

BULLETIN INTERNATIONAL
DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE CRACOVIE.

CLASSE DES SCIENCES MATHÉMATIQUES ET NATURELLES.

N° 2.

Février

1904.

- Sommaire:** 8. M. M. LERCH. Sur quelques applications d'un théorème arithmétique de Jacobi.
9. M. K. KOSTANECKI. Etude cytologique de la parthénogénèse artificielle des oeufs de *Maetra* sous l'influence de KCl.
10. M. F. TONDERA. Sur la structure intérieure des sarments de Vigne.
11. M. S. ZAREMBA. Réponse aux remarques de M. Natanson sur la théorie de la relaxation.
12. M. LADISLAS NATANSON. Remarques sur les travaux de M. Zarembo relatifs à la théorie de la double réfraction accidentelle dans les liquides.

Séance du lundi 1 Février 1904.

PRÉSIDENCE DE M. E. GODLEWSKI.

8. M. M. LERCH. **Sur quelques applications d'un théorème arithmétique de Jacobi.** Mémoire présenté par M. S. Zarembo m. c.

Soit p un nombre premier impair, g une des racines primitives correspondantes, puis n un entier positif plus petit que $p-1$, et désignons par α un entier positif ou négatif qui satisfait à la congruence

$$\alpha \equiv g^{p-t-n} \pmod{p},$$

qu'on peut mettre sous la forme fractionnaire plus simple

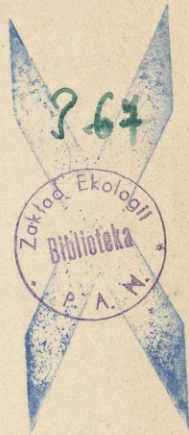
$$\alpha \equiv \frac{1}{g^n} \pmod{p}. \quad (1)$$

En indiquant suivant l'usage par $\text{ind } \nu$ l'entier μ qui satisfait à la congruence

$$g^\mu \equiv \nu \pmod{p}, \quad (0 < \nu < p),$$

avec la condition accessoire $0 \leq \mu < p-1$, considérons la fonction entière de l'indéterminée x

$$F_n(x) = \sum_{\nu=1}^{p-1} \alpha^{\text{ind } \nu} x^\nu. \quad (2)$$



Dans un célèbre mémoire¹⁾ Jacobi met ce polynôme en relation avec la fonction Y_n , somme des termes en $y^n, y^{n+1}, \dots, y^{p-1}$ dans le développement de Maclaurin correspondant à la fonction transcendante

$$\{\log(1+y)\}^n,$$

de sorte que la différence des deux expressions soit une série entière de la forme

$$(3) \quad \{\log(1+y)\}^n - Y_n = a_p y^p + a_{p+1} y^{p+1} + a^{p+2} y^{p+2} + \dots$$

La relation en question consiste en la congruence arithmétique

$$(4) \quad F_n(1+y) \equiv -\frac{1}{n!} Y_n \pmod{p}.$$

L'importance de la féconde découverte du grand géomètre ressortira en considérant le cas particulier de $n = m$, où l'on fait

$$\frac{p-1}{2} = m;$$

le résultat de Jacobi devient, dans le cas considéré,

$$(5) \quad Q(x) \equiv -\frac{1}{m!} Y_m(x-1) \pmod{p},$$

où $Q(x)$ désigne le polynôme intéressant

$$(6) \quad Q(x) = \sum_{\nu=1}^{p-1} \binom{p}{\nu} x^\nu.$$

Les coefficients de ce polynôme étant 1 ou -1 , la congruence (5) le détermine sans ambiguïté dès qu'on possède l'expression du polynôme $Y_m(x-1)$.

Dans ce qui suit, je vais démontrer la congruence de Jacobi (4), et j'y ajoute quelques conséquences du théorème (5).

1. La congruence (1) donne immédiatement

$$\alpha^{\text{ind } \nu} \equiv \frac{1}{g^{\text{ind } \nu}} \equiv \frac{1}{\nu^n} \pmod{p},$$

ce qui permet de remplacer la fonction $F_n(x)$ par la suivante

$$(2^*) \quad \Phi_n(x) = \sum_{\nu=1}^{p-1} \frac{x^\nu}{\nu^n},$$

¹⁾ Ueber die Kreistheilung und ihre Anwendung auf die Zahlentheorie (Journal de Crelle, T. 30, 1837; Werke, T. 6, p. 254).

car on a en effet

$$F_n(x) \equiv \Phi_n(x) \pmod{p}.$$

Cela étant, considérons la fonction

$$\Phi_n(1+y) = \sum_{\nu=1}^{p-1} \frac{(1+y)^\nu}{\nu^n};$$

en remplaçant les puissances $(1+y)^\nu$ par leurs développements par la formule du binôme, il vient

$$\Phi_n(1+y) = \sum_{k=0}^{p-1} y^k \sum_{\nu=1}^{p-1} \binom{\nu}{k} \frac{1}{\nu^n}, \quad (7)$$

et nous allons réduire, suivant le module p , les coefficients des différentes puissances de l'indéterminée y . On n'a qu'à observer que l'on a

$$\sum_{\nu=1}^{p-1} \frac{1}{\nu^{\pm s}} \equiv 0 \pmod{p},$$

si $0 < s < p-1$, mais que le second membre doit être remplacé par -1 , si $s = 0$.

Par conséquent, les termes

$$\sum_{\nu=1}^{p-1} \binom{\nu}{k} \frac{1}{\nu^n} \quad (k = 0, 1, \dots, n-1)$$

peuvent être supprimés, et il ne restent que ceux où $k \geq n$.

Pour en déterminer les restes suivant le module p , considérons le développement

$$\binom{\nu}{k} = A_1^{(k)} \nu + A_2^{(k)} \nu^2 + \dots + A_n^{(k)} \nu^n + \dots + A_k^{(k)} \nu^k,$$

les coefficients étant des fractions indépendantes de ν et dont le dénominateur commun est la factorielle $k!$ En substituant cette expression, il vient

$$\begin{aligned} \sum_{\nu=1}^{p-1} \binom{\nu}{k} \frac{1}{\nu^n} &= A_1^{(k)} \sum_{\nu=1}^{p-1} \frac{1}{\nu^{n-1}} + A_2^{(k)} \sum_{\nu=1}^{p-1} \frac{1}{\nu^{n-2}} + \dots + A_{n-1}^{(k)} \sum_{\nu=1}^{p-1} \frac{1}{\nu} + \\ &+ A_n^{(k)} (p-1) + A_{n+1}^{(k)} \sum_{\nu=1}^{p-1} \nu + A_{n+2}^{(k)} \sum_{\nu=1}^{p-1} \nu^2 + \dots; \end{aligned}$$

1*

dans le second membre toutes les sommations indiquées donnent des multiples de p , et il ne reste que le terme $A_n^{(k)} (p-1)$ ou bien

$$\sum_{v=1}^{p-1} \binom{v}{k} \frac{1}{v^n} \equiv -A_n^{(k)} \pmod{p}.$$

Cela étant, la formule (7) permet de conclure

$$(8) \quad \Phi_n(1+y) \equiv - \sum_{k=n}^{p-1} A_n^{(k)} y^k \pmod{p},$$

et il ne s'agit que du polynôme qui constitue le deuxième membre.

D'après la définition des nombres $A_n^{(k)}$, la somme

$$(8) \quad S = - \sum_{k=n}^{p-1} A_n^{(k)} y^k$$

est le coefficient de x^n dans le développement suivant les puissances de x de la fonction

$$(9) \quad \varphi(x) = - \sum_{k=0}^{p-1} \binom{x}{k} y^k,$$

en d'autres termes

$$(10) \quad S = \frac{1}{n!} \varphi^{(n)}(0).$$

Ce point établi, la formule du binôme donne

$$(1+y)^x + \varphi(x) = \sum_{\mu=0}^{\infty} \binom{x}{p+\mu} y^{p+\mu}$$

pourvu que l'on ait $|y| < 1$. La convergence étant uniforme dans les séries qui résultent par différentiations successives, on en tire en prenant les dérivées d'ordre n par rapport à x et faisant $x=0$ dans le résultat,

$$\left\{ \log(1+y) \right\}^n + \varphi^{(n)}(0) = \sum_{\mu=0}^{\infty} a_{p+\mu} y^{p+\mu},$$

la signification des coefficients $a_{p+\mu}$ étant évidente.

D'après la définition du polynôme $Y_n(y)$ on en conclut

$$Y_n(y) = -\varphi^{(n)}(0) = -n! S,$$

et la congruence (.) devient

$$(11) \quad \Phi_n(1+y) \equiv -\frac{1}{n!} Y_n(y) \pmod{p}$$

et il en résulte immédiatement la congruence de Jacobi (4)

2. Dans le cas particulier de $n = m = \frac{p-1}{2}$, la congruence d'Euler

$$\nu^m \equiv \left(\frac{\nu}{p}\right) \pmod{p},$$

où le second membre est le symbole de Legendre habituel, fait voir que la fonction $F_m(x)$ ou devient

$$Q(x) = \sum_{\nu=1}^{p-1} \left(\frac{\nu}{p}\right) x^\nu,$$

d'où la congruence (5).

Nous en allons tirer une forme congrue suivant le module p du polynôme

$$P_1(x) = -m! \sum_{\nu=m+1}^{2m} \left(\frac{\nu}{p}\right) x^\nu, \quad (12)$$

somme des m derniers termes du polynôme $-m! Q(x)$.

Soit à cet effet

$$Y_m(y) = c_m y^m + c_{m+1} y^{m+1} + c_{m+2} y^{m+2} + \dots + c_{2m} y^{2m},$$

remplaçons y par $x-1$, et après avoir développé tous les termes du second membre suivant les puissances de x , rejetons tous les termes contenant des puissances inférieures à x^{m+1} . Le polynôme qui resté devra être congru, suivant le module p , à l'expression $P_1(x)$, comme cela résulte immédiatement de la congruence (5). On aura donc pour le module p

$$\left. \begin{aligned} P_1(x) &\equiv c_{m+1} x^{m+1} + c_{m+2} \left[x^{m+2} - \binom{m+2}{1} x^{m+1} \right] \\ &+ c_{m+3} \left[x^{m+3} - \binom{m+3}{1} x^{m+2} + \binom{m+3}{2} x^{m+1} \right] \\ &+ c_{m+4} \left[x^{m+4} - \binom{m+4}{1} x^{m+3} + \binom{m+4}{2} x^{m+2} - \right. \\ &\quad \left. - \binom{m+4}{3} x^{m+1} \right] \\ &+ \dots \\ &+ c_{2m} \left[x^{2m} - \binom{2m}{1} x^{2m-1} + \binom{2m}{2} x^{2m-2} + \dots + \right. \\ &\quad \left. + \binom{2m}{m-1} x^{m+1} \right]. \end{aligned} \right\} (13)$$

Cela étant, soit $p > 3$ et de la forme $4k + 3$, et désignons suivant l'habitude par h le nombre des classes de formes quadratiques, positives et proprement primitives, du déterminant $-p$, c'est-à-dire des formes $(a, 2b, c) = ax^2 + 2bxy + cy^2$, telles que $b^2 - ac = -p$. Si l'on considère les formes telles que

$$a_1x^2 + b_1xy + c_1y^2,$$

l'expression $b_1^2 - 4a_1c_1$ est dite le discriminant, et celui-ci étant posé égal à $-p$, le nombre des classes correspondantes sera désigné par $Cl(-p)$. Les deux nombres h et $Cl(-p)$ sont en relation suivante

$$h = \left(2 - \left(\frac{2}{p}\right)\right) Cl(-p),$$

qui résulte de la circonstance évidente que

$$h = Cl(-4p).$$

Ces remarques faites, on doit à Dirichlet ce résultat classique et bien connu

$$h = \sum_{\nu=1}^m \left(\frac{\nu}{p}\right),$$

le nombre premier p ayant la forme $4k + 3$, et $m = \frac{p-1}{2}$, et cette formule permet d'évaluer la quantité $P_1(1)$ suivant le module p .

On a en effet, d'après (12),

$$\frac{1}{m!} P_1(1) = - \sum_{\nu=m+1}^{2m} \left(\frac{\nu}{p}\right),$$

et si l'on y fait $\nu = p - \mu$, en observant que pour les modules de la forme $4k + 3$

$$\left(\frac{p-\mu}{p}\right) = -\left(\frac{\mu}{p}\right),$$

il vient

$$\frac{1}{m!} P_1(1) = \sum_{\mu=1}^m \left(\frac{\mu}{p}\right) = h,$$

ou bien

$$P_1(1) = m! h.$$

On aura donc une expression du nombre h , si l'on fait $x = 1$

dans la congruence (13); le second membre se simplifie en observant que l'on a

$$1 - \binom{m+q}{1} + \binom{m+q}{2} - \binom{m+q}{3} + \dots + (-1)^{p-1} \binom{m+q}{p-1} \\ = (-1)^{p-1} \binom{m+q-1}{p-1},$$

et il vient

$$m! h \equiv c_{m+1} - \binom{m+1}{1} c_{m+2} + \binom{m+2}{2} c_{m+3} - \binom{m+3}{3} c_{m+4} \\ + \dots + (-1)^{m-1} \binom{2m-1}{m-1} c_{2m} \pmod{p}.$$

On doit ensuite à Jacobi¹⁾ la détermination du signe dans la congruence de Dirichlet

$$m! \equiv \pm 1 \pmod{p}$$

à savoir

$$m! \equiv \left(\frac{2}{p}\right) (-1)^{\frac{h+1}{2}}, \pmod{p = 2m+1}.$$

En substituant cette valeur, on aura donc en définitive,

$$\sum_{v=1}^m \binom{-m-1}{v-1} c_{m+v} \equiv (-1)^{\frac{h+1}{2}} \left(\frac{2}{p}\right) h \pmod{p}, \quad (14)$$

les coefficients c étant définis par le développement de Maclaurin

$$\{\log(1+y)\}^m = c_m y^m + c_{m+1} y^{m+1} + c_{m+2} y^{m+2} + \dots$$

En prenant par exemple $p = 7$, on aura $\log^3(1+y)$

$$= y^3 \left(1 - \frac{1}{2}y + \frac{1}{3}y^2 - \frac{1}{4}y^3 + \dots\right)^3 \\ = y^3 - \frac{3}{2}y^4 + \frac{7}{4}y^5 - \frac{15}{8}y^6 + \dots$$

et la somme (14) devient

$$-\frac{3}{2} + \binom{-4}{1} \frac{7}{4} - \binom{-4}{2} \frac{15}{8} = -\frac{109}{4} = -\frac{218}{8} \equiv -\frac{1}{1} \pmod{7}$$

et on a en effet $h = 1, \left(\frac{2}{p}\right) = 1$.

¹⁾ *Observatio arithmetica de numero classium etc.* (Journal de Crelle, T. 9; Werke T. 6, p. 240). On peut aussi consulter notre article présenté le 14 Janvier 1898 à la Société royale des Sciences de Prague.

La quantité $Q(-1)$ dans le cas de $p = 4k + 3$ s'exprime aussi au moyen du nombre h , car elle est

$$\sum_1^{2m} (-1)^v \binom{v}{p} = - \sum \binom{\lambda}{p} + \sum_{v=1}^m \binom{2v}{p}, \quad (\lambda = 1, 3, 5, \dots, p-2)$$

et si l'on observe que $\lambda = p - 2v$, il vient

$$Q(-1) = 2 \sum_1^m \binom{2v}{p} = 2 \binom{2}{p} h.$$

La congruence (5) donne ensuite pour $x = -1$

$$-m! Q(-1) \equiv Y_m(-2) \pmod{p};$$

le premier membre étant congru avec le nombre

$$(-1)^{\frac{h-1}{2}} 2h,$$

on aura en substituant $y = -2$ dans l'expression de Y_m , la formule suivante

$$(15) \quad \sum_{v=0}^m (-2)^v c_{m+v} \equiv (-1)^{\frac{h-1}{2}} \binom{2}{p} 2h \pmod{p},$$

où l'on a fait usage de la congruence

$$(-2)^m \equiv - \binom{2}{p}.$$

L'exemple précédent donne comme valeur du premier membre

$$1 + \frac{3}{2} \cdot 2 + \frac{7}{4} \cdot 4 + \frac{15}{8} \cdot 8 \equiv 5 \equiv -2 \pmod{7}.$$

Enfin je pose $x = i$ dans la fonction $Q(x)$; et j'observe qu'en posant $\varepsilon = (-1)^{\frac{v-1}{2}}$, on a

$$\binom{v}{p} = \binom{\varepsilon p}{v};$$

pour v impair on a ensuite

$$i^v = \binom{-4}{v} i,$$

et on trouve, par conséquent

$$Q(i) = i \sum_{\nu=1}^{p-1} \left(\frac{-4\varepsilon p}{\nu} \right) + \sum_{\nu=1}^m (-1)^\nu \left(\frac{2\nu}{p} \right).$$

Soit premièrement $p = 4k + 3$, les deux termes du deuxième membre seront respectivement

$$i \sum_{\nu=1}^{p-1} \left(\frac{2\nu}{\nu} \right), - \sum_{\nu=1}^m \left(\frac{2\nu}{p} \right) + 2 \sum_{\nu=1}^{\frac{m-1}{2}} \left(\frac{4\nu}{p} \right); \quad (16)$$

la deuxième de ces expressions qui est

$$- \left(\frac{2}{p} \right) \sum_{\nu=1}^m \left(\frac{\nu}{p} \right) + 2 \sum_{\nu=1}^{\frac{p-3}{4}} \left(\frac{\nu}{p} \right) \quad (16a)$$

se compose de deux parties dont la première a pour valeur

$$- \left(\frac{2}{p} \right) h = \left[-2 \left(\frac{2}{p} \right) + 1 \right] Cl(-\Delta),$$

et dont la seconde s'obtient au moyen de la formule¹⁾ suivante

$$\sum_{\nu=1}^{\left[\frac{\Delta}{4} \right]} \left(\frac{-\Delta}{\nu} \right) = \frac{2 + \left(\frac{2}{\Delta} \right) - \left(\frac{4}{\Delta} \right)}{2} Cl(-\Delta) \quad (17)$$

qui donne

$$2 \sum_{\nu=1}^{\frac{p-3}{4}} \left(\frac{\nu}{p} \right) = \left(1 + \left(\frac{2}{p} \right) \right) Cl(-p).$$

La quantité (16 a) sera donc égale à la suivante

$$\left(2 - \left(\frac{2}{p} \right) \right) Cl(-p) = h.$$

Pour évaluer la somme

$$\sum_{\nu=1}^p \left(\frac{4\nu}{\nu} \right), \quad (16b)$$

j'observe que $4p = D$ est un discriminant fondamental positif et

¹⁾ V. Bulletin de Mr. Darboux, 1897.

pour des tels discriminants a lieu l'équation suivante¹⁾ qui pour D impair provient de Dirichlet,

$$\sum_{\nu=1}^{[\frac{1}{4}D]} \left(\frac{D}{\nu}\right) = \frac{1}{2} Cl(-4D). \quad (18)$$

Il s'ensuit que la somme (16 b) a pour valeur

$$\left(2 - \left(\frac{2}{p}\right)\right) Cl(-p) = h;$$

en somme, on a le résultat suivant

$$Q(i) = (1 + i) h$$

qui subsiste aussi pour le cas de $p = 4k + 1$. On a en effet au lieu de (16)

$$Q(i) = i \sum_{\nu=1}^p \left(\frac{-4p}{\nu}\right) + 2 \sum_{\nu=1}^{\frac{p-1}{4}} \left(\frac{\nu}{p}\right),$$

car ici la somme

$$\sum_{\nu=1}^m \left(\frac{2\nu}{p}\right)$$

est nulle. Les deux parties dont se compose la quantité $Q(i)$ s'obtiennent au moyen des formules (17) et (18) relatives à $\Delta = 4p$ et $D = p$, ce qui vérifie le résultat annoncé, pourvu que l'on prenne, bien entendu,

$$h = Cl(-4p).$$

Cela étant, on conclut de la congruence (5) que si l'on développe la quantité

$$\frac{-1}{m!} \sum_{\nu=m}^{2m} c_{\nu} (i-1)^{\nu} = A + iB, \quad (19)$$

on aura

$$A \equiv B \equiv h \pmod{p}, \quad (19')$$

quel que soit le nombre premier $p (> 3)$, et où l'on a posé $m = \frac{p-1}{2}$.

Dans notre cas considéré plus haut $p = 7$, on a comme la valeur du premier membre

¹⁾ On la trouvera dans un mémoire couronné par l'Académie de Paris, en 1900

$$\begin{aligned}
 A + iB &= -\frac{1}{6} [c_3(i-1)^3 + c_4(i-1)^4 + c_5(i-1)^5 + c_6(i-1)^6] \\
 &= -\frac{1}{6} [2(1+i)c_3 - 4c_4 + 4c_5(1-i) + 8ic_6] \\
 &\equiv (2c_3 - 4c_4 + 4c_5) + i(2c_3 - 4c_5 + 8c_6) \\
 &\equiv 1 + i \pmod{7}.
 \end{aligned}$$

Considérons encore le cas de $p = 5$; on aura

$$c_2 y^2 + c_3 y^3 + c_4 y^4 \sim y^2 \left(1 - \frac{1}{2}y + \frac{1}{3}y^2\right)^2$$

d'où

$$c_2 y^2 + c_3 y^3 + c_4 y^4 = y^2 - y^3 + \frac{41}{12} y^4$$

ce qui pour $y = i - 1$ devient

$$-4i - \frac{17}{3};$$

la division par $-m! = -2$ donne

$$A + Bi \equiv 2i + \frac{17}{6} \equiv 2i + 2 \pmod{5}.$$

L'équation (9) et la suivante

$$Y_n(y) = -\varphi^{(n)}(0)$$

donnent

$$Y_n(y) = \sum_{k=n}^{p-1} y^k D_{x=0}^n \left(\frac{x}{k}\right).$$

Dans le cas qui nous occupe $n = m$, nous avons

$$(20) \quad -m! Q(1+y) \equiv \sum_{k=m}^{2m} y^k D_{x=0}^m \left(\frac{x}{k}\right) \pmod{p}.$$

On a d'ailleurs comme cela résulte des raisonnements établis plus haut

$$c_\nu = D_{x=0}^m \left(\frac{x}{\nu}\right),$$

et la congruence (14) permet de conclure que la fonction entière

$$f(x) = \sum_{\nu=1}^m \binom{-m-1}{\nu-1} \left(\frac{x}{m+\nu}\right)$$

vérifie la congruence relative au module $p = 2m + 1 = 4k + 3$:

$$(21a) \quad f^{(m)}(0) \equiv (-1)^{\frac{m+1}{2}} \left(\frac{2}{p}\right) h.$$

Observons que notre fonction $f(x)$ peut se mettre sous une forme plus simple, à savoir

$$(21b) \quad f(x) = \sum_{\mu=0}^{m-1} (-1)^\mu \frac{x(x-1)(x-2)\dots(x-m-\mu)}{m! \mu! (m+\mu+1)}.$$

Toute transformation ou réduction suivant le module p de cette fonction donne une formule concernant le nombre h .

Une autre représentation algébrique de la fonction $Q(x)$ résulte de la congruence

$$(22) \quad Q(x) \equiv \sum_{\nu=0}^{p-1} \nu^m x^\nu \pmod{p},$$

si l'on observe que le second membre résulte en faisant $z = 0$ dans la dérivée d'ordre m de la fonction de z

$$\sum_{\nu=0}^{p-1} x^\nu e^{\nu z} = \frac{1 - x^p e^{pz}}{1 - x e^z};$$

en d'autres termes,

$$Q(x) \equiv D_{z=0}^m \frac{1 - x^p e^{pz}}{1 - x e^z} \pmod{p}.$$

Cela étant, on a pour z suffisamment petit, le développement

$$\frac{1}{1 - x e^z} = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \dots,$$

où les a_ν sont des fonctions entières de la quantité $\frac{x}{1-x}$, divisées par $1-x$; les coefficients de la fonction entière $(1-x) a_\nu$ ne peuvent contenir le facteur p en dénominateur que si $\nu \geq p$; il s'ensuit que les coefficients du développement

$$\frac{e^{\nu z} - 1}{1 - x e^z}$$

seront divisibles par p tant qu'il s'agit des termes en z, z^2, \dots, z^{p-1} , et cela subsiste même lorsqu'on choisit pour x une valeur rationnelle ou algébrique, telle que $1-x$ reste premier avec p . On aura alors

$$D_{z=0}^m \frac{x^p e^{pz}}{1 - x e^z} \equiv D_{z=0}^m \frac{x^p}{1 - x e^z},$$

et par conséquent

$$Q(x) \equiv D_{z=0}^m \frac{1 - x^p}{1 - x e^z} \pmod{p} \quad (23)$$

En faisant $x = -1$ et supposant $p = 4k + 3$, l'équation

$$Q(-1) = \left(\frac{2}{p}\right) 2h$$

donne ce résultat de Cauchy et de Mr. Hurwitz¹⁾

$$\left(\frac{2}{p}\right) h \equiv D_{z=0}^m \frac{1}{1 + e^z} \pmod{p}$$

La formule $Q(i) = (1 + i)h$ reproduit ce dernier résultat légèrement changé, si $p = 4k + 3$, mais en supposant $p = 4k + 1$ on trouve ce résultat de M. Hurwitz

$$h \equiv D_{z=0}^m \frac{e^z}{1 + e^{2z}}, \pmod{p}.$$

En terminant, remarquons que la fonction $Q(x)$ est complètement définie par la congruence algébrique

$$Q^2(x) \equiv \text{const.} \pmod{X},$$

où

$$X = \frac{x^p - 1}{x - 1},$$

si l'on ajoute que le terme le plus élevé est $(-1)^m x^{2m}$.

Il paraît difficile de parvenir à la détermination de la constante qui est $(-1)^m p$, sans faire usage des racines de l'unité. La solution de ce problème, de la détermination purement algébrique du polynôme $Q(x)$, serait du plus haut intérêt. On doit à M. Zolotarev²⁾ ce résultat important, que les fonctions Y et Z qui vérifient l'identité de Gauss

$$Y^2 - (-1)^m p Z^2 = 4X,$$

s'obtiennent au moyen du développement en fraction continue du quotient $Q(x) : X$. Les procédés de cette espèce deviennent impra-

¹⁾ Acta mathematica, T. 19, p. 351 et ss.

²⁾ Nouvelles Annales de Mathématique, 1872.

ticables, il est vrai, même pour des valeurs relativement petites du nombre p , puisqu'on est amené bientôt à des très grands nombres. Mais sans les regarder comme des algorithmes véritables, les résultats de cette nature ne cessent pas d'être intéressants, et, j'en suis sûr, il doit s'y cacher des vérités très importantes.

-
9. M. K. KOSTANECKI m. t. **Zmiany w jajku mięczaka Mactry, rozwijającym się partenogenetycznie pod wpływem chlorku potasowego.** (*Über die Veränderungen im Inneren des unter dem Einfluss von KCl-Gemischen künstlich parthenogenetisch sich entwickelnden Eis von Mactra*). (*Etude cytologique de la parthénogénèse artificielle des oeufs de Mactra sous l'influence de KCl*).

Im Monate Juli 1902 habe ich in einer vorläufigen Mitteilung¹⁾ die Resultate meiner im Monate April und Anfang Mai 1902 in der zoologischen Station in Neapel vorgenommenen Untersuchung über künstliche Befruchtung und künstliche parthenogenetische Furchung bei Mactra veröffentlicht, jedoch nur insofern, als ich die Vorgänge am lebenden Material unter dem Mikroskop verfolgen konnte. Seitdem habe ich das umfangreiche fixierte und eingebettete Material auf Schnitten genauer untersucht. Der Zweck dieser Untersuchung war vor allem der, über die im Inneren des Eis bei der künstlichen Parthenogenese sich abspielenden Vorgänge Aufschluss zu erhalten. Um jedoch dieselben beurteilen zu können, musste ich zunächst den Reifungs- und Befruchtungsprozess bei diesem Mollusken genauer cytologisch kennen lernen. Sowohl der Reifungs- als auch der Befruchtungsprozess verläuft bei Mactra in der für Mollusken, man kann sagen, typischen Weise. Die unbefruchteten Eier, mögen sie auch mehrere (5--7) Stunden im Meerwasser liegen, zeigen keine Veränderungen; ohne Befruchtung wird also bei Mactra im Gegensatz zu vielen anderen Tierspecies die Richtungsmitose nicht eingeleitet; nach Zusatz von Samen beginnt dagegen das Keimbläschen nach einiger Zeit seine runde Gestalt zu verlieren. An Schnitten von Eiern, welche 20--30 Minuten

¹⁾ Über künstliche Befruchtung und künstliche parthenogenetische Furchung bei Mactra. Bulletin de l'Académie des sciences de Cracovie. Classe des sciences mathématiques et naturelles. Juillet 1902.

nach der Befruchtung fixiert wurden, sieht man seitlich am Kern zwei Strahlungen mit kleinen Centrialkörnchen in der Mitte, welche an dieser Stelle die Kernmembran zum Schwinden bringen und mit ihren Strahlenenden sich mit dem Liningerüst in Verbindung setzen. Die weiteren Vorgänge: Die Ausbildung der I Richtungsspindel mit 12 typischen Chromosomen-Vierergruppen, ihr Vorrücken gegen die Eioberfläche, die Ausstossung des I Richtungskörpers, die Ausbildung der II Richtungsspindel, die Ausstossung des II Richtungskörpers stimmen im wesentlichen so vollkommen mit den Bildern, welche ich bei *Physa fontinalis*, bei *Myzostoma glabrum*, bei *Cerebratulus marginatus* beschrieben und abgebildet habe und welche von einer ganzen Reihe von Autoren für Mollusken und andere Tiere geschildert wurden, überein, dass ich auf eine detaillierte Schilderung verzichten zu können glaube. Bei dem Hinaufrücken der Richtungsspindel gegen die Eioberfläche werden an dieser Stelle die in der Rindenschicht gelegenen grossen Deutoplasmakörner verdrängt und es wird dadurch ein ausgesprochener Gegensatz zwischen dem animalen und vegetativen Pol erzeugt, welcher auch weiterhin verbleibt.

Aus den 12 stäbchenförmigen Chromosomen, welche im Ei nach Ausstossung des II Richtungskörpers verblieben sind, bildet sich ein bläschenförmiger, zunächst etwas lappiger, dann runder Kern. Die Strahlung samt dem Centriol schwindet allmählich, wenn auch einige Zeit lang seitlich vom Kern (infolge der telokinetischen Verlagerungen) Spuren der Strahlung zu sehen sind. Der Kern wandert allmählich von der Eiperipherie gegen das Eiinnere hin und rückt dem ihm sich nähernden Spermakern entgegen. Der Samenfaden bleibt zunächst längere Zeit nahe der Eioberfläche an der Stelle, wo er eingedrungen ist, liegen. Sein Kopf quillt zu einem kleinen, runden, kompakten Kernbläschen an, erst nach Ausstossung des I Richtungskörpers während der II Richtungsmitose gewahrt man neben ihm eine Strahlung. Sowohl in diesem Stadium als auch während der Wanderung des Spermakerns gegen den Eikern kann man dieselben Variationen wie bei *Physa*, *Cerebratulus* und anderen Tieren beobachten; einmal ist in der dem Kern noch dicht anliegenden Strahlung nur ein Centriol, ein andermal sind zwei Centriolen zu sehen; die Strahlung kann sich einmal früher und mehr, ein andermal später und weniger von dem Spermakern entfernen und der Eintritt der Zweiteilung des Centriols

ist auch sehr variabel, indem einmal in verhältnismässig wenig abgerückter Strahlung ein doppeltes Centriol, selbst mit kleiner Centralspindel zu sehen ist, während es ein andermal in der weiter dem Kerninneren zugewendeten Strahlung einfach ist. Nachdem der Eikern eine runde Bläschenform angenommen hat und während er sich dem Eiinneren nähert, wandert ihm dann verhältnismässig rasch der bläschenförmige Spermakern entgegen. Zwischen den beiden Geschlechtskernen sieht man die Spermastrahlung, die in diesem Stadium stets schon doppelte Centriolen enthält. Dieselben entfernen sich von einander, es bilden sich zwei typische Strahlensonnen aus und zwischen ihnen sieht man eine deutliche Centralspindel. Die ganze achromatische Figur gewinnt eine immer mehr symmetrische Lage in der Kopulationsebene der beiden Geschlechtskerne, welche anwachsen und sich dicht aneinanderlegen. Hierauf folgt die Auflösung der Kernmembran und der Zerfall der Kerne in Chromosomen, welche entsprechend ihrer Herkunft deutlich in zwei Gruppen gesondert liegen; mit ihnen stehen zwei mächtige Zugfasernkegel in Verbindung. Wichtig ist es, dass die Strahlungen und ihre Centriolen von der Annäherung der Geschlechtskerne bis zur Ausbildung der karyokinetischen Spindelfigur in deutlicher Weise erhalten bleiben. so dass es für Mactra keinem Zweifel unterliegen kann, dass die achromatische Figur und die Centriolen der ersten Furchungsspindel aus der Spermastrahlung und seinem Centriol hervorgegangen sind.

Schon im Knäuelstadium sieht man die karyokinetische Figur etwas excentrisch gelegen, der eine Pol ist mehr der Eiperipherie genähert; noch deutlicher tritt dies im Stadium des Muttersterns und des Diasters zu Tage. Dieser Lage der karyokinetischen Figur entspricht auch die darauffolgende Teilung des Eies in zwei sehr ungleiche Blastomeren. Bezüglich der Zeit, in welcher bei Mactra die Teilung in zwei Furchungszellen eintritt, kann man grosse individuelle Schwankungen feststellen, indem in einigen Serien die Teilung schon in 1 Stunde 30 Minuten, in anderen erst in 1 Stunde 50 Minuten, selbst in 2 Stunden und einigen Minuten erfolgte¹⁾.

Wie in der oben erwähnten ersten Publication mitgeteilt, habe

¹⁾ Diese Schwankungen betreffen auch die früheren Stadien; so erfolgte bei rasch sich entwickelnden Eiern die Ausstossung des I Richtungskörpers in 35 Minuten, bei anderen in 45–50 Minuten.

ich nach Anwendung verschiedener Salz-Lösungen eine künstliche parthenogenetische Entwicklung der Eier von *Mactra* eintreten sehen. Ich habe vor allem diejenigen Eier cytologisch genauer analysiert, welche durch Zusatz von KCl zur Reifungs- und sodann Furchungsteilung angeregt wurden.

Schon am lebenden Material¹⁾ konnte ich feststellen, dass in den Versuchen, in denen eine Lösung von 5 ccm einer 2 $\frac{1}{2}$ n. KCl-Lösung auf 95 ccm normalen Meerwassers zur Verwendung gelangte, in 45—50 Minuten, also in ungefähr derselben Zeit, wie bei befruchteten Eiern, die Ausstossung des I Richtungskörpers erfolgte; wenn aber die Eier in der Lösung weiterhin verblieben, so wurde der weitere Entwicklungsgang sistiert, es trat die Ausstossung des II Richtungskörpers nur ganz ausnahmsweise, nur in einem sehr geringen Bruchteile der Eier, die Teilung des Eies in zwei Furchungszellen überhaupt gar nicht ein. Werden die Eier aber nach 45 Minuten oder 1 Stunde in frisches Meerwasser übertragen, so erfolgt sowohl die Ausstossung des II Richtungskörpers als auch die Teilung der Eizelle.

In einer zweiten Versuchsreihe, in welcher eine Lösung von 10 ccm 2 $\frac{1}{2}$ n. KCl auf 90 ccm normalen Meerwassers verwendet wurde, erfolgte in den Eiern, solange sie in der Lösung verblieben — wiederum von einem sehr geringen Bruchteil der Eier abgesehen — trotz des Schwundes des Keimbläschens und der Ausbildung der karyokinetischen Figur, die Ausstossung der Richtungskörper überhaupt nicht. Wurden die Eier aber, erst nachdem sie längere Zeit (1 $\frac{1}{2}$ —4 Stunden) in der Lösung verblieben sind, in frisches Meerwasser gebracht, so erfolgte keine Ausstossung der Richtungskörper mehr, aber es trat die Teilung der Eizelle in zwei Furchungszellen ein.

Wenn aber die Eier rechtzeitig (nach $\frac{1}{2}$ Stunde oder einer Stunde) in frisches Meerwasser übertragen wurden, so erfolgte die Ausstossung der beiden Richtungskörper in ungefähr derselben Zeit wie bei befruchteten Eiern und sodann die Teilung des Eies in zwei Zellen in kürzerer Frist als in der ersten Versuchsreihe.

Da ich innerhalb dieser zweiten Versuchsreihe die grösste Versuchszahl angestellt habe und über eine grosse Zahl (19) in ver-

¹⁾ Bezüglich aller näheren Angaben, die sich auf die Beobachtungen am lebenden Material beziehen, sei auf die frühere Publikation verwiesen.

schiedenen Zeitabständen fixierter Stadien verfüge, welche mir die interessantesten Befunde lieferten, so habe ich diese vor allem einer genaueren cytologischen Untersuchung unterzogen und gebe im folgenden die Hauptergebnisse derselben wieder.

Veränderungen an den Eiern, solange sie in dem Gemisch von 10 ccm $2\frac{1}{2}$ n. KCl auf 90 ccm normalen Meerwassers verbleiben:

Wenn die unbefruchteten Eier von *Maetra* in das Gemisch gebracht werden, kann man am lebenden Ei den Schwund des Keimbläschens und dann in den allgemeinsten Zügen die Ausbildung der karyokinetischen Spindel wahrnehmen. Auf Schnitten habe ich zunächst ein Stadium von 30 Minuten untersucht, und da ebenso wie in anderen Versuchen so auch bei diesem nicht alle Eier gleichzeitig sich entwickelten, so habe ich in den Schnittpräparaten dieses Stadiums die verschiedenen Phasen der Ausbildung der ersten Richtungsspindel getroffen. Wir können hierbei die typische Ausbildung der I Richtungsspindel wahrnehmen; wir sehen, wie neben dem grossen Kernbläschen die zwei Strahlungen samt ihren Centriolen erscheinen, wie dann die Kernmembran schwindet und die achromatische Figur sich allmählich mit den zerstreut liegenden Chromosomen, welche entweder die Gestalt von Ringen oder mehr oder weniger deutlichen Vierergruppen aufweisen, verbindet und gegen die Eiperipherie emporrückt.

Die weiteren Stadien der Ausbildung der Richtungsspindel, das Stadium des Muttersterns, der Metakinese u. s. w. verlaufen in ganz derselben Weise wie die entsprechenden Stadien in befruchteten Eiern. Während aber bei befruchteten Eiern, welche sich in normalem Meerwasser entwickeln, die karyokinetische Figur gegen die Oberfläche und darüber hinaus emporrückt und darauf in etwa 35—50 Minuten der I Richtungskörper ausgestossen wird, sehen wir bei diesen Versuchen, dass die karyokinetische Figur in der Regel in der Eizelle verbleibt und sogar tiefer nach dem Einneren zu sinkt.

Das weitere Verweilen der Eier in der Flüssigkeit führt zur Ausbildung von vielpoligen mitotischen Figuren, und zwar sehr mannigfacher Art. Alle diese vielpoligen Mitosen lassen sich darauf zurückführen, dass die Centriolen der ersten Richtungsspindel sich zunächst in zwei Tochtercentriolen, dann bisweilen noch weiterhin teilten und zur Bildung mehrerer Strahlungen führten; diese gruppie-

ren sich um die Chromosomen, welche entweder in einer Gruppe, einer Reihe zusammenliegen, oder aber sich in zwei Gruppen angeordnet, bisweilen auch in zwei Kerne umgewandelt haben.

Noch weiteres Verweilen der Eier in dem Gemisch führt zur Entstehung von ganz abweichenden, meist pluripolaren Strahlenbildern, oder aber zur Bildung von mehrkernigen Zellen.

Meist enthielten derartige mehrkernige Zellen zwei, drei, vier, sechs grössere Kerne, aber bisweilen sah man auch ganze Haufen ganz kleiner Kerne, welche sicherlich darauf sich zurückführen lassen, dass die einzelnen Chromosomen sich in einzelne kleine Kernbläschen umgewandelt haben. Die gewöhnlich in der Rindenschicht angesammelten dunklen Körner fangen an, sich teilweise nach dem Zellinneren zu begeben, was immer das Zeichen der beginnenden Degeneration der Eizelle bedeutet.

Der Aufenthalt der unbefruchteten Eier in dem Gemisch führt also, wie wir kennen gelernt haben, zu weitgehenden verschiedenartigen abnormen Veränderungen innerhalb der Eizelle. Werden aber die Eier rechtzeitig aus dem Versuchs-Gemisch in frisches Meerwasser gebracht, so stossen sie, wie wir am lebenden Material sahen, zwei Richtungskörper aus und teilen sich dann in typische Furchungszellen wie die befruchteten Eier.

Veränderungen an Eiern, welche nach kurzem Aufenthalt in dem Gemisch in frisches Meerwasser gebracht wurden.

Als Grundlage zur Untersuchung dienten mir hier Schnittbilder von Eiern, welche durch zwei Versuche gewonnen wurden. Im ersten dieser Versuche verblieben die Eier in der KCl-Lösung 30 Minuten. Die Eier befanden sich im Augenblick der Übertragung in frisches Meerwasser auf dem Entwicklungsstadium, wo die erste Richtungsspindel ausgebildet ist. Während in Eiern, welche in der Lösung weiterhin verbleiben, die mitotische Figur nicht weiter gegen die Eiperipherie emporrückt, im Gegenteil späterhin sich wieder nach dem Zellinneren zurückzieht, rückt sie hier gegen die Oberfläche und wölbt dieselbe empor; es erfolgt in etwa 45—50 Minuten die Ausstossung des I Richtungskörpers, darauf entwickelt sich eine typische II Richtungsspindel.

Darauf wird in diesem Versuche stets der zweite Richtungskörper ausgestossen und aus den im Ei verbliebenen Chromosomen bildet sich ganz wie in befruchteten Eiern ein bläschenförmiger

Kern. Diese Ausstossung des II Richtungskörpers erfolgte in den schnell sich entwickelnden Eiern in 1 Stunde 25—30 Minuten, in einigen allerdings verzögerte sie sich bedeutend. Einige Eier begannen sich nach $3\frac{1}{2}$ Stunden in die Länge zu strecken und sich nach 4 Stunden zu teilen, viele teilten sich aber erst viel später. Von der Ausstossung des II Richtungskörpers bis zur Teilung der Eizelle in zwei Furchungszellen verstrich also ein Zeitraum von ungefähr $2\frac{1}{2}$ Stunden, während er in befruchteten Eiern durchschnittlich nur 45 Minuten beträgt. Dies legte schon von vornherein den Gedanken nahe, dass innerhalb dieser Zeit sich bei diesem Versuche innerhalb der Eizelle komplizierte und deshalb lange Zeit in Anspruch nehmende Vorgänge abspielen mussten.

Zum Studium dieser Vorgänge hatte ich von diesem Versuche nur eine gut erhaltene Serie von $3\frac{1}{2}$ Stunden zur Verfügung. Da aber die Eier sich nicht gleichmässig und gleichzeitig entwickeln, so erhält man auf Schnittpräparaten die verschiedensten Stadien neben einander, welche sich zu einer vollkommenen Reihe zusammenschliessen.

Den Ausgangspunkt für die weiteren Vorgänge bildet das Stadium, wo nach Ausstossung der beiden Richtungskörper sich aus den in der Eizelle verbliebenen Chromosomen das Kernbläschen gebildet hat; nach innen zu von ihm ist, wenn auch keine Strahlung mehr, so doch die Spur einer radiären Anordnung der Plasmakörnchen noch zu sehen. Vergleichen wir dieses Stadium mit dem entsprechenden Stadium des befruchteten Eies, so ist eine vollkommene Ähnlichkeit nicht zu verkennen; der einzige Unterschied besteht eben in dem Mangel des Spermakerns und seiner Strahlung.

Wenn nun in einem derartigen Ei sich in der Folge die karyokinetische Figur der ersten Furchungsspindel entwickelt, welche, wie die Schnittbilder entsprechender Stadien lehren, der Furchungsspindel eines befruchteten Eies vollkommen ähnlich sieht, so wäre es a priori am wahrscheinlichsten, dass einfach das im Ei verbliebene Eicentrosoma sich teilt und so den Ausgangspunkt zur Bildung einer typischen mitotischen Figur liefert.

Nichts derartiges ist der Fall. Man trifft auf Schnitten keine Figuren, welche für eine Deutung in diesem Sinne sich verwerten liessen.

Ich habe vielmehr in meinen Präparaten eine Fülle von mitotischen Figuren oder Mitosen ähnlichen Bildern getroffen, welche

auf andere Vorgänge hindeuten und welche es mir zunächst schwer war, in genetische Beziehung zu einander zu bringen. Bei genauerer, eingehender Prüfung war es aber zu erkennen, dass dieselben sich in zwei Gruppen von Bildern einreihen lassen, welche ein ganz anderes Aussehen darbieten. Die ungemein charakteristischen Mitosen der einen Gruppe kennzeichnen sich dadurch, dass der ganze Prozess sich vorwiegend innerhalb des Kerns abzuspielen scheint, ohne dass im Protoplasma weitergehende strukturelle Veränderungen sich wahrnehmen liessen.

In den Anfangsstadien erscheint der Kern etwas in die Länge gestreckt, sein Chromatin liegt in Form von dünnen Fäden den Lininfasern an, welche zum grössten Teil quer zur Längsachse des Kerns, und zwar mehr an der Oberfläche des Kernbläschens verlaufen. Um den Kern herum sieht man im Protoplasma die Andeutung einer Strahlung, aber nicht ausgesprochene Strahlen, sondern nur eine radiäre Anordnung der Plasmakörnchen, welche nicht auf einen Punkt, sondern auf den ganzen Kern gerichtet sind. Dieselbe Andeutung der Strahlung ist auch fernerhin zu sehen. Der Kern wird darauf gleichsam tonnenförmig, die Lininfäden ordnen sich längs der Querachse des Kerns an und konvergieren deutlich gegen die Mitte der abgeflachten Längsseite des Kerns. Das Chromatin liegt in Form von Fäden, an denen sogar einzelne Chromatinkörner (Pflitzner'sche Körner) bisweilen zu sehen sind, den Lininfäden an. Wir haben ein Bild vor uns, das, was die Chromatinverhältnisse betrifft, mit dem Stadium des s. g. dichten Knäuels sich deckt. Der Kern fängt sodann an, sich in der entgegengesetzten Richtung zu strecken, es entsteht eine Art von kurzer, breiter Spindel, auf der die einzelnen schon herausdifferenzierten Chromosomen in Form von Schleifen angebracht sind, es sind deutlich zwei Pole zu unterscheiden, in denen die Spindelfasern zusammenlaufen. Ein Centriol oder ein Gebilde, das man mit einem Centrosoma vergleichen könnte, ist an den Polen nicht zu sehen, ebensowenig eine Polstrahlung. Die Spindel wird sodann schlanker, die Chromatinschleifen rücken gegen ihren Äquator und es entsteht eine sehr charakteristische Muttersternfigur. Die Konturen der Spindel mit ihren spitzen Polen heben sich scharf von der Umgebung ab, die ganze Spindel bildet einen vollkommen in sich abgegrenzten Körper, indem auch die Chromosomen sich genau im Rahmen der fädigen achromatischen Spindel halten und

selbst mit ihren freien Enden nicht über deren Bereich hinausgehen.

Nach dem Stadium des Muttersterns folgt die Metakinese. Im Stadium des Muttersterns, zum Teil auch schon früher, muss eine Spaltung der Chromatinschleifen erfolgt sein; in den Eikern sind nämlich nach Ausstossung des II Richtungskörpers 12 Chromosomen übergegangen, welche dann in Form von Chromatinschleifen sich aus dem Kern herausdifferenzieren; nach erfolgter Metakinese kann man feststellen, wenn auch die Zählung bisweilen auf grosse Schwierigkeiten stösst, dass nach beiden Polen je zwölf oder annähernd soviel Chromosomen wandern. Man kann schon im Stadium der Metakinese wahrnehmen, dass die Spindel wiederum etwas weniger schlank erscheint und sich an den Polen abzuplatten beginnt. Diese Abplattung wird viel ausgesprochener im Diasterstadium. Die Chromosomen rücken ganz an das Ende der Spindel, wo sie zunächst dicht beisammen liegen, sodann fliessen sie unter einander zusammen.

Diese Abplattung der Spindel und die Gruppierung der Chromatinmasse in einen länglichen Chromatinstreifen besteht auch dann noch, wenn aus dem Chromatin einheitliche Kernbläschen sich zu formen beginnen; zwischen den Kernen sieht man Reste der Centralspindel, welche in Körnchen zu zerfallen beginnt; und wenn dann die Tochterkerne immer mehr bläschenförmig werden und der runden Form zustreben, bleibt schliesslich zwischen ihnen nur noch eine körnige Masse als Überrest der Centralspindel. Auch diese schwindet in dem Masse, als die Kernbläschen sich vergrössern und sich gegenseitig bis zur Berührung nähern. Die sich berührenden Kerne können darauf miteinander verschmelzen, entweder auf einer kleinen Strecke oder vollkommen.

Ich habe in meinen Präparaten in diesen Stadien auch Abweichungen von dem gewöhnlichen Verlauf insofern beobachtet, als ich bisweilen dreipolige oder vierpolige Spindeln angetroffen habe, ebenso Eier, in denen drei oder auch vier bläschenförmige Kerne enthalten waren, welche sich wohl aus den drei- oder vierpoligen Mitosen herleiten lassen.

Wir sehen, dass der Prozess dieser „intranucleären Karyokinese“ gewöhnlich zur Ausbildung zweier bläschenförmiger Kerne führt, dass dadurch also ein Zustand erreicht wird, der dem Bilde gleicht, welchem wir im befruchteten Ei nach Annäherung der

Geschlechtskerne begegnen; sogar die dreikernigen Eier gleichen polysperm befruchteten Eiern. Aber ein fundamentales Merkmal fehlt, nämlich: die aus der Spermastrahlung stammenden Strahlensonnen samt ihren Centriolen, welche wir auf diesem Stadium in befruchteten Eiern stets angetroffen haben.

Es wirft sich hier von selbst die Frage auf, ob die zweikernigen Eizellen sich in der Folge nicht durch Einschnürung des Zelleibes in zwei Zellen teilen können. In meinen Präparaten finde ich keine Bilder, welche hierfür sprächen. In den Präparaten dieses Stadiums waren die Eier noch ungeteilt, eine Einschnürung des Zelleibes war bei den zweikernigen Eizellen nicht zu sehen. (Die Teilung erfolgte erst nach einer weiteren halben Stunde, d. i. vier Stunden vom Beginn des Experiments). Die nahe Lage der beiden Kerne, ihre teilweise oder völlige Verschmelzung spricht gegen diese Annahme. Vor allem habe ich aber in diesen Präparaten Bilder angetroffen, welche unzweifelhaft darauf hindeuten, dass in den zweikernigen Eizellen Vorgänge zur Ausbildung weiterer neuer mitotischer Figuren eingeleitet wurden.

Da diese Mitosen in allen Punkten denjenigen mitotischen Figuren glichen, welche ich vorwiegend in den dem folgenden Versuche entnommenen Präparaten vorfand, so will ich sie auch zugleich mit den Präparaten des zweiten Versuchs, zu dessen Schilderung ich jetzt übergehe, besprechen.

In diesem Versuche verblieben die Eier in dem KCl-Gemisch 1 Stunde. Auf Schnitten von Eiern, welche sofort nach Entnahme aus dem Gemisch fixiert wurden, sieht man die II Richtungsspindel, welche vorhin bereits mehr peripher gelegen war, sich wieder nach dem Eiinneren begeben. Wenn aber die Eier in frisches Meerwasser gebracht wurden, rückte die mitotische Figur wieder gegen die Eioberfläche empor, es erfolgte rasch die Ausstossung des I Richtungskörpers, sodann an einer grossen Zahl von Eiern auch die Ausstossung des II Richtungskörpers und von da an erschien der Verlauf dieses Versuchs, soweit man ihn am lebenden Material verfolgen konnte, ganz ähnlich wie beim vorigen Versuch; das Tempo war aber ein rascheres; während nämlich in dem vorigen Versuch die Mehrzahl der Eier erst nach 4 Stunden und später sich teilte, begann hier die Teilung an einer grossen Zahl der Eier schon nach $3\frac{1}{2}$ Stunden, obwohl die Ausstossung des

I Richtungskörpers verzögert wurde und anstatt nach etwa 45 Minuten, erst nach mehr als 1 Stunde erfolgte.

Auch von diesem Versuche habe ich nur ein Stadium, nämlich von $3\frac{1}{2}$ Stunden fixieren können. An den Präparaten dieser Schnittserie habe ich mich überzeugen können, dass ein Teil der Eier zwei Richtungskörper ausgestossen hatte, aber viel zahlreicher waren die Eier, die nur einen Richtungskörper aufwiesen. Letztere wollen wir später besonders besprechen; wenn wir vorläufig nur denjenigen Eiern Aufmerksamkeit schenken, welche zwei Richtungskörper aufwiesen, so lässt sich feststellen, dass dieselben im Inneren des Zelleibes verschiedene Bilder darboten. Eine kleinere Zahl von Eiern wies „intranucleäre“ Mitosen im Knäuel-, Mutterstern-, Diaster-, Dispiremstadium auf, wie wir sie beim vorigen Versuch geschildert haben. In grosser Zahl fanden sich zweikernige Eizellen, in denen die beiden bläschenförmigen Kerne entweder bis zur Berührung nahe bei einander lagen oder teilweise verschmolzen waren; oder auch einkernige Zellen, deren grosse Kerne jedoch die Entstehung aus zwei Kernen erkennen liessen. Vorwiegend aber habe ich in den zwei Richtungskörper aufweisenden Eizellen dieses Versuchs in grosser Zahl Mitosen angetroffen, die durch eine ausgebildete Polstrahlung sich auffallend von den intranucleären Mitosen unterschieden, dadurch aber den gewöhnlichen Mitosen näher kamen. Dieser Typus von Mitosen war auch in den Präparaten des vorigen Versuchs zu sehen und ich habe oben auf ihr Vorkommen hingewiesen, ihre genauere Analyse jedoch mir bis zur Besprechung des zuletzt geschilderten Versuchs vorbehalten. Die einzelnen Bilder dieser Mitosen fügten sich zu einer dicht geschlossenen Reihe zusammen. Das Endresultat dieser Reihe ist die Ausbildung einer typischen Furchungsspindel und darauf Teilung des Eies in zwei Furchungszellen. Betrachten wir zunächst das Bild des Muttersterns, dann die Diasterstadien bis zur vollzogenen Furchungsteilung, so erblicken wir sofort einen auffallenden Unterschied im Vergleich mit den vorhin als „intranucleäre Karyokinese“ beschriebenen Bildern einerseits, andererseits eine vollkommene Ähnlichkeit mit den entsprechenden Stadien in befruchteten Eiern. Wir sehen hier die Furchungsspindel gleichfalls senkrecht zur Achse des Eies, welche den animalen mit dem vegetativen Pol verbindet, gelegen. Die anfangs symmetrisch mitten im Ei gelegene Spindel nähert sich später gewöhnlich mit

ihrem einen Pole seitlich der Zelloberfläche; es erfolgt dann meist die charakteristische Teilung des Eies in zwei ungleiche Zellen, wie in befruchteten Eiern; jedoch nicht ständig, bisweilen unterscheiden sich die Tochterzellen nur wenig bezüglich ihrer Grösse oder sind auch vollkommen gleich gross. Bezüglich der achromatischen Teile der Spindelfigur, der Polstrahlung, der Centralspindel, des sich aus derselben bildenden Zwischenkörpers, sehen wir ganz dieselben Verhältnisse wie in befruchteten Eiern, nur distinkte punktförmige Centriolen kann man an den Polen nicht beobachten.

Die Bilder dieser karyokinetischen Figuren sind so charakteristisch, dass eine Verwechslung derselben mit den vorhin beschriebenen „intranucleären Karyokinesen“ ausgeschlossen ist. Vor allem ist es hier die ausgesprochene mächtige Polstrahlung, welche in die Augen fällt. Dieses Merkmal habe ich vor allem benutzt, um ihre Entstehung rückzuverfolgen, und ich habe eine Reihe von Bildern der karyokinetischen Spindel gefunden, welche sich mit aller Deutlichkeit als Vorstufen dieser Spindeln zu erkennen geben. Zunächst Bilder von fädigen Centralspindeln mit mächtiger Polstrahlung an den beiden Polen und neben derselben die Chromosomen gewöhnlich in zwei Gruppen angeordnet.

Sodann sah ich ganz ähnliche Bilder, welche sich aber dadurch unterschieden, dass die Spindel, auf deren beide Pole die Strahlung gerichtet war, nicht aus feinen Fäden bestand, sondern eine einheitliche in Protoplasmafarbstoffen sich dunkler homogen tingierende Masse darstellte. Diese Bilder leiten uns zu ganz ähnlichen Bildern hinüber, in denen die Protoplasmastrahlung jedoch gegen die beiden Pole zwar ein wenig ausgesprochener ist, der überwiegende Teil der Strahlung aber nicht deutlich dicentrisch angeordnet, sondern auf die Spindel als ganzes gerichtet ist; und diese wiederum zu Bildern, in denen das meist gleichfalls in zwei Gruppen angeordnete Chromatin auf einer dunkleren ovalen Plasmamasse ruht, von welcher aus gleichmässig im Umkreise eine feine Strahlung ausgeht.

Als Vorstufen dieses Stadiums erscheinen uns Bilder, wo wir zwei gesonderte Chromosomengruppen vor uns haben und im Zellleibe sich eine feine Strahlung ausbreitet, welche auf einen idealen Punkt zwischen den beiden Chromosomengruppen centriert ist.

Schliesslich habe ich Figuren gesehen, in denen zwei Chromosomengruppen ohne Spur einer Strahlung zu sehen waren; bis-

weilen lagen diese Chromosomen in helleren Feldern, welche noch die Umrisse von Kernen, aus denen sie hervorgegangen sind, erkennen liessen.

Und hiermit nähern wir uns der Frage nach dem Ausgangspunkt dieser mitotischen Figuren. Ich glaube, dass derselbe in den zweikernigen Eizellen zu suchen ist, welche ich in derselben Schnittserie sowie in den Präparaten des vorigen Versuchs in grosser Zahl angetroffen habe. Was aber die Herleitung dieser zweikernigen Eizellen betrifft, so möchte ich nochmals daran erinnern, dass in den Präparaten dieser Schnittserie und denen des vorigen Versuchs auch Bilder der „intranucleären“ Karyokinese zu finden waren, so dass wohl angenommen werden darf, dass durch den Prozess der „intranucleären Karyokinese“ zwei Kerne gebildet wurden, (welche entweder ihre Selbständigkeit behalten oder mit einander verschmelzen konnten), dass diese Kerne dann von neuem in zwei Chromosomengruppen zerfallen. In der Eizelle erscheint hierauf eine Strahlung, welche auf den Raum zwischen den beiden Kernen gerichtet ist; an eben derselben Stelle erscheint sodann im Centrum der Strahlung zwischen den Kernen eine dichte Plasmamasse, welche zu einer kompakten homogenen Spindel sich umgestaltet; später nimmt die Spindel eine fibrilläre Struktur an; die Strahlung, welche zunächst auf einen idealen Punkt zwischen den Kernen, dann auf die Plasmamasse zwischen ihnen centriert war, beginnt sich um die beiden Spindelpole zu gruppieren, wobei die einzelnen Strahlenfibrillen stärker werden und schliesslich sind sämtliche Polstrahlen ausschliesslich auf die beiden Spindelpole gerichtet. Die anfangs einheitliche, dann fädige Spindel wächst allmählich zu immer grösserem Umfange heran, die zunächst in zwei Haufen gruppierten Chromosomen ordnen sich im Äquator der Spindel an.

Bevor also in den Eiern von *Mactra* bei diesen Versuchen die Ausbildung einer Furchungsspindel eingeleitet wird, wird zunächst, was die Kernverhältnisse betrifft, durch die intranucleäre Karyokinese ein Zustand hergestellt, der demjenigen in befruchteten Eiern gleichen würde. Dass wir dies jedoch nicht als ständige Erscheinung bei der s. g. künstlichen Parthenogenese auch bei Anwendung anderer Gemische betrachten dürfen, lehren schon die Arbeiten anderer Autoren, welche cytologisch die Eier untersucht, aber einen ähnlichen Vorgang nicht beobachtet haben.

Es könnte aber die Frage aufgeworfen werden, ob bei diesen Versuchen stets in der Eizelle durch die „intranucleäre Karyokinese“ der zweikernige Zustand hergestellt werden muss und erst nach Auflösung dieser zwei Kerne in Chromosomen die typische mit mächtiger Polstrahlung ausgestattete Furchungsspindel entsteht -- ob nicht die ausgebildete „intranucleäre Spindel“ bisweilen auch unter Entwicklung einer Polstrahlung zur Furchungsspindel werden kann. In meinen Präparaten sehe ich keine Anhaltspunkte für eine solche Annahme, mit ganz absoluter Sicherheit ausschliessen kann ich sie indess nicht.

Ich möchte aber hervorheben, dass ich in den Präparaten dieses Versuchsstadiums an den zwei Richtungskörper aufweisenden Eizellen auch Bilder gesehen habe, welche haben schliessen lassen, dass die Chromosomen der Furchungsspindel auch aus einem Kern entstehen können, indem ich auf der sich ausbildenden Spindel bisweilen die Chromosomen in einer Gruppe beisammen, und zwar in geringer Menge liegen sah.

Wie oben erwähnt, hatte in diesem Versuche nach einstündigem Verweilen in dem Gemisch und nach Übertragung in frisches Meerwasser ein grosser Teil der Eier nicht zwei, sondern nur einen Richtungskörper ausgestossen, während, wie wir sahen, im vorigen Versuche, wo die Eier nicht eine ganze Stunde, sondern nur eine halbe Stunde in dem Gemisch verblieben waren und darauf in frisches Meerwasser gebracht wurden, an allen Eiern zwei Richtungskörper ausgestossen wurden. Offenbar wurden die Eier durch das längere Verweilen in dem KCl-Gemisch angegriffen, wenn auch nicht in dem Grade, wie bei den folgenden Versuchen, wo ein noch längeres Verweilen der Eier in dem Gemisch viel tiefer gehende Veränderungen verursachte, so dass die Eier, wie wir unten genauer sehen werden, in frisches Meerwasser gebracht, überhaupt keine Richtungskörper mehr ausstossen.

Im Inneren dieser Eier mit nur einem Richtungskörper habe ich verschiedene Bilder angetroffen, welche genau an die Bilder erinnerten, welche an den Eiern mit zwei Richtungskörpern zu sehen waren. Es fanden sich „intranucleäre“ Mitosen im Knäuel-, Mutterstern-, Diaster-, Dispiremstadium mit stäbchen- oder schleifenförmigen Chromosomen, es fanden sich zweikernige Zellen mit nahe bei einander liegenden oder verschmolzenen Kernen, dann einkernige Zellen mit Kernen von verschiedener Grösse, sodann

verschiedene Bildungsstadien von Spindeln mit Polstrahlung, ganz ähnlich denen, die wir oben beschrieben haben; die Chromosomen lagen in einer oder in zwei Gruppen, auch aus ihrer Anzahl konnte man schliessen, dass ein oder zwei Kerne in Mitose übergegangen sind; sodann sah man typische mit schöner Polstrahlung ausgestattete Furchungsspindeln im Mutterstern-, Diasterstadium, dann die beginnende oder durchgeführte Teilung in zwei gleiche oder ungleiche Tochterzellen.

Veränderungen an Eiern, welche nach längerem Aufenthalt in dem KCl-Gemisch in frisches Meerwasser gebracht wurden.

Wir haben oben gesehen, dass, solange die Eier in dem KCl-Gemisch bleiben, sie von ausserordentlich seltenen Ausnahmen abgesehen, trotz des Schwundes des Keimbläschens und der Ausbildung der Richtungsspindel keine Richtungskörper ausstossen, dass vielmehr die sich herausbildende Richtungsspindel in dem Ei verbleibt und bei weiterem Verweilen der Eier in dem Gemisch zum Ausgangspunkt vielpoliger Mitosen wird; diese Mitosen führen schliesslich, wie wir sahen, zu einem mehrkernigen Zustand der Eizelle.

Wenn aber die Eier nach $1\frac{1}{2}$ -, 2-, 3- oder selbst 4-stündigem Verweilen in dem KCl-Gemisch in frisches Meerwasser gebracht wurden, so teilten sie sich in zwei Furchungszellen und die Teilung schritt auch weiterhin fort, aber die Ausstossung der Richtungskörper blieb aus.

Zum Studium der Veränderungen, welche dann im Inneren des Eies im frischen Meerwasser vor sich gehen, dienten mir Serienschritte von Eiern, welche 3 Stunden in der KCl-Lösung verblieben, dann in frisches Meerwasser gebracht wurden und nach 1-stündigem Verweilen in demselben fixiert wurden. Die einzelnen Eier dieser Serie befanden sich wiederum, wie bei diesen Versuchen stets, in verschiedenen Entwicklungsphasen, einige Eier enthielten grosse, runde Kerne im Ruhestadium, in anderen waren Knäuel-, Mutterstern-, Diasterstadien, andere Eier waren in zwei Furchungszellen geteilt, andere zeigten wiederum schon in den beiden Furchungszellen Mitosen, welche die weitere Teilung einleiteten.

Was das Bild der einzelnen Phasen betrifft, so bot es wiederum in den einzelnen Eiern nicht immer dasselbe Aussehen dar. Bilder, welche an die vorangehenden abnormen und komplizierten

vielpoligen Mitosen erinnern könnten, waren nicht mehr anzutreffen. Die Eier, welche ruhende Kerne enthielten, waren teils ein-, teils zwei-, teils vierkernig. Die Kerne waren stets grosse kugelige Bläschen mit deutlichem Kerngerüst. Die Herleitung dieser Kerne ergibt sich aus den vorhin beobachteten Stadien von selbst. Der vierkernige Zustand leitet sich von den vorhin beobachteten vierpoligen Mitosen her. Die zwei- und einkernigen Bilder dürften Mitosen entsprechen, wo die Chromatinmasse trotz der Pluripolarität der achromatischen Figur sich nicht in vier Gruppen geteilt hat; oder vielleicht haben wir hier aus mehreren Einzelkernen verschmolzene Kerne vor uns.

Häufig waren Bilder, die als „Knäuelstadien“ aufgefasst werden mussten; man sah entweder zwei Gruppen sich erst herausdifferenzierender, noch unregelmässiger Chromatinschleifen und zwischen ihnen bisweilen noch die Konturen der sich hier offenbar berührenden Kerne, oder aber vier Chromatingruppen, welche ihre Herkunft aus vier besonderen Kernen bekundeten. Die Chromatingruppen lagen gewöhnlich auf einer einheitlichen, dichterem, sich dunkler tingierenden Plasmamasse, um welche man eine schwache, radiäre strahlige Anordnung der Plasmateile wahrnehmen konnte.

Sodann sah man zwischen den Chromosomengruppen Spindelbilder mit mehr ausgesprochener Strahlung, in einigen Bildern war dieselbe jedoch noch nicht deutlich auf die beiden Spindelpole centriert, in anderen ging dieselbe deutlich von den beiden Spindelpolen aus und an den Polen sah man sogar äusserst kleine, sich dunkler tingierende Punkte, welche wie typische Centriolen aussahen. Diese Spindeln leiten uns unmittelbar zu dem Stadium eines typischen Muttersterns hinüber.

Neben diesen mehr „typischen“ karyokinetischen Figuren habe ich in dieser Serie, wenn auch seltener, auch abweichende, abnorme Mitosen gesehen, was in Anbetracht der vorangegangenen weitgehenden Veränderungen innerhalb der Eizelle leicht erklärlich ist. Dass aber der grösste Teil auch dieser anfänglich abnormen Mitosen wahrscheinlich der Ausbildung typischer, zweipoliger Furchungsspindeln zustrebt, möchte ich daraus entnehmen, dass ich im Diasterstadium stets nur ganz typische zweipolige Spindeln angetroffen habe, welche ganz den Bildern des Diasterstadiums in befruchteten Eiern glichen.

Bemerkenswert war in diesen Figuren im Mutterstern-, im

Diasterstadium die grosse Zahl der Chromosomen von mehr oder weniger deutlicher Schleifenform; die Herkunft der Chromosomen aus mehreren Kernen bietet die Erklärung dafür.

Gewöhnlich, aber nicht immer, sieht man im Stadium des Muttersterns ebenso im Stadium des Diasters die Furchungsspindel ganz ähnlich wie in befruchteten Eiern mit ihrem einen Pole näher der Eioberfläche gerückt; nach erfolgter Furchungsteilung sind dann auch in diesem Falle die Tochterzellen ganz ebenso wie die aus dem befruchteten Ei hervorgegangenen beiden ersten Furchungszellen von ungleicher Grösse, in anderen Fällen dagegen trifft man auch gleich grosse Zellen.

Wenn wir bedenken, dass die besprochenen mitotischen Figuren aus hochgradig abnormen Mitosen hervorgegangen sind, so müssen wir feststellen, dass Eier, welche durch längeres Verweilen in der KCl-Lösung bereits weitgehende Entwicklungsstörungen und Abnormitäten aufwiesen, doch noch in frisches Meerwasser gebracht unter Überwindung der eingetretenen Veränderungen, also durch eine Art „Regulation“, einen Zustand herzustellen bestrebt sind, der dem Bilde der Furchungsspindel sich nähert, wie es im Ei bei der künstlichen Parthenogenese unter günstigeren Verhältnissen (s. o.) oder im befruchteten Ei sich darstellte.

Das Problem der künstlichen Parthenogenese hat bereits eine umfangreiche Literatur aufzuweisen.

Die überwiegende Zahl der bezüglichen Arbeiten ¹⁾ beschäftigt sich aber nur damit, ob überhaupt und unter welchen Verhältnissen und Bedingungen (Grad der Konzentration der angewandten Gemische, Zeit des Belassens der Eier in denselben, Höhe der Temperatur u. s. w.), die unbefruchteten Eier zur Entwicklung angeregt werden können und bis zu welchem Grade diese Entwicklung fortschreitet. Sodann ist in den Arbeiten der Hauptnachdruck auf die Ergründung der physikalisch-chemischen Natur des Reizes gelegt. Arbeiten jedoch, die unmittelbar unser Thema berühren, nämlich die Ergründung der im Inneren des unbefruchteten Eis

¹⁾ Hierher gehören die Arbeiten von R. Hertwig, Morgan, Loeb und seinen Schülern Fischer, Hunter, sodann von Winkler, Yves Delage, Bataillon, Giard, Mathews, Wilson, Prowazek, Viguier, Greeley, Rondeau-Luzeau, Mead, Wassilieff, Lyon, Meltzer.

bei der künstlichen Parthenogenese sich abspielenden Vorgänge bezwecken, sind bisher nur spärlich. Es sind dies die Arbeiten von R. Hertwig ¹⁾, Morgan ²⁾, Wilson ³⁾, Wassilieff ⁴⁾. Und die Resultate dieser Arbeiten lassen sich auch nicht unmittelbar mit den Ergebnissen unserer Untersuchung vergleichen, weil in ihnen die Versuche an Eiern anderer Tiere und mit anderen Gemischen vorgenommen wurden. Vorwiegend wurden diese Versuche an reifen Eiern der Echinodermen ausgeführt, bei denen innerhalb der Geschlechtsorgane die Richtungskörper ausgestossen wurden.

Eine Zusammenstellung der Resultate dieser Autoren und ein Vergleich derselben untereinander und mit meinen Resultaten ergibt eine grosse Verschiedenheit in der Bildungsweise der ersten Teilungsspindel. Das genauere Studium der Arbeiten lässt uns ersehen, dass die Aussicht ausgeschlossen erscheinen muss, dass bei diesem Vorgange für die Bildung der Furchungsspindel ein einheitlicher Typus sich feststellen liesse; wir dürfen mit Sicherheit behaupten, dass die Unterschiede sich nicht etwa auf eine verschiedene Deutung der Befunde seitens der Autoren zurückführen lassen, sondern dass in der Tat in den Eiern verschiedener Tiere oder bei Anwendung von verschiedenen Agentien, mag der Unterschied in dem Verfahren auch nur ein geringfügiger sein, ein anderer Entwicklungsweg eingeschlagen werden kann, welcher zur Bildung einer mehr oder weniger typischen Furchungsspindel (d. h. einer Furchungsspindel, welche derjenigen in dem befruchteten Ei derselben Tierspezies möglichst nahe käme) führt. Auf Grund der bisherigen Beobachtungen können wir feststellen, dass zunächst die

¹⁾ Hertwig R.: Über die Entwicklung des unbefruchteten Seeigeleies. Festschrift für Gegenbaur. II. 1896.

²⁾ Morgan T. H.

a) The Production of artificial Astrospheres. Archiv für Entwicklungsmechanik Bd. III. 1896.

b) The action of Salt-Solutions on the Unfertilized and Fertilized Eggs of Arbacia. Archiv für Entwicklungsmechanik Bd. VIII, 3. 1899.

c) Further Studies in the Action of Salt-Solutions and other Agents on the Eggs of Arbacia. Archiv für Entwicklungsmechanik X, 2, 3. 1900.

³⁾ E. B. Wilson: Experimental Studies in Cytology. I. A Cytological Study of Artificial Parthenogenesis in Sea-Urchin-Eggs. Archiv für Entwicklungsmechanik der Org. Bd. XII.

⁴⁾ Wassilieff Alexander: Über künstliche Parthenogenesis der Seeigeleier. Biol. Centralbl. Bd. 22. Nr. 24.

Bildungsweise der Furchungsspindel sich nicht an die Vorgänge der bei einigen Tieren vorkommenden natürlichen Parthenogenese anlehnen lassen; sodann geben sie uns vorläufig zwei, in den Hauptzügen grundverschiedene Bildungsmodi der Teilungscentren und der Furchungsspindel zu erkennen:

1) Die Arbeiten Morgans und Wilsons beweisen, — darüber kann gegenwärtig kein Zweifel sein — dass die Einleitung der künstlichen Parthenogenese des reifen Seeigels bei ihren Untersuchungsmethoden darauf beruht, dass im Protoplasma in grösserer Zahl Strahlungen entstehen, mit distinkten Gebilden in ihrem Centrum, die sich durch Zweiteilung vermehren können und sich durch ihr ganzes Verhalten als Centrosomen dokumentieren. Eine Sphäre mit einem Centrosoma in der Mitte erscheint mit Vorliebe neben dem vorläufig intakten Eikern und durch ihre Teilung geht unter Auflösung der Kernmembran die Bildung der Furchungsspindel hervor, während die anderen Astrosphären mit ihren Centrosomen keine weitere Rolle spielen.

2) Die Arbeiten R. Hertwigs, Wassilieffs und meine Befunde (von dem Augenblick an, wo nach Ausstossung der Richtungskörper sich ein bläschenförmiger Eikern bei *Maetra* gebildet hat) ergeben, dass das Protoplasma anfangs an den Veränderungen sich nur insofern beteiligt, als eine schwach ausgeprägte, auf den Kern als Ganzes centrierte Strahlung entsteht, dass aber deutliche Veränderungen, welche zur Bildung einer Spindel führen, sich anfangs fast ausschliesslich am Kern abspielen und erst nachträglich das Protoplasma sich daran mitbeteiligt.

In dem einen wie in dem anderen Falle kommt es, wenn sich eine zweipolige, mit Polstrahlung ausgestattete Spindel gebildet hat, zur Teilung des Eis in zwei Furchungszellen.

Wenn wir die künstliche parthenogenetische Entwicklung des Eis mit der Entwicklung des befruchteten Eis vergleichen, so lässt sich nach dem heutigen Stand der Untersuchungen der Unterschied am besten dahin zusammenfassen: „Die befruchtende Wirkung des Spermatozoons beruht auf der Einführung eines Centrosoma. Die parthenogene Wirkung der Loeb'schen Agentien dagegen liegt darin, dass diese Agentien die Bildung neuer Centren im Eiprotoplasma veranlassen“. (Boveri).

Von den Ergebnissen meiner Untersuchung seien noch einige Punkte speziell betont:

Wir haben oben gesehen, dass in den Eiern, welche mit dem KCl-Gemisch behandelt waren, die Reifungsteilungen unter gewissen Bedingungen (vergl. ob.) von Anfang bis zu Ende ganz ebenso verliefen wie in den durch Spermatozoen befruchteten Eiern; es bildeten sich keine künstlichen Astrosphären, es wurden keine neuen Teilungscentren zur Entwicklung gebracht, sondern durch Teilung des am Eikern befindlichen Centriols unter Einfluss des KCl-Gemisches entstanden zwei Strahlungen ¹⁾ ganz wie in den durch Spermatozoen befruchteten Eiern; in dieser Beziehung verhalten sich also die beiden Reize absolut identisch. Dass nach Anwendung des KCl-Gemisches die Ausstossung der Richtungskörper etwas langsamer erfolgte als in befruchteten Eiern ist in Anbetracht der sonst so vollkommenen Übereinstimmung ein nebensächlicher Umstand, zumal da ich nach meinen bisherigen Versuchen allen Grund habe anzunehmen, dass durch entsprechende Wahl der Konzentration des Gemisches und entsprechende Dauer des Aufenthalts der Eier in demselben auch das gleiche Entwicklungstempo sich wird erreichen lassen.

Die Einwirkung des KCl-Gemisches muss also in unseren Versuchen in zwei Momente zerlegt werden: dasselbe vermag erstens die Reifungsteilungen auszulösen; nach deren Beendigung hält aber seine Wirkung an und vermag auch die „befruchtende“ Wirkung des Spermatozoons zu ersetzen und die Bildung der Furchungsspindel zu vollbringen. Ich glaube sogar erwarten zu dürfen, dass durch gewisse Modifikationen der Versuche die beiden Momente sich werden vollkommen auseinanderhalten lassen, dass man es durch entsprechende Wahl der Konzentration und der Aufenthaltsdauer wird erreichen können, dass die Eier die beiden Richtungskörper ausstossen und sodann ein ruhender Eikern sich bildet und dass derselbe dann erst neuerlich zur Bildung von Teilungscentren wird angeregt werden müssen, um eine Furchung des Eies zu erzielen.

Die Bildung der Teilungscentren für die Furchungsspindel habe ich oben genauer erörtert. Wir haben gesehen, dass dieselben keines-

¹⁾ Selbst wenn infolge längeren Verweilens der Eier in stärkerem KCl-Gemisch die Richtungskörper nicht ausgestossen wurden und unter Unterdrückung der Zelleibsteilung pluripolare Mitosen, wie wir sie oben kennen gelernt haben, im Ei entstanden, handelte es sich um eine fortgesetzte Teilung der Centriolen der Richtungsspindeln und ihrer Sphären und nicht um eine Neubildung derselben.

wegs, wie man vielleicht erwarten könnte, aus der Zweiteilung des nach Ausstossung des II Richtungskörpers im Ei zurückgebliebenen Centriols entstehen, sondern dass dieselben sich neu herausdifferenzieren, und zwar im innigsten Anschluss an das Kerngerüst, indem dasselbe sich zu einer Spindel umwandelt. Die Bildung dieser „intranucleären Spindel“ ohne Polstrahlung, ohne Centrialkörner, wo die beiden Pole nur durch die Konvergenz der Spindelfasern sich kennzeichneten, der ganze Ablauf der „intranucleären Karyokinese“ bis zur Bildung von zwei Tochterkernen war sicherlich die am meisten überraschende Erscheinung in dem ganzen Verlauf des parthenogenen Entwicklungsprozesses bei *Mactra*.

Wir haben hier eine Bildungsweise der karyokinetischen Spindel vor uns, welche lebhaft einerseits an die primitiven Formen der Spindelbildung bei den Protozoen (vor allem an die Nebenkernspindeln bei Infusorien), andererseits an die bei einigen Metazoen vorkommenden Richtungsspindeln ohne Centrosomen und Polstrahlung erinnern. Ein Vergleich unserer Figuren mit den in den Arbeiten von R. Hertwig, Maupas, Hoyer u. a. enthaltenen Nebenkernspindeln der Infusorien oder mit den Richtungsspindeln verschiedener Metazoen, wie sie in den Arbeiten von Boveri (*Ascaris*, *Ascidia mentula*, *Tiara*), Carnoy (*Triton*), Sobotta (*Maus*, *Amphioxus*), Rückert (*Cyclops*), Behrens (*Forrelle*), Helen Dean King (*Bufo*) u. v. a. abgebildet und beschrieben sind, lässt auf den ersten Blick die geradezu erstaunliche Ähnlichkeit und Übereinstimmung im Bau der ganzen Spindelfigur, bezüglich der Anordnung und des Verlaufs der achromatischen Teile, der Lage der Chromosomen im Bereiche des Spindelkörpers u. s. w. aufs deutlichste erkennen.

Wir haben ferner bei meinen Versuchen gesehen, dass die aus der intranucleären Mitose hervorgegangenen Kerne neuerlich in Chromosomen zerfallen, worauf dann zwischen den Chromosomengruppen eine Strahlung auftritt und sodann eine Plasmamasse, welche sich zur Spindel umgestaltet, deren einzelne Entwicklungsphasen wir oben näher besprochen haben. In Anbetracht der Lage dieser das Anfangsstadium der Spindelbildung darstellenden Masse, welche stets der Stelle entspricht, wo nach Auflösung der Kernmembran der ganze übrige, nicht in Chromosomen übergegangene Teil des Kerninhalts sich mit dem Eiprotoplasma vermenget haben muss, glaube ich der Kernsubstanz oder wenigstens seiner Einwir-

kung auf das Protoplasma eine bedeutende Rolle bei der Bildung dieser Spindeln zuschreiben zu müssen. Die ausgebildete Spindel zeigt alle dieselben Merkmale wie eine Furchungsspindel im befruchteten Ei mit der einzigen Ausnahme, dass die feinen Spindelfasern und die zarte Polstrahlung an den beiden Polen zusammenfliessen, ohne dass sich ein besonderes Gebilde, ein Centrakorn, ein Centriol, daselbst nachweisen liesse.

In dieser Beziehung bilden einen Gegensatz zu den Beobachtungen an diesen Eiern, welche bekanntlich zwei Richtungskörper ausgestossen hatten, die Befunde an den Eiern, bei welchen, wie oben genauer beschrieben, infolge zu langen Aufenthalts in dem KCl-Gemisch, die Ausstossung der Richtungskörper unterblieben ist, in denen aber trotzdem, nachdem die Eier in frisches Meerwasser übertragen wurden, sich noch infolge einer Art Regulation die Furchungsspindel bildete und die Furchung des Eies eintrat. An den Polen dieser Furchungsspindeln und der mitotischen Figuren der ersten Furchungszellen waren typische kleine punktförmige Centrakörner, Centriolen zu sehen.

Ich glaube, dass dieser Unterschied mit der stattgehabten oder unterbliebenen Ausstossung der Richtungskörper in Zusammenhang gebracht werden muss und dass für Mactra wenigstens die Ansicht Boveris, derzufolge nach Ausstossung der Richtungskörper das Eicentrosoma (besser wohl „Eicentriol“) degeneriert, durch diese Versuche eine interessante Bestätigung gefunden haben dürfte.

-
10. M. F. TONDERA. Budowa wewnętrzna pędu winorośli. (*Über den inneren Bau des Sprosses von Vitis vinifera L.*). (*Sur la structure intérieure des sarments de Vigne*). Mémoire présenté par M. J. Rostański m. t.

(Planches I, II).

Der äussere Bau des Sprosses von *Vitis vinifera* L. bietet einige auffallende Eigentümlichkeiten, welche seit langer Zeit die Aufmerksamkeit der Forscher auf sich gelenkt haben. Es gehört hierher zum Teil die zweizeilige Anordnung der Blätter, welche bei den Dikotyledonen ungemein selten vorkommt, vornehmlich aber der Umstand, dass die Ranken nicht in den Blattachsen, sondern gegenüber der Ansatzstelle der Blätter auftreten; ausserdem erscheinen die Ranken nicht bei jedem Blatte. Dieselben kommen

nämlich gegenüber der Ansatzstelle von je zwei auf einander folgenden Blättern zum Vorschein, bei jedem dritten Blatte fehlen sie (Taf. I. Fig. 1). Bei eingehender Untersuchung der Ranken und ihrer Stellung am Sprosse des Weinstockes gelangt man zu dem Ergebnisse, dass die Stellung der Ranken mit der Stellung der Blütenstände übereinkommt, dass sich sogar Übergangsformen zwischen Ranke und Blütenstand antreffen lassen. Es kommen Ranken vor, an denen einzelne Weinbeeren sich vorfinden und umgekehrt gestalten sich stellenweise die untersten Verzweigungen des Blütenstandes in gut entwickelte Ranken um. Auf Grund dieser Beobachtung wurde daher die Ranke als ein metamorphosierter Blütenstand angesehen.

Die Hauptsprosse des Weinstockes oder die Lotten besitzen infolge der eigentümlichen Stellung der Blütenstände oder der Ranken einen sympodialen Bau. Jedes Stengelglied der Lotte läuft in eine Ranke aus, der Achselspross entwickelt sich dagegen so kräftig, dass derselbe in der Verlängerung des unteren Stengelgliedes zu stehen kommt; in seiner Achsel dagegen wächst aus einer Beiknospe ein Seitenspross, Geize genannt, hervor. Die Ranke, welche die Verlängerung des Hauptsprosses bildet, wird zur Seite gedrängt und nimmt die Stellung eines scheinbar dem Blatte gegenüberstehenden Sprosses ein. Die Auffassung des sympodialen Baues der Lotten und Geizen wurde von A. W. Eichler angenommen. Die ältere Ansicht von E. Prillieux, nach welcher in jedem Stengelknoten der Lotte eine Bifurkation des Hauptsprosses eintreten soll, d. h. der Hauptspross sich in zwei gleichwertige Teilsprosse gabelt, wird durch die Annahme begründet, dass an den Sprossen mit zweizeilig gestellten Blättern die Blätter der Achselsprosse kreuzweise gegen die Blätter des Hauptsprosses angeordnet sind, was an den Lotten nicht zum Vorschein kommt. Dass die Anordnung der Blätter nicht zweizeilig ist, demnach dem einfachen Divergenzwinkel $\frac{1}{2}$ nicht entspricht, werde ich unten nachweisen.

Wird die eine oder die andere Erklärung der Zusammensetzung des Sprosses von *Vitis vinifera* angenommen, so bleibt doch immer ein nicht gelöstes Rätsel übrig, warum nämlich bei jedem dritten Blatte die Ranke fehlt. Die Annahme von Eichler entspricht durchwegs dem wirklichen Baue des Sprosses von *Vitis vinifera*. Die Annahme aber, dass in jedem dritten Stengelknoten der Bau des Stengels monopodial, in allen anderen Stengelknoten aber sympodial sein kann, ist zu willkürlich, somit nicht wissenschaftlich.

Wenn man aber nur die äusseren Merkmale zu Hilfe zieht, lässt sich auf diese Frage nur die obige willkürliche Erklärung geben; ganz anders verhält sich dagegen diese Angelegenheit, wenn man die innere Beschaffenheit des Stengels, vornehmlich aber den Verlauf der Gefässbündel und ihre Stellung gegenüber der Ranke in Betracht zieht. Aus der Untersuchung des inneren Stengelbaues ergibt sich nämlich, dass die Blätter nicht zweizeilig angeordnet sind und dass mit der Anordnung der Blätter das Fehlen der Ranke bei jedem dritten Blatte in innigem Zusammenhange steht.

Die Ergebnisse meiner diesbezüglichen Untersuchungen will ich nachstehend in Kürze bekanntgeben.

Am Querschnitte, welcher aus der Mitte des Stengelgliedes eines jungen, einjährigen Sprosses genommen ist, beobachtet man im Grundparenchym einen geschlossenen Bündelring, dessen Gefässbündel eine beinahe gleich starke Entwicklung aufweisen.

Nähert man sich von unten bei der Untersuchung der Querschnitte einem Stengelknoten, so findet man, dass dicht unter demselben diejenigen Gefässbündel des Bündelringes, welche den Stengelkanten entsprechen, in ihrem Gefässteile eine grünlichbraune Färbung aufweisen und sich dadurch von anderen Gefässbündeln auffallend abheben. Bald nehmen diese Gefässbündel an Grösse zu, verlassen den Bündelring, indem sie in dem Rindenparenchym ausserhalb des Bündelringes Platz nehmen, und gehen aus der vertikalen in die horizontale Richtung über, wobei sie alle gegen die Ansatzstelle des Blattes konvergieren. Diese Bündel bilden die Blattspurstränge des nächstfolgenden Blattes. Mit Hilfe der Mazeration lässt sich der weitere Verlauf derselben genau verfolgen.

Die Anzahl der Blattspurstränge eines jeden Blattes umfasst in der Regel fünf Bündel (Taf. I. Fig. 3, 4, 5); stellenweise spalten sich ein oder zwei Bündel in zwei nebenläufige kleinere Bündel (Taf. II. Fig. 12).

Vergleicht man die Anordnung der fünf Blattspurstränge um die Medianen der Tragblätter, so findet man, dass die Verteilung derselben bei verschiedenen Blättern verschieden ist, und zwar bei drei aufeinanderfolgenden Blättern niemals übereinstimmt, bei den folgenden drei Blättern dagegen sich in derselben Reihenfolge genau wiederholt.

Bei der Untersuchung der Querschnitte, die aus dem Stengelgliede *r* (Taf. I. Fig. 1) genommen sind, findet man in der Nähe des

Stengelknotens fünf Blattspurstränge, deren Anordnung gegen die Mediane des Blattes symmetrisch ist (Taf. II. Fig. 11). Der Blattspurstrang *c* liegt in der Mediane, die vier übrigen *a*, *b*, *e*, *d* sind zu zwei Seiten derselben in analoger Entfernung gestellt. Sie verlassen unter dem Stengelknoten den Bündelring (Taf. I. Fig. 3) und verbinden sich an der Ansatzstelle des Blattes (Taf. I. Fig. 2, *a*) zu einem Ring, aus welchem erst die Bündel des Blattstieles entspringen.

Dicht unter dem Stengelknoten teilen sich die Bündel des Bündelringes, die zwischen *a* und *e* stehen, in zahlreiche kleinere Bündel, um in die Ranke *w* einzutreten; die gegenüberliegenden Bündel aber, die neben dem Blattspurstrange *c* stehen, bilden die Beiknospe *p* (Taf. I. Fig. 3).

Man bemerkt in diesem sowie in allen übrigen Stengelknoten, dass die Ebenen, an welchen die zweizeilig angeordneten Beiknospen und die gegenüberstehenden Ranken hervorstehen, nicht den Winkel von 180° , sondern von 168° einschliessen, also gegeneinander geneigt sind, somit die Beiknospe und die Ranke sich nicht genau gegenüberstehen. Am Querschnitte des oberen Teiles des nächstoberen Stengelgliedes *s* (Taf. I. 1) entspricht die Anordnung der Blattspurstränge der Fig. 4 (Taf. I. 1). In der Mediane des Blattes findet man in diesem Falle keinen Blattspurstrang; von den zwei Strängen, die neben der Mediane des Blattes, daher auch neben der Beiknospe *p* stehen, ist der Strang *e'* näher als *a'*; auch die Stränge *b' c' d'* sind asymmetrisch um die Mediane gestellt. Die Ranke entsteht zwischen den Bündeln *b'* und *e'*. Den weiteren Verlauf und die Art der Verbindung dieser Blattspurstränge ersieht man aus der Fig. 1, β . Taf. II. (Taf. I, 2. *b*).

Unter dem dritten Stengelknoten *c* (Taf. I. 1) ist die Anordnung der Blattspurstränge beinahe eine umgekehrte zur Stellung derselben im zweiten Stengelknoten. Diese Anordnung stellen die Figuren Taf. I. 5 und Taf. I. 2, *c*, endlich Taf. II. 1, γ dar. Betrachtet man die Figur 4 und 5 (Taf. I.) von der Seite der Beiknospe, so findet man, dass nicht der rechte Blattspurstrang *e'*, sondern der linke *c''* der Beiknospe näher steht, die übrigen Blattspurstränge auch asymmetrisch angeordnet sind, dass schliesslich in diesem Falle keine Ranke vorhanden ist, da dieselbe an der Stelle *e''*, wo ein Blattspurstrang auftritt, erscheinen sollte.

¹⁾ Diese Figur ist behufs bequemerer Vergleichung mit den Figuren 3 und 5 um 180° gedreht.

Die geschilderte Anordnung der Blattspurstränge wiederholt sich in derselben Reihenfolge in den folgenden drei Stengelknoten.

Man ersieht aus dieser Darstellung, dass die Ranke nur in denjenigen Stengelknoten zum Vorschein kommt, in welchen die Lage derselben mit der Stellung eines Blattspurstranges nicht übereinstimmt, was in drei Stengelknoten nur zweimal vorkommt.

Dieselben Verhältnisse habe ich in der Anordnung der Blattspurstränge im Stengel von *Ampelopsis hederacea* W. gefunden. Bei dieser Art kommt die Ranke in jedem dritten Stengelknoten ebenfalls nicht zum Vorschein.

Die Ursache der ungleichen Anordnung der Blattspurstränge an der Ansatzstelle der aufeinanderfolgenden Blätter ist in diesem Umstande zu finden, dass die Beiknospen und die gegenüberstehenden Ranken zweizeilig hervorzunehmen, die Anzahl der Blattspurstränge aber unpaarig ist, demnach die Blätter nicht in zwei Orthostichen angeordnet sind. Die Blattspurstränge des oberen Stengelgliedes weichen von denen des unteren Stengelgliedes um $\frac{1}{30}$ des ganzen Umfanges ab; daher die Divergenz der Blätter $\frac{7}{15}$ betragen muss.

Die schematischen Bilder 2—10 der Tafel II. gestatten eine nähere Einsicht in das wechselseitige Verhältnis der Blattspurstränge, der Beiknospen und der Ranken des Sprosses von *Vitis vinifera*.

Nimmt man vorläufig die Blattspurstränge α , β , γ , δ , ϵ (Taf. II. 2) als unbeweglich an, so findet man in dem Stengelknoten a (Taf. I. 1, 2) die Beiknospe bei δ , die Ranke dagegen bei b ($a = 168^\circ$), also die Aufstellung, die in der Figur Taf. II. 5 und Taf. I. 3 dargestellt ist (Vergl. Taf. II. Fig. 1, α).

Im nächstfolgenden Stengelknoten b (Taf. I. 1, 2) erscheint die Beiknospe über der Ranke des unteren Knotens bei b (Taf. II. Fig. 2), die Ranke dagegen bei c , wie die Fig. 7. Taf. II. darstellt (Vergl. auch Taf. I. 4).

Im dritten Stengelknoten c (Taf. I. 7, 2) wächst die Beiknospe über der Ranke des unteren Knotens in c (Taf. II. Fig. 2) hervor; die Ranke sollte jetzt bei a erscheinen, bleibt aber aus, weil sie mit dem Blattspurstrang a zusammenkommt (Taf. II. Fig. 9, Taf. I. 5).

Im vierten Stengelknoten d (Taf. I. 1) wiederholt sich die Anordnung der Blattspurstränge des ersten Knotens a . Die Beiknospe erscheint jetzt bei α , die Ranke bei d (Taf. II. 2).

Auf diese Weise lassen sich beim weiteren Verfahren alle Stellun-

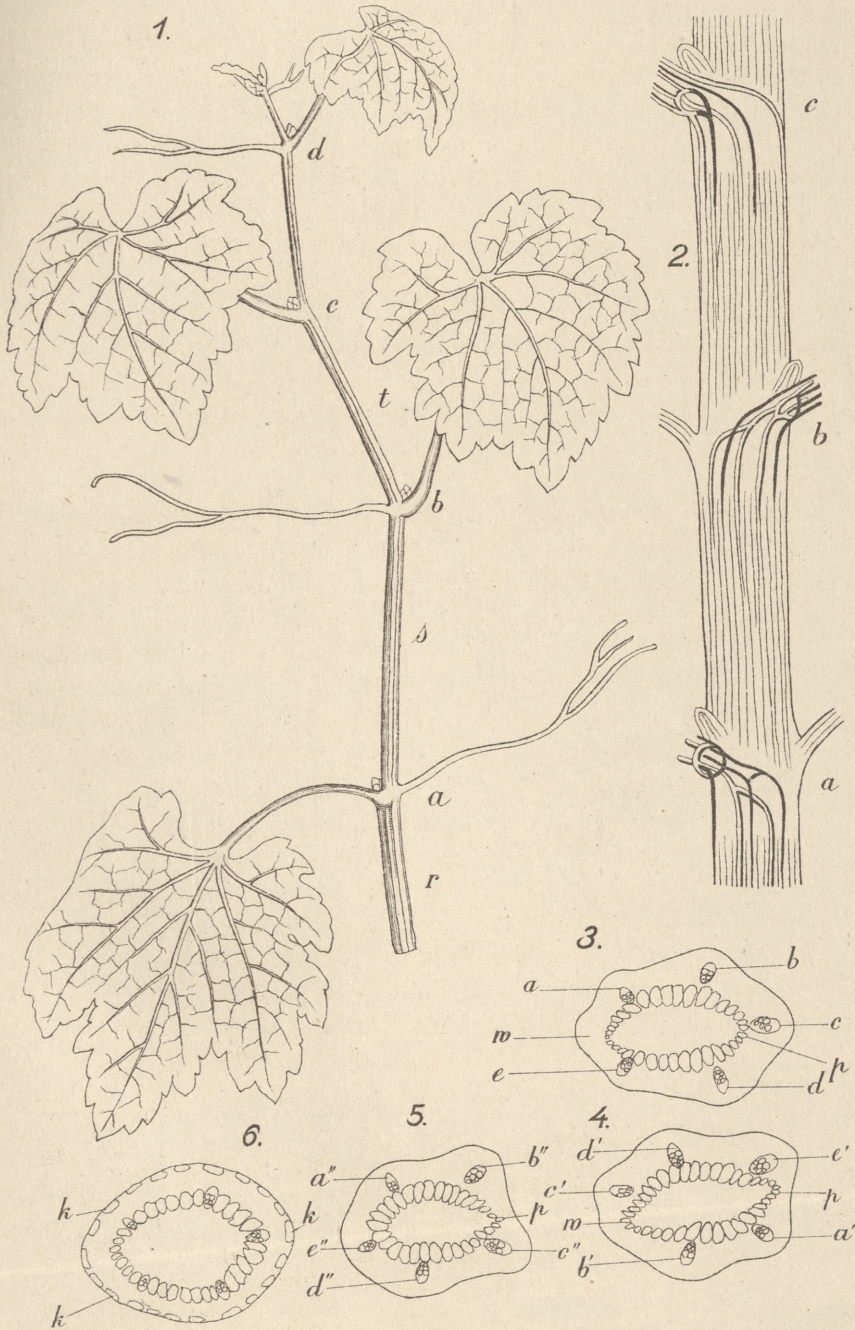
gen der Beiknospen und der Ranken auffinden bis zur Wiederholung, welche mit der Beiknospe bei δ beginnt. Man findet dabei den oben angegebenen Divergenzwinkel $7\frac{1}{15}$ für die Sprosse des Weinstocks, nicht aber den Winkel $1\frac{1}{2}$, was bislang angenommen wurde.

Berücksichtigt man in allen angeführten Fällen die Verschiebung der Blattspurstränge in jedem nächstfolgenden Stengelgliede, so ergeben sich daraus die Bilder 6, 8, 10 (Taf. II.), welche die natürliche Lage der in den Figuren 5, 7, 9 auftretenden Anordnungen darstellen.

Die Verschiebung der Blattspurstränge wird dadurch hervorgerufen, dass die Rolle der Blattspurstränge des unteren Stengelgliedes die nebenstehenden Gefässbündel des Bündelringes übernehmen. Demnach stehen die Kanten des oberen Stengelgliedes nicht in der Verlängerung der unteren Stengelkanten, sie sind gegen dieselben verschoben. Die Folge davon ist, dass die Blätter scheinbar in zwei Orthostichen zu stehen kommen; tatsächlich steht nur jedes dritte Blatt in der Orthostiche, die übrigen Blätter wachsen links oder rechts von derselben hervor.

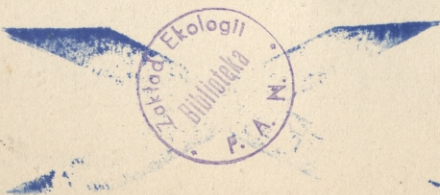
Aus der angeführten Erörterung leuchtet ein, dass dieselbe Anordnung der Blattspurstränge sich bei jedem dritten Blatte wiederholt, dass auch in allen diesen Fällen, wo der Blattspurstrang mit der Stellung der Ranke zusammenkommt, dieselbe fehlt, da sie nur aus den Gefässbündeln des Bündelringes entsteht, welche zwischen den Blattspursträngen stehen, somit in dieser Stellung zwei schwache Ranken zu zwei Seiten des Blattspurstranges entstehen müssten, was niemals zum Vorschein kommt.

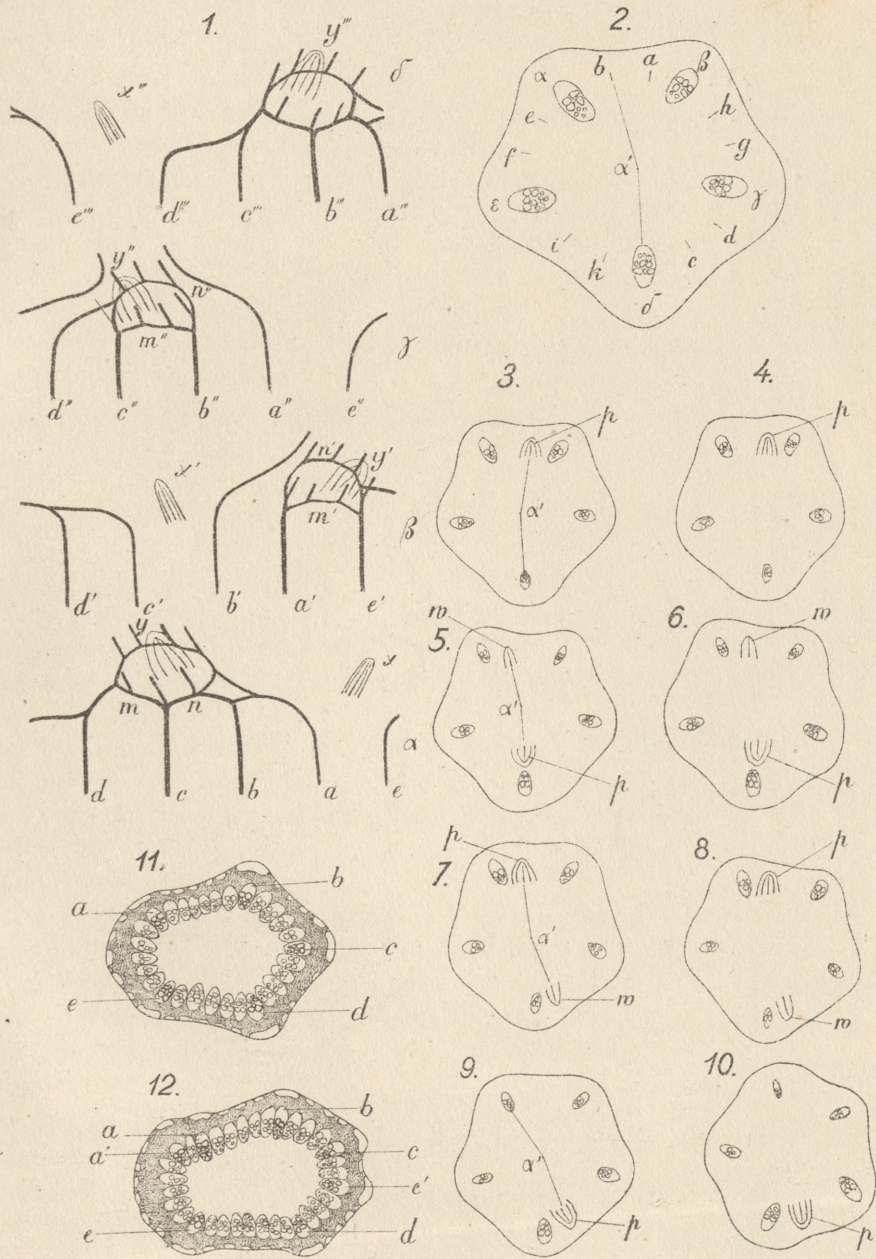
Die Erscheinung, dass ein Blattspurstrang ein Hindernis in der Entwicklung der seitwärts gerichteten Sprosse bildet, kommt noch auffallender an den Sprossen von *Ampelopsis hederacea* W. zum Vorschein, an welchen nicht nur die Ranke eines Knotens, sondern auch die Achselknospe des nächstoberen Knotens verschwindet, weil diese beiden Sprosse an derselben Orthostiche stehen, somit durch denselben Blattspurstrang in der Entwicklung verhindert sind.



F. Tondera ad nat. del.

LIT. A. PRUSZYŃSKI, CRACOVIE.





F. Tondera ad nat. del.

LIT. A. PRUSZYŃSKI, CRACOVIE.



11 M. S. ZAREMBA m. c. **Odpowiedź na uwagi prof. Natanson na teorię zjawiska zluźniania.** (*Réponse aux remarques de M. Natanson sur la théorie de la relaxation*).

Nr. 1. La communication de décembre 1903 de M. Natanson (Remarques sur la théorie de la relaxation) est consacrée à l'examen du mémoire intitulé „Sur une généralisation de la théorie classique de la viscosité“ que j'ai présenté à l'Académie, à la Séance de juin de la même année.

Voici les points sur lesquels portent les considérations développées par M. Natanson:

1-o. Il se propose d'établir que le raisonnement au moyen duquel j'obtiens les équations (34) p. 398 de mon mémoire en partant des équations (28) p. 395 du même mémoire est erroné et que le résultat auquel j'arrive est faux;

2-o. Il cherche à montrer que le terme

$$\frac{p_m - p}{T^v},$$

terme qui, comme je l'ai établi, aurait dû entrer dans les équations proposées par lui si ces équations avaient été déduites méthodiquement des hypothèses que lui-même avait admises, est probablement sans importance;

3-o. Il insiste longuement sur la similitude qui existe entre la théorie que j'ai développée et celle que lui-même avait proposée dans son mémoire de février 1901: „Sur les lois de la viscosité“;

4-o. Il soutient que je lui ai reproché à tort de ne pas avoir compris la nature physique de la quantité p .

Les affirmations de M. Natanson sont dépourvues de tout fondement, la chose est même parfaitement évidente; mais à cause de l'obscurité avec laquelle il développe ses objections, on pourrait ne pas apercevoir immédiatement les points précis où il se trompe. Il ne sera donc pas inutile de mettre ces points nettement en évidence.

Nr. 2. Occupons-nous d'abord du premier point. D'après M. Natanson l'erreur qu'il m'attribue se serait manifestée (voir les formules (12) et (13) de la p. 786 de ses „Remarques“) en ce que j'aurais obtenu la formule suivante

$$\lambda_0 = \lambda T \quad (1)$$

alors que la formule exacte serait celle-ci

$$(2) \quad \lambda_0 = (\lambda - h) T.$$

Je dois faire observer que M. Natanson se méprend d'une étrange façon en me prêtant la formule (1). A la page 398 du mémoire analysé par M. Natanson, je m'exprime en ces termes: ... „Voyons maintenant à quelles équations-limite on arrive en faisant tendre T vers zéro. Les produits $T\lambda$ et $T\mu$ pourront tendre alors vers des limites λ_0 et μ_0 non nécessairement nulles...“. Par conséquent voici la formule que j'énonce:

$$(3) \quad \lambda = \lim_{T=0} (\lambda T)$$

formule essentiellement différente de celle que m'attribue M. Natanson.

J'ajoute que, d'après la définition de la quantité h donnée par M. Natanson (équation (18) p. 775 de ses „Remarques“) cette quantité resterait finie si l'on faisait tendre T vers zéro. On aurait donc

$$\lim_{T=0} \{ (\lambda - h) T \} = \lim_{T=0} (\lambda T)$$

ce qui prouve que M. Natanson aurait obtenu lui-même la formule (3) que je donne si, au lieu de considérer la formule (2), laquelle évidemment ne répond pas à la question, il avait considéré la formule-limite de cette formule pour $T = 0$.

M. Natanson ne se borne pas à m'attribuer, contrairement à l'évidence même, une formule que je n'ai jamais donnée et à lui opposer une formule différente, laquelle d'ailleurs, comme on vient de le voir, ne peut pas, ne fût-ce qu'à cause de la forme qu'elle a, convenir à la question; il essaye de faire une critique directe de mon raisonnement. Le lecteur verra non sans surprise que, dans cette critique, M. Natanson se place à un point de vue inconciliable avec celui qu'il avait adopté en opposant l'une à l'autre les formules (1) et (2). En effet, en développant cette critique, M. Natanson fait tendre T vers zéro; c'est même pour cela que nous sommes obligés de l'examiner de plus près. Selon M. Natanson (je conserve les notations de mon mémoire de juin 1903) les valeurs des quantités

$$(4) \quad \lim_{T=0} \left\{ \left(\frac{\partial p_{xx}}{\partial t} + u \frac{\partial p_{xx}}{\partial x} + v \frac{\partial p_{xx}}{\partial y} + w \frac{\partial p_{xx}}{\partial z} \right) T \right\}; \text{ etc.}$$

devraient, contrairement à ce que j'ai admis, être regardées comme différentes de zéro. Si M. Natanson avait voulu prouver que la

théorie classique n'est pas un cas-limite de celle que j'ai développée, son objection, sans être fondée, aurait cependant une certaine portée. Mais son idée est toute différente; en effet il s'exprime à la page 786 de ses „Remarques“ dans les termes suivants: „Voici maintenant quelle est la solution correcte du problème que s'est proposé M. Zaremba“... M. Natanson ne met donc pas en doute la possibilité du passage à la limite que j'ai considéré; il me reproche seulement de l'avoir effectué d'une façon incorrecte.

Cela posé je fais la remarque suivante: si l'on admet que la théorie classique de la viscosité soit comprise comme cas-limite dans celle qui a fait l'objet de mon mémoire, l'hypothèse que les quantités (4) sont égales à zéro est inévitable. En effet les méthodes générales de la mécanique ne sont applicables que dans le cas où les fonctions $p_{xx}, p_{yy}, \dots u, v, w$ sont dérivables pour toutes les valeurs des variables x, y, z, t , en exceptant, tout au plus, seulement celles qui correspondent à des points situés sur certaines surfaces singulières lesquelles seront d'ailleurs en général variables avec le temps t . Donc les expressions telles que l'expression suivante:

$$\frac{\partial p_{xx}}{\partial t} + u \frac{\partial p_{xx}}{\partial x} + v \frac{\partial p_{xx}}{\partial y} + w \frac{\partial p_{xx}}{\partial z}$$

devront être finies partout où les équations de l'hydrodynamique seront applicables et par conséquent, les expressions (4) auront bien la valeur zéro.

Voyons de quelle façon M. Natanson arrive à un résultat opposé. Il part (voir l'équation (3) p. 784 de sa communication) de l'équation suivante

$$T \frac{dp}{dt} = - \left((\lambda + \frac{2}{3} \mu) T \right) \frac{d_1 [\Theta^*]}{dt} \quad (5)$$

et il admet dans son raisonnement que la quantité

$$\lim_{t \rightarrow 0} \left\{ \frac{d_1 [\Theta^*]}{dt} \right\} \quad (6)$$

est différente de zéro. La définition donnée par M. Natanson (voir p. 772—773) du symbole

$$\frac{[d_1 \Theta^*]}{dt} \quad (7)$$

constitue un contre-sens.

En effet le symbole d_1 que M. Natanson emploie dans le sens que je lui ai donné (voir vers le bas de la p. 392 de mon mémoire) sert à indiquer l'accroissement qu'éprouverait une quantité relative à l'état intérieur du fluide de l'époque t à l'époque $t + dt$ dans le cas où, pendant ce temps, le fluide se comporterait comme un solide fictif isotrope parfaitement élastique, dont l'état de tension intérieure à l'époque t coïnciderait avec celui qui règne réellement dans le fluide et qui, de l'époque t à l'époque $t + dt$, se déformerait comme se déforme pendant ce temps le fluide dans le mouvement réel qu'il a. D'après la définition précédente, admise par M. Natanson et par moi, le symbole d_1 n'est nullement applicable à toute quantité de quelque nature qu'elle soit; au contraire l'emploi de ce symbole est strictement limité aux quantités qui se rapportent au corps fictif et sous la condition expresse que l'état de ce corps fictif à l'époque t se trouve dans la relation spécifiée plus haut avec l'état réel du fluide à l'époque t . Or le symbole $[\]$, d'après la définition qu'en donne M. Natanson, (voir les trois dernières lignes de la p. 772 de ses „Remarques“) représente un effet dû à un phénomène de relaxation que l'on doit se figurer comme s'étant produit dans le sein du fluide postérieurement à l'époque t , époque initiale de la variation que l'on veut considérer. Il résulte de là que l'expression $[\Theta^*]$ est de celles auxquelles le symbole d_1 n'est pas applicable. Par conséquent le symbole $d_1 [\Theta^*]$ implique une contradiction interne. Il est donc prouvé qu'il est impossible d'attribuer un sens quelconque à l'équation (5) laquelle dès lors ne peut servir de base à la démonstration de quoi que ce soit.

Indépendamment de ce qui précède, une autre méprise se trouve à la base des considérations de M. Natanson: il renverse l'ordre logique de l'enchaînement des choses dans la théorie qu'il examine. En réalité, ainsi que je l'ai expliqué dans le mémoire cité au début, la détermination des quantités p_{xx} etc. dépend des équations (8) et (28) (p. 384 et p. 395) de mon mémoire et nullement des équations (11) et (26) (p. 386 et p. 395) lesquelles contiennent des quantités qui ne peuvent être déterminées qu'après avoir résolu les équations (8) et (28). Or le raisonnement de M. Natanson implique que c'est l'inverse qui a lieu.

Nr. 3. Passons au second point. M. Natanson, pour atténuer l'importance du terme

$$\frac{p_m - p}{T'}$$

introduit une nouvelle hypothèse (D) qui conduirait à la relation

$$p_m - p = 0.$$

Afin de donner quelque vraisemblance à cette hypothèse, dont il donne d'ailleurs un énoncé qui est loin d'être clair, M. Natanson s'efforce d'en faire ressortir l'analogie avec une autre hypothèse qui, sans jamais avoir été admise universellement, a cependant été considérée comme vraisemblable par quelque savants illustres. Il va sans dire que les considérations de M. Natanson ne sauraient prévaloir contre ce fait évident que la question de l'importance du terme

$$\frac{p_m - p}{T'}$$

ne relève que de l'expérience seule.

D'ailleurs, et cela est essentiel, du moment que M. Natanson estime lui-même qu'il faut adjoindre aux hypothèses qu'il a prises pour base des considérations qu'il développe dans son mémoire „Sur les lois de la viscosité“ une hypothèse additionnelle (D) pour que le terme

$$\frac{p_m - p}{T'}$$

disparaisse, il reconnaît par cela-même le bien-fondé du reproche que je lui ai adressé à ce sujet. A la vérité M. Natanson dit à la p. 781 de ses „Remarques“ que l'hypothèse (D) est énoncée et adoptée dans son mémoire „Sur les lois de la viscosité“; il ajoute seulement qu'elle n'est pas introduite à l'endroit voulu. Voici ce qu'il en est en réalité: c'est seulement en passant que M. Natanson envisage l'hypothèse $h = k$ laquelle peut en effet être considérée comme équivalente à l'hypothèse (D), mais ce qui lui échappe dans le mémoire „Sur les lois de la viscosité“ et ce que j'ai signalé comme une erreur, c'est la nécessité où l'on se trouve d'introduire quelque hypothèse additionnelle si l'on veut que le terme

$$\frac{p_m - p}{T'}$$

disparaisse des équations définitives.

Nr. 4. Passons maintenant au troisième point. J'ai dit explicitement dans mon mémoire de Juin 1903 „Sur une généralisation de

la théorie classique de la viscosité“ (voir l'Introduction) que je me proposais de poursuivre correctement les conséquences logiques des hypothèses prises par M. Natanson pour base de sa théorie, en me bornant simplement à donner à ces hypothèses une précision qu'elles n'ont pas dans le travail de M. Natanson. Dans ces conditions mon mémoire ne pouvait se distinguer de celui de M. Natanson que par l'absence des erreurs que j'ai relevées dans son travail. Cela est d'autant plus vrai que, dans le but critique que je m'étais proposé, je me suis écarté le moins possible du mode d'exposition de M. Natanson. A la vérité la similitude des deux travaux est, dans le fond, loin d'être aussi grande que ne le croit M. Natanson, mais fut-elle très grande que la chose ne pourrait en aucune façon être considérée comme étrange.

Je tiens à ajouter que, dans mon mémoire „Sur une forme perfectionnée de la théorie de la relaxation“ (séance d'Octobre 1903) j'ai montré qu'une théorie satisfaisante de la relaxation doit être construite sur une base toute différente de celle qui sert de point de départ au travail de M. Natanson et que j'avais adoptée moi-même dans mon mémoire de Juin 1903. Ceci se rattache à la première note au bas de la page 771 des „Remarques“ de M. Natanson. Dans cette note, il promet de montrer plus tard que la notion du corps fictif n'est „nullement indispensable“ et qu'elle „peut même devenir dangereuse“. Les inconvénients de l'introduction de cette notion sont déjà bien connus. En effet dans mon mémoire d'Octobre 1903, cité quelques lignes plus haut, j'ai fait remarquer qu'il n'est pas permis de supposer, dans le cas général, que l'état de tension intérieure d'un fluide soit à chaque instant identique à celui qui règnerait à l'intérieur d'un solide élastique et isotrope soumis à une déformation convenable. Ceci revient à dire que, dans le cas général, l'introduction du corps fictif n'est pas légitime, ou encore que la notion de ce que M. Natanson représente par les symboles (2) p. 103 de son mémoire de Février 1901, conduit à une contradiction. Pour bien mettre en évidence ce fait que l'introduction des quantités dont il vient d'être question équivaut à celle du corps fictif, je ferai remarquer que M. Natanson dit à la p. 103 de son mémoire de Février 1901, en parlant de ces quantités, que „leurs relations mutuelles sont les mêmes que celles auxquelles les variables apparentes sont assujetties“. Or j'ai montré, dans le mémoire d'Octobre 1903 „Sur une forme perfectionnée de la théorie de la

relaxation“, que ce sont précisément ces relations, celles-là même dont parle M. Natanson, qui constituent la source de toute la difficulté.

Nr. 5. Il me reste quelques mots à dire au sujet du quatrième point. J'ai prouvé dans mon mémoire de Juin 1903 „Sur une généralisation de la théorie classique de la viscosité“ que la notion même de la quantité p implique déjà l'existence de l'équation caractéristique¹⁾. Par conséquent des considérations dont le but n'est pas de démontrer ce fait et qui cessent d'avoir un sens dès qu'on l'admet, témoignent de la méconnaissance de la nature de la quantité p . C'est précisément le cas des considérations du § 5 du mémoire de Février 1901 de M. Natanson. En effet la lecture de ce paragraphe nous apprend que selon lui l'équation caractéristique ne pourrait apparaître que comme une conséquence d'une hypothèse additionnelle. C'est une erreur et c'est elle que j'ai relevée en disant que M. Natanson n'avait pas reconnu la véritable nature de la quantité p .

-
12. M. LADISLAS NATANSON m. t. **Uwagi nad pracami prof. Zaremby, tyżcami się teoryi podwójnego załamania światła w cieczach odkształcanych.** (*Remarques sur les travaux de M. Zaremba relatifs à la théorie de la double réfraction accidentelle dans les liquides.*)

§ 1. Pour étudier la double réfraction accidentelle dans les liquides, on se sert habituellement de la méthode expérimentale bien connue dont le principe est dû à Maxwell et qui a été ensuite développée par Kundt. M. Zaremba s'est proposé de donner la théorie de cette expérience dans son Mémoire „Sur un problème d'hydrodynamique etc.“, présenté à l'Académie dans la séance du 8. Juin 1903²⁾; partout où j'aurai l'occasion de la citer, je désignerai cette Communication sous le nom de Mémoire *A* de M. Zaremba. L'étude du même problème a été reprise ensuite par M. Zaremba dans le Chapitre III³⁾ du Mémoire „Sur une

¹⁾ Je rappelle que dans le travail de M. Natanson comme dans le mien, on a fait abstraction de l'influence à distance que pourraient exercer les éléments du fluide sur leurs états physiques respectifs.

²⁾ Bull. Int. de l'Acad. d. Sc. de Cracovie, Cl. d. Sc. M. et N., Année 1903, p. 403.

³⁾ Bull. Int. de l'Acad. d. Sc. de Cracovie, Cl. d. Sc. M. et N., Année 1903, p. 611.

forme perfectionnée de la théorie de la relaxation¹, présenté à l'Académie dans la séance du 12. Octobre 1903; je désignerai cette deuxième Communication sous le nom de Mémoire *B* de M. Zaremba.

Le résultat essentiel du Mémoire *A* de M. Zaremba est fourni par les équations¹) suivantes:

$$(1a) \quad (P - H) \frac{q}{r} - \mu \left(\frac{q}{r} - \frac{dq}{dr} \right) + \frac{Q}{T} = 0$$

$$(1b) \quad 4Q \frac{q}{r} - \frac{P - H}{T} = 0.$$

Elles font partie du système (22), page 413, du Mémoire *A* de M. Zaremba. Je ne m'occuperai pas ici de la troisième équation du même système; j'ai démontré dans une Note récente²) que la signification de cette équation est tout-à-fait différente de celle que lui attribue M. Zaremba.

Les équations correspondantes du Mémoire *B* de M. Zaremba sont les deux premières équations du système (4), page 612; les voici:

$$(2a) \quad \mu r \frac{d\varphi}{dr} - \frac{1}{2} (P - H) r \frac{d\varphi}{dr} + \frac{Q}{T} = 0$$

$$(2b) \quad \frac{P - H}{2T} + Q r \frac{d\varphi}{dr} = 0.$$

Le symbole φ que contiennent ces équations est défini par l'égalité

$$(3) \quad q = r\varphi$$

que l'on trouve également à la page 612 du Bulletin; on a donc:

$$(4) \quad r \frac{d\varphi}{dr} = \frac{dq}{dr} - \frac{q}{r};$$

par conséquent les équations (1a) et (1b) ne pourraient être considérées comme équivalentes aux équations (2a) et (2b) que dans le cas où il serait légitime de substituer l'expression

$$(5) \quad -\frac{1}{2} r \frac{d}{dr} \left(\frac{q}{r} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{q}{r} - \frac{dq}{dr} \right)$$

¹) Pour l'explication des notations adoptées, on voudra bien se reporter aux Mémoires cités.

²) Bull. Int. de l'Acad. d. Sc. de Cracovie, Cl. d. Sc. M. et Nat., Année 1903, p. 781—783.

à l'expression

$$\frac{q}{r} \quad (6)$$

dans les équations en question; or ces expressions, il est à peine utile de le dire, sont tout à fait différentes.

Calculons en particulier les valeurs que prennent, d'après les équations (1) d'une part et, d'autre part, d'après les équations (2), les quantités suivantes:

$$Q \quad \text{et} \quad \frac{P-H}{Q}. \quad (7)$$

D'après les équations (1) tirées du Mémoire *A* de M. Zaremba, on a

$$Q \left\{ 1 + 4 \frac{q^2}{r^2} T^2 \right\} = - \left(\frac{dq}{dr} - \frac{q}{r} \right) \mu T \quad (8a)$$

$$\frac{P-H}{Q} = 4 \frac{q}{r} T. \quad (8b)$$

Les équations (2), tirées de Mémoire *B*, nous donnent:

$$Q \left\{ 1 + \left(\frac{dq}{dr} - \frac{q}{r} \right)^2 T^2 \right\} = - \left(\frac{dq}{dr} - \frac{q}{r} \right) \mu T \quad (9a)$$

$$\frac{P-H}{Q} = - 2 \left(\frac{dq}{dr} - \frac{q}{r} \right) T. \quad (9b)$$

Les quantités Q et $(P-H)/Q$ sont précisément celles qu'il y a lieu de calculer lorsqu'on se propose d'appliquer la Théorie de la Relaxation à l'étude théorique des observations effectuées jusqu'à présent sur la double réfraction accidentelle dans les liquides. En effet, si l'on désigne par γ_{rq}^* la composante de la déformation véritable représentée par le même symbole dans mon Mémoire „Sur une particularité de la double réfraction accidentelle etc.“ (présenté à l'Académie le 11. Janvier 1904¹⁾), on peut écrire

$$Q = - \mu \gamma_{rq}^* \quad (10)$$

et cette équation nous apprend²⁾ que, pour calculer la différence

¹⁾ Bull. Int. de l'Acad. d. Sc. de Cracovie, Cl. d. Sc. M. et Nat., Année 1904, p. 1.

²⁾ Voir à ce sujet une Note que j'aurai l'honneur de présenter à l'Académie, si elle veut bien le permettre, dans une de ses prochaines séances.

de marche du rayon ordinaire et du rayon extraordinaire, dans l'expérience de Maxwell et de Kundt, il faut calculer la quantité Q ; dans ce but il faudra avoir recours soit à l'équation (8a), soit à l'équation (9a). D'autre part, les formules (17) et (18) du Mémoire *A* de M. Zaremba ainsi que les équations (8) du §. 6. et (7a) du §. 3. de mon Mémoire du 11. Janvier 1904 (que je viens de citer) permettent facilement de prouver que l'on a

$$(11) \quad P - H = -2\mu(\varepsilon_r^* - \varepsilon_a^*);$$

il résulte par conséquent de l'équation (5) du § 2 du même Mémoire que l'on a

$$(12) \quad 2 \cotg 2\chi = \mp \frac{P - H}{Q}.$$

L'évaluation de l'angle χ mesuré, dans le cas de certains liquides, par Kundt et récemment par M. C. Zakrzewski, demande donc la connaissance de la valeur du rapport $(P - H)/Q$; pour y arriver, il faudra s'adresser soit à l'équation (8b), soit à l'équation (9b).

Supposons, par exemple, que l'on désire déduire la valeur de l'angle χ des considérations théoriques exposées dans les Mémoires de M. Zaremba. Si l'on adopte les résultats du Mémoire *A*, on aura, d'après (12) et (8b),

$$(13) \quad \cotg 2\chi = \mp 2 \frac{q}{r} T.$$

Si l'on admet les résultats auxquels M. Zaremba parvient dans le Mémoire *B*, il faudra écrire

$$(14) \quad \cotg 2\chi = \pm \left(\frac{dq}{dr} - \frac{q}{r} \right) T$$

ainsi que le montrent les équations (12) et (9b). Or ces résultats (13) et (14) sont non seulement différents; il sont contradictoires. Pour mettre ce point en évidence supposons que l'une des parois cylindriques entre lesquelles le liquide est placé soit immobile¹⁾ et proposons-nous de calculer la valeur χ_0 que doit prendre l'angle χ , d'après (13) et (14), dans le voisinage immédiat de la

¹⁾ Cette hypothèse est conforme aux conditions expérimentales dans lesquelles se sont placés Kundt et M. C. Zakrzewski.

paroi immobile. Il résulte de l'équation (13) que l'on a dans ces conditions

$$\cotg 2\chi_0 = 0 ; \quad (15)$$

au contraire l'équation (14) donne, pour la même quantité, une valeur différente de zéro et absolument du même ordre de grandeur que celles que l'on obtient pour l'intérieur du liquide¹⁾.

Pour abréger l'écriture, posons

$$+ 2 \frac{q}{r} T = \zeta \quad \text{et} \quad - \left(\frac{dq}{dr} - \frac{q}{r} \right) T = z. \quad (16)$$

Peut-être croira-t-on que, dans la pensée de M. Zaremba, l'une des deux quantités ζ et z représente la valeur exacte d'un certain élément du problème (à savoir de $\mp \cotg 2\chi$) et l'autre sa valeur approchée. Adoptons cette manière de voir et considérons les rapports

$$\varepsilon' = \frac{z - \zeta}{\zeta} \quad \text{et} \quad \varepsilon'' = \frac{z - \zeta}{z}. \quad (17)$$

Dans l'hypothèse où nous nous sommes placés, les rapports ε' et ε'' représentent les erreurs relatives que l'on commet en adoptant, au lieu de celle des deux quantités ζ et z qui est la valeur exacte de $\mp \cotg 2\chi$, l'autre quantité qui représente la valeur approchée du même élément.

Supposons, comme nous l'avons fait tout à l'heure, que l'une des parois entre lesquelles le liquide est placé soit immobile. Dans ce cas, l'erreur relative ε' calculée dans le voisinage immédiat de la paroi immobile, doit croître indéfiniment à mesure que l'on s'approche de la paroi; l'erreur relative ε'' en même temps doit tendre vers la valeur 1; à la limite nous aurons:

$$\text{Lim} (\varepsilon') = \infty ; \quad \text{Lim} (\varepsilon'') = 1 ; \quad (18)$$

cela résulte immédiatement des conditions relatives au contact du liquide avec les parois qui le contiennent, conditions que M. Zaremba a énoncées et adoptées à la page 415 de son Mémoire A. Le lecteur jugera si de telles valeurs des erreurs ε' et ε'' sont admissibles.

§ 2. Soient a et b les rayons du cylindre intérieur et du cy-

¹⁾ Voir au § 7 de mon Mémoire cité plus haut du 11 Janvier 1904.

lindre extérieur; soient σ_a et σ_b leurs vitesses angulaires. Nous poserons

$$(1) \quad \sigma_b = 0;$$

c'est le cas réalisé dans les expériences de Kundt et des savants qui ont suivi la voie qu'il a tracée. Nous supposerons aussi que σ_a représente une quantité extrêmement petite.

M. Zaremba, dans son Mémoire *A*, donne pour la quantité φ qui est égale à q/r , les formules: (27), page 415 et (32), page 417. De ce que dit M. Zaremba à la page 613 du Mémoire *B*, lignes 21—30, au sujet de la formule (27), p. 415, il résulte que la formule (32), p. 417, dans les conditions où nous nous sommes placés, peut être considérée comme équivalente à la suivante

$$(2) \quad \varphi = \frac{1}{2} \frac{a^2 (b^2 - r^2)}{T (b^2 - a^2) r^2} \alpha_1$$

où l'on désigne par α_1 l'arc compris entre $-\frac{1}{2}\pi$ et $+\frac{1}{2}\pi$ qui vérifie l'équation

$$(3) \quad \operatorname{tg} \alpha_1 = 2 T \sigma_a.$$

En résumé, nous pourrions poser, d'après le Mémoire *A*,

$$(4) \quad \zeta = \frac{2a^2(b^2 - r^2)}{(b^2 - a^2)r^2} \sigma_a T;$$

le symbole ζ a ici la signification que nous lui avons attribuée au paragraphe précédent.

D'autre part, nous avons approximativement, en vertu de l'équation (7), page 612 du Mémoire *B*,

$$(5) \quad -r \frac{d\varphi}{dr} = \frac{A}{T\mu r^2},$$

A désignant la constante introduite à la page 612 du Mémoire *B*. On calcule aisément la valeur de $A/T\mu$ en s'appuyant sur la formule (10) de la page 613¹⁾; on s'assure ainsi que la théorie développée dans le Mémoire *B* conduit à poser

¹⁾ Cette équation (10), page 613 du Mémoire *B*, est celle que M. Zaremba, ainsi qu'il le dit lui-même, considère comme définitive. Elle ne se distingue en rien de l'équation correspondante donnée par Stokes dès 1845 (voir *Math. and Phys. Papers*, Vol. I, p. 103, ligne 2). Il n'est fait aucune mention de cette circonstance dans le Mémoire de M. Zaremba.

A la page 599 du Mémoire *B*, M. Zaremba dit que des quantités de la

$$z = \frac{2a^2b^2}{(b^2 - a^2)r^2} \sigma_a T; \quad (6)$$

la lettre z est définie par la deuxième formule du système (16) du paragraphe précédent.

Les résultats (4) et (6) ne sont pas concordants.

§ 3. Les résultats des Mémoires A et B de M. Zaremba me paraissant contradictoires, je suis forcé d'admettre que les uns ou les autres doivent nécessairement être erronés. Je me propose de montrer que les résultats du Mémoire A sont absolument inexacts. Pour bien faire comprendre qu'il en est réellement ainsi, reprenons l'équation (13) du § 1. de cette Note; cette équation, comme on le sait, se déduit des résultats essentiels du Mémoire A de M. Zaremba. Le signe \mp dont est affecté le second membre de cette équation est une conséquence des conventions adoptées dans mon Mémoire du 11. Janvier 1904; si l'on suppose que la vitesse q d'une particule du liquide puisse prendre des valeurs positives ou négatives suivant le sens de la rotation autour de l'axe Oz , on écrira

$$\cotg 2\chi = -2 \frac{q}{r} T. \quad (1)$$

Considérons le cas de mouvement réalisé dans l'expérience de Kundt, répétée par M. C. Zakrzewski; proposons-nous de comparer deux cas: (I) et (II) où, sans rien changer au mouvement relatif du liquide par rapport aux parois cylindriques, on imprime une rotation d'ensemble à l'observateur qui fait l'expérience et à l'appareil¹⁾ dont il se sert, rotation qui n'est pas la même, dans les deux cas examinés, par rapport à un système d'axes fixes Oxy . Désignons par σ la différence des valeurs, dans les cas (I) et (II), de la vitesse angulaire (rapportée aux axes Oxy) d'une particule déterminée du liquide ou, en général, d'une particule déterminée

nature des quantités p_{xx} , p_{yy} , p_{zz} doivent dans ses équations être regardées comme assez petites pour que certaines conditions (qu'il spécifie) soient vérifiées. C'est l'hypothèse qu'il adopte et qui sert de base à ses développements. Elle est inacceptable dans la Théorie de la Relaxation. Dans cette Théorie, on est en droit de supposer que des différences telles que $p_{yy} - p_{zz}$ etc. ou telles que $p_{xx} - p$ etc. soient petites; cela résulte des théorèmes fondamentaux de l'Hydrodynamique.

¹⁾ Nous désignons sous ce nom le système composé du liquide, des deux vases cylindriques, de la source lumineuse, du polariseur, de l'analyseur etc., bref le système matériel tout entier qui de quelque manière que ce soit participe à l'expérience.

du système participant à l'expérience; supposons que cette différence σ ait une valeur constante, positive et d'ailleurs arbitraire. Nous avons pour tous les points du liquide

$$(2) \quad \varphi_I - \varphi_{II} = \frac{q_I - q_{II}}{r} = \sigma,$$

les indices servant à distinguer les valeurs d'une même quantité dans les deux cas (I), (II) que nous examinons. {On peut supposer, par exemple, que l'on ait pour les parois et pour les particules du liquide qui se trouvent en contact avec elles:

$$(3) \quad \sigma_a = \sigma \quad ; \quad \sigma_b = 0 \quad \text{dans le cas (I) ;}$$

$$(4) \quad \sigma_a = 0 \quad ; \quad \sigma_b = -\sigma \quad \text{dans le cas (II) .}$$

D'après la théorie donnée par Stokes,

$$(5) \quad q_I = \frac{a^2 (b^2 - r^2)}{r (b^2 - a^2)} \sigma \quad ; \quad q_{II} = \frac{b^2 (a^2 - r^2)}{r (b^2 - a^2)} \sigma ;$$

on a donc bien

$$(6) \quad q_I - q_{II} = r\sigma ,$$

ainsi que l'exige l'hypothèse dans laquelle nous nous sommes placés.}

Examinons les conséquences qui résultent de l'application de l'équation (1) de ce paragraphe dans les conditions que nous venons d'indiquer. Nous aurons

$$(7) \quad \cotg 2\chi_I = -2 \frac{q_I}{r} T \quad ; \quad \cotg 2\chi_{II} = -2 \frac{q_{II}}{r} T ;$$

par conséquent l'équation (2) nous permet d'écrire

$$(8) \quad \cotg 2\chi_I - \cotg 2\chi_{II} = -2\sigma T .$$

La différence qui figure au premier membre de cette équation est la différence des effets observables dans les deux cas que nous examinons; cette différence serait donc parfaitement arbitraire. Un mouvement de rotation imprimé à l'observateur et à toutes les parties de l'appareil servant à l'expérience exercerait une influence directe sur le résultat que l'on obtiendrait. Cette conséquence à laquelle conduisent¹⁾ les équations de M. Zaremba est tout à fait inadmissible.

¹⁾ Dans le passage de la page 419 du Mémoire A qui débute en ces termes: „2° Peut-être trouvera-t-on étrange etc.“, M. Zaremba croit réfuter une objec-

§ 4. Les remarques que fait¹⁾ M. Zaremba au sujet de mon Mémoire de 1901 „Sur la double réfraction accidentelle dans les liquides“²⁾ reposent, en réalité, sur un malentendu. J'ai indiqué moi-même³⁾ que les résultats de mon Mémoire de 1901 sont viciés par une erreur, la même d'ailleurs que celle que M. Zaremba a commise dans le Mémoire *A*, en reprenant en 1903 l'étude du même problème; erreur qui a rendu inacceptables les conclusions auxquelles il est arrivé dans le Mémoire *A*. Cela étant, il est évident qu'il n'y a que peu d'intérêt à discuter les objections soulevées par M. Zaremba contre mon Mémoire de 1901. J'indiquerai cependant aussi brièvement que possible pourquoi elles me paraissent dénuées de fondement.

1^o Dans le § 13 de mon Mémoire „Sur l'approximation de certaines équations etc.“⁴⁾ j'ai démontré que les équations (1), (2), (3) du § 4. du Mémoire du 4. Mars 1901 se déduisent aisément des équations dites rigoureuses⁵⁾ de mon Mémoire du 4. Février 1901. En nous appuyant sur ces équations nous sommes tenus à suivre chaque particule du liquide dans le mouvement qu'elle exécute autour de l'axe de rotation; il est donc évident qu'il faut poser $\theta = ht$ dans les intégrales qui figurent au second membre de l'équation (1) du § 5 du Mémoire du 4. Mars 1901; c'est précisément ce que j'ai fait à l'endroit cité. On verra aisément avec

tion analogue (mais non identique) à l'objection précédente. Ce passage contient deux erreurs. La première a été signalée par M. Zaremba lui-même dans une Note du 9. Septembre 1903., attachée à l'édition polonaise du Mémoire *A* (Rozprawy Wydz. M. P. Akad. Umiej., tom XLIII, p. 262). La seconde consiste en ceci. Les quantités $\gamma_{r\varphi}^*$ et Q , dans les Mémoires de M. Zaremba, ne dépendent que d'une seule constante arbitraire A ; elles ne peuvent pas dépendre de la force centrifuge; leurs expressions contiendraient dans ce cas les deux constantes A , B introduites par l'intégration. D'ailleurs la première équation du système (23), page 414, n'intervient en aucune façon dans le calcul des quantités $\gamma_{r\varphi}^*$ et Q ; on pourrait supposer aussi faible qu'on voudrait la densité ρ du liquide sans modifier par là nécessairement les valeurs de ces quantités.

¹⁾ Voir aux pages 421 et 422 du Mémoire *A* de M. Zaremba.

²⁾ Bull. Int. de l'Acad. d. Sc. de Cracovie, Cl. d. Sc. M. et N., Année 1901, p. 161.

³⁾ Bull. Int. de l'Acad. d. Sc. de Cracovie, Cl. d. Sc. M. et N., Année 1903, p. 307 (en Note). Ce Mémoire a été lu à la séance du 4. Mai 1903.

⁴⁾ Bull. Int. de l'Acad. d. Sc. de Cracovie, Cl. d. Sc. M. et N., Année 1903, p. 307.

⁵⁾ Equations (1) et (2) ou (9) du § 1 du Mémoire précédent.

un peu d'attention que la méthode adoptée dans ce calcul n'est qu'une application particulière de celle que j'ai développée, d'une façon générale, dans le § 2 de mon Mémoire „Sur l'application des équations de Lagrange dans la Théorie de la Viscosité“¹⁾.
 2° Il résulte des considérations précédentes que l'équation (2) du § 5 de mon Mémoire du 4. Mars 1901 découle des équations dites rigoureuses du Mémoire du 4. Février 1901. Dans le cas qui nous occupe, ces équations ne se distinguent en rien des six premières équations du système (2), page 407, du Mémoire A de M. Zaremba; on voit immédiatement qu'il en est réellement ainsi en considérant que la différence $p_m - p$ dans ce cas, est constamment égale à zéro²⁾. Il n'y a pas lieu de s'étonner, dans ces conditions, de ce que le résultat auquel parvient M. Zaremba³⁾ soit identique à l'équation que j'ai donnée en 1901, à savoir l'équation (2) du § 5 de mon Mémoire du 4. Mars 1901⁴⁾. M. Zaremba croit pouvoir expliquer cette concordance en l'attribuant à un accident; il est d'avis que l'usage qu'il fait de cette circonlocution suffit à expliquer „pourquoi la formule (2) du § 5 du mémoire de M. Natanson est exacte“.

Ici encore M. Zaremba à mon avis est dans l'erreur; la formule qu'a en vue M. Zaremba et qu'il retrouve à la page 415 de son Mémoire A à mon avis est erronée.

3° On sait⁵⁾ que l'opération

$$(1) \quad \frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} + w \frac{\partial}{\partial z}$$

peut être remplacée, dans le cas qui nous occupe, par l'opération

$$(2) \quad \frac{d}{dt} = \frac{q}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}$$

1) Bull. Int. de l'Acad. d. Sc. de Cracovie, Cl. d. Sc. M. et N., Année 1903, page 268.

2) C'est ce que j'ai démontré récemment dans une Note présentée à la séance du 7 Décembre 1903 (Bull. Int. pour 1903, p. 781—783).

3) Bull. Int. de l'Acad. d. Sc. de Cracovie, Cl. d. Sc. M. et N., Année 1903, page 415, ligne 5.

4) Bull. Int. de l'Acad. d. Sc. de Cracovie, Cl. d. Sc. M. et N., Année 1901, page 166, ligne 15.

5) Bull. Int. de l'Acad. d. Sc. de Cracovie, Cl. d. Sc. M. et N., Année 1904, p. 14.

A la page 411 du Mémoire *A*, M. Zaremba suppose que la quantité Q est une fonction de la seule variable r ; il admet donc que l'on ait

$$\frac{\partial Q}{\partial \theta} = 0 . \quad (3)$$

A la page 166 de mon Mémoire de 1901, j'ai omis dans l'équation (8) du § 4 les termes qui contiennent les constantes k_{xx} , k_{yy} , k_{xy} ; il est évident que si les conditions du problème l'exigent, on est en droit de considérer comme nulles des constantes arbitraires. D'après les considérations que je viens d'exposer (voir plus haut, *sub* 1^o) l'hypothèse que j'ai adoptée pourrait s'énoncer de la façon suivante:

$$\frac{d\gamma_{r_q}^*}{dt} = 0 . \quad (4)$$

Or les quantités Q et $\gamma_{r_q}^*$ sont liées par l'équation (10) du § 1 de cette Note. Il apparaît donc clairement, en se reportant aux équations (2), (3) et (4) ci-dessus, que l'hypothèse que j'ai adoptée en 1901 est tout aussi légitime que celle dans laquelle, en 1903, s'est placé M. Zaremba; ces hypothèses, en effet, sont équivalentes.

Nakładem Akademii Umiejętności.

Pod redakcją

Członka delegowanego Wydziału matem.-przr., Dra Leona Marchlewskiego.

Kraków, 1904. — Drukarnia Uniwersytetu Jagiellońskiego, pod zarządem J. Filipowskiego.

7 Marca 1904.



