąta FGHKL. Wpisané więc w koła etc. C. B. d. D.

PODANIE II.

TWIERDZENIE.

Koła są między sobą iak kwadraty ze śrzednic. Fig. 265.

Niech będą koła ABCD, EFGH, ich zaś

śrzednicami liniie przez té BD, FH. Powiadám: iak się má kwadrat z BD, do kwadratu z FH, tak się má koło ABCD, do koła EFGH.

Jeżeli albowiém nie iest tak; będzie iak kwadrat z BD, do kwadratu z FH, tak koło ABCD, albo do powiérzchni mnieyszéy, albo do powiérzchni większéy od koła EFGH, (*). Przypuśćmy naprzód do powiérzchni mnieyszéy, którą niech będzie S, w kole EFGH, wykréślmy kwadrat EFGH, tén wykréślony w kole kwadrat większy iest od połowy koła EFGH: ieżeli bowiém przez punkta E, F, G, H, poprowadzimy styczné z kołém, będzie opisanégo na kole kwadratu

(*) Jest bowiém pewny kwadrat równy kołu ABCD; niech bokiém tego kwadratu będzie P; może więc bydź czwártá proporcyonalná do trzech BD, FH, AP, którá niech będzie Q; są więc kwadraty z nich proporcyonalné, toiest do kwadratów z BD, FH, i koła ABCD, może bydź czwártá proporcyonalná figura, ta niech będzie S. Podobnież niektóré wyrażéniá w następuiących niektórych podaniach, maią się rozumiéć.

połową kwadrat EFGH, (LXVII. I. XXXI. III.) koło zaś mnieyszé od kwadratu na nim opisanégo, przeto kwadrat EFGH, większy iest od połowy koła EFGH. Przetniymy na dwie równé części łuki EF, FG, GH, HE, w punktach K, L, M, N, i poprowadźmy liniie prosté EK, KF, FL, LG, GM, MH, HN, NE. Każdy z tróykątów EKF, FLG, GMH, HNE, większy iest od połowy odcinka, w którym się znáyduie. Jeżeli bowiém przez punkta K, L, M, N, poprowadzimy styczné z kołém, i na liniiach prostych EF, FG, GH, HE, dopełnimy równoległoboków; będzie każdy z tróykątów EKF, FLG, GMH, HNE, połową równoległoboku, w którym się znáyduie (XLI. I.). Lecz odcinek mnieyszy iest od równoległoboku; dlá czego każdy z tróykątów EKF, FLG, GMH, HNE, większy iest od połowy odcinka koła, w którym się znáyduie. Téż znowu łuki dzieląc na dwie równé części, i łącząc końce podziałów liniiami prostémi, i powtarzaiąc zawsze toż samo wykréślénié, pozostaną się nám pewné kół odcinki, któré mnieyszé będą od tego nadmiaru, którym koło EFGH, przewyższá powiérzchnią S. W poprzedzaiącém albowiém przybraném podaniu, dowiedliśmy, że maiąc dwie nierówné wielkości dané, ieżeli od większéy odiętá będzie część większá nad iéy połowę, i od pozostałéy, część znowu większá nad iéy połowę, i podobné odeymowanié powtarzać się zawsze będzie; pozostanie się nakoniec wielkość mnieyszá, od danéy wielkości mnieyszéy. Pozostały się przeto odcinki EK, KF, FL, LG, GM, MH, HN, NE, mnieyszé od nadmiaru, którym koło EFGH, przewyższá powiérzchnią S: Pozostały zatém wielokąt EKFLGMHN, większy będzie od powiérzchni S. Wykréślmy w kole ABCD, wielokątowi EKFLGMHN, podobny wielokąt AXBOCPDR. Jak się więc má kwadrat z BD, do kwadratu z FH, tak wielokąt AXBOCPDR, do wielokąta EKFLGMHN, (I. XII.). Lecz i iak kwadrat z BD, do kwadratu z FH, tak koło ABCD, do powiérzchni S. Więc i iak koło ABCD, do powiérzchni S, tak wielokąt AXBOCPDR, do wielokąta EKFLGMHN,

(XI. V.). Większé zaś iest koło ABCD, od wpisanégo w niém wielokąta, więc i powierzchniá S, większá iest od wielokąta EKFLGMHN, (XIV. V.). Lecz iest z przypuszczéniá i mnieyszą, co bydź nié może; nie iest przeto iak kwadrat z BD, do kwadratu z FH, tak koło ABCD, do powiérzchni mnieyszéy od koła EFGH. Podobnież dowiedziémy, że ani iest iak kwadrat z FH, do kwadratu z BD, tak koło EFGH, do powiérzchni mnieyszéy od koła ABCD. Powiadám nadto: że ani, iak się má kwadrat z BD, do kwadratu z FH, tak koło ABCD, do powiérzchni większéy od koła EFGH. Jeżeli bowiém bydź to może, przypuscmy: że iak się má kwadrat z BD, do kwadratu z FH, tak koło ABCD, do powiérzchni większéy od koła EFGH, którą niech będzie powiérzchniá T. Za przełożéniém więc wyrazów skraynych na mieyscé śrzednich, i śrzednich na mieyscé skraynych, będzie kwadrat z FH, do kwadratu z BD, iak powiérzchniá T, do koła ABCD. Będzie zaś iak powiérzchniá (*) T, do koła ABCD, tak koło EFGH, do pewnéy powiérzchni, i to mnieyszéy od koła ABCD; iest bowiém powiérzchniá T, większá od koła EFGH; więc i iak kwadrat z FH, do kwadratu z BD, tak koło EFGH, do pewnéy powiérzchni mnieyszéy od koła ABCD: cośmy dowiedli bydź nie podobném. Nie iest zatém, iak kwadrat z BD, do kwadratu z FH, tak koło ABCD, do powiérzchni większéy od koła EFGH. Dowiedliśmy zaś: że ani iak kwadrat z BD, do kwadratu z FH, tak koło ABCD, do powiérzchni mnieyszéy od koła EFGH. Więc iak się má kwadrat z BD, do kwadratu z FH, tak miéć się będzie koło ABCD, do koła (**) EFGH. Koła

(*) Okazało się w poprzedzaiącym przypisku, że może bydź czwártá proporcyonalná do kwadratów z BD, FH, i koła ABCD, którą nazwano S; podobnież do powiérzchni T, i kół ABCD, EFGH, może bydź czwártá proporcyonalná. Podobné wyrażéniá w niektórych następuiących podaniach, maią bydź tymże samym sposobém brané i rozumiané.

(**) Jeżeli bowiém może bydź czwártá proporcyoprzeto są między sobą iak kwadraty ze śrzednic. C. B. d. D.

PODANIE III.

TWIERDZENIE.

Każdy ostrosłup tróykątny, rozdzielá się na dwa ostrosłupy tróykątné równé i podobné między sobą, podobné oraz całému ostrosłupowi, i na dwa graniastosłupy równé, większé od połowy całégo ostrosłupa. Fig. 266.

Niech będzie ostrosłup, którégo podstawą iest tróykąt ABC, wiérzchołkiém zaś punkt D. Powiadám: że ostrosłup ABCD, rozdzielá się na dwa ostrosłupy tróykątné, równé i podobné między sobą, podobné oráz całému ostrosłupowi, i na dwa graniastosłupy

nalná do kwadratów z BD, FH, i koła ABCD, a ta dowiodła się, że nié może bydź ani mnieyszą ani większą od koła EFGH; będzie zatém koniecznie témuż kołu EFGH, równą.

równé; i że téż dwa graniastosłupy większé są od połowy całégo ostrosłupa.

Przetniymy boki AB, BC, CA, AD, BD, DC, na dwie równé części w punktach E, F, G, H, K, L, i poprowadźmy liniie prosté EH, EG, GH, HK, KL, LH, EK, KF, FG, EF. Ponieważ liniia prostá AE, równá iest linii prostéy EB, i liniia prostá AH, równá linii prostéy HD; będzie liniia prostá HE, równoodległą względém linii prostéy DB, (II. VI.). Dlá téy saméy przyczyny, i liniia prostá HK, iest równoodległą względém linii prostéy AB. Czworokąt więc HEBK, iest równoległobokiém; dlá czego liniia prostá HK, iest równá linii prostéy EB, (XXXIV. I.). Lecz liniia prostá EB, iest równá linii prostéy AE; więc i liniia prostá AE, będzie równá linii prostéy HK. Jest zaś i liniia prostá AH, równá linii prostéy HD, dwie przeto liniie prosté EA, AH, są równé dwóm liniióm prostym KH, HD, iedna drugiéy; i kąt EAH, równy iest kątowi KHD, (XXIX. I.). Podstawá zatém EH, iest równá podstawie KD, i tróykąt AEH, równy (IV. I.) i podobny tróykątowi HKD. Dlá téy saméy przyczyny i tróykąt AGH, równy i podobny iest tróykątowi HLD. Ponieważ zaś dwie liniie prosté EH, HG, schodzącé się, są równoodległé względém dwóch liniy prostych KD,DL, schodzących się, i na odmiénnéy położonych płaszczyźnie; będą też liniie prosté zawiérać kąty równé (X. XI.) więc kąt EHG, iest równy kątowi KDL. Znowu ponieważ dwie liniie prosté EH, HG, są równé dwóm liniióm prostym KD, DL, iedna drugiéy, i kąt EHG, równy iest kątowi KDL, będzie podstawa EG, równá podstawie KL, i tróykąt EHG, będzie równy i podobny tróykątowi KDL. Dlá téyże saméy przyczyny, i tróykąt AEG, równy iest i podobny tróykątowi HKL. Ostrosłup przeto, którégo podstawą iest tróykąt AEG, wiérzchołkiém zaś punkt H, równy i podobny iest ostrosłupowi, którégo podstawą iest tróykąt KHL, a wiérzchołkiém punkt D, (C. XI.). I ponieważ do iednégo z boków tróykąta ADB, toiest do boku AB, poprowadzoná iest liniia równoodległá HK; będzie tróykąt ADB, równokątny, z tróykątém HDK, i maią dlá tego boki proporcyonalné (IV. VI). Podobny więc iest tróykąt ADB, tróykątowi HDK. Dlá téy samóy przyczyny tróykąt DBC, podobny iest tróykątowi DKL; tróykąt zas ADC, tróykątowi HDL; i ieszcze tróykąt ABC, tróykątowi AEG: dowiedziony zaś tróykąt AEG, bydź podobnym tróykątowi HKL, więc i tróykąt ABC, podobny będzie tróykątowi HKL (XXI. VI.). Przeto i ostrosłup, którégo podstawą iest tróykąt ABC, wiérzchołkiém zaś punkt D, podobny iest ostrosłupowi, którégo podstawą iest tróykąt HKL, a wiérzchołkiém punkt D, (B. XI. i XI. def. XI.). Lecz ostrosłup, którégo podstawą iest tróykąt HKL, wiérzchołkiém zaś punkt D, iest z okazaniá podobny ostrosłupowi, którégo podstawą iest tróykąt AEG, a wiérzchołkiém punkt H; więc i ostrosłup, którégo podstawą iest tróykąt ABC, a wiérzchołkiém punkt D, podobny iest ostrosłupowi, którégo podstawą tróykąt AEG, a wiérzchołkiém punkt H: każdy więc z dwóch ostrosłupów AEGH, HKLD, podobny iest całému ostrosłupowi ABCD. A ponieważ liniiá prostá BF, równá iest linii prostéy FC, będzie równoległobok EBFG, podwóyny tróykąta FGC (XLI. I.). Jeżeli zaś dwa graniastosłupy są równéy wysokości, z których podstawą iednégo iest równoległobok podwóyny względém tróykąta będącégo podstawą drugiégo graniastosłupa, té graniastosłupy są między sobą równé (XL. XI.). Graniastosłup więc, którégo podstawą iest równoległobok EBFG, a przeciwná onémuż liniia prostá KH, będzie równy graniastosłupowi, którégo podstawą iest tróykąt GFC, i przeciwny téyże podstawie tróykąt HKL; maią albowiém też samę wysokość, iako między (XV. XI.) płaszczyznami równoodległémi ABC, HKL, zawarté. I oczywistá iest: że każdy z dwóch tych graniastosłupów, tak tén, którégo podstawą iest równoległobok EBFG, a przeciwná onémuż liniia prostá HK, iako i drugi, którégo podstawą iest tróykąt GFC, a przeciwny onémuż tróykąt HKL, większy iest od każdégo z dwóch ostrosłupów, których podstawami są tróykąty AEG, HKL, wiérzchołkami zaś punkta H, D. Poprowadziwszy albowiém liniią prostą EF, graniastosłup, którégo podstawą iest równoległobok EBFG, a przeciwná iému liniia prostá KH, większy iest od ostrosłupa, którégo, podstawą iest tróykąt EBF, wiérzchołkiém zaś punkt K. Lecz ostrosłup, którégo podstawą iest tróykąt EBF, a wiérzchołkiém punkt K, iest równy ostrosłupowi, którégo podstawą iest tróykąt AEG, a wiérzchołkiém punkt H; są bowiém równémi i podobnémi płaszczyznami zawarté. Przeto i graniastosłup, którégo podstawą równoległobok EBFG, a przeciwná iému liniia prostá HK, większy iest od ostrosłupa, którégo podstawą tróykąt AEG, a wiérzchołkiém punkt H. Graniastosłup zaś, którégo podstawą równoległobok EBFG, a przeciwna iému liniia prostá HK, iest równy graniastosłupowi, którégo podstawą iest tróykąt GFC; a przeciwny iému tróykąt HKL, i ostrosłup, którégo podstawą tróykąt AEG, wiérzchołkiém zaś punkt H, iest równy ostrosłupowi, którégo podstawą tróykąt HKL, a wiérzchołkiém punkt D. Więc dwa rzeczoné graniastosłupy, są większé od dwóch rzeczonych ostrosłupów, których podstawami są tróykąty AEG, HKL, wiérzchołkami zaś punkta H, D. Cały zatém ostrosłup, którégo podstawą tróykąt ABC, wiérzchołkiém zaś punkt D, rozdzielony iest na dwa ostrosłupy równé, i podobné między sobą, podobné oraz całému ostrosłupowi, i na dwa graniastosłupy równé, które są większé od połowy całégo ostrosłupa. C. B. d. D.

PODANIE IV.

TWIERDZENIE.

Jeżeli są dwa ostrosłupy tróykątné równéy wysokości, podzielony zaś będzie każdy z nich i na dwa ostrosłupy równé między sobą, podobné oraz całému ostrosłupowi, i na dwa graniastosłupy równé; i ieżeli z podziału otrzymané ostrosłupy podobnymże sposobém podzieloné będą; i podobné podziały powtarzać się będą; będzie podstawa iednégo ostrosłupa, miéć się do podstawy drugiégo ostrosłupa, iak wszystkié graniastosłupy w ostrosłupie piérwszym, do wszystkich w równéy liczbie graniastosłupów, zamkniętych w ostrosłupie drugim. Fig. 267.

Niech będą dwa ostrosłupy równéy wysokości, maiącé podstawy tróykątné ABC, DEF, ich zaś wiérzchołkami niech będą punkta G, H; podzielmy każdy z nich na dwa ostrosłupy równé między sobą, podobné oráz całému; i na dwa graniastosłupy równé: a otrzymané z podziału ostrosłupy wystáwmy sobie podobnież podzieloné. i podobny podziáł następnie czyniony. Powiadám: iak podstawa ABC, má się do podstawy DEF, tak się maią wszystkié graniastosłupy w ostrosłupie ABCG, do wszystkich graniastosłupów w ostrosłupie DEFH.

Zróbmy toż samo wykréślénié, któré w poprzedzaiącém podaniu. Ponieważ liniia prostá BX, równá iest linii prostéy XC, i liniia prostá AL, równá linii prostéy LC; będzie liniia prostá XL, równoodległą od linii prostéy AB, (II. VI.) i tróykąt ABC, iest podobny tróykątowi LXC. Dlá téy saméy przyczyny i tróykąt DEF, podobny iest tróykątowi RVF. A że liniia prostá BC, podwóyná iest linii prostéy CX, liniia zaś prostá EF, iest podwóyná linii FV; będzie iak BC do CX, tak EF do FV. Na liniiach prostych BC, CX, są wykréślone podobné, i podobnie położoné figury ABC, LXC; tak iako i na liniiach prostych EF, FV, wykréślone są podobné, i podobnie położoné figury prostokréślné DEF, RVF. Jest więc iak tróykąt ABC, do tróykąta LXC, tak tróykąt DEF, do tróykąta RVF, (XXII. VI.). A odmiéniaiąc mieysce śrzednim wyrazóm, iak tróykąt ABC, do tróykąta DEF, tak tróykąt LXC, do tróykąta RVF. Ponieważ zaś równodległé są płaszczyzny ABC, OMN, (XV. XI.); tak iako i płaszczyzny DEF, STY, prostopadłé z punktów G, H, do podstáw ABC, DEF, wyprowadzoné, któré są między sobą równé, będą przez płaszczyzny OMN, STY, na dwie równé części przecięté (XVII. XI.): albowiém i liniie prosté GC, HF, są przez téż płaszczyzny w punktach N, Y, przecięté na dwie równé części. Graniastosłupy zatém LXCOMN, RVFSTY, maią równą wysokość. Jak się więc má podstawa LXC, do podstawy RVF, toiest: iak tróykąt ABC, do tróykąta DEF, tak się má graniastosłup, którego podstawą iest tróykąt LXC, a przeciwny iému tróykąt OMN, do graniastosłupa, którego podstawą tróykąt RVF, a przeciwny iému tróykąt STY, (w. XXXII. XI.). A ponieważ dwa graniastosłupy w ostrosłupie ABCG, są między sobą równé; i dwa graniastosłupy w ostrosłupie DEFH, są między sobą równé, będzie iak graniastosłup, którego podstawą równoległobok KBXL, a przeciwná iému liniia prostá MO, do graniastosłupa, którego podstawą tróykąt LXC, a przeciwny iému tróykąt OMN, tak (VII. V.) graniastosłup, którego podstawą równoległobok PEVR, a przeciwná iému liniia prostá TS, do graniastosłupa, którego podstawą tróykat RVF, a przeciwny iému tróykąt STY. Dodaiąc więc wyrazy, będzie: iak graniastosłupy KBXLMO, LXCOMN, do graniastosłupa LXCOMN, tak graniastosłupy PEVRTS, RVFSTY, do graniastosłupa RVFSTY. Odmiéniaiąc zaś porządek w wyrazach śrzednich, będzie: iak graniastosłupy KBXLMO, LXCOMN, do graniastosłupów PEVRTS, RVFSTY, tak graniastosłup LXCOMN, do graniastosłupa RVFSTY. Jak zaś graniastosłup LXCOMN, do graniastosłupa RVFSTY, tak z poprzedzaiącégo okazania podstawa ABC, do podstawy DEF; więc i iak podstawa ABC, do podstawy DEF, tak dwa graniastosłupy w ostrosłupie ABCG, do dwóch graniastosłupów w ostrosłupie DEFH. Podobnie zaś, ieżelibyśmy otrzymané z podziału ostrosłupy, podzielili tymże samym sposobém, toiest, ostrosłupy OMNG, STYH, będzie: iak podstawa OMN, do podstawy STY, tak dwa graniastosłupy w ostrosłupie OMNG, do dwóch graniastosłupów w ostrosłupie STYH. Lecz iak podstawa OMN, do podstawy STY, tak podstawa ABC, do podstawy DEF; przeto téż, iak podstawa ABC, do podstawy DEF, tak dwa graniastosłupy w ostrosłupie ABCG, do dwóch graniastosłupów w ostrosłupie DEFH: i tak dwa graniastosłupy w ostrosłupie OMNG, do dwóch graniastosłupów w ostrosłupie STYH; i tak cztéry graniastosłupy, do cztérech graniastosłupów. Toż samo dowiedziémy i w otrzymanych graniastosłupach z podziału ostrosłupów AKLO, i DPRS, i w ogólności wszystkich ostrosłupów w równéy liczbie będących. C. B. d. D.

PODANIE V.

TWIERDZENIE.

Ostrosłupy tróykątné równéy wysokości, są między sobą iak podstawy. Fig. 268.

Niech będą równéy wysokości ostrosłupy, których podstawami są tróykąty ABC, DEF, wiérzchołkami zaś punkta G, H. Powiadám: iak się má podstawa ABC, do podstawy DEF, tak się má ostrosłup ABCG, do ostrosłupa DEFH.

Jeżeli albowiém nie iest tak, przypuśćmy: że iak się má podstawa ABC, do podstawy DEF, tak się má ostrosłup ABCG, albo do bryły mnieyszéy, albo do bryły większéy od ostrosłupa DEFH (*). Niech náprzód podstawa ABC, má się do podstawy DEF, iak ostrosłup ABCG, do bryły mnieyszéy, którą niech będzie bryła Q. Podzielmy ostrosłup DEFH, na ostrosłupy równé między sobą, i podobné całému ostrosłupowi, i na dwa graniastosłupy równé. Są przeto té dwa graniastosłupy większé od połowy całégo ostrosłupa (III. XII.). J znowu otrzymané z podziału ostrosłupy, podzielmy podobnież, i wystáwmy sobie podobnież czynioné podziały, póki się nie pozostaną pewné ostrosłupy w ostrosłupie DEFH, któréby były mnieyszé od nadmiaru, o który ostrosłup DEFH, przewyższá bryłę Q: przypuśćmy naprzykłád, że iuż takiémi ostrosłupami są ostrosłupy DPRS, STYH, pozostałé więc w ostrosłupie DEFH, graniastosłupy, większé będą od bryły Q. Podzielmy téż ostrosłup ABCD, podobnież i na tyléż części, iak

(*) To może bydź dowiedzioné tymże samym sposobém, iak przypádek podobny, dowiedziony był w przypisku (*) Podaniá II.

był podzielony ostrosłup DEFH. Zaczém iak podstawa ABC, do podstawy DEF, tak graniastosłupy w ostrosłupie ABCG, do graniastosłupów w ostrosłupie DEFH, (IV. XII.). Lecz iak podstawa ABC, do podstawy DEF, tak ostrosłup ABCG, do bryły Q. Jak więc ostrosłup ABCG, do bryły Q, tak graniastosłupy, w ostrosłupie ABCG, do graniastosłupów, w ostrosłupie DEFH. Większy zaś iest ostrosłup ABCG, od graniastosłupów w nim będących, więc i bryła Q, większą iest od graniastosłupów w ostrosłupie DEFH, (XIV. V.). A iest z okazaniá i mnieyszą, co bydź nié może, nie iest przeto, iak podstawa ABC, do podstawy DEF, tak ostrosłup ABCG, do pewnéy bryły mnieyszéy od ostrosłupa DEFH. Dowiedziémy podobnież: że ani iak podstawa DEF, do podstawy ABC, tak ostrosłup DEFH, do bryły pewnéy mnieyszéy od ostrosłupa ABCG. Powiadám nadto: że ani iak się má podstawa ABC, do podstawy DEF, tak ostrosłup ABCG, do pewnéy bryły większéy od ostrosłupa DEFH. Jeżeli bowiém bydź to może, niech się má podstawa ABC, do podstawy DEF, iak ostrosłup ABCG, do bryły większéy Z. Przełożywszy wyrazy średnié na mieyscé skraynych, i skrayné na mieyscé śrzednich, będzie, iak podstawa DEF, do podstawy ABC, tak bryła Z, do ostrosłupa ABCG. Będzie zaś, iak bryła Z, do ostrosłupa ABCG, tak ostrosłup DEFH, do pewnéy bryły (*), która będzie mnieyszą od ostrosłupa ABCG: iest bowiém bryła Z, większá od ostrosłupa DEFH. Jest zatém i iak podstawa DEF, do podstawy ABC, tak ostrosłup DEFH, do pewnéy bryły mnieyszéy od ostrosłupa ABCG, co bydź nié może. Nie iest więc iak podstawa ABC, do podstawy DEF, tak ostrosłup ABCG, do pewnéy bryły większéy od ostrosłupa DEFH. Dowiedliśmy zaś, że ani iak podstawa ABC, do podstawy DEF, tak ostrosłup ABCG, do pewnéy bryły mnieyszéy od ostrosłupa DEFH. Przeto iak się má pod-

(*) To może bydź dowiedzioné tymże samym sposobém, iak przypádek podobny, dowiedziony był w przypisku (**) Podaniá II.

stawa ABC, do podstawy DEF, tak się má ostrosłup ABCG, do ostrosłupa DEFH. Ostrosłupy więc równéy wysokości etc. etc. C. B. d. D.

PODANIE VI.

TWIERDZENIE.

Ostrosłupy maiącé tęż samę wysokość, a podstawy wielokątné, są między sobą iak podstawy. Fig. 269.

Niech będą równéy wysokości ostrosłupy, których podstawami są wielokąty ABCDE, FGHKL, wiérzchołkami zaś punkta M, N; powiadám: iak podstawa ABCDE, do podstawy FGHKL, tak się má ostrosłup ABCDEM, do ostrosłupa FGHKLN.

Podzielmy podstawę ABCDE, na tróykąty ABC, ACD, ADE, podstawę zaś FGHKL, na tróykąty FGH, FHK, KFL; i na każdym tróykącie wystáwmy sobie, stoiącé ostrosłupy, z których stoiącé na podstawach ABC, ACD, ADE, miałyby spólny wiérzchołek w punkcie M, pozostałé zaś spólny wiérzchołek w punkcie N. Ponieważ iest: iak tróykąt ABC, do tróykąta FGH, tak ostrosłup ABCM, do ostrosłupa FGHN, (V. XII.). Jak zaś tróykąt ACD, do tróykąta FGH, tak ostrosłup ACDM, do ostrosłupa FGHN; i ieszcze iak tróykąt ADE, do tróykąta FGH, tak ostrosłup ADEM, do ostrosłupa FGHN; będzie téż: iak wszystkié piérwszé poprzedniki do spólnégo następnika, tak wszystkié drugié następniki do spólnégo następnika (II. w. XXIV. V.); toiest będzie, iak podstawa ABCDE, do podstawy FGH, tak ostrosłup ABCDEM, do ostrosłupa FGHN. J dlá téyże samey przyczyny: iak podstawa FGHKL, do podstawy FGH, tak się miéć będzie ostrosłup FGHKLN, do ostrosłupa FGHN: a przełożywszy wyrazy śrzednié na mieyscé skraynych, skrayné zaś na mieyscé śrzednich; będzie iak podstawa FGH, do podstawy FGHKL, tak ostrosłup FGHN, do ostrosłupa FGHKLN. Ponieważ więc: iak podstawa ABCDE, do podstawy FGH, tak ostrosłup ABCDEM, do ostrosłupa FGHN;

i iak podstawa FGH, do podstawy FGHKL, tak ostrosłup FGHN, do ostrosłupa FGHKLN. Będzie przez odmianę porównywaniá wielkości naprzemian (XXII. V.), iak podstawa ABCDE, do podstawy FGHKL, tak ostrosłup ABCDEM, do ostrosłupa FGHKLN. Ostrosłupy więc maiącé tęż samę wysokość etc. etc. C. B. d. D.

PODANIE VII.

TWIERDZENIE.

Każdy graniastosłup tróykątny, rozdzielá się na trzy równé między sobą ostrosłupy tróykątné. Fig. 270.

Niech będzie graniastosłup, którégo podstawą tróykąt ABC, i przeciwny téyże podstawie tróykąt DEF; powiadám: że graniastosłup ABCDEF, rozdzielá się na trzy równé między sobą tróykątné ostrosłupy.

Poprowadźmy liniie prosté BD, EC, CD. Ponieważ czworokąt ABED, iest równoległobokiém, którégo liniiá prostá BD, iest przekątną; będzie tróykąt ABD, równy tróykątowi EBD, (XXXIV. I.). Więc ostrosłup, którégo podstawą tróykąt ABD, wiérzchołkiém zaś punkt C, równy iest ostrosłupowi (V. XII.) którégo podstawą tróykąt EBD, a wiérzchołkiém punkt C. Lecz ostrosłup, którégo podstawą tróykąt EBD, a wiérzchołkiém punkt C, iest ténże sám, co i ostrosłup, którégo podstawą tróykąt EBC, a wiérzchołkiém punkt D; témiż samémi bowiém płaszczyznami są zawarté, więc i ostrosłup, którégo podstawą tróykąt ABD, wiérzchołkiém zaś punkt C, równy iest ostrosłupowi, którégo podstawą tróykąt EBC, a wiérzchołkiém punkt D. Znowu ponieważ czworokąt FCBE, iest równoległobokiém, i iego przekątną liniiá prostá CE; iest tróykąt ECF, równy tróykątowi ECB. Zatém i ostrosłup, którégo podstawą tróykąt ECB, wiérzchołkiém zaś punkt D, równy iest ostrosłupowi, którégo podstawą tróykąt ECF, a wiérzchołkiém punkt D. Lecz ostrosłup, którégo podstawą iest tróykąt ECB, wiérzchołkiém zaś punkt D, dowiedziono iuż, że iest równym ostrosłupowi, którégo podstawą tróykąt ABD, a wiérzchołkiém punkt C; zaczém i ostrosłup, którégo podstawą tróykąt ECF, a wiérzchołkiém punkt D, równy iest ostrosłupowi, którégo podstawą tróykąt ABD, a wiérzchołkiém punkt C. Graniastosłup zatém rozdzielá się na trzy ostrosłupy tróykątné równé między sobą, toiest, na ostrosłupy ABDC, EBDC, ECFD. Ponieważ zaś ostrosłup, którégo podstawą tróykąt ABD, wiérzchołkiém punkt C, ténże sám iest co i ostrosłup, którégo podstawą tróykąt ABC, i wiérzchołkiém punkt D, témiż samémi bowiém płaszczyznami są zawarté; a ostrosłup, którégo podstawą tróykąt ABD, wiérzchołkiém punkt C, dowiedliśmy, że iest trzecią częścią graniastosłupa, którégo podstawą tróykąt ABC, i iému przeciwny tróykąt DEF; więc i ostrosłup, którégo podstawą tróykąt ABC, wiérzchołkiem zaś punkt D, iest trzecią częścią graniastosłupa, tęż samę maiącégo podstawę, toiest tróykąt ABC, i iému przeciwny tróykąt DEF. C. B. d. D.

Wniosek 1. Wypadá stąd oczywiście: że każdy ostrosłup iest trzecią częścią graniastosłupa, tęż samę maiącégo podstawę i równą z nim wysokość; ieżeli bowiém graniastosłup má za podstawę inną iaką figurę prostokréślną, może bydź rozdzielony na inné graniastosłupy, których podstawy będą tróykątami.

Wniosek 2. Graniastosłupy równéy wysokości, są między sobą iak podstawy. Ponieważ ostrosłupy równéy wysokości, są między sobą iak podstawy (VI. XII.).

PODANIE VIII.

TWIERDZENIE.

Ostrosłupy tróykątné podobné, są w stosunku tróymnożnym boków odpowiadaiących. Fig. 271.

Niech będą podobné, i podobnie położoné ostrosłupy, których podstawami są tróykąty ABC, DEF, wiérzchołkami zaś punkta G, H. Powiadám; że ostrosłup ABCG, má się do ostrosłupa DEFH, w stosunku tróymnożnym boku BC, do boku odpowiadaiącégo EF.

Dopełniymy równoległoboków ABCM, GBCN, ABGK, i równoległościanu BGML, témiż i im przeciwnémi płaszczyznami zawartégo. Podobnież dopełniymy równoległościanu EHPO, zawartégo trzéma równoległobokami DEFP, HEFR, DEHX, i im przeciwnémi równoległoboczném i płaszczyznami. Ponieważ ostrosłup ABCG, podobny iest ostrosłupowi DEFH, będzie kąt ABC, równy kątowi DEF, (XI d. XI.) i kąt GBC, równy kątowi HEF, i kąt ABG, równy kątowi DEH. Jest oráz: iak AB do BC, tak DE do EF, (I. def. VI.) toiest boki około kątów równych są proporcyonalné: równoległobok więc BM, podobny będzie równoległobokowi EP. Dlá téy saméy przyczyny równoległobok BN, podobny iest równoległobokowi ER, i równoległobok BK, podobny iest równoległobokowi EX. Trzy zatém równoległoboki BM, BN, BK, podobné są trzém równoległobokóm EP, ER, EX. Lecz trzy równoległoboki BM, BN, BK, trzém sobie przeciwnym są równé i podobné (XXIV.XI.), iako téż trzy równoległoboki EP, ER, EX, są równé i podobné trzém sobie przeciwnym. Równoległościany przeto BGML, EHPO, zawarté są podobnémi w równéy liczbie płaszczyznami, i ich kąty bryłowé są równé (B. XI.) więc równoległościan BGML, podobny iest równoległościanowi EHPO. Lecz równoległościany podobné są w stosunku tróymnożnym boków odpowiadaiących (XXXIII. XI.): równoległościan zatém BGML, do równoległościanu EHPO, iest w stosunku tróymnożnym boku BC, do boku odpowiadaiącégo EF. Jak zaś równoległościan BGML, do równoległościanu EHPO; tak ostrosłup ABCG, do ostrosłupa DEFH (XV. V.): ostrosłup bowiém iest szóstą częścią równoległościanu, będąc trzecią częścią graniastosłupa (VII. XII.), który iest połową równoległościanu (XXVIII. XI.). Dlá czego i ostrosłup ABCG, do ostrosłupa DEFH, iest w stosunku tróymnożnym boku BC, do boku EF. C. B. d. D.

Wniosek. Wypadá ząd oczywiście: że i podobné ostrosłupy maiącé podstawy wielokątné, są między sobą w stosunku tróymnożnym boków odpowiadaiących. Rozdzieliwszy bowiém takowé ostrosłupy na ostrosłupy tróykątné; ponieważ i podobné wielokąty, będącé podstawami ostrosłupów, rozdzielaią się na równą liczbę tróykątów sobie podobnych, i całym wielokątóm proporcyonalnych: będzie iak iedén ostrosłup tróykątny w piérwszym ostrosłupie, do iednégo ostrosłupa tróykątnégo, w drugim ostrosłupie, tak wszystkié ostrosłupy tróykątné w piérwszym ostrosłupie, do wszystkich ostrosłupów tróykątnych w drugim ostrosłupie, toiest, tak piérwszy ostrosłup maiący podstawę wielokątną, do drugiégo maiącégo podstawę wielokątną ostrosłupa. Lecz ostrosłup tróykątny, má się do ostrosłupa tróykątnégo w stosunku tróymnożnym boków odpowiadaiących; więc i ostrosłup maiący podstawę wielokątną, iest do ostrosłupa podobnégo maiącégo podstawę wielokątną, w stosunku tróymnożnym boków sobie odpowiadaiących.

PODANIE IX.

TWIERDZENIE.

Równych ostrosłupów tróykątnych, podstawy są odwrótnie proporcyonalné wysokościóm. I których ostrosłupów trôykątnych podstawy są odwrótnie proporcyonalné wysokościóm, té ostrosłupy są między sobą równé. Fig. 272.

Niechay będą ostrosłupy równé, maiącé podstawy tróykątné ABC, DEF, wiérzchołki zaś przy punktach G, H. Powiadám: że ostrosłupów ABCG, DEFH, podstawy i wysokości są odwrótnie proporcyonalné. Toiest: że iak się má podstawa ABC, do podstawy DEF, tak się má wysokość ostrosłupa DEFH, do wysokości ostrosłupa ABCG.

Dopełniymy równoległoboków AC, AG, GC, iako téż równoległoboków DF, DH, HF; i dopełniymy równoległościanów BGML, EHPO, témiż równoległobokami i przeciwnémi im płaszczyznami zawartych. Ponieważ ostrosłup ABCG, iest równy ostrosłupowi DEFH, ostrosłup zaś ABCG, szóstą iest częścią równoległościanu BGML, i ostrosłup DEFH, iest téż szóstą częścią równoległościanu EHPO. Będzie równoległościan BGML, równy równoległościanowi EHPO (I. p. V.). Równych zaś równoległościanów, podstawy i wysokości są odwrótnie proporcyonalné (XXXIV. XI.). Jest przeto iak podstawa BM, do podstawy EP, tak wysokość równoległościanu EHPO, do wysokości równoległościanu BGML. Lecz iak podstawa BM, do podstawy EP, tak tróykąt ABC, do tróykąta DEF; więc i iak tróykąt ABC, do tróykąta DEF, tak wysokość równoległościanu EHPO, do wysokości równoległościanu BGML. Lecz równoległościanu EHPO, wysokość taż sama iest, z wysokością ostrosłupa DEFH; równoległościanu zaś BGML, wysokość taż sama iest z wysokością ostrosłupa ABCG; iest zatém, iak podstawa ABC, do podstawy DEF, tak wysokość ostrosłupa DEFH, do wysokości ostrosłupa ABCG. Ostrosłupów więc ABCG, DEFH, podstawy i wysokości są odwrótnie proporcyonalné.

Niech znowu ostrosłupów ABCG, DEFH, podstawy i wysokości będą odwrótnie proporcyonalné, toiest: niech będzie, iak podstawa ABC, do podstawy DEF, tak wysokość ostrosłupa DEFH, do wysokości ostrosłupa ABCG.

Powiadám: że ostrosłup ABCG, równy iest ostrosłupowi DEFH.

Uczyniwszy toż samo wykréślénié, ponieważ iak podstawa ABC, do podstawy DEF, tak wysokość ostrosłupa DEFH, do wysokości ostrosłupa ABCG. Jak zaś podstawa ABC, do podstawy DEF, tak równoległobok BM, do równoległoboku EP: będzie téż i iak równoległobók BM, do równoległoboku EP, tak wysokość ostrosłupa DEFH, do wysokości ostrosłupa ABCG; lecz ostrosłupa DEFH, wysokość taż sama iest, z wysokością równoległościanu EHPO; i wysokość ostrosłupa ABCG, taż sama iest z wysokością równoległościanu BGML. Jest przeto iak podstawa BM, do podstawy EP, tak wysokość równoległościanu EHPO, do wysokości równoległościanu BGML; których zaś równoległościanów podstawy i wysokości są odwrótnie proporcyonalné, té równoległościany są równé. Równoległościan więc BGML, równy iest równoległościanowi EHPO. Lecz równoległościanu BGML, szóstą częścią iest ostrosłup ABCG; i równoległościanu EHPO, iest szóstą częścią ostrosłup DEFH: ostrosłup zatém ABCG, równy iest ostrosłupowi DEFH. Równych więc równoległościanów etc. etc. C. B. d. D.

PODANIE X.

TWIERDZENIE.

Każdy ostrokrąg iest trzecią częścią walca, równą z nim podstawę i wysokość maiącégo. Fig. 273.

Niechay ostrokrąg má też samę podstawę z walcém, toiest koło ABCD, i też samę wysokość. Powiadám: że ostrokrąg iest trzecią częścią walca: toiest, że walec iest trzy razy większy od ostrokręgu.

Jeżeli albowiém walec nieiest trzy razy większy od ostrokręgu, będzie albo większy, albo mnieyszy, od trzy razy wziętégo ostrokręgu. Przypuśćmy náprzód: że walec iest większy od trzy razy wziętégo ostrokręgu. Wykréślmy w kole ABCD, kwadrat ABCD; będzie więc kwadrat ABCD, większy od połowy koła ABCD.

Na kwadracie ABCD, wystáwmy graniasto-słup, równą z walcém maiący wysokość; będzie ten graniastosłup większy od połowy walca. Opisáwszy bowiém około koła ABCD, kwadrat, i na nim wystawiwszy graniastosłup równéy z walcém wysokości; będzie kwadrat w koło wpisany połową kwadratu na kole opisanégo. Na tych zaś kwadratach są wystawioné równéy wysokości graniastosłupy; graniastosłup więc wystawiony na kwadracie ABCD, będzie połową graniastosłupa wystawionégo na kwadracie na kole opisanym: maią się bowiém téż graniastosłupy iak podstawy (XXXII. XI.) Lecz walec mnieyszy iest od graniastosłupa wystawionégo na kwadracie opisuiącym koło ABCD. Graniastosłup zatém wystawiony na kwadracie ABCD, równy z walcém wysokości, iest większy od połowy walca. Przetniymy łuki AB, BC, CD, DA, na dwie równé części w punktach E, F, G, H, i poprowadźmy liniie prosté AE, EB, BF, FC, CG, GD, DH, HA. Każdy z tróykątów AEB, BFC, CGD, DHA, większy będzie od połowy odcinka koła ABCD, w którym się odcinku znáyduie, iako się to iuż wyżéy w podaniu drugiém téy xięgi dowiodło. Wystáwmy na każdym z tróykątów AEB, BFC, CGD, DHA, graniastosłupy równéy z walcém wysokości: więc i każdy z wystawionych graniastosłupów, większy będzie od połowy odcinka walcowégo, w którym się znáyduie; ieżeli bowiém przez punkta E, F, G, H, poprowadzimy równoodległé względém liniy prostych AB, BC, CD, DA, i dopełnimy na liniiach prostych AB, BC, CD, DA, równoległoboków, a na tych wystawimy równoległościany, równéy z walcém wysokości; każdégo z tak wystawionych równoległościanów, będą graniastosłupy wystawioné na tróykątach AEB, BFC, CGD, DHA, połowami. (II. w. VII. XII.). Są zaś odcinki walcowé od wystawionych równoległościanów mnieyszé: zaczém i graniastosłupy wystawioné na tróykątach AEB, BFC, CGD, DHA, większé są od połowy odcinków walca, w których się téż graniastosłupy zamykaią. Łuki pozostałé dzieląc podobnież na dwie równé części, i punkta podziałów łącząc z końcami podzielonych łuków przez liniie prosté, a na każdym z tróykątów wystawuiąc graniastosłupy równéy z walcém wysokości: podobné oraz podziały łuków i wykréśléniá graniastosłupów powtarzaiąc następnie; pozostaną się na koniec pewné walca odcinki, któré mnieyszé będą od nadmiaru, o który walec przewyższá trzy razy wzięty ostrokrąg (pod. przybr.). Przypuśćmy, że takiémi walca pozostałémi odcinkami, są té odcinki, których podstawami są odcinki koła AE, EB, BF, FC, CG, GD, DH, HA; pozostałá więc, część walca w graniastosłupie, którégo podstawą iest wielokąt AEBFCGDH, a wysokością zaś wysokość walca, będzie większá od trzy razy wziętégo ostrokręgu. Lecz graniastosłup, którégo podstawą wielokąt AEBFCGDH, a wysokość równá wysokości walca, iest trzy razy większy od ostrosłupa, którégo podstawą wielokąt AEBFCGDH, wiérzchołek zaś spólny z wiérzchołkiém ostrokręgu (I.w.VII.XII.) Zaczém i ostrosłup maiący za podstawę wielokąt AEBFCGDH, a wiérzchołek spólny z ostrokręgiém, większy iest od ostrokręgu maiącégo za podstawę koło ABCD. Lecz ténże sám ostrosłup iest i mnieyszy od ostrokręgu, w nim się bowiém zawiérá; co bydź nié może. Powiadám nadto: że ani walec mnieyszy iest od trzy razy wziętégo ostrokręgu. Jeżeli bowiém bydź to może, niech będzie walec mnieyszy od trzy razy wziętégo ostrokręgu, będzie więc odwrótnie ostrokrąg większy od trzeciéy części walca. W kole ABCD, wykréślmy kwadrat ABCD, który kwadrat ABCD, większy iest od połowy koła ABCD. Na kwadracie ABCD, wystáwmy ostrosłup maiący spólny z ostrokręgiém wiérzchołek: tak wystawiony ostrosłup większy iest od połowy ostrokręgu, Jak bowiém wyżéy dowiedliśmy, ieżeli około koła opiszémy kwadrat, będzie kwadrat ABCD, połową kwadratu na kole opisanégo: ieżeli więc na tych kwadratach wystawimy równoległościany, które oráz są i graniastosłupami, równéy z walcém wysokości. Będzie graniastosłup wystawiony na kwadracie ABCD, połową graniastosłupa wystawionégo na kwadracie koło opisuiącym: są bowiém między sobą iak podstawy. Dlá czego będą w tymże samym stosunku i trzecié części tych brył, toiest: ostrosłup, którégo podstawą kwadrat ABCD, będzie połową ostrosłupa, którégo podstawą iest kwadrat na kole opisany. Lecz ostrosłup wystawiony na kwadracie na kole opisanym, większy iest od ostrokręgu: iest bowiém w ostrosłupie zawarty; więc ostrosłup, którégo podstawą iest kwadrat ABCD, a wiérzchołek spólny z ostrokręgiém, większy iest od połowy ostrokręgu. Przetniymy łuki AB, BC, CD, DA, na dwie równé części w punktach E, F, G, H, i poprowadźmy liniie prosté AE, EB, BF, FC, CG, GD, DH, HA. Każdy z tróykątów AEB, BFC, CGD, DHA, większy iest od połowy odcinka koła, w którym się znáyduie. Wystawiwszy na każdym z tróykątów AEB, BFC, CGD, DHA, ostrosłupy, spólny z ostrokręgiém wiérzchołek maiącé; będzie każdy z ostrosłupów tym sposobém wystawionych, większy od połowy odcinka ostrokręgu, w którym iest zawarty. Co podobnym sposobém dowodzi się, iak wyżéy dowiedzioné było o graniastosłupach i odcinkach walca. Łuki pozostałé dzieląc na dwie równé części, i punkta podziałów łącząc z końcami podzielonych łuków przez liniie prosté, a na każdym z tróykątów wystawuiąc ostrosłupy, spólny z ostrokręgiém wiérzchołek maiącé: podobné oráz podziały łuków i wykréśléniá ostrosłupów powtarzaiąc następnie, pozostaną się nakoniec pewné ostrokręgu odcinki, które mnieyszé będą od nadmiaru, o który ostrokrąg przewyższá trzecią część walca. Przypuśćmy, że takiémi ostrokręgu odcinkami, są té odcinki, których podstawami są koła odcinki AE, EB, BF, FC, CG, GD, DH, HA. Pozostały więc ostrosłup, którégo podstawą wielokąt AEBFCGDH, a wiérzchołek spólny z ostrokręgiém, większy iest od trzeciéy części walca. Lecz ostrosłup, którégo podstawą wielokąt AEBFCGDH, wiérzchołek zaś spólny z ostrokręgiém: iest trzecią częścią graniastosłupa, którégo podstawą wielokąt AEBFCGDH, wysokość zaś spólná z wysokością walca. Graniastosłup więc, którégo podstawą wielokąt AEBFCGDH, a wysokość spólná z wysokością walca, większy iest od walca, którego podstawą iest koło ABCD. Lecz iest i mnieyszy: zawiérá się bowiém w walcu, co bydź nié może: nie iest przeto walec mnieyszy od trzy razy wziętégo ostrokręgu. Dowiedliśmy zaś: że ani iest większym od trzy razy wziętégo ostrokręgu; więc walec równy iest trzy razy wziętému ostrokręgowi, czyli co iedno iest, ostrokrąg iest trzecią częścią walca. Każdy więc ostrokrąg iest trzecią częścią etc. etc. C. B. d. D.

PODANIE XI.

TWIERDZENIE.

Ostrokręgi i walcé maiącé tęż samę wykość, są między sobą iak podstawy. Fig. 274.

Niech będą ostrokręgi i walce téyże saméy wysokości, których podstawami są koła ABCD, EFGH, osiami zaś liniie prosté KL, MN, a śrzednicami podstáw liniie prosté AC, EG. Powiadám: iak się má koło ABCD, do koła EFGH, tak się má ostrokrąg AL, do ostrokręgu EN.

Jeżeli bowiém to nie iest: będzie iak koło ABCD, do koła EFGH, tak ostrokrąg AL, do pewnéy bryły, albo mnieyszéy, albo większéy od ostrokręgu EN. Przypuśćmy náprzód, że iak się má koło ABCD, do koła EFGH, tak ostrokrąg AL, do bryły mnieyszéy od ostrokręgu EN, którą niech będzie X: bryła zaś Z, niech wyrażá nadmiar, o który ostrokrąg EN, większy iest od bryły X. Ostrokrąg zatém EN, iest równy bryłóm X, Z, razém wziętym. W kole EFGH, wykréślmy kwadrat EFGH, który większy będzie od połowy koła. Wystáwmy na kwadracie EFGH, ostrosłup równéy z ostrokręgiém wysokości: wystawiony więc ostrosłup, większy będzie od połowy ostrokręgu. Jeżeli bowiém około koła opiszémy kwadrat, i na nim wystawimy ostrosłup równéy z ostrokręgiém wysokości, będzie ostosłup wpisany połową ostrosłupa opisanégo: są bowiém między sobą iak podstawy (VI. XII.). Ostrokrąg zaś iest mnieyszy od ostrosłupa opisanégo;

zaczém ostrosłup, którégo podstawą kwadrat EFGH, wiérzchołek spólny z ostrokręgiém, większy iest od połowy ostrokręgu. Przetniymy łuki EF, FG, GH, HE, na dwie równé części w punktach O, P, R, S, i poprowadźmy liniie prosté: EO, OF, FP, PG, GR, RH, HS, SE. Każdy z tróykątów EOF, FPG, GRH, HSE, większy iest od połowy odcinka koła, w którym iest zawarty. Wystáwmy na każdym z tróykątów EOF, FPG, GRH, HSE, ostrosłup równéy z ostrokręgiém wysokości; więc i każdy z tak wystawionych ostrosłupów, większy iest od połowy odcinka ostrokręgu, w którym iest zawarty. Łuki pozostałé dzieląc na dwie równé części, i punkta podziałów łącząc z końcami łuków podzielonych przez liniie prosté, a na każdym z tróykątów wystawuiąc ostrosłupy równéy z ostrokręgiém wysokości: podobnó oraz podziały łuków, wykréśléniá ostrosłupów powtarzaiąc następnie, pozostaną się nakoniec pewné odcinki ostrokręgu, które mnieyszé będą od bryły Z, (pod. przyb.). Przypuśćmy, że takiémi ostrokręgu odcinkami, są odcinki stoiącé na koła odcinkach EO, OF, FP, PG, GR, RH, HS, SE. Pozostały przeto ostrosłup, którégo podstawą wielokąt EOFPGRHS, wysokość zaś taż sama z wysokością ostrokręgu, większy iest od bryły X. Wykréślmy w kole ABCD, wielokątowi EOFPGRHS, podobny wielokąt ATBYCVDQ, i na nim wystáwmy ostrosłup równéy wysokości z ostrokręgiém AL. Ponieważ iest iak kwadrat ze śrzednicy AC, do kwadratu ze śrzednicy EG, tak wielokąt ATBYCVDQ, do wielokąta EOFPGRHS, (I. XII.). Jak zaś kwadrat z AC, do kwadratu z EG, tak koło ABCD, do koła EFGH, (II. XII.). Będzie iak koło ABCD, do koła EFGH, tak wielokąt ATBYCVDQ, do wielokąta EOFPGRHS, (XI. V.). Lecz iak koło ABCD, do koła EFGH, tak ostrokrąg AL, do bryły X; i iak wielokąt ATBYCVDQ, do wielokąta EOFPGRHS, tak ostrosłup, którégo podstawą wielokąt ATBYCVDQ, wiérzchołkiém zaś punkt L, do ostrosłupa, którégo podstawą wielokąt EOFPGRHS, a wiérzchołek punkt N. Jak więc ostrokrąg AL, do bryły

X, tak ostrosłup, którégo podstawą wielokąt ATBYCVDQ, a wiérzchołek punkt L, do ostrosłupa, którégo podstawą wielokąt EOFPGRHS, a wiérzchołek punkt N. Ostrokrąg zaś AL, większy iest od ostrosłupa w nim zawartégo. Większá przeto iest i bryła X, od ostrosłupa zawartégo w ostrokręgu EN. Lecz i mnieyszá, iak się wyżéy okazało: co bydź nié może. Nie iest więc: iak koło ABCD, do koła EFGH, tak ostrokrąg AL, do bryły mnieyszéy od ostrokręgu EN. Dowiedzie się podobnież: że ani iak koło EFGH, do koła ABCD, tak ostrokrąg EN, do pewnéy bryły mnieyszéy od ostrokręgu AL. Powiadám nadto: że ani iak koło ABCD, do koła EFGH, tak ostrokrąg AL, do bryły większéy od ostrokręgu EN. Jeżeli bowiém bydź to może niech będzie, iak koło ABCD, do koła EFGH, tak ostrokrąg AL, do bryły większéy od ostrokręgu EN, którą niech będzie bryła J. Więc położywszy wyrazy śrzednié na mieyscé skraynych, a skrayné na mieyscé śrzednich, będzie iak koło EFGH, do koła ABCD, tak bryła J, do ostrokręgu AL.

Będzie zaś iak bryła J, do ostrokręgu AL, tak ostrokrąg EN, do pewnéy bryły mnieyszéy od ostrokręgu AL, gdyż bryła J, większá iest od ostrokręgu EN; zaczém i iak koło EFGH, do koła ABCD, tak ostrokrąg EN, do pewnéy bryły mnieyszéy od ostrokręgu AL, cośmy wyżéy dowiedli bydź niepodobném. Nie iest więc: iak koło ABCD, do koła EFGH, tak ostrokrąg AL, do pewnéy bryły większéy od ostrokręgu EN. Dowiedliśmy zaś: że ani iak koło ABCD, do koła EFGH, tak ostrokrąg AL, do bryły mnieyszéy od ostrokręgu EN. Zaczém iak koło ABCD, do koła EFGH, tak ostrokrąg AL, do ostrokręgu EN. Lecz iak ostrokrąg do ostrokręgu, tak walec do walca (XV. V.); są bowiém obadwa obudwóch trzeciémi częściami, (X. XII.). Więc i iak koło ABCD, do koła EFGH, tak są walce równéy wysokości na tychże kołach wystawioné. Dlá czego ostrokręgi i walce równéy wysokości, są między sobą iak podstawy. C B. d. D.

PODANIE XII.

TWIERDZENIE.

Ostrokręgi i walce podobné, są między sobą w stosunku tróymnożnym śrzednic podstáw swoich. Fig. 275.

Niech będą ostrokręgi i walce podobné, których podstawami są koła ABCD, EFGH, śrzednicami zaś podstáw liniie prosté AC, EG, a osiami ostrokręgów i walców liniie prosté KL, MN. Powiadám: że ostrokrąg, którégo podstawą koło ABCD, wiérzchołkiém zaś punkt L, iest do ostrokręgu, którégo podstawą koło EFGH, wiérzchołkiém punkt N, w stosunku tróymnożnym śrzednic AC, EG.

Jeżeli bowiém ostrokrąg ABCDL, do ostrokręgu EFGHN, nie iest w stosunku tróymnożnym śrzednic AC do EG, będzie ostrokrąg ABCDL, do pewnéy bryły mnieyszéy lub większéy od ostrokręgu EFGHN, w stosunku tróymnożnym śrzednic AC, EG. Przypuśćmy náprzód: że ostrokrąg ABCDL, do pewnéy bryły mnieyszéy od ostrokręgu EFGHN, którą niech będzie bryła X, iest w stosunku tróymnożnym śrzednic AC, EG; uczyniwszy we wszystkiém toż samo wykréślénié, iakié w podaniu poprzedzaiącém; dowiedzie się, iak w poprzedzaiącém podaniu, że ostrosłup, którégo podstawą wielokąt EOFPGRHS, wiérzchołkiém zaś punkt N, większy iest od bryły X. Wykréślmy w kole ABCD, wielokątowi EOFPGRHS, podobny wielokąt ATBYCVDQ, na którym wykréślmy ostrosłup maiący spólny z ostrokręgiém wiérzchołek: i z tróykątów zawiéraiących ostrosłup, którégo podstawą iest wielokąt ATBYCVDQ, wiérzchołkiém zaś punkt L, niech będzie iednym tróykąt LAQ; z tróykątów zaś zawiéraiących ostrosłup, którégo podstawą wielokąt EOFPGRHS, a wiérzchołkiém punkt N, niech będzie iednym tróykąt NES: poprowadźmy ieszcze linie prosté KQ, MS. Ponieważ ostrokrąg ABCDL, podobny iest ostrokręgowi EFGHN; będzie iak AC do EG, tak oś KL, do osi MN (XXIV. def. XI.). Jak zaś AC do EG, tak AK do EM, więc iak AK do EM, tak

KL do MN. A odmiéniaiąc mieyscé wyrazów śrzednich: iak AK do KL, tak EM do MN. I kąty AKL, EMN, są równé, iako prosté. Około więc kątów równych, boki są proporcyonalné: i dlá tego tróykąt AKL (VI. VI.) podobny iest tróykątowi EMN. Znowu ponieważ iest iak AK do KQ, tak EM do MS, i są około kątów równych AKQ, EMS, iako bowiém częścią cztérech kątów prostych przy śrzodku K, iest kąt AKQ, tąż samą częścią cztérech kątów prostych przy M, iest kąt EMS; będzie tróykąt AKQ, podobny tróykątowi EMS. A że z dowodzéniá, iak AK do KL, tak EM do MN: równá zaś liniia prostá AK, linii prostéy KQ, i liniia prostá ME, równá iest linii prostéy MS, będzie: iak QK do KL, tak SM do MN. Przeto około kątów równych bo prostych QKL, SMN, są boki proporcyonalné. Dlá czego tróykąt LKQ, podobny iest tróykątowi NMS. A ponieważ dlá podobieństwa tróykątów AKL, EMN, iest: iak LA do AK, tak NE do EM; dlá podobieństwa zaś tróykątów AKQ, EMS, iest, iak KA do AQ, tak ME do ES; będzie przez odmianę porównywaniá (XXII. V.) wielkości naprzemian iak LA do AQ, tak NE do ES. Znowu ponieważ dlá podobieństwa tróykątów LQK, NMS, iest: iak LQ do QK, tak NS do SM: i dlá podobieństwa tróykątów KAQ, MES, iak QK do QA, tak MS do SE: będzie przez odmianę porównywaniá wielkości naprzemian iak LQ do QA, tak NS do SE. Dowiedliśmy zaś: że iak QA do AL, tak SE do EN; więc znowu przez odmianę porównywaniá wielkości naprzemian: iak LQ do AL, tak SN do NE. Tróykątów zatém LQA, NSE, boki są proporcyonalné. Są przeto tróykąty LQA, NSE, równokątné, i między sobą podobné (V. VI.). Dlá czego i ostrosłup, którégo podstawą tróykąt AKQ, wiérzchołkiém zaś punkt L, podobny iest ostrosłupowi, którégo podstawą tróykąt EMS, a wiérzchołkiém punkt N: są bowiém w tych ostrosłupach (B. XI.) i kąty bryłowé między sobą równé, i téż ostrosłupy zawarté są podobnémi w równéy liczbie płaszczyznami. Ostrosłupy zaś podobné, i maiącé podstawy tróykątné, są między sobą w stosunku tróymnożnym boków odpowiadaiących (VIII. XII.); więc ostrosłup AKQL, do ostrosłupa EMSN, iest w stosunku tróymnożnym boku AK, do boku EM. Podobnież z punktów D, V, C, Y, B, T, do punktu K, z punktów zaś H, R, G, P, F, O, do punktu M, prowadząc liniie prosté, a na tróykątach wystawniąc ostrosłupy spólné z okręgami maiącé wiérzchołki, dowiedziémy: że i każdy z ostrosłupów, do każdégo w tymże samym porządku ostrosłupa, iest w stosunku tróymnożnym boków odpowiadaiących AK, EM, toiest śrzednic AC, EG. Lecz iak iedén z poprzedników do iednégo z następników, tak wszystkié poprzedniki, do wszystkich następników (XII. V.); iest przeto iak ostrosłup AKQL, do ostrosłupa EMSN, tak cały ostrosłup, którego podstawą wielokąt ATBYCVDQ, wiérzchołkiém zaś punkt L, do całégo ostrosłupa, którégo podstawą wielokąt EOFPGRHS, a wiérzchołkiém punkt N. Dlá czego i ostrosłup, którégo podstawą wielokąt ATBYCVDQ, wiérzchołkiém zaś punkt L, do ostrosłupa, którégo podstawą wielokąt EOFPGRHS, a wiérzchołkiém punkt N, iest w stosunku tróymnożnym AC do EG. Z założéniá zaś ostrokrąg, którégo podstawą koło ABCD, i wiérzchołkiém punkt L, do bryły X, iest w stosunku tróymnożnym AC do EG; iak więc ostrokrąg, którégo podstawą koło ABCD, wiérzchołkiém zaś punkt L, do bryły X, tak ostrosłup, którégo podstawą wielokąt ATBYCVDQ, wiérzchołkiém zaś punkt L, do ostrosłupa, którégo podstawą wielokąt EOFPGRHS, a wiérzchołkiém punkt N. Rzeczony zaś ostrokrąg większy iest od zawartégo w nim ostrosłupa, przeto téż i bryła X, większą iest od ostrosłupa, którégo podstawą wielokąt EOFPGRHS, wiérzchołkiém zaś punkt N (XIV. V.). Lecz i mnieyszá, co bydź nié może. Nie iest więc ostrokrąg, którégo podstawą koło ABCD, a wiérzchołkiém punkt L, do pewnéy bryły mnieyszéy od ostrokręgu, którégo podstawą koło EFGH, a wiérzchołkiém punkt N, w stosunku tróymnożnym śrzednicy AC, do śrzednicy EG. Podobnież dowiedziémy, że ani ostrokrąg EFGHN, do pewnéy bryły mnieyszéy od ostrokręgu ABCDL, iest w stosunku tróymnożnym śrzednicy EG, do śrzednicy AC.

Powiadám nadto: że ani ostrokrąg ABCDL, do bryły większéy od ostrokręgu EFGHN, iest w stosunku tróymnożnym śrzednicy AC, do śrzednicy EG. Jeżeli bowiém bydź to może: niech ostrokrąg ABCDL, má się do bryły większéy od ostrokręgu EFGHN, którą niech będzie bryła Z, w stosunku tróymnożnym śrzednicy AC, do śrzednicy EG. Przełożywszy wyrazy śrzednié na mieyscé skraynych, skrayne zaś na mieyscé śrzednich; będzie bryła Z, do ostrokręgu ABCDL, w stosunku tróymnożnym śrzednicy EG, do śrzednicy AC. Będzie zaś iak bryła Z, do ostrokręgu ABCDL, iak ostrokrąg EFGHN, do pewnéy bryły mnieyszéy od ostrokręgu ABCDL, bo bryła Z, większá iest od ostrokręgu EFGHN; więc i ostrokrąg EFGHN, do pewnéy bryły mnieyszéy od ostrokręgu ABCDL, będzie w stosunku tróymnożnym śrzednicy EG, do śrzednicy AC: cośmy iuż wyżéy dowiedli bydź niepodobném. Nie iest zatém ostrokrąg ABCDL, do bryły większéy od ostrokręgu EFGHN, w stosunku tróymnożnym śrzednicy AC, do śrzednicy EG. Dowiedliśmy zaś: że ostrokrąg

ABCDL, ani do bryły mnieyszéy od ostrokręgu EFGHN, iest w stosunku tróymnożnym średnicy AC, do średnicy EG. Dlá czego ostrokrąg ABCDL, do ostrokręgu EFGHN, iest w stosunku tróymnożnym średnicy AC, do średnicy EG. Jak się zaś má ostrokrąg do ostrokręgu, tak się má walec do walca (XV. V.): dowiedliśmy bowiém, że każdy ostrokrąg iest trzecią częścią walca równéy z nim podstawy i wysokości. Więc i walec má się do walca w stosunku tróymnożnym średnicy AC, do średnicy EG. Podobné zatém ostrokręgi i walce, są między sobą w stosunku tróymnożnym średnic swoich podstáw. C. B. d. D.

PODANIE XIII.

TWIERDZENIE.

Jeżeli walec przecięty iest płaszczyzną równoodległą do płaszczyzn przeciwnych; walce z tego przecięciá wynikaiącé, będą się miały do siebie iak osi. Fig. 276.

Walec AD, niech będzie przecięty płaszczyzną równoodległą od płaszczyzn AB, CD, i niech płaszczyzna przecinaiącá spotyká oś EF, w punkcie K, niech oráz liniia prostá GH, będzie spólném przecięciém płaszczyzny GH, z powiérzchnią walca AD. Niech ieszcze AEFC, będzie równoległobokiém prostokątnym, którégo obrotém około linii prostéy EF, opisuie się walec AD, w któremkolwiek iego położéniu; liniia zaś prostá GK, niech wyrażá spólné przecięcié płaszczyzny GH, z płaszczyzną równoległoboku prostokątnégo AEFC. Ponieważ płaszczyzny równoodległé AB, GH, przecięté są płaszczyzną AEKG; spólné tych płaszczyzn przecięciá, liniie prosté AE, GK, będą równoodległé, (XVI. XI.). Dlá czego czworokąt AK, iest równoległobokiém, i liniia prostá KG, iest równá linii prostéy EA, to iest promieniowi koła AB. Podobnymże sposobém i wszystkié liniie prosté poprowadzoné z punktu K, do obwodu linii GH; dowiodą się, że są równémi promieniom koła AB, a zatém równémi między sobą. Zaczém liniia GH, iest okręgiém koła (XV. def. I.) którégo śrzodkiém iest punkt K, płaszczyzna więc GH, dzieli walec AD, na walce AH, GD: można ié bowiém wystawić sobie iak opisané obrotém równoległoboków AK, GF, około liniy prostych EK, KF. Powiadám: że iak się má walec AH, do walca HC, tak EK do osi KF.

Przedłużmy oś EF, z obudwóch strón do punktów L, M, i odetniéymy osi EK, iłékolwiek równych liniy prostych EN, NL. Osi zaś FK, iłékolwiek równych liniy prostych FX, XM; przez punkta zaś L, N, X, M, poprowadźmy płaszczyzny równoodległé względém płaszczyzn AB, CD. Jak dowiedliśmy o płaszczyźnie GH, tak podobnież płaszczyzn poprowadzonych, i przedłużonéy powiérzchni walca spólnémi przecięciami będą koła, których śrzodkami są punkta L, N, X, M, i odcięté będą témiż płaszczyznami walce PR, RB, DT, TQ. Ponieważ osi LN, NE, EK, są między sobą równé, będą walce PR, RB, BG, między sobą iak podstawy (XI. XII.). Równé zaś są téż podstawy, więc i walce PR, RB, BG, są równé. Ponieważ zaś osi LN, NE, EK, są między sobą równé, i są walce PR, RB, BG, równé, wielość nadto osi LN, NE, EK, równá iest wielości walców PR, RB, BG; zaczém iak wielokrotná iest oś KL, względém osi KE, tak wielokrotnym będzie i walec PG, względém walca GB. Dlá téy saméy przyczyny, iak wielokrotną iest oś MK, względém osi KF, tak wielokrotnym iest i walec QG, względém walca GD. A ieżeli oś KL, iest równá, większá lub mnieyszá od osi KM; będzie téż i walec PG, równy, większy lub mnieyszy od walca GQ. Do cztérech więc wielkości, toiest: do osi EK, KF, i walców BG, GD, przybrané są iakożkolwiek równie wielokrotné wielkości: do osi EK, i walca BG, oś KL, i walec PG: do osi zaś KF, i walca GD, iakożkolwiek równie wielokrotné, toiest oś KM, i walec GQ. J dowiedziono; ieżeli oś KL, przewyższá, równą lub mnieyszą iest od osi KM; walec téż PG, przewyższá, równy lub mnieyszy iest od walca GQ. Zaczém iak się má oś EK, do osi KF, tak walec BG, do walca GD. Jeżeli więc walec przecięty iest etc. etc. C. B. d. D.

PODANIE XIV.

TWIERDZENIE.

Ostrokręgi i walce na równych podstawach stoiącé, maią się do siebie iak ich wysokości. Fig. 277.

Niech na równych podstawach AB, CD, stoią walce EB, FD; powiadám: że tak się má walec EB, do walca FD, iak się má oś GH, do osi KL.

Przedłużmy oś KL, do punktu N, tak, żeby przedłużénié LN, było równé osi GH; i wystáwmy sobie walec CM, około osi LN. Ponieważ walce EB, CM, tęż samę maią wysokość, są między sobą iak podstawy (XI. XII.). Podstawy zaś są równé; więc i walce EB, CM, będą między sobą równé. A ponieważ walec FM, przecięty iest płaszczyzną CD, równoodległą względém płaszczyzn przeciwnych; będzie iak walec CM, do walca FD, tak oś LN, do osi KL, XIII. XII.). Jest zaś walec CM, równy walcowi EB, i oś LN, równá osi GH. Jak się więc má walec EB, do walca FD, tak oś GH, do osi KL. Lecz iak walec EB, do walca FD, tak ostrokrąg ABG, do ostrokręgu CDK, (XV. V.) są bowiém ostrokręgi trzeciémi częściami walców (X. XII.). Zaczém i iak oś GH, do osi KL, tak się má ostrokrąg ABG, do ostrokręgu CDK, i walec EB, do walca FD. Ostrokręgi więc i walce na równych etc. etc. C. B. d. D.

PODANIE XV.

TWIERDZENIE.

Równych ostrokręgów i walców podstawy i wysokości, są odwrótnie proporcyonalné; a których ostrokręgów i walców podstawy i wysokości są odwrótnie proporcyonalné, té ostrokręgi i walce są między sobą równé. Fig. 278.

Niech będą równé ostrokręgi i walce, których podstawami są koła ABCD, EFGH, średnicami tychże kół liniie prosté AC, EG, osiami zaś liniie prosté KL, MN, któré są razém ostrokręgów i walców wysokościami: niech będą ostrokręgi ALC, ENG, walce zaś AX, EO. Powiadám: że walców AX, EO, podstawy i wysokości są odwrótnie proporcyonalné, toiest, że iak się má podstawa ABCD, do podstawy EFGH, tak się má wysokość MN, do wysokości KL.

Wysokość KL, albo iest równá wysokości MN, albo nie równá. Niech náprzód będzie równá, iest zaś walec AX, równy walcowi EO. A ostrokręgi i walce równéy wysokości, są między sobą iak podstawy (XI. XII.); równá (A. V.) więc iest podstawa ABCD, podstawie EFGH, a zatém iak się má podstawa ABCD, do podstawy EFGH, tak wysokość MN, do wysokości KL. Niech znowu wysokość KL, nie będzie równą wysokości MN, ale niech wysokość MN, będzie większą od wysokości KL, odetnieymy na wysokości MN, linią prostą MP, równą wysokości KL, i przez punkt P, niech walec EO, przecięty będzie płaszczyzną TYS, równoodległą względém płaszczyzn kół EFGH, RO; spolném więc przecięciém płaszczyzny TYS, z powierzchnią walca EO, będzie okrąg koła: a bryła ES, będzie walcém, którégo podstawą koło EFGH, wysokością zaś oś MP. Ponieważ walec AX, równy iest walcowi EO, będzie: iak walec AX, do walca ES, tak walec EO, do walca ES, (VII. V.). Lecz iak walec AX, do walca ES, tak podstawa ABCD, do podstawy EFGH. Walce bowiém AX, ES, tęż samę maią wysokość. Jak zaś walec EO, do walca ES, tak wysokość MN, do wysokości MP, (XIII. XII.) bo walec EO, przecięty iest płaszczyzną TYS, równoodległą względém płaszczyzn przeciwnych. Jest więc: iak podstawa ABCD, do podstawy EFGH, tak wysokość MN, do wysokości MP. Równá zaś wysokość MP, wysokości KL; dlá tego, iak podstawa ABCD, do podstawy EFGH, tak wysokość MN, do wysokości KL. Równych zatém walców AX, EO, podstawy i wysokości, są odwrótnie proporcyonalné.

Niech znowu walców AX, EO, podstawy i wysokości będą odwrótnie proporcyonalné, toiest: niech się má podstawa ABCD, do podstawy EFGH, iak wysokość MN do wysokości KL. Powiadám: że walec AX, iest równy walcowi EO.

Niechay náprzód podstawa ABCD, będzie równą podstawie EFGH, ponieważ iak podstawa ABCD, do podstawy EFGH, tak wysokość MN, do wysokości KL; będzie (A. V.) wysokość MN, równá wysokości KL. Dlá czego i walec AX, równy będzie walcowi EO. Lecz niech nie będzie podstawa ABCD, równą podstawie EFGH, ale od niéy większą. Ponieważ podstawa ABCD, má się do podstawy EFGH, iak wysokość MN, do wysokości KL; będzie wysokość MN, większá od wysokości KL. Uczyniwszy toż samo, co wyżéy wykréśléniè: ponieważ iak podstawa ABCD, do podstawy EFGH, tak wysokość MN, do wysokości KL; a wysokość KL, iest równá wysokości MP; będzie iak podstawa ABCD, do podstawy EFGH, tak walec AX, do walca ES: tęż samę bowiém maią wysokość. Jak zaś wysokość MN, do wysokości MP, czyli KL, tak walec EO, do walca ES.

Jest więc, iak walec AX, do walca ES, tak walec EO, do walca ES. Walec zatém AX, równy iest walcowi EO. Podobnież toż samo dowiedziémy i w ostrokręgach. Równych więc ostrokręgów i walców etc. etc. C. B. d. D.

PODANIE XVI.

ZAGADNIENIE.

Maiąc dané dwa koła spółśrzodkowé, wykréślić w kołé większém wielokąt parzystą liczbę boków równych maiący, któréгoby obwód nie dotykáł się okręgu koła mnieyszégo. Fig. 279.

Niech będą dané dwa koła ABCD, EFGH, maiącé spólny śrzodek w punkcie K. Potrzeba w kole większém, wykréślić wielokąt parzystą liczbę boków równych maiący, tak, iżby obwód iego nie dotykáł się okręgu koła mnieyszégo.

Poprowadźmy przez śrzodek K, liniią prostą BD, i z punktu G, wyprowadźmy do téyże linii prostéy BD, prostopadłą GA, przedłużywszy ią do C; liniia więc prostá AC, będzie styczną z kołém EFGH, (XVI. III.). Dzieląc łuk BAD, na dwie równé części, i iego połowę znowu na dwie równé części, taki podziáł oráz następnie powtarzaiąc zawsze, pozostanie się nakoniec łuk mnieyszy od łuku AD, (pod. przyb.) przypuśćmy, że tym łukiém, iest łuk LD; z punktu L, wyprowadźmy do linii prostéy BD, prostopadłą LM, i przedłużmy ią do punktu N, poprowadźmy oráz liniie prosté LD, DN, iest przeto liniia prostá (III. III. i. IV. I.) LD, równá linii prostéy DN. A ponieważ liniia prostá LN, równoodległá iest, względém linii prostéy AC, styczněy z kołém EFGH; liniia więc prostá LN, nié może się dotykać okręgu koła EFGH; a tém mniéy dotykać mogą okręgu koła EFGH, liniie prosté LD, DN. Jeżeli zatém na okręgu koła ABCD, przenosić będziémy następnie liniie prosté, równé linii prostéy LD, wykréślimy w niém wielokąt parzystą liczbą równych boków ograniczony, i iego obwód nie dotykać się będzie okręgu koła mnieyszégo. C. B. d. R.

PODANIE

PRZYBRANE II.

Jeżeli są dwa różnoboki ABCD, EFGH, wpisané w koła, których śrzodkami punkta K, L, w tych zaś różnobokach, boki AB, DC, iako téż boki EF, HG, są równoodległé, pozostałé zaś cztéry AD, BC; EH, FG, są między sobą równé: i niech będzie bok AB, większy od boku EF, a bok DC, większy od boku HG, będzie liniia prostá KA, promiéń koła, w którém boki różnoboku są większé, większá od linii prostéy LE, promienia koła drugiégo. Fig. 280.

Jeżeliby albowiém liniia prostá KA, nie była większą od linii prostéy LE; będzie liniia prostá KA, albo równá linii prostéy LE, albo od niéy mnieyszá. Przypuśćmy piérwszé: że liniia prostá KA, iest równá linii prostéy LE. Ponieważ w kołach ro-wnych, liniie prosté AD, BC, równé są liniióm prostym EH, FG, będą łuki AD, BC, równé łukóm EH, FG, (XXVIII. III.). Ze zaś liniie prosté AB, DC, większé są od liniy prostych, EF, HG, iedna od drugiéy: będą łuki AB, DC, większé od łuków EF, HG. Przeto okrąg cały koła ABCD, większy iest od całégo okręgu koła EFGH. Lecz są téż okręgi i równé, co bydź nié może: zaczém liniia prostá KA, nie iest równą linii prostéy LE.

Przypuśćmy znowu: że liniia prostá KA, mnieyszą iest od linii prostéy LE. Na linii prostéy LE, odetniéymy liniią prostą LM, równą linii prostéy KA, i z punktu L, długością linii prostéy LM, zakréślmy koło MNOP, którégo okrąg niech spotyká poprowadzoné liniie prosté LF, LG, LH, LE, w punktach N, O, P, M; poprowadziwszy liniie prosté MN, NO, OP, PM, té względém liniy prostych EF, FG, GH, HE, będą (II. VI.) równoodległé, i od nich mnieyszé, każdá od każdéy. Ponieważ liniia prostá EH, większá iest od linii prostéy MP, będzie i liniia prostá AD, większá od linii prostéy MP. Są zaś koła ABCD, MNOP, równé między sobą: więc łuk AD, większy iest od łuku MP. Dlá téyże samėy przyczyny łuk BC, większy iest od łuku NO. A ponieważ liniia prostá AB, większá iest od linii prostéy EF, którá znowu większą iest od linii prostéy MN; będzie liniia prostá AB, tém bardziéy większą od linii prostéy MN. Jest więc łuk AB, większy od łuku MN. Dlá téyże samėy znowu przyczyny łuk DC, większy iest od łuku PO. Cały zatém okrąg koła ABCD, większy iest od całégo okręgu koła MNOP. Lecz téż okręgi są i równé, co bydź nié może; nie iest więc liniia prostá KA, mnieyszá od linii prostéy LE; dowiedliśmy zaś, że liniia prostá KA, ani iest równą linii prostéy LE: przeto liniia prostá KA, iest koniecznie większą od linii prostéy LE. C. B. d. D.

Wniosek 1. Jeżeli dwa tróykąty równoramienné ABC, DEF, są wpisané w koła, i ieżeli boki AC, CB, DF, FE, są równé między sobą: podstawa zaś AB, większá iest od podstawy DE, dowiedziémy podobnież, że promiéń koła opisanégo na tróykącie ABC, więcejkszy iest od promienia koła opisanégo na tróykącie DFE. Fig. 281.

Wniosek 2. Jeżeli dwa tróykąty równoramienné ABC, DEF, są wpisané w koła, i ieżeli boki piérwszégo są większé od boków drugiégo, dowiedziémy podobnież, że promiéń koła opisanégo na tróykącie ABC, większy iest od promienia koła opisanégo na tróykącie DEF.

PODANIE XVII.

TWIERDZENIE.

Maiąc dané dwie kule spółśrzodkowé, wpisać w kuli większéy wielościan, któregoby powierzchniá nie dotykała się kuli mnieyszéy. Fig. 282.

Wystáwmy sobie dwie kuli maiącé spólny śrzodek A, potrzeba w kuli większéy wykréślić wielościan, któregoby powiérzchniá nie dotykała się kuli mnieyszéy.

Przetniéymy kulę płaszczyzną przechodzącą przez śrzodek; przecięcá więc będą kołami; kula bowiém tworzy się obrotém półkola około swoiéy niewzruszonéy śrzednicy; w którémkolwiek przeto położéniu uważaiąc toż półkole, płaszczyzna przez niego poprowadzoná i przedłużoná, zostawi na powierzchni kuli okrąg koła; i oczywistá, że taż płaszczyzna będzie kołém naywiększém: bo śrzednica kuli, która oráz iest śrzednicą koła przecinaiącégo, większá iest od wszystkich liniy prostych, w kole lub w kuli poprowadzonych (XV. III.). Przypuśćmy więc, że w kuli większéy płaszczyzna przecinaiącá będzie kołém BCDE, w mnieyszéy zaś kuli, że taż płaszczyzna przecinaiącá będzie kołém FGH: poprowadźmy w tych kołach śrzednice BD, CE, pod kątami prostémi względém siebie. Z dwóch kół spółśrzodkowych BCDE, FGH, w większém kole BCDE, wykréślmy wielokąt parzystą liczbę boków równych maiący (XVI. XII.), któregoby obwód nie dotykał się okręgu koła mnieyszégo; i niech bokami tegoż wielokąta w czwártéy części okręgu koła BE, będą liniie prosté BK, KL, LM, ME. Poprowadziwszy liniią prostą KA, przedłużmy ią do N: a z punktu A, do płaszczyzny koła BCDE, wyprowadźmy liniią prostopadłą AX, spotykaiącą powiérzchnią kuli w punkcie X. Przez liniią prostą AX, i przez każdą z dwóch liniy prostych BD, KN, poprowadźmy płaszczyzny, któré podług tego, co się wyżéy powiedziało, zostawią na powiérzchni kuli okręgi kół wielkich. Niech tych płaszczyzn śrzednicami będą liniie prosté BD, KN, półkolami zaś BXD, KXN. Ponieważ liniia prostá AX, prostopadłą iest do płaszczyzny koła BCDE, będą wszystkié płaszczyzny przez liniią prostą AX, przechodzącé, prostopadłé do płaszczyzny koła BCDE (XVIII. XI.). Dlá czego i półkola BXD, KXN, są prostopadłé do téyże płaszczyzny. I ponieważ półkola BED, BXD, KXN, są równé, na równych bowiém śrzednicach są wykréśloné; będą i czwárté części kół BE, BX, KX, między sobą równé. Ilé zatém boków wielokąta iest na łuku BE, tylé będzie na łukach BX, KX, boków równych bokóm BK, KL, LM, ME. Wykréślmy ié, i niech będą BO, OP, PR, RX, KS, ST, TY, YX. Poprowadźmy liniie prosté OS, PT, RY, i z punktów O, S, do liniy prostych AB, AK, wyprowadźmy liniie prostopadłé OV, SQ. Ponieważ płaszczyzna BOXD, prostopadłá iest do płaszczyzny BCDE, a na iednéy z tych płaszczyzn BOXD, poprowadzoná iest liniia prostá OV, prostopadłá do spólnégo tychże płaszczyzn przecięciá AB; będzie liniia prostá OV, prostopadłą do płaszczyzny BCDE (IV. def. XI.). Dlá téy saméy przyczyny liniia prostá SQ, prostopadłą będzie do téyże płaszczyzny: bo płaszczyzna KSXN, prostopadłą iest do płaszczyzny BCDE. Poprowadźmy liniią prostą VQ. Ponieważ w półkolach równych BXD, KXN, wzięté są łuki równé BO, KS, i poprowadzoné liniie prostopadłé OV, SQ, do śrzednic kół; będzie liniia prostá OV, równá linii prostéy SQ; liniia zaś prostá BV, równá linii prostéy KQ. Jest zaś i całá liniia prostá BA, równá całéy linii prostéy KA, więc i pozostałá liniia prostá VA, iest równá pozostałéy linii prostéy QA; iak więc BV do VA, tak KQ do QA. Jest przeto liniia prostá VQ, równoodległą względém linii prostéy BK (II. VI.). A ponieważ każdá z dwóch liniy prostych

OV, SQ, iest prostopadłá do płaszczyzny koła BCDE, będzie liniia prostá OV, równoodległą względém linii prostéy SQ (VI. XI.). Dowiedliśmy zaś, że liniia prostá OV, iest także równá linii prostéy SQ, więc liniie prosté QV, SO, są równé i równoległé (XXXIII. I.). A ponieważ liniia prostá QV, równoodległą iest względém linii prostéy SO, i względém linii prostéy KB; będzie i liniia prostá OS, równoodległą względém linii prostéy BK (IX. XI.). Więc liniie prosté BO, KS, są na téyże saméy płaszczyźnie z liniiami równoodległémi OS, BK, i czworokąt KBOS, na iednéy będzie płaszczyźnie. Poprowadziwszy liniie prosté PB, TK, i z punktów P, T, wyprowadziwszy liniie prostopadłé do liniy prostych AB, AK, tymże samym sposobém dowiedzie się liniia prostá TP, bydź równoodległą względém linii prostéy KB, iak dowiedliśmy liniią prostą SO, bydź równoodległą względém téyże saméy linii prostéy KB. Dlá czego liniia prostá TP, iest równoodległą względém linii prostéy SO, i czworokąt SOTP, na iednéy będzie płaszczyźnie. Dlá téyże saméy ieszcze przyczyny, czworokąt TPRY, iest na iednéy płaszczyźnie. Jest zaś na iednéy płaszczyźnie tróykąt YRX (II. XI.): ieżeli więc z punktów O, S, P, T, R, Y, wystawimy sobie do śrzodka A, poprowadzoné liniie prosté, wykréśli się pewná bryła zawartá między łukami BX, KX, złożoná z ostrosłupów, których podstawami są czworokąty KBOS, SOPT, TPRY, i tróykąt YRX, wiérzchołkiém zaś punkt A. Jeżeli zaś na każdym z boków KL, LM, ME, tak iak na boku BK, uczynimy podobné wykréślénié, i toż samo w pozostałych trzech czwártych częściach koła, i w drugiéy półkuli; utworzy się bryła wielościenná w kuli wykréśloná złożoná z ostrosłupów, ktorych podstawami są rzeczoné czworokąty, i tróykąt YRX, oráz czworokąty, i tróykąty, tymże czworokątóm KBOS, SOPT, TPRY, i tróykątowi YRX, odpowiadaiącé, a maiących spólny wiérzchołek w punkcie A. Téy zaś bryły wielościennéy powiérzchniá, nie będzie się dotykać kuli mnieyszéy, w któréy iest koło FGH.

Z punktu A, do płaszczyzny czworokąta

KBOS, wyprowadźmy liniią prostopadłą AZ, (XI. XI.), którą płaszczyznę niech spotyká w punkcie Z, i poprowadźmy liniie prosté BZ, ZK. Ponieważ liniia prostá AZ, prostopadłą iest do płaszczyzny czworokąta KBOS, będzie oráz prostopadłą do wszystkich liniy prostych iéy się dotykaiących, a na téyże saméy płaszczyźnie poprowadzonych; więc liniia prostá AZ, iest prostopadłą do każdéy z dwóch liniy prostych BZ, ZK. A że liniia prostá AB, równá iest linii prostéy AK, kwadratowi zaś z linii prostéy AB, równé są kwadraty z liniy prostych AZ, ZB (XLVII. I.); kwadratowi zaś z linii prostéy AK, równé są kwadraty z liniy prostych AZ, ZK; więc kwadraty z liniy prostych AZ, ZB, równé są kwadratóm z liniy prostych AZ, ZK. Odiąwszy spólny kwadrat z linii prostéy AZ, iest pozostały kwadrat z linii prostéy BZ, równy pozostałému kwadratowi z linii prostéy ZK. Dlá czego liniia prostá BZ, iest równá linii prostéy ZK. Podobnież dowiedziémy: że liniie prosté z punktu Z, do punktów O, S, prowadzoné, są każdéy z dwóch liniy prostych BZ, ZK, równé. Koło więc ze śrzodka Z, długością linii prostéy ZB, zakréśliwszy; okrąg iego przechodzić będzie przez punkta K, O, S, B, i będzie czworokąt KBOS, w kole wpisany. A ponieważ liniiá prostá KB, większá iest od linii prostéy QV, równá zaś iest liniia prostá QV, linii prostéy SO, będzie i liniia prostá KB, większá od linii prostéy SO; lecz liniia prostá KB, równá iest każdéy z dwóch liniy prostych BO, KS; dlá czego każdy z łuków równych obeymuiących cięciwy KB, BO, KS, w kole KBOS, większy iest od łuku obeymuiącégo cięciwę OS: trzy więc té łuki wráz z czwártym, iednému z nich równym, większé są od tychże samych trzech łuków wráz z łukiém obeymuiącym cięciwę OS, toiest od całégo okręgu; łuk zatém KB, w kole KBOS, większy iest od czwártéy części całégo okręgu koła KBOS, i dlá tego kąt BZK, we śrzodku, większy iest od kąta prostégo. Gdy więc kąt BZK, iest roztwarty, będzie kwadrat z linii prostéy BK, większy od kwadratów z liniy prostych BZ, ZK, (XII. II.) toiest, będzie większy od dwa razy wziętégo kwadratu z linii prostéy BZ. Poprowadźmy liniią prostą KV, ponieważ w tróykątach KBV, OBV, liniie prosté KB, BV, równé są liniióm prostym OB, BV, i téż liniie prosté, równé zawiéraią kąty: będzie kąt KVB, równy kątowi OVB, (IV. I.). Jest zaś prosty kąt OVB, prostym więc iest i kąt KVB. Aże liniia prostá BD, mnieyszá iest od dwa razy wziętéy linii prostéy DV; będzie równoległobok prostokątny zawarty liniiami prostémi DB, BV, mnieyszy od dwa razy wziętégo równoległoboku prostokątnégo zawartégo liniiami prostémi DV, VB, toiest, będzie (VIII. VI) kwadrat z linii prostéy KB, mnieyszy od dwa razy wziętégo kwadratu z linii prostéy KV. Lecz kwadrat z linii prostéy KB, większy iest od dwa razy wziętégo kwadratu z linii prostéy BZ, więc kwadrat z linii prostéy KV, większy iest od kwadratu z linii prostéy BZ. A ponieważ liniia prostá BA, równá iest linii prostéy AK. kwadratowi zaś z linii prostéy BA, równé są kwadraty z liniy prostych BZ, ZA: i kwadratowi z linii prostéy AK, równé są kwadraty z liniy prostych KV, VA; będą kwadraty z liniy prostych

BZ, ZA, równé kwadratóm z liniy prostych KV, VA, z których kwadrat z linii prostéy KV, większy iest od kwadratu z linii prostéy BZ, więc pozostały kwadrat z linii prostéy VA, mnieyszy iest od kwadratu z linii prostéy ZA; i dlá tego liniia prostá AZ, większá iest od linii prostéy AV; nierównie więc większá iest liniia prostá AZ, od linii prostéy AG. W poprzedzaiącém albowiém podaniu dowiedliśmy, że liniia prostá KV, padá zewnątrz koła FGH. Lecz liniia prostá AZ, iest prostopadłą do płaszczyzny KBOS, zaczém náymnieyszą iest ze wszystkich liniy prostych, któré do téyże płaszczyzny ze śrzodka kuli prowadzić możná. Płaszczyzna więc KBOS, padá zewnątrz kuli mnieyszéy.

Ze równie pozostałé płaszczyzny między czwártémi kół częściami BX, KX, padaią zewnątrz kuli mnieyszéy, tak się dowodzi. Z punktu A, wyprowadźmy do płaszczyzny czworokąta SOPT, liniią prostopadłą AJ, i na téy płaszczyźnie poprowadźmy liniią prostą JO. Jak o płaszczyźnie KBOS, i punkcie Z, dowiedliśmy: tymże samym sposobém okażémy, że punkt J, iest śrzodkiém koła opisanégo, około czworokąta SOPT, i że liniia prostá OS, większá iest od linii prostéy PT. Dowiedliśmy zaś iuż liniią prostą PT, bydź równoodległą względém linii prostéy OS. Ponieważ więc różnoboki KBOS, SOPT, w koła wpisané, maią boki BKOS, iako téż boki OS, PT, równoodległé : inné zaś boki BO, KS, OP, ST, między sobą równé ; i iest bok BK, większy od boku OS, a bok OS, większy od boku PT, będzie liniia prostá ZB, większá od linii prostéy JO, (II. pod. przyb.). Poprowadźmy liniią prostą AO, ta będzie równą linii prostéy AB ; a ponieważ prosté są kąty AJO, AZB, będą kwadraty z liniy prostych AJ, JO, równé kwadratowi z linii prostéy AO, czyli AB, toiest kwadratóm z liniy prostych AZ, ZB : a kwadrat z linii prostéy ZB, większy iest od kwadratu z linii prostéy JO ; pozostały więc kwadrat z linii prostéy AZ, mnieyszy iest od kwadratu z linii prostéy AJ; przeto liniia prostá AZ, mnieyszá iest od linii prostéy AJ. Dowiedliśmy zaś, że liniia prostá AZ, większá iest od linii prostéy AG, nie równie więc liniia prostá AJ, większą iest od linii prostéy AG. Zaczém płaszczyzna SOPT, padá zewnątrz kuli mnieyszéy. Tymże samym sposobém dowiedziémy, że i płaszczyzna TPRY, padá zewnątrz téyże kuli, tak iako i płaszczyzna tróykąta YRX; (w. p. p. XI.). I podobnież dowiedzie się względém wszystkich innych płaszczyzn ograniczaiących wielościan, wykréślony w kuli większéy, że té zewnątrz kuli mnieyszéy padaią. Maiąc więc dané dwie kule spółśrzodkowé, wykréśloná iest w kuli większéy bryła wielościenná, któréy powiérzchniá nie dotyká się kuli mnieyszéy. C. B. d. R. i d. D.

Jnaczéy ieszcze i krócéy bez pomocy podaniá XVI. dowiéśdź możná, że liniia prostá AZ, większá iest od linii prostéy AG. Z punktu G, wyprowadźmy do linii prostéy AG, liniią prostopadłą GU, i poprowadźmy liniią prostą AU. Dzieląc łuk BE, na dwie równé części, i połowę iego znowu na dwie równé części, i tak następnie przyyydziémy na koniec do łuku mnieyszégo od łuku koła BCDE, maiącégo za cięciwę liniią prostą równą linii prostéy GU. Przypuśćmy, że takim łukiém iest łuk KB; mnieyszá więc będzie liniia prostá KB, od linii prostéy GU. A ponieważ kąt BZK, iest roztwarty, iakéśmy już dowiedli, będzie liniia prostá BK, większá od linii prostéy BZ. Lecz liniia prostá GU, większá iest od linii prostéy BK; daleko więc większá iest liniia prostá GU, od linii prostéy BZ, i kwadrat z linii prostéy GU, większy iest od kwadratu z linii prostéy BZ. Jest zaś liniia prostá AU, równá linii prostéy AB; więc kwadrat z linii prostéy AU, toiest kwadraty z liniy prostych AG, GU, są równé kwadratowi z linii prostéy AB, toiest kwadratóm z liniy prostych AZ, ZB; mnieyszy zaś iest kwadrat z linii prostéy BZ, od kwadratu z linii prostéy GU, pozostały przeto kwadrat z linii prostéy AZ, większy iest od kwadratu z linii prostéy AG; i dlá tego liniia prostá AZ, większá iest od linii prostéy AG.

Wniosek. Jeżeli zaś i w drugiéy kuli wykréślimy bryłę wielościenną przez poprowadzénié liniy prostych, między punktami, w których liniie prosté ze śrzodka kuli, do wszystkich kątów bryły wielościennéy wykréślonéy w kuli większéy poprowadzoné, spotykaią powiérzchnią kuli mnieyszéy w tym samym porządku, w którym połączoné są liniiami prostémi punkta, w których téż samé liniie prosté, ze śrzodką kuli, spotykaią powiérzchnią kuli większéy; będzie bryła wielościenná wykréśloná w kuli BCDE, miéć się do bryły wielościennéy wykréślonéy w kuli drugiéy, w stosunku tróymnożnym śrzednicy kuli BCDE, do śrzedni y kuli drugiéy. Podzieliwszy bowiém téż bryły wielościenné, na równą liczbę odpowiadaiących sobie ostrosłupów; będą téż ostrosłupy podobné. Maią albowiém kąty bryłowé przy wiérzchołku, toiest we śrzodku kuli spólné, pozostałé zaś kąty bryłowé przy podstawach, maią między sobą równé (B. XI.) ponieważ się zawiéraią trzéma kątami płaskiémi równémi iedné względém drugich. Téż samé ostrosłupy zawarté są podobnémi w równéy liczbie płaszczyznami, są więc dlá tego podobné, (def. XI. XI.). Podobné zaś ostrosłupy, są w stosunku tróymnożnym boków odpowiadaiących (w. VIII. XII.); więc ostrosłup, którégo podstawą czworokąt KBOS, wiérzchołkiém zaś punkt A, iest do ostrosłupa w drugiéy kuli tegoż samégo porządku, toiest do odpowiadaiącégo piérwszému w stosunku tróymnożnym boków odpowiadaiących, toiest promienia kuli większéy do promienia kuli mnieyszéy. Podobnież i każdy z ostrosłupów w kuli większéy będących, iest do odpowiadaącégo sobie ostrosłupa w kuli mnieyszéy w stosunku tróymnożnym promienia AB, kuli większéy, do promienia AG, kuli mnieyszéy: i iak iedén z poprzedników, do iednégo z następników, tak wszystkié poprzedniki, do wszystkich następników: cała zatém bryła wielościenná wykréślona w kuli większéy, má się do całéy bryły wielościennéy wykréślonéy w kuli mnieyszéy w stosunku tróymnożnym promienia AB, kuli większéy, do promienia AG, kuli mnieyszéy, toiest w stosunku tróymnożnym śrzednicy kuli większéy, do śrzednicy kuli mniéyszéy.

PODANIE XVIII.

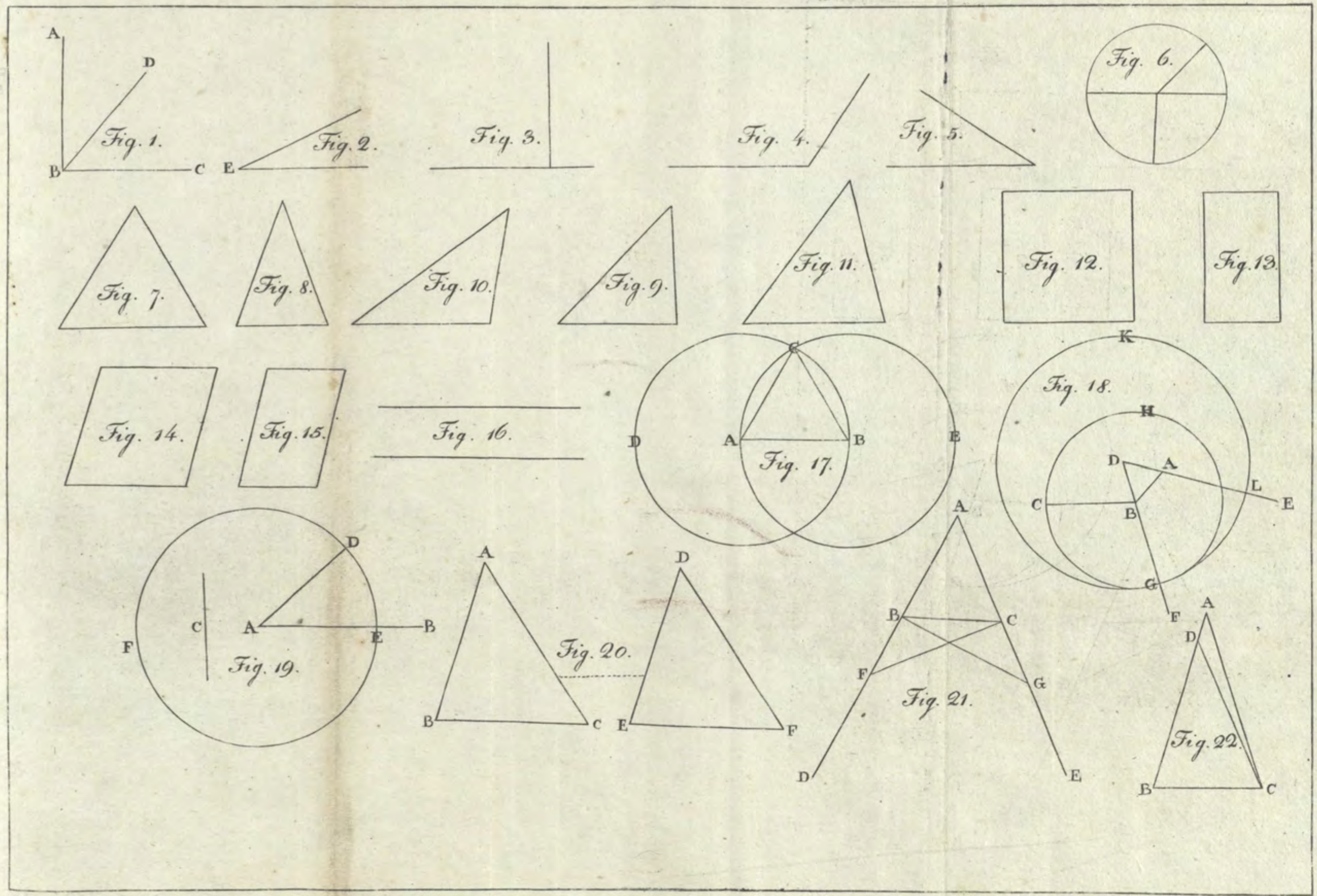
TWIERDZENIE.

Kule są między sobą w stosunku tróymnożnym swoich śrzednic. Fig. 283.

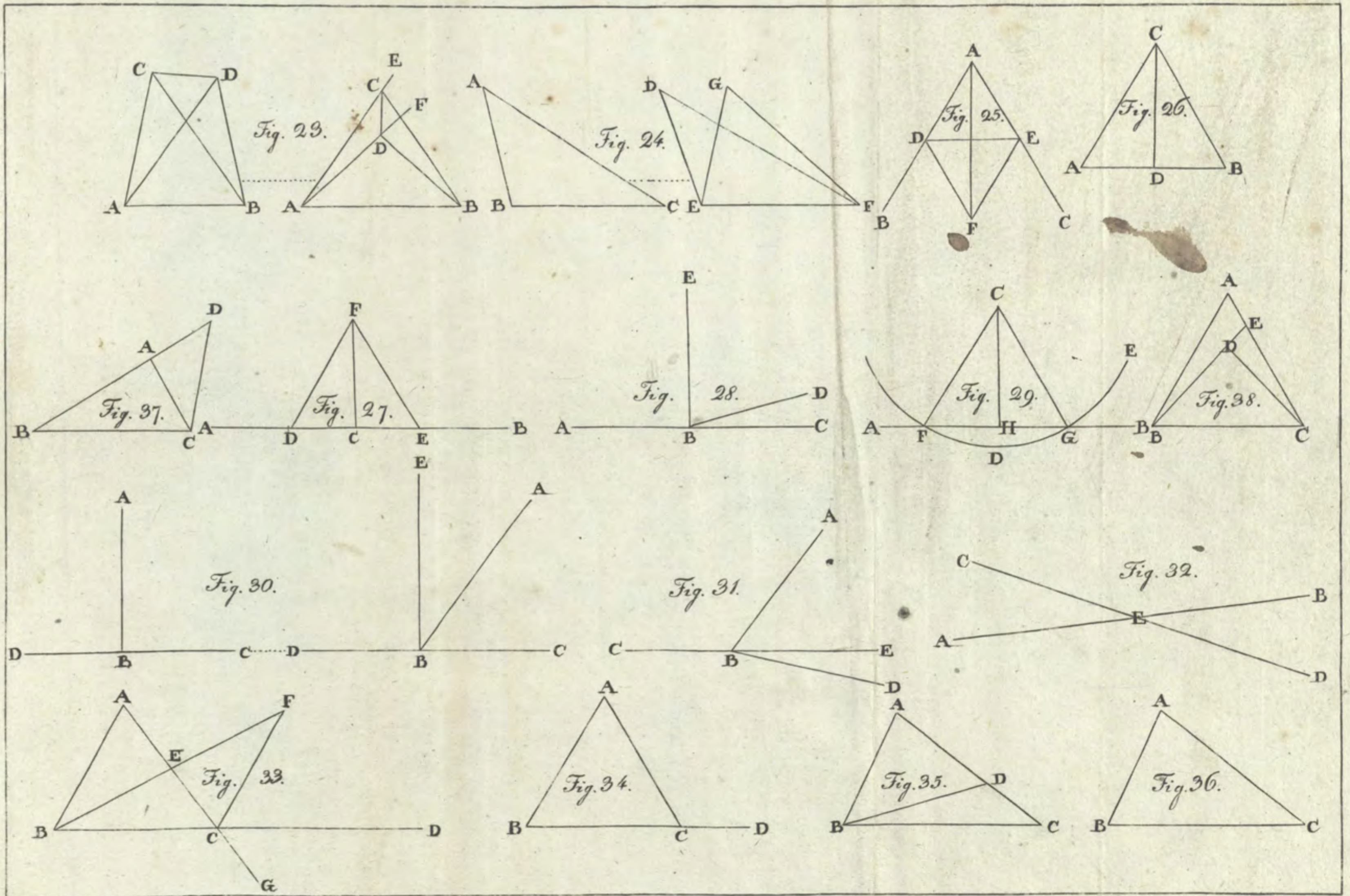
Wystáwmy sobie kule ABC, DEF, których śrzednicami są liniie prosté BC, EF. Powiadám: że kula ABC, má się do kuli DEF, w stosunku tróymnożnym śrzednicy BC, do śrzednicy EF.

Jeżeli bowiém kula ABC, nié ma się do kuli DEF, w stosunku tróymnożnym śrzednicy BC, do śrzednicy EF, będzie kula ABC, miała się do kuli albo mnieyszéy, albo większéy od kuli DEF, w stosunku tróymnożnym śrzednicy BC, do śrzednicy EF, (zob. notę do podaniá II.). Przypuśćmy náprzód: że kula ABC, má się do kuli mnieyszéy, toiest do kuli GHK, w stosunku tróymnożnym śrzednicy BC, do śrzednicy EF, i wystáwmy sobie, że kula DEF, má spólny śrzodek z kulą GHK. Wykréślmy (XVII. XII.) w kuli większéy DEF, bryłę wielościenną, któréyby powiérzchniá nie dotykała się kuli mnieyszéy GHK, i wystáwmy sobie, że w kuli ABC, wykréślońá iest bryła wielościenná, podobná bryle wielościennéy wykréślonéy w kuli DEF. Bryła więc wielościenná wykréślona w kuli ABC, má się do bryły wielościennéy wykréślonéy w kuli DEF, w stosunku tróymnożnym śrzednicy BC, do śrzednicy EF, (XVII. XI.). Jest zaś kula ABC, do kuli GHK, w stosunku tróymnożnym śrzednicy BC, do śrzednicy EF; więc iak się má kula ABC, do kuli GHK, tak bryła wielościenná w kuli ABC, do bryły wielościennéy w kuli DEF. Większá zaś iest kula ABC, od bryły wielościennéy w niéy wykréślonéy; więc (XIV. V.) i kula GHK, większą iest od bryły wielościennéy wykréślonéy w kuli DEF. Lecz iest i mnieyszą, iest bowiém kula GHK, zawartá w bryle wielościennéy wykréślonéy w kuli DEF, co bydź nié może; nie iest przeto kula ABC, do kuli mnieyszéy od kuli DEF, w stosunku tróymnożnym śrzednicy BC, do śrzednicy EF. Podobnież dowiedziémy, że ani kula DEF, má się do kuli mnieyszéy od kuli ABC, w stosunku tróymnożnym śrzednicy EF, do śrzednicy BC. Powiadám nadto: że kula ABC, ani do kuli większéy od kuli DEF, má się w stosunku tróymnożnym śrzednicy BC, do śrzednicy EF. Jeżeli bowiém to bydź może: niech się má kula ABC, do kuli większéy od kuli DEF, toiest do kuli LMN, w stosunku tróymnożnym śrzednicy BC, do śrzednicy EF: przełożywszy wyrazy śrzednié na mieyscé skraynych, a skraynié na mieyscé śrzednich, będzie kula LMN, do kuli ABC, w stosunku tróymnożnym śrzednicy EF, do śrzednicy BC. Jak zaś kula LMN, do kuli ABC, tak się má kula DEF, do pewnéy k[illegible] mnieyszéy od kuli ABC: kula bowiém LMN, większá iest od kuli DEF. Więc i kula DEF, má się do kuli mnieyszéy od kuli ABC, w stosunku tróymnożnym śrzednicy EF, do śrzednicy BC: cośmy iuż wyżéy dowiedli, że bydź nié może. Kula przeto ABC, nié ma się do kuli większéy od kuli DEF, w stosunku tróymnożnym śrzednicy BC, do śrzednicy EF. Okazaliśmy zaś, że kula ABC, ani do kuli mnieyszéy od kuli DEF, má się w stosunku tróymnożnym śrzednicy BC, do śrzednicy EF. Więc kula ABC, má się do kuli DEF, w stosunku tróymnożnym śrzednicy BC, do śrzednicy EF. C. B. d. D.

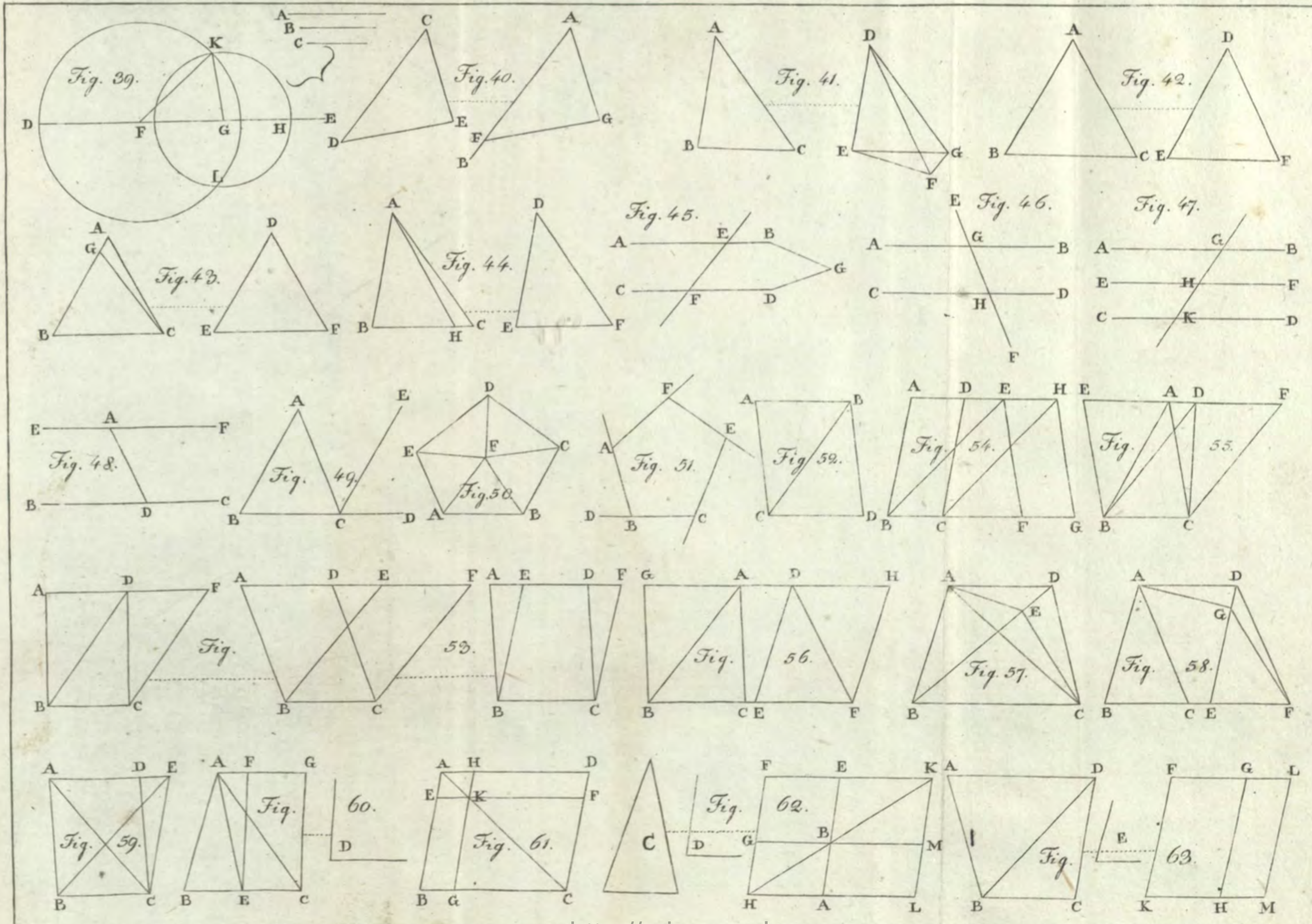
KONIEC XIĘGI DWUNASTEY.



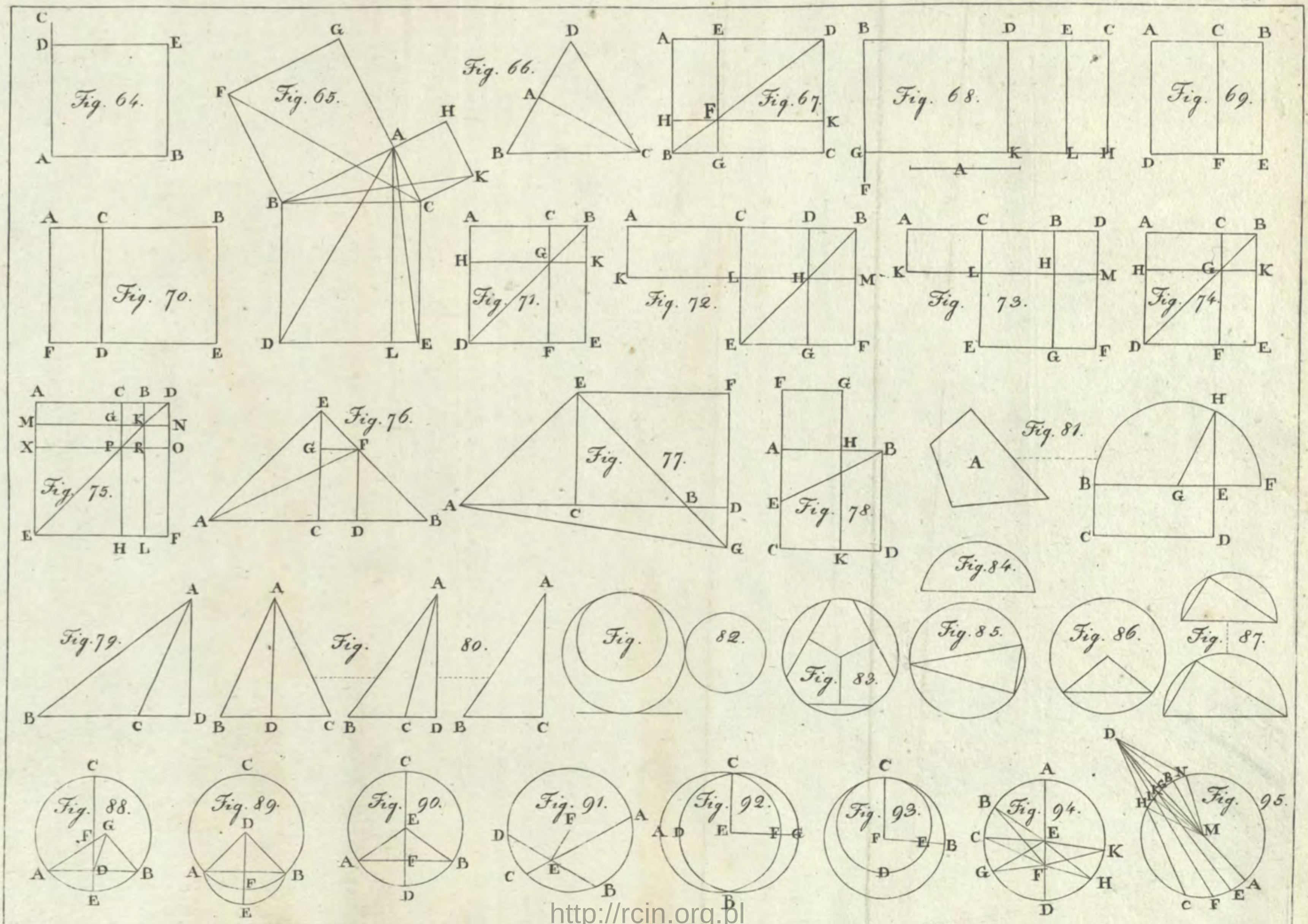
Euklides Jozefa Czecha.



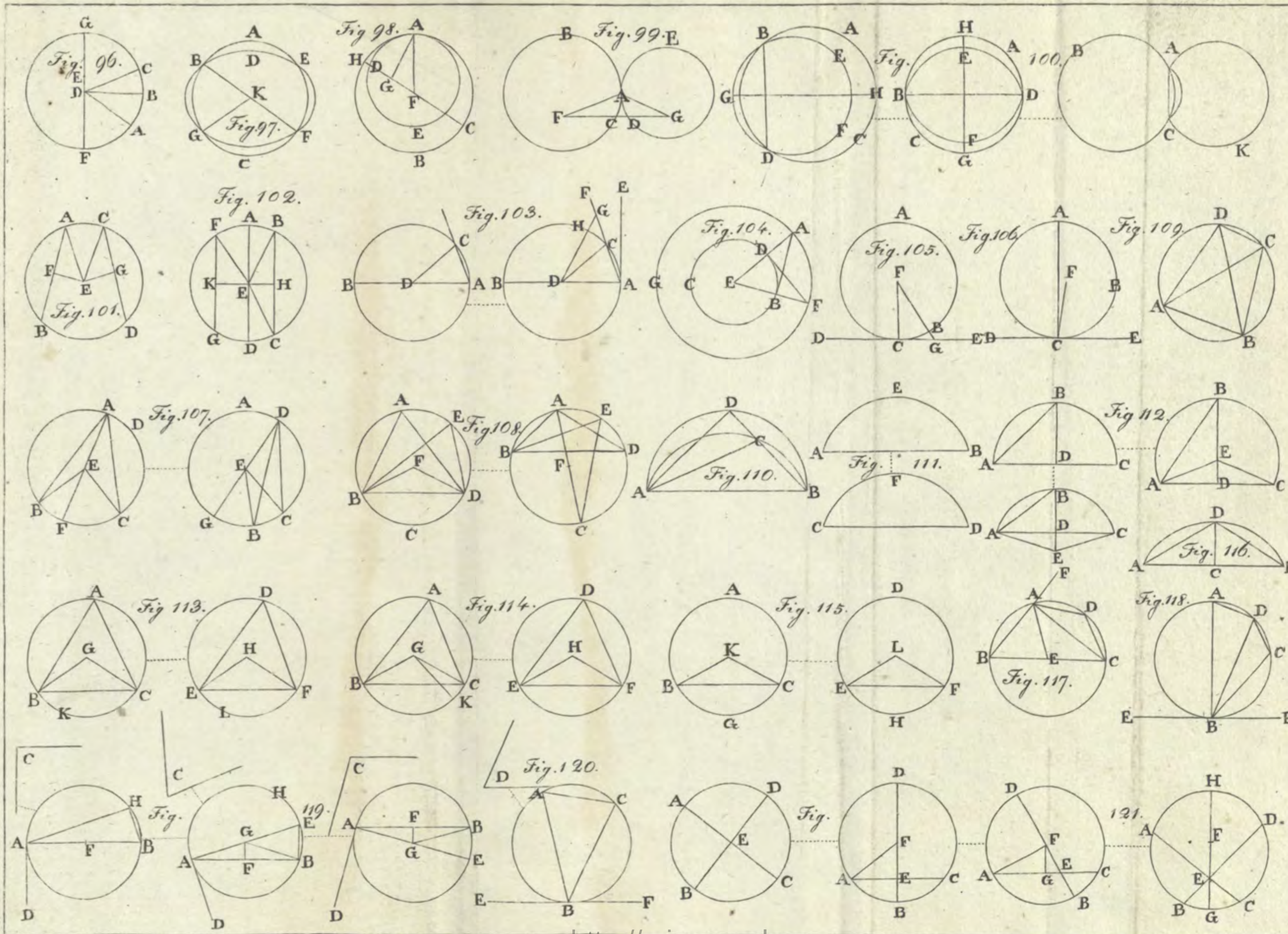
Euklides Jozefa Czecha.



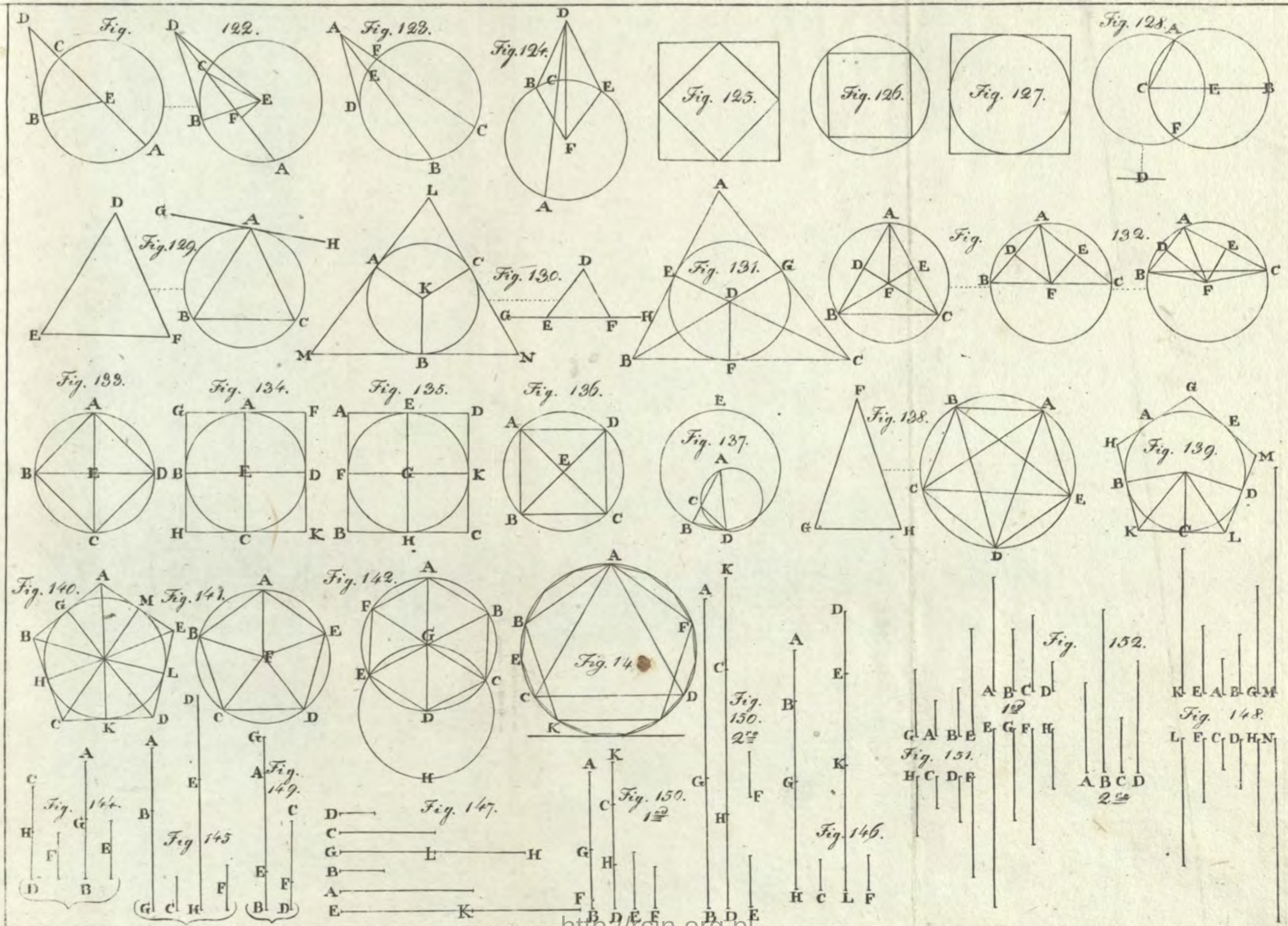
Euklides Jozefa Czecha.



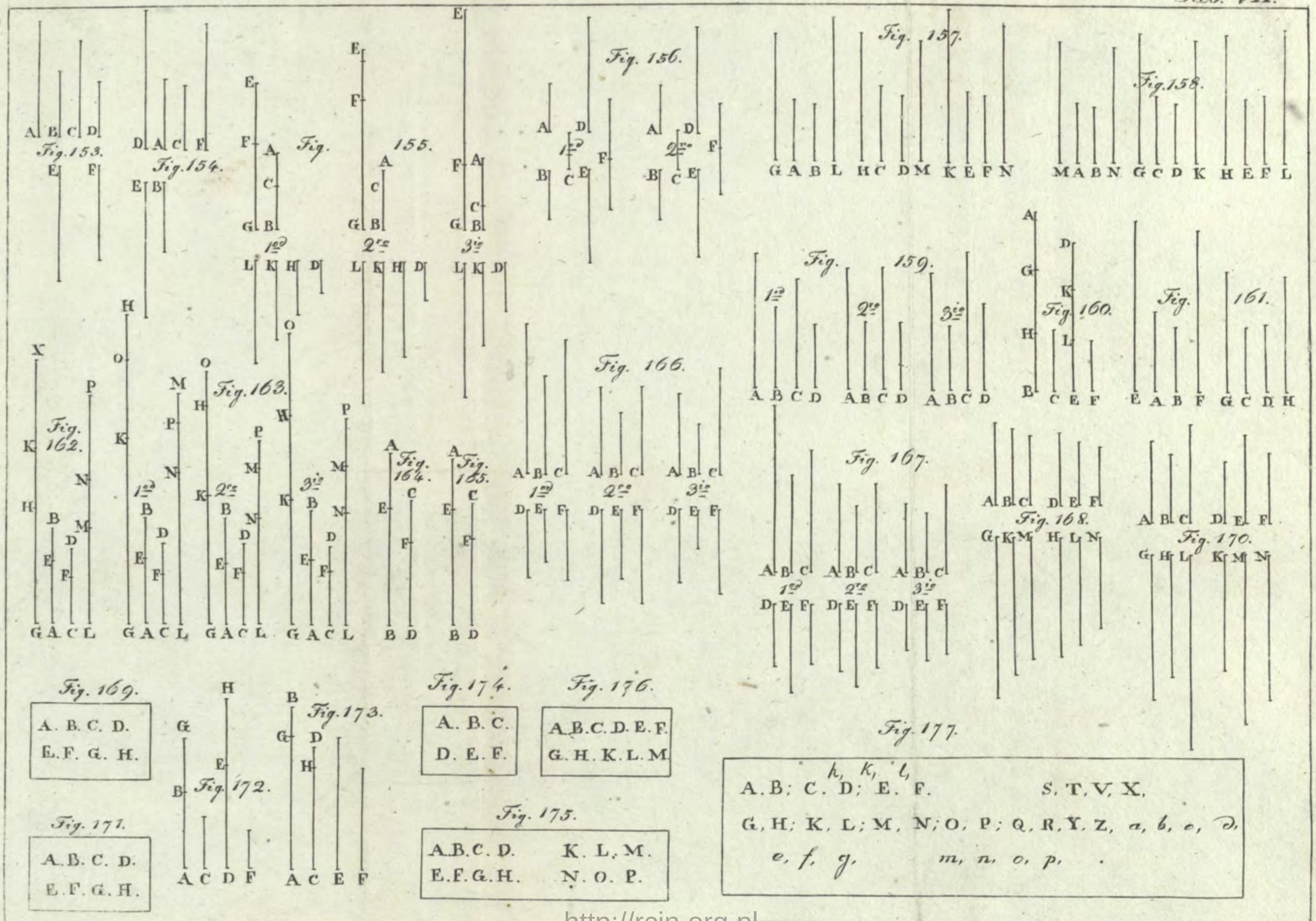
Euklides Józefa Czecha.



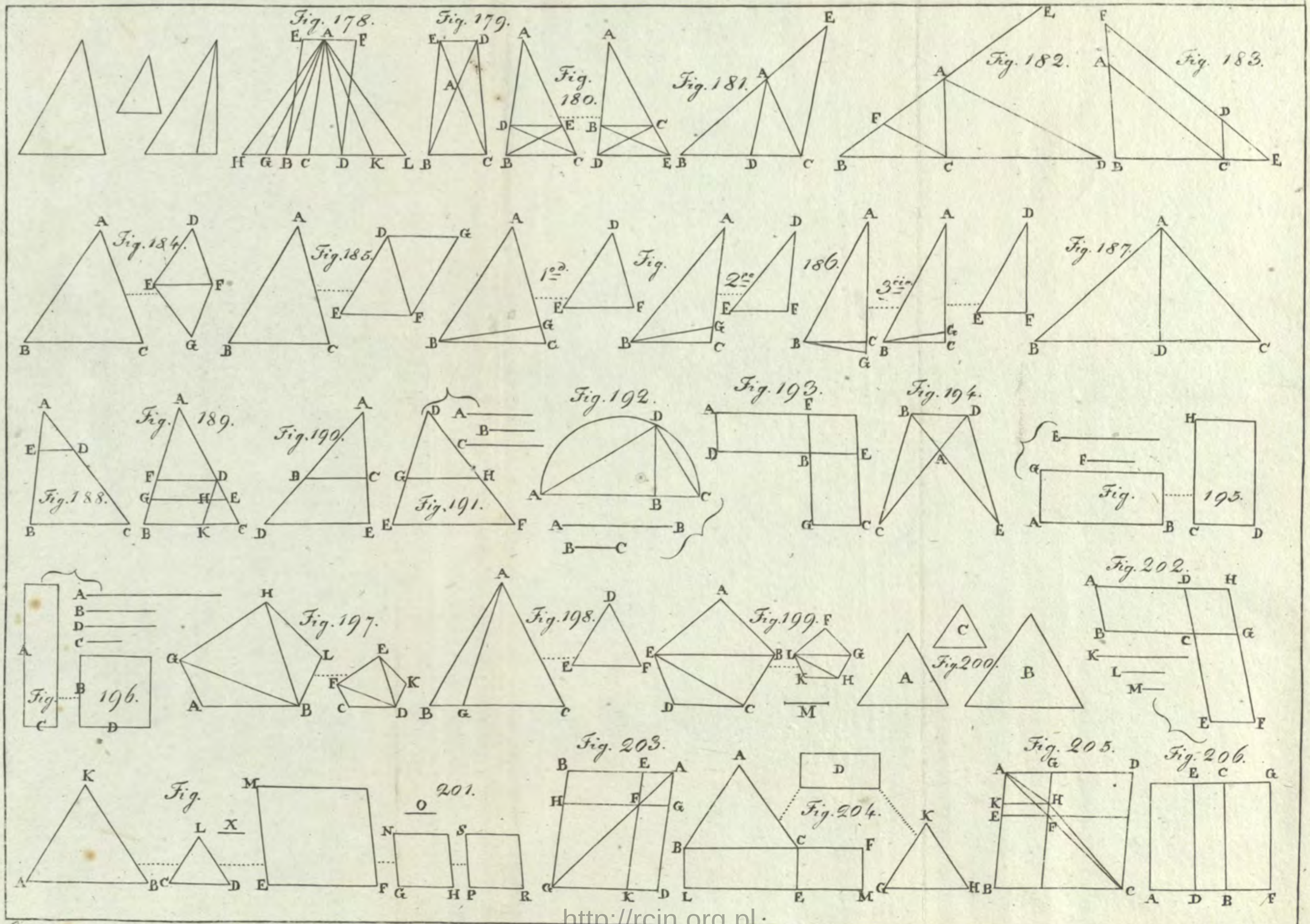
Euklides Józefa Czecha.



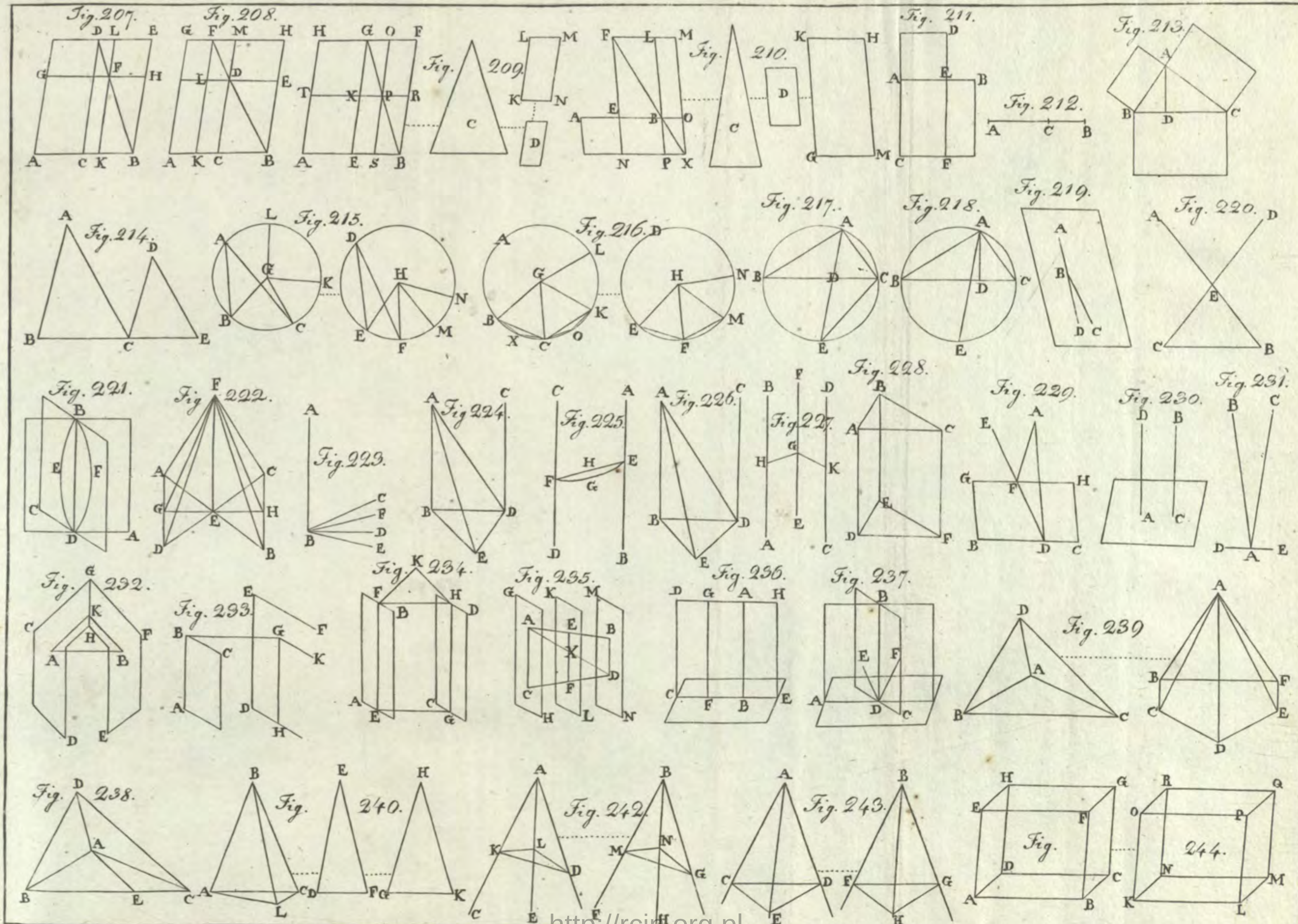
Euklides Józefa Czecha.



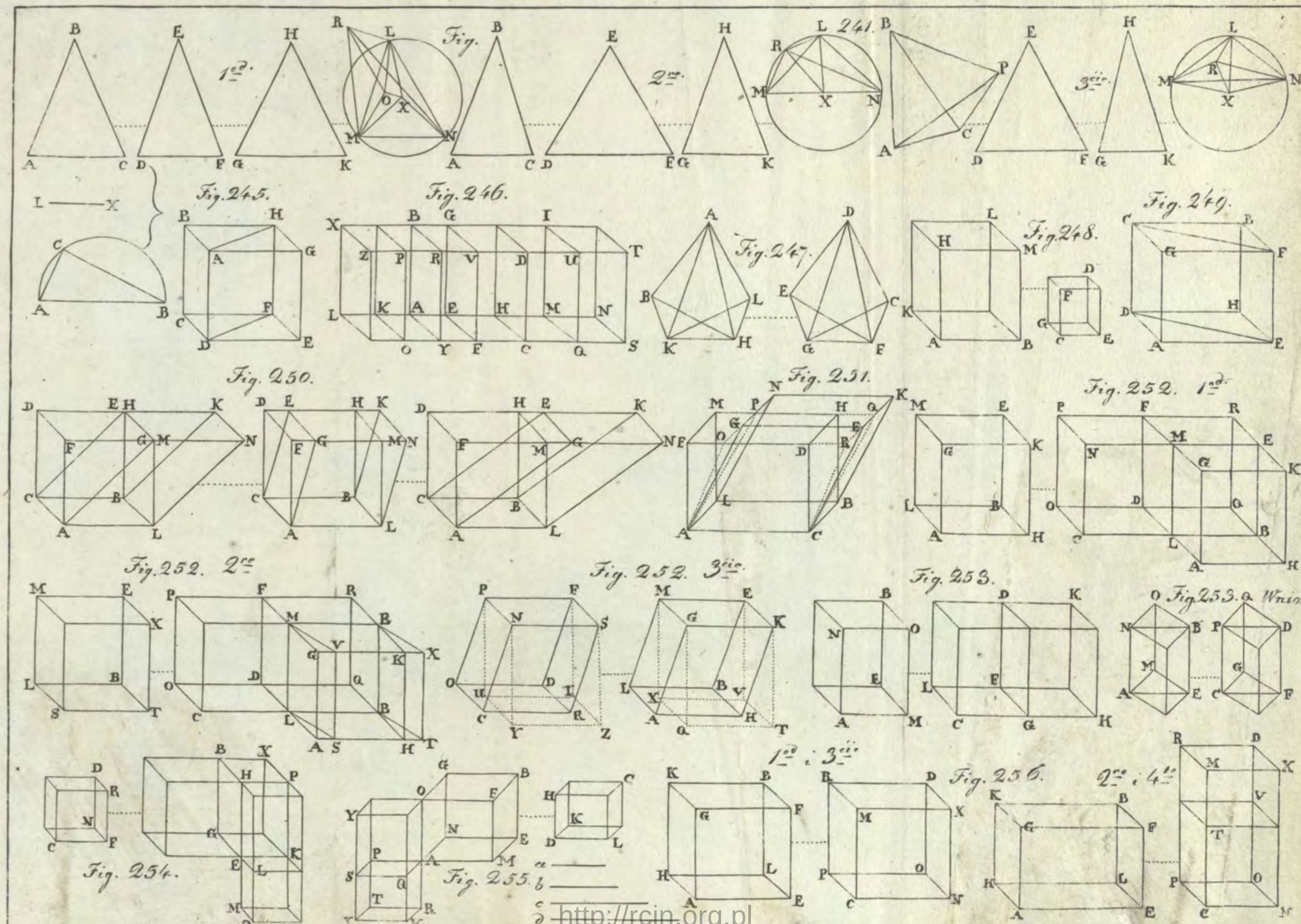
Euklides Józefa Czecha.



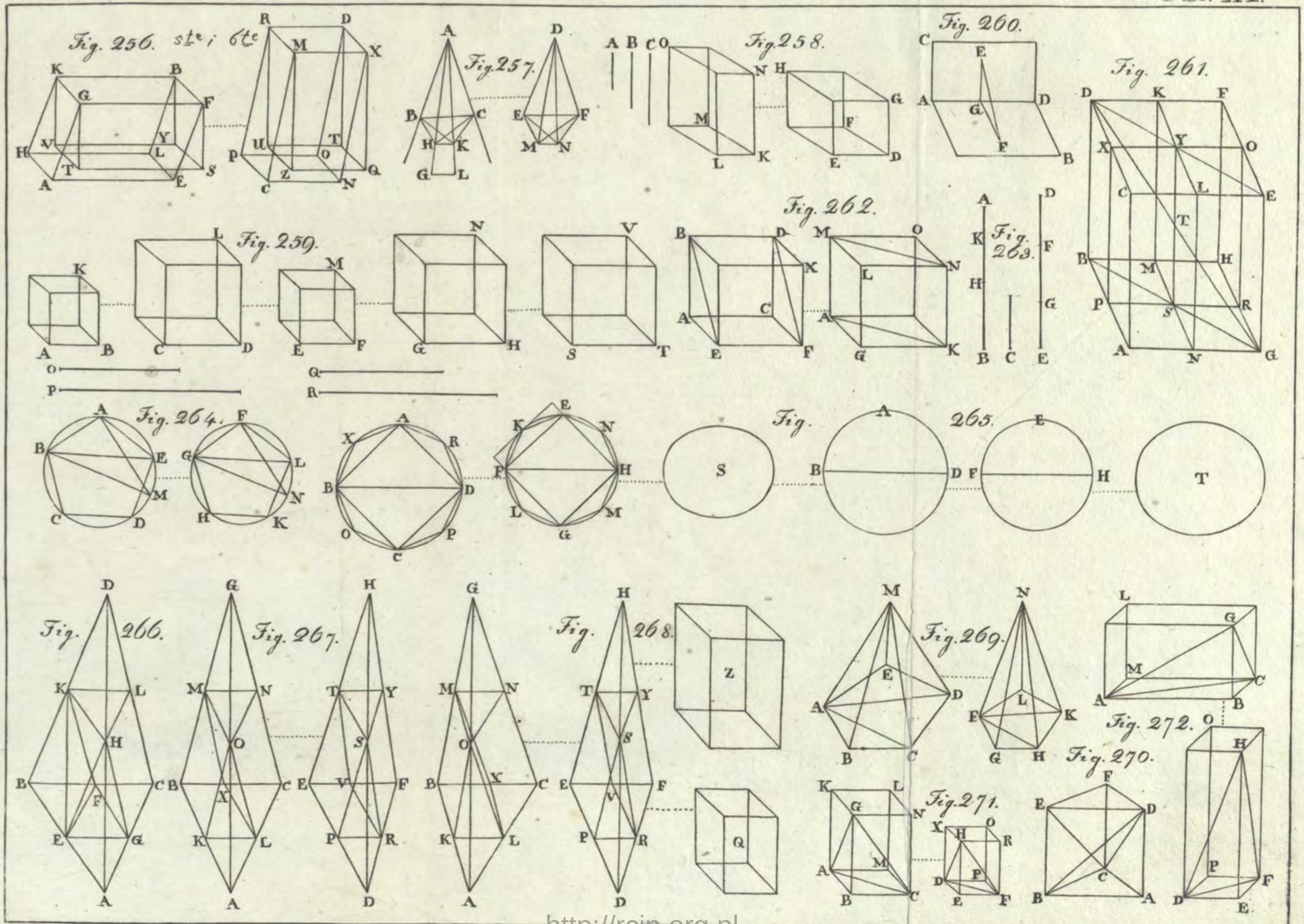
Euklides Józefa Czecha.



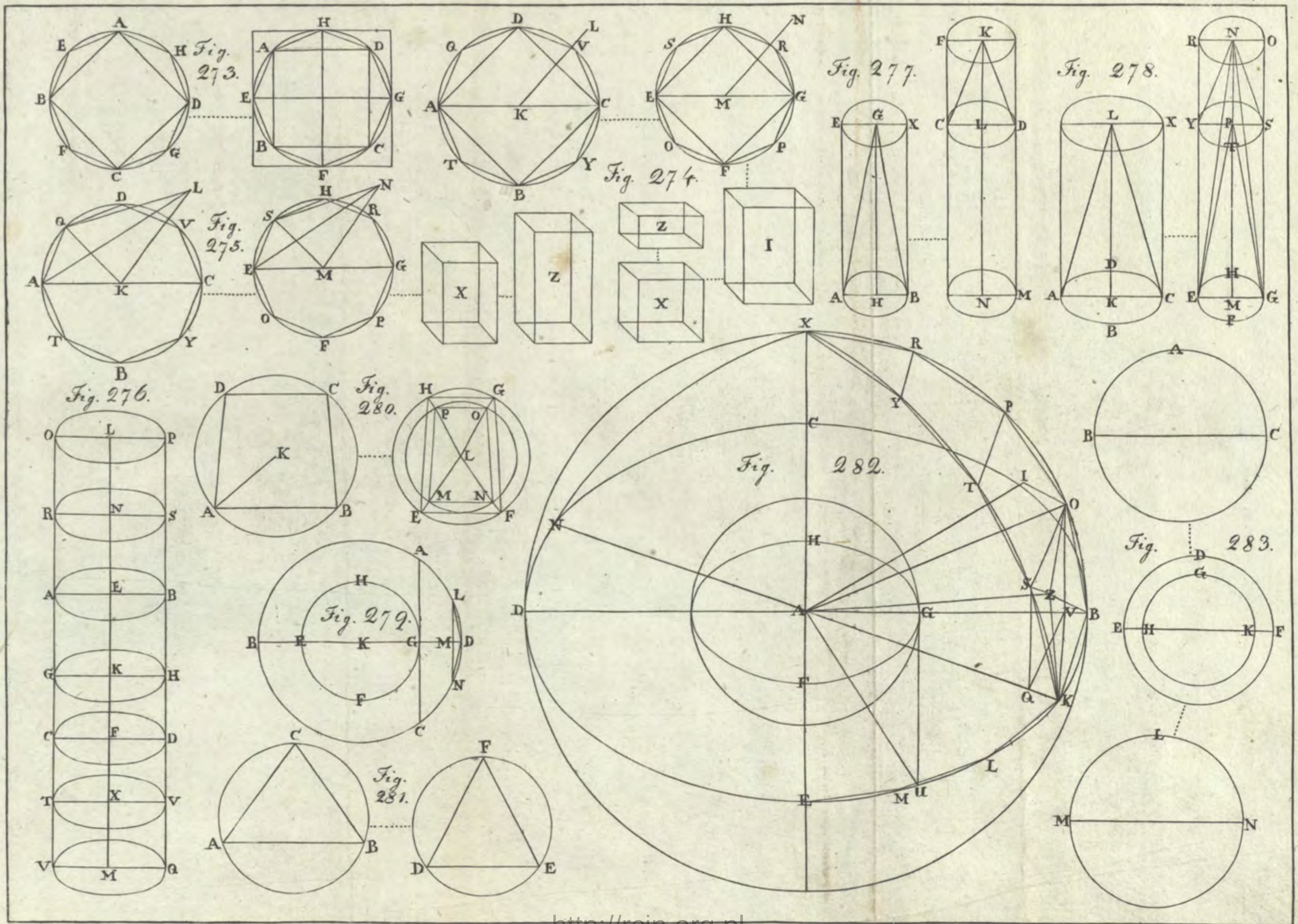
Euklides Józefa Czecha.



Euklides Jozefa Czecha.



Euklides Józefa Czecha.



Euklides Jozefa Czecha.