

BULLETIN INTERNATIONAL
DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE CRACOVIE.
CLASSE DES SCIENCES MATHÉMATIQUES ET NATURELLES.

N° 7.

Juillet

1903.

- Sommaire:** 31. M. CÉSAR ROUSSIAN. Méthode de Pfaff pour l'intégration des équations différentielles aux dérivées partielles du 1^e ordre. Première communication.
32. M. LAD. GORCZYŃSKI. Etudes sur la marche annuelle de l'insolation.
33. MM. CHARLES REUTT' et BRONISLAS PAWLEWSKI. De la condensation des oximes avec les hydrazines et des propriétés des hydrazones.
34. M. GUILLAUME FRIEDBERG. Sur le bassin miocénique de Rzeszów.
35. M. F. TONDERA. Contribution à la connaissance de la gaine d'amidon.
36. M. M. KOWALEWSKI. Études helminthologiques, VII-me partie.
37. M. STANISLAS MAZIARSKI. Sur les rapports des muscles et de la cuticule chez les Crustacés.
38. M. PHILIPPE EISENBERG. Sur l'adaptation des microorganismes aux moyens de défense de l'organisme infecté.
39. M. W. HEINRICH. Sur la fonction de la membrane du tympan.

Séance du lundi 6 Juillet 1903.

PRÉSIDENCE DE M. E. GODLEWSKI.

31. M. CÉSAR ROUSSIAN. Metoda Pfaff'a całkowania równań różniczkowych cząstkowych rzędu pierwszego. Część pierwsza. (*Die Pfaffsche Methode der Integration der partiellen Differentialgleichungen 1. O. Erste Mitteilung*). (*Méthode de Pfaff pour l'intégration des équations différentielles aux dérivées partielles du 1^e ordre. Première communication*). Mémoire présenté par M. C. Żorawski m. c.

§ 1.

Pfaff hat schon in den Jahren 1814—15 die allgemeine Methode der Integration der partiellen Differentialgleichung 1. 0.

$$\frac{\partial z}{\partial x_1} = H\left(x_1, \dots, x_n, z, \frac{\partial z}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial z}{\partial x_n}\right) \quad (1)$$

angegeben¹⁾. Er hat nämlich diese Aufgabe als die Aufgabe der Integration der Differentialgleichung

$$dz - H dx_1 - p_2 dx_2 - \dots - p_n dx_n = 0, \quad (1')$$

¹⁾ Abh. d. kgl. Ak. d. Wiss. zu Berlin, 1814—15. S. 76—136.



wo $p_i = \frac{\partial z}{\partial x_i}$ ist, dargestellt, welcher Gedanke bis auf Lagrange zurückreicht¹⁾. Diese letzte Aufgabe betrachtet er als den speziellen Fall der allgemeinen Differentialgleichung

$$X_1 dx_1 + \dots + X_{2n} dx_{2n} = 0.$$

Das Charakteristische dieser Methode besteht in der speziellen Transformation der Variablen, welche den wahren Zweck hat, wie es Gauss später bemerkt hat²⁾, die vorgelegte Differentialgleichung auf die einfachste Form mit der kleinsten Anzahl der Differentiale zu reduzieren und in dieser Form zu integrieren.

Die späteren Verfasser, wie Cauchy, Jacobi, Mayer, haben die verschiedenen Methoden der Integration angegeben, die alle einen und denselben inneren Gedanken haben, nämlich die Differentialgleichung (1') in ihrer einfachsten Form zu integrieren und also die Eigenschaften der Veränderlichen dieser Form auf dem einen oder auf dem anderen Wege zu benutzen, von denen nur Jacobi in seiner ersten Methode der Integration³⁾ die reine Methode der Transformation von Pfaff angewandt und in mehreren Punkten ausgebildet hat. Es leuchtet sowohl aus dieser letzteren sowie aus den Arbeiten von Cauchy⁴⁾ ein, dass diese Methode der Cauchyschen ähnlich ist.

Darboux⁵⁾ hat später gezeigt, dass die Methode der Pfaffschen Transformation in der vom Verfasser gegebenen Form mit der Cauchyschen übereinstimmt.

Die Pfaffsche Methode ist trotz dieser Arbeiten in ihrer ganzen Allgemeinheit, zu der sie nur fähig ist, noch nicht dargestellt worden.

Ich beabsichtige in dieser Abhandlung die Theorie der Integration einer partiellen Differentialgleichung oder des Systems solcher Differentialgleichungen erster Ordnung mit einer unbekanntenen Funktion mit Hilfe der Pfaffschen Transformation in der allgemeinsten Form durchzuführen⁶⁾.

¹⁾ Abh. d. Berl. Acad. 1772.

²⁾ Gött. gelehr. Anz. 1815.

³⁾ J. Crelle, Bde 2, 17. Vorles. üb. Dyn., 1836; Journal d Math., Liouv. 1838.

⁴⁾ Exercices d'An. et de Phys. math. T. II, 1841. Compt. Rend. T. 14, 1842.

⁵⁾ Bull. d. Sc. math. et astr. 1882. Compt. Rend., 1882.

⁶⁾ Die gegenwärtige erste Mitteilung enthält die Theorie einer partiellen Differentialgleichung. Die Verallgemeinerung auf Systeme partieller Differential-

$$\Omega = dH - f_1 dF_1 - \dots - f_{k-1} dF_{k-1} + F_k df_k + \dots + F_m df_m$$

und

$$H = \Theta_0 + F_1 \Theta_1 + \dots + F_{k-1} \Theta_{k-1}$$

$$f_i = \frac{\partial H}{\partial F_i} \quad (i = 1, 2 \dots k-1), \quad F_j = -\frac{\partial H}{\partial f_j} \quad (j = k, \dots, m). \quad (\beta)$$

§ 2.

1. Es sei die Differentialgleichung 1. 0.

$$F \left(x_1 x_2 \dots x_n z \frac{\partial z}{\partial x_1} \dots \frac{\partial z}{\partial x_n} \right) = 0. \quad (1)$$

vorgelegt. Wenn $z = f(x_1 x_2 \dots x_n)$ das Integral derselben ist, so bringen $n + 1$ endliche Gleichungen

$$z = f(x_1 \dots x_n), \quad p_i = \frac{\partial f}{\partial x_i} \quad (i = 1, 2 \dots n) \quad (\alpha)$$

den Differentialausdruck

$$\Omega = dz - p_1 dx_1 - \dots - p_n dx_n$$

zum Verschwinden und genügen der gegebenen Gleichung

$$F(x_1 \dots x_n, z, p_1 \dots p_n) = 0. \quad (1')$$

Umgekehrt, wenn $m + 1$ Gleichungen $z = f(x_1 \dots x_n)$, $p_i = f'(x_1 \dots x_n)$ den Differentialausdruck Ω annullieren und der endlichen Differentialgleichung (1') genügen, so ist offenbar $z = f(x_1 \dots x_n)$ das Integral der gegebenen Differentialgleichung (1).

Man kann die Aufgabe, die Differentialgleichung (1) zu integrieren, in folgender etwas allgemeineren Form darstellen: Man soll die Differentialgleichung

$$\Omega = dz - p_1 dx_1 - \dots - p_n dx_n = 0$$

mit Hilfe der kleinsten Anzahl $n + 1$ endlichen Gleichungen integrieren, deren eine die gegebene Form $F(x_1 \dots x_n z p_1 \dots p_n) = 0$ hat.

Wir werden diese Aufgabe in möglichst allgemeiner Form lösen.

Es kann bei der allgemeinsten Behandlung dieses Problems auch vorkommen, dass die gegebene Gleichung (1') von den p frei ist. In diesem Falle löst man dieses Problem nach der Methode des § I, 2, indem man unter den Gleichungen (α) die gegebene Gleichung

$$F(x_1 \dots x_n z) = 0 \quad (1'')$$

nimmt. Wir werden im folgenden voraussetzen, dass die gegebene Gleichung (1') die p enthält, so dass z. B. $\frac{\partial F}{\partial p_1} \neq 0$ ist.

Wir können unser Problem in der folgenden, noch bequemeren Form darstellen: wir sollen die Differentialgleichung

$$\Omega' = dz - p_1 dx - \dots - p_n dx_n = 0,$$

wo die Veränderlichen x, p, z durch die gegebene Relation

$$F(x_1 \dots x_n, z, p_1 \dots p_n) = 0$$

schon verbunden sind, durch die kleinste Anzahl n der endlichen Gleichungen integrieren.

2. Wir setzen zuerst voraus, dass die gegebene Gleichung (1') in Bezug auf eine der Veränderlichen p z. B. p_1 aufgelöst ist, und also

$$p_1 = \Theta(x_1 \dots x_n, z, p_2 \dots p_n)$$

ist. Die Differentialgleichung Ω' hat jetzt die Form

$$\Omega' = dz - \Theta dx_1 - p_2 dx_2 - \dots - p_n dx_n = 0.$$

Wir werden uns später von dieser Voraussetzung frei machen. Wir wollen nun auf die Differentialgleichung $\Omega' = 0$ die Pfaffsche Transformation anwenden. Das System der Differentialgleichungen (A) ist:

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial y_1} - \Theta \frac{\partial x_1}{\partial y_1} - p_2 \frac{\partial x_2}{\partial y_1} - \dots - p_n \frac{\partial x_n}{\partial y_1} &= 0, \\ \frac{\partial \Theta}{\partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial y_1} + \dots + \frac{\partial \Theta}{\partial x_n} \frac{\partial x_n}{\partial y_1} + \frac{\partial \Theta}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial y_1} + \\ + \frac{\partial \Theta}{\partial p_2} \frac{\partial p_2}{\partial y_1} + \dots + \frac{\partial \Theta}{\partial p_n} \frac{\partial p_n}{\partial y_1} - \lambda \Theta &= 0, \\ - \frac{\partial \Theta}{\partial x_i} \frac{\partial x_1}{\partial y_1} + \frac{\partial p_i}{\partial y_1} - \lambda p_i &= 0 \quad (i = 2, 3, \dots, n), \\ - \frac{\partial \Theta}{\partial z} \frac{\partial x_1}{\partial y_1} + \lambda &= 0, \\ \frac{\partial \Theta}{\partial p_i} \frac{\partial x_1}{\partial y_1} + \frac{\partial x_i}{\partial y_1} &= 0, \quad (i = 2, 3, \dots, n) \end{aligned}$$

oder:

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial y_1} - \frac{\partial x_1}{\partial y_1} \left(\Theta - \sum_2^n j p_j \frac{\partial \Theta}{\partial p_j} \right) &= 0, \\ \frac{\partial \Theta}{\partial z} \left[\frac{\partial z}{\partial y_1} - \frac{\partial x_1}{\partial y_1} \left(\Theta - \sum_2^n j p_j \frac{\partial \Theta}{\partial p_j} \right) \right] &= 0, \\ \left. \begin{aligned} \frac{\partial p_i}{\partial y_1} - \frac{\partial x_1}{\partial y_1} \left(\frac{\partial \Theta}{\partial x_i} + p_i \frac{\partial \Theta}{\partial z} \right) &= 0, \\ \frac{\partial x_i}{\partial y_1} + \frac{\partial x_1}{\partial y_1} \frac{\partial \Theta}{\partial p_i} &= 0. \end{aligned} \right\} i = 2, \dots, n \\ \lambda - \frac{\partial \Theta}{\partial z} \frac{\partial x_1}{\partial y_1} &= 0. \end{aligned}$$

Die zweite Gleichung ist die Folge der ersten, also hat das System (A) die Form:

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial y_1} - \frac{\partial x_1}{\partial y_1} \left(\Theta - \sum_2^n j p_j \frac{\partial \Theta}{\partial p_j} \right) &= 0, \\ \left. \begin{aligned} \frac{\partial p_i}{\partial y_1} - \frac{\partial x_1}{\partial y_1} \left(\frac{\partial \Theta}{\partial x_i} + p_i \frac{\partial \Theta}{\partial z} \right) &= 0, \\ \frac{\partial x_i}{\partial y_1} + \frac{\partial x_1}{\partial y_1} \frac{\partial \Theta}{\partial p_i} &= 0, \end{aligned} \right\} i = 2, 3 \dots n, \quad (\text{A}) \\ \lambda - \frac{\partial \Theta}{\partial z} \frac{\partial x_1}{\partial y_1} &= 0. \end{aligned}$$

Wenn $\frac{\partial \Theta}{\partial z} = 0$ ist, so ist dann auch $\lambda = 0$ und das System (A) ent-

hält dann nur $2n - 1$ Gleichungen mit $2n$ Unbekannten $\frac{\partial x_1}{\partial y_1}, \frac{\partial p_i}{\partial y_1}, \frac{\partial z}{\partial y_1}$.

Wir können dann $\frac{\partial x_1}{\partial y_1}$ ganz willkürlich, aber nicht gleich Null wählen.

Die Veränderliche y_1 verschwindet in diesem Falle nach der Transformation.

Wenn dagegen $\frac{\partial \Theta}{\partial z} \neq 0$ ist, dann haben wir $2n$ Gleichungen mit $2n + 1$ Unbekannten $\frac{\partial x_i}{\partial y_1}, \frac{\partial z}{\partial y_1}, \frac{\partial p_i}{\partial y_1}, \lambda$. In diesem Falle können wir λ willkürlich, aber nicht gleich Null wählen.

3. Diese Gleichungen haben die Unbequemlichkeit, dass wir ausdrücklich voraussetzen, dass die endliche Gleichung (1') in Bezug

auf p_1 aufgelöst ist. Wir wollen uns jetzt von dieser Voraussetzung befreien. Vorausgesetzt, dass $p_1 = \Theta$ die einfache Wurzel der Gleichung (1') ist, was offenbar immer möglich ist, so haben wir die Formeln:

$$\frac{\partial \Theta}{\partial x_i} = - \left(\frac{\frac{\partial F}{\partial x_i}}{\frac{\partial F}{\partial p_1}} \right)_{p_1 = \Theta}, \quad \frac{\partial \Theta}{\partial p_i} = - \left(\frac{\frac{\partial F}{\partial p_i}}{\frac{\partial F}{\partial p_1}} \right)_{p_1 = \Theta}, \quad \frac{\partial \Theta}{\partial z} = - \left(\frac{\frac{\partial F}{\partial z}}{\frac{\partial F}{\partial p_1}} \right)_{p_1 = \Theta},$$

Das System (A) nimmt nach der Substitution die Form:

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{\partial F}{\partial p_1} \right) \frac{\partial z}{\partial y_1} - \frac{\partial x_1}{\partial y_1} \left[\left(p_1 \frac{\partial F}{\partial p_1} \right) + \sum_2^n i p_i \left(\frac{\partial F}{\partial p_i} \right) \right] &= 0 \\ \left(\frac{\partial F}{\partial p_1} \right) \frac{\partial p_i}{\partial y_1} + \frac{\partial x_1}{\partial y_1} \left[\left(\frac{\partial F}{\partial x_i} \right) + p_i \left(\frac{\partial F}{\partial z} \right) \right] &= 0 \\ \left(\frac{\partial F}{\partial p_1} \right) \frac{\partial x_i}{\partial y_1} - \frac{\partial x_1}{\partial y_1} \left(\frac{\partial F}{\partial p_i} \right) &= 0, \\ \left(\frac{\partial F}{\partial p_1} \right) \lambda + \left(\frac{\partial F}{\partial z} \right) \frac{\partial x_1}{\partial y_1} &= 0, \end{aligned} \right\} i = 2, \dots, n$$

an, wo () die Substitution $p_1 = \Theta$ bezeichnet. Wir sehen, dass die ursprünglichen Variablen $x_1 \dots x_n, z, p_2 \dots p_n$ zusammen mit p_1 , wo $F(x_1 \dots x_n, z, p_1, p_n) = 0$ ist, durch die neuen $2n$ Variablen $y_1 \dots y_{2n}$ ausgedrückt, den Gleichungen

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial p_1} \frac{\partial z}{\partial y_1} - \frac{\partial x_1}{\partial y_1} \sum_1^n i p_i \frac{\partial F}{\partial p_i} &= 0, \\ \frac{\partial F}{\partial p_1} \frac{\partial p_i}{\partial y_1} + \frac{\partial x_1}{\partial y_1} \left[\frac{\partial F}{\partial x_i} + p_i \frac{\partial F}{\partial z} \right] &= 0, \\ \frac{\partial F}{\partial p_1} \frac{\partial x_i}{\partial y_1} - \frac{\partial x_1}{\partial y_1} \frac{\partial F}{\partial p_i} &= 0, \\ \frac{\partial F}{\partial p_1} \lambda + \frac{\partial F}{\partial z} \frac{\partial x_1}{\partial y_1} &= 0, \quad F(x_1 \dots x_n, z, p_1, \dots, p_n) = 0 \end{aligned} \right\} i = 1, 2, \dots, n$$

genügen.

Die letzte Gleichung kann man durch die folgende

$$\sum_i^n i \frac{\partial F}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial y_1} + \frac{\partial F}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial y_1} + \sum_i^n i \frac{\partial F}{\partial p_i} \frac{\partial p_i}{\partial y_1} = 0$$

ersetzen, oder nach der Einsetzung der Werte von

$$\frac{\partial x_2}{\partial y_1} \cdots \frac{\partial x_n}{\partial y_1} \frac{\partial z}{\partial y_1} \frac{\partial p_2}{\partial y_1} \cdots \frac{\partial p_n}{\partial y_1}$$

durch die Gleichung

$$\frac{\partial F}{\partial p_1} \left[\frac{\partial F}{\partial p_1} \frac{\partial p_1}{\partial y_1} + \frac{\partial x_1}{\partial y_1} \left(\frac{\partial F}{\partial x_1} + p_1 \frac{\partial F}{\partial z} \right) \right] = 0,$$

oder endlich, da $\left(\frac{\partial F}{\partial p_1} \right) \neq 0$ ist, durch die Gleichung

$$\frac{\partial F}{\partial p_1} \frac{\partial p_1}{\partial y_1} + \frac{\partial x_1}{\partial y_1} \left[\frac{\partial F}{\partial x_1} + p_1 \frac{\partial F}{\partial z} \right] = 0.$$

Die Variablen $x_1 \dots x_n z p_1 p_n$, wo $p_1 = \Theta(x_1 \dots x_n z p_2 \dots p_n) = 0$ ist, durch die neuen Variablen $y_1 \dots y_{2n}$ ausgedrückt, sollen also dem Systeme der gewöhnlichen Differentialgleichungen

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial p_1} \frac{\partial z}{\partial y_1} - \frac{\partial x_1}{\partial y_1} \sum_i^n i p_i \frac{\partial F}{\partial p_i} &= 0, \\ \frac{\partial F}{\partial p_1} \frac{\partial p_i}{\partial y_1} + \frac{\partial x_1}{\partial y_1} \left[\frac{\partial F}{\partial x_i} + p_i \frac{\partial F}{\partial z} \right] &= 0, \quad i = 1, 2, \dots, n \\ \frac{\partial F}{\partial p_1} \frac{\partial x_i}{\partial y_1} - \frac{\partial x_1}{\partial y_1} \frac{\partial F}{\partial p_i} &= 0, \quad i = 2, 3, \dots, n \\ \frac{\partial F}{\partial p_1} \lambda + \frac{\partial F}{\partial z} \frac{\partial x_1}{\partial y_1} &= 0 \end{aligned} \quad (A_1)$$

genügen. Es folgt aus diesen Gleichungen, dass umgekehrt

$$dF = 0$$

ist und also $F(x_1 \dots x_n z p_1 p_n) = \text{const.}$ das Integral des Systems (A_1) ist. Wir sehen also, dass die Veränderlichen $x_1 \dots x_n z p_1 p_n$, wo $p_1 = \Theta(x_1 \dots x_n z p_2 \dots p_n) = 0$ ist, durch $y_1 y_2 \dots y_{2n}$ ausgedrückt, ein spezielles Integralsystem der Gleichungen (A_1) bilden. Wenn $\frac{\partial F}{\partial z} = 0$ ist, so ist $\lambda = 0$ und wir haben nur $2n$ unabhängige

Gleichungen mit $2n + 1$ Unbekannten, deren eine $\frac{\partial x_1}{\partial y_1}$ ganz willkürlich,

aber nicht gleich Null gewählt werden kann. Wenn dagegen $\frac{\partial F}{\partial z} \neq 0$ ist, so haben wir $2n + 1$ unabhängige Gleichungen mit $2n + 2$ Unbekannten, deren eine $-\lambda$ ganz willkürlich, aber nicht gleich Null gewählt werden kann.

Wir können dieses System in der symmetrischen Form

$$\frac{dx_1}{\frac{\partial F}{\partial p_1}} = \dots = \frac{dx_n}{\frac{\partial F}{\partial p_n}} = \frac{dz}{\sum_i^n p_i \frac{\partial F}{\partial p_i}} =$$

$$(B) \quad - \frac{dp_1}{\frac{\partial F}{\partial x_1} + p_1 \frac{\partial F}{\partial z}} = \dots = - \frac{dp_n}{\frac{\partial F}{\partial x_n} + p_n \frac{\partial F}{\partial z}} = - \frac{\lambda}{\frac{\partial F}{\partial z}} dy_1$$

darstellen, wenn wir nur annehmen, dass, im Falle $\frac{\partial F}{\partial z} = 0$ und $\lambda = 0$, der Quotient $\frac{\lambda}{\frac{\partial F}{\partial z}}$ eine willkürliche Funktion der Variablen

$x_1 \dots p_n$ ist. Wir wissen, dass $F(x_1 \dots x_n z p_1 \dots p_n) = \text{const.}$ das Integral dieses Systems, und zwar des Systems der $2n$ ersten Gleichungen

$$\frac{dx_1}{\frac{\partial F}{\partial p_1}} = \dots = \frac{dx_n}{\frac{\partial F}{\partial p_n}} = \frac{dz}{\sum_i^n p_i \frac{\partial F}{\partial p_i}} =$$

$$(B_1) \quad = - \frac{dp_1}{\frac{\partial F}{\partial x_1} + p_1 \frac{\partial F}{\partial z}} = \dots = - \frac{dp_n}{\frac{\partial F}{\partial x_n} + p_n \frac{\partial F}{\partial z}}$$

ist.

4. Es sei das System der Hauptintegrale der Differentialgleichungen (B):

$$(a) \quad \begin{aligned} x_i &= x_i(y_1, x_1^0 \dots p_n^0), & z &= z(y_1, x_1^0 \dots p_n^0), \\ p_i &= p_i(y_1, x_1^0 \dots p_n^0), & (i &= 1, 2, \dots, n) \end{aligned}$$

wo $x_1^0 \dots p_n^0$ die Anfangswerte der Variablen $x_i z p_i$ bei $y_1 = y_1^0$ sind und als die Integrationskonstanten zu betrachten sind.

Die Formeln der Transformation

$$x_i = x_i(y_1 y_2 \dots y_{2n}), \quad z = z(y_1 y_2 \dots y_{2n}), \quad p_i = p_i(y_1 y_2 \dots y_{2n})$$

$$(i = 1, 2, \dots, n)$$

sollen solche Form haben, wo nur, $x_1^0 \dots p_n^0$ Funktionen von $y_2 \dots y_{2n}$ sind.

Es folgt daraus, dass zwischen $x_i^0 z^0 p_i^0$ zwei Relationen stattfinden müssen. Eine derselben muss die gegebene Form

$$F(x_1 x_2 \dots x_n z p_1 \dots p_n) = F(x_1^0 \dots p_n^0) = 0$$

haben; was die andere betrifft, so muss sie nur die Bedingung erfüllen, dass nämlich aus derselben keine Relation zwischen x_i, z, p_i folgt, d. h. sie muss kein Integral der Differentialgleichungen (B₁) und im übrigen ganz willkürlich sein. Es sei nämlich

$$\varphi(x_1^0 \dots p_n^0) = 0$$

eine solche Relation. Wenn wir eine der Grössen x_i^0, z^0, p_i^0 mit Hilfe dieser Gleichung aus den Gleichungen (a) eliminieren, so bekommen wir die Formel der Transformation:

$$x_i = x_i(y_1 y_2 \dots y_{2n+1}), \quad z = z(y_1 y_2 \dots y_{2n+1}), \quad p_i = p_i(y_1 y_2 \dots y_{2n+1}),$$

$$(i = 1, 2 \dots n) \quad (C)$$

wo $y_2 \dots y_{2n+1}$ $2n$ Unabhängige von den Grössen $x_1^0 \dots p_n^0$ sind.

Wollen wir mit diesen Formeln den Differentialausdruck Ω transformieren, so bekommen wir

$$\Omega = dz - p_1 dx_1 - \dots - p_n dx_n = U_1 dy_1 + U_2 dy_2 + \dots + U_{2n+1} dy_{2n+1},$$

$$\text{wo } U_i = \frac{\partial z}{\partial y_i} - \sum_1^n p_\alpha \frac{\partial x_\alpha}{\partial y_i} \quad (i = 1, 2 \dots 2n+1) \text{ ist.}$$

Im besonderen ist

$$U_1 = \frac{\partial z}{\partial y_1} - \sum_1^n p_\alpha \frac{\partial x_\alpha}{\partial y_1}$$

oder mit Hilfe der Gleichungen (B):

$$U_1 = - \frac{\lambda}{\frac{\partial F}{\partial z}} \left(\sum_1^n p_\alpha \frac{\partial F}{\partial p_\alpha} - \sum_1^n p_\alpha \frac{\partial F}{\partial p_\alpha} \right) = 0.$$

Was die übrigen Koeffizienten $U_i (i = 2, 3 \dots 2n+1)$ betrifft, so kann man beweisen, dass

$$\sum_2^{2n+1} \left(\frac{\partial U_i}{\partial y_i} + \lambda U_i \right) dy_i = - \frac{\lambda}{\frac{\partial F}{\partial z}} dF$$

ist.

In der Tat ist

$$\frac{\partial U_i}{\partial y_1} = \frac{\partial}{\partial y_1} \left(\frac{\partial z}{\partial y_i} - \sum_1^n p_\alpha \frac{\partial x_\alpha}{\partial y_i} \right) = \frac{\partial}{\partial y_i} \left(\frac{\partial z}{\partial y_1} - \sum_1^n p_\alpha \frac{\partial x_\alpha}{\partial y_1} \right) + \\ + \sum_1^n p_\alpha \frac{\partial p_\alpha}{\partial y_i} \frac{\partial x_\alpha}{\partial y_1} - \sum_1^n p_\alpha \frac{\partial p_\alpha}{\partial y_1} \frac{\partial x_\alpha}{\partial y_i},$$

woraus mit Hilfe der Gleichungen (B) und der Relation

$$U_1 = \frac{\partial z}{\partial y_1} - \sum_1^n p_\alpha \frac{\partial x_\alpha}{\partial y_1} = 0$$

folgt

$$\frac{\partial U_i}{\partial y_1} = - \frac{\lambda}{\frac{\partial F}{\partial z}} \left[\sum_1^n p_\alpha \left(\frac{\partial p_\alpha}{\partial y_i} \frac{\partial F}{\partial p_\alpha} + \frac{\partial F}{\partial x_\alpha} \frac{\partial x_\alpha}{\partial y_i} \right) + \frac{\partial F}{\partial z} \sum_1^n p_\alpha \frac{\partial x_\alpha}{\partial y_i} \right],$$

oder endlich

$$\frac{\partial U_i}{\partial y_1} = - \frac{\lambda}{\frac{\partial F}{\partial z}} \left[\frac{\partial F}{\partial y_i} - \frac{\partial F}{\partial z} \left(\frac{\partial z}{\partial y_i} - \sum_1^n p_\alpha \frac{\partial x_\alpha}{\partial y_i} \right) \right].$$

Da aber $\frac{\partial z}{\partial y_i} - \sum_1^n p_\alpha \frac{\partial x_\alpha}{\partial y_i} = U_i$ ist, so haben wir

$$\frac{\partial U_i}{\partial y_1} - \lambda U_i = - \frac{\lambda}{\frac{\partial F}{\partial z}} \frac{\partial F}{\partial y_i} \quad (i = 2, \dots, 2n+1).$$

Hieraus folgt, dass

$$(b) \quad \sum_2^{2n+1} \left(\frac{\partial U_i}{\partial y_1} - \lambda U_i \right) dy_i = - \frac{\lambda}{\frac{\partial F}{\partial z}} dF$$

ist.

Setzen wir jetzt

$$F(x_1 \dots x_n, z, p_1 \dots p_n) = F(x_1^0 \dots p_n^0) = \mathcal{F}(y_2 \dots y_{2n+1}) = 0.$$

Das System (C) wird dann nur $2n$ Formeln der Transformation der $2n$ alten Unabhängigen von den x_i, z, p_i auf die $2n$ neuen Unabhängigen von den $y_1, y_2 \dots y_{2n+1}$ Variablen enthalten und der Differentialausdruck Ω wird dann Ω' sein.

Wir erhalten also

$$\Omega' = V_2 dy_2 + \dots + V_{2n} dy_{2n},$$

wo

$$V_i = U_i + U_{2n+1} \frac{\partial y_{2n+1}}{\partial y_i} \quad (i = 2, 3 \dots 2n)$$

ist, vorausgesetzt, dass wir nämlich y_{2n+1} als die Funktion der $y_2 \dots y_{2n}$ aus der Gleichung

$$\Theta(y_2 \dots y_{2n+1}) = 0$$

bestimmen.

Die Relation (b) gibt uns in diesem Falle, dass

$$\sum_2^{2n} i \left(\frac{\partial V_i}{\partial y_1} - \lambda V_i \right) dy_i = 0$$

ist, da $F(x_1 \dots p_n) = 0$ ist.

Da aber $y_2 \dots y_{2n}$ unabhängig sind, so folgt

$$\frac{\partial V_i}{\partial y_1} - \lambda V_i = 0 \quad (i = 2 \dots 2n)$$

und durch Integration

$$V_i = e^{\int \lambda dy_1} Y_i \quad (i = 2 \dots 2n)$$

wo Y_i von y_1 frei sind.

Wir haben also

$$\Omega' = dz - p_1 dx \dots - p_n dx_n = e^{\int \lambda dy_1} (Y_2 dy_2 + \dots + Y_{2n} dy_{2n}),$$

wo y_1 nur in dem gemeinschaftlichen Faktor figurieren kann.

Wir haben hiermit den folgenden Satz I bewiesen:

Satz I. Um die Formel der Pfaffschen Transformation des Ausdrucks

$$\Omega' = dz - p_1 dx_1 - \dots - p_n dx_n,$$

wo $F(x_1 \dots x_n, z, p_1 \dots p_n) = 0$ ist, zu erhalten, soll man die Differentialgleichungen (B) in der Form

$$\begin{aligned} x_i &= x_i(y_1, x_1^0, \dots, p_n^0) & z &= z(y_1, x_1^0, \dots, p_n^0) \\ p_i &= p_i(y_1, x_1^0, \dots, p_n^0) & & \end{aligned} \quad (\alpha)$$

integrieren und dann die Anfangswerte $x_i^0 z^0 p_i^0$ der Veränderlichen $x_i z p_i$ durch zwei Relationen verbinden, deren eine

$$F(x_1 \dots x_n z p_1 \dots p_n) = F(x_1^0 \dots p_n^0) = 0$$

gegeben ist und eines der Integrale des Systems (B_1) darstellt, und die andere

$$\varphi(x_1^0 \dots p_n^0) = 0$$

nur die Bedingung erfüllen soll, dass sie dagegen kein Integral dieses Systems ist. Die neuen Veränderlichen sind y_1 und $2n - 1$ der Grössen $x_1^0 \dots p_n^0$.

Es ist klar, da $\frac{\partial F}{\partial p_1} = 0$ ist, dass das System (a) auch in der Form

$$\begin{aligned} x_1 &= x_1(y_1 x_1^0 \dots p_n^0) \\ x_i &= x_i(x_1 x_1^0 \dots p_n^0) \quad (i = 2, 3 \dots n) \\ z &= z(x_1 x_1^0 \dots p_n^0) \\ p_i &= p_i(x_1 x_1^0 \dots p_n^0) \quad (i = 1, 2 \dots n) \end{aligned}$$

dargestellt werden kann, wo die $2n$ letzte Gleichungen das System der $2n$ Hauptintegrale des Systems (B_1) in Bezug auf $x_i = x_i^0$ bilden.

Es gibt unendlich viele Formeln der Pfaffschen Transformation, da die Relation

$$\varphi(x_1^0 \dots p_n^0) = 0$$

unendlich viele Formen annehmen kann. Es seien die Formeln zweier solcher Transformationen

$$\begin{aligned} 1) \quad x_1 &= x_1(y_1 x_1^0 \dots p_n^0) \\ x_i &= x_i(x_1 x_1^0 \dots p_n^0) \quad (i = 2 \dots n) \\ z &= z(x_1 x_1^0 \dots p_n^0) \\ p_i &= p_i(x_1 x_1^0 \dots p_n^0) \quad (i = 1, 2 \dots n), \end{aligned}$$

wo $F(x_1 \dots p_n) = F(x_1^0 \dots p_n^0) = 0$ und $\varphi(x_1^0 \dots p_n^0) = \text{ist}$;

$$\begin{aligned} 2) \quad x_1 &= x_1(x_1 x_1^{00} \dots p_n^{00}) \\ x_i &= x_i(x_1 x_1^{00} \dots p_n^{00}) \quad (i = 2 \dots n) \\ z &= z(x_1 x_1^{00} \dots p_n^{00}) \\ p_i &= p_i(x_1 x_1^{00} \dots p_n^{00}) \quad (i = 1, 2 \dots n), \end{aligned}$$

wo $F(x_1 \dots x_n z p_1 \dots p_n) = F(x_1^{00} \dots p_n^{00}) = 0$ und $\Phi(x_1^{00} \dots p_n^{00}) = 0$ ist.

Die neuen Veränderlichen sind in diesen Systemen $2n$ unabhängige Grössen von den $y_1 x_1^0 \dots p_n^0$, und $t_1 x_1^{00} \dots p_n^{00}$

z. B. $y_1 x_1^0 \dots x_n^0 z^0 p_1^0 \dots p_{n-2}^0$ und $t_1 x_2^{00} \dots x_n^{00} z^{00} p_2^{00} \dots p_n^{00}$.

Wir können beweisen, dass $x_1^0 \dots x_n^0 z^0 p_1^0 p_{n-2}^0$ nur durch $x_2^{00} \dots x_n^{00} z^{00} p_2^{00} \dots p_n^{00}$ ausdrückbar sind.

In der Tat sind die Systeme der Gleichungen

$$\begin{aligned} 1) \quad x_i &= x_i(x_1 x_1^0 x_2^0 \dots p_n^0) \quad (i = 2 \dots n) \\ z &= z(x_1 x_1^0 \dots p_n^0) \quad \text{wo } \varphi(x_1^0 \dots p_n^0) = 0 \\ p_i &= p_i(x_1 x_1^0 \dots p_n^0) \quad (i = 1, 2 \dots n) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} 2) \quad x_i &= x_i(x_1 x_1^{00} \dots p_n^{00}) \quad (i = 2 \dots n) \\ z &= z(x_1 x_1^{00} \dots p_n^{00}) \quad \text{wo } \Phi(x_1^{00} \dots p_n^{00}) = 0 \\ p_i &= p_i(x_1 x_1^{00} \dots p_n^{00}) \quad (i = 1, 2 \dots n) \end{aligned}$$

zwei Systeme der vollständigen Integrale des Systems (B₁). Da aber das System der gewöhnlichen Differentialgleichungen nur ein System der vollständigen Integrale besitzt, so folgt, dass $2n$ Unabhängige von den Grössen $x_1^0 \dots p_n^0$ gewisse Funktionen der $2n$ Unabhängigen von den Grössen $x_1^{00} \dots p_n^{00}$ sind.

Diese Relationen bleiben auch dann, wenn wir noch die Relationen $F(x_1^0 \dots p_n^0) = 0$, $F(x_1^{00} \dots p_n^{00}) = 0$ hinzufügen, da aus der ersten die Relation $F(x_1 \dots x_n z \dots p_n) = 0$ und also die zweite folgt.

Wenn wir mit den Formeln

$$\begin{aligned} x_1 &= x_1(y_1 x_1^0 \dots p_n^0) \\ x_i &= x_i(x_1 x_1^0 \dots p_n^0) \quad (i = 2 \dots n) \\ z &= z(x_1 x_1^0 \dots p_n^0) \\ p_i &= p_i(x_1 x_1^0 \dots p_n^0) \quad (i = 1, 2 \dots n), \end{aligned} \tag{D}$$

wo $F(x_1^0 \dots p_n^0) = 0$ und $\varphi(x_1^0 \dots p_n^0) = 0$ ist, den Differentialausdruck

$$\Omega' = dz - p_1 dx_1 - \dots - p_n dx_n,$$

wo $F(x_1 \dots p_n) = 0$ ist, transformieren, so bekommen wir

$$\Omega' = e^{\int \lambda dy_1} M,$$

wo M die Veränderliche y_1 nicht enthält. Es folgt daraus, dass

$$M = \left(\Omega' e^{-\int \lambda dy_1} \right)_{y_1 = y_1^0}$$

oder dass

$$M = (dz_0 - p_1^0 dx_1^0 \dots - p_n^0 dx_n^0) e^{-\int \lambda dy_1}_{y_1 = y_1^0}$$

ist. Also folgt für Ω' die Form

$$\Omega' = e^{\int \lambda dy_1 - (\int \lambda dy_1)_0} (dz_0 - p_1^0 dx_1^0 - \dots - p_n^0 dx_n^0),$$

wo $F(x_1^0 \dots p_n^0) = 0$, $\varphi(x_1^0 \dots p_n^0) = 0$ und λ für den Fall $\frac{\partial F}{\partial z} = 0$ gleich Null, im Falle $\frac{\partial F}{\partial z} \neq 0$ willkürlich, aber nicht gleich Null ist.

5. Wir wollen uns jetzt zur Integration der Differentialgleichung

$$\Omega' = dz - p_1 dx_1 - \dots - p_n dx_n = 0,$$

wo $F(x_1 \dots x_n z p_1 p_n) = 0$ ist, wenden.

Man soll die transformierte Gleichung

$$\Omega' = (dz_0 - p_1^0 dx_1^0 - \dots - p_n^0 dx_n^0) e^{\int \lambda dy_1 - (\int \lambda dy_1)_0} = 0,$$

wo $F(x_1^0 \dots x_n^0 z^0 p_1^0 \dots p_n^0) = 0$, $\varphi(x_1^0 \dots p_n^0) = 0$ ist, durch die kleinste Anzahl n der Integrale integrieren. Es folgt, dass entweder

$$\Omega'_0 = dz_0 - p_1^0 dx_1^0 - \dots - p_n^0 dx_n^0 = 0,$$

oder

$$\int \lambda dy_1 - (\int \lambda dy_1)_0 = 0$$

ist. Die letzte Voraussetzung ist nur dann möglich, wenn $\frac{\partial F}{\partial z} \neq 0$ ist. Setzen wir, dass

$$\Omega'_0 = dz_0 - p_1^0 dx_1^0 - \dots - p_n dx_n^0 = 0$$

ist, wo $F(x_1^0 \dots x_n^0 z^0 p_1^0 \dots p_n^0) = 0$, $\varphi(x_1^0 \dots p_n^0) = 0$ ist.

Wir sollen diese Gleichung durch die kleinste Anzahl n der Integrale integrieren oder wir sollen die Gleichung

$$\Omega_0 = dz_0 - p_1^0 dx_1^0 - \dots - p_n^0 dx_n^0 = 0$$

durch $n + 2$ Integrale integrieren, deren zwei $F(x_1^0 \dots p_n^0) = 0$, $\varphi(x_1^0 \dots p_n^0) = 0$ vorgeschrieben sind. Wenn ein solches System der $n + 2$ Integrale gefunden ist, so können wir daraus n Integrale der Gleichung $\Omega' = 0$ ermitteln: in der Tat, es sei dieses System der Integrale

$$\Theta_i(x_1^0 \dots p_n^0) = 0, \quad F(x_1^0 \dots p_n^0) = 0, \quad \varphi(x_1^0 \dots p_n^0) = 0.$$

Wenn wir jetzt die Gleichungen

$$\Theta_i(x_1^0 \dots p_n^0) = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

wo $F(x_1^0 \dots p_n^0) = 0$, $\varphi(x_1^0 \dots p_n^0) = 0$ ist, mit Hilfe der Formeln

$$\begin{aligned} x_i &= x_i(x_1 x_1^0 \dots p_n^0) \quad (i = 2 \dots n), \quad z = z(x_1 x_1^0 \dots p_n^0), \\ p_i &= p_i(x_1 x_1^0 \dots p_n^0) \quad (i = 1, 2 \dots n) \end{aligned} \quad (D)$$

wo $F(x_1^0 \dots p_n^0) = 0$, $\varphi(x_1^0 \dots p_n^0) = 0$ ist,

auf die Variablen $x_i z p_i$ transformieren, so bekommen wir n Gleichungen

$$\mathfrak{F}_i(x_1 \dots p_n) = 0 \quad (i = 1, 2 \dots n),$$

wo $F(x_1 \dots p_n) = 0$ ist, die n Integrale der Differentialgleichung

$$\mathcal{Q}' = dz - p_1 dx_1 - \dots - p_n dx_n = 0,$$

wo $F(x_1 \dots x_n z p_1 \dots p_n) = 0$ ist, sind.

In der Tat sehen wir zuerst, dass die Form dieser Gleichungen von λ unabhängig ist, da die Form der Formel der Transformation

$$\begin{aligned} x_i &= x_i(x_1 x_1^0 \dots p_n^0) \quad (i = 2, \dots, n), \quad z = z(x_1 x_1^0 \dots p_n^0), \\ p_i &= p_i(x_1 x_1^0 \dots p_n^0) \quad (i = 1, 2, \dots, n), \\ \text{wo } \varphi(x_1^0 \dots p_n^0) &= 0 \text{ ist,} \end{aligned}$$

die die Integrale des Systems (B₁) sind, von λ unabhängig ist.

Wenn $\frac{\partial F}{\partial z} = 0$ und also $\lambda = 0$ ist, so ist dann $e^{\int \lambda dy_1 - (\int \lambda dy_1)_0} = 1$

und also nicht unendlich; wenn dagegen $\frac{\partial F}{\partial z} \neq 0$ und also λ willkürlich, aber nicht Null ist, so können wir $\lambda = 1$, und also

$$e^{\int \lambda dy_1 - (\int \lambda dy_1)_0} = e^{y_1 - y_1^0}$$

setzen. Es ist klar, dass $e^{y_1 - y_1^0}$ nicht unendlich und ganz willkürlich für $\Theta_i(x_1^0 \dots p_n^0) = 0$, $F(x_1^0 \dots p_n^0)$, $\varphi(x_1^0 \dots p_n^0) = 0$ bleibt, da y_1 von $x_1^0 \dots p_n^0$ unabhängig ist.

Das System der $n + 1$ Gleichungen

$$\mathfrak{F}_i(x_1 \dots p_n) = 0, \quad F(x_1 \dots p_n) = 0$$

stellt das System der kleinsten Anzahl $n + 1$ der Integrale der Differentialgleichung

$$\Omega = dz - p_1 dx_1 - \dots - p_n dx_n = 0$$

dar. Wenn diese Integralgleichungen in Bezug auf $p_1 \dots p_n$ auf-

lösbar sind, so bekommt man nach der Elimination derselben das Integral $f(z, x_1, \dots, x_n) = 0$ der Differentialgleichung (1).

Wenn es dagegen nicht der Fall ist, so stellen diese $n + 1$ Integralgleichungen der Differentialgleichung $\Omega = 0$ das Integral der Differentialgleichung (1) im erweiterten Sinne von S. Lie dar.

Die in dieser Weise erhaltenen Integrale nennt man nichtsingulär.

Wenn wir nun beachten, dass die Relation $\varphi(x_1^0, \dots, p_n^0) = 0$ nur kein Integral des Systems der Differentialgleichungen (B_1) sein soll und im übrigen ganz willkürlich bleibt, so können wir den folgenden Satz II aussprechen.

Satz II. Um die nichtsingulären Integrale der gegebenen Differentialgleichung zu erhalten, soll man die Differentialgleichung

$$\Omega_0 = dz_0 - p_1^0 dx_1^0 - \dots - p_n^0 dx_n^0 = 0$$

mit Hilfe irgend eines Systems der $n + 2$ Gleichungen integrieren, die nicht alle die Integrale des Systems der Differentialgleichungen (B_1) sind und deren eine die gegebene Gleichung $F(x_1^0, \dots, x_n^0, z^0, p_1^0, \dots, p_n^0) = 0$ ist. Es sei ein solches

$$(E) \quad \Theta_i(x_1^0, \dots, x_n^0, z^0, \dots, p_n^0) = 0, \quad \varphi(x_1^0, \dots, x_n^0, z^0, p_1^0, \dots, p_n^0) = 0 \\ F(x_1^0, \dots, p_n^0) = 0,$$

wo $\varphi(x_1^0, \dots, x_n^0, z^0, p_1^0, \dots, p_n^0) = 0$ kein Integral der Differentialgleichungen (B_1) ist. Man bekommt das Integral der Differentialgleichung (1), wenn man die Grösse $x_1^0, \dots, x_n^0, z^0, p_1^0, \dots, p_n^0$ aus den Gleichungen

$$(E) \quad \Theta_i(x_1^0, \dots, x_n^0, z^0, p_1^0, \dots, p_n^0) = 0, \quad (i = 1, 2, \dots, n) \\ \varphi(x_1^0, \dots, x_n^0, z^0, p_1^0, \dots, p_n^0) = 0, \quad F(x_1^0, \dots, p_n^0) = 0,$$

und

$$(a) \quad x_i = x_i(x_1, x_1^0, \dots, p_n^0) = 0 \quad (i = 2, \dots, n), \quad z = z(x_1, x_1^0, \dots, p_n^0), \\ p_i = p_i(x_1, x_1^0, \dots, p_n^0) = 0 \quad (i = 1, \dots, n),$$

eliminiert, wo die letzten $2n$ Gleichungen (a) die Hauptintegrale des Systems (B_1) im Bezug auf $x_1 = x_1^0$ sind.

Was jetzt das System der $n + 2$ Integrale der Differentialgleichung $\Omega_0 = 0$ mit den vorgeschriebenen Eigenschaften betrifft, so kann man den folgenden Satz III beweisen:

Satz III. Um alle Systeme der $n + 2$ Integralgleichungen der Differentialgleichung $\Omega_0 = 0$ zu finden, die nicht alle die Integrale des Systems (B_1) sind und deren eine die gegebene Form

$F(x_1^0 \dots x_n^0 z^0 p_1^0 \dots p_n^0) = 0$ besitzt, soll man in folgender Weise verfahren: Man bestimme nach der Methode § I, 2 $n + 1$ Integrale der Differentialgleichung $\Omega_0 = 0$; wenn aus diesen Gleichungen die Gleichung $F = 0$ nicht folgt, so füge man noch diese Gleichung hinzu, vorausgesetzt, dass nicht alle $n + 1$ bestimmten Integrale die Integrale des Systems (B_1) sind; wenn dagegen diese Gleichungen die gegebene Gleichung $F = 0$ zur Folge haben, so füge man noch die Gleichung

$$\varphi(x_1^0 \dots p_n^0) = 0$$

hinzu, die nur die eine Bedingung erfüllen muss, dass nicht alle diese $n + 2$ Gleichungen die Integrale des Systems (B_1) sind.

Es sei in der Tat (E) ein System der $n + 2$ unabhängigen Integrale der Differentialgleichung $\Omega_0 = 0$ mit den vorgeschriebenen Eigenschaften.

Wir wissen, dass diese Gleichung immer durch $n + 1$ Integrale integriert werden kann. Es folgt also aus den Gleichungen (E) ein System (F) der $n + 1$ Integralgleichungen, die $n + 1$ Gleichungen des Systems (E) ersetzen können. Wenn aus den Gleichungen (F) die Gleichung $F = 0$ nicht folgt, so braucht man nur diese letztere zu dem Systeme (F) hinzuzufügen und man bekommt das System (E). Wenn aber dies nicht der Fall ist, so braucht man nur noch die letzte $n + 1$ -te von den Gleichungen (F) unabhängige Gleichung $\varphi(x_1^0 \dots x_n^0) = 0$ des Systems (E) hinzuzufügen und bekommt dann das System (E).

Man kann beweisen, dass alle nichtsingulären Integrale der Differentialgleichung (1) nur aus diesen Systemen von $n + 2$ Integralen der Differentialgleichung $\Omega_0 = dz_0 - p_1^0 dx_1^0 \dots p_n^0 dx_n^0 = 0$ erhalten werden können, die immer dieselben zwei Integralgleichungen $F(x_1^0 \dots p_n^0) = 0$, $\varphi(x_1^0 \dots p_n^0) = 0$ enthalten, wo $\varphi = 0$ kein Integral der Differentialgleichungen (B_1) ist.

In der Tat es sei das System

$$\vartheta_i(x_1 \dots p_n) = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad F(x_1 \dots p_n) = 0$$

der Integrale der Differentialgleichung

$$\Omega = dz - p_1 dx_1 - \dots - p_n dx_n = 0$$

aus dem Systeme

$$\Theta_i'(x_1^{00} \dots p_n^{00}) = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad F(x_1^{00} \dots p_n^{00}) = 0, \\ \psi(x_1^{00} \dots p_n^{00}) = 0$$

der $n + 2$ Integralgleichungen der Differentialgleichung

$$\Omega_{00} = dz_{00} - p_1^{00} dx_1^{00} - \dots - p_n^{00} dx_n^{00} = 0$$

erhalten, so dass man die Gleichungen

$$\mathfrak{D}_i(x_1 \dots p_n) = 0 \quad (i = 1, \dots, n),$$

wo $F(x_1 \dots p_n) = 0$ ist, aus den Gleichungen

$$(c') \quad \Theta_i'(x_1^{00} \dots p_n^{00}) = 0 \quad (i = 1, \dots, n),$$

wo $F(x_1^{00} \dots p_n^{00}) = 0$, $\psi(x_1^{00} \dots p_n^{00}) = 0$ ist, durch die Pfaffsche Transformation

$$\begin{aligned} x_i &= x_i(x_1 x_1^{00} \dots p_n^{00}) \quad (i = 2 \dots n), & z &= z(x_1 x_1^{00} \dots p_n^{00}) \\ p_i &= p_i(x_1 x_1^{00} \dots p_n^{00}) \quad (i = 1, 2 \dots n) \end{aligned}$$

wo $F(x_1^{00} \dots p_n^{00}) = 0$, $\psi(x_1^{00} \dots p_n^{00}) = 0$ ist, bekommt.

Es seien die Formeln der anderen Pfaffschen Transformation

$$\begin{aligned} x_i &= x_i(x_1 x_1^0 \dots p_n^0) \quad (i = 2 \dots n), & z &= z(x_1 x_1^0 \dots p_n^0), \\ p_i &= p_i(x_1 x_1^0 \dots p_n^0) \quad (i = 1, \dots, n), \end{aligned}$$

wo $F(x_1 \dots p_n^0) = 0$, $\varphi(x_1 \dots p_n^0) = 0$ ist.

Wenn wir mit Hilfe dieser Formel die Differentialgleichung

$$\Omega' = dz - p_1 dx_1 - \dots - p_n dx_n = 0,$$

wo $F(x_1 \dots p_n) = 0$ ist, und ihr Integralsystem $\mathfrak{D}_i(x_1 \dots p_n) = 0$ ($i = 1, 2 \dots n$), wo $F(x_1 \dots p_n) = 0$ ist, transformieren, so bekommen wir

$$(e) \quad \Omega' = e^{\int \lambda dy_1 - (\int \lambda dy_1)_0} (dz_0 - p_1^0 dx_1^0 - \dots - p_n^0 dx_n^0) = 0,$$

wo $F(x_1^0 \dots p_n^0) = 0$, $\varphi(x_1^0 \dots p_n^0) = 0$ ist,

und ihr Integralsystem

$$(c) \quad \Theta_i(x_1^0 \dots p_n^0) = 0 \quad (i = 1, 2 \dots n),$$

wo $F(x_1^0 \dots p_n^0) = 0$, $\varphi(x_1^0 \dots p_n^0) = 0$ ist.

Wir wissen weiter, dass $2n - 1$ Unabhängige der Veränderlichen $x_i z^0 p_i^0$ durch die $2n - 1$ Unabhängigen der Veränderlichen $x_i^{00} z^{00} p_i^{00}$ sich ausdrücken lassen und wir die neuen Formeln der Transformation bekommen. Wir wollen jetzt die Differentialgleichung (e) $\Omega' = 0$ und ihr Integralsystem (c) auf die Variablen $x_i^{00} z^{00} p_i^{00}$ transformieren. Das System (c) wird dann (c') und die Gleichung

$$dz_0 - p_1^0 dx_1^0 - \dots - p_n^0 dx_n^0 = 0$$

wird dann

$$dz_{00} - p_1^{00} dx_1^{00} - \dots - p_n^{00} dx_n^{00} = 0,$$

wo $F(x_1^{00} \dots p_n^{00}) = 0$, $\psi(x_1^{00} \dots p_n^{00}) = 0$ ist.

Da aber das System (c') das Integralsystem der letzten Gleichung ist, so ist das System (c) das Integralsystem der Differentialgleichung

$$dz_0 - p_1^0 dx_1^0 - \dots - p_n^0 dx_n^0 = 0,$$

wo $F(x_1^0 \dots p_n^0) = 0$, $\varphi(x_1^0 \dots p_n^0) = 0$ ist.

Wir können also das System

$$\vartheta_i(x_1 \dots p_n) = 0 \quad (i = 1 \dots n),$$

wo $F(x_1 \dots p_n) = 0$ ist, aus dem Integralsysteme

$$\Theta_i(x_1^0 \dots p_n^0) = 0 \quad (i = 1, 2 \dots n),$$

wo $F(x_1^0 \dots p_n^0) = 0$, $\varphi(x_1^0 \dots p_n^0) = 0$ ist, der Differentialgleichung

$$dz_0 - p_1^0 dx_1^0 - \dots - p_n^0 dx_n^0 = 0$$

wo $F(x_1^0 \dots p_n^0) = 0$, $\varphi(x_1^0 \dots p_n^0) = 0$ ist, erhalten, oder endlich, alle Systeme

$$\vartheta_i(x_1 \dots p_n) = 0 \quad (i = 1, 2 \dots n), \quad F(x_1 \dots p_n) = 0$$

der $n + 1$ Integralgleichungen der Differentialgleichung $\Omega = 0$, die die nichtsingulären Integrale geben, können aus den Systemen der $n + 2$ Integralgleichungen der Differentialgleichung

$$\Omega_0 = dz_0 - p_1^0 dx_1^0 - \dots - p_n^0 dx_n^0 = 0$$

erhalten werden, die dieselben zwei Gleichungen

$$F(x_1^0 \dots p_n^0) = 0, \quad \varphi(x_1^0 \dots p_n^0) = 0$$

enthalten.

Wir ersehen auch aus diesem Beweise, dass das Integral der gegebenen Differentialgleichung (1), das in Bezug auf eine Pfaffsche Transformation nichtsingulär ist, in Bezug auf jede Pfaffsche Transformation auch nichtsingulär ist, oder dass die Nichtsingulärität der Integrale in Bezug auf alle Pfaffschen Transformationen eine invariante Eigenschaft ist.

6. Das Integral im gewöhnlichen Sinne hat die Eigenschaft, dass $p_1 \dots p_n$ aus den $n + 1$ Integralgleichungen der Differentialgleichungen $\Omega = 0$

$$(a) \quad \vartheta_i(x_1 \dots p_n) = 0, \quad (i = 1, 2 \dots n), \quad F(x_1 \dots p_n) = 0$$

sich bestimmen lassen.

Man kann alle Integrale im gewöhnlichen Sinne aus diesen Systemen der $n + 2$ Integrale der Differentialgleichung $\Omega_0 = 0$ erhalten, die in Bezug auf $p_1^0 \dots p_n^0$ sich auflösen lassen. In der Tat es sei $\varphi(x_1 \dots p_n) = 0$ die Gleichung, infolge deren die Gleichungen (a) nicht illusorisch werden, und solche, dass

$$\varphi(x_1^0 \dots p_n^0) = 0$$

kein Integral der Differentialgleichungen (B₁) ist.

Wir können immer voraussetzen, dass die Gleichungen (a) aus $n + 2$ Integralgleichungen

$$\Theta_i(x_1^0 \dots p_n^0) = 0 \quad (i = 1, 2 \dots n), \quad F(x_1^0 \dots p_n^0) = 0$$

$$(b) \quad \varphi(x_1^0 \dots p_n^0) = 0$$

der Differentialgleichung $\Omega_0 = 0$ erhalten werden, die die Gleichung $\varphi = 0$ enthalten.

Wenn wir also in den Gleichungen (a)

$$\vartheta_i(x_1 \dots p_n) = 0 \quad (i = 1, 2 \dots n), \quad \text{wo } F(x_1 \dots p_n) = 0 \text{ ist,}$$

die Veränderlichen x_i^0, z^0, p_i^0 mit Hilfe der Formeln der Pfaffschen Transformation

$$\begin{aligned} x_i &= x_i(x_1 x_1^0 \dots p_n^0) \quad (i = 2 \dots n) \quad z_1 = z_1(x_1 x_1^0 \dots p_n^0), \\ p_i &= p_i(x_1 x_1^0 \dots p_n^0) \quad (i = 1, \dots, n), \end{aligned}$$

wo $F(x_1^0 \dots p_n^0) = 0, \quad \varphi(x_1^0 \dots p_n^0) = 0$ ist, einführen, so bekommen wir

$$\Theta_i(x_1^0 \dots p_n^0) = 0 \quad (i = 1, 2 \dots n),$$

wo $F(x_1^0 \dots p_n^0) = 0, \quad \varphi(x_1^0 \dots p_n^0) = 0$ ist.

Da nach dieser Transformation x_1 verschwindet, so können wir vor der Ausführung der Transformation $x_1 = x_1^0$ setzen und bekommen nach der Transformation

$$\vartheta_i(x_1^0 \dots p_n^0) = 0 \quad (i = 1, 2 \dots n),$$

wo $F(x_1^0 \dots p_n^0) = 0, \quad \varphi(x_1^0 \dots p_n^0) = 0$ ist.

Wir sehen also, dass das System (b) noch in der Form

$$\vartheta_i(x_1^0 \dots p_n^0) = 0, \quad (i = 1, 2 \dots n), \quad F(x_1^0 \dots p_n^0) = 0$$

$$(b) \quad \varphi(x_1^0 \dots p_n^0) = 0$$

dargestellt werden kann. Wenn also das System (a) in Bezug auf $p_1 \dots p_n$ auflösbar sein soll, so soll auch das System (b) in Bezug auf $p_1^0 \dots p_n^0$ auflösbar sein, und nur zwei von p_i^0 freien Gleichungen enthalten. Man erhält eine von diesen letzten, wenn man aus n von den Gleichungen

$$\mathcal{F}_i(x_1^0 \dots p_n^0) = 0 \quad (i = 1, 2 \dots n), \quad F(x_1^0 \dots p_n^0) = 0,$$

oder von den Gleichungen

$$\Theta_i(x_1^0 \dots p_n^0) = 0, \quad F(x_1^0 \dots p_n^0) = 0$$

$p^1 \dots p_n^0$ bestimmt und in die letzte Gleichung

$$\varphi(x_1^0 \dots p_n^0) = 0$$

einführt. Man bekommt dann die Gleichung

$$\varphi(z^0 x_1^0 \dots x_n^0) = 0,$$

die von p_i^0 frei und kein Integral des Systems (B_1) ist.

Wenn man umgekehrt das System der $n + 2$ Integralgleichungen der Differentialgleichung $\Omega_0 = 0$

$$\begin{aligned} \varphi(z_0 x_1^0 \dots x_n^0) = 0, \quad F(x_1^0 \dots p_n^0) = 0, \\ \Theta_i(x_1^0 \dots p_n^0) = 0, \quad (i = 1, 2, \dots, n), \end{aligned} \quad (b')$$

die nur zwei freie von p_i^0 enthalten, und deren eine z. B.

$$\varphi(z^0 x_1^0 \dots x_n^0) = 0$$

kein Integral des Systems (B_1) ist, bestimmt hat, so kann man nach dem Satze II das Integral im gewöhnlichen Sinne der Differentialgleichung (1) bekommen.

In der Tat wir sollen aus den Gleichungen (b') die Grössen $x_i^0 z^0 p_i^0$ mit Hilfe der Gleichungen

$$\begin{aligned} x_i = x_i(x_1 x_1^0 \dots p_n^0), \quad z = z(x_1 x_1^0 \dots p_n^0), \quad p_i = p_i(x_1 x_1^0 \dots p_n^0) \\ (i = 2 \dots n), \quad (i = 1, 2 \dots n) \end{aligned}$$

eliminieren. Diese letzten sind in Bezug auf $x_2^0 \dots p_n^0$ auflösbar und man bekommt nach der Elimination derselben

$$\begin{aligned} \varphi'(x_1^0 x_1 x_2 \dots p_n) = 0, \quad \Theta_i'(x_1^0 x_1 \dots p_n) = 0, \quad (i = 1, 2 \dots n), \\ F(x_1 \dots p_n) = 0, \end{aligned} \quad (c)$$

wo die erste Gleichung x_1^0 enthält, da die Gleichung $\varphi(x_1^0 \dots z^0) = 0$ kein Integral des Systems (B_1) ist.

Man kann aus den letzten $n+1$ Gleichungen, wo $\varphi'(x_1^0 x_2^0 \dots p_n) = 0$ ist, $p_1 \dots p_n$ bestimmen, da diese Gleichungen bei $x_1 = x_1^0$ die Form

$$\Theta_i(x_1^0 x_2^0 \dots p_n) = 0, \quad (i = 1, 2 \dots n), \quad F(x_1^0 x_2^0 \dots p_n) = 0,$$

wo $\varphi(z x_1^0 x_2^0 \dots p_n) = 0$, ist, annehmen.

Wenn wir also aus den Gleichungen (c) noch x_1^0 eliminieren, so bekommen wir $n+1$ Integralgleichungen

$$f(z x_1 \dots x_n) = 0, \quad \vartheta_i(x_1 \dots p_n) = 0 \quad (i = 1, 2 \dots n-1), \\ F(x_1 \dots p_n) = 0,$$

die nur eine von p_i freie Gleichung

$$f(z x_1 \dots x_n) = 0$$

enthalten, die ein Integral im gewöhnlichen Sinne der Differentialgleichung (1) ist.

Um das Integralsystem (b') von $n+2$ Gleichungen der Differentialgleichung $\Omega_0 = 0$ mit den oben erwähnten Eigenschaften zu erhalten, sollen wir ein Integralsystem von $n+1$ Gleichungen dieser Differentialgleichung mit denselben Eigenschaften suchen und dann im Sinne des Satzes II und III verfahren.

In der Tat es sei

$$\varphi(z^0 x_1^0 \dots x_n^0) = 0, \quad \psi(z^0 x_1^0 \dots x_n^0) = 0, \\ \Theta_i(z^0 x_1^0 \dots p_n^0) = 0 \quad (i = 1, 2 \dots n-1), \quad (b') \\ F(x_1^0 \dots p_n^0) = 0$$

ein System der Integrale der Differentialgleichung $\Omega_0 = 0$, das nur zwei von p_i^0 freie Gleichungen $\varphi = 0$, $\psi = 0$ enthält, deren eine $\varphi = 0$ kein Integral des Systems (B₁) ist.

Wir können zwei der Veränderlichen z^0 , x_i^0 , mit Hilfe der Gleichungen

$$\varphi = 0, \quad \psi = 0$$

aus der Gleichung $\Omega_0 = 0$ eliminieren. Die $n-1$ Koeffizienten bei den Differentialen der übrigen $n-1$ Veränderlichen $z_0 x_i^0$ sollen infolge der Gleichungen (b') verschwinden. Wir können also diese letzten, gleich Null gesetzten, als $n-1$ unabhängige Gleichungen des Systems (b') annehmen. Wenn wir noch die Gleichungen

$$\varphi = 0, \quad \psi = 0$$

hinzufügen, so sehen wir, dass das System (b') in sich ein System der $n+1$ Integralgleichungen der Differentialgleichung $\Omega_0 = 0$

enthält, die nur zwei von p_i^0 freien enthalten, deren eine kein Integral des Systems (B₁) ist.

Dieses System der $n + 1$ Integralgleichungen kann mit Hilfe der Multiplikatoren λ und μ in der Form dargestellt werden

$$1 + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial z^0} + \mu \frac{\partial \psi}{\partial z_0} = 0, \quad \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial x_i^0} + \mu \frac{\partial \psi}{\partial x_i^0} - p_i^0 = 0 \quad (i = 1, 2 \dots n)$$

$$\varphi(x_1^0 \dots x_n^0 z_0) = 0, \quad \psi(x_1^0 \dots x_n^0 z^0) = 0,$$

wo λ, μ eliminiert sein sollen.

Die Gleichungen

$$\varphi(x_1^0 \dots x_n^0 z^0) = 0, \quad \psi(x_1^0 \dots x_n^0 z_0) = 0,$$

deren eine kein Integral des Systems (B₁) sein soll, können im übrigen ganz willkürlich gewählt werden, sobald nur die Gleichung $F(x_1 \dots x_n z p_1 \dots p_n) = 0$ von p_i nicht frei ist, was immer vorausgesetzt wird.

Man kann die folgende Eigenschaft des so erhaltenen Integrals der gegebenen Differentialgleichung (1)

$$f(z x_1 \dots x_n) = 0$$

beweisen: dieses Integral genügt infolge der Relation

$$\varphi(x_1 \dots x_n z) = 0$$

der anderen Relation

$$\psi(x_1 \dots x_n z) = 0$$

In der Tat setzen wir voraus, dass die Gleichungen

$$f(x_1 \dots x_n z) = 0, \quad \varphi(x_1 \dots x_n z) = 0$$

verträglich sind. Da die letzte Gleichung kein Integral des Systems (B₁) ist, so können wir das System (b') noch in der Form

$$f(z^0 x_1^0 \dots x_n^0) = 0, \quad \vartheta_i(x_1^0 \dots p_n^0) = 0 \quad (i = 1, 2 \dots n - 1),$$

$$F(x_1^0 \dots p_n^0) = 0, \quad \varphi(x_1^0 \dots x_n^0 z^0) = 0 \quad (b'')$$

darstellen, das nur zwei von p_i^0 freie Gleichungen

$$f(z^0 x_1^0 \dots x_n^0) = 0, \quad \varphi(x_1^0 \dots x_n^0 z^0) = 0$$

enthält. Da aber das System (b') mit dem Systeme (b'') identisch ist, so folgt aus den Gleichungen

$$f(z^0 x_1^0 \dots x_n^0) = 0, \quad \varphi(x_1^0 \dots x_n^0 z^0) = 0$$

die Gleichung

$$\psi(x_1^0 \dots x_n^0 z^0) = 0.$$

w. z. b. w.

Wir haben hiermit den Satz IV bewiesen:

Satz IV. Wenn man die Differentialgleichung

$$\Omega_0 = dz_0 - p_1^0 dx_1^0 - \dots - p_n^0 dx_n^0 = 0$$

durch $n + 2$ Integralgleichungen der Gestalt

$$(b) \quad \varphi(x_1^0 \dots x_n^0 z^0) = 0, \quad \psi(x_1^0 \dots x_n^0 z_0) = 0, \\ \Theta_i(x_1^0 \dots p_n^0) = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n - 1), \quad F(x_1^0 \dots p_n^0) = 0$$

integriert hat, die nur zwei von p_i^0 freien Gleichungen enthalten, deren eine $\varphi(x_1^0 \dots x_n^0 z^0) = 0$ kein Integral des Systems (B_1) ist, und wenn man die Grössen $x_i^0 z^0 p_i^0$ ($i = 1, 2, \dots, n$) aus den Gleichungen (b) und den Gleichungen

$$(a) \quad x_i = x_i(x_1 x_1^0 \dots p_n) \quad (i = 1 \dots n), \quad z = z(x_1 x_1^0 \dots p_n^0), \\ p_i = p_i(x_1 x_1^0 \dots p_n) \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

die die Hauptintegrale des Systems (B_1) in Bezug auf $x_1 = x_1^0$ sind, eliminiert hat, so erhält man das Integral $f(z x_1 \dots x_n) = 0$ im gewöhnlichen Sinne der Differentialgleichung (1). Dieses Integral hat die Eigenschaft, dass es infolge der Relation $\varphi = 0$ der anderen Relation $\psi = 0$ genügt. Alle Integrale im gewöhnlichen Sinne können in dieser Weise erhalten werden.

7. Man nennt das Integralsystem

$$(a) \quad \mathfrak{F}_i(x_1 \dots p_n), \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad F(x_1 \dots p_n) = 0$$

der Differentialgleichung $\Omega = 0$ ein vollständiges Integral der Differentialgleichung (1), wenn die Gleichungen

$$\mathfrak{F}_i(x_1 \dots p_n) = 0, \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

n willkürliche Konstanten $C_1 \dots C_n$ enthalten, von denen die gegebene Gleichung (1) frei ist und die aus diesen Gleichungen sich bestimmen lassen.

Wenn dabei die Gleichungen (a) nur eine von p_i freie Gleichung

$$f(z x_1 \dots x_n C_1 \dots C_n) = 0$$

enthalten, so ist diese letzte das vollständige Integral im gewöhnlichen Sinne.

Man kann alle vollständigen Integrale aus diesen Systemen von $n + 2$ Integralgleichungen der Differentialgleichung $\Omega_0 = 0$

$$\Theta_i(x_1^0 \dots p_n^0) = 0 \quad (i = 1, 2 \dots n), \quad F(x_1^0 \dots p_n^0) = 0, \\ \varphi(x_1^0 \dots p_n^0) = 0$$

erhalten, wo nur die Gleichungen

$$\Theta_i = 0 \quad (i = 1, 2 \dots n)$$

$C_1 \dots C_n$ enthalten und in Bezug auf dieselben auflösbar sind. In der Tat die Gleichung $\varphi(x_1^0 \dots p_n^0) = 0$ soll von den willkürlichen Konstanten $C_1, C_2 \dots C_n$ frei sein, da sie die Relation zwischen den Integrationskonstanten $x_i^0 z^0 p_i^0$ der $2n$ Integrale des Systems (B) bedeutet. Wir zeigen jetzt, dass wir immer voraussetzen können, dass die Gleichungen $\Theta_i = 0$ ($i = 1, 2 \dots n$) in Bezug auf $C_1 \dots C_n$ auflösbar seien.

In der Tat es sei die Gleichung $\varphi = 0$, die kein Integral des Systems (B₁) ist und keine willkürliche Konstanten enthält, mit den Gleichungen (a) verträglich.

Wir wissen (Nr. 6), dass in diesem Falle das System der $n + 2$ Integralgleichungen der Differentialgleichung $\Omega_0 = 0$

$$\Theta_i(x_1^0 \dots p_n^0) = 0 \quad (i = 1, 2 \dots n), \quad F(x_1^0 \dots p_n^0) = 0, \\ \varphi(x_1^0 \dots p_n^0) = 0 \quad (b)$$

aus denen das Integral (a) erhalten werden kann, in der Form

$$\mathcal{I}_i(x_1^0 \dots p_n^0) = 0 \quad (i = 1, 2 \dots n), \quad F(x_1^0 \dots p_n^0) = 0, \\ \varphi(x_1^0 \dots p_n^0) = 0, \quad (b')$$

dargestellt werden kann, womit unsere Behauptung bewiesen ist. Wir haben also den Satz V:

Satz V. Wenn man die Differentialgleichung

$$\Omega_0 = dz_0 - p_1^0 dx_1^0 \dots - p_n^0 dx_n^0 = 0$$

durch $n + 2$ Integrale

$$\Theta_i(x_1^0 \dots p_n^0) = 0 \quad (i = 1, 2 \dots n), \quad F(x_1^0 \dots p_n^0) = 0, \\ \varphi(x_1^0 \dots p_n^0) = 0 \quad (b)$$

von der Eigenschaft, dass nur die n ersten Gleichungen n willkürliche Konstanten $C_1 \dots C_n$ enthalten, in Bezug auf welche sie auflösbar sind, und wo die Gleichung $\varphi = 0$ kein Integral des Systems (B₁) ist, integriert hat, und wenn man die Grössen $x_i^0 z_0 p_i^0$ ($i = 1, 2 \dots n$) aus den Gleichungen (b) und den Gleichungen

$$(a) \quad \begin{aligned} x_i &= x_i(x_1 x_1^0 \dots p_n^0) \quad (i = 2 \dots n), \quad z = z_0(x_1 x_1^0 \dots p_n^0), \\ p_i &= p_i(x_1 x_1^0 \dots p_n^0) \quad (i = 1 \dots n) \end{aligned}$$

eliminiert hat, so bekommt man das vollständige Integral

$$\mathcal{F}_i(x_1 \dots p_n) = 0 \quad (i = 1, 2 \dots n), \quad F(x_1 \dots p_n) = 0$$

der gegebenen Differentialgleichung (1).

Alle vollständigen Integrale können in dieser Weise erhalten werden. Wenn dieses vollständige Integral auch das Integral im gewöhnlichen Sinne sein soll, so muss das System (b) nur zwei von p_i^0 freien Gleichungen enthalten.

Wir können also folgenden Satz VI aussprechen:

Satz VI. Wenn man die Differentialgleichung $\Omega_0 = 0$ durch $n + 2$ Integrale:

$$(b) \quad \begin{aligned} \Theta_i(x_1^0 \dots p_n^0) &= 0 \quad (i = 1, 2 \dots n), \\ F(x_1^0 \dots p_n^0) &= 0, \quad \varphi(x_1^0 \dots p_n^0) = 0 \end{aligned}$$

von der Eigenschaft, dass nur die n ersten Gleichungen n willkürliche Konstanten $C_1 \dots C_n$ enthalten, in Bezug auf welche sie auflösbar sind, und dass $\varphi = 0$ kein Integral des Systems (B_1) ist, die nur zwei von p_i^0 freie Gleichungen enthalten, deren eine kein Integral des Systems (B_1) ist, integriert hat, und wenn man die Grössen $x_i^0 z^0 p_i^0 p_i$ ($i = 1, 2 \dots n$) aus den Gleichungen (b) und (a) eliminiert hat, so erhält man das vollständige Integral im gewöhnlichen Sinne.

Alle solche Integrale können in dieser Weise erhalten werden. Man bekommt das vollständige Integral, wenn das System (b) z. B. die Form hat:

$$x_i^0 = C_i \quad (i = 1, 2 \dots n), \quad \varphi(z^0 x_1^0 \dots x_n^0) = 0, \quad F(x_1^0 \dots p_n^0) = 0,$$

wo $\varphi = 0$ kein Integral des Systems (B_1) ist.

Man bekommt das vollständige Integral im gewöhnlichen Sinne, wenn das System (b) z. B. die Form hat

$$z^0 = \sum_1^n x_i^0 p_i^0, \quad p_i^0 = C_i \quad (i = 1, 2 \dots n), \quad F(x_1^0 \dots p_n^0) = 0,$$

wenn selbstverständlich die gegebene Differentialgleichung $F(x_1 \dots p_n) = 0$ die Form $z - x_1 \frac{\partial z}{\partial x_1} - \dots - x_n \frac{\partial z}{\partial x_n} = 0$ nicht besitzt.

Wir wissen, dass bei der Integration der Gleichung

$$dz - p_1 dx_1 - \dots - p_n dx_n = 0,$$

wie im allgemeinen bei der Integration der Gleichung

$$df - F_1 df_1 - \dots - F_n df_n = 0$$

eines der Integrale von der Form

$$\varphi(z, x_1, \dots, x_n) = 0$$

ganz willkürlich gewählt werden kann.

Die ganze soeben entwickelte Theorie zeigt, dass bei der Integration der Differentialgleichung

$$dz - p_1 dx_1 - \dots - p_n dx_n = 0$$

eines der Integrale ganz willkürlich in der Form

$$F(x_1, x_2, \dots, p_n) = 0$$

gewählt werden kann, was übrigens aus der Natanischen Theorie des Pfaffschen Ausdruckes $X_1 dx_1 + \dots + X_p dx_p$ ungerader Klasse $2n + 1$, wo $2n + 1 = p$ ist, bekannt ist¹⁾.

8. Die entwickelte Theorie enthält in rein analytischer Form die Sätze, die S. Lie mit der gemischten analytisch-geometrischen Methode gefunden hat (Math. Ann., Bd. 9). Ich beschränke mich nur darauf, dass ich einige der oben bewiesenen Sätze in der Form von S. Lie wiederhole, wobei ich die Begriffe des Elements (z, x_i, p_i) des $n + 1$ -dimensionalen Raumes, des Elementvereins M_k von ∞^k Elementen, des charakteristischen Streifens und der Integralmannigfaltigkeit der gegebenen Gleichung (1) $F(x_1, \dots, x_n, z, p_1, \dots, p_n) = 0$ als bekannt voraussetze.

Der Satz I kann zweierlei geometrische Bedeutung haben:

a) Wenn x_i^0, z^0, p_i^0 als konstant betrachtet werden, so gilt der Satz: Alle benachbarten Elemente (z, x_i, p_i) des charakteristischen Streifens der gegebenen Differentialgleichung $F(x_1, \dots, x_n, z, p_1, \dots, p_n) = 0$ liegen vereinigt;

b) wenn zwei benachbarte Elemente (z_0, x_i^0, p_i^0) und $(z_0 + dz_0, x_i^0 + dx_i^0, p_i^0 + dp_i^0)$ zweier charakteristischen Streifen vereinigt liegen, d. h. wenn

$$dz_0 - p_1^0 dx_1^0 - \dots - p_n^0 dx_n^0 = 0 \text{ ist,}$$

¹⁾ „Ueber totale und partielle Differentialgleichungen“ J. Crelle, Bd. 58.

so liegen alle benachbarten Elemente $(z x_i p_i)$ und $(z + dz, x_i + dx_i, p_i + dp_i)$ dieser Streifen auch vereinigt.

Satz II. Um alle Integralmannigfaltigkeiten M_n der gegebenen Differentialgleichung $F(x_1 \dots p_n) = 0$, die von charakteristischen Streifen erzeugt sind, zu bekommen, soll man irgend eine Integralmannigfaltigkeit M_{n-1} derselben Gleichung nehmen, die von den charakteristischen Streifen nicht erzeugt ist ¹⁾, und dann durch jedes Element derselben die charakteristischen Streifen führen.

Satz III. Um eine Integralmannigfaltigkeit M_{n-1} der Gleichung $F = 0$, die von den Charakteristiken nicht erzeugt ist, zu erhalten, soll man irgend einen Elementverein M_n nehmen. Ist dieser letzte keine Integralmannigfaltigkeit M_n , so soll man die Koordinaten der Elemente $(z x_i p_i)$ desselben noch der Bedingung $F = 0$ unterwerfen, vorausgesetzt, dass der Elementverein M_n nicht von den charakteristischen Streifen erzeugt ist; ist dagegen M_n die Integralmannigfaltigkeit M_n der Differentialgleichung $F = 0$, so soll man die Elemente derselben der ganz willkürlichen Relation $\varphi(x_1 \dots p_n) = 0$ unterwerfen, die nur einer Bedingung genügen soll, dass die erhaltene Integral- M_{n-1} von den Charakteristiken nicht erzeugt ist.

Satz IV. Um die Integralmannigfaltigkeit M_n der Differentialgleichung $F = 0$, die von den charakteristischen Streifen erzeugt ist und als Punkt-Mannigfaltigkeit n -fach ausgedehnt ist zu erhalten, kann man irgend eine Integralmannigfaltigkeit M_{n-1} derselben Gleichung nehmen, die als Punkt-Mannigfaltigkeit nur $(n - 1)$ -fach ausgedehnt ist und mit derselben im Sinne des Satzes II verfahren. Dieses Integral ist nur dann möglich, wenn der charakteristische Streifen das Punktgebilde ist.

Einige im §. 7 erhaltenen analytischen Ergebnisse können geometrisch in folgender Weise interpretiert werden. Der Inbegriff ∞^n Integralmannigfaltigkeiten M_n der Gleichung $F = 0$ wird das vollständige Integral der gegebenen Gleichung genannt. Um das vollständige Integral zu bekommen, kann man z. B. die charakteristischen Streifen durch den Punkt $(z x_i)$ allgemeiner Lage der Mannigfaltigkeit

¹⁾ Das ist der geometrische Sinn dieses Umstandes, dass eine der Integralgleichungen der Differentialgleichung $dz_0 - p_1^0 dx_1^0 - \dots - p_n^0 dx_n^0 = 0$, $\Theta_i(x_1^0 \dots p_n^0) = 0$, ($i = 1, 2 \dots n$), $F(x_1^0 \dots p_n^0) = 0$, $\varphi(x_1^0 \dots p_n^0) = 0$ nämlich $\varphi = 0$, kein Integral des Systems (B.) ist.

$$\varphi(x_1 \dots x_n, z) = 0$$

führen, vorausgesetzt, dass diese letzte von den charakteristischen Streifen nicht erzeugt sei.

9. Man sieht leicht aus der Darstellung der Theorie, dass sie ein willkürliches Element enthält, und zwar die Wahl der Relation $\varphi(x_1^0 \dots p_n^0) = 0$ fast willkürlich ist. Wir haben auch bewiesen, dass die Beschränkung der Form dieser Funktion keinen Einfluss auf die Allgemeinheit der Ergebnisse ausübt, da die Nichtsingularität der Integrale bei allen Pfaffschen Transformationen invariant bleibt. Wir können daher dieser Gleichung eine möglichst einfache Form geben, wir können z. B. voraussetzen, dass $\varphi(x_1^0 \dots p_n^0)$ nur eine der Veränderlichen enthält unter der selbstverständlichen Bedingung, dass $\varphi = 0$ kein Integral des Systems (B_1) ist. Da wir vorausgesetzt haben, dass $\frac{\partial F}{\partial p_1} = 0$ ist, so können wir $\varphi(x_1^0 \dots p_n^0) = \varphi(x_1^0)$ setzen, oder dass $x_1^0 = \text{num. konst. z. B. } h$ ist.

Wir erhalten bei dieser Voraussetzung die Methode von Cauchy in ihrer allgemeinsten Form.

Der Satz II drückt sich so aus:

Um alle nichtsingulären Integrale der Differentialgleichung $F = 0$ zu erhalten, soll man die Differentialgleichung

$$dz_0 - p_1^0 dx_1^0 - \dots - p_n^0 dx_n^0 = 0$$

durch $n + 2$ Integrale

$$\Theta_i(x_1^0 \dots p_n^0) = 0, \quad F(x_1^0 \dots p_n^0) = 0, \quad x_1^0 = h, \quad (\text{a})$$

integrieren und dann die Grössen

$$x_2^0 \dots x_n^0 z^0 p_1^0 \dots p_n^0$$

aus den Gleichungen

$$\Theta_i(h, x_2^0 \dots p_n^0) = 0, \quad F(h, x_2^0 \dots p_n^0) = 0$$

$$x_i = x_i(x_1 h, x_2^0 \dots p_n^0), \quad z = z(x_1 h, x_2^0 \dots p_n^0), \quad p_i = p_i(x_1 h, x_2^0 \dots p_n^0) \\ (i = 2 \dots n) \qquad \qquad \qquad (i = 1, 2 \dots n)$$

eliminieren, wo die $2n$ letzten Gleichungen $2n$ Hauptintegrale des Systems (B_1)

$$\frac{dx_1}{\frac{\partial F}{\partial p_1}} = \dots = \frac{dx_n}{\frac{\partial F}{\partial p_n}} = \frac{dz}{\sum p_i \frac{\partial F}{\partial p_i}} = - \frac{dp_1}{\frac{\partial F}{\partial x_1} + p_1 \frac{\partial F}{\partial z}} = \dots = - \frac{dp_n}{\frac{\partial F}{\partial x_n} + p_n \frac{\partial F}{\partial z}}$$

in Bezug auf $x_1 = h$ sind.

Der Satz III geht in folgenden Satz über:

Wenn man das System $n + 2$ Integralgleichungen der Differentialgleichung $\Omega_0 = 0$ von der Form

$$\Theta_i(x_1^0 \dots p_n^0) = 0, \quad (i = 1, 2 \dots n), \quad F(x_1^0 \dots p_n^0) = 0, \\ x_1^0 = h \left(\frac{\partial F}{\partial p_1^0} = 0 \right),$$

wo h den gegebenen Wert hat, erhalten will, so soll man die Differentialgleichung

$$dz_0 - p_2^0 dx_2^0 - \dots - p_n^0 dz_n^0 = 0$$

durch irgend ein System der n Gleichungen integrieren und dann die Gleichungen

$$F(x_1^0 \dots x_n^0 z^0 p_1^0 \dots p_n^0) = 0, \quad x_1^0 = h$$

hinzufügen. Also der Satz II nimmt schliesslich die Form an:

Um alle nichtsingulären Integrale der Differentialgleichung $F = 0$, wo $\frac{\partial F}{\partial p_1} \neq 0$ ist, zu bekommen, soll man die Differentialgleichung

$$dz_0 - p_2^0 dx_2^0 - \dots - p_n^0 dx_n^0 = 0$$

durch irgend ein System von n Integralen

$$\Theta_i(x_2^0 \dots p_n^0) = 0, \quad (i = 1, 2 \dots n),$$

integrieren und dann die Grösse

$$x_2^0 \dots x_n^0 z^0 p_1^0 \dots p_n^0$$

aus den Gleichungen

$$\Theta_i(x_2^0 \dots p_n^0) = 0, \quad (i = 1 \dots n), \quad F(h \dots p_n^0) = 0, \\ x_i = x_i(x_1 h x_2^0 \dots p_n^0), \quad (i = 2 \dots n) \\ z = z(x_1 h x_2^0 \dots p_n^0), \\ p_i = p_i(x_1 h x_2^0 \dots p_n^0), \quad (i = 1 \dots n),$$

wo $2n$ letzte Gleichungen $2n$ Hauptintegrale des Systems (B_1) in Bezug auf $x_1 = h$ sind, eliminieren.

Satz IV. Wenn man die Differentialgleichung

$$dz^0 - p_2^0 dx_2^0 - \dots - p_n^0 dx_n^0 = 0$$

durch n Integrale

$$\psi(x_2^0 \dots x_n^0 z^0) = 0, \quad \Theta_i(x_2^0 \dots x_n^0 z^0 \dots p_n^0) = 0 \quad (i = 1, 2 \dots n - 1),$$

wo es nur eine von p_1^0 freie Gleichung $\psi = 0$ gibt, integriert hat, und wenn man die Grössen $x_2^0 \dots p_1^0 \dots p_n^0$, $p_1 \dots p_n$ aus den Gleichungen

$$\begin{aligned} \psi(x_2^0 \dots x_n^0 z^0) &= 0, & \Theta_i(x_2^0 \dots p_n^0) &= 0 \quad (i = 1, 2 \dots n-1) \\ F(h, x_2^0 \dots p_n^0) &= 0, & x_i &= x_i(x_1 h x_2^0 \dots p_n^0), \quad (i = 2 \dots n), \\ z &= z(x_1 h x_2^0 \dots p_n^0), & p_i &= p_i(x_1 h x_2^0 \dots p_n^0), \quad (i = 1, 2 \dots n), \\ & & \left(\frac{\partial F}{\partial p_1^0} \neq 0 \right) \end{aligned}$$

eliminiert hat, wo die $2n$ letzten die Hauptintegrale des Systems (B_1) in Bezug auf $x_1 = h$ sind, so bekommt man das Integral

$$f(z x_1 \dots x_n) = 0$$

in gewöhnlichem Sinne. Das letzte hat die Eigenschaft, dass es bei $x_1 = h$ $\psi(x_2 \dots x_n z) = 0$ wird.

Satz VI. Wenn man die Differentialgleichung

$$dz_0 - p_2^0 dx_2^0 - \dots - p_n^0 dx_n^0 = 0$$

durch n Integrale

$$\psi(x_2^0 \dots x_n^0 z^0) = 0, \quad \Theta_i(x_2^0 \dots z^0 p_2^0 \dots p_n^0) = 0,$$

wo es nur eine von p_1^0 freie Gleichung $\psi = 0$ gibt, die in Bezug auf n willkürlichen Konstanten $C_1 \dots C_n$ auflösbar sind, integriert hat, und wenn man die Grössen $x_i^0 z p_i^0 p_i$ aus den Gleichungen

$$\begin{aligned} \psi(x_2^0 \dots x_n^0 z^0) &= 0, & \Theta_i(x_2^0 \dots z^0 p_2^0 \dots p_n^0) &= 0, \quad (i = 1, 2 \dots n-1), \\ F(h x_2^0 \dots p_n^0) &= 0, & x_i &= x_i(x_1 h x_2^0 \dots p_n^0), \quad (i = 2 \dots n), \\ z &= z(x_1 h x_2^0 \dots p_n^0), & p_i &= p_i(x_1 h x_2^0 \dots p_n^0), \quad (i = 1, 2 \dots n), \\ & & \left(\frac{\partial F}{\partial p_1^0} \neq 0 \right) \end{aligned}$$

eliminiert hat, so bekommt man das vollständige Integral im gewöhnlichen Sinne der Differentialgleichung (1).

Dieses Integral hat die Eigenschaft, dass es bei $x_1 = h$ die Form

$$\psi(x_2 \dots x_n z) = 0$$

annimmt.

10. Wir wollen jetzt einen besonderen Fall in Betracht ziehen, nämlich den Fall, wenn die gegebene Differentialgleichung die Form

$$\frac{\partial z}{\partial x_1} + H(x_1 \dots x_n \frac{\partial z}{\partial x_2} \dots \frac{\partial z}{\partial x_n}) = 0$$

hat. Wir werden sie nach der Methode von Cauchy integrieren.

Das System der gewöhnlichen Differentialgleichungen (B_1) hat in diesem Falle die Form

$$dx_1 = \frac{dx_2}{\frac{\partial H}{\partial p_2}} = \dots = \frac{dx_n}{\frac{\partial H}{\partial p_n}} = \frac{dz}{p_1 + \sum p \frac{\partial H}{\partial p}} = -\frac{dp_1}{\frac{\partial H}{\partial x_1}} = \dots = -\frac{dp_n}{\frac{\partial H}{\partial x_n}}$$

und sein System der Hauptintegrale in Bezug auf $x_1 = h$ die Form

$$\begin{aligned} (a) \quad x_i &= x_i(x_1 x_2^0 \dots x_n^0 p_2^0 \dots p_n^0) \quad (i = 2 \dots n), \\ z &= z_0 + z(x_1 x_2^0 \dots x_n^0 p_1^0 \dots p_n^0), \\ p_i &= p_i(x_1 x_2^0 \dots x_n^0 p_1^0 \dots p_n^0) \quad (i = 1, 2 \dots n). \end{aligned}$$

Um die Gleichung (1) zu integrieren, müssen wir die Gleichung

$$dz_0 - p_2^0 dx_2^0 - \dots - p_n^0 dx_n^0 = 0$$

durch n Integrale

$$(L) \quad \Theta_i(x_2^0 \dots z_0 p_2^0 \dots p_n^0) = 0 \quad (i = 1, 2 \dots n)$$

integrieren (Satz II, III) und dann die Grössen $x_2^0 \dots x_n^0 z^0 p_1^0 \dots p_n^0$ aus den Gleichungen

$$\Theta_i = 0 \quad (i = 1, 2 \dots n), \quad p_1^0 + H(x_1^0 h \dots p_n^0) = 0$$

und den Gleichungen (α) eliminieren.

Man wird nach der Elimination p_1^0 das System

$$(M) \quad \Theta_i(x_2^0 \dots p_2^0) = 0, \quad (i = 1, 2 \dots n), \quad p_1 + H(x_1 \dots p_n) = 0$$

$$(a') \quad \begin{cases} x_i = x_i(x_1 x_2^0 \dots p_n^0), & p_i = p_i(x_1 x_2^0 \dots p_2^0 \dots p_n^0), \quad (i = 2, 3 \dots n) \\ z = z_0 + z'(x_1 x_2^0 \dots x_n^0 p_2^0 \dots p_n^0) \end{cases}$$

wo die $2n - 1$ Gleichungen (a') die Hauptintegrale des Systems

$$\begin{aligned} (B_2) \quad dx_1 &= \frac{dx_2}{\frac{\partial H}{\partial p_2}} = \dots = \frac{dx_n}{\frac{\partial H}{\partial p_n}} = \frac{dz}{\sum p \frac{\partial H}{\partial p} - H} \\ &= -\frac{dp_2}{\frac{\partial H}{\partial x_2}} = \dots = -\frac{dp_n}{\frac{\partial H}{\partial x_n}} \end{aligned}$$

und daher wo

$$z = z_0 + \int_h^{x_1} \left(\sum p \frac{\partial H}{\partial p} - H \right) dx_1 \text{ ist, erhalten.}$$

Wenn man aus den $n + 1$ ersten Gleichungen (M) die Grössen $x_2^0 \dots x_n^0 p_2^0 \dots p_n^0 z^0$ mit Hilfe der Gleichungen (α) eliminiert, so bekommt man das Integral

$$\mathcal{F}_i(x_1 x_2 \dots x_n p_2 \dots p_n) = 0 \quad (i = 1, 2 \dots n), \quad p_1 + H = 0 \quad (\text{N})$$

der Differentialgleichung (1).

Wenn diese letzten Gleichungen in Bezug auf $p_1 \dots p_n$ und in Bezug auf $C_1 \dots C_n$ auflösbar sind, dann bekommt man nach der Elimination der Grössen $p_1 \dots p_n$ das vollständige Integral im gewöhnlichen Sinne der Differentialgleichung (1).

Alle solche Integrale können erhalten werden, wenn wir die Gleichungen (L) so wählen, dass sie in Bezug auf $p_2^0 \dots p_n^0$ und $C_1 \dots C_n$ auflösbar sind, z. B. wenn man für das System (L) das System:

$$\begin{aligned} z_0 &= C_2 x_2^0 + \dots + C_n x_n^0 + C_1 \\ p_2^0 &= C_2, \dots, p_n^0 = C_n^0 \end{aligned}$$

nimmt.

Jacobi hat bei der Integration der Gleichung (1) für das System (L) das System

$$z_0 = C_1, x_2^0 = C_2 \dots x_n^0 = C_n$$

genommen. Dieses System führt nur dann zum gewöhnlichen vollständigen Integrale, wenn aus den $2n - 1$ Gleichungen

$$\begin{aligned} x_i &= x_i(x_1 C_2 \dots C_n p_2^0 \dots p_n^0) \quad (i = 2 \dots n), \\ z &= C_1 + \int_h^{x_1} \left(\sum p \frac{\partial H}{\partial p} - H \right) dx_1 \quad (\alpha'') \\ p_i &= p_i(x_1 C_2 \dots C_n p_2^0 \dots p_n^0) \quad (i = 2 \dots n) \end{aligned}$$

nur eine von $p_2 \dots p_n$ freie Relation folgt, d. h. wenn die $n - 1$ ersten Gleichungen des Systems (α'') in Bezug auf $p_2^0 \dots p_n^0$ auflösbar sind.

Da das nicht immer der Fall ist, so setzt A. Mayer für das System (L) das System

$$\begin{aligned} z_0 &= C_2 x_2^0 + \dots + C_n x_n^0 + C_1 \\ p_i^0 &= C_i \quad (i = 2 \dots n), \end{aligned}$$

so dass A. Mayer nach dem Satz IV verfährt, während Jacobi dieses Verfahren nicht benutzt.

G. Darboux¹⁾ hat die Methode von Jacobi vervollständigt und seine Gedanken bewahrt, indem er gezeigt hat, wie man verfahren soll, wenn aus den Gleichungen

$$(S) \quad x_i = x_i(x_1 x_2^0 \dots x_n^0 p_2^0 \dots p_n^0)$$

die von p_i^0 freien Relationen folgen, um das vollständige gewöhnliche Integral zu erhalten, ohne den Satz IV zu benutzen. Er zeigt, dass, wenn aus den Gleichungen (S) die Relationen

$$x_2^0 - \varphi_2(x_1 \dots x_n x_{r+1}^0 \dots x_n^0) = 0,$$

$$\dots \dots \dots$$

$$x_r^0 - \varphi_r(x_1 \dots x_n x_{r+1}^0 \dots x_n^0) = 0,$$

folgen, man die Gleichungen (S) in Bezug auf $x_2^0 \dots x_r^0 p_{r+1}^0 \dots p_n^0$ auflösen kann.

Wenn wir jetzt für das System (L) das folgende System

$$(L') \quad \begin{aligned} z_0 &= C_2 x_2^0 + \dots + C_r x_r^0 + C_1, & x_{r+1}^0 &= C_{r+1} \dots x_n^0 = C_n, \\ p_2^0 &= -C_2 \dots, & p_r^0 &= -C_r, \end{aligned}$$

nehmen, so bekommen wir dann das vollständige gewöhnliche Integral der Gleichung (1), da dann aus den Gleichungen (L') und

$$x_i = x_i(x_1 x_2^0 \dots x_n^0 p_2^0 \dots p_n^0) \quad (i = 2 \dots n),$$

$$z = z_0 + \int_h^{x_1} \left(\sum p \frac{\partial H}{\partial p} - H \right) dx_1,$$

$$p_i = p_i(x_1 x_2^0 \dots p_n^0) \quad (i = 2 \dots n), \quad p_1 + H = 0$$

nur eine Relation zwischen z x folgt.

Der innere Unterschied zwischen den Methoden von A. Mayer und G. Darboux besteht in der Benutzung oder Nichtbenutzung des Satzes IV.

Wenn $r = n$ ist, so stimmen beide Methoden überein.

Es ist klar, dass diese Methoden die einfachsten ihrer Art sind.

§ 3.

Wir wollen jetzt zur Ermittlung der singulären Integrale übergehen.

¹⁾ Bull. d. Sc. math., Bd. 8 (sér. I; Compt. Rend. 79, 80.

Wir haben gesehen, dass die Differentialgleichung

$$\Omega' = dz - p_1 dx_1 - \dots - p_n dx_n = 0,$$

wo $F(x_1 \dots p_n) = 0$ ist, durch die Transformation mit Hilfe der Formel

$$\begin{aligned} x_1 &= x_1(y_1 x_1^0 \dots p_n^0), & x_i &= x_i(x_1 x_1^0 \dots p_n^0) \quad (i = 2 \dots n) \\ z &= z(x_1 x_1^0 \dots p_n^0), & p_i &= p_i(x_1 x_1^0 \dots p_n^0) \quad (i = 1, 2 \dots n), \end{aligned} \quad (\alpha)$$

wo $F(x_1^0 \dots p_n^0) = 0$, $\varphi(x_1^0 \dots p_n^0) = 0$ ist, die Form

$$\Omega' = e^{\int \lambda dy_1 - (\int \lambda dy_1)_0} (dz_0 - p_1^0 dx_1^0 - \dots - p_n^0 dx_n^0) = 0$$

annimmt. Wenn $\frac{\partial F}{\partial z} = 0$ ist, so ist dann $\lambda = 0$. Wenn dagegen

$\frac{\partial F}{\partial z} \neq 0$ ist, so ist dann λ willkürlich, aber nicht gleich Null.

Das Integral der gegebenen Differentialgleichung (1) heisst singular, wenn es durch Nullsetzung des Faktors

$$e^{\int \lambda dy_1 - (\int \lambda dy_1)_0}$$

erhalten werden kann, insofern es durch Nullsetzung des Faktors

$$dz_0 - p_1^0 dx_1^0 - \dots - p_n^0 dx_n^0$$

nicht erhalten werden kann.

Das singuläre Integral ist nun dann möglich, wenn $\frac{\partial F}{\partial z} \neq 0$ ist.

Da in diesem Falle λ willkürlich ist, so können wir, ohne die Allgemeinheit zu beschränken, $\lambda = 1$ setzen.

Wir müssen also, um das singuläre Integral zu erhalten,

$$e^{y_1 - y_1^0} = 0 \quad (\beta)$$

setzen.

Wenn wir diese Gleichung auf die neuen Veränderlichen transformieren, so bekommen wir die Relation

$$\vartheta_1(x_1 \dots x_n, z, p_1 \dots p_n) = 0.$$

Es ist klar, dass die Formeln der Transformation (α) infolge der Relation

$$e^{y_1 - y_1^0} = 0 \quad (\beta)$$

noch $n - 1$ Relationen zwischen z, x_i, p_i geben, da wir die Gleichung $\Omega' = 0$ nur mit Hilfe von mindestens n Gleichungen zum Verschwinden bringen können.

Diese n Gleichungen zwischen $x_1 \dots x_n z p_1 \dots p_n$ müssen aus den Formeln der Transformation (α) und der Gleichung (β) bei der willkürlichen Wahl der Funktion $\varphi(x_1^0 \dots p_n^0) = 0$, die nur kein Integral des Systems (B_1) sein soll, folgen, da die Nichtsingularität, und folglich die Singularität des Integrals eine invariante Eigenschaft gegen alle Pfaffsche Transformationen ist.

Wenn wir zu diesen n Gleichungen

$$\mathcal{D}_i(x_1 \dots x_n z p_1 \dots p_n) = 0 \quad (i = 1, 2 \dots n),$$

noch die Gleichung $F(x_1 \dots x_n z p_1 \dots p_n) = 0$ hinzufügen, so bekommen wir das ganze System (γ) der $n + 1$ Integralgleichungen der Differentialgleichung

$$\Omega = dz - p_1 dx_1 \dots - p_n dx_n = 0,$$

das uns das singuläre Integral der Differentialgleichung (1) gibt, insofern dieses System durch die Integration der Differentialgleichung

$$dz_0 - p_1^0 dx_1^0 \dots - p_n^0 dx_n^0 = 0,$$

wo $F(x_1^0 \dots p_n^0) = 0$, $\varphi(x_1^0 \dots p_n^0) = 0$ ist, nicht erhalten werden kann.

Wenn das System (γ) in Bezug auf p_i auflösbar ist, so bekommt man das singuläre Integral $z = f(x_1 \dots x_n)$ im gewöhnlichen Sinne.

Wir werden zeigen, wie das singuläre Integral, wenn es existiert, aus dem vollständigen Integral erhalten werden kann.

Es sei unsere Gleichung (1) von der Form

$$F(x_1 \dots x_n z p_1 \dots p_n) = 0$$

und es sei ihr vollständiges Integral von der Form

$$(\delta) \quad F = 0, \quad F_1 = C_1, \quad F_n = C_n.$$

Wenn wir n von den Veränderlichen $x_i z p_i$ auf die neuen $C_1 = F_1, \dots C_n = F_n$ transformieren, so bekommen wir

$$\Omega' = dz - p_1 dx_1 \dots - p_n dx_n = A_1 dC_1 + A_2 dC_2 + \dots + A_n dC_n$$

oder

$$\Omega' = A_1 \left(dC_1 + \frac{A_2}{A_1} dC_2 + \dots + \frac{A_n}{A_1} dC_n \right).$$

Wir können beweisen, dass $2n - 1$ Funktionen

$$A_1 : A_2 : \dots : A_n \quad \text{und} \quad F_1, F_2, \dots, F_n$$

unabhängig sind.

In der Tat es sei

$$\Theta \left(\frac{A_2}{A_1}, \dots, \frac{A_n}{A_1} F_1 F_2 \dots F_n \right) = 0.$$

Wir können den Differentialausdruck

$$dC_1 + \frac{A_2}{A_1} dC_2 + \dots + \frac{A_n}{A_1} dC_n,$$

wo wir alle Veränderlichen für einen Augenblick als unabhängige betrachten, durch n Gleichungen, deren eine willkürlich ist, zum verschwinden bringen.

Wenn wir dieser letzten die Form

$$\Theta \left(\frac{A_2}{A_1}, \dots, \frac{A_n}{A_1} C_1 C_2, \dots, C_n \right) = 0$$

geben und $\frac{A_2}{A_1}, \dots, \frac{A_n}{A_1} C_1 C_2 \dots C_n$ durch ihre Werte ersetzen, so folgt, dass die Differentialgleichung

$$dC_1 + \frac{A_2}{A_1} dC_2 + \dots + \frac{A_n}{A_1} dC_n = 0$$

und also auch $\Omega' = 0$ nur durch $n - 1$ Integrale sich integrieren lässt, was unmöglich ist. So bekommen wir

$$\Omega' = A_1 (dC_1 + U_2 dC_2 + \dots + U_n dC_n),$$

wo $U_2 = \frac{A_2}{A_1}, \dots, U_n = \frac{A_n}{A_1}$, $C_1 \dots C_n$ unabhängige Variable sind.

Wir sehen also, dass, wenn wir $2n$ von den Veränderlichen x_i, z, p_i , wo $F(x_1 \dots x_n, z, p_1 \dots p_n) = 0$ ist, auf die neuen Variablen $y_1, U_2, \dots, U_n, C_1, \dots, C_n$ mit Hilfe der Formeln

$$\varphi(x_1 \dots p_n) = y_1, \quad U_i = \frac{A_i}{A_1} \quad (i = 2 \dots n),$$

$$C_i = F_i(x_1 \dots p_n) \quad (i = 1 \dots n),$$

wo φ willkürlich gewählt ist, transformieren, der Differentialausdruck

$$\Omega' = dz - p_1 dx_1 \dots - p_n dx_n,$$

wo $F(x_1 \dots x_n, z, p_1 \dots p_n) = 0$ ist, eine der neuen Veränderlichen, nämlich y_1 , nur im gemeinschaftlichen Faktor A_1 enthalten kann. Also ist diese Transformation die Pfaffsche Transformation. Da wir $\frac{\partial F}{\partial z} \neq 0$ voraussetzen, so enthält A_1 die Veränderliche y_1 und also $A_1, U_2, \dots, U_n, C_1, \dots, C_n$ sind unabhängig. Um das singuläre Integral zu erhalten, müssen wir

$$A_1 = 0$$

setzen. Es folgen aus den Formeln der Transformation noch $n - 1$ Gleichungen

$$A_2 = 0 \dots A_n = 0, \text{ da } U_2 \dots U_n \text{ von } A_1 \text{ unabhängig sind.}$$

Wir sehen also, dass das singuläre Integral der gegebenen Differentialgleichung

$$F(x_1 \dots x_n, z, p_1 \dots p_n) = 0$$

die Gleichungen

$$A_1 = 0 \dots A_n = 0$$

erfüllt. Die Gleichungen $A_i = 0, (i = 1, 2 \dots n), F(x_1 \dots p_n) = 0$ stellen das singuläre Integral dar, insofern es mit Hilfe der Integration der Differentialgleichung $dC_1 + U_2 dC_2 + \dots + U_n dC_n = 0$ nicht erhalten werden kann.

Man kann diese Gleichungen in anderer Form darstellen:

Es folgt nämlich aus den Gleichungen (δ) das System der Gleichungen

$$z = f(x_{k+1} \dots x_n), \quad x_i = f_i(x_{k+1} \dots x_n) \quad (i = 1, 2 \dots k), \quad (k \geq 0).$$

Wir können nach dem Satze § 1, Nr. 2 das System (δ) in der Form

$$H = f - f_1 p_1 - \dots - f_k p_k, \quad x_i = -\frac{\partial H}{\partial p_i} \quad (i = 1, 2 \dots k), \quad (\varepsilon)$$

$$p_{k+j} = \frac{\partial H}{\partial x_{k+j}} \quad (j = 1, 2 \dots n - k)$$

darstellen. Dieses System ist das System der Integralgleichungen der Differentialgleichung

$$\Omega' = dz - p_1 dx_1 - \dots - p_n dx_n = dH + x_1 dp_1 + \dots + x_n dp_n - \\ - p_{k+1} dx_{k+1} - \dots - p_n dx_n = 0.$$

Die Gleichungen (ε) enthalten $C_1 C_2 \dots C_n$, die aus denselben sich bestimmen lassen. Führen wir die neuen Veränderlichen $C_1 C_2 \dots C_n$ ein, so folgt, dass die Differentialgleichung

$$\Omega' = dz - p_1 dx_1 \dots p_n dx_n = 0,$$

wo $F(x_1 \dots x_n, z, p_1 \dots p_n) = 0$, die Form annimmt:

$$\Omega' = \frac{\partial H}{\partial C_1} dC_1 + \dots + \frac{\partial H}{\partial C_n} dC_n = 0.$$

Es folgt aus dieser nach dem oben gesagten, dass das singuläre Integral den Gleichungen $\frac{\partial H}{\partial C_1} = 0, \dots, \frac{\partial H}{\partial C_n} = 0$ genügt. Wenn wir $C_1 \dots C_n$ aus diesen letzten und aus den Gleichungen (δ) eliminieren, so bekommen wir $n + 1$ Gleichungen, die das singuläre Integral darstellen können.

Wenn dieses vollständiges Integral ein gewöhnliches ist, so hat es die Form

$$z = f(x_1 \dots x_n, C_1 \dots C_n), \quad p_1 = \frac{\partial f}{\partial x_1} \dots p_n = \frac{\partial f}{\partial x_n}$$

und das singuläre Integral erfüllt die Gleichungen

$$\frac{\partial f}{\partial C_1} = 0 \dots, \frac{\partial f}{\partial C_n} = 0.$$

32. M. LADISLAS GORCZYŃSKI. *Badania nad przebiegiem rocznym insolacji.* (*Etudes sur la marche annuelle de l'insolation*). Mémoire présenté par M. M. P. Rudzki m. c.

Introduction.

Les présentes recherches sur la marche annuelle de l'insolation s'appuient sur les matériaux actinométriques recueillis à Varsovie en 1901; les mesures de l'insolation ont été effectuées avec l'actinomètre système Ångström-Chwolson, placé sur le balcon du sud de l'Observatoire (situé entre le Jardin des Plantes et le parc de Łazienki); au commencement de l'année 1902 cet actinomètre a été transporté vers le centre de la ville et depuis lors les mesu-

res furent effectuées sur le balcon supérieur de la Station Centrale Météorologique de Varsovie (auprès du Musée). Les matériaux de l'année 1901 ont servi presque exclusivement à la déduction des valeurs de réduction et ils forment la base principale de nos recherches; les matériaux beaucoup moins nombreux de l'année 1902 ont été employés surtout à dresser des tableaux mensuels et annuels; en comparant les valeurs obtenues durant l'une et l'autre année, il faut tenir compte du changement du lieu d'observation.

Bien que les matériaux rassemblés à Varsovie aient fourni une base suffisante pour effectuer une grande partie des réductions fondamentales et indispensables pour les raisonnements ultérieurs, bien qu'ils aient pu servir à rendre compte du caractère général de la marche annuelle de l'insolation, cependant, pour compléter les recherches, on a utilisé des mesures effectuées au moyen d'un semblable actinomètre à Pavlovsk, à Pétersbourg et à Catherinenbourg. Ces données ont contribué dans une large mesure à élucider quelques détails de la question; elles embrassent une période de 18 ans et il est clair que l'étude en peut avoir une grande importance, ne fût-ce que pour vérifier les conséquences déduites ailleurs.

A quelques exceptions près (période de 1892/93 à Pavlovsk et celle de 1896—1898 à Catherinenbourg), ces matériaux n'ont pas été suffisamment traités; afin de pouvoir s'en servir pour le présent travail, on avait été obligé de les traiter d'après les mêmes règles qui avaient été appliquées aux résultats bruts des mesures faites à Varsovie, après les avoir préalablement transformés en valeurs absolues. Ce travail préparatoire consistait à déterminer la hauteur du soleil pour les jours et les heures d'observation, à trouver d'après les données des instruments enrégistreur les valeurs horaires de l'humidité absolue, et enfin à former des moyennes. Ce n'est qu'après avoir subi ce travail préparatoire que ces données peuvent servir de base à l'opération de la réduction et aux études ultérieures.

Le but du présent travail est d'expliquer la marche annuelle de l'insolation, de déterminer le rapport qui existe entre la courbe annuelle de l'insolation et les autres facteurs météorologiques et de donner aux résultats des mesures actinométriques une forme systématique qu'ils ne possédaient pas jusqu'à présent et qui permettrait de s'en servir d'une manière plus exacte pour les comparaisons et

rapprochements ultérieurs. A côté de l'explication des causes théoriques et du caractère général de la courbe annuelle de l'insolation, c'est sur ce dernier point que nous avons surtout concentré notre attention.

I.

§ 1. La construction de l'actinomètre de M. Chwolson est basée sur l'application de la méthode connue sous le nom de méthode d'Ångström; le moment essentiel de celle-ci consiste dans l'observation des différences de température de deux corps dont l'un est exposé au soleil tandis que l'autre est plongé dans l'ombre. Cependant Ångström lui-même appliquait aux mesures de l'insolation la méthode des différences égales de température (au commencement et à la fin de chaque observation), tandis que la méthode des périodes égales de temps, élaborée par M. Chwolson, consiste à mesurer les différences variables de température de deux corps, observées à des intervalles égaux. Chaque mesure dure d'après M. Chwolson $2\frac{1}{2}$ minutes, à compter du moment où les écrans de l'actinomètre ont été changés de place, et fournit 5 valeurs de température pour chacun des deux corps, correspondant à cinq moments de temps distants de 30 sec. les uns des autres. 5 différences obtenues de cette façon fournissent deux valeurs numériques de l'insolation, indépendantes l'une de l'autre: l'une est obtenue de la première, troisième et cinquième différence de température, la seconde — de la deuxième, troisième et quatrième.

Pour déterminer la valeur de l'insolation, nous avons la formule ¹⁾

$$q = k \Omega$$

dans laquelle k est la constante de l'actinomètre; quant à Ω , chaque mesure complète nous fournit deux valeurs, à savoir: celle qui résulte de trois Θ_i (de la première, de la troisième et de la cinquième différence de température) à intervalles de $t = 1$ min.:

¹⁾ La démonstration détaillée et la discussion de la formule sont données par M. Chwolson dans ses „Actinometrische Untersuchungen zur Construction eines Actinometers und eines Pyrheliometers“ (1893). En dehors de cet ouvrage on peut citer le traité classique du même physicien, intitulé „Ueber den gegenwärtigen Zustand der Actinometrie“ (1892), qui possède une valeur fondamentale pour la critique des différentes méthodes appliquées dans l'actinométrie.

$$\Omega_1 = \frac{\Theta_1 \Theta_3 + \Theta_2^2}{\Theta_1 + \Theta_3}$$

et celle obtenue de trois ϑ_i (de la deuxième, de la troisième et de la quatrième différence de température) à intervalles de $t = 0.5$ min.

$$\Omega_2 = 2 \frac{\vartheta_1 \vartheta_3 + \vartheta_2^2}{\vartheta_1 + \vartheta_3} \quad (\vartheta_2 = \Theta_2).$$

Ainsi, chaque mesure effectuée à l'aide de l'actinomètre et qui se compose de 10 lectures thermométriques, fournit 5 différences au moyen desquelles nous obtenons Ω_1 et Ω_2 . En prenant ensuite la moyenne de Ω_1 et Ω_2 , nous obtiendrons la valeur Ω , définitive pour la mesure donnée:

$$\Omega = 1/2 (\Omega_1 + \Omega_2).$$

§ 2. Dans l'ouvrage cité ci-dessus, M. Chwolson donne la discussion détaillée des corrections et de la manière de déterminer les valeurs définitives de l'insolation; c'est pourquoi nous ne nous en occuperons plus ici. Nous ferons seulement observer qu'il est indispensable de former également la moyenne de deux valeurs Ω (Ω_I et Ω_{II}), pour lesquelles les déterminations avaient été effectuées dans deux directions opposées, c'est-à-dire une fois pendant que le premier des deux thermomètres actinométriques était abrité par l'écran, et la seconde pendant qu'on avait couvert le second. De cette façon nous obtenons comme valeur de Ω l'expression

$$\Omega = 1/2 (\Omega_I + \Omega_{II})$$

où Ω_I et Ω_{II} sont de leur côté des moyennes obtenues à l'aide de leurs Ω_1 et Ω_2 respectifs. En formant les moyennes d'après cette méthode, on élimine l'influence des sources secondaires de chaleur ainsi que celle de la non-complète identité des corps thermométriques.

Indépendamment de tout ceci, grâce à de longues séries de mesures successives faites à des intervalles égaux, effectuées à Varsovie pendant un grand nombre de jours, on formait, à l'aide de plusieurs valeurs trouvées immédiatement l'une après l'autre, des valeurs nouvelles „rectifiées“ au moyen de la formule

$$(\Omega_i) = \frac{1}{4} \left[\frac{\Omega_{i-2} + \Omega_{i+2}}{2} + \Omega_{i-1} + \Omega_i + \Omega_{i+1} \right]$$

et réduites aussi au temps correspondant (t_i); ce dernier se confond pourtant avec le temps vrai, à cause des intervalles égaux de temps.

D'ordinaire on délimitait, dans le nombre de mesures successives, des séries de six valeurs Ω à l'aide desquelles on obtenait une valeur (Ω) „rectifiée“ et libre de fluctuations accidentelles. Bien que non-indispensable, cette méthode offre de grands avantages pratiques, elle rend surtout de grands services dans les cas où l'insolation subit des fluctuations plus considérables à cause du passage des nuages etc.

Les valeurs de l'insolation utilisées dans les chapitres suivants pour les réductions et pour les tableaux sont presque toutes „rectifiées“ d'après cette méthode; chacune de ces valeurs constitue donc le résultat de 6 mesures successives, c'est-à-dire qu'elle se compose de 60 lectures thermométriques.

§ 3. Pour transformer les valeurs relatives (Ω) en unités absolues (gr. cal., cm², min.) on avait recours à Varsovie aux comparaisons avec le pyréliomètre compensateur, construit par M. Ångström. Pour l'actinomètre (composé de deux thermomètres N. 56 et 57) à l'aide duquel on faisait à Varsovie des observations durant toute l'année 1901, on a trouvé, d'après environ une centaine de comparaisons, la valeur de la constante k dans la formule $q = k\Omega$ égale à 0.85; c'est par ce coefficient de transition qu'on avait multiplié toutes les valeurs Ω obtenues durant cette période, afin de les réduire aux unités absolues. L'actinomètre (Nr. 44 et 29) employé durant l'année 1902 avait le coefficient de transition égal à 0.93.

Pour chaque valeur définitive de l'insolation ainsi trouvée, on déterminait la hauteur correspondante du soleil d'après la „Connaissance des Temps“ et aussi la valeur de l'humidité absolue en mm.; cette dernière était obtenue ou bien directement au moyen du psychromètre aspirateur d'Assmann, ou bien au moyen de valeurs horaires corrigées de l'hygrographe.

Les matériaux actinométriques rassemblés à Varsovie depuis le mois de décembre 1900 jusqu'au mois de décembre 1902 se composent de 4638 valeurs de l'insolation obtenues durant 180 jours; d'après ce qui précède, chaque observation dure 2¹/₂ minutes et se compose de 10 lectures particulières. Les valeurs „définitives“ dont on s'est servi pour les rapprochements ont été calculées, au moyen

de la formule de réduction décrite ci-dessus, de 6 mesures consécutives exécutées dans les deux directions, c'est-à-dire qu'elles constituent le résultat de 60 lectures. De cette façon, ainsi que cela a été exposé au § 2, on a tâché d'obtenir des nombres dégagés, autant qu'il est possible, de toute influence désavantageuse et de toute faute d'observation et exprimant le plus exactement possible les valeurs de l'insolation pour un intervalle donné.

Disposés d'après les mois, les nombres des mesures actinométriques et des jours où les observations ont été faites, se répartissent comme il suit:

	jours	Nombre de mesures		jours	Nombre de mesures
janvier	10	74	juillet	22	721
février	14	193	août	19	324
mars	12	235	sept.	15	541
avril	16	417	octobre	11	319
mai	24	1054	novemb.	10	115
juin	17	567	décemb.	10	78

La majorité des mesures a été faite pendant le mois de mai; quant aux années particulières, on a fait le plus d'observations en 1901 (3845 valeurs durant 109 jours); les résultats en ont servi non seulement à déterminer la marche annuelle de l'insolation mais aussi et surtout à déterminer les données de réduction.

§ 4. A côté des observations faites à Varsovie, on a traité d'après la même méthode les matériaux recueillis à Pavlovsk et à Pétersbourg et publiés dans les „Annales de l'Observatoire Physique“ depuis 1893 (pour Pétersbourg depuis 1895). Ces matériaux ne comprennent que le temps moyen local et les valeurs de l'insolation accompagnées de quelques courtes annotations relatives à l'état du ciel au moment de l'observation; les hauteurs du soleil dont on avait besoin furent déterminées d'une façon supplémentaire et les données horaires de l'humidité absolue ont été puisées dans les lectures horaires correspondantes de l'hygrographe enregistreur publiées dans la 1-re partie des tomes successifs des mêmes Annales¹⁾. Cette publication ne contient pas de données horaires pour

¹⁾ Il serait fort à désirer que les résultats des déterminations de l'insolation (comme p. ex. les mesures de Pavlovsk et de Pétersbourg) fussent publiés avec les hauteurs correspondantes du soleil et les valeurs de l'humidité absolue (ainsi

Pétersbourg; pour suppléer à ce manque de données, on a pris les valeurs de l'humidité à 1ⁿ; l'erreur, causée par ceci, ne doit pas être trop grande, car la plupart des mesures se groupent justement autour de cette heure.

A Pavlovsk, les mesures ont été effectuées tout le temps au moyen du même actinomètre (composé de thermomètres N. 55 et 56); le coefficient de transition y était déterminé tous les ans, mais à l'aide d'un petit nombre de comparaisons. La valeur de ce coefficient oscillait dans les différentes années entre 1.07 et 1.12; en 1894 on appliquait presque chaque mois un autre coefficient (entre de larges limites de variation de 1.04 à 1.10) ce qui nuit jusqu'à un certain point à l'homogénéité des résultats et à l'établissement de comparaisons.

A Pétersbourg, l'actinomètre a été changé trois fois et les valeurs des coefficients k admis pour chaque actinomètre ne paraissent pas exactes, comme cela sera démontré dans la III partie.

Les mesures faites à Catherinenbourg, ainsi que les hauteurs du soleil et les données météorologiques correspondantes ont été publiées dans le „Bulletin de l'Académie de St. Pétersbourg“ (V^e série, t. XI. N. 2, 1899) sous le titre „Aktinometer-Beobachtungen im Observatorium zu Katharinenburg — von P. Müller“; ces mesures, bien qu'avec de considérables interruptions, ont été faites durant les trois années 1896—1898.

Bien que les inexactitudes dans la constante k n'influent pas sur le caractère et sur la marche de la courbe de l'insolation pour des années distinctes, elles rendent cependant difficile la comparaison entre les résultats des périodes annuelles distinctes; cette circonstance a été prise en considération, surtout en ce qui concerne Pétersbourg.

Il est encore à remarquer que les matériaux recueillis à Pétersbourg, à Pavlovsk et à Catherinenbourg renferment des moyennes formées seulement à l'aide de deux mesures consécutives, faites dans les directions opposées. Comme en général on n'y faisait durant un jour donné qu'un petit nombre de mesures, il nous a été impossible de calculer une valeur à l'aide de six mesures consécutives.

qu'avec d'autres éléments météorologiques). Autrement la mise en ordre des matériaux accumulés pendant un certain nombre d'années, absorbe nécessairement beaucoup de temps et de travail préparatoire.

En dehors de Varsovie, Pétersbourg, Pavlovsk et Catherinenbourg sont, à ce que nous savons, les seuls endroits où l'on ait fait durant une plus longue période des observations systématiques à l'aide de l'actinomètre de M. Chwolson. Des séries considérables d'observations ont été encore effectuées à Montpellier et à Kiev, où l'on s'était pourtant servi de l'ancien actinomètre de M. Crova¹⁾. Les résultats de ces mesures ne sont pas entrés dans la sphère des recherches du présent travail.

II.

§ 1. La tâche qui s'impose tout d'abord en présence des matériaux rassemblés à Varsovie, c'est d'étudier les variations de l'insolation sous l'influence de la hauteur variable du soleil au-dessus de l'horizon. Dans ce but on a compulsé les matériaux obtenus les jours où les observations avaient été faites à des hauteurs différentes du soleil, on en a tiré les valeurs de l'insolation déduites directement à des hauteurs de 9°, 12°, 15°, 18°, 24°, 30°, 40°, 45° et 55° et on en a formé le tableau ci-joint des variations dans les valeurs de l'insolation; le tableau indique en même temps le jour où on avait noté ces différences d'insolation correspondant aux variations dans la hauteur du soleil. Les signes a. et p. précédant ΔJ signifient que les variations en question ont été déduites des observations faites avant midi, resp. après midi.

¹⁾ Le système de M. Crova a été soumis à une analyse détaillée dans le traité de M. Chwolson „Ueber den gegenwärtigen Zustand der Actinometrie“ (Repertorium für Meteorologie, herausgegeben von Heinrich Wild. B. XV. 1892). Ce savant y démontre que cette construction possède des défauts exerçant une influence très désavantageuse sur l'exactitude de la méthode. Certains observateurs donnent jusqu'à présent la préférence à ce système, tandis qu'il existe des appareils nouveaux bien meilleurs et bien plus exacts (comme par exemple le pyrhélicmètre de compensation — un excellent instrument absolu — de M. A^ongström et l'actinomètre relatif de M. Chwolson.

Nous citerons comme un fait curieux le cas de M. Pantschenko, observateur à Odessa, qui, dans son ouvrage publié en 1896 par la Société des naturalistes de la Nouvelle-Russie (2^e partie. 253 + 141 + XVII. Odessa), rapporte les résultats de ses mesures faites avec l'actinomètre de M. Crova avec cinq décimales, c'est-à-dire jusqu'à $\frac{1}{100\,000}$ gr. cal. en cm² et min.

Table 1.
Tableau des variations de l'insolation (ΔJ) correspondant à des valeurs différentes de la hauteur (h) du soleil.
(D'après les observations de Varsovie en 1901).

9° — 12° $\Delta h = 3^{\circ}$		12° — 15° $\Delta h = 3^{\circ}$		15° — 18° $\Delta h = 3^{\circ}$		18° — 24° $\Delta h = 6^{\circ}$		24° — 30° $\Delta h = 6^{\circ}$		30° — 40° $\Delta h = 10^{\circ}$		40° — 45° $\Delta h = 5^{\circ}$		45° — 55° $\Delta h = 10^{\circ}$	
Date	ΔJ	Date	ΔJ	Date	ΔJ	Date	ΔJ	Date	ΔJ	Date	ΔJ	Date	ΔJ	Date	ΔJ
11/V	0·09 p.	31/I	0·13 p.	10/II	0·04 p.	14/II	0·08 p.	12/V	0·08 p.	24/IV	0·13 p.	24/IV	0·05 p.	3/V	0·05 a.
2/VI	0·17 p.	11/V	0·08 p.	11/V	0·05 p.	11/V	0·12 p.	11/VIII	0·09 a.	12/V	0·10 p.	3/V	0·04 a.	9/V	0·06 a.
21/VII	0·17 p.	2/VI	0·10 p.	2/VI	0·03 p.	2/VI	0·14 p.	21/IX	0·10 a.	2/VI	0·11 p.	5/V	0·04 p.	10/V	0·05 a.
25/IX	0·13 p.	25/IX	0·12 p.	21/VII	0·10 p.	14/VII	0·15 p.	23/IX	0·09 p.	21/VII	0·07 p.	7/V	0·02 a.	6/VII	0·05 a.
				21/IX	0·11 a.	21/VII	0·10 p.	25/IX	0·07 p.	22/IX	0·10 a.	9/V	0·05 a.	20/VII	0·10 a.
				25/IX	0·08 p.	26/VIII	0·12 p.	16/X	0·09 a.	23/IX	0·11 p.	10/V	0·03 a.	21/VII	0·05 p.
						21/IX	0·14 a.			25/IX	0·07 a.	12/V	0·04 p.		
						23/IX	0·12 p.			27/IX	0·09 a.	18/V	0·07 a.		
						22, X	0·09 a.					2/VI	0·03 p.		
												6/VI	0·04 a.		
												7/VII	0·07 a.		
												11/VII	0·03 a.		
												14/VII	0·04 p.		
												21/VII	0·03 p.		
Somme	0·56	0·43	0·46	1·06	0·52	0·78	0·58	0·36	0·060						
Moyenne	0·140	0·107 ₆	0·077	0·118	0·087	0·097	0·041								

Afin de pouvoir comparer les résultats obtenus à Varsovie avec ceux qui avaient été obtenus ailleurs, on a dressé un tableau analogue pour Pavlovsk, en utilisant dans ce but les matériaux actinométriques de Pavlovsk recueillis en 1892/93 et traités par M. Schukewitsch ainsi que les matériaux bruts rassemblés les années suivantes et publiés dans les „Annales de l'Observatoire Physique“ à Pétersbourg. Tout ceci, ainsi que les matériaux analogues recueillis à Pétersbourg et à Catherinenbourg, fut traité suivant la méthode appliquée aux observations de Varsovie.

M. Schukewitsch avait déjà dressé un tableau analogue pour Pavlovsk et l'avait publié dans „Wild's Repertorium für Meteorologie“ (Vol. 17. 1894. p. 24); le tableau présenté ci-dessous a été dressé d'une façon indépendante et en partie avec d'autres observations. Faute de séries plus complètes de mesures effectuées le même jour et à cause de l'incertitude des observations particulières, il a été impossible d'en dresser d'autres dans ce genre pour Pétersbourg et pour Catherinenbourg.

Voir table 2., page 475.

Ainsi que nous pouvons le voir, les variations de l'insolation par rapport aux variations dans la hauteur du soleil observées à Varsovie se rapprochent de celles qui ont été trouvées à Pavlovsk. Comme valeurs définitives, appliquées ensuite dans toute leur étendue dans le but de la réduction, à Varsovie aussi bien qu'à Pétersbourg, à Pavlovsk ou à Catherinenbourg, on a adopté les variations suivantes de l'insolation (ΔJ) par rapport aux variations dans la hauteur (h) du soleil:

$$\Delta J = 0.140 \quad 0.106 \quad 0.076 \quad 0.117 \quad 0.085 \quad 0.100 \quad 0.042^1) \quad 0.035^2) \quad 0.028^3)$$

ce qui rapporté à $\Delta h = 1^\circ$, fait:

$$\Delta J = 0.047 \quad 0.035 \quad 0.025 \quad 0.019 \quad 0.014 \quad 0.010 \quad 0.008 \quad 0.007 \quad 0.006.$$

Ces dernières valeurs ont été ensuite adoptées pour la réduction directe dans les intervalles de 10° à 11° , de 13° à 14° , de 16° à 17° , de 21° à 22° , de 27° à 28° , de 34° à 35° , de 42° à 43° , de 47° à 48° et de 52° à 53° ; pour les autres intervalles, elles ont été trouvées par la voie de l'interpolation. De cette manière, on a pu former un grand tableau servant à réduire à la hauteur voulue, dans les limites de 6° à 62° , les données de l'insolation no-

1) $40^\circ - 45^\circ$

2) $45^\circ - 50^\circ$

3) $50^\circ - 55^\circ$

Table 2.
Tableau des variations de l'insolation (ΔJ) par rapport aux variations dans la hauteur (h) du soleil.
(D'après les observations de Pavlovsk).

9° — 12° $\Delta h = 3^{\circ}$		12° — 15° $\Delta h = 3^{\circ}$		15° — 18° $\Delta h = 3^{\circ}$		18° — 24° $\Delta h = 6^{\circ}$		24° — 30° $\Delta h = 6^{\circ}$		30° — 40° $\Delta h = 10^{\circ}$		40° — 50° $\Delta h = 10^{\circ}$	
Date	ΔJ	Date	ΔJ	Date	ΔJ	Date	ΔJ	Date	ΔJ	Date	ΔJ	Date	ΔJ
1892 3/XI	0.15 p.	92 31/VIII	0.08 a.	92 30/VIII	0.06 p.	92 9/IX	0.12 p.	92 9/IX	0.08 p.	93 21/IV	0.08 a.	93 21/V	0.07 a.
93 16/VI	0.13 p.	93 22/II	0.10 p.	92 31/VIII	0.09 p.	92 10/IX	0.09 p.	92 10/IX	0.10 p.	93 8/VI	0.10 a.	93 8/VI	0.08 a.
93 20/VI	0.15 p.	93 16/VI	0.10 p.	92 9/IX	0.07 p.	92 24/IX	0.12 a.	92 10/IX	0.06 a.	93 16/VII	0.11 a.	93 12/VI	0.08 p.
93 24/VI	0.13 p.	93 24/VI	0.13 p.	92 10/IX	0.07 p.	92 24/IX	0.14 p.	92 15/IX	0.09 a.	93 1/VIII	0.11 a.	93 24/VI	0.07 p.
93 29/VI	0.14 p.	93 29/VI	0.10 p.	93 8/III	0.07 p.	93 7/III	0.11 p.	92 24/IX	0.06 a.	93 11/VIII	0.12 a.	93 17/VII	0.09 a.
95 1/II	0.14 p.	93 17/VII	0.12 p.	93 16/VI	0.08 p.	93 8/III	0.11 p.	92 24/IX	0.07 p.	95 1/V	0.11 p.	93 21/VII	0.09 p.
		94 21/X	0.11 p.	93 24/VI	0.09 p.	93 9/III	0.11 p.	93 23/III	0.09 p.			93 1/VIII	0.09 a.
				94 21/X	0.07 p.	93 24/VI	0.12 p.	93 21/IV	0.11 a.				
						93 20/IX	0.12 p.	93 15/VII	0.09 a.				
						94 22/IX	0.13 p.	93 17/VII	0.08 p.				
						1900 24/III	0.09 p.	93 20/IX	0.09 p.				
Total	0.84	0.74	0.60	0.60	0.60	1.26	0.92	0.63	0.57				
Moyenne	0.140	0.106	0.075	0.075	0.075	0.115	0.084	0.105	0.081				

tées à une certaine hauteur du soleil. Cette table (qui faute de place n'a pu être reproduite ici) présente une importance de premier ordre pour les buts exposés ci-dessus et sert régulièrement à opérer une des réductions les plus essentielles.

§ 2. A côté de la réduction à la hauteur il y a la réduction de l'insolation à la distance moyenne entre la terre et le soleil; on opère cette réduction très importante afin d'éliminer l'influence des variations que cette distance subit au cours de l'année. Au lieu de la distance, il est plus commode d'employer à cette fin le diamètre apparent du soleil indiqué dans les *Annuaire*s astronomiques (ou plutôt la moitié de ce diamètre ϱ); en désignant par α la valeur moyenne du rayon apparent du soleil, nous obtenons comme facteur de la réduction de l'insolation à la distance moyenne

$$\left(\frac{\alpha}{\varrho}\right)^2.$$

Dans le périhélie ce facteur est égal à 0.967 et dans l'aphélie à 1.034. Conformément à ceci il faut dans le premier cas diminuer la valeur de l'insolation de 3.3% et dans le second l'augmenter de 3.4%. On avait calculé ce facteur pour Varsovie dans les intervalles de cinq jours; il a été facile d'opérer ensuite la réduction pour chaque jour en particulier. Conformément à ce qui précède, la plus grande réduction tombe vers la fin du mois de décembre (avec le signe —) et vers le commencement du mois de juillet (avec le signe +), et les valeurs de l'insolation à la fin du mois de mars et au commencement du mois d'octobre restent invariables.

§ 3. Les deux réductions précédentes n'épuisent nullement toutes les causes de variations subies par l'insolation. Si, en nous servant de matériaux recueillis par l'observation, nous comparons les données de l'insolation notées durant différents mois à de différentes hauteurs du soleil, nous nous apercevrons tout de suite que les valeurs obtenues de cette manière diffèrent considérablement entre elles. Il est donc nécessaire d'étudier l'origine de ces différences, d'examiner d'où elles viennent, si la hauteur du soleil est la même et si les valeurs de l'insolation ont été réduites à la distance moyenne.

La raison en est la suivante: à côté de la hauteur du soleil et de la distance variable de la terre, l'insolation subit l'influence: 1) de la quantité de vapeur d'eau contenue dans l'atmosphère,

quantité qui varie entre des limites assez larges, c'est-à-dire de l'humidité absolue que l'on peut chaque fois déterminer pour le lieu d'observation et 2) celle de toute une série de facteurs dont la plupart sont accidentels et variables comme p. ex. la plus ou moins grande limpidité de l'atmosphère, la quantité de poussière etc.

Afin d'éliminer aussi complètement que possible l'action des facteurs cités sub 2) et afin de déterminer la dépendance de l'insolation d'un facteur aussi essentiel que la vapeur d'eau, on a procédé de la manière suivante. On a extrait des observations effectuées en 1901 la série des valeurs de l'insolation réduites à la distance moyenne de la terre au soleil notées à des hauteurs différentes du soleil au-dessus de l'horizon dans les limites comprises entre 7° et 61° , à des intervalles d'un degré.

Le tableau suivant, contenant les données relatives seulement au segment entre 48° et 52° , présente l'exemple d'une telle série.

Voir table 3., page 478.

Comme point de départ des raisonnements ultérieurs, on a adopté pour principe que tous les facteurs cités sub 2) tendent à diminuer les valeurs de l'insolation et que, par conséquent, après avoir opéré la réduction à la hauteur et à la distance, parmi toutes les valeurs obtenues, caeteris paribus, il faut choisir les plus grandes; en second lieu, on admet, comme il est évident, que la valeur de l'insolation varie en raison inverse de la quantité de vapeur d'eau.

Conformément à ceci, en présence de deux valeurs de l'insolation réduites à la distance moyenne et à la même hauteur du soleil et obtenues à la même humidité absolue, on tiendra compte seulement de la plus grande des deux, considérant que l'autre avait été diminué par une plus forte influence de la poussière, des nuages et d'autres facteurs du même ordre. De cette manière, en rejetant du tableau précédent les valeurs non-concordantes et en refaisant la même opération pour chaque degré, nous obtiendrons le tableau suivant:

Voir table 4., page 479.

De là, en réduisant chaque valeur à la hauteur de 50° au moyen de la „table des réductions à la hauteur“ (cf. § 1) et en leur appliquant le principe énoncé ci-dessus, c'est-à-dire en rejetant toutes les valeurs moindres obtenues caeteris paribus à la même humidité

Table 3.
Extrait du tableau des valeurs de l'insolation réduites à la distance moyenne.
(D'après les mesures effectuées à Varsovie en 1901).

48°		49°		50°		51°		52°			
Date	Valeur de l'insolation	Humidité absolue	Date	Valeur de l'insolation	Humidité absolue	Date	Valeur de l'insolation	Humidité absolue	Date	Valeur de l'insolation	Humidité absolue
22/IV	1.30	4.6	22/IV	1.30	4.6	22/IV	1.31	4.6	28/IV	1.40	7.3
4/V	1.36	5.6	3/V	1.41	5.4	24/IV	1.30	5.7	5/V	1.47	3.8
14/V	1.28	8.5	4/V	1.37	5.6	28/IV	1.34	7.6	2/VI	1.32	13.1
7/VII	1.24	10.6	14/V	1.28	8.5	3/V	1.41	5.4	3/VI	1.37	16.4
20/VII	1.28	14.8	2/VI	1.31	13.3	5/V	1.42	3.8	25/VI	1.25	17.6
21/VII	1.31	11.5	13/VII	1.2?	13.2	9/V	1.34	10.2	4/VII	1.45	8.2
			14/VII	1.39	12.6	10/V	1.43	9.6	20/VII	1.32	14.6
			20/VII	1.29	14.9	3/VI	1.35	16.4	5/VIII	1.25	10.5
			21/VII	1.31	11.4	25/VI	1.25	17.2	10/VIII	1.39	10.2
						11/VII	1.35	11.0			
						13/VII	1.28	13.2			
						20/VII	1.31	14.9			
						22/VII	1.35	12.9			

Table 4.

48°			49°			50°			51°			52°		
Date	Humidité absolue	Humidité relative	Date	Humidité absolue	Humidité relative	Date	Humidité absolue	Humidité relative	Date	Humidité absolue	Humidité relative	Date	Humidité absolue	Humidité relative
4/V	5.6	1.36	3/V	5.4	1.41	10/V	9.6	1.43	29/IV	8.8	1.40	5/V	8.8	1.47
21/VII	11.5	1.31	14/VII	12.6	1.39	3/VI	16.4	1.35	3/VI	16.4	1.37	4/VII	16.4	1.45
20/VII	14.8	1.28	2/VI	13.3	1.31							10/VIII	10.2	1.39
			20/VII	14.9	1.29							3/VI	16.4	1.37

absolue ou à une humidité moindre, nous obtiendrons les cinq valeurs suivantes correspondant à 50°:

Table 5.

50°		
Date	Valeur de l'insolation	Humidité absolue
5/V	1.458	3.8
4/VII	1.438	8.2
10/V	1.43	9.6
14/VII	1.397	12.6
3/VI	1.364	16.4

En répétant le même calcul pour les autres hauteurs, en réduisant les valeurs obtenues pour les hauteurs de 7°, 8°, 9°, 10°, 11° et 12° à la hauteur de 10°, pour celles de 13°—17° à celle de 15° etc., c'est-à-dire en formant d'une façon analogue au moyen de séries de cinq degrés, des valeurs définitives pour les degrés 10°, 15°, 20°, 25°, 30°, 35°, 40°, 45°, 50°, 55° et 60° (cette dernière au moyen de la réduction des degrés 58°, 59°, 60° et 61°), après avoir rejeté les valeurs non-concordantes et gardé seulement celles qui sont relativement les plus grandes, nous obtiendrons enfin les résultats suivants:

Voir table 6., page 481.

Enfin, en réduisant toutes les valeurs de l'insolation à la hauteur commune de 30° nous obtiendrons — après avoir rejeté les valeurs non-concordantes — les données définitives suivantes:

Voir table 7., page 482.

De là, en divisant les variations particulières des valeurs de l'insolation par les variations correspondantes de l'humidité absolue, nous obtenons comme „valeur moyenne du coefficient de la réduction à l'humidité“

$$\text{pour Varsovie } \Delta = 0.018$$

ce qui signifie que, quand l'humidité absolue augmente d'un millimètre, l'insolation diminue en moyenne de 0.018 (gr. cal., cm², min.).

Table 6.

10°			15°			20°			25°			30°		
Date	Valeur de l'insolation	Humidité absolue	Date	Valeur de l'insolation	Humidité absolue	Date	Valeur de l'insolation	Humidité absolue	Date	Valeur de l'insolation	Humidité absolue	Date	Valeur de l'insolation	Humidité absolue
10/IV	0-960	2-1	6/XII	1-13	3-1	10/II	1-190	5-0	12/II	1-383	1-8	16/X	1-312	8-1
30/XII	0-920	4-1	21/XII	1-031	6-4	14/VII	1-111	12-9	22/X	1-289	4-9	11/VIII	1-28	12-2
			21/VII	0-966	11-6				11/VIII	1-204	12-2			
35°			40°			45°			55°			60°		
Date	Valeur de l'insolation	Humidité absolue	Date	Valeur de l'insolation	Humidité absolue	Date	Valeur de l'insolation	Humidité absolue	Date	Valeur de l'insolation	Humidité absolue	Date	Valeur de l'insolation	Humidité absolue
18/V	1-381	5-2	18/V	1-428	5-0	8/IV	1-478	4-6	5/V	1-520	3-8	14/V	1-50	7-1
25/IX	1-340	8-2	12/V	1-36	6-9	14/VII	1-383	12-4	10/VIII	1-430	10-2	22/VII	1-420	11-9
14/VII	1-291	12-9	11/VIII	1-332	12-3	2/VI	1-33	14-7	3/VI	1-410	16-4	25/VI	1-295	18-5
						25/VI	1-25	16-7				24/VI	1-285	19-0

Table 7.

30°		
Date	Valeur de l'insolation	Humidité absolue
12/II	1.453	1.8
30/XII	1.393	4.1
16/X	1.312	8.1
11/VIII	1.28	12.2
3/VI	1.205	16.4

Afin de pouvoir établir une comparaison, des calculs absolument identiques tendant à déterminer le même coefficient ont été faits pour Pavlovsk (pour la période de 1892 à 1900) et pour Pétersbourg (1895—1900).

Pour Pavlovsk, au moyen des séries de 5° et après avoir rejeté des valeurs non-concordantes, on a obtenu les chiffres suivants:

Voir table 8., page 483.

En réduisant tout ceci à la hauteur du soleil de 30° nous obtenons, après le rejet dont il a été question plus haut, les données définitives suivantes:

Table 9.

30°	
Insol.	Hum. abs.
1.473	1.6
1.450	2.3
1.429	3.2
1.409	4.9
1.357	8.2
1.178	17.7

De là il résulte que la valeur moyenne du coefficient de la réduction à l'humidité est égale pour Pavlovsk à

$$\Delta = 0.021.$$

Table 8.

10°		15°		20°		25°		30°		35°		40°		45°		50°	
Insol.	Hum. abs.																
1.00	1.6	1.181	0.9	1.290	2.3	1.393	0.9	1.40	1.2	1.43	6.9	1.458	2.5	1.428	2.6	1.417	7.7
0.90	5.3	1.166	1.5	1.210	3.8	1.30	6.6	1.38	2.0	1.32	10.3	1.442	4.7	1.418	3.2	1.378	9.3
0.853	6.6	1.152	3.2	1.181	7.8	1.26	8.4	1.36	7.0	1.30	11.2	1.348	10.3	1.403	10.4	1.374	9.4
0.819	11.1	1.132	4.9	1.080	9.5	1.233	9.4	1.338	8.8	1.291	11.8	1.278	17.7	1.296	17.9	1.364	10.6
0.77	12.0	1.09	6.6	0.98	18.1	1.069	12.1	1.162	14.3	1.211	16.9					1.334	17.6
		1.08	8.2			1.009	15.9										

Pour Pétersbourg (1895—1900), on a obtenu d'une façon analogue:

Voir table 10., page 485.

En réduisant à la hauteur de 30°, on obtient les chiffres suivants:

Table 11.

30°	
Insol.	Hum. abs.
1.419	2.5
1.393	3.3
1.293	6.5
1.242	10.5
1.218	11.7

ce qui fournit, comme valeur moyenne du coefficient de la réduction à l'humidité,

$$\Delta = 0.024.$$

On n'a pas fait de calculs analogues pour Catherinenbourg à cause du nombre relativement trop petit d'observations et aussi à cause des différences considérables dans les mesures particulières.

Comme valeur moyenne définitive du coefficient de la réduction à l'humidité, on a adopté

$$\Delta = 0.02.$$

III.

§ 1. Avant de reproduire les moyennes mensuelles de l'insolation qui peuvent se déduire des mesures directes faites à Varsovie, voyons si les valeurs réduites à la hauteur, à la distance et à l'humidité, obtenues dans le chapitre II, ne nous permettront pas de nous rendre compte théoriquement du caractère général de la marche annuelle de l'insolation. Trois facteurs, avons-nous dit, exercent une influence capitale sur la valeur de l'insolation; ce sont: la hauteur du soleil au-dessus de l'horizon, la quantité de la vapeur d'eau dans l'atmosphère et la distance de la terre au soleil. Outre ces trois facteurs, l'insolation subit encore l'action des gaz qui se trouvent dans l'atmosphère et surtout celle de l'acide carbo-

Table 10.

10°		15°		20°		25°		30°		35°		40°		45°		50°	
Insol.	Hum. abs.																
0.93	1.9	1.067	4.1	1.24	1.6	1.349	2.5	1.313	1.4	1.31	4.4	1.468	1.8	1.468	2.5	1.497	3.0
0.92	3.3			1.111	6.4	1.159	8.1	1.293	6.5	1.161	7.3	1.422	3.2	1.446	4.1	1.368	10.9
0.903	4.3					1.113	9.9			1.111	11.2	1.342	10.5	1.36	11.7		
												1.182	13.4				

nique; cependant les recherches récentes tendent à prouver que l'absorption causée par la présence de ce gaz dans l'atmosphère, s'accomplit à une hauteur considérable; les variations dans la quantité de ce gaz dans les couches inférieures de l'atmosphère ont, d'après K. Ångström¹⁾, une influence négligeable sur la marche annuelle de l'insolation, obtenue dans nos conditions. Les autres facteurs, comme la poussière, les nuages etc. n'ont qu'un caractère accidentel et tendent toujours à diminuer l'insolation. Pour former théoriquement un schème de la marche annuelle de l'insolation, prenons Varsovie comme point de départ. Soit la valeur initiale de l'insolation $J = 1.23$ à la hauteur du soleil = 30° , à l'humidité absolue = 5 mm. et à la distance moyenne de la terre au soleil. De là nous pouvons former le tableau suivant:

Table 12.

Varsovie	Hauteur du soleil	Humidité moyenne mensuelle absolue	a	b	J
15. I	17°	3.4	1.006	1.038	1.07
" II	25°	3.5	1.160	1.190	1.22
" III	35°	4.3	1.284	1.298	1.31
" IV	47°	5.0	1.386	1.386	1.38
" V	56°	7.4	1.440	1.392	1.36
" VI	61°	8.5	1.465	1.395	1.35
" VII	59°	10.7	1.455	1.341	1.30
" VIII	52°	11.4	1.419	1.291	1.26
" IX	42°	8.5	1.348	1.278	1.27
" X	30°	7.4	1.230	1.182	1.19
" XI	20°	4.5	1.070	1.080	1.10
" XII	15°	3.2	0.953*	0.989*	1.02*

La première colonne indique les dates (les 15 de tous les mois) auxquelles se rapportent toutes les données suivantes de l'insolation; la seconde renferme, exprimées en degrés entiers, les hau-

¹⁾ K. Ångström. Ueber die Bedeutung des Wasserdampfes und der Kohlensäure bei der Absorption der Erdatmosphäre. Annalen der Physik 1900. p. 720—732.

teurs correspondantes du soleil à midi; dans la troisième nous retrouvons les moyennes mensuelles de l'humidité absolue en mm., déduites des observations faites à Varsovie à la Station Centrale Météorologique (auprès du Musée) par les jours clairs et effectuées au moyen du psychromètre aspirateur d'Assmann. Les trois colonnes suivantes renferment les données de l'insolation, à savoir: dans la quatrième (a) se trouvent indiquées (au moyen de la table mentionnée au § 1. — II) les valeurs qu'on aurait obtenues pour le jour donné, si la hauteur du soleil au dessus de l'horizon était l'unique facteur exerçant une influence sur l'insolation; nous voyons que dans ce cas le maximum tomberait au mois de juin et le minimum au mois de décembre et que la marche de l'insolation entre le maximum et le minimum serait tout-à-fait régulière. Pour former la cinquième colonne (b) on a pris en considération les valeurs de l'humidité absolue, et les données de cette colonne sont réduites (§ 3—II) chacune à la moyenne mensuelle correspondante; ainsi qu'il est facile de l'observer, cette réduction a pour effet le déplacement du maximum de l'insolation vers le printemps. Dans la dernière colonne (J), nous trouvons les valeurs de l'insolation (limitées au second signe décimal) réduites de la distance moyenne de la terre au soleil à la distance vraie au milieu de chaque mois. D'après ces valeurs définitives, le maximum de l'insolation dans la marche annuelle devrait tomber entre le mois d'avril et celui de mai et le minimum en décembre, tandis qu'un maximum secondaire se dessinerait en septembre.

Pareille esquisse du caractère de la marche annuelle de l'insolation pourrait être fournie non-seulement pour Varsovie, mais aussi pour tous les autres endroits pour lesquels on connaît la marche de l'humidité absolue. Mais auparavant, il faut constater jusqu'à quel point les données expérimentales donnent raison à ce schème théorique.

§ 2. Pour obtenir les moyennes mensuelles de l'insolation à l'aide de mesures effectuées durant un mois, on a choisi la méthode suivante. Des matériaux obtenus par l'observation, on tira pour les jours distincts de chaque mois les valeurs de l'insolation (obtenues à l'aide de mesures directes à la plus grande hauteur diurne du soleil ou en général pendant les heures de midi) qu'on réduisit à l'hauteur correspondante du soleil au milieu du mois donné et qu'on rapporta à l'humidité absolue du moment d'observation. De

cette manière, on dressa pour Varsovie le tableau suivant pour la période de décembre 1900 à décembre 1901.

Voir table 13., page 489.

Les valeurs de l'insolation n'avaient pas été réduites à la distance moyenne de la terre au soleil. Les degrés indiqués auprès de chaque mois désignent la hauteur du soleil au milieu du mois donné, à laquelle on avait réduit toutes les valeurs distinctes de l'insolation.

En formant d'après ces données les moyennes de l'humidité absolue et des valeurs de l'insolation pour les mois distincts (moyennes mensuelles de l'insolation), nous obtenons le tableau suivant de la marche annuelle en 1901:

Table 14.

Résumé annuel. Varsovie. 1901.

Mois 1901	Hauteur du soleil	Valeurs moyennés mens. de l'hum. abs.	Moyennes men- suelles de l'in- solation	Moy. mens. de l'insol. réduites à la distance moy.	Moy. mens. de l'insol. réduites à la dist. moy. et à la hauteur 30°	Nombre de jours d'observations	Max. abs. de l'insolation (date)
I	17°	3·7	1·04*	1·01*	1·23	2	1·06* (27)
II	25°	2·3*	1·29	1·27	1·34	6	1·41 (12)
III	36°	5·3	1·25	1·24	1·18	4	1·28 (31)
IV	48°	5·7	1·40	1·41	1·25	7	1·50 (8)
V	57°	7·8	1·38	1·40	1·19	15	1·51 (18)
VI	61°	13·2	1·36	1·40	1·17*	7	1·46 (14)
VII	59°	11·3	1·36	1·40	1·18	12	1·45 (4)
VIII	52°	12·4	1·28	1·31	1·12	8	1·38 (11)
IX	41°	9·5	1·32	1·33	1·22	9	1·37 (26)
X	29°	8·6	1·23	1·22	1·23	6	1·36 (22)
XI	19°	3·7	1·13	1·11	1·29	2	1·18 (10)
XII	15°	5·6	1·09	1·06	1·34	3	1·13 (6)
Anné		8·5			1·29	81	1·51 (18/V)

Afin d'obtenir la moyenne annuelle pour Varsovie en 1901, on a admis comme point de départ les moyennes mensuelles réduites à la distance moyenne et à la hauteur du soleil de 30° (cf. la 6-me

Table 13.
Varsovie.

Date	Hauteur du soleil	Hum. abs.	Insol.	Date	Hauteur du soleil	Hum. abs.	Insol.	Date	Hauteur du soleil	Hum. abs.	Insol.
1900.											
20. XII	15°	5.0	1.06	24. IV	48°	4.9	1.40	19. VI	61°	8.9	1.33
31. XII	"	1.2	0.98	28. "	"	7.0	1.35	24. "	"	19.0	1.25
				29. "	"	8.5	1.36	25. "	"	18.2	1.28
1901.								30. "	"	8.6	1.40
27. I	17°	3.8	1.06	1. V	57°	7.1	1.35	4. IX	41°	6.8	1.30
31. I	"	3.5	1.02	3. "	"	5.5	1.46	11. "	"	7.2	1.34
				4. "	"	5.7	1.38	21. "	"	11.3	1.30
1. II	25°	3.6	1.25	5. "	"	3.7	1.50	22. "	"	12.0	1.25
10. "	"	2.9	1.30	7. "	"	7.1	1.36	23. "	"	10.7	1.31
12. "	"	1.8	1.41	9. "	"	10.5	1.39	24. "	"	10.7	1.32
13. "	"	2.0	1.35	10. "	"	10.0	1.44	25. "	"	7.8	1.37
14. "	"	1.6	1.18	11. "	"	7.0	1.37	26. "	"	8.4	1.37
17. "	"	1.6	1.26	12. "	"	6.9	1.44	27. "	"	10.7	1.30
				13. "	"	8.2	1.28				
2. III	36°	5.3	1.27	14. "	"	8.5	1.31	1. X	29°	12.7	1.13
15. "	"	8.1	1.18	18. "	"	4.5	1.51	4. "	"	11.0	1.14
25. "	"	4.1	1.25	24. "	"	8.0	1.37	16. "	"	8.1	1.30
31. "	"	3.7	1.28	25. "	"	11.7	1.27	21. "	"	8.3	1.25
				27. "	"	12.0	1.30	22. "	"	5.0	1.36
1. IV	48°	5.1	1.39	1. VIII	52°	13.6	1.21	29. "	"	6.3	1.19
3. "	"	4.9	1.44	2. "	"	14.3	1.16	10. XI	19°	4.1	1.18
8. "	"	4.7	1.50	4. "	"	16.2	1.40	23. XI	"	5.3	1.07
22. "	"	4.5	1.37	5. "	"	7.1	1.46	6. XII	15°	3.0	1.13
				14. "	"			21. XII	"	6.4	1.03
								30. XII	"	7.4	1.12

colonne); le nombre de journées d'observation est considéré comme le poids de la valeur correspondante. De cette façon on a obtenu pour Varsovie

$$I_{(1901)} = 1.29 \text{ (h} = 30^{\circ}; \text{ distance moyenne et hum. moyenne absolue} = 8.5 \text{ mm.)}$$

Remarquons que l'humidité moyenne absolue annuelle avait été obtenue à l'aide des valeurs mensuelles distinctes et aussi en prenant en considération les poids.

En observant la marche annuelle de l'insolation à Varsovie dans l'année individuelle 1901 (cf. la 4-me colonne) nous voyons que c'est le mois d'avril qui fournit la moyenne la plus grande tandis que la plus petite tombe au mois de janvier; au mois de mars en comparaison avec février, la valeur moyenne est plus petite ce qui, dans ce cas, est un phénomène accidentel, en rapport avec le nombre moindre de jours clairs au mois de mars 1901 comparativement aux jours très froids mais clairs du mois de février. La plus haute valeur a été observée le 18 mai 1901; elle était de 1.51; le mois de septembre présente dans sa moyenne mensuelle un maximum secondaire.

Des valeurs diurnes de l'insolation réduites, comme précédemment, à la hauteur du soleil du milieu de mois à Varsovie, nous obtenons d'une façon analogue pour la période de janvier 1902 — décembre 1902, les valeurs suivantes:

Voir table 15., page 491.

De là résulte le tableau annuel suivant, dressé pour la période indiquée ci dessus:

Voir table 16., page 492.

d'où il résulte que la moyenne annuelle à Varsovie en 1902 est égale à

$$I_{(1902)} = 1.16 \text{ (h} = 30^{\circ}, \text{ dist. moy. et hum. moy. abs. } 5.6 \text{ mm.)}$$

Remarquons que le nombre de jours d'observation durant toute une année constitue le poids de la moyenne annuelle comparative-ment aux moyennes des autres années.

Pour l'année 1902, aussi bien que pour la précédente, le mois d'avril fournit la plus grande valeur mensuelle, le maximum secon-

Table 15.
Varsovie 1902.

Date	Hauteur du soleil	Hum. abs.	Insol.	Date	Hauteur du soleil	Hum. abs.	Insol.	Date	Hauteur du soleil	Hum. abs.	Insol.
22. I	17°	3.9	0.94	21. IV	48°	3.4	1.47	4. VII	59°	5.8	1.25
25. "	"	5.0	0.99	25. IV	"	4.1	1.25	7. "	"	8.5	1.14
28. "	"	3.3	0.93					15. "	"	6.7	1.31
6. II	25°	2.7	1.16	13. V	57°	7.0	1.30	16. "	"	5.6	1.26
11. "	"	4.4	1.12	16. "	"	4.9	1.17	25. "	"	7.8	1.18
21. "	"	2.4	1.19	20. "	"	5.5	1.30	26. "	"	10.7	1.18
22. "	"	2.6	1.30	24. "	"	4.3	1.32	27. "	"	12.6	1.22
24. "	"	4.4	1.05	29. "	"	7.1	1.19	29. "	"	6.2	1.37
				31. "	"	8.4	1.26				
13. III	36°	1.7	1.50	1. VIII	52°	7.2	1.17	5. XI	19°	3.4	1.00
14. "	"	1.4	1.42	6. "	"	8.4	1.25	7. "	"	3.4	0.99
20. "	"	8.5	1.14	8. "	"	7.9	1.34	9. "	"	6.1	0.83
22. "	"	5.7	1.24	21. "	"	7.1	1.23	14. "	"	3.9	0.89
				26. "	"	5.3	1.21	17. "	"	1.5	1.00
10. IV	48°	3.0	1.36	28. "	"	7.0	1.14	18. "	"	1.7	0.98
14. "	"	6.1	1.36	29. "	"	7.5	1.21	19. "	"	.7	1.03
20. "	"	4.8	1.35	30. "	"	6.7	1.22	22. "	"	2.2	0.97
				4. IX	41°	12.8	1.11	5. XII	15°	1.1	0.82
				5. "	"	12.3	1.11	8. "	"	2.6	0.83
								12. "	"	1.8	0.78
								13. "	"	1.9	0.74
								14. "	"	2.0	0.80

Table 16.

Résumé annuel. Varsovie 1902.

Mois	Hauteur du soleil	Valeurs moy. mens. de l'hum. abs.	Moyennes mensuelles de l'insolation	Moy. mens. de l'insol. red. à la dist. moy.	Moy. mens. de l'insol. red. à la dist. moy. et à la hauteur 30°	Nombre de jours d'observation	Max. abs. de l'insolation (date)
I	17°	4.1	0.95	0.92	1.14	3	0.99 (25)
II	25°	3.3	1.16	1.14	1.21	5	1.30 (22)
III	36°	4.3	1.33	1.32	1.26	4	1.50 (13)
IV	48°	4.3	1.36	1.37	1.21	5	1.47 (21)
V	57°	6.2	1.26	1.29	1.08	6	1.32 (24)
VI	61°	7.1	1.22	1.26	1.03	7	1.34 (4)
VII	59°	8.0	1.24	1.28	1.06	8	1.37 (29)
VIII	52°	9.0	1.19	1.21	1.02*	8	1.28 (23)
IX	41°	7.3	1.24	1.25	1.14	6	1.39 (20)
X	29°	4.2	1.09	1.09	1.10	4	1.19 (1)
XI	19°	3.0	0.96	0.94	1.12	8	1.03 (19)
XII	15°	1.9*	0.79*	0.76*	1.04	5	0.83* (8)
Anné		5.6			1.16	69	1.50 (13/III)

naire apparaît en septembre; au mois de mars, la marche est régulière, décembre fournit le minimum. La plus grande valeur a été observée le 13 mars; elle était 1.50.

En rapprochant les données pour Varsovie obtenues en 1901 avec celles de 1902, nous apercevons tout de suite que les données de l'insolation se rapportant à l'année 1902¹⁾ sont en général plus basses.

En rapprochant les déterminations citées ci-dessus du schème théorique que nous avons formé pour Varsovie, nous voyons qu'en ce qui concerne le caractère de la marche annuelle de l'insolation, l'accord entre la théorie et les résultats des mesures directes est assez satisfaisant. Il va sans dire qu'en rapprochant les tableaux correspondants, il faut prendre en considération le fait que les valeurs théoriques ont été formées pour les 15 de chaque mois, tandis que dans le tableau de la marche vraie figurent les moyennes mensuelles.

§ 3. Après avoir déduit les moyennes mensuelles de Varsovie,

¹⁾ Surtout depuis le mois de mai 1902.

nous tâcherons à présent de déduire d'une façon analogue celles de Pavlovsk (1893 — 1900), de Pétersbourg (1895 — 1900) et de Cathérinenbourg (1896 — 1898). Faute de place, nous ne citons ici que les moyennes mensuelles de l'insolation non réduites et le tableau annuel pour la période de cinq ans (1896 — 1900) à Pavlovsk et à Pétersbourg.

Voir table 17., page 494.

NB. Les places vides dans les mois correspondants signifient qu'il n'y avait pas eu de jours d'observation dans le temps désigné.

En dressant le tableau plein pour Pavlovsk pour la période de cinq ans, nous obtenons ce qui suit:

Table 18.
Résumé de cinq ans. Pavlosk (1896—1900).

Mois	Hauteur du soleil	Valeurs moy. mens. de l'hum. abs.	Valeurs mens. de l'insolation	Moy. mens. de l'insol. réd. à la dist moy.	Moy. mens. de l'insol. réd. à la dist. moy. et à la haut. 30°	Nombre de jours d'observ.	Max. abs. de l'insol.
I	9°	1.9	0.94	0.91	1.43	10	1.09
II	18°	1.6	1.13	1.11	1.31	22	1.28
III	28°	1.9	1.29	1.28	1.31	46	1.44
IV	40°	3.0	1.36	1.37	1.27	40	1.47
V	49°	5.1	1.30	1.33	1.16	34	1.46
VI	54°	7.7	1.28	1.32	1.12	37	1.46
VII	52°	8.7	1.25	1.29	1.10*	27	1.42
VIII	44°	11.1	1.22	1.24	1.10*	24	1.32
IX	33°	6.2	1.28	1.29	1.26	15	1.36
X	22°	5.6	1.14	1.13	1.25	17	1.35
XI	12°	2.6	1.02	0.99	1.37	13	1.12
XII	7°	1.2*	0.85*	0.82*	1.45	5	0.97*

Il est intéressant de comparer la marche des données de la 6-me colonne (les moyennes mensuelles de l'insolation réduites à la hauteur commune du soleil de 30° et à la distance moyenne) avec celle des moyennes de l'humidité abs.; la marche est complètement opposée: le maximum de l'insolation correspond au minimum de

Table 17.
Pavlovsk (1893—1900).

Mois Hauteur du soleil	I 9°	II 18°	III 28°	IV 40°	V 49°	VI 54°	VII 52°	VIII 44°	IX 33°	X 22°	XI 12°	XII 7°
Moy. mens. pour 1893	0.88*	1.07	1.34	1.38	1.40	1.35	1.32	1.28	1.28	1.07	0.98	—
" 1894	0.74*	1.05	1.23	1.25	1.31	1.25	1.24	1.23	1.22	1.27	1.09	0.82
" 1895	—	1.18	1.26	1.31	1.28	1.30	1.16	1.20	1.29	1.00	0.89	0.83*
" 1896	0.87*	1.14	1.31	1.33	1.36	1.26	1.23	—	1.23	1.10	0.92	0.95
" 1897	—	1.11	1.19	1.36	1.36	1.29	1.30	1.14	1.35	1.03	0.97	0.89*
" 1898	1.00	1.11	1.8	1.40	1.34	1.28	1.20	1.27	—	1.20	1.04	0.77*
" 1899	0.97*	1.11	1.35	1.34	1.33	1.37	1.24	1.28	1.26	1.19	1.10	—
" 1900	1.00	1.16	1.27	1.34	1.32	1.24	1.26	1.19	1.28	1.12	0.95	0.73*

l'humidité et vice versa. Il n'est pas moins intéressant de comparer les données de la marche annuelle à Pavlovsk, déduites théoriquement, avec la marche des moyennes mensuelles exposée ci-dessus. Dans le tableau suivant, nous présentons cette marche théorique, en prenant les humidités absolues d'après le tableau précédent (c.-à.-d. celles qui avaient été notées les jours d'observation durant la période 1896 — 1900) et en admettant la valeur initiale I égale à

$$I = 1.23 \text{ (} h = 30^{\circ}, \text{ dist. moy., hum. abs.} = 5 \text{ mm.)}$$

Voir table 19., page 496.

Comme nous le voyons, le caractère général de la marche annuelle avec son maximum entre le mois d'avril et celui de mai, son maximum secondaire tombant en septembre et son minimum au mois de décembre, montre un accord assez satisfaisant avec la marche vraie. bien que les valeurs absolues de l'insolation présentent des différences assez considérables. Les valeurs théoriques des mois d'hiver sont plus basses, celles des mois d'été un peu plus hautes que les valeurs observées directement.

Enfin nous citons pour Pavlovsk les moyennes annuelles de l'insolation, obtenues d'après la même règle que celles de Varsovie:

Table 20.
Pavlovsk.

	Moy. ann. de l'insol.	Nombre de jours d'observ.	Moy. ann. de l'hum. abs.	Coef. stante de l'actinomètre adoptée
1893	1.25	66	5.9	$k = 1.10$
1894	1.19	79	5.7	¹⁾
1895	1.17	81	5.7	$k = 1.08$
1896	1.23	62	4.7	$k = 1.08$
1897	1.21	48	5.4	$k = 1.08$
1898	1.26	57	5.0	$k = 1.09$
1899	1.26	61	4.7	$k = 1.09$
1900	1.20	62	5.7	$k = 1.07$

¹⁾ Les différentes constantes de l'actinomètre pour les différents mois (entre 1.04 et 1.10).

Table 19.
Marche annuelle théorique pour Pavlovsk.

Date	15/I	15/II	15/III	15/IV	15/V	15/VI	15/VII	15/VIII	15/IX	15/X	15/XI	15/XII
Hauteur du soleil	9°	18°	28°	40°	49°	54°	52°	44°	33°	22°	12°	7°
Moy. mens. de l'hum. abs.	1.9	1.6	1.9	3.0	5.1	7.7	8.7	11.1	6.2	5.6	2.6	1.2
Insol., réd. à la hauteur du soleil	0.707	1.129	1.205	1.330	1.400	1.430	1.419	1.369	1.264	1.109	0.847	0.598*
Insol., réd. à la hauteur et à l'hum. abs.	0.769	1.097	1.267	1.370	1.398	1.376	1.345	1.247	1.240	1.097	0.895	0.674*
Insol., réd. à la hauteur, à l'hum. abs. et à la distance relative du mois	0.80	1.12	1.28	1.36	1.37	1.34	1.31	1.22	1.23	1.11	0.92	0.71*

La moyenne annuelle pour la période de cinq ans (1896 — 1900) est de 1·22 (h = 30°, dist. moy., l'humidité moy. abs. 5·1 mm.).

En rapprochant les moyennes annuelles des années distinctes, il faut probablement prendre en considération la variabilité de la constante de l'actinomètre à l'aide de laquelle on réduisait les observations. On l'établissait en la déduisant comme moyenne d'un petit nombre d'observations assez différentes les unes des autres et en 1894 on avait même appliqué un coefficient variable pour les différents mois.

Les moyennes mensuelles de l'insolation à Pétersbourg se présentent comme il suit:

Voir table 21, page 498.

Le tableau annuel pour la période de cinq ans fournit les données suivantes:

Table 22.

Moyennes de cinq ans. Pétersbourg (1896—1900).

Mois	Hauteur du soleil	Valeurs moy. mens. de l'hum. abs.	Valeurs mens. de l'insolation	Moy. mens. de l'insol. réduites à la dist. moy.	Moy. mens. de l'insol. réduites à la dist. moy. et à la hauteur 30°	Nombre de jours d'observ.	Max. abs. de l'insol.
I	9°	2·3	0·79	0·76	1·28	10	0·95
II	18°	1·6	1·08	1·06	1·26	15	1·23
III	28°	2·0	1·20	1·19	1·22	30	1·41
IV	40°	3·2	1·30	1·31	1·21	32	1·47
V	49°	5·2	1·25	1·27	1·10	44	1·48
VI	54°	7·5	1·22	1·26	1·06	45	1·42
VII	52°	9·6	1·21	1·25	1·06	33	1·38
VIII	44°	9·7	1·17	1·19	1·05*	28	1·35
IX	33°	5·9	1·13	1·14	1·11	11	1·23
X	22°	6·0	1·11	1·10	1·22	10	1·36
XI	12°	3·5	0·83	0·81	1·19	13	1·04
XII	7°	1·6*	0·68*	0·65*	1·28	5	0·79

Table 21.
Petersbourg (1895-1900).

Mois Hauteur du soleil	I 9°	II 18°	III 28°	IV 40°	V 49°	VI 54°	VII 52°	VIII 44°	IX 33°	X 22°	XI 12°	XII 7°
1895	—	0.82*	1.13	1.17	1.23	1.24	1.14	1.26	1.28	1.14	0.91	—
1896	0.82	1.14	1.16	1.37	1.33	1.18	1.19	1.17	1.10	1.01	0.72	0.65*
1897	—	1.08	1.20	1.31	1.19	1.25	1.19	1.20	1.16	1.14	0.83	0.70
1898	0.80*	0.92	1.18	1.33	1.26	1.28	1.32	1.21	—	—	0.87	—
1899	0.88*	—	1.27	1.22	1.24	1.27	1.21	1.27	—	1.24	—	—
1900	0.65*	1.01	1.15	1.19	1.19	1.13	1.16	1.04	1.12	—	—	—

Les moyennes annuelles sont les suivantes:

Table 23.
Pétersbourg.

	Moy. ann. de l'insol.	Nombre de jours d'observ.	Moy. ann. de l'hum. abs.	Constante de l'actinomètre adoptée
1895	1·14	48	5·6	Act. (NN. 3,4), $k = 1·24$; Act. (NN. 15,16), $k = 1·39$
1896	1·14	65	6·0	Act. (NN. 15,16), $k = 1·39$
1897	1·15	63	5·4	Act. (NN. 15,16), $k = 1·39$
1898	1·17	58	5·6	Act. (NN. 15,16), $k = 1·39$; Act. (NN. 48,83), $k = 1·14$
1899	1·15	44	5·0	Act. (NN. 48,83), $k = 1·14$
1900	1·06	47	5·4	Act. (NN. 48,83), $k = 1·07$

La moyenne de cinq ans (1896 — 1900) est égale à 1·13 (30°, dist. moy., hum. abs. 5·5 mm.) c.-à.-d. beaucoup moindre qu'à Pavlovsk ce dont on doit chercher la cause en partie dans l'influence de la ville. En ce qui concerne la marche des moyennes annuelles, nous ferons observer qu'elles ne sont pas probablement exactement comparables les unes aux autres; la cause en est dans le fait que les constantes de l'actinomètre n'ont pas été déterminées avec assez d'exactitude. Ainsi, durant les années 1898 et 1899 on avait appliqué à l'actinomètre (composé des deux thermomètres N. 48 et 83) la constante $K = 1·14$, trouvée à l'aide d'un très petit nombre de comparaisons avec un autre actinomètre relatif; en 1900 on compara le même actinomètre avec un pyréliomètre, on trouva la constante $K = 1·07$ qui diffère considérablement de la première, et on l'adopta pour l'année en question. La constante précédente ($K = 1·14$) fut reconnue comme incertaine et d'après les „Annales“ de 1900 (1-me partie, p. X) les valeurs de l'insolation déjà publiées en 1898 et 1899 „doivent être corrigées de 6%“.

Nous donnons enfin le tableau des moyennes mensuelles (réduites à la hauteur moyenne du mois) à Catherinenbourg, ainsi que les moyennes de trois ans. Nous ne donnons pas les tableaux annuels détaillés; ce qui nous a empêchés de le faire, ce sont les fréquentes lacunes dans la continuité des observations et le petit nombre de ces dernières.

Catharriehoung (1896—1898).

Mois	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI	XII
Hauteur du sol.	12°	21°	31°	43°	52°	57°	55°	47°	36°	25°	15°	10°
1896	—	—	1.37	1.45	1.36	1.33	1.31	1.28	1.33	1.34	—	1.01*
1897	—	1.41	1.44	1.45	1.33	—	—	—	1.32	—	1.24	—
1898	—	1.18	1.43	1.45	1.40	1.33	1.30	1.32	1.26	—	—	—
Moyennes	—	1.30	1.41	1.45	1.36	1.33	1.31	1.30	1.30	1.34	1.24	1.01*

Ce tableau nous fait voir d'une manière générale que le caractère de la marche annuelle y est semblable aux précédents, bien qu'il soit difficile d'en tirer des conclusions détaillées. On peut seulement observer que les valeurs de l'insolation y sont beaucoup plus hautes qu'à Pavlovsk et surtout qu'à Pétersbourg.

* * *

Les données actinométriques que nous avons présentées nous ont permis de déterminer les variations subies par l'insolation sous l'influence des variations dans la hauteur du soleil au-dessus de l'horizon et, ce qui est encore plus important, celles qui sont en rapport avec les variations de l'humidité absolue de l'atmosphère. Les réductions à la hauteur du soleil et à l'humidité absolue, ainsi que celles à la distance moyenne de la terre au soleil, nous ont fourni la possibilité de prévoir théoriquement le caractère de la marche annuelle de l'insolation et les mesures directes, faites sous nos latitudes, confirment ces prévisions théoriques. Ces résultats très intéressants nous permettent de constater d'une manière exacte l'influence prépondérante de la vapeur d'eau sur les phénomènes en question et nous font voir en même temps que la manière dont se répartissent les valeurs mensuelles de l'insolation, ne peuvent être expliquées que par la distribution annuelle des humidités absolues.

En nous basant d'une part sur la concordance que les valeurs mensuelles de l'insolation obtenues théoriquement présentent, en ce qui concerne le caractère de la marche elle-même, avec celles qui ont été déterminées directement, et d'autre part, en connaissant la distribution géographique de la marche annuelle de l'humidité absolue sur le globe terrestre, nous pourrions chercher à répondre à la question suivante: quelle devrait être, théoriquement, la marche annuelle de l'insolation dans différents endroits? En reproduisant, avec des données différentes, le calcul que nous avons fait pour Varsovie p. ex., nous trouverions sans difficulté que, dans la direction nord, au-delà du 70° de latitude, la marche de l'insolation, grâce à la diminution de l'amplitude de l'humidité absolue, devrait correspondre à la marche de la hauteur du soleil au-dessus de l'horizon (c.-à-d. qu'elle devrait arriver à son maximum au mois de juin, sans accroissements secondaires). Et au contraire, dans un endroit comme Péking où l'humidité absolue oscille entre 2 mm. (janvier) et 18.2 mm. (juillet), le maximum devrait se déplacer vers

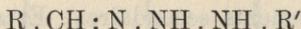
le mois de mars et le maximum secondaire vers celui d'octobre; quant au minimum, il faudrait théoriquement s'attendre à le voir apparaître non plus en décembre, mais au mois de juillet, et cela à cause de la présence d'une énorme quantité de vapeur d'eau dans l'atmosphère, compensant dans le sens négatif et avec un excédent considérable l'action favorable du soleil qui atteint alors sa plus grande hauteur.

Des conclusions de cette sorte ont été déjà confirmées par des mesures faites sous nos latitudes, elles sont donc jusqu'à un certain degré fondées et probables; elles n'en exigent pas moins une confirmation immédiate, obtenue au moyen de mesures faites sous d'autres latitudes; c'est ici le premier objet important des futures recherches actinométriques. Le second, non moins important, consisterait dans l'étude plus approfondie et détaillée de l'action de la vapeur d'eau sur l'insolation, à la manière de celle qui a été faite par M. Very (Atmospheric Radiation 1900). Il faudrait aussi étudier l'influence de l'humidité et de l'insolation dans la direction verticale; pour cela il faudrait faire entrer en considération dans une plus large mesure les couches supérieures de l'atmosphère, au-delà de celles qui entourent immédiatement l'endroit d'observation. Enfin, une des conquêtes météorologiques de la plus grande importance serait d'éclaircir la question difficile de la marche diurne de l'insolation, dans laquelle la vapeur d'eau joue sans aucun doute un rôle prépondérant.

Varsovie. Station Centrale Météorologique (Musée de l'Industrie et de l'Agriculture) Mai 1903.

33. MM. CHARLES REUTT et BRONISLAS PAWLEWSKI. **O kondensacyi oksimów z hydrazynami i o własnościach hydrazonów.** (*De la condensation des oximes avec les hydrazines et des propriétés des hydrazones*). Note présentée par M. L. Marchlewski m. t.

M. F. Just¹⁾ en faisant réagir quelques kétoximes sur les hydrazines a obtenu des kétohydrazones. Dans le présent travail, on a cherché à obtenir des corps de la forme



¹⁾ Berichte 19. 1205.

en faisant condenser des aldoximes avec les hydrazines. Or, par la condensation de ces corps, on n'obtient pas des produits de la forme ci-dessus. En revanche, on obtient des aldohydrzones, semblablement à ce qu'a obtenu M. F. Just: les kétohydrzones.

La réaction des hydrazines sur les oximes varie beaucoup selon le cas: parfois le rendement en hydrzones est très bon, d'autres fois très mauvais, d'autres fois encore, la réaction indiquée ne se produit guère. C'est ainsi qu'à la suite de la réaction de l'acétaldoxime, on n'a pu isoler aucun corps cristallin; pareillement le camphreoxime ne réagit point sur la phénylhydrazine.

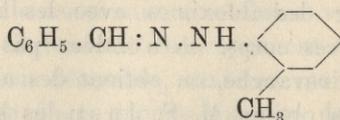
Par la réaction du benzaldoxime sur les hydrazines nous avons obtenu et avons pu examiner les hydrzones suivants:

1. Benzalphenylohydrzone, $C_6H_5 \cdot CH : N \cdot NH \cdot C_6H_5$
Ce composé a été déjà obtenu avant nous, par d'autres procédés. Il se présente sous forme d'aiguilles et de prismes monosymétriques incolores qui fondent à une température de 158 à 160°. Le point de fusion de ce corps indiqué dans des travaux antérieurs, 152 à 156°, n'est pas exact; pareillement la mention, qu'on trouve dans ces travaux antérieurs, que le dit corps est jaune ou rouge, n'a pu être observée sur ce corps chimiquement pur, car à cet état il est toujours incolore.

Le benzalphenylohydrzone exposé à la lumière se colore rapidement en rouge et cette modification possède le même point de fusion et la même composition chimique que l'incolore. La couleur rouge de cet hydrzone disparaît peu à peu quand on le replace dans l'obscurité. Lorsque l'on l'expose de nouveau à la lumière, la couleur réapparaît. Cette couleur rouge disparaît aussi quand on chauffe rapidement ce corps à une température de 115 à 120°. Il est à remarquer que l'hydrzone incolore se décompose déjà à 100°, 105° et 110°. Il se produit une réaction que nous n'avons pu examiner de plus près, mais la proportion de carbone dans ce corps ainsi modifié se trouve notablement abaissée.

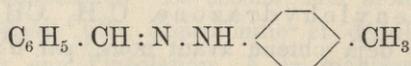
Le rendement de benzalphenylohydrzone est très bon, de manière que pour le préparer on peut avec avantage employer notre méthode.

2. Benzalortolylohydrzone, $C_{14}H_{14}N_2$, dont la structure est la suivante:



se présente sous la forme d'aiguilles jaune-dorées qui fondent à 100—102°. A la lumière il rougit fortement. L'hydrazone rouge fond déjà à 80—83°, tandis que le benzalphenylhydrazone possède le même point de fusion, qu'il soit incolore ou qu'il soit rouge. Le rendement en cet hydrazone est faible. Nous pensons avoir les premiers préparé ce corps.

3. Le benzalparatolylohydrazone, $\text{C}_{14}\text{H}_{14}\text{N}_2$, dont la structure peut être représentée par la formule



a été obtenu sous forme de grains et de courtes aiguilles d'une couleur de sable et qui seulement après trois cristallisations successives au moyen d'alcool dilué fondent à une température fixe de 114°. Exposé à la lumière, ce corps se colore en rouge clair et en même temps la température de fusion s'abaisse, selon la durée de l'exposition, à 108°, 104° et même, jusqu'à 101°.

Le rendement de cet hydrazone est faible. Ce corps, de même que le précédent, ne se trouve encore mentionné, à ce que nous croyons, dans aucune publication. Il est isomère avec le corps précédemment décrit. Notons aussi que l'on connaît encore d'autres isomères de cet hydrazone.

34. M. GUILLAUME FRIEDBERG. *Zagłębie miocenijskie Rzeszowa. (Das miocäne Becken von Rzeszów.) (Sur le bassin miocénique de Rzeszów).* Mémoire présenté par M. J. Niedźwiedzki m. t.

Aus der Umgebung von Rzeszów waren bisher die Lithothamienkalke von Niechobrz, Siedliska, (Tietze, Hilber, Uhlig) und die Tone und Tonschiefer von Pobitno (Niedźwiedzki) bekannt. Der Verfasser konnte sich aber von einer weit grösseren Ausdehnung der Miocänablagerungen in hiesiger Gegend überzeugen und dartun, dass diese hier ein ellipsoidales Becken bilden, dessen

Grenze durch eine Linie gebildet wäre, welche sich durch die Ortschaften: Olchowa, Będziemyśl, Dąbrowa, Trzciana, Świlcza, Pobitno, Tyczyn, Przyłasek, Siedliska, Babica, Lutorysz, Niechóbrz, Wola Zgłobieńska, Olimpów und Nockowa hinzieht. In den genannten Ortschaften deuten die Aufschlüsse überall auf eine ufernahe Bildung, bloss in Zgłobień auf einen etwas entfernten Meeresstrand. In petrographischer Hinsicht finden wir überall längs des Randes des Miocänbeckes blaue Tone, Tonschiefer und Sande, dann Sandsteine und Konglomerate, die beiden letzt genannten Felsarten sind im allgemeinen seltener und sind in grösserer Menge in Trzciana, Dąbrowa und Będziemyśl zu finden. Ausserdem sind für die hiesigen Randbildungen zahlreiche in Tone und Sande eingepresste exotische Gesteine sehr bezeichnend, welche in Pobitno hauptsächlich aus Inoceramensandsteinen bestehen und überall dem angrenzenden älteren karpatischen Gesteinsmateriale entsprechen (siehe die geologische Karte). Einige Konglomerate (Dąbrowa, Będziemyśl) sind im ganzen aus zertrümmerten karpatischen Gesteinen gebildet, was die in ihnen gefundenen Inoceramenschalenfragmente beweisen. In manchen Orten sind auch sehr dünne Einschaltungen von Braunkohle vorhanden, welche jedoch keinen praktischen Wert hat.

In den Lithothamienkalksteinen muss man zwei Arten unterscheiden. In Świlcza und Lutorysz sind mächtige Bänke eines feinkörnigen Lithothamienkalksteines in Tone und Sande eingelagert, bei welchen der Durchmesser der Lithothamienknollen kaum 1—2 mm beträgt; der Verfasser nennt sie „untere Lithothamienkalksteine“ und ihre Fauna entspricht grösstenteils der Fauna der Sande und Tone. Die eigentlichen „oberen Lithothamienkalksteine“ bilden ein höheres Niveau und sind in Przyłasek, Siedliska, Niechóbrz, Wola Zgłobieńska und Olimpów zu finden. Am besten in Niechóbrz aufgeschlossen, zeigen sie hier einen auf etwa 20 m starken Komplex, welcher aus 1 m mächtigen Kalksteinbänken besteht, die durch dünne Zwischenlagen eines braulichen Tones getrennt sind. Oben überdeckt sie eine Amphisteginenschicht, welche zahlreiche Lithothamienknollen besitzt. Im besonderen muss man auch bemerken, dass die Knollen dieses Kalksteines grösser sind (einige cm im Durchmesser) und dass die Mächtigkeit der Kalksteine weniger als 20 m beträgt, was man am besten in Niechóbrz sieht, woselbst in angegebener Tiefe der Kalkstein in ein kalkiges Austernkonglomerat übergeht. In etwas grösserer Tiefe müssen sich Tone und

Sande befinden, welche in kleiner Entfernung von den Steinbrüchen am Grunde des Bachthales zum Vorschein kommen.

Alle diese Kalksteine sind am Ufer eines sehr seichten Meeres gebildet, was übrigens die gefundenen Foraminiferen beweisen. Die Kalksteine im Orte Przyłasek unterscheiden sich durch eine grössere tonige Beimengung, weshalb sie teilweise in einen kalkigen Mergel übergehen. Die Gipse in Siedliska bilden eine ganz andere Facies, obwohl sie, was das Alter anbelangt, gleichzeitig sind. Sie liegen nämlich hypsometrich ebenso hoch wie die Kalksteine und in ihrer Nähe dazu in derselben Richtung, indem sie ihre Verlängerung bilden. Die Ursache ihrer Entstehung möchte der Verfasser darin erblicken, dass hier ein tiefer Meerbusen war, welcher durch eine aus Menilitschiefern bestehende Barre vom Meere getrennt war. Obwohl der gänzliche Mangel an Versteinerungen keinen bestimmten Schluss zulässt, so scheinen doch die lokalen Verhältnisse zu dieser Annahme zu berechtigen (beiderseits des Gypsaufschlusses befinden sich steil einfallende Menilitschiefer). Der Gips ist feinblättrig (Selenit), die flachen Gipskristalle sind in Ton eingebettet, ausserdem befinden sich dünne Zwieschenlagen einer faseriger Abart. Von oben sind die gipsführenden Tone durch etwas schieferigen blauen Ton bedeckt.

In einiger Entfernung von den Rändern der Einsenkung kommen die Miocänschichten in Zgłobień zum Vorschein, woselbst sie aus blauen Tönen bestehen. Die ziemlich zahlreich vorkommenden Foraminiferen, dann ein loser verkohlter Baumstamm (eine unscheinbare Braunkohlenschicht befindet sich im Tone) bekunden, dass das Meer hier nicht tief und die Entfernung vom Meeresufer gering war.

Die in allen Miocänschichten vorkommenden Fossilien sind schlecht erhalten, grösstenteils zerbrochen oder bloß als Steinkerne und Abdrücke erhalten, deshalb konnte der Verfasser nur wenige der tatsächlich vorkommenden Arten bestimmen. In den Tönen und Sanden waren: ¹⁾

* <i>Cerithium nodoso-plicatum</i> M. Hörn	<i>Cerithium deforme</i> Eichw.
* „ <i>Schaueri</i> Hilb.	* <i>Turritella Rabae</i> Niedz.
„ <i>bronniforme</i> Hilb.	„ <i>subangulata</i> Broc.
„ <i>lignitarum</i> Eichw.	„ <i>bicarinata</i> Eichw.

¹⁾ Mit einem Stern sind häufige Gattungen bezeichnet, bei Lithothamien-Kalksteinen mit *o* oberer Kalkstein, mit *u* unterer.

<i>Turritella Archimedis</i> M. Hörn.	* <i>Pannopaea Menardi</i> Desh.
* <i>Trochus patulus</i> Brocchi	* <i>Pectunculus pilosus</i> L.
„ <i>quadristriatus</i> Dub.	<i>Lucina borealis</i> L.
<i>Natica helicina</i> Br.	* <i>Corbula gibba</i> Olivi
<i>Buccinium (Nassa) laevissimum</i> Br.	<i>Ervilia pusilla</i> Phill.
<i>Valvata piscinalis</i> Müll	<i>Pecten elegans</i> Andrz.
<i>Rissoa Lachesis</i> Bast	„ <i>Rollei</i> Hörn (?).
<i>Bulla Lajonkajreana</i> Bast	* <i>Ostrea digitalina</i> Dub.
<i>Dentalium entalis</i> L.	„ <i>cochlear</i> Poli.
„ <i>incurvum</i> Ren.	

In den Lithothamienkalksteinen aber:

<i>Cerithium deforme</i> Eichw. u.	* <i>Corbula gibba</i> Olivi u.
* <i>Turritella Rabae</i> Niedz. u.	* <i>Ervilia pusilla</i> Phill. u.
* <i>Trochus patulus</i> Br. u.	<i>Arca lactea</i> L. u.
* „ <i>Celinae</i> Andr. u.	„ <i>clathrata</i> Def. u.
<i>Monodonta angulata</i> Eichw. u.	<i>Cardita Partschi</i> Gold. o.
* „ <i>Araonis</i> Bast u.	„ <i>scalaris</i> Sov. o.
<i>Columbella scripta</i> Bell. u.	* <i>Pecten latissimus</i> Br. o.
* <i>Fissurella graeca</i> L. u.	„ <i>an substriatus</i> d'Orb. u.
<i>Dentalium incurvum</i> Ren u.	* „ <i>Lenzi</i> Hilb. u.
* <i>Vermetus arenarius</i> L. u.	* <i>Ostrea digitalina</i> Dub. u. o. (?)
<i>Pannopaea Menardi</i> Desh. o.	* „ <i>cochlear</i> Poli o.
<i>Lima squamosa</i> L. u. o.	„ <i>plicatula</i> Gm. o.
* <i>Lucina borealis</i> L. o u.	„ <i>crassicosta</i> Sov. o.
„ <i>leonina</i> Bast. u.	<i>Spondylus crassicosta</i> Lam. o.
<i>Venus multilamella</i> Lam. u.	<i>Echinolampus hemisphaericus</i>
„ <i>cf. fasciculata</i> Reuss u.	Lk. o.

Die gefundenen Foraminiferenfauna ist im allgemeinen zahlreich. Aus den Sanden und Tonen wurden bestimmt¹⁾:

† <i>Cornusjira incerta</i> d'Orb.	* <i>Virgulina Schreibersiana</i> Cziż.
† <i>Reophax difflugiformis</i> Br.	<i>Bulimina elegans</i> d'Orb.
† „ <i>ovulum</i> Grzyb.	„ <i>pupoides</i> d'Orb.
† <i>Trochammina proteus</i> Karrer	„ <i>Bucheana</i> d'Orb.

¹⁾ Mit † bezeichneten Arten sind wahrscheinlich auf sekundärer Lagerstätte und stammen aus den angrenzenden Inoceramenschichten:

<i>Bulimina elegantissima</i> d'Orb	<i>Discorbina pusilla</i> Uhlig
" " <i>var seminul-</i> <i>da</i> Terq.	<i>Truncatulina praecincta</i> Karr.
<i>Bolivina punctata</i> d'Orb.	" <i>lobatula</i> Valk i Jac.
<i>Textularia sagittula</i> Defr.	" <i>akneriana</i> d'Orb.
" <i>agglutinans</i> d'Orb.	" <i>Ungeriana</i> d'Orb.
" <i>globifera</i> Reuss	" <i>viariabilis</i> d'Orb.
<i>Uvigerina pygmaea</i> d'Orb.	" <i>Dutemplei</i> d'Orb.
" <i>tenuistriata</i> Reuss	" <i>tenella</i> Reuss
" <i>asperula</i> Cziż.	" <i>stella</i> Karrer
<i>Nodosaria Adolphina</i> d'Orb.	" <i>reticulata</i> Cziż.
" <i>soluta</i> Reuss.	<i>Anomialina badensis</i> d'Orb.
" <i>obliqua</i> L.	" <i>austriaca</i> d'Orb.
" <i>calomorpha</i> Reuss	" <i>grosserugosa</i> Gumb
" (<i>Glandulina</i>) <i>cylindra-</i> <i>cea</i> Reus	" <i>ammonoides</i> Reuss.
" <i>laevigata</i> d'Orb.	<i>Pulvinulina</i> Ficht i Moll.
* <i>Cristellaria cultrata</i> Mont	" <i>umbonata</i> Reuss
" <i>mammilligera</i> Karrer	" <i>Schreibersii</i> d'Orb.
<i>Cristellaria echinata</i> d'Orb.	* <i>Rotalia</i> <i>Beccari</i> L.
<i>Polymorphina communis</i> d'Orb.	" <i>Soldanii</i> d'Orb.
" <i>gibba</i> d'Orb.	" <i>Römeri</i> Reuss
" <i>problema</i> d'Orb.	" <i>orbicularis</i> d'Orb.
<i>Pullenia sphaeroides</i> d'Orb.	<i>Nonionina umbilicatula</i> Hant.
<i>Sphaeroidina bulloides</i> d'Orb.	" <i>Boueana</i> d'Orb.
<i>Globigerina bulloides</i> d'Orb.	* <i>Polystommella crispa</i> L.
" " <i>var triloba</i> Reuss	* " <i>macella</i> Ficht. i Moll.
<i>Orbulina universa</i> d'Orb.	" <i>aculeata</i> d'Orb.
* <i>Discorbina orbicularis</i> Terq.	" <i>imperatrix</i> Brady
" <i>patelliformis</i> Brad.	" <i>striato-punctata</i> Ficht. i Moll.
	<i>Amphistegina Lessonii</i> d'Orb.

Aus den Lithothamienkalksteinen und den sie begleitenden Tonen stammen:

<i>Miliolina seminulum</i> L. u.	<i>Textularia gramen</i> d'Orb. o.
<i>Textularia carinata</i> d'Orb. o.	<i>Nodosaria consobrina</i> <i>var. emaciata</i> Reuss o.
" <i>sagittula</i> Defr. o.	<i>Cristellaria cultrata</i> Mont. o.
" <i>agglutinans</i> d'Orb. o.	

<i>Polymorphina communis</i> d'Orb. o.	<i>Truncatulina Haidingeri</i> d'Orb.
* <i>Globigerina bulloides</i> d'Orb. var.	o. u.
<i>triloba</i> Reuss o.	<i>lucilla</i> Rzeh. o.
<i>Orbulina universa</i> d'Orb. o.	<i>capitata</i> Gumb. o.
<i>Discorbina orbicularis</i> Terq. o. u.	<i>osnabrugensis</i> Reuss. o.
<i>patelliformis</i> Brady o.	<i>Anomalina austriaca</i> d'Orb. o.
<i>rosacea</i> d'Orb. o.	<i>ammonoides</i> Reuss o.
<i>platyomphyla</i> Reuss o.	* <i>Pulvinulina repanda</i> Ficht. i
<i>disca</i> Hantk. o.	Moll. o. u.
<i>pusilla</i> Uhlig o.	<i>oblonga</i> Will. o.
<i>eximia</i> Hantk.	<i>Karrereri</i> Rzeh. o.
<i>semiorbis</i> Karrer o.	<i>subcandidula</i> Grzyb. o.
* <i>Truncatulina lobatula</i> Walk. i Jac.	<i>elegans</i> d'Orb. o.
o. u.	* <i>Rotalia</i> Beccari o. u.
<i>communis</i> Röm. o.	<i>Soldanii</i> d'Orb. o.
<i>akneriana</i> d'Orb. o.	<i>Nonionina Boueana</i> d'Orb. o.
<i>subakneriana</i> Grzyb. o.	* <i>Polystomella crispa</i> L. o. u.
<i>Ungeriana</i> d'Orb. o.	* <i>macella</i> Fich. i
<i>variabilis</i> d'Orb. o. u.	Moll. o. u.
<i>tenella</i> Reuss o.	* <i>Amphistegina Lessonii</i> d'Orb. o.
<i>Hantkeni</i> Rzeh. o.	* <i>Heterostegina costata</i> d'Orb. o.

Diese Fauna beweist, dass das hiesige Miocän dem höheren Niveau der sogen. II. Mediterranstufe angehört, und zw. d. Tortonien. Es ist also zeitlich gleich mit anderen schon bekannten subkarpatischen Vorkommnissen wie Rajsko, Bogucice, Zgłobice, Niskowa, Grudna Dolna, Podmichale und Myszyn. Eine genaue Parallelsierung ist deshalb unmöglich, denn erstens ist die dortige fossile Fauna nicht genau bekannt, zweitens gelang es dem Verfasser auch nicht alle vorhandenen Gattungen zu sammeln, was in Anbetracht einer schlechten Erhaltung der Schalen in allen diesen Aufschlüssen natürlich erscheinen muss. In fast allen Lokalitäten finden sich einige sehr charakteristische Formen, wie: *Cerithium nodoso-plicatum* M. Hörn., *Cer. lignitarum* Eichw., *Turritella Rabae* Niedz., *Pecten elegans* Andr., *Ostrea digitalina* Dub. Manche Formen, welche in Niskowa, Myszyn sich vorfinden (*Neritina* u. a.), bei Rzeszów aber fehlen, bezeugen einige Verschiedenheiten, was die Facies anbelangt (brackisches Wasser).

Im Miocänbecken von Rzeszów sind alle Bildungen fast gleich-

zeitig, etwas jünger sind die oberen Lithothamienkalksteine, welche in Niechóbrz den Sanden und Tonen aufgelagert sind. Sie weisen darauf hin, dass das Meer einigen Schwankungen ausgesetzt war, der Meerbusen musste anfangs kleiner sein (untere Lithothamienkalke), erst später gewann er eine grössere Oberfläche und damals bildeten sich am ganz seichten Strande die oberen Lithothamienbänke.

An manchen Orten grenzen die Miocänbildungen an ältere karpatische und überall discordant. Die Lithothamienkalke von Olimpów sind den Inoceramenschichten aufgelagert, ebenso auch die Sande und Tone von Babica, in anderen Lokalitäten im Süden des Beckens den Menilitschiefern (Przylasek, Siedliska, Niechobrz).

Das Miocän habe ich ein Miocänbecken genannt, weil man überall ein Einfallen gegen die Mitte findet. In Będziemyśl, Dąbrowa, Trzciana und Świlcza ist es gegen S., in Pobitno gegen E., in Przylasek, Siedliska, Babica und Niedobrz gegen N., in Nockowa endlich gegen NO. Die ganze Einsenkung entstand nach der Ausbildung des karpathischen Bogens, was die discordante Lagerung des Miocäns auf den älteren Schichten beweist.

Die hiesige Gegend bildete zur Zeit des oberen Miocäns einen Meerbusen des grossen Meeres und war wahrscheinlich vermittels einer Meerenge im Zusammenhange mit der Umgebung von Grudna Dolna, was die Aufschlüsse des Miocäns bei Broniszów und Mała in der Mitte des Weges von Rzeszów nach Grudna beweisen. In der Nähe von Pobitno musste eine Verbindung gegen Osten sein, worauf kleine Entblössungen eines Miocäntegels bei Strażów (leider ohne makro- und mikroskopische Versteinerungen) hinweisen.

Was für ein Zusammenhang zwischen dem Miocänbecken von Rzeszów und den „krakowiecer Tönen“ ist, welche das Liegende der Glacialbildungen der Tiefebene zwischen der Weichsel und dem San bilden, konnte ich leider nicht feststellen. In Anbetracht der stratigraphischen Verhältnisse könnte man zwar annehmen, dass die genannten Tone unter die Miocänschichten von Rzeszów einfallen (die krakowiecer Tone ebenso wie die Miocänschichten im Norden des Beckens haben gleiches Einfallen gegen S.), aber auch infolge der grossen Entfernung zwischen beiden Aufschlüssen (20 km.), dass dieses scheinbare Einfallen wirklich nicht stattfindet, sondern dass die „krakowiecer Tone“ in grösserer Entfernung vom Meeresrande entstanden, also eine Ablagerung eines etwas tieferen Meeres bilden. In diesem Falle würde der Unterschied zwischen dem Mio-

cän von Rzeszów und den „krakowiecer Tonen“ nur, was Facies, nicht was Alter anbelangt, bestehen. Da bisher gar keine Fossilien in den krakowiecer Tonen gefunden wurden, kann der Verfasser diese Annahme nur als möglich erklären.

Es ist sonderbar, dass wir längs des Karpatenrandes die Lithothamienkalke nur bei Rzeszów finden, während sich an anderen Orten diese Facies nicht gebildet hat. Jenseits der Weichsel in Polen, treten aber bei Pińczów, Busk und Stopnica ganz analoge Kalksteine auf, welche von Kontkiewicz untersucht wurden. Ihre Fauna stimmt vollkommen mit derjenigen von Rzeszów überein, was folgende Fossilien beweisen, welche bei Pińczów gefunden wurden:

Heterostegina costata
Amphistegina Hauerina (= *Lessonii*)
Pecten latissimus
Cardium hians
Pannopaea Menardi
Pecten sp.
Lithothamium ramosissimum.

Diese fast vollkommene Übereinstimmung weist darauf hin, dass es zeitlich und faciell dieselben Bildungen sind. Das ziemlich breite, aber nicht tiefe miocäne Meer hatte sowohl an dem nördlichen wie auch an den südlichen Ufern zahlreiche Nulliporen-Bänke gebildet, welche an sehr seichten Stellen wuchsen und das Material der Nulliporen (Lithothamien)-Kalksteine bildeten.

Eine gründliche und sichere Beantwortung der Frage, ob alle dem jüngeren Miocän angehörigen Schichten zwischen den Karpaten und den Gebirgen von Kielce und Sandomierz den Sedimenten desselben Meeres entsprechen, wird erst dann gegeben sein, wenn wir alle diesbezüglichen Aufschlüsse und ihre Fossilien kennen werden, was bis jetzt nicht der Fall ist.

35. M. F. TONDERA. *Przyczynek do znajomości pochwy skrobiowej. (Beitrag zur Kenntnis des funktionellen Wertes der Stärkescheide). (Contribution à la connaissance de la gaine d'amidon)*. Mémoire présenté par M. E. Godlewski m. t.

(Planche X).

In den jungen krautartigen Trieben vieler dikotylen Pflanzen erscheint an der inneren Grenze der primären Rinde eine gewöhnlich nur eine Zelllage starke Schicht, deren parenchymatische Zellen mit groben Stärkekörnern gefüllt sind und sich wegen ihres Inhaltes von dem umgebenden Parenchym auffallend abheben. Diese Schicht wird die Stärkescheide genannt. Sie findet sich auch in der Umgebung der geschlossenen Bündel der monokotylen Arten vor. Der funktionelle Wert der Stärkescheide wurde ursprünglich (Sachs) so gedeutet, dass dieselbe als Wanderbahn zur Fernleitung der in den Blättern erzeugten Stärkekörner in die unteren Teile des Triebes dienen soll. Nachdem aber H. Heine seine eingehenden Untersuchungen über die physiologische Bedeutung der Stärkescheide veröffentlicht hatte und an einer Reihe von gut gewählten und überzeugenden Beispielen den Nachweis erbrachte, dass die Stärkescheide nicht zur Fernleitung von plastischen Stoffen, wohl aber zur Aufspeicherung derselben an der Stelle dient, wo sie verbraucht werden sollen, ist diese neue Auffassung des funktionellen Wertes der Stärkescheide in allen Werken, die über Pflanzenphysiologie handeln, allgemein angenommen worden.

In den letzten Jahren tauchte aber noch eine neue Auffassung der Funktion der Stärkescheide auf, welche durch die Untersuchungen von Němec und Haberlandt eingeleitet und im laufenden Jahre von Haberlandt als Statolithentheorie des Geotropismus veröffentlicht worden ist. Nach dieser Theorie sollen die Zellen der Stärkescheide Statocysten bilden, in welchen die Reizperzeption der Schwerkraft der orthotropen Organe stattfindet. Bekanntlich lagern sich die groben Stärkekörner älterer Partien der Stärkescheide, da sie spezifisch schwerer sind als das sie umgebende Protoplasma auf der untersten Zellwand ab und üben einen Druck auf die Plasmahäute der Zellwände aus. Haberlandt nimmt bei der Ausgestaltung seiner Statolithentheorie des Geotropismus an, dass dieser Druck von den Plasmahäuten der Querwände sowie der radialen Längswände nicht empfunden wird; die Plasmahäute der Tangentialwände werden aber durch den Druck gereizt, und zwar werden

die den äusseren Tangentialwänden anliegenden Plasmahäute durch den Druck der Stärkekörner zur Wachstumsförderung angeregt, an den inneren Tangentialwänden dagegen wird dadurch eine Wachstumshemmung ausgelöst.

Befindet sich daher ein orthotropes Organ längere Zeit in horizontaler Lage, dann sinken von den Quer- und Radialwänden die Stärkekörner auf die Tangentialwände hinab, bewirken auf den äusseren (unteren) Tangentialwänden die Wachstumsförderung, an den inneren (oberen) die Wachstumshemmung, sie veranlassen folglich die geotropische Krümmung des Triebes. Der Geotropismus soll daher durch die Reizwirkung der Stärkekörner auf die Plasmahäute der Stärkescheide hervorgerufen werden.

Wollte man die Richtigkeit dieser recht anziehenden Statolithentheorie auf Grund der Beobachtungen im Bereiche der Cucurbitaceen-Familie prüfen, so kommt man zum Schlusse, dass dieselbe als nicht beweiskräftig hingestellt werden muss.

Zu diesem Zwecke habe ich eine grössere Anzahl von Arten vorwiegend im frischen Zustande untersucht; die Stärkescheide wurde auf die Beschaffenheit und Lage der Stärkekörner durch zahlreiche sich nachfolgende Stengelglieder einer eingehenden Untersuchung unterzogen, auch die Grösse der Stärkekörner wurde in Betracht gezogen. Als erstes Internodium wurde bei meiner Beobachtung das unterste Stengelglied angenommen, welches noch mit der Sprossspitze die Nutationsbewegungen ausführt und ungefähr 2 cm lang ist.

Von diesem Stengelgliede beginnt nämlich die Bildung des Festigungsringes, welcher die Steifheit des Triebes bedingt, so dass die stärksten geotropischen Krümmungen des Stengels an der Basis dieses ersten Stengelgliedes zum Vorschein kommen, den folgenden Internodien aber infolge der Zunahme der Steifheit des Festigungsringes völlig abgehen.

Beobachtet man nun die Beschaffenheit der Zellen der Stärkescheide in den jungen Stengeln, so findet man, dass in dem ersten und in den zwei nachfolgenden Stengelgliedern aller untersuchten Cucurbitaceen-Arten die Stärkekörner feinkörnig und gleichmässig im Plasma der Zelle verteilt sind. Als Beispiele führe ich an: *Cyclanthera pedata* Schrad., *Lagenaria vulgaris* Ser., *Momordica Charantia* L., *Sicyos angulata* L., *Thladiantha dubia* Bunge u. v. a. Gewisse Arten besitzen Zellen mit gleichmässig verteilten Stärke-

körnern noch im sechsten Stengelgliede, z. B. die Stengel von *Cucurbita Pepo* L., *Cucumis salivus* L.; in einzelnen Arten, in welchen die Stärkescheide sehr lange tätig ist, wie z. B. in *Coccinia indica* W. & A., reichen diese Zellen noch in das zwölfte, in *Bryonia alba* L. sogar in das achtzehnte Stengelglied hinab.

Erst in den weiter unten gelegenen Stengelgliedern lagern sich die jetzt grobkörnigen Stärkekörner an der unteren Zellwand ab. Dies geschieht aber erst in den Partien der Stärkescheide, welche schon ausser Tätigkeit gesetzt sind, weil der Festigungsring an diesen Stellen völlig herausgebildet ist.

Das Sinken der Stärkekörner auf die untere Zellwand ist somit mit dem Übergange der Stärkescheide in den Ruhestand gleichwertig.

Aus den Untersuchungen, welche ich an den Cucurbitaceen-Arten angestellt habe, erweist sich somit, dass die Annahme, welche den Grund der Statolithentheorie des Geotropismus bildet, als ob in allen Zellen der Stärkescheide nur an der unteren Zellwand die Stärkekörner abgelagert wären, für die Cucurbitaceen sich nicht aufrecht erhalten lässt, da diese Erscheinung nur in den unteren Teilen der Stärkescheide beobachtet wird; in diesem Teile der Stengel kommen aber die geotropischen Krümmungen wegen zu grosser Widerstandsfähigkeit des Festigungsringes nicht zum Vorschein. Ein auffallendes Beispiel der Unhaltbarkeit der Statolithentheorie im Bereiche der Familie der Cucurbitaceen liefert der Stengel von *Cucurbita Pepo* L.; in dem kriechenden Sprosse dieser Art finden sich die Stärkekörner an der unteren und oberen Hälfte zahlreicher älterer Stengelglieder nur an den Tangentialwänden der Stärkescheide vor, dennoch lässt sich in diesen Sprossen keine Spur der Aufwärtskrümmung entdecken.

Man gelangt dagegen zu positiven Ergebnissen, wenn man die Erscheinungen, die an der Stärkescheide der Cucurbitaceen beobachtet werden, nach der Anschauung von Heine beurteilt. Während meiner Untersuchungen habe ich vielfach Gelegenheit gefunden, mich von der Richtigkeit dieser Auffassung des physiologischen Wertes der Stärkescheide zu überzeugen. An eine Reihe von Längs- und Querschnitten, die von ganz jungen, älteren und ganz alten Stengelgliedern hergestellt wurden, habe ich die Beobachtung gemacht, dass die Stärkescheide nur durch eine bestimmte Zeit in der Rinde aufzufinden ist, und zwar hängt das Vorkommen derselben

von dem Entwicklungszustande des Festigungsringes der sekundären Rinde ab. Beobachtet man einen Querschnitt des zweiten, noch ganz jungen Stengelgliedes von *Cyclanthera explodens* Naud. (Fig. 1 und 6), so findet man unter der einschichtigen Epidermis ein zwei Zellagen starkes Chlorophyllparenchym, welches dem chlorophyllfreien Grundparenchym anliegt. In den weiteren Stengelgliedern erscheint die Stärkescheide vor dem Auftreten der ersten Elemente des Festigungsringes an der inneren Grenze der primären Rinde, d. h. in der innersten Schicht des Chlorophyllparenchyms und ist anfänglich mit kleinen, in den nächstfolgenden Internodien aber mit grobkörnigen Stärkekörnern erfüllt. Bald darauf bilden sich die Zellen des von innen an die Stärkescheide angrenzenden Parenchyms in Bastfasern um (Fig. 2 und 7); in den noch älteren Stengelgliedern erstreckt sich diese Umbildung auf die tieferen Zellschichten des Grundparenchyms, bis schliesslich drei oder vier Zellagen desselben in einen starken Festigungsring sich umgestaltet haben.

Zur Zeit der Bildung des Festigungsringes kann man immer in den Zellen der Stärkescheide grobe Stärkekörner beobachten; sobald aber der Festigungsring völlig ausgebildet ist, verschwindet die Stärke in den Zellen der Stärkescheide, in welchen wieder Chlorophyllkörner erscheinen (Fig. 3 und 9).

Dieses Verhalten der Stärkescheide ist in der Familie der Cucurbitaceen als normal zu bezeichnen, ich habe es an den Arten: *Cyclanthera pedata* Schrad., *Sicyos angulata* L., *Cucumis sativus* L., *Momordica Charantia* L., *Thladiantha dubia* Bunge., *Trichosanthes palmata* Roxb., *Cucumis Melo* L. und *Cucurbita Pepo* L. beobachtet.

In gewissen Arten findet man jedoch eine Abweichung von der angegebenen Art des Verhaltens der Stärkescheide. Die Stärkescheide vermittelt auch in diesen Fällen das Wachstum des Festigungsringes, sie wird aber noch in solchen Stengelgliedern angetroffen, wo die Entwicklung derselben schon lange abgeschlossen ist. Diese Erscheinung beobachtet man z. B. in der Art *Bryonia alba* L. Eine nähere Einsicht in den Rindenbau dieser Stengelglieder, deren Festigungsring kein Wachstum mehr aufweist, erklärt den Zweck der weiteren Fortdauer der Stärkescheide. Die Stärkekörner werden in diesem Falle zur Erzeugung der sich noch vermehrenden Kollenchymfasern verwendet, welche in den in der äusseren Rinde sich ausbreitenden Kollenchymplatten durch die Umbildung der Parenchymzellen er-

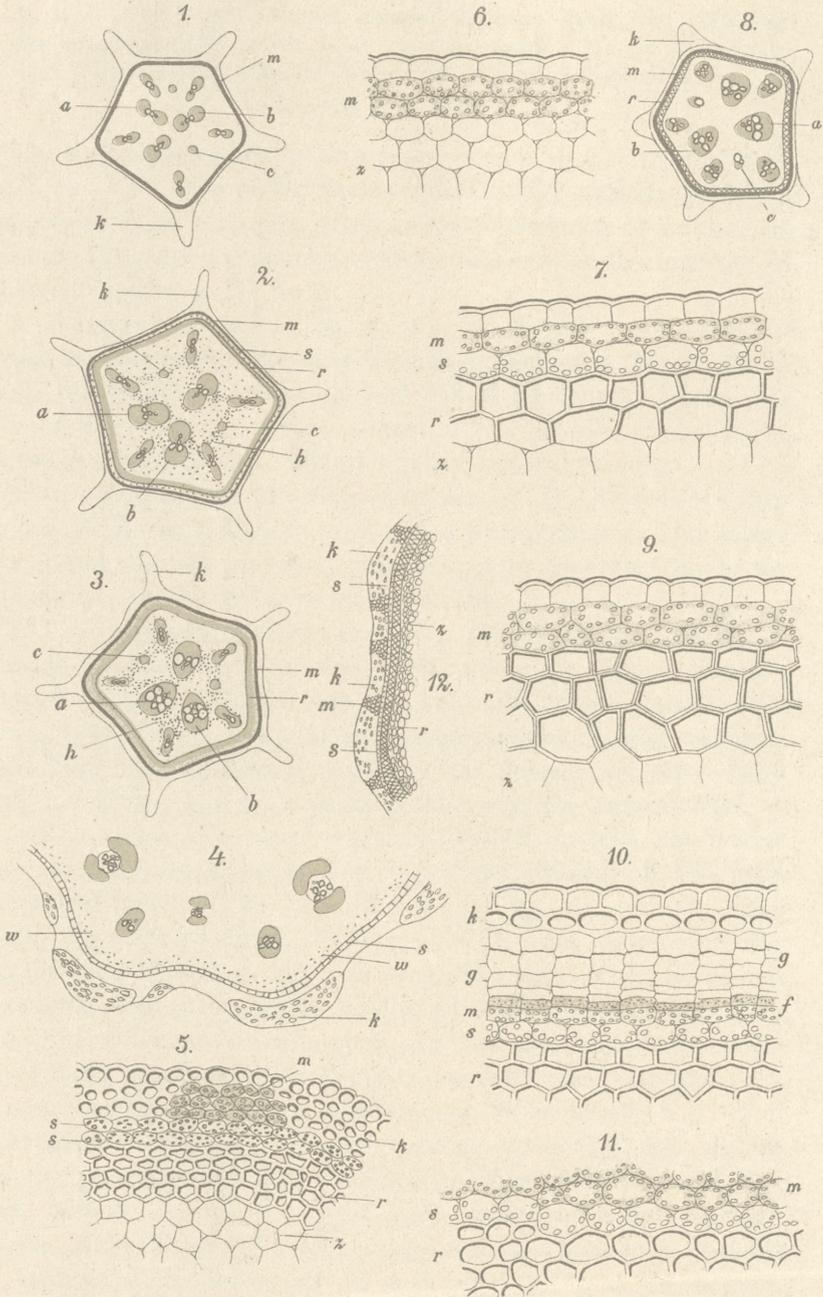
zeugt werden (Fig. 5 und 12). Mit dem Aufhören des Wachstums dieser mechanischen Elemente verschwindet auch die Stärke in den Zellen der Stärkescheide.

Eine ähnliche Erscheinung beobachtet man in der Art *Coccinia indica* W. & A. Das längere Bestehen der Stärkekörner in den Zellen der Stärkescheide nach dem Aufhören des Wachstums des Festigungsringes wird in dieser Art in der Notwendigkeit der Ernährung des Phellogens seine Begründung finden (Fig. 10). Dies ist nämlich die einzige Art der Cucurbitaceen, in welcher ich die Korkbildung beobachtet habe.

Aus dem Verhalten der Stärkescheide ersieht man, dass die Stärkekörner derselben gar nicht weiter wandern, sondern an Ort und Stelle verbraucht werden, um die Cellulosewände des Bastfasertringes zu erzeugen. Die Stärkescheide ist demnach keine Leitungsbahn für plastische Stoffe, sondern sie ist ein Aufspeicherungs-ort des in der nächsten Nähe zu verwenden Nährmaterials.

Das längere Bestehen der Stärke in den Zellen der Stärkescheide der zwei zuletzt angeführten Arten beweist ebenfalls, dass die Stärkekörner nicht fortgeleitet, sondern dicht daneben verbraucht werden.

Endlich muss ich die Arten erwähnen, welche in der Familie der Cucurbitaceen keine Stärkescheide aufweisen, dies sind; *Luffa acutangula* Roxb., *Trichosanthes colubrina* Jacq., *Bryonia dioica* Jacq. Diese Arten besitzen sehr umfangreiche Gefässbündel, besonders die des inneren Kreises (Fig. 8), so dass die äusseren Siebröhrenbündel sowohl des äusseren als auch des inneren Bündelkreises sehr nahe am Festigungsring liegen. In solchen Stengeln erfolgt die Versorgung des wachsenden Festigungsringes mit den plastischen Stoffen direkt von den naheliegenden Siebröhrenbündeln, ohne vorherige Aufspeicherung der Stärkekörner in den Zellen der Stärkescheide.



Ad nat. del F. Tondera

Lith. Krcanikowski à Cracovie.

36. M. M. KOWALEWSKI. *Studia helmintologiczne, część VII. (Helminthological studies, Part VII, with 3 plates). (Études helmintologiques, VII-me partie)*. Mémoire présenté par M. Lad. Kulczyński m. c.

(Planche XI — XIII).

The author describes in this paper a new species of *Metorchis* Looss, two new ones of *Trichosoma* Rud. and a curious species of *Diploposthe* Jacobi; he also gives a new description of *Trichosoma* resectum Duj. and mentions an interesting case in the anatomy of *Bilharziella polonica* M. Kow.

1. *Metorchis tener* sp. n. (fig 1.). Found in the liver of *Mergus merganser* R. Very similar to *M. xanthosomus* (Crepl.) Braun (1902), differing by a more delicate and slender body, by the position of the posterior sucker almost in the middle of its length, and much (twice to three times) smaller testes and ovary.

2. In one (amongst 58) male specimen of *Bilharziella polonica* M. Kow. (1895) from an *Anas querquedula* L. the author encountered the two intestinal branches quite separated up to the posterior end of the body, as shewn by fig. 2.

3. *Trichosoma resectum* Duj. (1843) (fig. 3, 4, 5, 6). — Although the descriptions of this worm, given by Dujardin (3), Eberth (4) and v. Linstow (8), are sufficient to recognize the species, they contain however some incorrections. It may be mentioned here that the lateral bands in the female are 20 — 24 μ broad, i. e. about $\frac{1}{4}$ of the breadth of the body, the ventral band — 10 — 12 μ broad, i. e. $\frac{1}{8}$ of the same breadth; in male, the former bands are 12 — 14 μ broad i. e. $\frac{1}{6}$ of the breadth of the body and ventral band — 6 — 7 μ broad, i. e. $\frac{1}{10}$ — $\frac{1}{12}$ of the same breadth. Eggs 60 μ long by 28 μ broad, with little longitudinal ribs upon the ends. Spiculum 1.26 mm. long. The form of the bursa can be understood only by means of the adjoined drawings (fig. 3, 4).

4. *Trichosoma parile* sp. n. (fig. 7, 8, 9). Found in the intestine of *Bubo maximus* Siebb. Female: length 20 mm.; length of neck 7.8 mm. Lateral and ventral bands equal, 20 μ broad, i. e. $\frac{1}{4}$ of the breadth of the body. Genital opening about 0.1 mm. distant from the posterior end of the oesophagus. Eggs 64 μ long and 32 μ broad, with a superficial net of very delicate, chiefly longitudinal ribs. Male: Body 16.1 mm. long; neck 7.5 mm. long. Lateral and ventral bands are equal, 10 μ broad, i. e. $\frac{1}{6}$ of the breadth

of the body. Spiculum 935μ in length. Its pouch covered with little spines. The form of the bursa is shewn by figs. 8 and 9.

5. *Trichosoma simile* sp. n. (figs. 10, 11), from the intestine of *Turdus pilaris* L. Female: 12.8 mm. long; neck 5.8 mm. long. Lateral bands about 23μ broad, i. e. $\frac{1}{3}$ of the breadth of the body; ventral band 14μ broad, i. e. $\frac{1}{5}$ of the same breadth. Genital opening near the end of the oesophagus. Eggs $66 - 68 \mu$ long and $30 - 32 \mu$ broad, with a delicate superficial net. Male: Body about 7 (?) mm. long; the posterior part of the body (behind the neck) 2.6 mm. long. Lateral bands 14μ broad, i. e. $\frac{1}{4}$ of the breadth of the body; ventral band 7.5μ broad, i. e. $\frac{1}{7}$ of the same breadth. Spiculum 0.5 mm. in length. The form of the bursa is shown by fig. 11.

6. *Diploposthe sui-generis* sp. n. (?) (fig. 12—20). One specimen only of this tape-worm, found by the author in the intestine of a *Fuligula leucophthalmos* Bechs., could not be determined with certainty because the head with hooks and the older proglottides with oncospheres were missing in it. The structure of the internal organs however, especially of the reproductive male organs, offers many details so different from those in *D. laevis* Dies. (the anatomy of *D. lata* Fuhrm. is up to the present unknown) as described by Jacobi (6) and Cohn (2), that the worm in question may be considered: either as an interesting atavistic specimen of *D. laevis* (or *D. lata*?), or (and this seems more probable) as a new species.

We cite here some more important details:

Musculature. Besides the five systems of the muscle fibers described by Jacobi and Cohn in *D. laevis*, here still occur three new ones: 1) a layer of the subepithelial longitudinal thin muscle fibers (fig. 16, m. l. sep.) under the profound epithelial cells, 2) a layer of few very thin diagonal fibers crossing one another (fig. 16, m. d.), lying between the last mentioned muscles and the external longitudinal ones, 3) a thick ring of circular or transversal muscle fibers (fig. 19, m. t. ex.) near the posterior margin of each proglottis. In the arrangement of the other muscles also some differences occur, as shown by fig. 16 and 19. It will suffice to mention that the inner longitudinal muscle bundles extend in *D. sui-generis* more sideward, than in *D. laevis* (Jacobi): there are more over 2 to 3 bundles outside the vasa excretoria belonging to the same layer (fig. 19, m. l. in.).

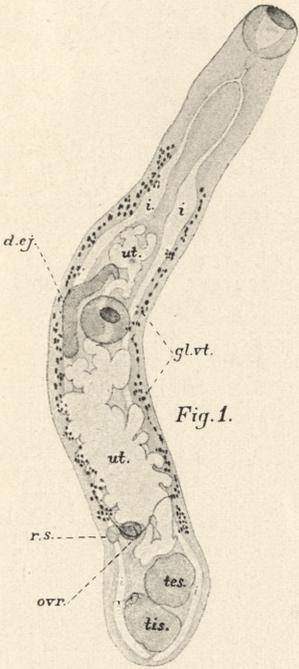


Fig. 1.

Fig. 3.

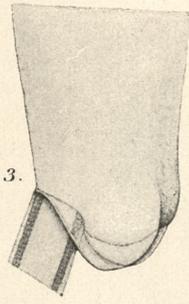


Fig. 4.

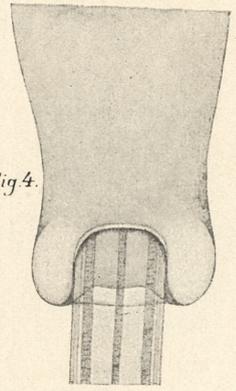


Fig. 5.

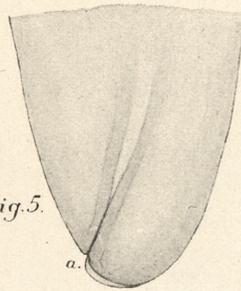


Fig. 6.

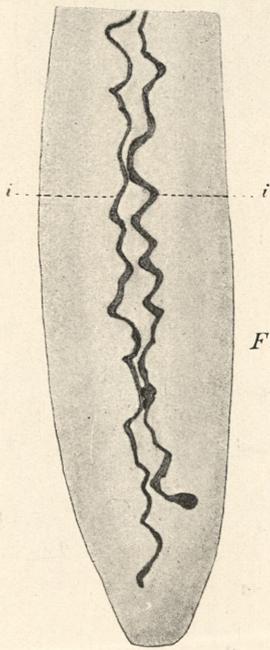


Fig. 2.

Fig. 7.

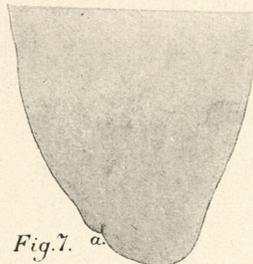


Fig. 8.

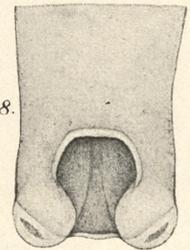


Fig. 11.

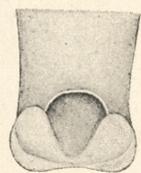
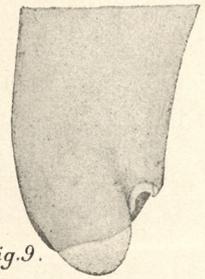


Fig. 10.



Fig. 9.



Rys. autor.

M. Kowalewski.

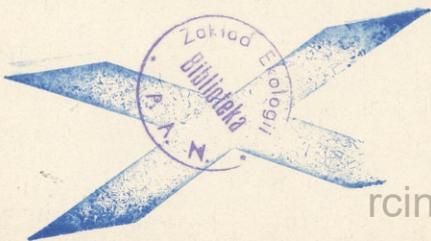


Fig. 12.

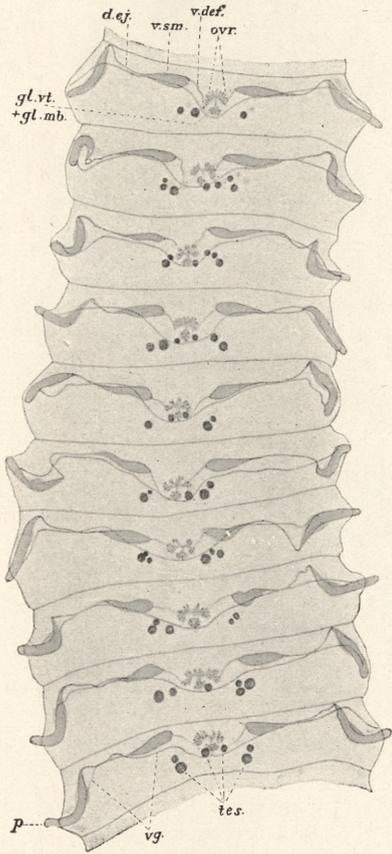


Fig. 13.

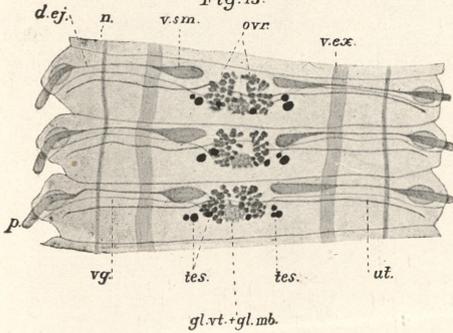
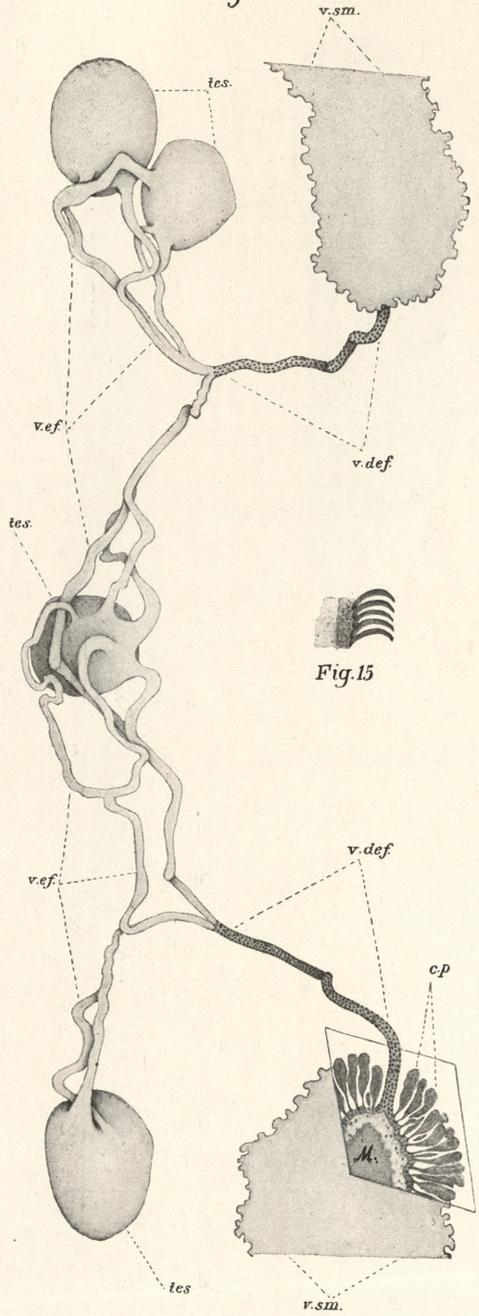


Fig. 14.



M. Kowalewski.



Fig. 16.

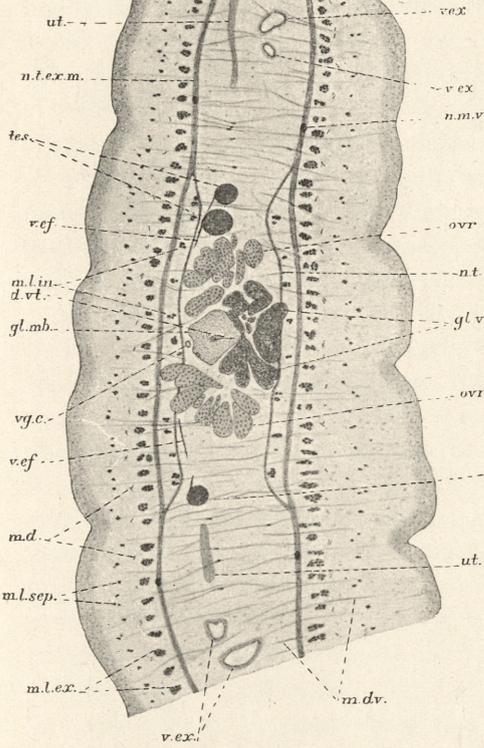


Fig 18

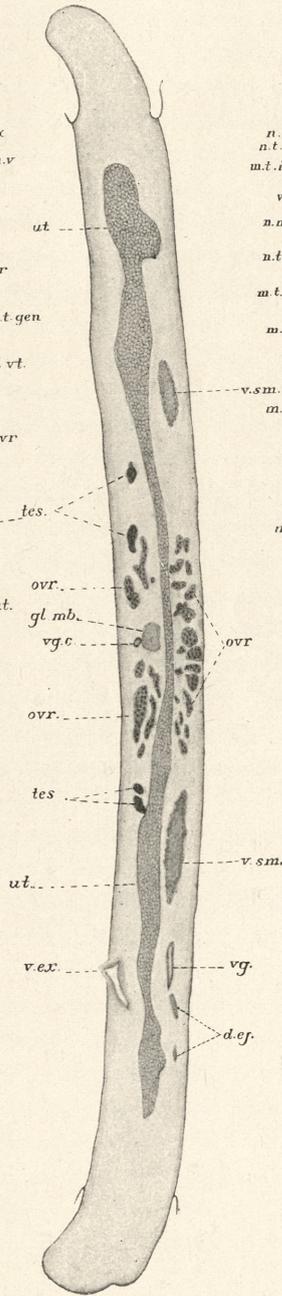


Fig. 19.

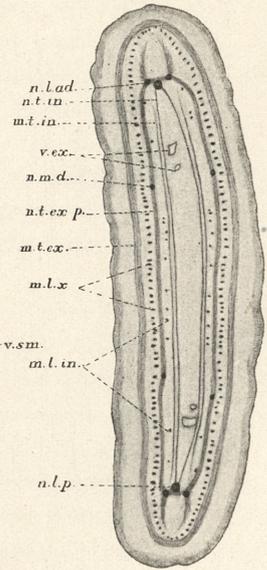
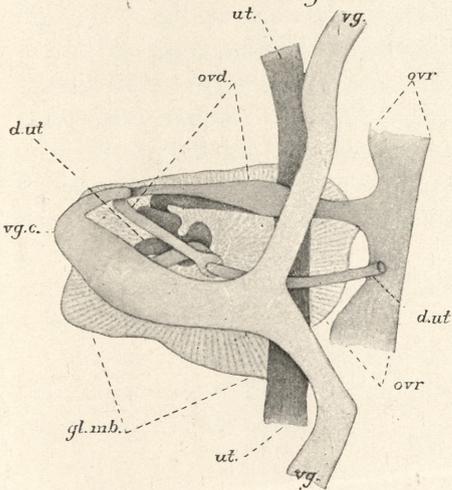
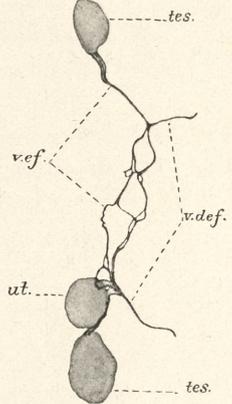


Fig. 17.



Rys autor.

Fig. 20



M. Kowalewski.



Nervous trunks. All the ten longitudinal nerves and three transversal nervous rings, described by Cohn in *D. laevis* are also found in the worm in question. In addition to them one sees here still: 1) an inner thin nerve ring, lying on the boundary of the proglottides (fig. 19, n. n. t. in.), towards the inner transversal muscles, arising from the internal or principal lateral nerve; 2) shorter similar transversal nerves (fig. 16, n. gen.), which lie in the same horizontal plane, but in the middle of each proglottis, near the reproductive glands, and start from the middle external nervous ring, near the median longitudinal nerves extending towards the interior.

Reproductive organs. The most important difference between *D. laevis* and *D. sui-generis* consists in the number of the testes, vasa efferentia and vasa deferentia. Whilst in the former species there are only three testes, in *D. sui-generis* their number varies from 3 to 7. The common number is 5 to 6 (fig. 12, 13, tes.). A more important detail is that from each testis proceed several vasa efferentia, in various numbers, 2 to 5 (fig. 14, v. ef.). Winding many times and joining one another, they form a very much complicated net of canals, which opens into the proximal ends of both vasa deferentia (fig. 14, v. def). It is interesting to note that those proglottides which do not possess the middle testis (fig. 14) contain nevertheless a similar net (fig. 20, r. ef.), a fact which can only be explained by the supposition that the testis disappeared, leaving however its vasa efferentia.

The author considers the cells surrounding the seminal vesicle (fig. 14, c. p.) as glandular, producing an albuminoide fluid, in which the spermatozoons swim and which fills the vesicle, also the second little vesicle near the circus-pouch and, in the older proglottides, both vaginae and the vagina communis (fig. 17). The hooks upon the cirrus (fig. 15) resemble those in *D. laevis* according to the description of Jacobi (and contra Cohn). In the structure of the female reproductive organs there is no great difference between *D. laevis* and *D. sui-generis*. The vagina communis is here however not „eine kleine Erweiterung“, as Cohn says (2) in *D. laevis*, but a large long canal, as shewn by fig. 17 (vg. e.).

All the other details in the anatomy of the tapeworm in question are evident from the adjoined drawings (fig. 12—20) and require no further explanation.

37. M. STANISŁAS MAZIARSKI. O stosunku mięśni do naskórka u skorupiaków. (*Sur les rapports des muscles et de la cuticule chez les Crustacés*). Note présentée par M. Nap. Cybulski m. t.

(Planche XIV).

A l'occasion de nos recherches sur les organes segmentaires des Vers de terre, nous avons examiné des coupes de la peau de ces animaux et nous avons observé de minces fibrilles musculaires qui proviennent de faisceaux musculaires sous-cutanés, passent dans la couche épithéliale et se terminent librement entre les cellules cylindriques qui la forment. Cette observation nous a conduit à étudier de près le mode d'insertion des muscles à la cuticule de la peau. Nous avons choisi les Arthropodes comme objet d'études pour avoir affaire à des muscles striés et pour pouvoir déterminer d'une façon plus précise leur terminaison sur la cuticule, n'ayant eu sous les yeux, dans nos premières recherches, que les muscles des Annelides qui n'ont pas de striation transversale.

Comme objet de recherches, nous nous sommes servi des Crustacés que nous avons recueillis pendant notre séjour au laboratoire russe de Zoologie à Villefranche s/Mer. Nous avons utilisé les petits Crustacés, comme *Crevettes*, *Copépodes*, *Phronima sedentaria*; les objets les plus favorables pour nos recherches ont été les *Mysis*, sp. *Mysis Telson*, *Mysis elongata*, dont quelques exemplaires nous ont été fournis par nos amis, M. Prenant de Nancy et M. Godlewski de Cracovie; nous leur en exprimons ici notre reconnaissance.

Les matériaux en question ont été fixés dans divers liquides: liquide de Mann, de Flemming, de Vom Rath, sublimé acétique et d'autres; comme coloration nous nous sommes servi surtout de l'hématoxyline ferrique (méthode d'Heidenhain), qui nous a donné les meilleurs résultats et les images les plus démonstratives.

La question que nous voulons traiter dans notre court exposé, n'est pas tout à fait nouvelle; elle a déjà servi de thème aux travaux de quelques auteurs.

Nicolas¹⁾ a fait des recherches sur les rapports des muscles et de l'épithélium dans le pharynx du Péripate; il a vu des petits

¹⁾ Nicolas A. Sur les rapports des muscles et des éléments épithéliaux dans le pharynx du Péripate (*Peripatus capensis*). Revue biol. d. Nord de la France. T. II. 1889—1890.

faisceaux musculaires s'approcher de la base des cellules épithéliales, se diviser ensuite en branches minces et délicates et pénétrer dans la couche épithéliale, où elles s'insinuent entre ses cellules constitutives; ces minces fibrilles musculaires entourent les cellules et semblent former une sorte de réticulum à leur surface. Il n'existe pas de continuité entre les fibrilles musculaires et les fibrilles protoplasmiques qui se trouvent dans les cellules épithéliales. L'auteur n'a pas observé non plus la réunion de ces fibrilles avec la cuticule qui recouvre la surface libre des cellules épithéliales.

Nous trouvons dans les travaux de Frenzel¹⁾ et de Ide²⁾ des observations presque analogues. Le premier a fait des recherches sur le canal digestif des Crustacés et a observé la pénétration des fibres musculaires striées dans l'épithélium, où elles se terminent par de minces fibrilles lisses „*faserige Muskelsehnen*“, qui s'attachent à la cuticule. Ces fibrilles tendineuses se logent entre les cellules et ne possèdent pas de striation transversale, — quoique, dans la figure 8., Frenzel dessine une fibre musculaire striée qui se continue entre les cellules épithéliales jusqu'à la cuticule, où elle s'attache.

Ide conclut dans le même sens; les fibres musculaires viennent s'attacher à la cuticule, elles se placent entre les cellules épithéliales et montrent une striation (v. l. c. la fig. 64), ou bien cette striation disparaît, quand la fibre musculaire parvient à la base de la cellule épithéliale.

La méthode de recherche de ces deux auteurs est assez grossière et ne donne pas de renseignements plus précis au sujet de l'insertion des muscles sur la cuticule.

Les résultats des auteurs que nous venons de citer représentent une première manière de voir sur la question qui nous intéresse; — l'autre manière de voir est représentée par List, Leydig et Duboscq.

List³⁾ dans ses recherches sur les Crustacés Décapodes, re-

¹⁾ Frenzel J. Ueber den Darmcanal der Crustaceen nebst Bemerkungen zur Epithelregeneration. Arch. f. mikr. Anat. Bd. XXV.

²⁾ Ide M. Le tube digestif des Édriophthalmes. Etude anatomique et histologique. La Cellule, T. 8. 1892.

³⁾ List, Th. Morphologisch-biologische Studien über den Bewegungsapparat der Arthropoden. 2 Theil. Die Decapoden. Mittheil. d. Zoolog. Station zu Neapel. Bd. XII.

cherches plutôt physiologiques, croit que les fibres musculaires s'attachent directement aux cellules épithéliales qui produisent la cuticule („*Hypodermiszellen*“).

Leydig¹⁾ affirme que les fibrilles musculaires striées s'unissent avec des fibrilles protoplasmiques, différenciées dans les cellules épithéliales, et que la réunion des fibres musculaires à la cuticule se fait par l'intermédiaire de ces fibrilles protoplasmiques intracellulaires.

Duboscq²⁾ a constaté que, dans les endroits où les muscles viennent s'insérer sur la cuticule, la membrane basilaire fait défaut et que les fibrilles musculaires se continuent directement avec celles des cellules épithéliales; elles perdent avant cette réunion leur striation ordinaire.

D'après les recherches de ces auteurs, les fibrilles musculaires finissent à la base des cellules épithéliales; à ce niveau elles s'attachent aux fibrilles protoplasmiques qui s'insèrent elles-mêmes à la cuticule chitineuse.

Dernièrement un court travail de Nils Holmgren³⁾ traite la question de l'insertion des fibres musculaires sur la chitine chez les Diptères, comme *Musca vomitoria*, *Sarcophaga carnaria*, larves de *Chironomus* et d'autres; trois modes variés d'insertion s'y trouvent décrits.

1^o La cellule musculaire repousse les cellules-mères qui produisent la chitine, perd sa striation caractéristique, se divise en un nombre considérable de minces fibrilles qui s'enfoncent dans la partie superficielle de la chitine.

2^o Les cellules musculaires parviennent jusqu'à la couche épithéliale, perdent à cet endroit leur striation et se divisent en un grand nombre de minces fibrilles primitives qui pénètrent entre les cellules épithéliales et s'enfoncent quelque peu dans la chitine.

Le troisième mode d'insertion des fibrilles musculaires est le suivant: Les fibrilles musculaires parviennent jusqu'à la couche épithéliale, perdent comme ailleurs leur striation et se divisent en un certain nombre de fibrilles plus minces, qui pénètrent dans les cellules épithéliales-mêmes et s'attachent à la couche chitineuse.

¹⁾ Leydig, Fr. Zelle und Gewebe. Bonn, 1885.

²⁾ Duboscq, O. Recherches sur les Chilopodes. Arch. de Zoologie expériment. T. VI. 1898.

³⁾ Holmgren Nils. Ueber das Verhalten des Chitins und Epithels zu den unterliegenden Gewebearten bei Insecten. Anatom. Anzeig. Jg. XX.

La structure des cellules-mères de la chitine est fibrillaire; des fibrilles plus ou moins distinctes parcourent le corps cellulaire suivant son axe, mais elles ne se continuent pas avec les fibrilles musculaires; ces dernières sont des éléments tout à fait étrangers dans le corps cellulaire. Dans ces trois cas les fibrilles musculaires concourent à former la cuticule chitineuse.

Les recherches que nous avons entreprises chez les Crustacés nous ont persuadé que l'insertion des muscles sur la cuticule se fait, chez ces animaux, d'une façon tout à fait autre; les images que nous offrent nos préparations ressemblent beaucoup à celles que donnent Leydig, Duboscq ou Nils Holmgren, mais il nous semble qu'il faut déduire des faits observés une autre interprétation que celle de Holmgren.

Nous voulons tout d'abord décrire les particularités observées sur nos préparations, puis, après avoir présenté nos résultats, nous ferons quelques déductions théoriques.

L'objet de nos recherches ont été les muscles sous-cutanés qui s'attachent à la cuticule dans certains points du corps de l'animal. Pour se faire une idée grossière de cette insertion, il suffit de regarder attentivement la figure 1. sur la planche XIV. Le premier coup d'oeil jeté sur cette figure nous enseigne que nous avons affaire à des cellules musculaires bien délimitées l'une de l'autre par des lignes un peu obliques; celles-ci courent le long de ces cellules et s'attachent par des épaisissements triangulaires à la peau, c'est-à-dire à la couche épithéliale, dans laquelle nous trouvons semés assez régulièrement les noyaux des cellules épithéliales, cellules-mères de la cuticule.

Les lignes obliques, limitant les cellules musculaires, fortement colorées, ne représentent rien autre que les coupes longitudinales du sarcolemme, gaine sans structure spéciale, qui constitue un cylindre dans lequel se trouvent le sarcoplasme et les fibrilles musculaires différenciées. Le sarcoplasme possède sur nos préparations une structure grossièrement granuleuse ou fibrillaire; des fibrilles épaisses, très peu colorables, parcourent la cellule surtout dans le sens transversal et s'attachent d'un côté au sarcolemme, de l'autre aux fibrilles musculaires, à l'endroit de la ligne Z. Les cellules musculaires (au nombre de six dans notre figure) possèdent des noyaux ovales, vésiculeux, qui se placent à côté des fibrilles musculaires ou entre elles; un sarcoplasme plus granuleux les entoure.

La fig. 2. nous présente une cellule musculaire qui s'attache par ses deux extrémités à la cuticule. Le sarcolemme entoure le sarcoplasme qui offre un aspect granuleux; celui-ci renferme des noyaux semés çà et là dans sa masse et des fibrilles musculaires, régulièrement striées. Sur l'une des faces de la cellule musculaire, le sarcolemme s'attache à la membrane basilaire de la couche épithéliale.

Les fibrilles musculaires montrent une striation très nette, très régulière et possèdent la structure bien connue de la substance musculaire; elles s'attachent à la couche épithéliale de la manière suivante: Entre l'épithélium et le tissu musculaire, qui se compose d'un certain nombre de cellules, existe une limite distincte, un peu onduleuse, comme nous la voyons sur la figure 1.

Cette ligne est dans certains endroits tout à fait homogène, dans les endroits, au contraire, qui correspondent aux insertions des fibrilles musculaires, elle se compose d'une grande quantité de petits points (corpuscules), plus colorables que le reste de la ligne. De ces points partent de minces fibrilles qui traversent les cellules épithéliales et atteignent la face interne de la cuticule; d'où l'impression que les fibrilles intraépithéliales sont des prolongements directs des fibrilles musculaires ou que les cellules musculaires se réunissent directement avec les cellules épithéliales et que les fibrilles musculaires se continuent avec les fibrilles cytoplasmiques des éléments épithéliaux. C'est ce que doivent élucider nos recherches.

Il faut d'abord appeler l'attention sur la structure de la cuticule et des cellules épithéliales qui la produisent.

La cuticule chitineuse montre d'ailleurs un aspect tout à fait homogène; mais on peut parfois trouver dans son épaisseur deux ou trois couches parallèles qui se distinguent par leur réaction variable vis-à-vis de l'hématoxyline ferrique (v. les figures 3 et 4). La partie externe renferme des grains de pigment et des sels calcaires en quantité assez variable, aussi montre-t-elle une structure granuleuse. Les couches plus voisines des cellules-mères de la cuticule présentent à un plus fort grossissement une structure légèrement striée; cet aspect est dû à des lames très minces, rangées les unes sur les autres parallèlement à la surface des cellules épithéliales. Dans beaucoup de préparations et avec les plus forts grossissements, la cuticule ne présente aucune structure.

Quant à l'épithélium, il n'est pas toujours bien développé; ce

fait empêche de préciser d'une part la structure des cellules épithéliales, d'autre part les relations qui existent entre les cellules et la cuticule et entre les cellules épithéliales et les cellules musculaires.

Chez les animaux plus jeunes, chez lesquels la couche épithéliale, à cause d'une élaboration active de la cuticule, est beaucoup plus épaisse, on peut voir ces éléments avec plus de netteté. La couche épithéliale, dans ces conditions, est formée par une rangée de cellules qui possèdent la forme de cylindres, ordinairement plus larges que hauts. Les limites entre les cellules ne sont pas bien visibles; on pourrait plutôt croire que nous avons affaire à un syncytium cellulaire, dans lequel nous trouvons semés à intervalles assez réguliers, de grands noyaux vésiculeux, ovoïdes, renfermant une quantité restreinte de chromatine nucléaire (v. la fig. 3).

Il faut des préparations bien différenciées après coloration à l'hématoxyline ferrique pour se faire une idée exacte de la structure du protoplasme des cellules épithéliales. Leur cytoplasme montre une constitution évidemment fibrillaire, à cause de la différenciation dans le corps cellulaire de fibrilles plus épaisses, plus fortement colorées qui sont situées dans un protoplasme fondamental également fibrillaire; mais les fibrilles protoplasmiques sont très fines, très peu colorées (v. la fig. 2), on pourrait même croire le plus souvent que le protoplasme fondamental est amorphe ou granuleux.

Les fibrilles en question parcourent le corps cellulaire séparément ou réunies en faisceaux de forme souvent conique (v. la fig. 3); elles remplissent uniformément la cellule ou laissent partiellement des endroits libres; elles sont presque toujours rangées perpendiculairement dans le corps cellulaire et entourent les noyaux. Les fibrilles parviennent jusqu'à la surface libre de la cellule, où elles se terminent par de petits épaississements qui atteignent la surface interne de la cuticule sans y pénétrer. Elles possèdent une épaisseur assez variable; les unes sont plus fines, les autres plus épaisses, elles présentent toutes la même réaction caractéristique et se colorent spécifiquement par l'hématoxyline ferrique.

Quand nous examinons les cellules épithéliales sur une grande quantité de préparations, nous voyons que les filaments intracellulaires ne sont pas toujours aussi visibles, que leur quantité est assez variable, que leur développement est beaucoup plus accusé, si la coupe passe près de l'endroit où les muscles s'attachent à la cu-

ticule et que leur arrangement dans la cellule devient dans ce cas de plus en plus régulier. Il suffit de jeter un coup d'oeil sur la fig. 3. pour nous persuader que la différenciation de ces filaments caractérisés par leur forme, leur réaction colorante et leur relation avec la charpente cytoplasmique n'est pas accidentelle, mais qu'elle est causée par la fonction spécifique des cellules qui les renferment. Les propriétés morphologiques que possèdent ces filaments nous montrent aussi que nous avons affaire à des différenciations spéciales du protoplasme, à du protoplasme supérieur, qui se présente dans les cellules épithéliales sous la forme de filaments, orientés dans un sens défini; — ce sont des *Tonomitomes*, nom que nous avons donné aux filaments correspondants des cellules trouées des néphridies des Vers de terre¹⁾ et que Heidenhain²⁾ a donné également aux filaments des cellules épithéliales de l'intestin grêle de la Grenouille.

La question du protoplasme supérieur est traitée plus complètement dans notre travail cité plus haut, nous décrirons plus loin la fonction spéciale des *Tonomitomes* dans les cellules sous-cuticulaires des Crustacés, après avoir étudié les rapports de ces filaments avec des fibrilles musculaires.

Examinons la figure 4. de la planche XIV; elle nous présente, sous un grossissement beaucoup plus fort que la fig. 1., une cellule musculaire à l'endroit où elle s'attache sur la cellule épithéliale.

Dans la cellule musculaire délimitée par le sarcolemme, nous voyons que le sarcoplasme présente un aspect fibrillaire, ses fibrilles constitutives forment une sorte de réticulum, dans lequel sont plongées des fibrilles musculaires régulièrement striées. A côté des fibrilles se trouvent deux noyaux, grands, vésiculeux, de forme ovale, avec un nucléole assez volumineux et la chromatine nucléaire sous forme d'un réticulum. Le sarcolemme, comme on le voit bien, s'accole intimement à la membrane de la cellule épithéliale par un épaississement triangulaire, coloré plus fortement que les parties voisines. A ce niveau nous constatons aussi une plus grande quantité de sarcoplasme qui se présente sous la forme de minces

¹⁾ Maziarski S. Recherches cytologiques sur les organes segmentaires des Vers de terre. Arch. polon. d. Scienc. biolog. et medic. T. II. 1903.

²⁾ Heidenhain M. Ueber die Structur der Darmepithelzellen. Arch. f. mikr. Anat. Bd. LIV. 1899.

lamelles, fangées parallèlement à la surface basale de la cellule épithéliale.

La limite entre la cellule musculaire et la cellule épithéliale est tout à fait nette; elle est formée par une ligne homogène sauf à l'endroit où les fibrilles musculaires viennent s'attacher à la cuticule; — elle est alors composée de petits corpuscules allongés. Des fibrilles partent de ces corpuscules dans deux directions: d'un côté des fibrilles minces et délicates, peu colorables qui traversent le corps de la cellule épithéliale et s'attachent par de petits épaisissements à la surface interne de la cuticule; de l'autre des fibrilles plus grosses, qui se continuent dans la cellule musculaire et montrent une striation tout à fait régulière. Les premières représentent les filaments dont nous avons parlé plus haut, les *Tonomitomes*, qui se sont différenciés dans le corps cellulaire; les autres sont les fibrilles musculaires.

Il existe donc un accolement des fibrilles musculaires avec les Tonomitomes de la cellule épithéliale au niveau des corpuscules allongés; cet accolement se fait pour les fibrilles musculaires à l'endroit de la ligne Z, ce qu'on voit très facilement sur les figures 4 et 5.

La fig. 5 représente quelques fibrilles musculaires à l'endroit où elles s'attachent sur la cellule épithéliale. Cette figure, dessinée à un grossissement très fort, montre encore quelques particularités sur la structure de la substance musculaire et sur les rapports qui existent entre les fibrilles musculaires et les filaments de la cellule épithéliale. L'élément musculaire de chaque fibrille se compose de deux disques de substance anisotrope, séparés l'un de l'autre par de la substance isotrope, de deux disques de substance isotrope, qui se trouvent aux deux extrémités des disques anisotropes; enfin l'élément musculaire est fermé par la ligne Z. La ligne Z du dernier élément musculaire répond au corpuscule allongé qui se trouve dans la ligne limitant la cellule épithéliale et la cellule musculaire. Chaque fibrille musculaire est en rapport avec un filament de la cellule épithéliale. Il existe entre les deux formations une différence évidente: les Tonomitomes sont des filaments beaucoup plus minces, peu colorables et toujours homogènes, tandis que les fibrilles musculaires montrent partout une structure caractéristique.

Les préparations obtenues sur des *Copépodes* (fig. 6) et sur la *Phronima sedentaria* (fig. 7) montrent les mêmes relations entre les cellules musculaires et la couche épithéliale.

Partout les fibrilles musculaires se continuent, au niveau de la membrane cellulaire et par l'intermédiaire de corpuscules allongés avec des filaments différenciés dans le corps de la cellule épithéliale.

Après avoir décrit et démontré d'une façon précise le mode d'insertion des cellules musculaires sur les éléments épithéliaux, il nous faut encore répondre à quelques questions qui se posent nécessairement. On pourrait croire peut-être que les filaments intracytoplasmiques sont des prolongements directs des fibrilles musculaires et qu'ils diffèrent de ces dernières seulement par le défaut de striation, enfin que les corpuscules allongés correspondent à la ligne Z du dernier élément musculaire et ne forment pas les points épaissis d'accolement de deux substances différentes.

Nous n'avons aucune raison d'accepter la continuité directe des fibrilles musculaires avec des filaments intracellulaires, continuité qui se ferait de façon que les fibrilles musculaires pénétrassent dans le corps de la cellule épithéliale et s'attachassent directement à la cuticule. Dans ces conditions, la membrane de la cellule épithéliale serait perforée par les fibrilles musculaires et ne présenterait pas les contours nets que nous voyons sur les préparations. Les épaississements seraient moins réguliers et beaucoup plus petits, car ils correspondraient seulement aux lignes Z; celles-ci, même sur des préparations observées à un très fort grossissement, sont constituées par des formations évidemment plus petites et qui se montrent sous la forme d'une ligne et non d'un corpuscule (v. la fig. 5).

Quand nous examinons soigneusement la limite entre deux cellules aussi dissemblables, — épithéliale et musculaire, — nous voyons que la membrane est bien conservée sur toute sa longueur, qu'elle renferme des épaississements allongés qui sont constitués par l'accolement de deux fibrilles différentes par leur aspect et leur structure; les unes sont en effet striées, les autres sont tout à fait homogènes; elles montrent aussi des différences dans leur épaisseur et leur colorabilité.

Les unes et les autres sont formées par une substance différente: les fibrilles musculaires par une substance contractile qui se caractérise par l'arrangement régulier des disques anisotropes et isotropes; les filaments — *Tonomitomes* — différenciés dans le corps de la cellule épithéliale, par une substance protoplasmique, résistant

aux actions mécaniques. Les premières possèdent la contractilité; les autres ont pour fonction de fournir au corps de la cellule épithéliale une résistance plus grande aux actions mécaniques, produites par la contraction des fibrilles musculaires. L'insertion de ces dernières à la membrane de la cellule épithéliale a déterminé dans le corps cellulaire la différenciation de formations filamenteuses de protoplasme supérieur, de *Tonomitomes*, qui parcourent le corps cellulaire dans un sens correspondant à la direction des fibrilles musculaires. Les filaments en question s'attachent d'un côté à la cuticule, de l'autre ils se continuent par l'intermédiaire de corpuscules allongés avec des fibrilles musculaires qui aboutissent à la membrane cellulaire au niveau de la ligne Z. Cette orientation des *Tonomitomes* a pour résultat de parer à l'inconvénient de l'insertion des fibrilles musculaires sur la cuticule par l'intermédiaire des éléments épithéliaux.

Les propriétés morphologiques sur lesquelles nous avons insisté plus haut, les rapports qui existent entre ces filaments et le protoplasme fondamental d'un côté, et les fibrilles musculaires de l'autre côté, nous permettent de les considérer comme des formations du protoplasme supérieur, différentes de la substance musculaire et chargées d'une fonction spéciale.

On pourrait encore supposer que les filaments intracellulaires représentent les minces tendons des fibrilles musculaires. Mais les filaments en question se rencontrent non seulement dans les endroits où a lieu l'insertion des fibrilles musculaires, mais aussi dans les autres parties de la couche épithéliale (v. la fig. 3); c'est surtout au niveau des points d'insertion que leur disposition devient plus régulière et correspond à la direction de l'insertion et de la contraction des fibrilles musculaires; dans les autres régions au contraire leur orientation peut être assez variable.

On peut donc affirmer que les filaments intraprotoplasmiques et les fibrilles musculaires sont des éléments tout à fait différents, qui sont réunis par l'intermédiaire des corpuscules épaissis qui se trouvent dans la membrane de la cellule épithéliale.

C'est à ce point de vue que l'opinion de Holmgren (l. c.) diffère de la nôtre; cet auteur fait pénétrer les fibrilles musculaires qui ont perdu leur striation, dans les cellules épithéliales; nous, au contraire, attribuons aux fibrilles qui s'accolent aux fibrilles musculaires, une autre signification. Holmgren a-t-il donné

des arguments convaincants pour établir que les fibrilles qui pénètrent dans les cellules épithéliales sont des fibrilles musculaires et par conséquent contractiles? La striation n'est-elle pas caractéristique pour une fibrille musculaire? Peut-être sur l'objet utilisé par N. Holmgren pour ses recherches, les prolongements des fibrilles musculaires pénétraient-ils dans les cellules épithéliales; mais le défaut de striation nous laisse des doutes sur la nature musculaire qu'il leur attribue.

Les résultats de nos recherches se présentent de façon suivante: Chez les Crustacés, l'insertion des muscles à la cuticule se fait par l'intermédiaire des cellules épithéliales, qui sont les cellules-mères de la cuticule. Dans ces cellules se différencient des filaments de protoplasme supérieur, que nous appelons les *Tonomitomes*; d'un côté ils s'attachent à la cuticule, de l'autre aux fibrilles musculaires au niveau de la membrane cellulaire, — les parcelles musculaires aboutissent à cette membrane par la ligne Z. Le rôle de ces filaments est de fixer les fibrilles musculaires à la cuticule et d'agir comme des formations plus résistantes contre les actions mécaniques, causées par la contraction des fibrilles musculaires.

Explication des figures de la planche XIV.

Toutes les figures ont été dessinées à la chambre claire d'Abbé; la table à dessiner à la hauteur de la platine du microscope.

Fig. 1. *Mysis Telson*. Coupe perpendiculaire passant par le point d'attache des cellules musculaires à la cuticule. Grossiss. Zeiss. obj. 40, 0,95, oc. 4. Fixations liqu. de Vom Rath. Nous voyons six cellules musculaires bien délimitées l'une de l'autre par le sarcolemme; dans le sarcoplasme sont semés çà et là des noyaux, on y voit aussi les fibrilles musculaires régulièrement striées. Sous la cuticule, il existe une couche de cellules épithéliales avec des noyaux semés irrégulièrement. Dans les cellules, au point d'insertion des fibrilles musculaires, nous voyons de minces fibrilles qui traversent toute l'épaisseur de la cellule épithéliale et atteignent la surface interne de la cuticule. Le sarcolemme des cellules musculaires s'accole par des épaissemments triangulaires sur la membrane homogène des cellules épithéliales; dans cette membrane existent aussi de petits corpuscules; ce sont les points d'accolement des fibrilles musculaires et des filaments intraprotoplasmiques.

Fig. 2. *Mysis elongata*. Une cellule musculaire qui s'attache au niveau de ses deux extrémités sur la cuticule. Même grossissement. Fixat. liqu. de Mann. D'un côté, la cellule musculaire s'accole au moyen de son sarcolemme à la couche épithéliale, son autre face est libre. Au niveau des deux extrémités, les fibrilles musculaires s'attachent aux filaments différenciés dans le corps des cellules épithéliales. Le sarcoplasme présente un aspect granuleux, il renferme des noyaux et des fibrilles musculaires régulièrement striées.

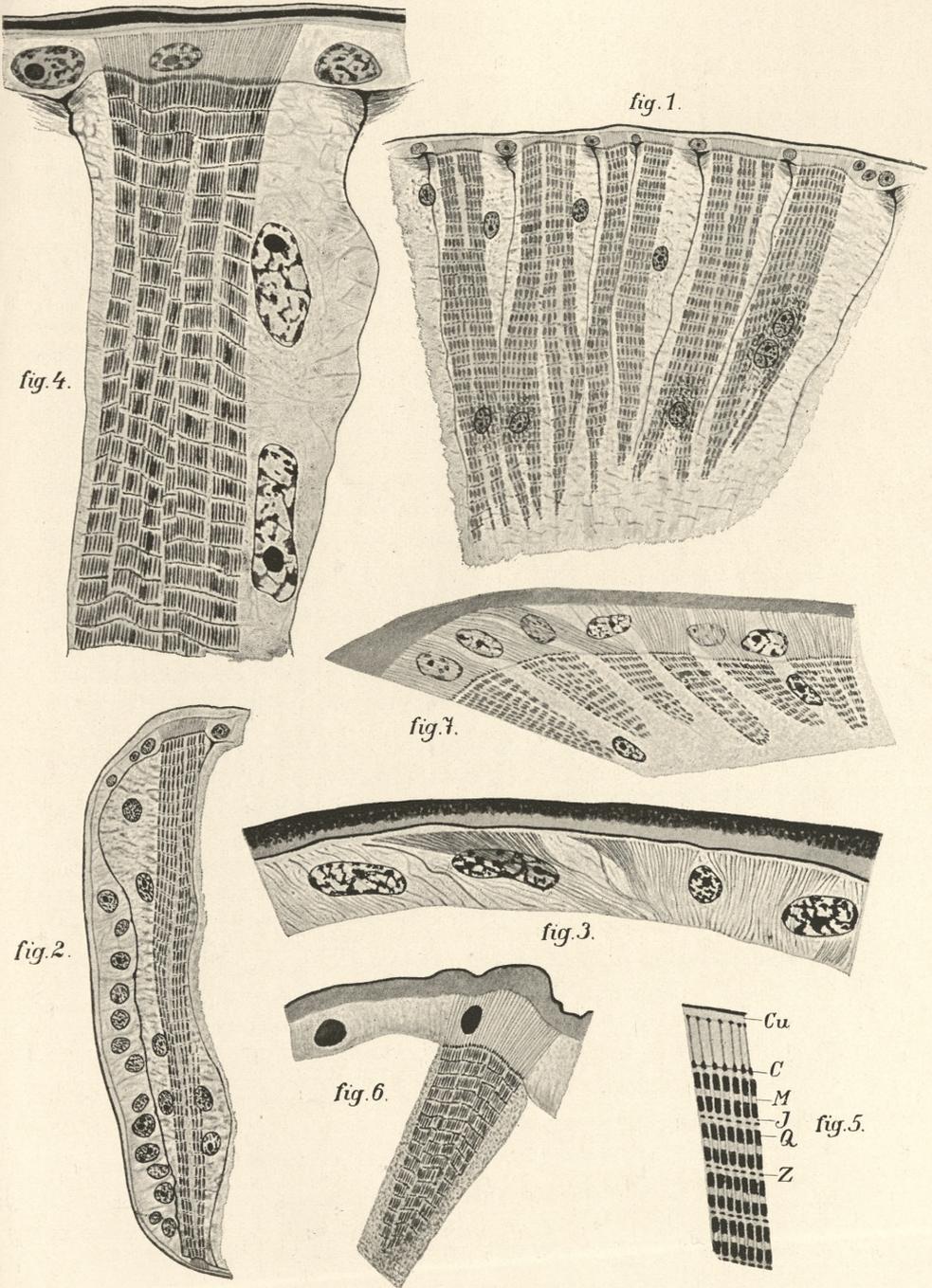


fig. 4.

fig. 1.

fig. 7.

fig. 2.

fig. 3.

fig. 6.

fig. 5.

St. Maziariski del.



Fig. 3. *Mysis Telson*. Coupe perpendiculaire passant par la cuticule et la couche épithéliale sous-jacente. Grossiss. Immers. homog. Zeiss. 1:30, 2:0, oc. 6. Liqu. de Mann; coloration à l'hématoxyline ferrique. Les cellules épithéliales forment une sorte de syncytium, leurs limites ne sont pas visibles. Dans le protoplasme des cellules, les filaments — *Tonomitomes* — plus ou moins épais sont rangés perpendiculairement ou obliquement; dans une cellule se trouve un cône formé de fibrilles.

Fig. 4. *Mysis Telson*. Coupe perpendiculaire du point d'insertion d'une cellule musculaire. Fixat. liquide de Vom Rath. Grossissem. Immers. homog. Zeiss, 1:30, 2:0, oc. 6. La cellule musculaire, délimitée par le sarcolemme, dans lequel se trouve le sarcoplasme réticulaire, des noyaux et des fibrilles musculaires régulièrement striées, s'accôle à la membrane des cellules épithéliales par des épaissements triangulaires du sarcolemme. Dans la cellule épithéliale courent de minces fibrilles qui s'accolent avec des fibrilles musculaires en des points plus épais; cet accolement se fait pour les parcelles musculaires au niveau de la ligne Z. Les filaments intraépithéliaux s'attachent à la cuticule. Le noyau couvert par les filaments est coupé un peu obliquement. Dans la cuticule, on peut distinguer cinq lamelles différentes par leur coloration.

Fig. 5. *Mysis elongata*. Coupe perpendiculaire passant par le point d'insertion d'une cellule musculaire. Fixat. Liqu. de Mann; coloration à l'hématoxyline ferrique. Grossissem. Immers. apochr. Zeiss, 1:30, 2:0, oc. 12. La figure représente quatre parcelles musculaires, dont chacune se compose de deux disques de substance anisotrope Q, séparés par la substance isotrope M, de deux disques de substance isotrope I et des lignes Z aux deux extrémités. Au niveau de la ligne Z de la dernière parcelle, se trouve un corpuscule allongé C, qui est le point d'accrolement de la parcelle musculaire avec le filament différencié dans la cellule épithéliale. Les filaments sont beaucoup plus minces et très peu colorés; ils s'attachent à la cuticule (Cu) avec des petits épaissements.

Fig. 6. *Copépodes*. Coupe perpendiculaire au niveau du point d'insertion d'une cellule musculaire. Liqu. de Mann, coloration à l'hématoxyline ferrique. Grossiss. Immers. homog. Zeiss, 2:0, 1:30, oc. 6. Sous la cuticule assez épaisse nous voyons une rangée de cellules épithéliales avec des noyaux fortement colorés. Une cellule musculaire avec le sarcoplasme granuleux s'attache à la membrane de la cellule épithéliale, dans laquelle se trouvent les corpuscules d'accrolement des deux sortes de fibrilles.

Fig. 7. *Phronima sedentaria*. Coupe perpendiculaire passant par l'insertion des muscles à la cuticule. Fixat. au Formol picrique, coloration à l'hématoxyline ferrique. Grossissem. Immers. homog. 1:30, 2:0, oc. 4. Nous voyons six cellules musculaires s'attacher par l'intermédiaire des filaments des cellules épithéliales sur la cuticule. La structure des fibrilles musculaires n'est pas aussi régulière que chez les *Mysis*, — mais on peut constater que là aussi les parcelles musculaires aboutissent à la membrane épithéliale au niveau de la ligne Z. Les noyaux des cellules épithéliales sont entourés par des filaments.

Laboratoire de Physiologie et d'Histologie de l'Université de Cracovie.

38. M. PHILIPPE EISENBERG. O przystosowaniu bakteryj do sił ochronnych zakażonego ustroju. (*Über die Anpassung der Bakterien an die Abwehrkräfte des infizierten Organismus*). (*Sur l'adaptation des microorganismes aux moyens de défense de l'organisme infecté*). Mémoire présenté par M. N. Cybulski m. t.

I. In Anbetracht der biologischen Rolle des *B. pyocyaneus* als fakultativen Parasiten erscheint die Seroreaktion berufen, gegebenen Falls darüber zu entscheiden, ob er nur als harmloser Saprophyt auf der Wunde vegetiert oder sich aktiv am Krankheitsprozess beteiligt hat. In einem Falle von tödlich verlaufender Wundinfektion konnte ein typischer *Pyocyaneus*stamm neben pyogenen Coccen und Pseudodiphtheriebacillen aus dem Wundsekret isoliert werden. Das Serum des betreffenden Patienten agglutinierte einen Laboratoriumstamm von *Pyocyaneus* sowie von *Fluorescens liquefaciens* in der Verdünnung von $\frac{1}{100}$ resp. $\frac{1}{200}$, während der aus dem Kranken isolierte Stamm auch bei $\frac{1}{2}$ nur Spuren von Agglutination zeigte. Die Agglutination des *Fluorescens liqu.* sowie die geringere Beeinflussung anderer zugehöriger der *Fluorescens*-Gruppe kann auf Gruppenagglutination zurückgeführt werden; die Inagglutinabilität des aus dem infizierten Organismus gezüchteten Stammes, die auch gegenüber *Pyocyaneus*-Immunserum vom Kaninchen konstatiert wurde, findet ihre Analogie in dem ähnlichen Verhalten der aus Typhuskranken gezüchteten Typhusstämme, wie es von zahlreichen Untersuchern beschrieben wurde. Praecipitierende Eigenschaften gegenüber praecipitablen *Pyocyaneus*-Filtraten konnten im Serum nicht nachgewiesen werden. Beim bakteriziden Versuch in vitro zeigte sich der aus dem Kranken gezüchtete Stamm resistent gegenüber der bakteriziden Wirkung des menschlichen Serums, während alle anderen *Pyocyaneus* — sowie *Fluorescens*-Stämme in ausgesprochener Weise abgetötet wurden. Das Blut des Kranken zeigte schon bei Lebzeiten des Kranken in vitro sowie bei der Autopsie in den Gefäßen selbst sehr prägnante Autoagglutination; das bei Lebzeiten dem Kranken entnommene Serum erwies sich als isoagglutinierend, während das nach dem Tode erhaltene derselben Blutart gegenüber inaktiv war. Die von S. Flexner behauptete ursächliche Rolle der Autoagglutination bei der Entstehung von hyalinen Thromben erscheint nach diesem Befund sehr zweifelhaft.

II. In Anbetracht der oben konstatierten Resistenz des aus dem infizierten Organismus gezüchteten *Pyocyaneus*stammes wurden nach dieser Richtung 4 aus Typhuskranken isolierte Typhusstämmen, u. zw. 3 aus Roseolen nach der Methode von Neufeld-Schmiedicke, 1 aus dem Blut nach Castellani-Courmont untersucht. Mit einem Typhusimmunserum vom Pferd (Wert $1/30\,000$ — $1/50\,000$) geprüft, wurden die Stämme bei $1/2000$ — $1/6000$ agglutiniert, einer davon gab selbst bei $1/100$ eine negative Reaktion. Der bakterizide Versuch wurde an jungen Bouillonkulturen im hängenden Tropfen angestellt und innerhalb 48—72 Stunden die Proben einer öfteren Beobachtung unterzogen. Die dazu verwendeten Sera stammten teils von Typhus-Kranken und Rekonvaleszenten teils auch von anderweitig Erkrankten, daneben wurden vergleichsweise normale Sera von Kaninchen und Pferden herangezogen; alle Sera wurden in möglichst frischem Zustande verwendet.

Als Vergleichsobjekt diente immer ein seit langer Zeit auf künstlichen Nährböden fortgezüchteter Laboratoriumstamm. Morphologisch konnten bei den bakteriziden Versuchen folgende Details beobachtet werden: bei starker Serumwirkung mit vollkommener Abtötung der Bakterien zerfielen die Stäbchen zu einem feinkörnigen, schwach lichtbrechenden Detritus, der zum teil nachträglich verschwand; daneben waren undeutliche Schatten von Stäbchen mit angezogenen Kontouren zu sehen, die meistens weiter unverändert blieben. Bei schwächerer Serumwirkung kam die Pfeiffer'sche Umwandlung zu Kügelchen zum Vorschein; in Übereinstimmung mit Radziewsky wird diese Erscheinung am besten als Ausdruck einer Wechselwirkung zwischen den bakteriziden Körpern und der noch lebenden Bakterienzelle aufgefasst; ein grosser Teil der dabei entstehenden Kügelchen ist noch lebensfähig und kann durch Vermehrung eine neue Kultur erzeugen. In seltenen Fällen beobachtet man, dass die Kügelchen zu grossen, stark lichtbrechenden, scharf begrenzten Kugeln von der Grösse eines Leukozyten und darüber heranwachsen, die in ihrem Inneren eigentümliche Differenzierungen ihres Inhalts aufweisen und einmal entstanden sich nicht weiter verändern; diese Gebilde dürften vielleicht als Schwellungsprodukte der Kügelchen aufgefasst werden, über ihre Entstehungsbedingungen kann vorläufig nichts Bestimmtes gesagt werden. Beim Vergleich der bakteriziden Serumwirkung auf die aus dem Organismus frisch gezüchteten Stämme und den Laboratoriumstamm ergab sich, dass während letzter

in prägnantester Weise abgetötet wurde, die ersten sich vollkommen resistent zeigten und von anfang an sich üppig vermehrten.

Die Resistenz zeigte sich quantitativ begrenzt, indem bei Verwendung von Typhusrekonvaleszenten-Seris, die stärker bakterizid wirken, auch diese Stämme beeinflusst wurden, jedoch in geringerem Grade und durch stärkere Serumkonzentrationen als der Laboratoriumstamm. Die Resistenz erstreckt sich auch auf die Wirkung der Sera anderer Tierarten, scheint hier jedoch weniger ausgesprochen zu sein als beim Menschenserum. Diese Resultate wurden auch durch einige zur Kontrolle angestellte bakterizide Plattenversuche bestätigt. Ihre Zurückführung auf eine Besetzung des Bakterienreceptoren für bakterizide Körper („Stomosierung der Stomiten“) die schon im Organismus oder in der Originalkultur stattgefunden hätte, erscheint in Anbetracht der Versuchsbedingungen unzulässig.

III. Aus obigen Untersuchungen ergibt sich im Zusammenhange mit den vorliegenden Forschungsergebnissen folgendes: Es ist von einer Reihe von Autoren festgestellt worden, dass aus dem infizierten Organismus (Milz, Abszesse, Blut, Roseolen) gezüchtete Typhustämme öfters eine herabgesetzte Agglutinabilität zeigen, das gleiche gilt von manchen aus Wasser isolierten Stämmen. Meine Untersuchungen bestätigen dies Verhalten von Typhusstämmen und zeigen eine analoge Erscheinung bei einem aus einem infizierten Organismus gezüchteten *Pyozaneus*stamme. Dasselbe berichtet in neuester Zeit Otto von manchen *Staphylococce*nstämmen. Es wird dadurch dargetan, dass die Agglutinabilität der Bakterien ebenso wie viele andere Artmerkmale eine in weiten Grenzen variierende Funktion ist. Die Untersuchungen von Tarchetti und Nicolle und Trénel zeigen, dass die Reaktion des Mediums, die Züchtungstemperatur, der Reichtum des Mediums an Nährstoffen einen grossen Einfluss auf diese Funktion ausüben können — auf diese Faktoren wird wahrscheinlich ihr Verhalten bei aus Wasser gezüchteten Typhusstämmen zurückzuführen sein.

Die geringe Agglutinabilität der aus dem infizierten Organismus gezüchteten Stämme ist wiederum als Ausdruck einer Anpassung der Bakterien an die Agglutinine des Organismus zu betrachten, da wir dank den Arbeiten von Ransom und Kitashima, Tarchetti, Walker und P. Th. Müller wissen, dass man durch Züchtung von Bakterien in agglutininhaltigen Medien ihre Agglutinabilität herabsetzen kann und Sacquépée dasselbe Resultat durch Züchtung in Collodium-

säckchen im Peritoneum immunisierter Tiere erreicht hat. Bezüglich des Mechanismus dieser Agglutinin-Immunität der Bakterien lässt sich vorläufig nicht entscheiden, ob sie auf einer Vermehrung der Agglutininreceptoren (Pfeiffer und Friedberger) oder einer Verminderung (P. Th. Müller) beruht. Die oben beschriebene Resistenz frisch aus dem infizierten Organismus gezüchteter Stämme wird wohl am besten ebenfalls als Folge einer Immunisierung der Bakterien gegen die bakteriziden Kräfte des Organismus aufgefasst. Zahlreiche Untersucher haben gezeigt, dass man durch Züchtung von Bakterien in normalem oder spezifischem bakterizidem Serum dieselben gegen die Bakterizidie des Serums immunisieren kann sowie dass dabei ihre Virulenz gegenüber der serumspendenden Tierart erhöht wird. Andererseits wissen wir, dass virulente Stämme sich von avirulenten gerade durch ihre Resistenz gegenüber bakteriziden Serumwirkungen unterscheiden, und sind geneigt darin das Wesen der Virulenz zu suchen. Endlich ist auch von Bedeutung, dass frisch aus dem infizierten Organismus gezüchtete Stämme sich gewöhnlich durch höhere Virulenz gegenüber avirulenten, längere Zeit auf künstlichen Nährböden fortgezüchteten auszeichnen. Der Grund der erhöhten Resistenz ist nach Danysz, Walker sowie Pfeiffer u. Friedberger in einer Vermehrung der Bakterienreceptoren für die bakteriziden Körper zu suchen. Diese Tatsachen sind dazu angetan, unsere Auffassung von der Infektion bedeutend zu modifizieren; wir wissen durch die Forschungen über die Immunität, dass neben den infizierenden Mikroben im Mechanismus der Infektion der lebende Organismus mit seiner generischen sowie individuellen, angeborenen und erworbenen Immunität eine höchst bedeutsame Rolle spielt. Aber nicht nur der Organismus passt sich den durch die Giftwirkungen der Mikroben gesetzten Veränderungen der Lebensbedingungen an, auch diese sind ihrerseits höchst anpassungsfähige Lebewesen, die sich den Abwehrkräften des Organismus im Verlaufe der Infektion anpassen und dadurch den Verlauf sowohl wie den Ausgang der Infektion mitbestimmen können.

Diese Anpassungsfähigkeit der Bakterien an die bakteriziden Kräfte ermöglicht den infizierenden Mikroben das Haften in einem Organismus, der ihnen gegenüber über wirksame bakterizide Kräfte verfügt. Speziell beim menschlichen Abdominaltyphus wird dadurch erst die Möglichkeit des Vorkommens von Bakterien im Blute sowie Entstehung von Metastasen in der Haut, den Nieren, dem Kno-

chenmark unserem Verständnis näher gebracht, Tatsachen, die bisher angesichts der starken bakteriziden Wirkung menschlichen Serums auf den Typhusbacillus unerklärlich waren. Auf dieselbe Weise erklärt sich das Vorkommen von lebenden Typhusbazillen in post-typhösen Abszessen u. dgl. Jahre lang nach Erlöschen des Krankheitsprozesses, trotzdem doch der Organismus in der Rekonvaleszenz über erhöhte bakterizide Kräfte verfügt. Endlich wird es angesichts dieser Tatsachen zweifelhaft, ob man der Entstehung von spezifischen bakteriziden Immunkörpern eine bestimmende Rolle in der Heilung des Typhus zuerkennen darf, ob nicht vielmehr die Entstehung einer antitoxischen Immunität die Grundlage dafür abgibt; sehen wir doch, dass trotz eingetretener Heilung die Bakterien lebend im infizierten Organismus persistieren und noch geraume Zeit nachher im Stuhl oder Urin nachgewiesen werden können. Für die aetiologische Behandlung des Typhus mittels spezifischen bakteriziden Immunserums folgt aus obigen Erörterungen der Grundsatz, den Organismus auf einmal mit einer grossen Menge von Immunkörper zu überschwemmen, um den Bakterien die Möglichkeit einer Anpassung zu benehmen. Endlich schränken diese Befunde die diagnostische Bedeutung der Pfeiffer'schen Probe ein, indem ein besonders gut angepasster, hochvirulenter Stamm, den wir gerade aus dem Organismus züchten, sich gegenüber der verwendeten Serumosis dank seiner Immunität resistent erweisen kann.

Aus dem hygienisch-bakteriologischen Institut der Jag. Univ. Krakau.
Vorstand Prof. O. Bujwid.

39. M. W. HEINRICH. **O funkcji błony bębenkowej.** (*Sur la fonction de la membrane du tympan*). Mémoire présenté par M. A. Witkowski m. t.

I.

On n'avait pas jusqu'à présent de données positives sur la fonction de la membrane du tympan et les opinions des savants à ce sujet sont très contradictoires.

Du temps de Johannes Müller, on pensait généralement que c'est par des changements de tension que la membrane du tympan s'accommode aux vibrations provenant du dehors, de telle manière

que les vibrations élastiques propres de la membrane s'accordent en caractère avec les vibrations extérieures.

C'est Rinné¹⁾ qui a tenté le premier, si je ne me trompe, d'étudier les vibrations de la membrane au moyen d'un petit manomètre, placé dans la partie extérieure de l'oreille. Il croyait pouvoir observer les vibrations de la membrane d'après les changements de la pression de l'air enfermé dans l'oreille extérieure et limité partiellement par la membrane. L'expérience a échoué. Au nombre des savants qui se sont occupés postérieurement de la question, il faut nommer en premier lieu Mach. Dans son travail „Zur Theorie des Gehörorganes“²⁾, il donne un aperçu sur les fonctions des diverses parties de l'organe de l'audition et s'exprime sur la fonction des muscles tensor tympani et stapedius de la manière suivante: „Je crois que cette fonction est aussi essentielle que la fonction accommodatrice de l'oeil, que les muscles indiqués sont toujours en fonction pendant l'audition attentive et que, d'après le changement de leur tension, on peut distinguer les tons et en suivre les variations, d'une manière analogue à celle dont l'oeil distingue les points et en suit les mouvements“.

Pour étudier d'une manière expérimentale l'accommodation de la membrane du tympan, Mach inventa la disposition suivante: on recouvre avec de la poussière métallique la membrane et on observe au microscope son image, obtenue avec une lentille convenablement choisie. L'expérience a fourni des résultats négatifs.

Helmholtz³⁾ ne supposait pas que la membrane du tympan possédât à chaque état de sa tension la faculté de réagir uniquement sur celles des vibrations qui correspondent à ses vibrations propres. Il n'a pas même discuté la possibilité de la fonction accommodatrice de la membrane et en parlant des conditions dans lesquelles les vibrations agissant sur la membrane sont transmises à l'appareil de Corti, il remarque seulement que l'amplitude des vibrations de la région centrale de la partie de la membrane qui est située entre l'anneau osseux et le manche du marteau est la plus grande, tandis que la force agissant sur l'osselet est plus grande que celle qui agit sur la région précédente de la membrane.

¹⁾ Prager Vierteljahresschrift für praktische Heilkunde, 1855.

²⁾ Travaux de l'Académie des Sciences de Vienne, 1863.

³⁾ Die Mechanik des Gehörknöchels und des Trommelfelles. Oeuvres. Vol. II. pag. 515 et suiv. Leipzig, 1883.

Tous les savants ont suivi l'autorité de Helmholtz, laquelle était appuyée par les résultats négatifs de l'expérience de Mach. On supposait donc que la membrane tympanique n'est pas un appareil accommodateur, c'est à dire qu'elle transmet, quel que soit son état, toutes les vibrations du dehors.

Les expériences des physiologistes comme Hensen, Bockendahl, Pollak etc. ont démontré qu'il existe une contraction du muscle tensor tympani correspondant au ton qui agit sur l'oreille, mais on n'a pas cru que cette contraction puisse accommoder la membrane au son. Une telle accommodation pourrait être utile, pense Brücke¹⁾, s'il s'agissait de la perception des tons, mais elle est sans importance pour la perception des bruits. Mais ce sont justement les bruits qui jouent le rôle le plus important dans nos perceptions auditives, la fonction accommodatrice de la membrane du tympan est donc superflue.

Il y a quelques années²⁾, des considérations de nature générale m'ont fait supposer que dans le mécanisme psychophysique de l'attention, il faut considérer bien des phénomènes comme dépendant des conditions dans lesquelles l'excitation passe par les organes des sens. En discutant les opinions des psychologues sur le mécanisme psychophysique de l'attention, j'avais supposé que l'état des appareils accommodateurs des organes des sens doit modifier essentiellement les conditions dans lesquelles l'excitation agit sur les nerfs sensoriels. Il y avait intérêt à mettre ces faits en évidence par voie expérimentale. L'étude de l'accommodation de l'oeil a permis de trouver une série de relations importantes prévues par les considérations d'ordre théorique. Les expériences ont démontré notamment l'existence d'une forme d'accommodation inconnue auparavant, d'accommodation paraxiale et ont permis d'expliquer une série de phénomènes de l'attention³⁾.

La confirmation par l'expérience des vues théoriques précédentes dans le domaine de la vision m'ont affermi dans la supposition que ces mêmes considérations doivent se vérifier de même dans le domaine de l'audition, c'est à dire que l'organe de l'ouïe doit avoir

¹⁾ Vorlesungen über Physiologie, 1884.

²⁾ W. Heinrich: Die moderne physiologische Psychologie in Deutschland, II Ausgabe, Zürich 1899.

³⁾ W. Heinrich: Die Aufmerksamkeit und die Funktion der Sinnesorgane. Zeitschrift für Psychologie und Physiologie der Sinnesorgane. Vol. IX et XI.

aussi un appareil accommodateur. La faculté de distinguer les harmoniques d'un son constituait donc un exemple classique pour l'explication de la faculté analytique de l'attention. De plus, la partie de l'acoustique qui traite de l'audition est basée sur la faculté de discerner les tons simples d'un son complexe. Grâce à cette faculté, Helmholtz a pu faire son analyse des sons, laquelle lui a fourni les faits fondamentaux pour la théorie de l'acoustique.

L'étude du fonctionnement de la membrane du tympan, la recherche d'une réponse précise à la question suivante: la membrane du tympan transmet-elle toutes les vibrations du dehors indépendamment de son état de tension, ou bien transmet-elle seulement les vibrations correspondant à ses vibrations élastiques propres, était une question importante non seulement pour la psychologie générale, mais aussi pour la théorie de l'acoustique.

J'ai essayé d'abord d'obtenir des résultats en me servant de la méthode de Mach¹⁾, mais en y introduisant une légère modification. Dans toutes les expériences sur les oscillations des osselets faites par Pollitzer ainsi que dans les expériences de Mach, on excitait la membrane par des ébranlements très-forts. Mach par exemple unissait l'oreille de la personne sur laquelle on expérimentait avec la boîte de la sirène, où les mouvements de l'air sont extrêmement agités, même dangereux pour l'intégrité de la membrane. Il est bien clair que, dans ces conditions, les oscillations de la membrane (si l'on pouvait les observer) ne peuvent pas être normales.

Pour éviter ces inconvénients, j'ai réuni l'oreille du sujet avec un résonateur qui produisait des vibrations fortes mais sans excès. Dans ces conditions, il était impossible d'observer ne fût-ce que des traces des vibrations de la membrane. On pouvait observer au cours de l'expérience dans la position de l'image observée des changements qui pouvaient indiquer des changements correspondants dans la tension de la membrane du tympan, mais il était impossible de vérifier cette supposition.

Les expériences exécutées par la méthode de Mach ont fourni un fait décisif. Elles ont démontré que l'amplitude des vibrations

¹⁾ W. Heinrich: Zur Funktion des Trommelfelles, Verhandlungen des physiologischen Club in Wien, Sitzung vom 9. Juni 1896. Centralblatt für Physiologie vom 27. Juni 1896.

de la membrane est tellement petite qu'il est impossible de la percevoir au moyen du microscope. Pour les observer il faut donc se servir d'un procédé de mesure plus délicat. Un tel procédé ne peut être fourni que par les phénomènes d'interférence de la lumière monochromatique. Les premières expériences faites par cette méthode ont démontré que la membrane du tympan réagit, dans un état déterminé de la tension, sur quelques tons seulement, qu'elle est donc un appareil accommodateur¹⁾. Il restait à étudier plus soigneusement la fonction de la membrane.

II.

Pour étudier les vibrations de la membrane du tympan, on se servait de l'interféromètre de Michelson¹⁾, dans lequel le miroir était remplacé par la membrane portant un très petit miroir sur sa surface. Dans ces conditions, les vibrations de la membrane, d'amplitude supérieure à un quart de l'onde de la lumière monochromatique employée dans l'expérience, devaient se manifester par une disparition des franges; dans le cas où l'amplitude de la translation du petit miroir dans la direction du rayon réfléchi était plus petite qu'un quart de l'onde, cette translation devait se manifester par un élargissement des franges claires. Le dispositif employé était le suivant:

Pour obtenir la lumière monochromatique, on employait dans les premières expériences les rayons rouges du spectre d'une lampe à incandescence. Plus tard, on a remplacé la disposition précédente par une lampe à mercure, dont la lumière donne les franges interférentielles; c'est à l'aide de cette lampe qu'on a fait tous les essais pour photographier les vibrations des franges.

Quand enfin on a constaté qu'il était impossible d'obtenir des photogrammes des vibrations et qu'on pouvait seulement observer les vibrations des franges directement avec une lunette, il a paru plus commode de se servir de la lumière de sodium. On plaçait un bec de Bunsen avec une mèche imprégnée d'une solution de sel commun à une distance de quelques mètres de l'interféromètre en réglant la flamme de manière à ce que le bruit de la flamme soit

¹⁾ W. Heinrich. Note préliminaire sur la fonction accommodatrice de la membrane du tympan. Bulletin de l'Académie des Sciences de Cracovie Mai 1902.

¹⁾ Philosoph. Magazine, vol. XIII 1882, pag. 236.

le plus faible possible. Dans ces conditions, on n'observait jamais aucune trace d'influence du bruit de la flamme sur la membrane. La lentille placée devant l'interféromètre (v. figure 1) condensait le faisceau des rayons de la flamme sur le miroir L, fixé à la membrane du tympan. Grâce à la largeur de la lame en verre sur laquelle le faisceau se divisait en deux parties dirigées vers les deux

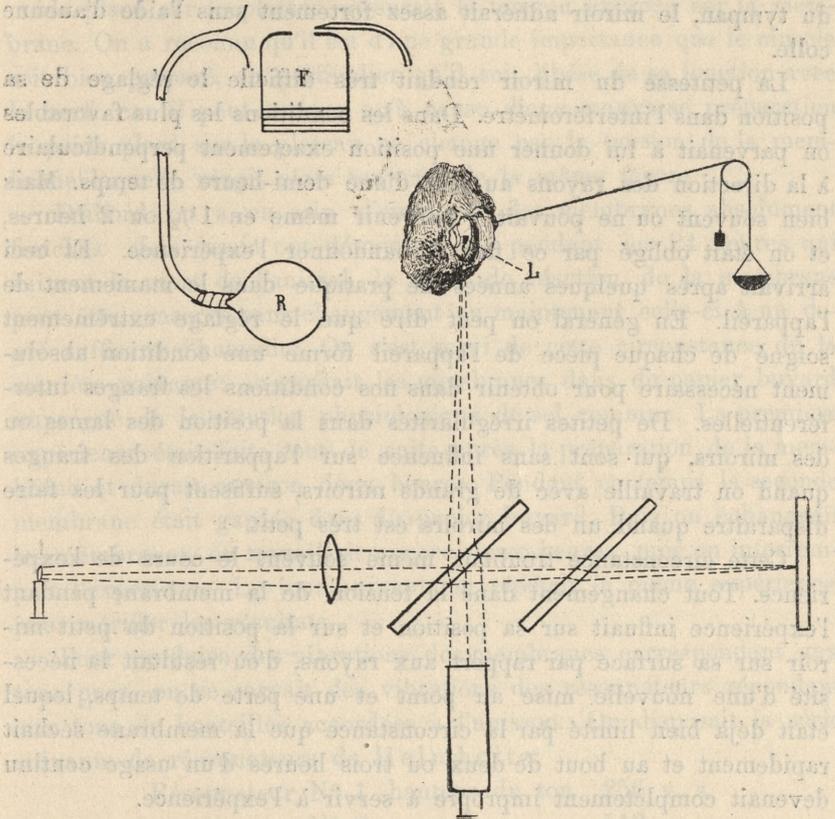


Fig. 1.

miroirs de l'interféromètre, les images de la flamme, formées par les rayons réfléchis par les deux surfaces de la lame, se séparent totalement l'un de l'autre et l'on obtient des franges interférentielles très pures. Les franges pouvaient être observées au moyen d'une lunette.

On a rencontré de grandes difficultés pour obtenir des miroirs assez légers pour qu'on puisse admettre que leur poids n'exerce

point d'influence sur les vibrations de la membrane. Il a été impossible de se procurer des miroirs aussi minces dans le commerce, et nous avons été obligés de les faire nous-mêmes. Les miroirs dont on s'est servi pour ces expériences, argentés et polis du côté extérieur, avaient une superficie de $1 - 1.5 \text{ mm}^2$ et leur poids ne dépassait pas 0.7 milligrammes. Déposé librement sur la membrane du tympan, le miroir adhérait assez fortement sans l'aide d'aucune colle.

La petitesse du miroir rendait très difficile le réglage de sa position dans l'interféromètre. Dans les conditions les plus favorables on parvenait à lui donner une position exactement perpendiculaire à la direction des rayons au bout d'une demi-heure de temps. Mais bien souvent on ne pouvait y parvenir même en $1\frac{1}{2}$ ou 2 heures, et on était obligé par ce fait d'abandonner l'expérience. Et ceci arrivait après quelques années de pratique dans le maniement de l'appareil. En général on peut dire que le réglage extrêmement soigné de chaque pièce de l'appareil forme une condition absolument nécessaire pour obtenir dans nos conditions les franges interférentielles. De petites irrégularités dans la position des lames ou des miroirs, qui sont sans influence sur l'apparition des franges quand on travaille avec de grands miroirs, suffisent pour les faire disparaître quand un des miroirs est très petit.

Cette circonstance troublait même souvent le cours de l'expérience. Tout changement dans la tension de la membrane pendant l'expérience influait sur sa position et sur la position du petit miroir sur sa surface par rapport aux rayons, d'où résultait la nécessité d'une nouvelle mise au point et une perte de temps, lequel était déjà bien limité par la circonstance que la membrane séchait rapidement et au bout de deux ou trois heures d'un usage continu devenait complètement impropre à servir à l'expérience.

Les conditions de l'expérience ne permettant pas l'usage d'une oreille vivante, on se servait d'organes d'animaux récemment tués. L'animal (un chien) étant asphyxié par le chloroforme, on procédait à la préparation de l'organe auditif en éloignant les parties extérieures autant que cela était indispensable pour mettre à découvert la membrane du tympan sans l'endommager. Toute l'oreille interne restait absolument intacte. La jonction de la membrane du tympan avec les osselets, et le chargement de la membrane par ces osselets étaient les mêmes que dans les conditions normales, d'où il suit

que la transmission des vibrations sonores aux parties internes de l'oreille n'était pas modifiée.

Pour changer à volonté la tension de la membrane, on ouvrait un peu l'orifice du côté intérieur afin de découvrir le tendon du muscle du tympan et d'y fixer un petit crochet auquel on attachait un plateau d'une balance équilibré par un poids (v. la figure). Le poids placé sur le plateau mesurait la tension exercée sur la membrane. On a reconnu qu'il est d'une grande importance que le muscle soit bien préparé, en particulier qu'il soit libéré de sa jonction avec le nerf, car il peut arriver qu'à cause d'une mauvaise préparation le poids placé sur le plateau ne change pas la tension de la membrane laquelle réagit alors toujours de la même façon.

D'abord on a eu soin d'employer des membranes absolument fraîches. Les essais ont démontré que pendant les 24 heures qui suivent la mort de l'animal, le mode de réaction de la membrane peut être conservé sans changement en maintenant celle-ci à un degré suffisant d'humidité. On s'est servi de cette circonstance de la manière suivante: on gardait les membranes dans du papier buvard imprégné de la solution physiologique de sel commun. La première expérience était faite tout de suite après la préparation de la membrane et durait environ deux heures. Pendant ce temps la seconde membrane était gardée dans du papier buvard. Puis on échangeait les membranes, on travaillait encore deux heures, puis on interrompait l'expérience. Le jour suivant, on répétait la même expérience, pour vérifier les résultats.

Pour produire des vibrations des membranes correspondant aux tons purs, on se servait des vibrations des résonnateurs répondant aux tons de bouteilles accordées à l'unisson. On disposait la série suivante de résonnateurs de Helmholtz:

Résonnateur N ^o 1.	hauteur du ton	256 v. s.
" N ^o 2.	" "	512 v. s.
" N ^o 3.	" "	768 v. s.
" N ^o 4.	" "	1024 v. s.
" N ^o 5.	" "	1280 v. s.
" N ^o 6.	" "	1536 v. s.
" N ^o 7.	" "	1792 v. s.
" N ^o 8.	" "	2048 v. s.

Dans cette disposition, la source primaire des tons était formée par les bouteilles dans lesquelles on soufflait. On accordait les

bouteilles avec les résonateurs correspondants d'abord approximativement en y mettant de l'eau. (Pour éliminer la vaporisation, on mettait de l'huile sur l'eau). On obtenait l'unisson précis par le réglage de l'intensité du courant d'air et de la position du tube aplati par lequel s'écoulait l'air par rapport à l'ouverture de la bouteille. La bouteille dans laquelle on soufflait et le résonateur correspondant se trouvaient dans deux chambres différentes séparées par une porte double. On les unissait par un tube large de telle manière que le résonateur fermait l'ouverture du tube lequel avait 12 mètres de longueur (v. la figure 1). Grâce à cette disposition, les vibrations transmises par le résonateur placé près de la membrane étaient des vibrations simples d'un ton pur sans harmoniques.

Dans une autre série d'expériences la source des vibrations était formée par les sons d'un harmonium placé près de l'interféromètre.

Dans la communication préliminaire sur la fonction accommodatrice de la membrane, on exprimait l'espoir qu'on pourrait obtenir les photogrammes des vibrations de la membrane. Mais il a été impossible d'y parvenir. La lumière réfléchie par le petit miroir placé sur la membrane était tellement faible, même dans le cas où l'on employait la lampe de mercure, qu'on ne pouvait obtenir aucune trace des franges sur la plaque photographique, même lorsque celle-ci était animée d'un mouvement lent. Il ne restait donc qu'à revenir à la méthode de l'observation directe au moyen de la lunette. Cette méthode permet seulement de constater l'existence des vibrations de la membrane. Pour être sur des résultats, il est nécessaire que la stabilité de l'appareil soit parfaite. On commençait donc les expériences après 11 heures du soir pour éviter tout tremblement provenant du mouvement des voitures dans la rue.

III.

Si pendant l'observation des franges d'interférence la membrane commence à vibrer, les franges doivent disparaître totalement, si l'amplitude des vibrations n'est pas inférieure à un quart de la longueur d'onde de la lumière employée. Dans ces conditions, le changement de la différence de marche des deux rayons est égal à une demi-longueur d'onde et pendant une vibration complète les franges claires prennent la place des franges noires et inversement. La durée d'une vibration étant très courte, les déplacements des

franges s'effectuent très rapidement; on ne voit donc dans la lunette qu'un champ uniformément éclairé. Si l'amplitude des vibrations de la membrane est plus petite qu'un quart de la longueur d'onde, les franges ne cessent pas d'être visibles, mais les franges noires deviennent grises et les franges claires s'élargissent. Si l'amplitude est encore plus petite, la vibration se manifeste comme un petit élargissement des franges claires. Dans ce cas, l'existence des vibrations est particulièrement aisée à constater dans les moments où le ton excitant commence ou cesse d'agir. A ces moments, les franges subissent un changement spécifique qui ne peut échapper à l'attention.

On observait des amplitudes égales ou peut-être plus grandes qu'un quart d'onde dans les octaves basses jusqu'à *c*. Dans les octaves plus hautes, l'amplitude de la vibration des parties situées entre le manche du marteau et l'anneau dans lequel la membrane est fixée (voir la position du miroir dans la figure 1) était généralement plus petite qu'un quart de la longueur d'onde du sodium. On sait que l'amplitude des vibrations de cette partie de la membrane est la plus grande. Il faut cependant ajouter qu'il y avait aussi des membranes dont l'amplitude des vibrations pour les tons des octaves au dessus de *c* était plus grande qu'un quart de la longueur d'onde. Mais cela arrivait dans des cas exceptionnels. Parmi quelques dizaines de membranes il n'y en avait que quelques-unes qui possédaient cette propriété. On ne percevait pas de vibrations dans le cas où le miroir était placé sur le manche du marteau. Cette petitesse de l'amplitude de la vibration de la membrane formait une grande difficulté de l'expérience surtout dans le cas des expériences avec les résonateurs. Ici la disposition de l'expérience ne permet pas d'interrompre le ton subitement parce qu'on devait chaque fois régler l'intensité du courant aérien de façon que la réaction du résonateur soit la plus forte possible. Il est clair qu'en raison de ces circonstances la constatation de l'existence de vibrations qui se manifestaient par un faible élargissement des franges demandait beaucoup d'essais. La chose était d'autant plus difficile que chaque membrane demandait des charges différentes pour réagir sur les mêmes tons. A cause de cela, pour chaque membrane fraîche il fallait chercher à nouveau les tensions auxquelles correspondaient les réactions de la membrane sur les tons demandés. De cette manière on comprend pourquoi chaque

expérience permettait seulement de constater les réactions sur un petit nombre de tons.

L'usage de l'harmonium facilitait l'excitation de la membrane et permettait d'obtenir de plus grandes séries de réactions. On a donc remplacé les résonnateurs par l'harmonium à partir du moment où les expériences avec les résonnateurs permettaient d'interpréter les résultats des expériences avec l'harmonium.

Les expériences avec les résonnateurs étaient les suivantes:

Si l'on place un résonnateur Nr. 2 près de la membrane et si l'on augmente la tension de la membrane jusqu'au moment où elle réagit sur le ton du résonnateur, alors dans cet état de tension la membrane réagit aussi sur les tons: a) du résonnateur Nr. 3; b) du résonnateur Nr. 4; c) du résonnateur Nr. 6. Elle ne réagit pas sur le ton du résonnateur Nr. 5. Puisque les vibrations des résonnateurs sont les sinusoïdes simples des tons purs, il résulte donc de l'expérience que dans un état déterminé de la tension la membrane réagit non seulement sur la vibration correspondant au ton fondamental de la membrane et aux harmoniques mais aussi sur la quinte du ton fondamental.

Quand on accorde la membrane avec le résonnateur Nr. 3 comme ton fondamental, elle réagit alors sur les résonnateurs Nr. 4., 5., 6. et Nr. 2 c'est à dire sur les tons dont les intervalles sont ceux de la quarte et sixte au dessus et la quinte au dessous du ton fondamental. Les résultats précédents ont été vérifiés par de nombreuses expériences. Dans toutes les expériences on a pu constater très sûrement les réactions sur la quarte et quinte du ton fondamental. La réaction sur le ton $\frac{5}{3}$ (sixte majeur) du ton fondamental n'était pas toujours perceptible.

En résumé, les expériences avec les résonnateurs ont donné les résultats suivants: Dans chaque état de la tension la membrane réagit: 1) sur le ton fondamental, 2) sur les harmoniques (tons supérieurs), c'est à dire, sur les tons dont le nombre des vibrations est 2, 3, 4, etc. fois plus grand que le nombre des vibrations du ton fondamental; sur les tons dont le nombre de vibrations est $(\frac{3}{2})$ la quinte; $(\frac{4}{3})$ la quarte; $(\frac{5}{3})$ la sixte majeure et $(\frac{2}{3})$ la quinte au dessus du nombre de vibrations du ton fondamental.

Il suit des résultats précédents que la membrane doit réagir

sur un même ton dans de différents états de tension. Ce ton correspond une fois au ton fondamental de la membrane, les autres fois il est dans l'un des intervalles consonnants ou un des harmoniques du ton fondamental de la membrane. On peut vérifier cette conséquence. On a observé par exemple les réactions sur le ton du résonnateur Nr. 3 quand la membrane était chargée par un poids de 5 gr., puis par des poids de 7.5 gr., 9.75 gr., 14—14.5 gr.

Dans une autre expérience la membrane réagissait sur le ton du résonnateur Nr. 5 étant chargée avec des poids: 4—4.75 gr., 5.5—6 gr., 6.75—7 gr., 9.25—9.75 gr., 11.75—12 gr., et 14.50 gr. La plus forte réaction était constatée quand le poids fut 11.75—12 gr. On observait la réaction pour la dernière fois quand la charge était de 14.50 gr.; la constatation de la vibration dans ce cas n'était pas absolument sûre.

Il est clair qu'on ne peut pas indiquer l'intervalle entre le ton fondamental de la membrane en chaque état de la tension observée et le ton du résonnateur. En se basant sur les expériences précédentes on peut affirmer seulement qu'il ne peut s'agir ici que d'intervalles consonnants.

Les expériences avec les résonnateurs présentaient des difficultés tellement considérables et pour avoir des résultats précis il fallait les répéter tant de fois que la continuation du travail dans les mêmes conditions était impossible.

On a remplacé les résonnateurs par l'harmonium. Les sons de l'harmonium sont riches en tons harmoniques et cela constitue certainement un défaut. D'un autre côté l'harmonium permet de disposer d'une grande échelle de sons de la hauteur de C_1 — c''' , et chaque son pouvait être produit ou interrompu subitement ou enfin on pouvait le conserver longtemps. En même temps on pouvait observer d'une façon continue les franges d'interférence.

Les expériences avec l'harmonium ont confirmé que la membrane réagit non seulement sur le ton fondamental et ses harmoniques, mais aussi sur les intervalles consonnants de la manière suivante: On observe que la membrane réagit plus fortement sur le son dont le ton fondamental est consonnant avec le ton fondamental de la membrane que sur les sons dont les tons fondamentaux sont harmoniques du ton fondamental de la membrane. Par exemple, quand la membrane était accordée sur le ton 2, elle réagissait le plus fortement sur le son de l'harmonium dont les tons

peuvent être exprimés par les nombres 2. 4. 6. 8. etc. Si l'on produisait les sons dont les tons composants seraient respectivement 3. 6. 9. etc. et 6. 12. 18. etc., alors il serait incertain si la réaction de la membrane sur le son 3. 6. 9. est due à sa réaction sur le ton 3 ou sur le ton 6. Mais quand on constate que la réaction sur le son 3. 6. 9. etc. est plus forte que la réaction sur le son 6. 12. 18. etc. quoique le ton excitant 6 est, comme étant fondamental, plus fort dans le second ton, alors il est permis de conclure que la réaction forte de la membrane provenait de la présence du ton 3. Cette supposition devient une certitude puisqu'elle est confirmée par les expériences, faites précédemment, avec les tons purs des résonnateurs.

Les nombreuses expériences avec l'harmonium fournissaient pour la plupart des résultats fragmentaires. Mais on est parvenu à obtenir une série plus grande, dans des conditions spécialement favorables, exprimée par les résultats de la Table I.

TABLE I.
Réactions de la membrane dans divers états de tension.

La tension de la membrane en grammes.	Ton fondamental de la membrane.	Sons dont les tons fondamentaux forment des intervalles consonnants.	Sons dont les tons fondamentaux sont harmoniques du ton fondamental de la membrane.
1.6	E.	A H	e h e' g'
1.9	F.	H c	f c' f' a' c''
2.5	G.	c d	g d' g' h' d''
3.1	A.	d e	a e' a' c'' e''
3.7	H.	e f	h f' h' d''

Dans les réactions exprimées dans la Table I on n'avait observé que les réactions sur la quarte, la quinte et les tons harmoniques. Dans les autres expériences on a observé des réactions sur la tierce et la sixte. Par exemple, dans une expérience vérifiée deux fois sur deux membranes du même animal, on a constaté, la tension étant de 2 gr., le ton c' comme fondamental et les réactions sur les sons e' f' g' a' et des réactions sur les tons harmoniques c'' g'' c'''. La réaction sur e' était visiblement plus faible que celles sur f' et g'.

Les expériences avec l'harmonium ont vérifié et complété les résultats obtenus avec les résonnateurs. Ils ont montré que dans

chaque état de tension la membrane réagit non seulement sur un ton fondamental et ses harmoniques, mais aussi sur la tierce, quarte, quinte et sixte du ton fondamental. Les réactions sur la quarte et la quinte sont plus fortes que les réactions sur la tierce et la sixte.

Dans les expériences avec les résonateurs on a constaté l'existence d'une réaction sur le ton, exprimé par le nombre 2 quand le ton fondamental de la membrane était exprimé par le nombre 3. Dans cet état de tension, la membrane réagissait sur les tons 4 et 5, tandis que la membrane dont le ton fondamental s'exprimait par le nombre 2 réagissait aussi sur les tons 3, 4, mais ne manifestait aucune réaction sur le ton 5.

Ce fait ne pouvait être vérifié avec l'harmonium parce que dans le cas où la membrane réagit sur un ton fondamental d'un son de l'harmonium, elle réagit aussi sur les sons des octaves plus basses, lesquelles contiennent le même ton comme harmonique. Par exemple, la membrane qui réagit sur les sons c' e' f' g' a' réagit aussi sur les sons c e f g a .

Une confirmation indirecte de cette observation est fournie par le fait suivant bien connu: On sait que le caractère auditif d'un son est influencé par l'existence de tons plus bas que le ton fondamental du son. Ce caractère auditif doit dépendre du caractère des vibrations transmises par la membrane. Il faut donc conclure de là que la membrane peut, dans un état déterminé de tension, transmettre aussi les vibrations de tons plus bas que son ton fondamental. Cette question sera encore soumise aux expériences.

Les expériences avec l'harmonium ont permis aussi d'analyser exactement la relation entre les tensions de la membrane et les hauteurs des tons fondamentaux correspondants. Les membranes non chargées par aucun poids réagissaient sur des tons de la contre-octave et de la grande octave. Par exemple: une membrane montrait les réactions sur le ton H , une autre a manifesté des réactions fortes sur le ton Cis_7 , encore une autre des réactions sur C_7 etc., comme tons fondamentaux. Il ne faut pas oublier cependant qu'une telle membrane se trouve sous l'action du muscle „stapedius“ qui, à cause de la mort de l'animal, se trouvait dans un état de contraction. Il

me semble qu'une membrane non tendue ne réagirait sur aucun ton, parce qu'elle serait très flasque.

Les charges jusqu'à un gramme n'exerçaient aucun effet sur la tension de la membrane, parce qu'elles étaient équilibrées par le frottement de la poulie supportant la plateau. Dans l'expérience dont les résultats sont consignés dans la Table I, la membrane chargée avec un poids de 1 gr. réagissait sur le ton D. La charge de 1.6 gr. a donné la réaction sur E.

La Table II donne une série plus étendue de valeurs correspondantes des tons fondamentaux et de tensions de la membrane.

TABLE II.

Relation entre la tension et le ton fondamental de la membrane.

Tension en grammes.	Tons fondamentaux de la membrane.
2 gr.	c'
2.3 — 2.5 — 2.7	cis'
2.8 — 3 — 3.3	d'
3.3 — 3.5 — 3.7	dis'
4	e'
4.5	f'
5	fis'
5.5	g'
6	gis'
6.5	a'
7	ais'
7.5	h'
8	c''

On voit que les hauteurs des tons forment une progression géométrique (dans l'échelle tempérée de l'harmonium tous les intervalles d'un demi-ton sont égaux) et les poids correspondants forment une progression arithmétique. La même loi se retrouve dans la Table I, dans laquelle la charge pour chaque demi-ton augmente de 0.3 gr. Dans la Table II cette augmentation est de 0.5 gr.

Les limites dans lesquelles on peut changer la tension en obtenant toujours une réaction au même ton sont très grandes. Dans chaque état de la tension, la membrane réagit sur les tons limités par une intervalle presque d'un demi-ton (voir les trois premières lignes de la Table II). Par exemple: à la tension 3.3 gr.

répondait une faible réaction sur les tons *d'* et *dis'*; aux tensions 3 gr. et 3.5 gr. répondaient des réactions fortes sur les mêmes tons. En augmentant les tensions depuis 3.5 gr. de 0.5 gr. on obtenait des réactions fortes sur tous les demi-tons successifs.

En entreprenant les expériences précédentes on pensait pouvoir s'assurer si les réactions de la membrane sur les vibrations provenant du dehors se compliquent d'une telle manière qu'on y puisse trouver comme composantes les vibrations simples correspondant aux tons résultants. Malheureusement, l'impossibilité de photographier les vibrations de la membrane a empêché de répondre à cette question.

Pour se rendre compte de la forme des vibrations de la membrane on a essayé de mettre en évidence les lignes nodales. A cet effet on a répandu sur la membrane une poussière très fine. Cette expérience ne donna pas de résultats. Quelquefois on a observé que les diverses parties de la superficie du petit miroir fixé sur la membrane dont la tension restait invariable, réagissaient différemment à des différents tons. Mais il était difficile d'en conclure la position des lignes nodales.

Il faut faire une remarque générale sur la nature des vibrations de la membrane. On assimile toujours les vibrations de la membrane du tympan à celles des membranes homogènes rondes élastiques. Cette façon de voir est insoutenable. Un coup d'oeil sur la membrane du tympan suffit pour reconnaître qu'elle est décidément oblongue et d'une structure tout à fait spéciale. On peut constater aisément que les fibres principales de la membrane relient le manche du marteau à l'anneau osseux comme l'indique l'esquisse (fig. 2) A cause de cette structure, la membrane peut être regardée comme se composant de deux bandes disposées des deux côtés du manche du marteau et, chose remarquable, la longueur des fibres de la bande plus large est deux fois plus grande que celle de la bande plus étroite. Nous avons fait cette observation en fendant la membrane le long des fibres et en mesurant avec un compas la longueur des fentes. Faisons observer que le miroir était toujours placé sur la bande plus large. Il est impossible d'étudier les bandes plus étroites à cause de leur petitesse et de leur position.



Fig. 2.

Il n'y a pas grand chose à dire sur les réactions de la mem-

brane aux bruits. La faculté de la membrane de réagir dans un état de tension sur une très grande quantité de tons permet de comprendre comment la membrane peut réagir sur les bruits. Dans un état déterminé de la tension, la membrane peut réagir sur un ton fondamental, sur les intervalles consonnantes, sur les tons harmoniques et sur tous les tons qui peuvent différer jusqu'à un demi-ton.

On sait que les bruits ne sont rien d'autre que le mélange des vibrations très courtes et très différentes. A ces vibrations la membrane peut réagir dans le cas où elles correspondent à la tension.

Et justement on constate que la membrane, au voisinage de laquelle on produit des bruits différents, reste généralement en repos. Elle réagit quand le caractère du bruit correspond à l'état de la tension de la membrane. On a observé, par exemple, dans un état de tension faible de la membrane, des réactions à des bruits produits en frappant l'un contre l'autre deux morceaux de bois d'une longueur de 30 cm. environ. Dans un état de tension moyenne (quelques grammes) on a observé des réactions sur le sifflement de l'air, sortant d'une bouteille où il était comprimé etc. En même temps la membrane ne réagissait pas sur les bruits d'un autre caractère. L'impossibilité d'analyser les vibrations des bruits n'a pas permis d'étudier plus systématiquement les réactions de la membrane aux bruits.

IV.

Les conséquences relatives à l'audition qu'on peut tirer des expériences sur la fonction de la membrane seront encore l'objet d'une étude spéciale. Nous nous bornons à faire seulement quelques remarques générales.

Il résulte des expériences relatées que dans un état de tension déterminé la membrane peut transmettre seulement les vibrations qui correspondent à cet état. La vibration totale de la membrane caractérise physiquement le ton écouté. La vibration simple la plus forte correspond au ton fondamental du son, les autres vibrations simples caractérisent les tons composant le son. Si les tons composants forment des intervalles consonnantes, alors le son résultant sera aussi consonnant. Mais il arrive que les vibrations composantes forment des battements, alors la vibration de la membrane cesse d'être uniforme. Il y a des instants où elle est au repos; il y en

a d'autres où l'amplitude de la vibration de la membrane est la plus grande. On peut mettre cette circonstance en évidence en employant un son composé de deux tons bas qui diffèrent d'un demi-ton. On voit alors la membrane cesser de vibrer dans les instants où la vibration excitante s'éteint à cause de l'interférence.

Supposons maintenant que la tension de la membrane change, mais que la vibration excitante reste inaltérée, la membrane réagit le plus fort à une autre vibration simple, composant la vibration excitante. Le caractère du son écouté change: on discerne un ton composant du son. Les choses se passent de la même manière dans le cas des bruits. Un bruit d'un caractère déterminé, disons un bruit d'une hauteur déterminée peut être écouté quand la membrane se trouve dans un état correspondant de tension, et chaque bruit d'une hauteur différente demande une autre tension etc.

On explique l'accommodation de la lentille en admettant qu'une impression faible sur la rétine, pendant que la lentille est dans un état quelconque, provoque le réflexe accomodateur. Il faut supposer que les choses se passent d'une façon analogue dans la production du réflexe réglant la tension accomodatrice de la membrane. Une vibration faible agissant sur la membrane non accomodée ne provoque aucun effet. Il suffit de rappeler tous les cas où nous n'entendons rien de ce qui se produit autour de nous quand nous sommes très occupés à un travail. Les vibrations fortes qui agissent violemment sur la membrane peuvent la forcer à vibrer dans chaque état de la tension: il est impossible de ne pas entendre les sons ou bruits très forts. Au contraire, pendant l'audition la membrane est dans un état tel que même les vibrations faibles peuvent la faire vibrer, peut être faiblement, dans le premier moment, mais cette vibration devient plus forte quand l'accommodation s'est effectuée¹⁾. Prenons comme exemple l'audition d'une pièce de musique. Ici chaque accord successif est toujours dans un intervalle consonnant avec l'accord précédent, les tons peuvent donc agir sur la membrane accomodée aux accords précédents. Cette action faible fait changer l'état de l'accommodation de la membrane, elle provoque le réflexe adaptant la membrane à l'accord nouveau. Par exemple, deux vibrations dont la seconde est dans l'intervalle de la quinte agissent successivement. La mem-

¹⁾ Il est bien probable que la transmission osseuse de vibrations aide à l'accommodation de la membrane.

brane accommodée au premier ton peut réagir aussi, bien que plus faiblement, sur la quinte. Celle-ci peut donc mettre la membrane en vibration d'abord faiblement, mais cela suffit pour provoquer le changement réflexe de la tension. Ordinairement la membrane s'accommode à la vibration simple la plus forte de la vibration excitante composée. Et c'est elle qui correspond au ton le plus fort du son et détermine sa hauteur. Dans le jeu de l'accommodation pendant l'audition d'une pièce, l'habitude joue un grand rôle. Les pièces musicales d'un caractère connu sont plus faciles à suivre que les pièces tout à fait originales, qui semblent être „étranges“ à l'audition.

Les choses se passent semblablement dans le cas des bruits. En écoutant la parole nous devinons presque ce qui va suivre et cela aide au changement de l'état accommodatif de la membrane. La conversation dans une langue mal connue ou le seul fait de suivre les paroles d'une langue inconnue demande toujours des efforts et il est légitime de croire que le changement de l'accommodation de la membrane se produit dans ces cas avec moins de précision.

Nakładem Akademii Umiejętności.

Pod redakcyą

Członka delegowanego Wydziału matem.-przyr., Dra Władysława Natansona.

Kraków, 1903. — Drukarnia Uniwersytetu Jagiellońskiego, pod zarządem J. Filipowskiego.

23 Września 1903.

