

BULLETIN INTERNATIONAL
DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE CRACOVIE.
CLASSE DES SCIENCES MATHÉMATIQUES ET NATURELLES.

N° 2.

Février

1905.

- Sommaire:** 6. M. S. ZAREMBA. Solution générale du Problème de Fourier.
7. MM. S. NIEMENTOWSKI et M. SEIFERT. Bichinolytes nouveaux.
8. MM. L. BYKOWSKI et J. NUSBAUM. Contributions à la morphologie du téléostéen parasite *Fierasfer* Cuv. — Suite.
9. M. S. KĘPIŃSKI. Intégration de l'équation $\frac{\partial^2 j}{\partial \xi^2} - \frac{1}{\xi} \frac{\partial j}{\partial t} = 0$.
10. M. A. BOCHENEK. Recherches sur le système nerveux des invertébrés (*Anodonta*, *Distaplia*, *Synapta*).
11. Mme CAROLINE REIS. Contribution à la morphologie des ossicules de Weber et de la vessie natatoire chez les Siluroïdes *nebulosus*.

Séance du lundi 6 Février 1905.

PRÉSIDENTE DE M. N. CYBULSKI.

6. M. S. ZAREMBA. m. c. *Ogólne rozwiązanie Zagadnienia Fouriera. (Solution générale du Problème de Fourier).*

I. Introduction.

§ 1. On sait, depuis Fourier, que le Problème du refroidissement d'un corps solide, homogène, isotrope et athermane plongé dans un milieu athermane se ramène, lorsque, à une certaine époque, l'état thermique du corps est donné et lorsqu'à partir de cette époque, la température du milieu est connue à chaque instant en chacun de ses points de contact avec le corps considéré, à un problème d'Analyse que l'on peut énoncer de la manière suivante: L'espace étant rapporté à un système de coordonnées rectangulaires x, y, z , déterminer une fonction V des variables x, y, z et du temps t jouissant des propriétés suivantes:

1°. La fonction V est parfaitement déterminée et continue pour toutes les valeurs positives de t et pour toutes les positions du point (x, y, z) où ce point se trouve soit à l'intérieur d'un domaine donné (D) , soit sur la frontière (S) de ce domaine.

2°. Pour toutes les valeurs positives de t appartenant à un intervalle de la forme $(0, T)$, T étant un nombre positif quelconque,

la valeur absolue de la fonction V a une limite supérieure finie indépendante de la position du point (x, y, z) dans le domaine (D) ou sur sa frontière (S) .

3°. Les dérivées

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 V}{\partial y^2}, \quad \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} \quad \text{et} \quad \frac{\partial V}{\partial t}$$

qui doivent exister et être continues pour toute valeur positive de t et pour toute position du point (x, y, z) à l'intérieur du domaine (D) satisfont, en supposant que l'unité de temps soit convenablement choisie, à l'équation suivante:

$$(1) \quad \Delta V = \frac{\partial V}{\partial t}$$

où, suivant l'usage, on a posé

$$\Delta V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}.$$

4°. Pour toute valeur positive de t on a, en chaque point P de la surface (S)

$$(2) \quad h' \frac{dV}{dN} = hV + \varphi$$

en désignant par h' une constante donnée, positive ou nulle¹⁾, par h une fonction continue donnée des coordonnées du point P , par φ une fonction donnée des coordonnées du point P et du temps t et par $\frac{dV}{dN}$ la dérivée de la fonction V prise suivant la normale en P à la surface (S) , cette normale étant dirigée vers l'intérieur de la surface (S) .

5°. A tout système de deux nombres positifs ε et δ , différents de zéro, mais aussi petits que l'on voudra, on pourra faire correspondre un nombre positif η tel que les inégalités

$$0 < t < \eta$$

$$d \geq \delta$$

¹⁾ Sans nuire à la généralité, il est évidemment permis d'admettre, comme nous le ferons d'ailleurs, que la constante h' ne peut être égale qu'à zéro ou à l'unité.

où d représente la plus courte distance du point (x, y, z) à la surface (S) , entraînent l'inégalité suivante:

$$|V(x, y, z, t) - f(x, y, z)| < \varepsilon$$

en désignant par $f(x, y, z)$ une fonction donnée définie à l'intérieur du domaine (D) .

Nous donnerons le nom de Problème de Fourier au problème précédent et nous appellerons Problème de Fourier réduit le cas particulier où l'on a

$$\varphi = 0.$$

§ 2. Les principes qui vont nous permettre de donner une solution générale du Problème de Fourier ont été posés par M. Poincaré ¹⁾.

M. Poincaré a prévu que la solution du Problème de Fourier réduit peut toujours être représentée au moyen d'une formule de la forme:

$$V = \sum_{k=1}^{\infty} A_k U_k e^{-\xi_k t} \quad (3)$$

en désignant par $A_1, A_2, A_3 \dots$ des constantes dépendant de la nature de la fonction $f(x, y, z)$, par

$$\xi_1 \leq \xi_2 \leq \xi_3 \dots \quad (4)$$

une suite indéfiniment croissante de nombres réels et par U_1, U_2, U_3, \dots des fonctions, indépendantes de t , vérifiant les équations

$$\Delta U_k + \xi_k U_k = 0 \quad (k = 1, 2, 3, \dots)$$

à l'intérieur du domaine (D) et les conditions

$$h' \frac{dU_k}{dN} = h U_k \quad (5)$$

à la frontière (S) de ce domaine, les nombres ξ_k et les fonctions U_k étant indépendantes de la nature de la fonction $f(x, y, z)$.

M. Poincaré a démontré rigoureusement l'existence des fonctions U_k dans le cas où l'on a

$$\frac{h'}{h} = 0$$

¹⁾ Voir surtout: Poincaré. Sur les équations de la Physique. (Rendiconti del Circolo matematico di Palermo 1894).

et où, par conséquent, la condition (5) prend la forme:

$$U_k = 0$$

sur la surface (S) et, dans ce cas particulier, il a établi la formule (3) en supposant que la fonction $f(x, y, z)$ admet des dérivées jusqu'au quatrième ordre inclusivement.

Enfin M. Poincaré a donné une foule d'aperçus qui ont été de la plus grande utilité pour ceux qui se sont engagés dans la voie ouverte par lui.

Voici les points principaux qui, après la publication des travaux de M. Poincaré, appelaient de nouvelles recherches:

1°. Etablir rigoureusement l'existence des fonctions U_k dans le cas général.

2°. Affranchir la théorie du Problème de Fourier réduit des restrictions relatives à la fonction $f(x, y, z)$.

3°. Ramener le Problème de Fourier général à sa forme réduite.

Dans le cas où $\frac{h'}{h} = 0$, M. Le Roy ¹⁾ a réussi à satisfaire d'une façon très complète aux deux derniers points: il a traité le Problème de Fourier réduit en se bornant à admettre la simple continuité de la fonction $f(x, y, z)$ et il a ramené le Problème de Fourier général à la forme réduite en supposant que la fonction φ admet par rapport à t des dérivées jusqu'au cinquième ordre inclusivement et que cette fonction satisfait en outre à quelques autres conditions d'un caractère très général.

De mon côté ²⁾ j'ai établi l'existence des fonctions U_k dans le cas où le rapport $\frac{h}{h'}$ a une valeur constante positive ou nulle et j'ai prouvé que, dans ce cas et dans celui où $\frac{h'}{h} = 0$, la fonction $f(x, y, z)$ est développable en une série de la forme

$$(6) \quad f(x, y, z) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k U_k$$

¹⁾ Le Roy. Sur l'intégration des équations de la chaleur. (Annales de l'Ecole normale supérieure 1898).

²⁾ Zaremba. Sur l'équation aux dérivées partielles $\Delta u + \xi u + f = 0$ et sur les fonctions harmoniques. (Annales de l'Ecole normale supérieure, 1899). Zaremba. Sur le développement d'une fonction arbitraire en une série procédant suivant les fonctions harmoniques. (Note dans les C. R. pour 1899 et Journal de Mathématiques pures et appliquées 1900).

uniformément convergente dans le domaine (D) en désignant par les A_k des constantes, pourvu que les dérivées $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$ existent et soient continues et que l'on ait

$$h' \frac{df}{dN} = hf \quad (7)$$

sur la surface (S). Par cela même, j'ai levé une partie des restrictions avec lesquelles la formule (3) a été démontrée. Je dois ajouter que, dans le cas particulier où $\frac{h'}{h} = 0$, M. Stekloff¹⁾ avait établi avant moi par une méthode tout-à-fait différente de la mienne, les résultats précédents relatifs à la série (6) dans un travail que je ne connaissais pas au moment de la publication de mes recherches.

Depuis, plusieurs travaux ont été publiés sur des questions plus ou moins étroitement liées au Problème Fourier. Mais si importants qu'ils soient, au point de vue particulier du Problème de Fourier, le fruit de ces travaux se borne à ceci: on s'est affranchi d'une partie des restrictions, relative à la frontière (S) du domaine (D), avec lesquelles les résultats que je viens de rappeler ont été établis et l'on a retrouvé des théorèmes déjà connus par des méthodes nouvelles souvent très intéressantes. Voici par conséquent les questions qu'il reste encore à résoudre:

1°. Démontrer l'existence des fonctions harmoniques dans le cas où le rapport $\frac{h}{h'}$ représente une fonction continue quelconque définie sur la surface (S).

2°. Résoudre le Problème de Fourier réduit dans le cas général, en se bornant à admettre la simple continuité de la fonction $f(x, y, z)$.

3°. Ramener le Problème de Fourier général à la forme réduite lorsque le rapport $\frac{h}{h'}$ représente une fonction continue quelconque définie sur la surface (S).

¹⁾ Stekloff, Note du 30 Janvier 1899 dans les C. R. et Mémoire sur les fonctions harmoniques de M. Poincaré. (Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse 1900).

J'espère que l'on trouvera dans ce mémoire des solutions satisfaisantes de toutes ces questions et même celles de certaines questions beaucoup plus générales.

On se rendra compte rapidement du détail des résultats que j'ai obtenus en se reportant au dernier § de l'avant-dernier chapitre ainsi qu'au commencement du dernier chapitre; on trouvera d'ailleurs une table des matières à la fin du mémoire. Je me bornerai seulement à faire remarquer ici que les hypothèses que j'adopte dans ce travail au sujet du domaine (D) et de la surface (S), frontière de ce domaine, sont les suivantes:

1°. Le domaine (D) ne s'étend pas à l'infini.

2°. La surface (S) admet un plan tangent déterminé en chacun de ses points.

3°. L'angle (compris entre 0 et $\frac{\pi}{2}$) formé par deux normales à la surface (S) est inférieur au produit d'une constante par la distance des pieds de ces normales.

4°. Si d'un point O comme centre, pris arbitrairement sur la surface (S), on décrit une sphère (Σ) dont le rayon ne dépasse pas une certaine limite fixe, indépendante de la position du point O sur la surface (S), la portion de cette surface intérieure à la sphère (Σ) ne pourra avoir qu'un seul point commun avec une parallèle à la normale en O à la surface.

J'ajoute que je conserverai aux symboles (D) et (S), dans toute l'étendue de ce mémoire, la signification que je leur ai donnée dans cette introduction et que je désignerai constamment par (D') le domaine formé par l'ensemble des points de l'espace extérieurs au domaine (D).

II. Définition de certaines notations. Théorie des potentiels généralisés.

§ 3. Il sera utile de définir dès maintenant certaines notations qui seront conservées dans tout ce travail et dont d'ailleurs, pour la plupart, j'ai déjà eu l'occasion de me servir dans les travaux cités dans l'Introduction.

Soit $F(x, y, z)$ une fonction définie dans l'espace, nous aurons souvent à distinguer:

1° La valeur de la fonction F sur la surface (S) elle-même.

2° La limite de cette fonction lorsque le point (x, y, z) tend vers un point situé sur la surface (S), sans sortir du domaine (D).

3° La limite analogue à la précédente mais relative au cas où le point (x, y, z) , ne sort pas du domaine extérieur (D') .

Nous désignerons ces éléments par les symboles

$$(F)_s, (F)_i \text{ et } (F)_e.$$

et nous dirons que les fonctions $(F)_i$ et $(F)_e$ représentent les valeurs périphériques intérieures et extérieures de la fonction F . Nous supprimerons d'ailleurs la parenthèse et l'indice lorsqu'aucun malentendu ne sera à craindre.

Considérons maintenant un point $A(x, y, z)$ non situé sur la surface (S) . Si la plus courte distance de ce point à la surface (S) ne dépasse pas une certaine limite δ , il existera sur cette surface un point unique P dont la distance au point A sera la plus petite possible. Menons par les points A et P un axe (N) de sens tel qu'un point mobile se déplaçant dans le sens de l'axe passe en traversant la surface (S) en P du domaine (D') dans le domaine (D) . L'axe (N) sera évidemment normal à la surface (S) en P . Désignons par α, β, γ ses cosinus-directeurs et considérons l'expression

$$\alpha \frac{\partial F}{\partial x} + \beta \frac{\partial F}{\partial y} + \gamma \frac{\partial F}{\partial z}.$$

Nous représenterons cette expression par le symbole

$$D_{ni}(F) \text{ ou } D_{ne}(F)$$

selon que le point $A(x, y, z)$ sera situé dans le domaine (D) ou dans le domaine (D') .

Reprenons les points A et P que nous venons de considérer et désignons par l leur distance. Les équations

$$\left(\frac{dF}{dN}\right)_i = \lim_{l \rightarrow 0} D_{ni}(F),$$

$$\left(\frac{dF}{dN}\right)_e = \lim_{l \rightarrow 0} D_{ne}(F)$$

serviront de définition aux symboles qui en forment les premiers membres.

Voici le caractère commun des quatre quantités

$$(F)_i, (F)_e, \left(\frac{dF}{dN}\right)_e \text{ et } \left(\frac{dF}{dN}\right)_i :$$

si, pour un moment on désigne par E_0 l'une quelconque de ces

quantités, la fonction E_0 sera la limite vers laquelle tend une quantité E , fonction des coordonnées d'un point $A(x, y, z)$, non situé sur la surface (S) , lorsque ce point tend, d'une certaine façon, vers un point situé sur la surface (S) . Dans les cas que nous aurons à considérer, il arrivera toujours que la quantité E tendra uniformément vers sa limite E_0 et la démonstration de ce fait, très important d'ailleurs, sera, s'il n'a pas lieu par hypothèse, assez aisée pour que nous puissions nous dispenser de la développer. A cause de cela, quand nous aurons à considérer la quantité E_0 , nous nous dispenserons ordinairement de faire remarquer explicitement que la quantité E tend uniformément vers sa limite E_0 , mais il sera entendu une fois pour toutes que cette circonstance a toujours lieu.

§ 4. Considérons l'équation aux dérivées partielles ¹⁾

$$(1) \quad \Delta u + \xi u = 0$$

où la lettre ξ représente un nombre réel ou complexe indépendant des variables x, y, z . Désignons par ϱ le module et par θ et θ' celles des déterminations de l'argument de ξ qui vérifie les inégalités

$$(2) \quad 0 \leq \theta < 2\pi,$$

et posons

$$(3) \quad \mu = \sqrt{\varrho} \left(\sin \frac{\theta}{2} - i \cos \frac{\theta}{2} \right)$$

en désignant par i l'unité imaginaire et en prenant la détermination positive du radical $\sqrt{\varrho}$.

Nous aurons

$$\mu^2 = -\xi$$

et la fonction

$$\frac{e^{-\mu r}}{r}$$

où r représente la distance d'un point variable (x, y, z) à un point fixe (x_0, y_0, z_0) , sera, comme on le sait, une intégrale particulière de l'équation (1) qui, par rapport à cette équation, joue un rôle

¹⁾ Dans ce mémoire l'assertion: „une fonction u vérifie une équation différentielle $E = 0$ dans un certain domaine (Ω) “ impliquera non seulement l'existence, en chaque point P situé à l'intérieur du domaine (Ω) , de la fonction u et de celles de ses dérivées qui entrent dans l'équation $E = 0$, mais encore la continuité de tous ces éléments en un point tel que le point P .

absolument analogue à celui que joue la fonction $\frac{1}{r}$ dans la théorie de l'équation de Laplace.

Nous désignerons, comme nous avons déjà eu l'occasion de le faire dans d'autres travaux, par le terme de potentiel généralisé de nombre caractéristique μ , toute fonction déduite d'un potentiel newtonien par la substitution de la fonction $\frac{e^{-\mu r}}{r}$ à la fonction $\frac{1}{r}$. On comprendra, sans qu'il soit nécessaire d'insister, le sens des termes de potentiel généralisé de simple couche, potentiel généralisé de double couche, potentiel généralisé de masses distribuées d'une façon quelconque dans l'espace.

Voici les propriétés principales, bien connues d'ailleurs, ou faciles à démontrer, dont jouissent les potentiels généralisés quelle que soit la valeur du nombre μ . Si l'on désigne par w un potentiel généralisé quelconque, ce potentiel vérifiera, à l'extérieur des masses dont il dérive, l'équation aux dérivées partielles:

$$\Delta w + \xi w = 0.$$

Désignons par σ une fonction continue définie sur la surface (S) et considérons le potentiel généralisé u dérivant d'une simple couche de densité $\frac{\sigma}{2\pi}$ portée par la surface (S) ; en d'autres termes, posons:

$$u = \frac{1}{2\pi} \int_{(S)} \sigma \frac{e^{-\mu r}}{r} ds \quad (4)$$

en désignant par ds un élément de la surface (S) et par r la distance de cet élément au point courant (x, y, z) . La fonction u sera continue, même à la traversée de la surface (S) mais il n'en sera pas de même de ses dérivées et l'on aura:

$$\left(\frac{du}{dN}\right)_e - \left(\frac{du}{dN}\right)_i = 2\sigma. \quad (5)$$

Conservons aux symboles r et ds la signification que nous venons de leur donner, désignons par γ l'angle formé par la normale à ds dirigée vers l'intérieur du domaine (D) avec le rayon allant du pied de cette normale vers le point (x, y, z) , considérons une fonction continue ν définie sur la surface (S) et posons:

$$(6) \quad v = \frac{-1}{2\pi} \int_{(S)} v \frac{d}{dr} \frac{e^{-\mu r}}{r} \cos \gamma ds.$$

La fonction v sera un potentiel généralisé dérivant d'une double couche de densité $\frac{v}{2\pi}$ portée par la surface (S) . On aura:

$$(7) \quad (v)_i - (v)_e = 2v.$$

Considérons les quantités $D_{ni}(v)$ et $D_{ne}(v)$ et désignons par l et l' les distances à la surface (S) des points auxquels elles se rapportent; les relations suivantes auront toujours lieu:

$$(8) \quad \left\{ \begin{array}{l} \lim_{l=0} l D_{ni}(v) = 0 \\ \lim_{l'=0} l' D_{ne}(v) = 0 \end{array} \right.$$

Les quantités $\left(\frac{dv}{dN}\right)_e$ et $\left(\frac{dv}{dN}\right)_i$ n'existent pas en général mais, quand elles existent, elles vérifient la relation suivante:

$$\left(\frac{dv}{dN}\right)_i = \left(\frac{dv}{dN}\right)_e.$$

Considérons enfin dans l'espace un domaine (Ω) ainsi qu'une fonction $f(x, y, z)$ définie à l'intérieur de ce domaine et telle que l'intégrale

$$\int_{(\Omega)} |f(x', y', z')| d\tilde{v}'$$

où $d\tilde{v}'$ représente l'élément de volume relatif au point (x', y', z') , ait un sens et envisageons la fonction

$$(9) \quad \psi(x, y, z) = \frac{1}{4\pi} \int_{(\Omega)} f(x', y', z') \frac{e^{-\mu r}}{r} dr$$

où r représente la distance du point courant (x, y, z) au point (x', y', z') . Si l'on désigne par (Ω') une portion du domaine (Ω) telle que, à l'intérieur de (Ω') , la quantité $|f(x, y, z)|$ ait une limite supérieure finie, les dérivées

$$\frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad \text{et} \quad \frac{\partial \psi}{\partial z}$$

existeront et seront continues, en chaque point situé à l'intérieur du domaine (Ω'). Quant aux dérivées

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2}$$

elles pourront ne pas exister même lorsque la fonction $f(x, y, z)$ est continue; mais, lorsque dans une portion (Ω') du domaine (Ω) ces dérivées existent et sont continues, elles satisfont nécessairement, à l'intérieur du domaine (Ω') à l'équation suivante ¹⁾:

$$\Delta \psi + \xi \psi + f(x, y, z) = 0.$$

§ 5. Les potentiels généralisés et diverses quantités qui en dérivent satisfont, lorsque le paramètre ξ est soumis à certaines restrictions, à des inégalités qui seront pour nous d'une importance fondamentale et que, pour la plupart, j'ai déjà eu l'occasion de faire connaître dans d'autres travaux. Avant d'énoncer ces inégalités, je ferai une remarque qui nous permettra de simplifier sensiblement l'écriture et le langage après avoir adopté une convention appropriée.

Les inégalités que nous avons en vue contiendront des nombres positifs dépendant uniquement de la nature de la surface (S). D'une part chacun de ces nombres pourra, sans inconvénient, être remplacé par un nombre plus grand. D'autre part si l'on désigne par A l'un d'eux et par A' un nombre par lequel il serait permis de remplacer le nombre A si, au lieu de la surface (S), on envisageait une surface (S') géométriquement semblable à la surface (S), on pourra prendre

$$A' = A k^p$$

en désignant par k le rapport de similitude de la surface (S') à la surface (S) et par p une constante numérique dépendant uniquement de la signification commune des nombres A et A' . Voici maintenant la convention que nous allons adopter et qui trouve sa justification dans la remarque qui précède: nous représenterons tous les nombres dont nous venons de parler par des expressions de la forme:

¹⁾ On établira aisément cette dernière proposition en tenant compte des résultats que j'ai fait connaître dans mon article „Contribution à la théorie d'une équation fonctionnelle de la Physique“. *Rendiconti del Circolo matematico di Palermo*, 1905.

$$cL^{p_1}, \quad cL^{p_2}, \quad cL^{p_3}$$

en désignant par $p_1, p_2, p_3 \dots$ des constantes numériques dont nous ferons chaque fois connaître les valeurs, par c un coefficient qui aura une même valeur pour tout ensemble de surfaces géométriquement semblables deux à deux et par L le maximum de la distance de deux points situés sur la surface (S).

Considérons la fonction u définie par l'équation (4) et désignons par \mathcal{S} une limite supérieure du module de la fonction σ , fonction qui peut être de la forme $\sigma' + i\sigma''$ en désignant par σ' et σ'' deux fonctions réelles. On n'éprouvera pas de difficultés à s'assurer que, lorsque le paramètre ξ ne se réduit pas à un nombre réel positif ou nul, on a les inégalités suivantes:

$$(10) \quad |u| < \frac{c \mathcal{S}}{\sqrt{\varrho} \sin^2 \frac{\theta}{2}}$$

dans tout l'espace,

$$(11) \quad \left| \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{du}{dN} \right)_e + \left(\frac{du}{dN} \right)_i \right\} \right| < \frac{c \mathcal{S}}{L \sqrt{\varrho} \sin^2 \frac{\theta}{2}},$$

$$(12) \quad \left\{ \begin{array}{l} \left| \left(\frac{du}{dN} \right)_e - \sigma \right| < \frac{c \mathcal{S}}{L \sqrt{\varrho} \sin^2 \frac{\theta}{2}} \\ \left| \left(\frac{du}{dN} \right)_i + \sigma \right| < \frac{c \mathcal{S}}{L \sqrt{\varrho} \sin^2 \frac{\theta}{2}}, \end{array} \right.$$

$$(13) \quad \left\{ \begin{array}{l} |D_{ni}(u)| < \left(1 + \frac{c}{L \sqrt{\varrho} \sin^2 \frac{\theta}{2}} \right) \mathcal{S} \\ |D_{ne}(u)| < \left(1 + \frac{c}{L \sqrt{\varrho} \sin^2 \frac{\theta}{2}} \right) \mathcal{S}. \end{array} \right.$$

Envisageons maintenant la fonction v définie par la formule (6) et soit \mathcal{V} une limite supérieure du module de la fonction v , fonction qui peut, comme σ , être une fonction complexe de la forme $v' + i v''$. On s'assurera aisément que l'on a:

$$|v| < \left(1 + \frac{c}{L\sqrt{\varrho} \sin^2 \frac{\theta}{2}} \right) \partial\gamma \quad (14)$$

$$\left| \frac{1}{2} \{ (v)_i + (v)_e \} \right| < \frac{c}{L\sqrt{\varrho} \sin^2 \frac{\theta}{2}} \partial\gamma \quad (15)$$

$$\left. \begin{aligned} |(v)_i - v| &< \frac{c}{L\sqrt{\varrho} \sin^2 \frac{\theta}{2}} \partial\gamma \\ |(v)_e + v| &< \frac{c}{L\sqrt{\varrho} \sin^2 \frac{\theta}{2}} \partial\gamma \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

§ 6. Voici ce qu'il est aisé de conclure des inégalités du § précédent: lorsque le paramètre ξ satisfait à l'inégalité

$$\frac{c}{\sin^2 \frac{\theta}{2} L\sqrt{\varrho}} < 1 \quad (17)$$

les méthodes de la moyenne arithmétique ¹⁾ permettront de résoudre les problèmes suivants:

1° Déterminer la densité $\frac{\sigma}{2\pi}$ de la simple couche dont dérive le potentiel (4) de façon que l'on ait

$$\left(\frac{du}{dN} \right)_i = \sigma_0 \quad (18)$$

ou

$$\left(\frac{du}{dN} \right)_e = \sigma_0, \quad (19)$$

en désignant par σ_0 une fonction continue donnée, définie sur la surface (S).

¹⁾ Consulter les travaux cités dans l'Introduction ainsi que mes deux mémoires suivants: „Sur l'intégration de l'équation $\Delta u + \xi u + 0$ “ et „Les fonctions fondamentales de M. Poincaré et la méthode de Neumann pour une frontière composée de polygones curvilignes“ (Journal de Mathématiques pures et appliquées 1902 et 1904).

2° Déterminer la densité $\frac{\nu}{2\pi}$ de la double couche dont dérive le potentiel (6) de manière que le potentiel ν vérifie l'équation

$$(20) \quad (\nu)_i = \nu_0$$

ou l'équation

$$(21) \quad (\nu)_e = \nu_0$$

le symbole ν_0 représentant une fonction continue donnée définie sur la surface (S) .

Assurons-nous que chacun des problèmes dont nous venons de reconnaître la possibilité lorsque l'inégalité (17) est vérifiée n'admet qu'une seule solution et établissons en même temps certaines inégalités qui nous seront indispensables dans la suite. Pour éviter des complications inutiles, ne nous bornons pas à admettre que l'inégalité (17) est vérifiée et imposons au paramètre ξ la condition moins générale que voici:

$$(22) \quad \frac{c}{\sin^2 \frac{\theta}{2} L \sqrt{\rho}} \leq \frac{1}{2}$$

Cela posé admettons que, par un procédé quelconque, on ait déterminé la fonction continue σ de façon que le potentiel (4) satisfasse à l'équation (18). La fonction σ étant continue, le module de cette fonction atteindra son maximum \mathcal{S} en un certain point P de la surface (S) . D'ailleurs la seconde des inégalités (12) donne:

$$\left(\frac{du}{dN}\right)_i + \sigma = \eta \frac{c\mathcal{S}}{\sin^2 \frac{\theta}{2} L \sqrt{\rho}}$$

en désignant par η un facteur de module inférieur à l'unité. Regardons l'équation précédente comme se rapportant au point P . Nous aurons

$$|\sigma| = \mathcal{S}$$

et, en tenant compte des relations (18) et (22), on trouvera

$$(23) \quad |\sigma| < 2\mathcal{S}_0,$$

en désignant par \mathcal{S}_0 une limite supérieure du module de la fonction σ_0 .

Il résulte de l'inégalité que nous venons d'établir que lorsque la fonction σ_0 est constamment nulle, la fonction σ doit aussi être

nulle identiquement. Donc, comme nous l'avons annoncé, l'équation (18), détermine parfaitement la fonction σ et, par suite, la fonction u .

En s'appuyant sur les inégalités (10) et (13), on déduira immédiatement de l'inégalité (23) les inégalités suivantes

$$|u| < \frac{2c\mathcal{S}_0}{\sin \frac{\theta}{2} \sqrt{\varrho}} \quad (24)$$

$$\left. \begin{aligned} |D_{ni}(u)| &< 3\mathcal{S}_0 \\ |D_{ne}(u)| &< 3\mathcal{S}_0, \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

en remarquant, pour démontrer les deux dernières inégalités, que, par hypothèse, le paramètre ξ satisfait à la condition (22).

Si au lieu de supposer que le potentiel u satisfait à l'équation (18), nous avons supposé qu'il vérifie l'équation (19), nous serions arrivés aux mêmes conclusions et nous nous serions assurés que dans ce cas aussi les inégalités (23), (24) et (25) sont vérifiées.

Des considérations basées sur les inégalités (16) et tout à fait analogues à celles qui viennent d'être développées conduisent aux conséquences suivantes: chacun des problèmes qui consiste à déterminer la fonction v de façon que le potentiel (6) vérifie l'une des équations (20) ou (21) n'admet comme on l'a annoncé, qu'une solution unique et l'on a, dans chacun de ces deux cas

$$|v| < 2\mathcal{V}_0, \quad (26)$$

en désignant par \mathcal{V}_0 une limite supérieure du module de la fonction v . J'ajoute que les inégalités (14), (22) et (26) donnent:

$$|v| < 3\mathcal{V}_0 \quad (27)$$

dans tout l'espace.

§ 7. Désignons comme plus haut, par σ_0 une fonction continue donnée définie sur la surface (S) , par h une seconde fonction de même nature que la fonction σ_0 et par λ un paramètre. Cela posé, cherchons à déterminer le potentiel (4) de façon que ce potentiel vérifie, sur (S) , l'équation suivante:

$$\left(\frac{du}{dN}\right)_i = \lambda h u + \sigma_0 \quad (28)$$

Voyons s'il est possible de développer la fonction u en une série de la forme suivante:

$$(29) \quad u = \sum_{k=0}^{\infty} u_k \lambda^k$$

en désignant par les u_k des potentiels de simples couches indépendants du paramètre λ . Nous aurons:

$$\left(\frac{du_0}{dN}\right)_i = \sigma_0; \quad \left(\frac{du_k}{dN}\right)_i = h u_{k-1} \quad (k = 1, 2, 3, \dots)$$

Désignons par M_k le maximum du module de la fonction u_k et supposons que le paramètre ξ satisfasse à l'inégalité (22). On n'éprouvera aucune difficulté à calculer les u_k et le théorème exprimé par l'inégalité (24) nous donnera:

$$M_k < \frac{2c H M_{k-1}}{\sin \frac{\theta}{2} \sqrt{\varrho}},$$

en désignant par H le maximum du module de la fonction h . Par conséquent la série (29) sera absolument et uniformément convergente pour toute valeur de λ vérifiant l'inégalité suivante:

$$(30) \quad |\lambda| < \frac{\sin \frac{\theta}{2} \sqrt{\varrho}}{2c H}$$

et, en s'appuyant sur le théorème exprimé par la première des inégalités (25), on démontrera sans peine et en toute rigueur que, pour toute valeur de λ vérifiant l'inégalité (30), la somme u de la série (29) représente la fonction demandée.

En vue des applications qui vont suivre, il nous suffirait de supposer que le paramètre ξ satisfait, en même temps qu'à la condition (22), encore à la condition additionnelle

$$(31) \quad \frac{2c H}{\sin \frac{\theta}{2} \sqrt{\varrho}} < 1$$

mais sans perdre aucun avantage, nous gagnerons en simplicité en remplaçant la condition (31) par la condition moins générale:

$$(32) \quad \frac{2c H}{\sin \frac{\theta}{2} \sqrt{\varrho}} \leq \frac{1}{2}$$

Le paramètre ξ vérifiant à la fois les inégalités (22) et (32), nous pourrions faire, dans l'équation (29), $\lambda = 1$ et alors le potentiel u satisfera à l'équation

$$\left(\frac{du}{dN}\right)_i = h u + \sigma_0 \quad (33)$$

sur la surface (S).

Montrons que lorsque le paramètre ξ vérifie à la fois les inégalités (22) et (32), le potentiel (4) est parfaitement déterminé par la condition de satisfaire à l'équation (33). En effet, désignons par M et S_0 les maxima des modules des fonction u et σ_0 . Les théorèmes exprimés par les inégalités (23) et (24) donneront:

$$S < 2(HM + S_0)$$

$$M < \frac{2c(HM + S_0)}{\sin \frac{\theta}{2} \sqrt{\varrho}}$$

et, en tenant compte de l'inégalité (32), on en conclura d'abord:

$$M < \frac{4cS_0}{\sin \frac{\theta}{2} \sqrt{\varrho}}$$

et ensuite:

$$S < 4S_0$$

en tenant compte une seconde fois de l'inégalité (32). Les inégalités que nous venons d'obtenir équivalent évidemment aux inégalités suivantes:

$$|u| < \frac{4cS_0}{\sin \frac{\theta}{2} \sqrt{\varrho}} \quad (34)$$

et

$$|\sigma| < 4S_0 \quad (35)$$

Ces inégalités, que nous aurons l'occasion d'appliquer plus tard, nous apprennent que les fonctions u et σ sont nulles identiquement dans le cas où la fonction σ_0 est constamment nulle et l'on en conclura immédiatement que le problème qui consiste à déterminer le potentiel (4) de façon qu'il vérifie l'équation (33) n'admet, comme il s'agissait de le démontrer, qu'une seule solution lorsque le paramètre ξ vérifie à la fois les inégalités (22) et (32).

Notons encore que les inégalités (13), (22) et (35) donnent:

$$(36) \quad \begin{cases} |D_{ni}(u)| < 6 \mathcal{S}_0 \\ |D_{ne}(u)| < 6 \mathcal{S}_0 \end{cases}$$

III. Théorèmes généraux relatifs à l'équation aux dérivées partielles

$$\Delta u + \xi u = 0.$$

§ 8. Pour donner une base solide aux considérations qui seront développées dans les chapitres ultérieurs, nous allons réunir ici certains théorèmes généraux concernant l'équation aux dérivées partielles

$$(1) \quad \Delta u + \xi u = 0$$

Je commence par rappeler que, si un point (x_0, y_0, z_0) est situé à l'intérieur d'un domaine où la fonction u vérifie l'équation (1), cette fonction est, dans le voisinage du point (x_0, y_0, z_0) , une fonction analytique holomorphe des variables x, y, z . Cette proposition, bien connue d'ailleurs, peut se démontrer par un raisonnement tout-à-fait semblable à celui dont on se sert pour établir le théorème analogue relatif à l'équation de Laplace.

Voici maintenant un autre théorème dû à M. Poincaré:¹⁾ lorsque la partie réelle du paramètre ξ est négative, le module de la fonction u ne peut avoir de maximum en un point $A_0(x_0, y_0, z_0)$ situé à l'intérieur du domaine où cette fonction vérifie l'équation (1). On peut apporter un léger perfectionnement à ce théorème: je vais prouver que, dans l'énoncé, on peut remplacer les mots „la partie réelle de ξ est négative“ par les mots „la partie réelle de ξ n'est pas positive“. En effet soit (Σ) une sphère de centre $A_0(x_0, y_0, z_0)$ et de rayon R assez petit pour qu'elle soit située toute entière à l'intérieur du domaine dans lequel la fonction u satisfait à l'équation (1).

Une application classique du théorème de Green donne:

$$u(x, y, z) = \frac{1}{4\pi} \int_{(2)} \frac{d}{dNr} \frac{e^{-\mu r}}{r} ds - \frac{1}{4\pi} \int_{(S)} \frac{du}{dNr} \frac{e^{-\mu r}}{r} ds.$$

Faisons coïncider le point (x, y, z) avec le centre A_0 de la sphère (Σ) et envisageons la fonction

¹⁾ Mémoire cité dans l'Introduction.

$$\frac{e^{-\mu R}}{e^{-\mu R} - e^{+\mu R}} \cdot \frac{e^{-\mu r'} - e^{+\mu r'}}{r'}$$

où r' représente la distance d'un point variable (x', y', z') au centre A_0 de la sphère (Σ) . Un calcul facile nous donnera:

$$u(x_0, y_0, z_0) = \frac{\mu}{2\pi R (e^{\mu R} - e^{-\mu R})} \int_{(\Sigma)} u ds \quad (2)$$

Posons

$$\mu R = a + ib$$

en désignant par a et b des nombres réels, il viendra

$$\left| \frac{\mu R}{e^{\mu R} - e^{-\mu R}} \right|^2 = \frac{a^2 + b^2}{e^{2a} + e^{-2a} - 2 \cos 2b}$$

Il n'y a qu'à développer le dénominateur du second membre de cette équation en série pour reconnaître que l'inégalité

$$a^2 \geq b^2$$

entraîne l'inégalité

$$\left| \frac{\mu R}{e^{\mu R} - e^{-\mu R}} \right| \leq \frac{1}{2}$$

Cela étant, on conclura immédiatement de la formule (2) le théorème que nous voulions démontrer.

§ 9. Le théorème précédent entraîne la conséquence importante que voici: supposons 1° que la fonction u satisfasse à l'équation (1) dans l'un des domaines (D) ou (D') qui ont pour frontière commune la surface (S) , 2° que, dans le second cas, elle tende uniformément vers zéro lorsque le point (x, y, z) pour lequel on la considère s'éloigne indéfiniment, 3° que ses valeurs périphériques relatives à la surface (S) soient nulles dans les deux cas. Dans ces conditions et lorsque la partie réelle de ξ ne sera pas positive, la fonction u sera nulle identiquement.

Cette proposition entraîne à son tour le théorème suivant: le Problème de Dirichlet, tant extérieur qu'intérieur, relatif à l'équation (1) et à la surface (S) admet, au plus, une seule solution lorsque la partie réelle du paramètre ξ n'est pas positive.

Je vais démontrer que les deux théorèmes que je viens d'énoncer subsistent quel que soit le signe de la partie réelle du para-

mètre ξ , pourvu que, quand la partie réelle de ξ est positive, la partie imaginaire ne soit pas nulle.

La démonstration dans le cas où l'on envisage le domaine (D') ne se distingue de celle qui se rapporte au domaine (D) que par des considérations additionnelles qui ne trouvent pas place dans le second cas. Nous pourrions donc nous borner à développer la démonstration pour le domaine (D').

Le lemme suivant nous sera indispensable: lorsqu'une fonction $u(x, y, z)$ vérifie l'équation (1) en tout point dont la distance à l'origine des coordonnées est supérieure à une limite finie, lorsqu'elle tend uniformément vers zéro quand la distance du point (x, y, z) à l'origine croît indéfiniment et lorsqu'enfin, le paramètre ξ ne se réduit pas à un nombre réel et positif, la fonction u se comporte à l'infini comme un potentiel généralisé ou, en termes plus précis: à une distance assez grande de l'origine, la fonction u peut être représentée au moyen d'un potentiel généralisé dérivant de masses situées à distance finie.

Pour démontrer ce lemme, envisageons une sphère (Σ) telle que tous les points extérieurs à cette sphère et la surface de cette sphère elle-même soient situés à l'intérieur du domaine où la fonction u vérifie l'équation (1). Désignons par (Ω) le domaine intérieur à la sphère (Σ) et par (Ω') le domaine extérieur. Je dis d'abord que les modules des dérivées premières de la fonction u ont, dans le domaine (Ω') à une distance l de (Σ) supérieure à une longueur finie d , non nulle mais d'ailleurs quelconque une limite supérieure finie¹⁾.

J'observe d'abord que la sphère (Σ) est une des surfaces qu'il est évidemment permis de substituer à la surface (S) dans la théorie exposée au chapitre précédent. Par conséquent si l'on désigne par a un nombre positif assez grand, on saura résoudre les Problèmes de Dirichlet, intérieur et extérieur, relatifs à l'équation

$$(3) \quad \Delta v - av = 0$$

et à la sphère (Σ); d'ailleurs d'après ce que l'on a vu plus haut, chacun de ces problèmes n'admettra qu'une solution unique. Cette remarque faite, cherchons une fonction $w(x, y, z)$ vérifiant l'équation

¹⁾ La restriction relative à l n'est pas nécessaire; nous la faisons intervenir parce que d'une part elle ne nous gênera en rien et que d'autre part elle permet de simplifier le raisonnement.

$$\Delta w - aw + (a + \xi)u = 0 \quad (4)$$

dans tout le domaine (D), tendant uniformément vers zéro lorsque le point (x, y, z) s'éloigne indéfiniment et telle que ses valeurs périphériques relatives à la sphère (Σ) soient nulles. A cet effet désignons par $d\tilde{v}'$ l'élément de volume relatif au point (x', y', z') , par r la distance du point courant (x, y, z) au point (x', y', z') et par m la détermination positive du radical \sqrt{a} . Posons ensuite:

$$\Phi(x, y, z) = \frac{a + \xi}{4\pi} \int_{(\Omega')} u(x', y', z') \frac{e^{-mr}}{r^2} d\tilde{v}' \quad (5)$$

Nous aurons

$$w(x, y, z) = \Phi(x, y, z) - v(x, y, z)$$

en désignant par v une fonction vérifiant l'équation (3) dans le domaine (Ω'), tendant uniformément vers zéro lorsque le point (x, y, z) s'éloigne indéfiniment et ayant, sur la sphère (Σ), les mêmes valeurs périphériques que la fonction Φ . D'après la remarque faite plus haut au sujet de l'équation (3), la fonction v existera et sera parfaitement déterminée.

D'ailleurs la fonction v sera exprimable au moyen d'un potentiel dérivant d'une double couche portée par la surface (Σ). Il serait aisé de prouver que les dérivées premières de la fonction w sont continues dans tout le domaine (Ω') et de faire voir que, si l'on désigne par w_1 une de ces dérivées, on aura dans tout le domaine (Ω')

$$|w_1| < B \quad (6)$$

en désignant par B un nombre positif fini.

Mais il nous suffira de remarquer que, comme on le vérifiera sans peine, la quantité w_1 satisfait à une inégalité de la forme (6) en tous les points du domaine (Ω') dont la distance à la sphère (Σ) n'est pas inférieure à la longueur d . Considérons maintenant la fonction

$$\psi(x, y, z) = u - w \quad (7)$$

Il résulte des équations (1) et (4) que l'on aura

$$\Delta \psi - a\psi = 0$$

dans tout le domaine (Ω'). D'autre part la fonction ψ s'annulera à l'infini, et aura, sur la sphère (Σ), les mêmes valeurs périphériques que la fonction u . La fonction ψ sera donc exprimable au

moyen d'un potentiel dérivant d'une double couche portée par la sphère (Σ). Voici ce qui en résulte: si l'on désigne par $\psi_1(x, y, z)$ une dérivée première de la fonction $\psi(x, y, z)$ et si l'on suppose que la distance du point (x, y, z) à la sphère (Σ) n'est pas inférieure à une certaine longueur fixe, à la longueur d par exemple, on aura:

$$(8) \quad |\psi_1| < B'$$

en désignant par B' un nombre positif analogue au nombre B . Désignons par u_1 l'une quelconque des dérivées premières de la fonction u . Il résulte des relations (6), (7) et (8) que l'on aura:

$$(9) \quad |u_1| < B + B'$$

pourvu que la distance à la sphère (Σ) du point pour lequel on considère, dans le domaine (Ω'), la valeur de la fonction u_1 soit supérieure à la longueur d .

Cela posé envisageons une sphère (Σ') concentrique à la sphère (Σ) et de rayon R' supérieur au rayon de la sphère (Σ). Le point (x, y, z) étant situé entre les sphères (Σ) et (Σ'), on aura:

$$(11) \quad u(x, y, z) = \frac{-1}{4\pi} \int_{(\Sigma)} u \frac{d}{dN} \frac{e^{-ur}}{r} ds + \frac{1}{4\pi} \int_{(\Sigma)} \frac{du}{dN} \frac{e^{-ur}}{r} ds \\ + \frac{1}{4\pi} \int_{(\Sigma')} u \frac{d}{dN} \frac{e^{-ur}}{r} ds - \frac{1}{4\pi} \int_{(\Sigma')} \frac{du}{dN} \frac{e^{-ur}}{r} ds$$

Faisons croître indéfiniment le rayon R' de la sphère (Σ') et rappelons que, par hypothèse, le paramètre ξ ne se réduit pas à un nombre réel et positif. Le paramètre ξ étant en outre différent de zéro (il n'y a évidemment pas lieu d'envisager le cas $\xi = 0$) la partie réelle de μ sera un nombre positif non nul. Donc les intégrales étendues à la sphère (Σ') tendront vers zéro et cela parce que le module de u reste inférieur à un nombre fixe et que, à cause de l'inégalité (9), il en sera de même des valeurs de la quantité $\frac{du}{dN}$

dans la quatrième intégrale du second membre de l'équation (11). D'ailleurs la somme des deux dernières intégrales du second membre de l'équation (11) est indépendante de R' , cela résulte immédiatement de l'équation (11) elle-même. Cette somme sera donc nulle identiquement et le second membre de l'équation (11) se réduira à ses

premiers termes. Cela prouve que la fonction u se comporte à l'infini comme un potentiel généralisé. Le lemme que nous voulions établir est donc démontré.

Supposons maintenant que la fonction $u(x, y, z)$ satisfasse à l'équation (1) dans le domaine (D') , qu'elle tende uniformément vers zéro lorsque le point (x, y, z) s'éloigne indéfiniment et que ses valeurs périphériques extérieures relatives à la surface (S) soient nulles. Si l'on désigne par a un nombre positif assez grand, on pourra déterminer une fonction w vérifiant l'équation (4) dans tout le domaine (D') et s'annulant sur la surface (S) et à l'infini et, à cet effet, on pourra procéder de la façon suivante: Reprenons l'intégrale (5) en ayant soin d'étendre l'intégration au domaine (D') au lieu de l'étendre au domaine (Ω') . En d'autres termes posons:

$$\Phi(x, y, z) = \frac{a + \xi}{4\pi} \int_{(D')} u(x', y', z') \frac{e^{-mr}}{r} d\tilde{v}$$

Le nombre a étant assez grand on pourra, comme cela résulte du chapitre précédent, déterminer un potentiel v , de nombre caractéristique m , dérivant d'une simple couche portée par la surface (S) , tel que l'on ait

$$\left(\frac{dv}{dN}\right)_i = \frac{d\Phi}{dN}$$

On aura alors, dans tout le domaine (D) ,

$$v = \Phi.$$

La chose résulte d'un théorème connu et peut d'ailleurs être vérifiée aisément en appliquant une des formes du théorème de Green successivement à la partie réelle et à la partie imaginaire de la différence $v - \Phi$. On voit que l'on aura:

$$w = \Phi - v \tag{12}$$

Posons

$$\psi = u - w.$$

La fonction ψ jouira des propriétés suivantes: elle s'annulera sur (S) et à l'infini et elle satisfera dans tout le domaine (D') à l'équation

$$\Delta \psi - a \psi = 0.$$

Donc la fonction ψ sera nulle identiquement. Par conséquent:

$$u = w.$$

Or il résulte de l'équation (12) que la quantité $\left(\frac{dw}{dN}\right)_e$ existe et est une fonction continue. Il en sera donc de même de la quantité $\left(\frac{du}{dN}\right)_e$. Sachant cela il suffira de mettre en évidence les parties réelles et imaginaires de la fonction u et du paramètre ξ pour s'assurer, au moyen du théorème de Green, en s'appuyant sur le lemme démontré précédemment, que la fonction u est nulle identiquement. Dès lors les deux théorèmes énoncés au début de ce § doivent être regardés comme étendus au cas où le paramètre ξ ne satisfait qu'à la seule condition de ne pas se réduire à un nombre réel et positif.

§ 10. Considérons une fonction u vérifiant l'équation (1) à l'intérieur du domaine (D) et la condition

$$(13) \quad \left(\frac{du}{dN}\right)_i = hu$$

sur la surface (S), la lettre h désignant une fonction réelle et continue, mais d'ailleurs quelconque, définie sur cette surface.

Désignons par H le maximum de la valeur absolue de la fonction h et par a_0 la valeur de la plus grande des deux expressions:

$$(14) \quad 16 c^2 H^2 \quad \text{et} \quad \frac{4 c^2}{L^2}$$

où les lettres c et L représentent les mêmes nombres que dans le chapitre précédent. Je dis que la fonction u sera nulle identiquement à moins que le paramètre ξ ne se réduise à un nombre réel vérifiant l'inégalité suivante:

$$(15) \quad \xi > -a_0$$

Supposons d'abord que le nombre ξ soit un nombre complexe de la forme

$$\xi = \alpha + i\beta,$$

α et β étant deux nombres réels, le nombre β étant différent de zéro et posons

$$u = P + iQ$$

pour mettre en évidence les parties réelle et imaginaire de la fonction u . Nous aurons:

$$\begin{aligned} \triangle P + \alpha P - \beta Q &= 0 \\ \triangle Q + \alpha Q + \beta P &= 0 \end{aligned}$$

et une application facile du théorème de Green nous donnera:

$$\beta \int_{(D)} (P^2 + Q^2) d\tilde{\tau} = 0$$

en désignant par $d\tilde{\tau}$ un élément de volume. Le nombre β n'étant pas nul, l'équation précédente prouve que la fonction u sera nulle identiquement dans tout le domaine (D) .

Reste à examiner le cas où le paramètre ξ a une valeur réelle et négative $-\varrho$ telle que l'on ait:

$$\varrho \geq a_0. \quad (16)$$

Bien que le paramètre ξ ait maintenant une valeur réelle $-\varrho$, la fonction u peut être complexe. Il est aisé de voir cependant qu'il suffit d'examiner le cas où la fonction u est réelle aussi. On trouve d'ailleurs:

$$\int_{(D)} \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 + \varrho u^2 \right\} d\tilde{\tau} + \int_{(S)} h u^2 ds = 0. \quad (17)$$

On concluerait immédiatement de cette équation que la fonction u est nulle identiquement si la fonction h ne pouvait pas devenir négative, mais cette condition peut n'être pas vérifiée et cela nous oblige à recourir à un théorème que j'ai démontré dans un autre travail¹⁾ et que, avec les notations adoptées dans ce mémoire, on peut énoncer de la façon suivante: lorsqu'une fonction réelle $F(x, y, z)$, non identiquement nulle, est telle que l'intégrale

$$\int_{(D)} \left\{ \left(\frac{\partial F}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z} \right)^2 + \varrho F^2 \right\} d\tilde{\tau}$$

ait un sens, l'inégalité (16) entraîne l'inégalité suivante:

$$\int_{(D)} \left\{ \left(\frac{\partial F}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z} \right)^2 + \varrho F^2 \right\} d\tilde{\tau} > \frac{\sqrt{\varrho}}{2c} \int_{(S)} F^2 ds. \quad (18)$$

En appliquant ce théorème à la fonction u et en remarquant que l'équation (17) donne:

¹⁾ Zaremba. Sur les fonctions dites fondamentales dans la théorie des équations de la Physique. (Bulletin de l'Académie de Cracovie, Février 1901).

$$\int_{(D)} \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 + \rho u^2 \right\} d\tau \leq H \int u^2 ds,$$

on prouvera immédiatement que la fonction u est nulle identiquement lorsque le paramètre ξ a une valeur réelle $-\rho$ telle que l'inégalité (16) soit vérifiée. Le théorème énoncé au début de ce § est donc complètement démontré.

Il serait aisé d'étendre le théorème précédent au cas où l'équation (13) serait remplacée par l'équation

$$\left(\frac{du}{dN} \right)_e = hu$$

la fonction $u(x, y, z)$ tendant uniformément vers zéro lorsque le point (x, y, z) s'éloigne indéfiniment, mais nous n'insisterons pas sur ce point parce que, au point de vue des applications qui vont suivre, il suffira de savoir que, lorsque la fonction $u(x, y, z)$ vérifie l'équation (1) dans le domaine extérieur (D') , lorsqu'elle tend uniformément vers zéro quand le point (x, y, z) s'éloigne indéfiniment et lorsqu'enfin elle vérifie la condition

$$\left(\frac{du}{dN} \right)_e = 0,$$

elle est identiquement nulle, à moins que le paramètre ξ n'ait une valeur réelle et non négative, théorème dont la démonstration est immédiate.

§ 11. Considérons dans l'espace un domaine quelconque (Ω) et désignons par A_1, A_2, \dots, A_n , n points situés à l'intérieur de ce domaine. Supposons qu'une fonction u soit continue en chaque point situé à l'intérieur du domaine (Ω) et qu'elle vérifie l'équation (1) en chaque point situé à l'intérieur du domaine (Ω) sauf peut-être en A_1, A_2, \dots, A_n . Je dis que la fonction u vérifiera l'équation (1) même en chacun des points A_1, A_2, \dots, A_n .

Il est évident que, sans nuire à la généralité, on peut supposer que le système de points A_1, A_2, \dots, A_n se réduit à un seul point A , que le domaine (Ω) a pour limite une sphère (Σ) de centre A et que les valeurs périphériques de la fonction u relatives à la sphère (Σ) , constituent une fonction continue définie sur cette sphère. Adop-tons ces hypothèses simplificatrices et supposons d'abord que le paramètre ξ ait une valeur réelle et négative vérifiant l'inégalité (22)

du chapitre précédent. Représentons cette valeur de ξ par l'expression $-m^2$ en désignant par m un nombre positif. Nous saurons alors déterminer une fonction v admettant sur la sphère (Σ), les mêmes valeurs périphériques que la fonction u et vérifiant dans tout le domaine (Ω), sans que le point A fasse exception, l'équation suivante:

$$\Delta v - m^2 v = 0.$$

Posons

$$w = u - v.$$

La fonction w sera continue dans tout le domaine (Ω) et elle satisfera à l'équation

$$\Delta w - m^2 w = 0$$

en chaque point de ce domaine, sauf peut-être au point A . En outre les valeurs périphériques de la fonction w seront évidemment toutes égales à zéro. Il résulte de là que le module de la fonction w atteindra sa limite supérieure M au point A .

Pour mettre en évidence les parties réelle et imaginaire de la fonction w , posons:

$$w = w_1 + i w_2$$

en désignant par w_1 et w_2 deux fonctions réelles.

Désignons par P un point distinct du centre A de la sphère (Σ) mais pouvant avoir d'ailleurs une position quelconque à l'intérieur de cette sphère et soit $(w_1)_P$ et $(w_2)_P$ les valeurs des fonctions w_1 et w_2 au point P . Décrivons du point A comme centre, une sphère (Σ') de rayon δ inférieur à la distance r du point P au point A . Il est aisé de voir (§ 8) que l'on aura:

$$\begin{aligned} -\frac{\delta}{e^{-m\delta}} \cdot \frac{e^{-mr}}{r} M &\leq (w_1)_P \leq \frac{\delta}{e^{-m\delta}} \cdot \frac{e^{-mr}}{r} M \\ -\frac{\delta}{e^{-m\delta}} \cdot \frac{e^{-mr}}{r} M &\leq (w_2)_P \leq \frac{\delta}{e^{-m\delta}} \cdot \frac{e^{-mr}}{r} M \end{aligned}$$

et cela, si petit que soit δ . On aura donc:

$$(w_1)_P = (w_2)_P = 0$$

Cela prouve que la fonction w est nulle identiquement. On a donc:

$$u = v$$

et par conséquent, comme nous voulions l'établir, la fonction u satisfait à l'équation (1) même en A .

Nous avons supposé que le paramètre ξ a la valeur particulière $-m^2$. Passons maintenant au cas général. Continuons à désigner par m le même nombre positif que tout à l'heure et posons:

$$(19) \quad \Phi(x, y, z) = \frac{m^2 + \xi}{4\pi} \int_{(\Omega)} u(x', y', z') \frac{e^{-mr}}{r} d\tilde{v}'$$

en désignant par $d\tilde{v}'$ l'élément de volume relatif au point (x', y', z') et par r la distance du point (x', y', z') au point courant (x, y, z) . A cause du choix du nombre m , nous saurons déterminer une fonction v vérifiant à l'intérieur de la sphère (Σ) , l'équation:

$$\Delta v - m^2 v = 0$$

et ayant, sur cette sphère, les mêmes valeurs périphériques que la fonction Φ . Posons:

$$(20) \quad w = \Phi - v.$$

Nous aurons:

$$(21) \quad \Delta w - m^2 w + (m^2 + \xi) u = 0$$

dans tout le domaine (D) sauf peut-être en A . Considérons maintenant la fonction

$$(22) \quad \psi = u - w.$$

Il résulte des équations (1) et (21) que l'on aura:

$$(23) \quad \Delta \psi - m^2 \psi = 0.$$

dans tout le domaine (Ω) sauf peut-être en A . Mais, eu égard à ce qui a été établi plus haut, dans le cas où l'on a $\xi = -m^2$, nous pouvons affirmer que la fonction ψ vérifiera l'équation (23), même au point A . Donc les dérivées de la fonction ψ seront continues même au point A lui-même. D'autre part, il résulte des équations (19) et (20) que les dérivées premières de la fonction w ne cesseront pas d'être continues au point A . Donc, à cause de la relation (22), il en sera de même de la fonction u . Les dérivées premières de la fonction u ne cessant pas d'être continues au point A , la fonction w ne cessera pas en A de vérifier l'équation (21). En définitive les fonctions w et ψ vérifient les équations (21) et (23) dans tout le domaine (Ω) , sans que le point A fasse exception. Cela prouve, eu égard à l'équation (22), que la fonction u satisfera à l'équation (1) même au point A . C'est précisément ce que nous voulions établir.

IV. Etude de la fonction w .

§ 12. Désignons par $f(x, y, z)$ une fonction définie à l'intérieur du domaine (D) , pouvant être une fonction complexe de la forme $f_1(x, y, z) + i f_2(x, y, z)$, mais vérifiant les deux hypothèses suivantes:

1° L'intégrale

$$\bar{\omega} = \int_{(D)} |f(x, y, z)|^2 d\bar{i} \quad (1)$$

où $d\bar{i}$ représente l'élément de volume relatif au point (x, y, z) a un sens.

2° Lorsque la distance du point (x, y, z) à la frontière (S) du domaine (D) ne dépasse pas une certaine limite fixe, le module de la fonction $f(x, y, z)$ a une limite supérieure finie.

Envisageons le nombre μ défini par l'équation (3) du chapitre II, désignons par $d\bar{i}$ l'élément de volume relatif au point (x', y', z') , par r la distance du point (x', y', z') au point courant (x, y, z) et considérons la fonction $\Phi(x, y, z)$ définie par l'équation suivante:

$$\Phi(x, y, z) = \frac{1}{4\pi} \int_{(D)} f(x', y', z') \frac{e^{-\mu r}}{r} d\bar{i}'. \quad (2)$$

La fonction Φ sera évidemment continue dans tout l'espace, elle vérifiera l'équation

$$\Delta \Phi + \xi \Phi = 0$$

dans tout le domaine extérieur (D') et les dérivées $\frac{\partial \Phi}{\partial x'}$, $\frac{\partial \Phi}{\partial y}$ et $\frac{\partial \Phi}{\partial z}$ seront continues non seulement dans le domaine (D') et sur la surface (S) mais aussi, à une distance assez petite de cette surface, à l'intérieur du domaine (D) .

Désignons par h' une constante réelle et positive et par h une fonction réelle et continue définie sur la surface (S) , mais d'ailleurs quelconque.

Il résulte de la théorie développée au chapitre II qu'il suffit d'assujettir les valeurs du paramètre $\xi = -\mu^2$ à certaines conditions restrictives, pour qu'il soit possible de déterminer une fonction u vérifiant l'équation

$$\Delta u + \xi u = 0$$

dans tout le domaine (D) et telle que la fonction w définie par l'équation

$$(3) \quad w = \Phi - u$$

vérifie, à la surface (S) la condition suivante:

$$h' \left(\frac{dw}{dN} \right)_i = h(w)_i$$

condition que, sans redouter un malentendu, nous pourrions écrire plus simplement ainsi:

$$(4) \quad h' \frac{dw}{dN} = h w.$$

La fonction w que nous venons de définir, est précisément celle que nous nous proposons d'étudier dans ce chapitre. Il est évident que, sans nuire à la généralité, nous pouvons supposer que la constante h' ne peut avoir que l'une des deux valeurs $h' = 0$ ou $h' = 1$. Cette hypothèse étant adoptée, nous aurons deux cas à distinguer dans l'étude de la fonction w : celui où la condition (4) équivaut à la condition

$$(5) \quad w = 0$$

sur la surface (S) et celui où elle prend la forme:

$$(6) \quad \frac{dw}{dN} = h w.$$

L'existence de la fonction w est certaine dès maintenant dans les conditions suivantes:

1° Le paramètre ξ satisfait à l'inégalité (22) du chapitre II, c'est-à-dire à l'inégalité

$$(7) \quad \frac{c}{L \sqrt{\varrho} \sin^2 \frac{\theta}{2}} \leq \frac{1}{2},$$

lorsque l'équation (4) équivaut à l'équation (5).

2° Le paramètre ξ satisfait à la fois à l'inégalité précédente et à l'inégalité (32) du chapitre II, à savoir

$$(8) \quad \frac{2 c H}{\sqrt{\varrho} \sin \frac{\theta}{2}} \leq \frac{1}{2}$$

où H représente une limite supérieure de la valeur absolue de la fonction h , lorsque l'équation (4) équivaut à l'équation (6).

Dans ce chapitre, nous nous bornerons au cas où les conditions précédentes sont vérifiées. La fonction w sera alors, cela résulte de la théorie développée au chapitre précédent, parfaitement déterminée.

Il importe de faire remarquer que, si l'on se borne à considérer la quantité $D_{ni}(w)$ (voir le § 3 pour la définition du symbole opératoire D_{ni}) pour les points de la surface (S) dont la distance l à la surface (S) est assez petite, cette quantité sera une fonction continue qui tendra uniformément quand l tendra vers zéro vers la quantité $\frac{dw}{dN}$ laquelle sera une fonction continue définie sur la surface (S). Cela résulte immédiatement des faits déjà établis lorsque l'équation (4) équivaut à l'équation (6). Assurons-nous qu'il en est de même lorsque la fonction w vérifie sur (S) l'équation (5). A cet effet, observons que, dans le cas actuel, la fonction u entrant dans l'expression (3) peut être regardée comme un potentiel dérivant d'une simple couche portée par la surface (S), potentiel déterminé par l'équation suivante:

$$\left(\frac{du}{dN}\right)_e = \frac{d\Phi}{dN} \quad (9)$$

En effet, il résulte de l'un des théorèmes du chapitre précédent que la différence $u - \Phi$ sera nulle identiquement dans le domaine (D') et dès lors, puisque la fonction u , définie par l'équation (9), est continue même à la traversée de la surface (S), la valeur (3) de la fonction w s'annulera sur la surface (S).

Cela étant, il suffit de se reporter au chapitre II (§ 6) pour s'assurer de l'existence et de la continuité de la quantité $D_{ni}(u)$ ainsi que de sa limite $\left(\frac{du}{dN}\right)_i$ et pour conclure de là à l'exactitude de la proposition qui nous occupe.

Nous allons poursuivre l'étude de la fonction w en supposant que la fonction $f(x, y, z)$, sans cesser de satisfaire aux hypothèses énoncées au début, est limitée.

Soit F une limite supérieure du module de la fonction $f(x, y, z)$. On s'assurera aisément que l'on a:

$$(10) \quad |\Phi| < \frac{F}{\varrho \sin^2 \frac{\theta}{2}},$$

$$(11) \quad \left| \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right|, \left| \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right|, \left| \frac{d\Phi}{dz} \right| < \frac{2F}{\sqrt{\varrho} \sin^2 \frac{\theta}{2}},$$

$$(12) \quad \left| \frac{d\Phi}{dN} \right| < \frac{2F}{\sqrt{\varrho} \sin^2 \frac{\theta}{2}}.$$

§ 13. Soit d'abord:

$$\frac{h'}{h} = 0.$$

En d'autres termes, supposons que la fonction w s'annule sur la surface (S).

En s'appuyant sur l'inégalité (27) du chapitre II, on déduira de l'inégalité (10) du § précédent l'inégalité suivante:

$$|u| < \frac{3F}{\varrho \sin^2 \frac{\theta}{2}},$$

on aura donc:

$$(13) \quad |w| < \frac{4F}{\varrho \sin^2 \frac{\theta}{2}}.$$

D'autre part, puisque la fonction u peut être regardée comme le potentiel de simple couche défini par l'équation (9) du § précédent, l'une des inégalités (25) du chapitre II et l'inégalité (12) du § précédent donneront:

$$|D_{ni}(u)| < \frac{6F}{\sqrt{\varrho} \sin^2 \frac{\theta}{2}}$$

d'où l'on concluera

$$(14) \quad |D_{ni}(w)| < \frac{8F}{\sqrt{\varrho} \sin^2 \frac{\theta}{2}}$$

ce qui donne

$$(15) \quad \left| \frac{dw}{dN} \right| < \frac{8F}{\sqrt{\varrho} \sin^2 \frac{\theta}{2}}$$

Regardons la fonction u comme le potentiel de simple couche défini par l'équation (9) et posons:

$$u = u_0 + v$$

en désignant par u_0 le potentiel de simple couche défini par l'équation suivante:

$$\left(\frac{du_0}{dN}\right)_e - \left(\frac{du_0}{dN}\right)_i = 2 \frac{d\Phi}{dN} \quad (16)$$

Nous aurons

$$w = \Phi - u_0 - v \quad (17)$$

et la fonction v sera le potentiel de simple couche que définit l'équation suivante:

$$\left(\frac{dv}{dN}\right)_e = \frac{d\Phi}{dN} - \left(\frac{du_0}{dN}\right)_e \quad (18)$$

Les relations (12), (16) et le théorème exprimé par la première des inégalités (12) du chapitre II donneront:

$$\left| \frac{d\Phi}{dN} - \left(\frac{du_0}{dN}\right)_e \right| < \frac{2 c F}{L \varrho \sin^4 \frac{\theta}{2}}$$

et l'on conclura de cette inégalité et de l'équation (18), en s'appuyant sur l'inégalité (24) du chapitre II, l'inégalité suivante:

$$|v| < \frac{4 c^2 F}{L \varrho^{\frac{3}{2}} \sin^5 \frac{\theta}{2}} \quad (19)$$

§ 14. Passons au cas où l'on a $h' = 1$. En d'autres termes, supposons que la fonction w satisfasse à l'équation (6). La fonction u satisfera alors à l'équation suivante:

$$\left(\frac{du}{dN}\right)_i = h u + \frac{d\Phi}{dN} - h \Phi \quad (20)$$

Les inégalités (10) et (12) donnent:

$$\left| \frac{d\Phi}{dN} - h \Phi \right| < \frac{F}{\sqrt{\varrho} \sin^2 \frac{\theta}{2}} \left(2 + \frac{H}{\sqrt{\varrho}} \right)$$

d'où a fortiori

$$\left| \frac{d\Phi}{dN} - h \Phi \right| < \frac{F}{\sqrt{\varrho} \sin^2 \frac{\theta}{2}} \left(2 + \frac{1}{4c} \right)$$

à cause de l'inégalité (8). Rien n'empêche d'admettre, pour simplifier, que

$$4c \geq 1.$$

Il viendra alors:

$$(21) \quad \left| \frac{d\Phi}{dN} - h \Phi \right| < \frac{3F}{\sqrt{\varrho} \sin^2 \frac{\theta}{2}}$$

En s'appuyant sur cette inégalité, on déduira de l'équation (20), au moyen de l'inégalité (36) du chapitre II, l'inégalité suivante:

$$|D_{ni}(u)| < \frac{18F}{\sqrt{\varrho} \sin^2 \frac{\theta}{2}}$$

qui, en vertu des inégalités (11), entraîne l'inégalité suivante:

$$(22) \quad |D_{ni}w| < \frac{20F}{\sqrt{\varrho} \sin^2 \frac{\theta}{2}}$$

Il résulte de cette inégalité, notons-le immédiatement, que

$$(23) \quad \left| \frac{dw}{dN} \right| < \frac{20F}{\sqrt{\varrho} \sin^2 \frac{\theta}{2}}$$

Il est évident que l'inégalité (21) pourrait servir à déterminer une limite supérieure du module de la fonction u , mais on peut arriver à un résultat plus parfait en procédant de la façon suivante. Considérons le potentiel de double couche φ défini au moyen de l'équation:

$$(24) \quad (\varphi)_e = \Phi.$$

Dans le domaine extérieur (D') on aura évidemment $\varphi = \Phi$. On aura donc:

$$\left(\frac{d\varphi}{dN} \right)_i = \left(\frac{d\varphi}{dN} \right)_e = \frac{d\Phi}{dN}.$$

Cette remarque faite, posons:

$$(25) \quad u = \varphi + u'$$

l'équation (20) donnera:

$$\left(\frac{du'}{dN}\right)_i = h u' + h \{(\varphi)_i - \Phi\}. \quad (26)$$

Les relations (24) et (10) et l'inégalité (27) du chapitre II donneront:

$$|\varphi| < \frac{3F}{\rho \sin^2 \frac{\theta}{2}} \quad (27)$$

dans tout l'espace. A cause de cela on aura:

$$|(\varphi)_i - \Phi| < \frac{4F}{\rho \sin^2 \frac{\theta}{2}}$$

et l'on en conclura, en s'appuyant d'une part sur l'équation (26) et d'autre part, sur l'inégalité (34) du chapitre II, que

$$|u'| < \frac{16cHF}{\rho^{\frac{3}{2}} \sin^3 \frac{\theta}{2}}.$$

Cette inégalité et les relations (25) et (27) donnent:

$$|u| < \frac{F}{\rho \sin^2 \frac{\theta}{2}} \left(3 + \frac{16cH}{\sqrt{\rho} \sin \frac{\theta}{2}} \right)$$

d'où a fortiori

$$|u| < \frac{7F}{\rho \sin^2 \frac{\theta}{2}}$$

en vertu de l'inégalité (8). L'inégalité que nous venons d'établir et l'inégalité (10) donnent

$$|w| < \frac{8F}{\rho \sin^2 \frac{\theta}{2}}. \quad (28)$$

Il nous sera très utile plus tard de connaître une nouvelle expression de la fonction w . Pour l'obtenir, prolongeons la fonction $f(x, y, z)$ au-delà du domaine (D) dans tout le domaine (D') en nous astreignant seulement aux conditions suivantes:

1° A l'intérieur du domaine (D') la fonction $f(x, y, z)$ devra être continue et son module ne devra, en aucun point du domaine (D'), être supérieure à la limite supérieure exacte des modules des valeurs que prend cette fonction à l'intérieur du domaine (D); on aura donc

$$(29) \quad |f(x, y, z)| \leq F$$

dans tout l'espace.

2° Si en un point P de la surface (S), la quantité $(f)_i$ a une valeur déterminée, on devra avoir, au point P , après avoir effectué le prolongement de la fonction, $(f)_e = (f)_i$. Donc, lorsque la fonction $f(x, y, z)$ est continue dans (D) et sur (S) elle sera, après avoir été prolongée, continue dans tout l'espace.

Désignons, comme plus haut, par $d\tilde{v}$ l'élément de volume relatif au point (x, y, z) , par r la distance du point courant (x, y, z) au point (x', y', z') et posons:

$$(30) \quad \psi(x, y, z) = \frac{1}{4\pi} \int_{(E)} f(x', y', z') \frac{e^{-\mu r}}{r} d\tilde{v}$$

en convenant d'indiquer au moyen de l'indice (E) que l'intégration doit être étendue à tout l'espace.

Il est évident que l'on peut poser

$$(31) \quad v = \psi - u$$

en désignant maintenant par u le potentiel de simple couche défini au moyen de l'équation suivante:

$$(32) \quad \left(\frac{du}{dN}\right)_i = hu + \frac{d\psi}{dN} - h\psi.$$

Désignons par v_0 le potentiel de simple couche défini au moyen de l'équation suivante:

$$(33) \quad \left(\frac{dv_0}{dN}\right)_e - \left(\frac{dv_0}{dN}\right)_i = 2\frac{d\psi}{dN}$$

et posons:

$$(34) \quad u = -v_0 + v.$$

La fonction v sera évidemment un potentiel de simple couche et l'équation (32) donnera:

$$(35) \quad \left(\frac{dv}{dN}\right)_i = hv - hv_0 + \left(\frac{dv_0}{dN}\right)_i + \frac{d\psi}{dN} - h\psi.$$

Il résulte d'ailleurs des équations (31) et (34) que l'on aura:

$$w = \psi + v_0 - v. \quad (36)$$

C'est l'expression de w que nous avons en vue.

Cherchons une limite supérieure du module de la fonction v .
A cet effet, observons que l'on a:

$$|\psi| < \frac{F}{\varrho \sin^2 \frac{\theta}{2}} \quad (37)$$

et

$$\left| \frac{d\psi}{dN} \right| < \frac{2F}{\sqrt{\varrho} \sin^2 \frac{\theta}{2}} \quad (38)$$

En se reportant aux inégalités (10) et (12) du chapitre II, on déduira des relations (33) et (38) les inégalités suivantes:

$$|v_0| < \frac{2cF}{\varrho \sin^3 \frac{\theta}{2}},$$

$$\left| \left(\frac{dv_0}{dN} \right)_i + \frac{d\psi}{dN} \right| < \frac{2cF}{L \varrho \sin^4 \frac{\theta}{2}}.$$

Ces inégalités et l'inégalité (37) donnent:

$$\left| -h v_0 + \left(\frac{dv_0}{dN} \right)_i + \frac{d\psi}{dN} - h\psi \right| < \frac{F}{\varrho \sin^4 \frac{\theta}{2}} \left((2c+1)H + \frac{2c}{L} \right).$$

En s'appuyant sur cette inégalité, on déduira de l'équation (35), au moyen de l'inégalité (34) du chapitre II, l'inégalité suivante:

$$|v| < \frac{4cF}{\varrho^{\frac{3}{2}} \sin^5 \frac{\theta}{2}} \left\{ (2c+1)H + \frac{2c}{L} \right\} \quad (39)$$

En terminant ce chapitre, faisons une remarque, facile à justifier, qui s'applique tant au cas $h' = 1$, étudié dans ce paragraphe, qu'au cas $h' = 0$ examiné au § précédent: lorsque le module de la fonction $f(x, y, z)$ a une limite supérieure finie F , les dérivées

$$\frac{\partial w}{\partial x}, \quad \frac{\partial w}{\partial y} \quad \text{et} \quad \frac{\partial w}{\partial z}$$

sont continues en chaque point situé à l'intérieur du domaine (D) et l'on a :

$$(40) \quad \left| \frac{\partial w}{\partial x} \right|, \quad \left| \frac{\partial w}{\partial y} \right|, \quad \left| \frac{\partial w}{\partial z} \right| < K(l) F,$$

en désignant par $K(l)$ un nombre positif qui, lorsque les éléments ξ , h' et h ainsi que la surface (S) sont donnés, ne dépend que de la plus courte distance l du point (x, y, z) à la surface (S) et qui, en outre, a une valeur finie pour toute valeur non nulle de la quantité l , valeur qui pourra être d'autant plus grande que la longueur l sera plus petite. J'ajoute qu'en ce qui concerne les dérivées premières de la fonction w , il n'y aurait pas eu de difficulté à établir des résultats beaucoup plus complets; en particulier, on aurait pu prouver que lorsque la constante h' est nulle ou lorsque la fonction h admet des dérivées premières continues sur la surface (S), les dérivées

$$\frac{\partial w}{\partial x}, \quad \frac{\partial w}{\partial y} \quad \text{et} \quad \frac{\partial w}{\partial z}$$

sont limitées et continues dans tout le domaine (D) pourvu que la fonction $f(x, y, z)$ soit limitée. Nous n'insisterons pas sur ce point parce que la remarque que nous venons de faire nous suffira.

V. La fonction de Green généralisée.

§ 15. Les considérations qui vont être exposées dans ce chapitre ne sont, pour la plupart, que des généralisations plus ou moins immédiates de considérations connues, on reconnaîtra cependant, je l'espère, que je ne leur ai pas donné un trop grand développement. Voici ce que nous allons désigner par le terme de „fonction de Green généralisée“: ce sera une fonction $G(x_0, y_0, z_0, x, y, z, \xi)$ des coordonnées x_0, y_0, z_0 et x, y, z de deux points variables P_0 et P et d'un paramètre ξ , fonction qui, considérée comme fonction des coordonnées du point P , le point P_0 occupant une position fixe à l'intérieur du domaine (D), jouira des propriétés suivantes:

1° Elle satisfera à l'équation

$$\Delta G + \xi G = 0$$

dans tout le domaine (D) sauf au point P_0 .

2° La différence

$$G - \frac{1}{4\pi r}$$

où r représente la distance des points P_0 et P sera une fonction continue dans tout le domaine (D) et par conséquent aussi au point P_0 .

3° Sur la frontière (S) du domaine (D) on aura:

$$h' \frac{dG}{dN} = h G$$

en désignant, comme au chapitre précédent, par h' une constante qui ne pourra avoir que la valeur zéro ou la valeur 1 et par h une fonction réelle et continue, mais d'ailleurs quelconque, définie sur la surface (S).

Les quantités h' et h étant données, si pour une certaine valeur du paramètre ξ , la fonction de Green généralisée existe, elle est parfaitement déterminée.

Dans ce chapitre nous démontrerons cette proposition en supposant que le paramètre ξ ne se réduise pas à un nombre réel vérifiant l'inégalité (15) du chapitre III, mais cette restriction sera levée au chapitre suivant.

Si la proposition que nous venons d'énoncer n'était pas exacte, il existerait une fonction v , non identiquement nulle, continue dans tout le domaine (D) vérifiant l'équation

$$\Delta v + \xi v = 0 \tag{1}$$

dans tout le domaine (D), sauf peut-être en (x_0, y_0, z_0) et satisfaisant sur (S) à la condition:

$$h' \frac{dv}{dN} = h v \tag{2}$$

En réalité (§ 11) la fonction v satisfera à l'équation (1) même au point (x_0, y_0, z_0) . Donc, à cause de l'hypothèse faite au sujet du paramètre ξ , la fonction v ne pourra pas (§ 9 si $h' = 0$ et § 10 si $h' = 1$) ne pas être nulle identiquement. Le théorème est donc établi.

Lorsque le paramètre ξ satisfait aux conditions auxquelles nous l'avons assujéti au chapitre précédent, on peut, dès maintenant, affirmer l'existence de la fonction de Green généralisée. En effet, il suffit de poser

$$(3) \quad G = \frac{e^{-ur}}{4\pi r} - u$$

pour reconnaître, en se reportant au chapitre II, que nous serons à même de calculer la fonction u .

Je dis que les quantités h' et h étant données, si pour une certaine valeur ξ' du paramètre ξ la fonction de Green existe, la quantité $\frac{dG}{dN}$ existera et représentera une fonction continue sur la surface (S).

Cela résulte immédiatement de la définition même de la fonction de Green généralisée lorsque $h' = 1$.

Assurons-nous qu'il en est de même dans le cas où $h' = 0$. A cet effet supposons d'abord que la valeur ξ' du paramètre ξ satisfasse à l'inégalité (22) du chapitre II. Dans ce cas, la fonction u entrant dans la formule (3) pourra manifestement être regardée comme le potentiel généralisé de simple couche défini au moyen de l'équation

$$\left(\frac{du}{dN}\right)_e = \frac{1}{4\pi} \frac{d}{dN} \frac{e^{-ur}}{r}$$

et l'existence ainsi que la continuité de $\frac{dG}{dN}$ résultent immédiatement de cette remarque dans le cas considéré. Supposons maintenant que la valeur ξ' du paramètre ξ soit quelconque, mais supposons qu'une autre valeur ξ'' du même paramètre satisfasse à l'inégalité (22) du chapitre II. Désignons par $\psi(x_0, y_0, z_0, x, y, z)$ la fonction en laquelle se transforme, pour $\xi = \xi''$, la fonction w considérée au § 12 (chapitre précédent) en substituant la fonction $G(x_0, y_0, z_0, x', y', z', \xi')$ à la fonction $f(x', y', z')$ et en posant $h' = 0$. La fonction ψ , considérée comme fonction des variables x, y, z s'annulera sur (S), sera continue dans tout le domaine (D) et satisfera à l'équation

$$\Delta\psi + \xi''\psi + G(x_0, y_0, z_0, x, y, z, \xi') = 0$$

dans tout le domaine (D) sauf en (x_0, y_0, z_0) . On aura donc:

$$\begin{aligned} G(x_0, y_0, z_0, x, y, z, \xi'') &= \\ &= G(x_0, y_0, z_0, x, y, z, \xi') + (\xi'' - \xi') \cdot \psi(x_0, y_0, z_0, x, y, z). \end{aligned}$$

Or, d'après ce que l'on vient de voir, l'existence et la continuité de la quantité $\frac{dG(x_0, y_0, z_0, x, y, z, \xi'')}{dN}$ sont assurées, d'ailleurs (§ 12)

il en est de même de la quantité $\frac{d\psi}{dN}$. Donc il en est encore de même de l'expression $\frac{dG(x_0, y_0, z_0, x, y, z, \xi')}{dN}$. C'est ce que nous voulions établir.

Faisons encore observer, en terminant ce §, qu'un raisonnement classique dans la théorie de la fonction de Green ordinaire permet d'établir aisément que la fonction de Green généralisée est symétrique par rapport aux deux systèmes de variables (x, y, z) et (x_0, y_0, z_0) .

§ 16. Plaçons-nous dans le cas où le paramètre ξ satisfait aux restrictions qui lui ont été imposées au chapitre précédent et proposons-nous de déterminer une limite supérieure de l'intégrale

$$I(x_0, y_0, z_0, \xi) = \int_{(D)} |G(x_0, y_0, z_0, x, y, z, \xi)|^2 d\tilde{i}. \quad (4)$$

Je vais appliquer la méthode dont je me suis servi, dans des conditions moins générales, dans mon mémoire „Sur l'équation aux dérivées partielles $\Delta u + \xi u + f = 0$ et sur les fonctions harmoniques“ (Annales de l'Ecole normale supérieure, 1899).

Posons

$$\begin{aligned} \xi &= \alpha + i\beta \\ G &= G_1 + iG_2 \end{aligned}$$

afin de mettre en évidence les parties réelles et imaginaires des quantités ξ et G . Nous aurons:

$$\begin{aligned} \Delta G_1 + \alpha G_1 - \beta G_2 &= 0 \\ \Delta G_2 + \alpha G_2 + \beta G_1 &= 0. \end{aligned}$$

Dans tout le domaine (D) sauf au pôle de la fonction G .

La seconde de ces équations peut s'écrire de la façon suivante:

$$\Delta G_2 + \xi G_2 + \beta(G_1 - iG_2) = 0.$$

Posons:

$$G_2 = \beta\varphi,$$

il viendra:

$$\Delta\varphi + \xi\varphi + (G_1 - iG_2) = 0.$$

J'observe maintenant que la fonction G_2 est continue même au pôle x_0, y_0, z_0 de la fonction G et que ses dérivées premières restent limitées dans le voisinage de ce point. Il est évident qu'il en sera

de même de la fonction φ . Ces remarques faites, le théorème de Green permettra d'établir chacune des deux expressions suivantes de la fonction φ :

$$(5) \quad \varphi(x, y, z) = \int_{(D)} \left\{ G_1(x_0, y_0, z_0, x', y', z', \xi) - \right. \\ \left. - i G_2(x_0, y_0, z_0, x', y', z', \xi) \right\} G(x, y, z, x', y', z', \xi) d\tilde{v}'$$

et

$$(6) \quad \varphi(x, y, z) = \int_{(S)} \varphi \frac{d}{dN} \frac{e^{-\mu r}}{r} ds - \\ - \frac{1}{4\pi} \int_{(S)} \frac{d\varphi}{dN} \frac{e^{-\mu r}}{r} ds + \frac{1}{4\pi} \int_{(D)} (G_1 - i G_2) \frac{e^{-\mu r'}}{r'} d\tilde{v}'$$

en désignant par r et r' les distances du point x, y, z à l'élément ds de la surface (S) et à l'élément de volume $d\tilde{v}'$.

On aperçoit immédiatement en comparant les formules (4) et (5) que l'on a:

$$(7) \quad I(x_0, y_0, z_0, \xi) = \varphi(x_0, y_0, z_0).$$

Considérons d'abord le cas où l'on a $h' = 0$. On aura:

$$(\varphi)_i = 0.$$

Par conséquent, la première intégrale du second membre de l'équation (6) disparaîtra et si l'on pose pour un moment

$$(8) \quad \left\{ \begin{array}{l} u = \frac{1}{4\pi} \int_{(S)} \frac{d\varphi}{dN} \frac{e^{-\mu r}}{r} ds, \\ \Phi = \frac{1}{4\pi} \int_{(D)} (G_1 - i G_2) \frac{e^{-\mu r'}}{r'} d\tilde{v}' \end{array} \right.$$

les fonctions u et Φ prendront sur (S) les mêmes valeurs. Or une application facile de l'inégalité de M. Schwarz donne:

$$(9) \quad |\Phi| < \sqrt{\frac{1}{8\pi} I(x_0, y_0, z_0, \xi) \frac{1}{\sqrt{\rho} \sin \frac{\theta}{2}}}$$

en se rappelant les notations définies au § 3. Donc le second membre de l'inégalité (9) sera une limite supérieure des valeurs péri-

phériques du module de la fonction u , fonction qui satisfait à l'équation

$$\Delta u + \xi u = 0$$

dans le domaine (D) .

Par conséquent, l'inégalité (27) du chapitre II donnera:

$$|u| < 3 \sqrt{\frac{1}{8\pi} I(x_0, y_0, z_0, \xi) \frac{1}{\sqrt{\varrho} \sin \frac{\theta}{2}}} \quad (10)$$

dans tout le domaine (D) . Cela posé, les relations (6), (7), (8), (9) et (10) donneront:

$$I(x_0, y_0, z_0, \xi) < 4 \sqrt{\frac{1}{8\pi} I(x_0, y_0, z_0, \xi) \frac{1}{\sqrt{\varrho} \sin \frac{\theta}{2}}},$$

en se rappelant que la première intégrale du second membre de (6) est ici nulle identiquement. Il vient donc

$$I(x_0, y_0, z_0, \xi) < \frac{2}{\pi \sqrt{\varrho} \sin \frac{\theta}{2}} \quad (11)$$

quelle que soit la position du point (x_0, y_0, z_0) dans le domaine (D) .

Envisageons maintenant le cas où $h' = 1$. Nous aurons:

$$\frac{d\varphi}{dN} = h\varphi$$

et la formule (6) prendra la forme suivante:

$$\begin{aligned} \varphi(x, y, z) = & \frac{1}{4\pi} \int_{(S)} \varphi \frac{d}{dN} \frac{e^{-\mu r}}{r} ds - \frac{1}{4\pi} \int_{(S)} h\varphi \frac{e^{-\mu r}}{r} ds + \\ & + \frac{1}{4\pi} \int_{(D)} (G_1 - i G_2) \frac{e^{-\mu r'}}{r'} d\tilde{i}. \end{aligned} \quad (12)$$

Désignons par $P(x_1, y_1, z_1)$ le point de la surface (S) où le module des valeurs périphériques de la fonction φ atteint son maximum M . En faisant tendre le point (x, y, z) vers le point P , nous déduirons de l'équation précédente la relation suivante:

$$\frac{1}{2} \varphi(x_1, y_1, z_1) = \frac{-1}{4\pi} \int_{(S)} \varphi \frac{d e^{-\mu r}}{dr r} \cos \gamma ds - \frac{1}{4\pi} \int_{(S)} h \varphi \frac{e^{-\mu r}}{r} ds + \\ + \frac{1}{4\pi} \int_{(D)} (G_1 - i G_2) \frac{e^{-\mu r'}}{r'} d\Omega'$$

en désignant par γ l'angle formé par la normale intérieure à (S) en un point de ds avec le rayon r considéré comme dirigé vers le point x_1, y_1, z_1 .

En s'appuyant sur les inégalités (10) et (15) du chapitre II et en remarquant que l'on a

$$\left| \frac{M}{\varphi(x_1, y_1, z_1)} \right| = 1,$$

on trouvera aisément:

$$(13) \quad \varphi(x_1, y_1, z_1) \left\{ \frac{1}{2} + \frac{\eta c}{2L \sin^2 \frac{\theta}{2} \sqrt{\varrho}} + \frac{\eta' H c}{2 \sin \frac{\theta}{2} \sqrt{\varrho}} \right\} = \Phi$$

où l'on a désigné par η et η' des facteurs de module inférieur à l'unité, par H une limite supérieure de la quantité $|h|$ et par Φ la fonction définie par la seconde des formules (8). Il résulte des inégalités (22) et (32) du chapitre II, inégalités satisfaites par hypothèse, que l'on aura:

$$\left| \frac{1}{2} + \frac{\eta c}{2L \sin^2 \frac{\theta}{2} \sqrt{\varrho}} + \frac{\eta' H c}{2 \sin \frac{\theta}{2} \sqrt{\varrho}} \right| > \frac{1}{8}.$$

En s'appuyant sur cette inégalité ainsi que sur l'inégalité (9) et en se rappelant que $M = |\varphi(x_1, y_1, z_1)|$, on déduira de (13) l'inégalité suivante:

$$(14) \quad M < 8 \sqrt{\frac{1}{8\pi} I(x_0, y_0, z_0, \xi) \frac{1}{\sqrt{\varrho} \sin \frac{\theta}{2}}}.$$

En s'appuyant sur les inégalités (14) et (10) du chapitre II et sur les relations (14), (9) et (7) de ce chapitre, on déduira de l'équation (12) l'inégalité suivante:

$$I(x_0, y_0, z_0, \xi) < \left\{ 4 \left(1 + \frac{c}{L \sqrt{\varrho} \sin^2 \frac{\theta}{2}} \right) + \right. \\ \left. + 4 \frac{Hc}{\sin \frac{\theta}{2} \sqrt{\varrho}} + 1 \right\} \sqrt{\frac{1}{8\pi} I(x_0, y_0, z_0, \xi) \frac{1}{\sqrt{\varrho} \sin \frac{\theta}{2}}}.$$

En tenant compte des inégalités (22) et (32) du chapitre II, on en conclura aisément:

$$I(x_0, y_0, z_0, \xi) < \frac{8}{\pi \sqrt{\varrho} \sin \frac{\theta}{2}} < \frac{3}{\sqrt{\varrho} \sin \frac{\theta}{2}}. \quad (15)$$

Il résulte des relations (4), (11) et (15) que la solution du problème que nous nous étions proposé, peut être présentée sous la forme du théorème suivant: lorsque le paramètre ξ satisfait à l'inégalité (22) du chapitre II et lorsqu'en outre, dans le cas où $h' = 1$, il vérifie aussi l'inégalité (32) du chapitre II, on a:

$$\int_{(D)} |G(x, y, z, x', y', z', \xi)|^2 d\tau < \frac{3}{\sqrt{\varrho} \sin \frac{\theta}{2}} \quad (16)$$

quelle que soit la position du pôle (x, y, z) de la fonction G dans le domaine (D) .

Voici maintenant une remarque que l'on vérifiera sans peine et qui nous sera utile plus tard. Reportons-nous à l'expression (3) de la fonction de Green et supposons que l'argument θ_1 de ξ satisfasse aux inégalités suivantes:

$$\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{3\pi}{2}. \quad (17)$$

Dans ces conditions, le produit

$$\xi^p u \quad (18)$$

où p représente une constante positive quelconque, tendra uniformément vers zéro lorsque le module de ξ croîtra indéfiniment, pourvu que la plus courte distance du pôle (x_0, y_0, z_0) de la fonction de Green à la surface (S) , dans le cas où ce point varierait en même temps que $|\xi|$ croît indéfiniment, ne devienne pas inférieure à une longueur déterminée différente de zéro que l'on peut d'ailleurs se fixer arbitrairement.

§ 17. Supposons que, pour une valeur quelconque de ξ , la fonction généralisée de Green G , vérifiant sur (S) la condition

$$(19) \quad \frac{dG}{dN} = h G$$

existe et qu'une fonction u vérifiant, pour la valeur considérée de ξ , l'équation

$$\Delta u + \xi u = 0$$

dans le domaine (D) , satisfasse à la condition aux limites:

$$(20) \quad \frac{du}{dN} = h u + \sigma_0$$

où σ_0 représente une fonction continue définie sur la surface (S) . Une application facile du théorème de Green donnera la formule suivante:

$$(21) \quad u = - \int_{(S)} \sigma_0 G ds$$

Si nous avons supposé que la fonction de Green et la fonction u , au lieu de satisfaire aux conditions (19) et (21) vérifient, sur (S) , les équations

$$\begin{aligned} (G)_i &= 0 \\ (u)_i &= v_0, \end{aligned}$$

en désignant par v_0 une fonction continue définie sur la surface (S) , nous serions arrivés au résultat suivant:

$$(22) \quad u = \int_{(S)} v_0 \frac{dG}{dN} ds.$$

Mais, pour que la formule précédente puisse être regardée comme établie en toute rigueur, il faut être assuré de deux choses:

1° Que l'expression

$$u D_{ni}(G)$$

tende, lorsque le point auquel elle se rapporte tend vers un point situé sur la surface (S) , uniformément vers la quantité $v_0 \frac{dG}{dN}$.

2° Que dans les mêmes conditions, le produit

$$(23) \quad G \cdot D_{ni}(u)$$

tende uniformément vers zéro.

En se reportant d'une part au § 15 et d'autre part à l'avis que l'on trouvera à la fin du § 3, on verra que le premier point ne peut donner lieu à aucune difficulté. Le second point ne donnera lieu non plus à aucun doute lorsque le paramètre ξ vérifie les conditions voulues pour que la fonction u puisse être regardée comme dérivant d'une double couche portée par la surface (S); c'est ce qui résulte immédiatement du théorème exprimé par la première des relations (8) du chapitre II; en effet, en vertu de ce théorème, et dans le cas où le paramètre ξ satisfait à la condition qui vient d'être énoncée, l'expression

$$l D_{ni}(u) \quad (24)$$

où l désigne la distance à la surface (S) du point pour lequel on envisage la quantité $D_{ni}(u)$, tendra uniformément vers zéro, ce qui entraîne immédiatement la propriété voulue de l'expression (23). Il est aisé de voir que, quelle que soit la valeur considérée du paramètre ξ , l'expression (24) tendra uniformément vers zéro avec l . On le prouvera sans peine au moyen d'un artifice analogue à celui qui nous a permis de démontrer au § 15 l'existence et la continuité de la quantité $\frac{dG}{dN}$ dans le cas général. Cela posé, la formule (22) doit être regardée comme établie en toute rigueur dans le cas général.

Voici une conséquence importante des formules (21) et (22): Les quantités h' et h étant données, supposons que le paramètre ξ ait une valeur telle que la fonction de Green correspondante existe ainsi que la fonction w étudiée au chapitre précédent. On aura:

$$w = \int_{(D)} f(x', y', z') G(x, y, z, x', y', z', \xi) d\bar{i}'. \quad (25)$$

Pour établir cette formule avec le degré voulu de généralité, j'observe que la fonction u entrant dans la formule (3) du chapitre précédent pourra, suivant la valeur de la constante h' , être représentée au moyen de l'une des formules (21) ou (22) de ce chapitre en posant:

$$\sigma_0 = \frac{d\Phi}{dN} + h\Phi,$$

dans le cas où l'on aurait à se servir de la formule (21); et

$$v_0 = \Phi,$$

dans le cas où l'on devrait avoir recours à la formule (22). Si, après avoir porté, dans l'expression ainsi obtenue de la fonction u , la valeur de Φ fournie par l'équation (2) du chapitre précédent, on effectue un changement convenable d'ordre des intégrations dans l'expression de u à laquelle on sera parvenu, changement d'ordre des intégrations dont la légitimité pourra être aisément établie, on arrivera à un résultat d'où l'on conclura immédiatement la formule (25).

VI. Existence des fonctions harmoniques dans le cas général et applications des théorèmes de M. Stekloff à ces fonctions.

§ 18. Désignons par $f(x, y, z)$ une fonction continue définie dans le domaine (D) et sur la frontière (S) satisfaisant aux conditions voulues, pour que la fonction Φ définie par l'équation (2) du chapitre IV admette à l'intérieur du domaine (D), les dérivées $\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2}$ et $\frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2}$ et pour que ces dérivées soient continues en chaque point situé à l'intérieur du domaine (D) et proposons-nous de déterminer une fonction w vérifiant l'équation

$$(1) \quad \Delta w + \xi w + f(x, y, z) = 0$$

où ξ représente un paramètre, à l'intérieur du domaine (D) et satisfaisant sur la surface (S) à la condition aux limites:

$$(2) \quad h' \frac{dw}{dN} = hw$$

en donnant aux quantités h' et h la signification qui leur a été attribuée au chapitre IV.

Pour les valeurs du paramètre ξ vérifiant les conditions imposées à ce paramètre au chapitre IV, la fonction désignée ici par la lettre w coïncidera (voir la fin du § 4) avec celle qui, au chapitre IV, a été désignée par la même lettre et elle sera parfaitement déterminée. Désignons par ϱ_0 un nombre réel et positif assez grand pour que la valeur $-\varrho_0$ du paramètre ξ satisfasse aux conditions que nous venons de rappeler et, après avoir posé

$$(3) \quad \xi = -\varrho_0 + \eta,$$

cherchons à développer la fonction w en une série de la forme

$$w = \sum_{k=0}^{\infty} w_k \eta^k = \sum_{k=0}^{\infty} w_k (\varrho + \xi)^k. \quad (4)$$

Nous aurons

$$\left. \begin{aligned} \Delta w_0 - \varrho_0 w_0 + f &= 0 \\ \Delta w_k - \varrho_0 w_k + w_{k-1} &= 0 \quad (k = 1, 2, 3, \dots) \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

et le théorème exprimé par l'équation (25) du chapitre précédent donnera:

$$\left. \begin{aligned} w_0 &= \int_{(D)} f G d\bar{i} \\ w_k &= \int_{(D)} w_{k-1} G d\bar{i} \quad (k = 1, 2, 3, \dots). \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Le cas où la fonction f serait une fonction complexe de la forme $f_1 + i f_2$ se ramène très facilement au cas où cette fonction est réelle. Nous supposons donc que la fonction f est réelle. La fonction G étant réelle puisque elle se rapporte à la valeur réelle $-\varrho_0$ du paramètre ξ , nous aurons:

$$\begin{aligned} w_0^2 &< \int_{(D)} f^2 d\bar{i} \int_{(D)} G^2 d\bar{i} \\ w_k^2 &< \int_{(D)} w_{k-1}^2 \int_{(D)} G^2 d\bar{i} \end{aligned}$$

d'où

$$w_k^2 < \frac{3}{\sqrt{\varrho_0}} I_{2k-2} \quad (k = 0, 1, 2, \dots). \quad (7)$$

en vertu de l'inégalité (16) du chapitre précédent et en posant:

$$\left. \begin{aligned} I_{-2} &= \int_{(D)} f^2 d\bar{i} \\ I_{2k} &= \int_{(D)} w_k^2 d\bar{i} \quad k = 0, 1, 2, \dots. \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Les inégalités (7) donnent:

$$(9) \quad I_{2k} < \frac{3^{\mathcal{C}}}{\sqrt{\varrho_0}} I_{2k-2} \quad (k = 0, 1, 2, \dots)$$

en désignant par \mathcal{C} le volume du domaine (D).

Il résulte des inégalités (9) que le rayon de convergence R de la série

$$(10) \quad \sum_{k=y}^{\infty} \eta^2 \sqrt{I_{2k}}$$

vérifie l'inégalité

$$(11) \quad R \geq \sqrt{\frac{\sqrt{\varrho_0}}{3^{\mathcal{C}}}}$$

et l'on conclura aisément des inégalités (7), que le rayon de convergence absolue et uniforme dans le domaine (D), de la série (4) est égal au rayon de convergence R de la série (10).

Il résulte des inégalités (40) du chapitre IV que, pour toute valeur de η vérifiant l'inégalité

$$(12) \quad |\eta| < R,$$

la somme w de la série (4) sera une fonction admettant, à l'intérieur du domaine (D), des dérivées premières par rapport aux variables x, y, z , dérivées qui seront continues en chaque point situé à l'intérieur du domaine (D). D'autre part, il résulte des équations (6) que, lorsque η vérifie l'inégalité (12), on a:

$$w = \int_{(D)} \{f + \eta w\} G d\dot{i}.$$

Il résulte de ces deux circonstances ainsi que du théorème exprimé par l'équation (25) du chapitre précédent que l'on a:

$$\Delta w + (\eta - \varrho_0) w + f(x, y, z) = 0.$$

En d'autres termes, la somme de la série (4) satisfait à l'équation (1) pourvu que l'on ait:

$$(13) \quad |\xi + \varrho_0| < R.$$

Adressons-nous maintenant, selon que l'on a $h' = 0$ ou $h' = 1$, à l'inégalité (14) ou à l'inégalité (22) du chapitre IV. Ces inégalités permettront d'établir que, pour les valeurs de ξ satisfaisant à l'iné-

galité (13) la somme w de la série (4) est une fonction pour laquelle la quantité $\frac{dw}{dN}$ existe et représente une fonction continue vérifiant, dans tous les cas, l'équation (2).

Voici en définitive le résultat auquel nous arrivons: il existe une fonction $w(x, y, z, \xi)$ des variables x, y, z et du paramètre ξ analytique par rapport au paramètre ξ et holomorphe par rapport à ce paramètre à l'intérieur du cercle défini dans le plan du paramètre complexe ξ par l'inégalité (13), vérifiant pour toute valeur de ξ satisfaisant à l'inégalité (13), l'équation (1) à l'intérieur du domaine (D) et l'équation (2) sur la frontière (S) de ce domaine.

§ 19. Considérons l'expression:

$$\int_{(D)} \left\{ \frac{\partial w_m}{\partial x} \frac{\partial w_n}{\partial x} + \frac{\partial w_m}{\partial y} \frac{\partial w_n}{\partial y} + \frac{\partial w_m}{\partial z} \frac{\partial w_n}{\partial z} + \varrho_0 w_m w_n \right\} d\tilde{i} + \int_{(S)} h w_m w_n ds.$$

En s'appuyant sur les équations (5) et sur le théorème de Green, on prouvera aisément que la valeur de l'expression précédente ne dépend que de la valeur de la somme $m+n$ et que, pour $m+n=2k-1$ l'expression considérée est égale à l'intégrale I_{2k} définie par l'une des équations (8). Il est donc permis de poser

$$I_{m+n-1} = \int_{(D)} \left\{ \frac{\partial w_m}{\partial x} \frac{\partial w_n}{\partial x} + \frac{\partial w_m}{\partial y} \frac{\partial w_n}{\partial y} + \frac{\partial w_m}{\partial z} \frac{\partial w_n}{\partial z} + \varrho_0 w_m w_n \right\} d\tilde{i} + \int_{(S)} h w_m w_n ds. \quad (14)$$

Cela posé, il résulte des équations (8) que, pour les valeurs paires de l'indice p , les quantités I_p seront positives. D'autre part, on conclura aisément de l'inégalité (18) du chapitre III, en tenant compte du choix du nombre ϱ_0 que, quelle que soit la fonction réelle $F(x, y, z)$, on aura:

$$\int_{(D)} \left\{ \left(\frac{\partial F}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z} \right)^2 + \varrho_0 F^2 \right\} d\tilde{i} + 2 \int_{(S)} h F^2 ds > 0 \quad (15)$$

et a fortiori:

$$\int_{(D)} \left\{ \left(\frac{\partial F}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z} \right)^2 + \varrho_0 F^2 \right\} d\tilde{i} + \int_{(S)} h F^2 ds > 0. \quad (16)$$

Posons, dans l'inégalité (16):

$$F = \lambda w_m + \lambda' w_n,$$

en désignant par λ et λ' des variables réelles. Le premier membre de l'inégalité considérée deviendra une forme quadratique $\psi(\lambda, \lambda')$ des variables λ et λ' et puisque l'inégalité (16) a lieu quelle que soit la fonction $F(x, y, z)$ la forme $\psi(\lambda, \lambda')$ ne pourra, pour aucun système de valeurs des variables réelles λ et λ' devenir négative. On conclura de là 1° que les I_p sont positifs même pour les valeurs impaires de l'indice p , 2° que l'on a

$$I_{2k}^2 \leq I_{2k+1} I_{2k-1}.$$

On a d'ailleurs

$$I_{2k-1} = \int_{(D)} w_k w_{k-1} d\bar{t}.$$

Par conséquent

$$I_{2k-1}^2 \leq I_{2k} I_{2k-2}.$$

En résumé tous les I_p sont positifs et l'on a:

$$I_p^2 \leq I_{p-1} I_{p+1} \quad (p = 0, 1, 2, 3, \dots).$$

Il résulte de là que la suite à termes positifs

$$(17) \quad \frac{I_{-2}}{I_{-1}}, \frac{I_{-1}}{I_0}, \frac{I_0}{I_1}, \frac{I_1}{I_2}, \dots$$

n'est jamais croissante. Cette suite est donc convergente. Cela étant, on s'assurera très aisément que la suite précédente a pour limite le rayon de convergence R de la série (10).

Revenons à l'inégalité (15) et supposons que l'on ait

$$(18) \quad F = \sum_{k=1}^p \alpha_k F_k$$

en désignant par F_1, F_2, \dots des fonctions quelconques et par $\alpha_1, \alpha_2, \dots$ des indéterminées réelles. D'après un théorème bien connu de M. Poincaré¹⁾, il existera un nombre entier p_0 et une constante positive E' dépendant, comme le nombre p_0 , uniquement de la nature de la surface (S) , tels que, pour toute valeur de p vérifiant l'inégalité

$$(19) \quad p \geq p_0$$

¹⁾ Voir par exemple le mémoire de M. Poincaré cité dans l'Introduction.

et quelles que soient les fonctions F_1, F_2, \dots, F_p , il soit possible de déterminer les facteurs $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p$, au moyen d'un certain système d'équations linéaires et homogènes contenant au plus $p-1$ équations distinctes, de façon que l'on ait:

$$\int_{(D)} \left\{ \left(\frac{\partial F}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z} \right)^2 \right\} d\bar{i} \geq 2 E' p^{\frac{2}{3}} \int_{(D)} F^2 d\bar{i}.$$

Cette inégalité et l'inégalité (15) donnent:

$$\int_{(D)} \left\{ \left(\frac{\partial F}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z} \right)^2 + \frac{\varrho_0}{2} F^2 \right\} d\bar{i} + \int_{(S)} h F^2 ds \geq E' p^{\frac{2}{3}} \int_{(D)} F^2 d\bar{i}.$$

On aura donc a fortiori:

$$\int_{(D)} \left\{ \left(\frac{\partial F}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z} \right)^2 + \varrho_0 F^2 \right\} d\bar{i} + \int_{(S)} h F^2 ds \geq E' p^{\frac{2}{3}} \int_{(D)} F^2 d\bar{i}. \quad (20)$$

En résumé, nous obtenons le théorème suivant: quelles que soient les fonctions F_1, \dots, F_p , lorsque le nombre entier et positif p satisfait à l'inégalité (19), il suffit d'établir un certain système de relations linéaires et homogènes entre les $\alpha_1, \dots, \alpha_p$, système comprenant au plus $p-1$ équations, pour que l'inégalité (20) ait lieu.

Les considérations que nous venons de développer dans ce §, concernent le cas où l'on a $h' = 1$. Il est superflu de développer les considérations analogues relatives au cas où $h' = 0$: elles sont bien connues et d'ailleurs, elles ne se distingueraient de celles qui précèdent que par leur simplicité plus grande puisque l'on n'aurait pas à faire usage de l'inégalité (15).

§ 20. En s'appuyant sur les résultats établis dans les deux § précédents et sur les propositions des §§ 9 et 10, on établira au moyen de la méthode bien connue de M. Poincaré les théorèmes suivants¹⁾.

Théorème I. La surface (S) et les quantités h' et h étant données (je rappelle que h' est une constante qui ne peut être égale qu'à zéro ou à l'unité et que h est une fonction continue réelle quelconque définie sur la surface (S)) il existe une suite infinie de fonctions réelles

$$U_1, U_2, U_3, \dots \quad (21)$$

¹⁾ Voir les travaux cités dans l'Introduction.

que nous appellerons fonctions harmoniques et qui jouissent des propriétés suivantes:

1° Elles vérifient, à l'intérieur du domaine (D) limité par la surface (S), les équations

$$(22) \quad \Delta U_k + \xi_k U_k = 0; \quad (k = 1, 2, 3, \dots)$$

en représentant par

$$(23) \quad \xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots$$

une suite de nombres réels ayant les propriétés que voici:

$$(24) \quad \xi_k \leq \xi_{k+1},$$

$$(25) \quad \xi_1 > -\varrho_0$$

en désignant par ϱ_0 un nombre positif satisfaisant aux mêmes conditions que le nombre représenté par le même symbole au § 18. On a ensuite:

$$(26) \quad \xi_k > Ek^{\frac{2}{3}}$$

en désignant par E une constante positive et en supposant que

$$(27) \quad k \geq k_0,$$

où k_0 représente un certain nombre entier et positif.

2° Les fonctions U_k vérifient la condition aux limites suivantes:

$$(28) \quad h' \frac{dU_k}{dN} = h U_k.$$

3° Il n'existe aucune relation linéaire et homogène à coefficients constants entre deux ou plusieurs fonctions de la suite (21).

4° On a

$$\int_{(D)} U_k^2 d\bar{i} = 1$$

et

$$\int_{(D)} U_k U_m d\bar{i} = 0, \quad \text{pour } k \neq m.$$

5° Lorsqu'une fonction U vérifie l'équation

$$\Delta U + \xi U = 0$$

à l'intérieur du domaine (D) et lorsqu'elle satisfait à la condition aux limites

$$h' \frac{dU}{dN} = h U$$

le paramètre ξ est nécessairement égal à l'un des termes ξ_x de la suite (23) et la fonction U est identique à une combinaison linéaire et homogène à coefficients constants de celles des fonctions (21) (dont le nombre à cause de l'inégalité (26) est toujours fini) qui ont pour nombre caractéristique commun le nombre ξ_x .

Théorème II. La série (4) définit une fonction des variables x, y, z et du paramètre ξ qui jouit des propriétés suivantes:

1° Considérée comme fonction du paramètre ξ , la fonction w est une fonction analytique méromorphe dans toute partie finie du plan de la variable complexe ξ ; ses pôles sont simples et réels et il font tous partie de la suite (23); enfin, si le nombre ξ_{k_1} est un pôle de la fonction w et si l'on représente par $\xi_{k_1}, \xi_{k_2}, \dots, \xi_{k_n}$ l'ensemble des termes de la suite (23) qui ont ξ_{k_1} pour valeur commune, le résidu correspondant P_{k_1} aura la valeur suivante:

$$P_{k_1} = - \sum_{\alpha=1}^n U_{k_\alpha} \int_{(D)} U_{k_\alpha} f(x, y, z) d\bar{i}.$$

Cela prouve, faisons-le remarquer, que, pour que le point (ξ_k) ne soit pas un pôle de la fonction w , il faut et il suffit que l'on ait:

$$\int_{(D)} U_{k_\alpha} f(x, y, z) d\bar{i} = 0 \quad (\alpha = 1, 2, 3, \dots, n). \quad (29)$$

2° Pour toute valeur finie de ξ distincte des pôles de la fonction w , cette fonction satisfait à l'équation (1) à l'intérieur du domaine (D) et à la condition (2) en chaque point de la surface (S)

3° Si l'on désigne par ξ' un nombre ne se réduisant à aucun terme de la suite (23), il existe une fonction unique φ vérifiant la condition aux limites

$$h' \frac{d\varphi}{dN} = h \varphi \quad (30)$$

et satisfaisant à l'équation

$$\Delta \varphi + \xi' \varphi + f(x, y, z) = 0 \quad (31)$$

à l'intérieur du domaine (D) et l'on a

$$\varphi = w(x, y, z, \xi')$$

en désignant par $w(x, y, z, \xi)$ la fonction dont un élément analytique, quand on considère cette fonction comme fonction du paramètre ξ , est représenté par la série (4). Lorsque ξ' est égal à l'un des termes de la suite (23), soit ξ_{k_1} , il n'existe pas en général de fonction φ vérifiant les équations (30) et (31); pour qu'une telle fonction existe, il faut et il suffit que la fonction $f(x, y, z)$ satisfasse aux équations (29) et dans ce cas l'expression générale de la fonction φ est la suivante:

$$\varphi = w(\xi_{k_1}) + \sum_{\alpha=1}^n C_{\alpha} U_{k_{\alpha}}$$

en désignant par C_1, C_2, \dots, C_n des constantes arbitraires, la fonction φ est donc indéterminée, dans les conditions considérées.

Théorème III. Pour toute valeur de ξ distincte des termes de la suite (23), il existe une fonction unique u vérifiant l'équation

$$\Delta u + \xi u = 0$$

à l'intérieur du domaine (D) et satisfaisant à la condition aux limites

$$h' \frac{du}{dN} = hu + \sigma_0$$

en désignant par σ_0 une fonction continue quelconque donnée, définie sur la surface (S) et en supposant que, dans le cas où l'on a $h' = 0$, la fonction continue et réelle h ne s'annule en aucun point de la surface (S). Considérée comme fonction du paramètre ξ , la fonction u jouit de propriétés analogues à celles de la fonction w qui a été envisagée dans le théorème précédent.

Corollaire. La fonction w considérée au chapitre IV existe et est parfaitement déterminée pour toute valeur de ξ distincte des termes de la suite (23).

Théorème IV. La fonction de Green généralisée existe et est parfaitement déterminée pour toute valeur de ξ distincte des termes de la suite (23). Par contre cette fonction n'existe pour aucune valeur de ξ égale à l'un des termes de cette suite.

La première partie de ce théorème est un simple corollaire du théorème III. Quand à la seconde partie, elle est une conséquence immédiate de la remarque suivante: si pour une valeur ξ' de ξ la fonction de Green existe toute fonction U vérifiant l'équation

$$\Delta U + \xi' U = 0$$

à l'intérieur du domaine (D) et satisfaisant à la condition aux limites

$$h' \frac{dU}{dN} = h U$$

est, comme le montre une application facile du théorème de Green, identiquement nulle dans tout le domaine (D).

§ 21. Bien que l'existence des fonctions harmoniques dans le cas où le rapport $\frac{h}{h'}$ représente une fonction continue réelle quelconque définie sur la surface (S) ait été établie pour la première fois, dans les pages qui précèdent, les deux théorèmes suivant peuvent, à juste titre être appelés „théorèmes de M. Stekloff“. En effet, dans un travail récent M. Stekloff¹⁾, en partant de l'hypothèse qu'il existe des fonctions vérifiant certaines conditions très générales, a démontré un théorème qui, une fois l'existence des fonctions U_k établie, comprend comme cas particulier le premier des deux théorèmes que nous avons en vue. Quand au second de ces théorèmes, il n'est qu'une extension, immédiate après la démonstration de l'existence des fonctions U_k , d'un théorème démontré par M. Stekloff dans un autre mémoire²⁾.

Théorème V. Bornons-nous à admettre au sujet de la fonction réelle $f(x, y, z)$ définie dans le domaine (D) que l'intégrale

$$\mathfrak{B} = \int_{(D)} \{f(x, y, z)\}^2 d\tilde{i} \quad (32)$$

ait un sens et posons:

$$A_k = \int_{(D)} f(x, y, z) U_k d\tilde{i}. \quad (33)$$

La série

$$\sum_{k=1}^{\infty} A_k^2 \quad (35)$$

¹⁾ Stekloff. Sur certaines égalités générales communes à plusieurs séries de fonctions souvent employées dans l'Analyse. (Mémoires de l'Académie des Sciences de St. Pétersbourg 1904).

²⁾ Stekloff. Mémoire sur les fonctions harmoniques de M. Poincaré. (Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse 1900).

sera convergente et l'on aura:

$$(36) \quad \int_{(D)} \{f(x, y, z)\}^2 d\tilde{t} \cong \sum_{k=1}^{\infty} A_k^2.$$

Rappelons la démonstration, très simple d'ailleurs, de cet important théorème. A cet effet posons avec M. Stekloff

$$(37) \quad f_n(x, y, z) = f(x, y, z) - \sum_{k=1}^n A_k U_k.$$

On trouve immédiatement

$$\int_{(D)} \{f_n(x, y, z)\}^2 d\tilde{t} = \int_{(D)} \{f(x, y, z)\}^2 d\tilde{t} - \sum_{k=1}^n A_k^2$$

et l'on en conclut de suite l'exactitude du théorème qu'il s'agissait de démontrer.

Théorème VI. Astreignons la fonction réelle $f(x, y, z)$ à satisfaire à des conditions beaucoup moins générales que dans l'énoncé du théorème précédent: supposons que cette fonction soit continue dans le domaine (D) et sur la surface (S) , que les dérivées $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ et $\frac{\partial f}{\partial z}$ existent et soient continues en chaque point situé à l'intérieur du domaine (D) sauf en un point x_0, y_0, z_0 où elles pourront ne pas exister, mais dans le voisinage duquel elles devront être limitées; supposons enfin que la fonction considérée satisfasse à la condition aux limites¹⁾

$$h' \frac{df}{dN} = hf.$$

Les A_k étant déterminés au moyen des équations (33) on aura

$$(38) \quad \int_{(D)} \{f(x, y, z)\}^2 d\tilde{t} = \sum_{k=1}^{\infty} A_k^2.$$

Pour démontrer ce théorème, bornons-nous au cas où l'on a $h' = 1$, dont le cas où $h' = 0$ considéré déjà par M. Stekloff, ne se dis-

¹⁾ Cette condition ne joue un rôle dans la démonstration que dans le cas où $h' = 0$.

tingue que par sa simplicité plus grande et reprenons les intégrales I_p considérées au § 19. Posons en outre:

$$I_{-3} = \int_{(D)} \left\{ \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z} \right)^2 + \varrho_0 f^2 \right\} d\tilde{i} + \int_{(S)} h f^2 d\tilde{i}.$$

La quantité I_{-3} sera positive pour la même raison que les autres intégrales I_p à indices impairs. On trouve aisément

$$I_{-2}^2 < I_{-3} I_{-1}$$

d'où

$$\frac{I_{-3}}{I_{-2}} > \frac{I_{-2}}{I_{-1}}.$$

On aura donc

$$\frac{I_{-3}}{I_{-2}} \geq R \quad (39)$$

en désignant, comme au § 19, par R la valeur commune du rayon de convergence uniforme de la série (4) et la limite de la suite (17).

Substituons maintenant dans la définition de la fonction w considérée au § 19, à la fonction $f(x, y, z)$, la fonction $f_n(x, y, z)$ définie par l'équation (37). Si l'on désigne alors par $I_{-3}^{(n)}$, $I_{-2}^{(n)}$ et $R^{(n)}$ ce que deviennent les quantités I_{-3} , I_{-2} et R après cette substitution, le théorème qu'exprime l'inégalité (39) nous donnera:

$$\frac{I_{-3}^{(n)}}{I_{-2}^{(n)}} \geq R_n. \quad (40)$$

On trouve d'ailleurs aisément

$$I_{-3}^{(n)} = \int_{(D)} \left\{ \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z} \right)^2 + \varrho_0 f^2 \right\} d\tilde{i} + \int_{(S)} h f^2 ds - \sum_{k=1}^n \xi_k A_k^2 - \varrho_0 \sum_{k=1}^n A_k^2 \quad (41)$$

$$I_{-2}^{(n)} = \int_{(D)} \{ f(x, y, z) \}^2 d\tilde{i} - \sum_{k=1}^n A_k^2. \quad (42)$$

L'équation (41) nous apprend qu'à partir d'une certaine valeur assez grande du nombre entier et positif n , l'intégrale $I_{-3}^{(n)}$ décroît

ou reste constante. D'autre part il résulte du théorème II que R^n croît indéfiniment. Donc, à cause de l'inégalité (40), on a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} I_{-2}^{(n)} = 0$$

équation qui, à cause de (42), équivaut à l'équation (38) qu'il s'agissait précisément de démontrer.

VII. Application des fonctions harmoniques à l'étude de la fonction de Green généralisée.

§ 22. Désignons par ϱ_0 le même nombre réel et positif que le nombre désigné par cette lettre au § 18, et soit ϱ un nombre réel et positif vérifiant l'inégalité

$$(1) \quad \varrho \geq \varrho_0.$$

Cela posé appliquons à la fonction de Green $G(x, y, z, x', y', z', -\varrho)$ le théorème V du chapitre précédent. Nous aurons:

$$(2) \quad \int_{(D)} \{ G(x, y, z, x', y', z', -\varrho) \}^2 d\tau' \geq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{U_k^2}{(\varrho + \xi_k)^2}.$$

Observons maintenant ceci, si l'on pose $\xi = -\varrho$, l'inégalité (1) est une condition suffisante pour que l'inégalité (16) du chapitre V soit vérifiée. On aura donc:

$$(3) \quad \frac{3}{\sqrt{\varrho}} > \sum_{k=1}^{\infty} \frac{U_k^2}{(\varrho + \xi_k)^2}.$$

Soit N un nombre entier et positif assez grand pour que l'inégalité

$$(4) \quad n \geq N$$

entraîne l'inégalité suivante:

$$(5) \quad \xi_n \geq \varrho_0.$$

L'inégalité (4) étant vérifiée, il sera permis de poser $\varrho = \xi_n$ dans l'inégalité (3). Il viendra:

$$\frac{3}{\sqrt{\xi_n}} > \sum_{k=1}^{\infty} \frac{U_k^2}{(\xi_n + \xi_k)^2}$$

et l'on aura, a fortiori:

$$\sum_{k=n}^{\infty} \frac{U_k^2}{(\xi_n + \xi_k)^2} < \frac{3}{\sqrt{\xi_n}} \quad (6)$$

dans tout le domaine (D). Mais puisque l'inégalité

$$k > n$$

entraîne la relation

$$\xi_k \geq \xi_n,$$

l'inégalité (6) donnera:

$$\sum_{k=n}^{\infty} \frac{U_k^2}{\xi_k^2} < \frac{12}{\sqrt{\xi_n}} \quad (7)$$

dans tout le domaine (D), pourvu que le nombre n vérifie l'inégalité (4). Ce résultat, très important pour nous, va nous permettre d'établir une série de théorèmes qui nous seront très utiles.

§ 23. Considérons la fonction de Green généralisée $G(x, y, z, x_0, y_0, z_0, \xi)$ et posons:

$$\begin{aligned} & \psi(x, y, z, x_0, y_0, z_0, \xi, \xi') = \\ & = \frac{G(x, y, z, x_0, y_0, z_0, \xi) - G(x, y, z, x_0, y_0, z_0, \xi')}{\xi - \xi'}. \end{aligned} \quad (8)$$

La fonction ψ considérée comme fonction des variables x, y, z jouira des propriétés suivantes:

1° Elle sera continue dans tout le domaine (D) et sur sa frontière (S).

2° Au point (x_0, y_0, z_0) lui-même, les dérivées $\frac{\partial \psi}{\partial x}$, $\frac{\partial \psi}{\partial y}$ et $\frac{\partial \psi}{\partial z}$ n'existeront pas, mais en tout autre point situé à l'intérieur du domaine (D) elles existeront et seront continues; en outre, dans le voisinage du point (x_0, y_0, z_0) les modules de ces dérivées auront une limite supérieure finie.

3° Dans le voisinage de tout point intérieur au domaine (D) mais distinct du point (x_0, y_0, z_0) , la fonction ψ sera une fonction analytique holomorphe des variables x, y, z et satisfera à l'équation suivante:

$$\Delta \psi + \xi \psi + G(x_0, y_0, z_0, x, y, z, \xi') = 0. \quad (9)$$

4° On aura

$$h' \frac{d\psi}{dN} = h\psi \quad (10)$$

sur la frontière (S) du domaine (D).

En tenant compte de ces propriétés de la fonction ψ , on prouvera au moyen d'une application facile du théorème de Green la formule suivante:

$$(11) \quad \begin{aligned} & \psi(x, y, z, x_0, y_0, z_0, \xi, \xi') = \\ & = \int_{(D)} G(x_0, y_0, z_0, x', y', z', \xi') G(x, y, z, x', y', z', \xi) d\tilde{t}'. \end{aligned}$$

Il résulte encore des mêmes propriétés de la fonction ψ ceci: Si l'on pose

$$\psi = \psi_1 + i\psi_2$$

pour mettre en évidence les parties réelle et imaginaire de la fonction ψ , on pourra appliquer le théorème VI du chapitre précédent à chacune des fonctions ψ_1 et ψ_2 . En ajoutant membre à membre les équations obtenues de cette façon, on trouvera:

$$(12) \quad \int_{(D)} |\psi(x, y, z, x_0, y_0, z_0, \xi, \xi')|^2 d\tilde{t} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\{U_k(x_0, y_0, z_0)\}^2}{|(\xi - \xi_k)^2 (\xi' - \xi_k)^2|} = 0.$$

Posons:

$$(13) \quad F(x, y, z, x_0, y_0, z_0, \xi, \xi') = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{U_k(x, y, z) U_k(x_0, y_0, z_0)}{(\xi - \xi_k)(\xi' - \xi_k)}.$$

Les paramètres ξ et ξ' ayant des valeurs déterminées, distinctes, cela va sans dire, des nombres ξ_k , la série (13) sera absolument et uniformément convergente quand les points (x, y, z) et (x_0, y_0, z_0) se déplaceront d'une façon quelconque dans le domaine (D) . C'est ce que l'on prouvera aisément en s'appuyant sur l'inégalité (7).

Posons pour un moment

$$\varphi(x, y, z) = \psi(x, y, z, x_0, y_0, z_0, \xi, \xi') - F(x, y, z, x_0, y_0, z_0, \xi, \xi').$$

La fonction $\varphi(x, y, z)$ sera continue dans tout le domaine (D) et il résulte des équations (12) et (13) que l'on a:

$$\int_{(D)} |\varphi(x, y, z)|^2 d\tilde{t} = 0.$$

Cela prouve que l'on a:

$$(14) \quad \psi(x, y, z, x_0, y_0, z_0, \xi, \xi') = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{U_k(x, y, z) U_k(x_0, y_0, z_0)}{(\xi - \xi_k)(\xi' - \xi_k)}$$

la série du second membre étant, répétons-le, absolument et uniformément convergente lorsque les points x, y, z et x_0, y_0, z_0 se déplacent d'une façon quelconque dans le domaine (D) .

Je dis que la fonction ψ considérée comme fonction de l'un des paramètres ξ ou ξ' est une fonction analytique méromorphe dont l'ensemble des pôles coïncide avec l'ensemble des pôles des termes de la série qui la représente. Pour le démontrer, considérons un cercle quelconque (Σ) tracé dans le plan de la variable ξ et désignons par ψ_1 la somme de la série en laquelle se transforme la série (14) après la suppression des termes correspondant à ceux des nombres ξ_k qui sont les affixes de points situés à l'intérieur du cercle (Σ) ou sur sa circonférence. Si les points (ξ) et (ξ') se déplacent à l'intérieur du cercle (Σ) ou sur sa circonférence, la série représentant la quantité ψ_1 sera absolument et uniformément convergente, on le démontrera aisément en s'appuyant sur l'inégalité (7). Cela prouve que la fonction ψ jouit bien de la propriété annoncée.

Les équations (8) et (14) donnent:

$$\begin{aligned} G(x, y, z, x_0, y_0, z_0, \xi) - G(x, y, z, x_0, y_0, z_0, \xi') = \\ = (\xi - \xi') \sum_{k=1}^{\infty} \frac{U_k(x, y, z) U_k(x_0, y_0, z_0)}{(\xi - \xi_k)(\xi' - \xi_k)}. \end{aligned} \quad (15)$$

Cette équation qui nous sera très utile plus tard, prouve que la fonction $G(x, y, z, x_0, y_0, z_0, \xi)$, considérée comme fonction du paramètre ξ est une fonction méromorphe, fonction dont l'expression (15) met en évidence les pôles et les résidus correspondants.

§ 24. Posons

$$\begin{aligned} \xi &= \alpha + i\beta \\ \xi' &= \alpha - i\beta, \end{aligned}$$

les équations (11) et (14) donneront:

$$\int_{(D)} |G(x, y, z, x, y, z, \xi)|^2 d\bar{\nu} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{U_k^2}{(\alpha - \xi_k)^2 + \beta^2}. \quad (16)$$

Comme la série du second membre de cette équation est uniformément (et évidemment absolument) convergente dans le domaine (D) , il résulte de l'équation en question que l'intégrale qui en forme le premier membre aura une limite supérieure finie fonction des variables α et β , indépendante de la position du point (x, y, z)

dans le domaine (D) et cela non seulement, comme on l'a déjà vu plus haut, lorsque le paramètre ξ satisfait aux conditions assurant l'inégalité (16) du chapitre V, mais encore lorsque ce paramètre a une valeur quelconque pour laquelle la fonction de Green existe.

Supposons que le paramètre $\xi = \rho (\cos \theta + i \sin \theta)$ ne satisfasse pas nécessairement aux conditions dans lesquelles nous nous sommes placés pour établir l'inégalité (16) du chapitre V, c'est à dire l'inégalité

$$(17) \quad \int_{(D)} |G(\xi)|^2 d\bar{i} < \frac{3}{\sqrt{\rho} \sin \frac{\theta}{2}}$$

et proposons-nous de déterminer une limite supérieure simple de l'intégrale formant le premier membre de l'équation (16). Rappelons à cet effet que, pour assurer l'inégalité (17), il suffit d'assujettir le paramètre ξ à satisfaire à une inégalité de la forme

$$(18) \quad \frac{1}{\sqrt{\rho} \sin^2 \frac{\theta}{2}} \leq \ell$$

en designant par ℓ un nombre positif dépendant de la nature des quantités h' et h .

Cela posé admettons que la valeur

$$(19) \quad \xi = \rho (\cos \theta + i \sin \theta)$$

du paramètre dont dépend la fonction G ne satisfasse pas à la condition (18) et envisageons une autre valeur

$$(20) \quad \xi' = \rho' (\cos \theta' + i \sin \theta')$$

telle que l'on ait à la fois

$$(21) \quad \rho' \cos \theta' = \rho \cos \theta; \quad \frac{1}{\sqrt{\rho'} \sin^2 \frac{\theta'}{2}} = \ell.$$

Les quantités ρ et θ étant données, on pourra toujours déterminer ρ' et θ' de façon que ces nombres vérifient les équations (21). En vertu de la seconde des équations (21) et parce que la relation (18) entraîne l'inégalité (17), on aura:

$$(22) \quad \int |G(\xi')|^2 d\bar{i} < \frac{3}{\sqrt{\rho'} \sin^2 \frac{\theta'}{2}}$$

Portons successivement dans l'équation (16) les valeurs (19) et (20) du paramètre dont dépend la fonction de Green. La comparaison des équations obtenues et l'inégalité (22) permettront d'établir sans peine l'inégalité suivante:

$$\int_{(D)} |G(\xi)|^2 d\tilde{i} < \frac{l'^2}{l^2} \frac{3}{\sqrt{\rho'} \sin \frac{\theta'}{2}}$$

en désignant par l et l' les distances des points (ξ) et (ξ') au plus proche des points (ξ_k) . La seconde des équations (21) permet de donner à l'inégalité précédente la forme suivante:

$$\int_{(D)} |G(\xi)|^2 d\tilde{i} < 3 \frac{l'^2}{l^2} \sin \frac{\theta'}{2}. \quad (23)$$

C'est le résultat que nous voulions établir.

VIII. Application diverses des théories précédentes.

§ 25. Nous avons vu (chapitre V, équation (25)) que la fonction w étudiée au chapitre IV peut être représentée au moyen de la formule suivante:

$$w(x, y, z, \xi) = \int_{(D)} f(x', y', z') G(x, y, z, x', y', z', \xi) d\tilde{i}'. \quad (1)$$

Dans la définition de la fonction w , adoptée au chapitre IV, nous avons supposé:

1° Que la fonction $f(x, y, z)$, qui peut être une fonction complexe de la forme $f_1 + i f_2$, est telle que l'intégrale

$$\mathfrak{B} = \int_{(D)} |f|^2 d\tilde{i} \quad (2)$$

ait un sens.

2° Que le module de la fonction $f(x, y, z)$ a une limite supérieure finie quand on se borne à considérer les positions du point (x, y, z) dont la distance à la surface (S) ne dépasse pas une certaine limite.

Prenons maintenant l'équation (1) pour définition de la fonction w et bornons-nous d'abord à admettre que la fonction $f(x, y, z)$ ne satisfasse qu'à la première des deux hypothèses précédentes.

La formule (1) et l'équation (15) du chapitre précédent donnent:

$$(3) \quad w(x, y, z, \xi) - w(x, y, z, \xi') = (\xi - \xi') \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A_k U_k(x, y, z)}{(\xi - \xi_k)(\xi' - \xi_k)}$$

en posant:

$$(4) \quad A_k = \int_{(D)} f(x, y, z) U_k(x, y, z) d\bar{i} \quad (k = 1, 2, 3 \dots)$$

Je fais maintenant les remarques suivantes:

1° Les équations (1) et (2) donnent

$$(5) \quad |w|^2 < \mathfrak{B} \int_{(D)} |G|^2 d\bar{i}$$

d'où l'on conclut, en s'appuyant sur le théorème exprimé par l'inégalité (16) du chapitre V que la fonction w tend vers zéro, uniformément dans le domaine (D) , lorsque le module du paramètre ξ croît indéfiniment, l'argument conservant une valeur fixe comprise entre 0 et 2π et distincte de chacun de ces nombres.

2° Il résulte de l'inégalité (7) du chapitre précédent et de ce que l'on trouve en appliquant le théorème V du chapitre VI successivement à la partie réelle et au coefficient de l'unité imaginaire de la fonction $f(x, y, z)$ que la série:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{A_k U_k}{\xi - \xi_k}$$

est, pour toute valeur de ξ distincte des nombres $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots$, absolument et uniformément convergente dans le domaine (D) et qu'elle représente une fonction analytique du paramètre ξ méromorphe dans toute portion finie du plan de la variable complexe ξ .

Ces remarques faites, donnons à l'argument de la variable ξ' une valeur constante quelconque comprise entre zéro et 2π mais distincte de chacun de ces deux nombres et faisons croître indéfiniment le module de cette variable. L'équation (3) donnera:

$$(6) \quad w(x, y, z, \xi) = - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A_k U_k}{\xi - \xi_k}$$

la série du second membre étant, répétons-le, absolument et uniformément convergente dans tout le domaine (D) et représentant une fonction analytique méromorphe du paramètre ξ .

§ 26. On déduit aisément de l'équation (6):

$$-\frac{A}{\xi - \xi_k} = \int_{(D)} w(x', y', z', \xi) U_k(x', y', z') d\tilde{v},$$

ce qui donne:

$$w(x, y, z, \xi) = \sum_{k=1}^{\infty} U_k \int_{(D)} w(x', y', z', \xi) U_k(x', y', z') d\tilde{v},$$

équation qui exprime le théorème suivant: lorsqu'à une fonction donnée $F(x, y, z)$ définie dans le domaine (D) , il est possible de faire correspondre une fonction $f(x, y, z)$ telle que pour une certaine valeur particulière $\xi^{(0)}$ du paramètre ξ , on ait

$$F(x, y, z) = \int_{(D)} f(x', y', z') G(x, y, z, x', y', z', \xi^{(0)}) d\tilde{v} \quad (7)$$

et telle en outre que l'intégrale (2) ait un sens, on pourra représenter la fonction $F(x, y, z)$ au moyen de la série suivante:

$$F(x, y, z) = \sum_{k=1}^{\infty} B_k U_k(x, y, z) \quad (8)$$

absolument et uniformément convergente dans le domaine (D) et dans laquelle les coefficients constants B_k ont les valeurs suivantes:

$$B_k = \int_{(D)} F(x', y', z') U_k(x', y', z') d\tilde{v}. \quad (9)$$

Ce théorème comprend comme cas particulier et sous une forme perfectionnée les théorèmes connus antérieurement et relatif aux séries procédant suivant des fonctions harmoniques¹⁾.

Il est aisé de voir que la fonction $F(x, y, z)$ satisfera certainement aux hypothèses dans lesquelles la formule (8) a été établie, quand elle sera continue dans le domaine (D) ainsi que sur sa frontière (S) , quand les dérivées $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}$ et $\frac{\partial^2 F}{\partial z^2}$ seront continues en chaque point situé à l'intérieur du domaine (D) et quand elle vérifiera enfin la condition aux limites

¹⁾ Consulter les travaux cités dans l'Introduction.

$$h \frac{dF}{dN} = h F.$$

Pour le prouver, posons

$$\psi(x, y, z) = \Delta F$$

et désignons par $\xi^{(0)}$ une valeur quelconque du paramètre ξ distincte des nombres ξ_k . Nous aurons:

$$\Delta F + \xi^{(0)} F + f = 0,$$

en posant

$$f = -\psi(x, y, z) - \xi^{(0)} F(x, y, z).$$

Cela étant, une application facile du théorème de Green nous conduira à l'expression (7) de la fonction F . La proposition que nous venons d'énoncer est donc établie.

§ 27. Un théorème général établi par M. Stekloff dans le plus récent des deux travaux cités au § 21, permettrait de conclure des théorèmes V et VI du chapitre VI que l'équation (38) du même chapitre est encore vérifiée lorsque l'on se borne à admettre que la fonction réelle $f(x, y, z)$ ne satisfait qu'aux deux hypothèses suivantes:

1° L'intégrale

$$(10) \quad \int_{(D)} \{f(x, y, z)\}^2 d\bar{i}$$

a un sens.

2° La fonction considérée est limitée.

Nous allons suivre une méthode qui n'exige pas, comme celle de M. Stekloff, la considération de séries procédant suivant des polynômes entiers et nous démontrerons une proposition plus générale que celle qui résulterait du théorème de M. Stekloff et dont voici l'énoncé: Il suffit que l'intégrale (10) ait un sens pour que l'on ait:

$$(11) \quad \int_{(D)} \{f(x, y, z)\}^2 d\bar{i} = \sum_{k=1}^{\infty} A_k^2$$

en posant, comme plus haut:

$$(12) \quad A_k = \int_{(D)} f(x, y, z) U_k(x, y, z) d\bar{i}.$$

Supposons d'abord que la fonction $f(x, y, z)$ soit limitée. On s'assurera avec un peu d'attention, que l'hypothèse d'après laquelle

l'intégrale (10) a un sens entraîne la conséquence suivante: à tout nombre positif ε non nul mais aussi petit que l'on voudra, il est possible de faire correspondre une partie (D_0) du domaine (D) de façon que les circonstances suivantes se présentent à la fois:

1° La distance à la surface (S) d'un point variable ne sortant pas du domaine (D_0) aura une limite inférieure non nulle d .

2° La différence des volumes des domaines (D) et (D_0) sera inférieure à ε .

3° Il existera une longueur δ non nulle mais inférieure à d , telle que l'oscillation de la fonction $f(x, y, z)$ à l'intérieur de toute sphère de rayon δ soit inférieure à ε , pourvu que le centre de cette sphère ne soit pas situé à l'extérieur du domaine (D_0).

Cela posé, voici ce que l'on conclura aisément de la formule (1), de ce que la valeur absolue de la fonction $f(x, y, z)$ a une limite supérieure finie F et de la remarque faite au chapitre V au sujet de l'expression (18) du même chapitre: il correspondra au nombre ε un nombre positif L tel que l'inégalité

$$\varrho \geq L \quad (13)$$

entraîne l'inégalité

$$|\varrho w(x, y, z, -\varrho) - f(x, y, z)| < 2\varepsilon \quad (14)$$

pourvu que le point (x, y, z) ne sorte pas du domaine (D_0). Le nombre ϱ vérifiant l'inégalité (13), il résulte de l'inégalité (14) que l'on aura:

$$\left| \varrho^2 \int_{(D_0)} \{w(x, y, z, -\varrho)\}^2 d\bar{i} - \int_{(D_0)} \{f(x, y, z)\}^2 d\bar{i} \right| < 4(F + \varepsilon) \overline{\mathcal{V}} \varepsilon \quad (15)$$

en désignant par $\overline{\mathcal{V}}$ le volume total du domaine (D). Reportons-nous aux inégalités (13) et (28) du chapitre IV, elles nous apprennent que l'inégalité (13) entraînera l'inégalité:

$$|w| < \frac{8F}{\varrho}$$

que la constante h' soit nulle ou égale à 1, mais à condition que le nombre L soit assez grand, condition que nous supposons être vérifiée.

Cela posé nous aurons:

$$(16) \quad \left\{ \begin{array}{l} \varrho^2 \left\{ \int_{(D)} [w(x, y, z, -\varrho)]^2 d\tilde{i} - \int_{(D_0)} [w(x, y, z, -\varrho)]^2 d\tilde{i} \right\} < 64F^2\varepsilon \\ \int_{(D)} f^2 d\tilde{i} - \int_{(D_0)} f^2 d\tilde{i} < F^2 \varepsilon \end{array} \right.$$

parce que la différence des volumes des domaines (D) et (D_0) est inférieure à ε .

Puisque l'inégalité (13) entraîne les inégalités (15) et (16), elle entraînera aussi l'inégalité suivante:

$$\left| \varrho^2 \int_{(D)} \{w(-\varrho)\}^2 d\tilde{i} - \int_{(D)} f^2 d\tilde{i} \right| < \{65F^2 + 4F\overline{\mathcal{C}} + 4\overline{\mathcal{C}}\varepsilon\} \varepsilon$$

Le nombre ε pouvant être pris aussi petit que l'on voudra, le résultat que nous venons d'obtenir exprime que

$$(17) \quad \lim_{\varrho=\infty} \varrho^2 \int_{(D)} \{w(-\varrho)\}^2 d\tilde{i} = \int_{(D)} f^2 d\tilde{i}.$$

Il résulte d'ailleurs de l'expression (6) de la fonction w que l'on a:

$$(18) \quad \lim_{\varrho=\infty} \varrho^2 \int_{(D)} \{w(-\varrho)\}^2 d\tilde{i} = \sum_{k=1}^{\infty} A_k^2.$$

Il résulte des équations (17) et (18) que la relation (11) est démontré dans le cas où la fonction $f(x, y, z)$ est limitée.

Affranchissons-nous maintenant de la restriction précédente. A cet effet décomposons le domaine (D) en deux autres (D') et (D'') de façon que la fonction $f(x, y, z)$ soit limitée dans le domaine (D') , et considérons deux fonctions $f'(x, y, z)$ et $f''(x, y, z)$ définies comme il suit: dans le domaine (D') on a:

$$f'(x, y, z) = f(x, y, z); \quad f''(x, y, z) = 0$$

et dans le domaine (D'') :

$$f'(x, y, z) = 0; \quad f''(x, y, z) = f(x, y, z).$$

Posons:

$$\begin{aligned} \mathfrak{B} &= \int_{(D)} f^2 d\tilde{i}; & \mathfrak{B}' &= \int_{(D)} f'^2; & \mathfrak{B}'' &= \int_{(D)} f''^2 d\tilde{i} \\ A'_k &= \int_{(D)} f' U_k d\tilde{i}; & A''_k &= \int_{(D)} f'' U_k d\tilde{i}. \end{aligned}$$

Nous aurons:

$$\mathcal{B} = \mathcal{B}' + \mathcal{B}'' \quad (19)$$

$$A_k = A'_k + A''_k \quad (20)$$

et, puisque la fonction $f'(x, y, z)$ est limitée dans le domaine (D) , nous aurons encore:

$$\mathcal{B}' = \sum_{k=1}^{\infty} A'^2_k. \quad (21)$$

D'ailleurs le théorème V du chapitre VI donne:

$$\mathcal{B}'' \geq \sum_{k=1}^{\infty} A''^2_k. \quad (22)$$

Les équations (20) et (21) donnent:

$$\sum_{k=1}^{\infty} A_k^2 - \mathcal{B}' = 2 \sum_{k=1}^{\infty} A'_k A''_k + \sum_{k=1}^{\infty} A''^2_k.$$

Or

$$\left\{ \sum_{k=1}^{\infty} A'_k A''_k \right\}^2 < \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} A'^2_k \right\} \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} A''^2_k \right\}.$$

Il en résulte:

$$\left| \sum_{k=1}^{\infty} A_k^2 - \mathcal{B}' \right| < 2 \sqrt{\mathcal{B}' \mathcal{B}''} + \mathcal{B}''$$

à cause des relations (21) et (22). D'ailleurs, comme on a évidemment

$$\mathcal{B}' < \mathcal{B},$$

on aura a fortiori:

$$\left| \sum_{k=1}^{\infty} A_k^2 - \mathcal{B}' \right| < 2 \sqrt{\mathcal{B} \mathcal{B}''} + \mathcal{B}'' \quad (23)$$

J'observe maintenant ceci: puisque l'intégrale

$$\int f^2 d\tilde{i}$$

a un sens, il sera possible de faire varier le domaine (D') de façon que l'intégrale \mathcal{B}'' tende vers zéro sans que, dans aucun de ces états, le domaine (D') ne devienne tel que la valeur absolue de la fonction $f(x, y, z)$ cesse d'y avoir une limite supérieure finie; plus le domaine (D') sera petit, plus la limite supérieure des valeurs

absolues de la fonction $f(x, y, z)$ dans le domaine (D') pourra être grande, mais pour chaque forme particulière du domaine (D') elle aura une valeur finie. Donc, lorsque l'on fera varier les domaines (D'') et (D') de la manière qui vient d'être expliquée, la relation (23) ne cessera jamais d'être vérifiée. Cela posé, on conclura immédiatement des relations (20) et (23) que l'on a:

$$\mathfrak{B} = \sum_{k=1}^{\infty} A_k^2$$

équation équivalente à l'équation (11). Le théorème qu'il fallait démontrer est donc établi dans toute sa généralité.

IX. Solution du Problème de Fourier réduit.

§ 28. Avant d'aborder le Problème de Fourier réduit, étudions un autre problème dont la relation intime avec le Problème de Fourier apparaît au premier coup d'oeil. Voici ce problème:

Etant donné une fonction réelle $f(x, y, z)$ des variables x, y, z définie dans le domaine (D) , telle que l'intégrale

$$(1) \quad \mathfrak{B} = \int_{(D)} f^2 d\bar{i}.$$

ait un sens, mais d'ailleurs tout à fait quelconque, déterminer une fonction $V(x, y, z, t)$ définie pour toute valeur positive de t dans tout le domaine (D) et sur la frontière (S) de ce domaine, jouissant des propriétés suivantes:

1° Pour toute valeur positive de t et pour toute position du point (x, y, z) à l'intérieur du domaine (D) ou sur la frontière (S) de ce domaine, la fonction V elle-même et la dérivée $\frac{\partial V}{\partial t}$ sont des fonctions continues des quatre variables x, y, z, t .

2° Pour toute valeur positive de t et pour toute position du point (x, y, z) à l'intérieur du domaine (D) les dérivées

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 V}{\partial y^2}, \quad \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$$

existent et sont des fonctions continues des quatre variables x, y, z, t , fonctions liées par l'équation:

$$(2) \quad \Delta V = \frac{\partial V}{\partial t}.$$

3° Pour toute valeur positive de t , la quantité $D_{ni}(V)$ (voir au § 3 la définition du symbole D_{ni}) tend uniformément vers sa limite $\frac{dV}{dN}$ quand la distance à la surface (S) du point auquel se rapporte la quantité $D_{ni}(V)$ tend vers zéro et l'on a :

$$h' \frac{dV}{dN} = h V \quad (3)$$

où, comme dans les chapitres précédents, on a représenté par h' une constante donnée ne pouvant avoir que la valeur zéro ou la valeur un, et par h une fonction donnée réelle et continue définie sur la surface (S) , mais pouvant d'ailleurs être quelconque.

4° L'intégrale

$$\int_{(D)} \{f(x, y, z) - V(x, y, z, t)\}^2 d\bar{i} \quad (4)$$

tend vers zéro lorsque t tend vers zéro en restant positif.

Je vais démontrer que ce problème admet toujours une solution, mais qu'il n'en admet qu'une seule.

Supposons provisoirement que le problème que je viens de poser admette une solution et cherchons à déterminer, en partant de cette hypothèse, la forme analytique de la fonction V .

Posons

$$\varphi_k(t) = \int_{(D)} V(x', y', z', t) U_k(x', y', z') d\bar{i} \quad (5)$$

en désignant par les U_k les fonctions harmoniques relatives aux valeurs données des quantités h' et h . D'après ce que l'on a vu au § 26, on aura :

$$V(x, y, z, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k(t) U_k(x, y, z),$$

pour toute valeur positive de t , la série étant absolument et uniformément convergente dans tout le domaine (D) .

L'équation (2) donne aisément :

$$\frac{d\varphi_k}{dt} + \xi_k \varphi_k = 0.$$

Cela prouve que la fonction $\varphi_k(t)$ tend, lorsque t tend vers zéro en restant positif, vers une limite déterminée A_k et que

$$\varphi_k(t) = A_k e^{-\xi_k t}.$$

D'ailleurs la formule (5) peut s'écrire ainsi:

$$\varphi_k(t) = \int_{(D)} f(x, y, z) U_k(x, y, z) d\tilde{i} + \int_{(D)} \{V - f\} U_k d\tilde{i}$$

d'où:

$$\left\{ \varphi_k - \int_{(D)} f U_k d\tilde{i} \right\}^2 < \int_{(D)} \{V - f\}^2 d\tilde{i}$$

puisque

$$\int_{(D)} U_k^2 d\tilde{i} = 1$$

par définition. A cause de la condition relative à l'intégrale (4), il résulte de ce qui précède que l'on a

$$(6) \quad A_k = \int_{(D)} f(x, y, z) U_k(x, y, z) d\tilde{i} \quad (k = 1, 2, 3, \dots).$$

Nous arrivons donc à la conclusion suivante: le problème qui nous occupe admet au plus une seule solution, et, s'il en admet une, soit $V(x, y, z, t)$, on a:

$$(7) \quad V(x, y, z, t) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k U_k(x, y, z) e^{-\xi_k t}$$

les coefficients A_k étant déterminés au moyen de l'équation (6).

Reste à prouver que la série (7) représente bien une fonction vérifiant toutes les conditions du problème. Considérons le nombre positif ϱ_0 introduit au début du chapitre VI. La fonction de Green généralisée $G(x, y, z, x', y', z', -\varrho_0)$ relative à la condition aux limites

$$h' \frac{dG}{dN} = h G$$

existera. Cela posé observons que l'on a:

$$\Delta U_k - \varrho_0 U_k + (\xi_k + \varrho_0) U_k = 0,$$

ce qui donne:

$$U_k = (\xi_k + \varrho_0) \int_{(D)} U_k(x', y', z') G(x, y, z, x', y', z', -\varrho_0) d\bar{i}. \quad (8)$$

En tenant compte de l'inégalité (16) du chapitre V, on en conclut:

$$|U_k| = \frac{\xi_k + \varrho_0}{\sqrt{\varrho_0}} \sqrt{\beta}. \quad (9)$$

Voici les conséquences que l'on tirera immédiatement de cette inégalité en tenant compte de l'inégalité (26) du chapitre VI: pour toute valeur positive de t , la série (7) est absolument et uniformément convergente dans le domaine (D) , la somme V de cette série admet par rapport à la variable t , des dérivées de tous les ordres et l'on a

$$\frac{\partial^p V}{\partial t^p} = (-1)^p \sum_{k=1}^{\infty} A_k \xi_k^p U_k e^{-\xi_k t} \quad (10)$$

pour toute valeur entière et positive de p , la série du second membre étant absolument et uniformément convergente dans tout le domaine (D) .

Il résulte d'abord de ce qui précède que, pour toute valeur positive de t , la fonction V ainsi que les fonctions $\frac{\partial^p V}{\partial t^p}$ sont continues dans tout le domaine (D) .

Voici d'autres conséquences qui résultent de ce qui vient d'être établi au sujet des séries (7) et (10). On a:

$$\frac{\partial V}{\partial t} = \int_{(D)} \left\{ \varrho_0 \frac{\partial V(x', y', z', t)}{\partial t} - \frac{\partial^2 V(x', y', z', t)}{\partial t^2} \right\} G(x, y, z, x, y, z, -\varrho_0) d\bar{i}' \quad (11)$$

$$V = \int_{(D)} \left\{ \varrho_0 V(x', y', z', t) - \frac{\partial V(x', y', z', t)}{\partial t} \right\} G(x, y, z, x', y', z', -\varrho_0) d\bar{i}'. \quad (12)$$

Reportons-nous d'une part au dernier § du chapitre IV, et d'autre part au théorème exprimé par l'équation (25) du chapitre V. Voici ce que nous pourrons alors conclure des équations (11) et (12).

1° Les fonctions

$$\varrho_0 \frac{\partial V}{\partial t} - \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} \quad \text{et} \quad \varrho_0 V - \frac{\partial V}{\partial t}$$

étant continues dans le domaine (D) , les fonctions $\frac{\partial V}{\partial t}$ et V admettront, par rapport aux variables x, y, z des dérivées du premier ordre qui seront continues en chaque point situé à l'intérieur du domaine (D) .

2° Puisque d'après cela, la fonction

$$\varrho_0 V - \frac{\partial V}{\partial t}$$

admet par rapport aux variables x, y, z des dérivées du premier ordre continues en chaque point situé à l'intérieur du domaine (D) , il résulte de l'équation (12) que, par rapport aux variables x, y, z , la fonction V admet des dérivées du second ordre continues en chaque point situé à l'intérieur du domaine et que l'on a

$$\Delta V - \varrho_0 V + \left(\varrho_0 V - \frac{dV}{dt} \right) = 0,$$

autrement dit:

$$\Delta V = \frac{\partial V}{\partial t}$$

dans tout le domaine (D) et

$$h' \frac{dV}{dN} = hV$$

en chaque point de la surface (S) , la quantité $\frac{dV}{dN}$ étant une fonction continue, limite vers laquelle tend uniformément l'expression $D_{ni}(V)$ lorsque la distance à la surface (S) du point auquel se rapporte cette expression tend vers zéro.

Cela posé il ne reste qu'à s'assurer que la somme V de la série (7) satisfait aussi au 4-e point de l'énoncé du problème qui nous occupe. C'est ce que l'on conclura immédiatement de l'équation (11) du chapitre précédent.

En définitive le problème que nous nous étions proposé admet, comme nous l'avons annoncé, toujours une solution et il n'en admet qu'une seule.

§ 29. Avant d'appliquer au Problème de Fourier réduit le résultat que nous venons d'établir, démontrons, à cause de l'intérêt qu'il présente en lui-même, le théorème suivant:

Si l'on désigne par t_0 un nombre positif quelconque et par (x_0, y_0, z_0)

un point quelconque situé à l'intérieur du domaine (D), la fonction V sera une fonction analytique holomorphe des variables x, y, z, t dans le voisinage du système de valeurs x_0, y_0, z_0, t_0 de ces variables.

Pour établir ce théorème, commençons par faire la remarque suivante: il résulte de l'équation (8) de ce chapitre et du théorème exprimé par l'équation (25) du chapitre V que la fonction $w(x, y, z, \xi)$ considérée au chapitre IV se confond avec la fonction U_k en remplaçant la fonction $f(x, y, z)$ par la fonction $(\xi_k + \varrho_0) U_k$ et en posant $\xi = -\varrho_0$. Cette remarque faite, il résulte de l'inégalité (9) de ce chapitre et des inégalités (15) et (23) du chapitre IV que l'on a dans tous les cas:

$$\left| \frac{dU_k}{dN} \right| < 20 \sqrt[3]{\frac{(\xi_k + \varrho_0)^2}{\varrho_0^{\frac{3}{2}}}}. \quad (13)$$

On a d'ailleurs

$$U_k = \frac{1}{4\pi} \int_{(S)} U_k \frac{d}{dN} \frac{e^{-\mu_k r}}{r} ds - \frac{1}{4\pi} \int_{(S)} \frac{dU_k}{dN} \frac{e^{-\mu_k r}}{r} ds \quad (14)$$

en désignant par μ_k la valeur que prend, pour $\xi = \xi_k$, le nombre μ défini par l'équation (3) du chapitre II.

Il résulte de l'équation (14) que, dans le voisinage de tout point situé à l'intérieur du domaine (D), la fonction U_k est une fonction analytique holomorphe des variables x, y, z . Mais ce n'est pas pour en tirer cette conclusion, qui résulte du théorème connu rappelé au début du chapitre III, que nous avons écrit la formule (14). Considérons le terme général:

$$A_k e^{-\xi_k t} U_k$$

de la série (7). L'expression précédente représente une fonction des variables x, y, z, t analytique et holomorphe dans le voisinage du système de valeurs x_0, y_0, z_0, t_0 de ces variables. Posons:

$$A_k e^{-\xi_k t} U_k = \Sigma C_{m,n,p,q} (x - x_0)^m (y - y_0)^n (z - z_0)^p (t - t_0)^q \quad (15)$$

et cherchons une limite supérieure du module du coefficient $C_{m,n,p,q}$. A cet effet désignons par δ un nombre positif assez petit pour que, pour toutes les valeurs réelles et complexes des variables x, y, z, t , vérifiant les inégalités

$$(16) \quad |x - x_0| \leq \delta; \quad |y - y_0| \leq \delta; \quad |z - z_0| \leq \delta; \quad |t - t_0| \leq \delta$$

le premier nombre de l'équation (15) soit holomorphe. On n'éprouvera aucune difficulté à déterminer une valeur admissible de δ connaissant le nombre t_0 et la plus courte distance du point (x_0, y_0, z_0) à la surface (S) . Supposons que les variables x, y, z, t prennent toutes les valeurs réelles et complexes compatibles avec les inégalités (16) et soit alors M_k une limite supérieure du module du premier membre de l'équation (15). On aura

$$(17) \quad |C_{m,n,p,q}| < \frac{M_k}{\delta^{m+n+p+q}}$$

en vertu d'un théorème bien connu.

En s'appuyant sur la formule (14) et sur les inégalités (13) et (9) et en remarquant que

$$|A_k| < \sqrt{x}$$

en vertu de l'équation (11) du chapitre précédent, on trouvera aisément que l'on peut prendre:

$$(18) \quad M_k = (Q_0 + Q_1 a_k + Q_2 a_k^2 + Q_3 a_k^3 + Q_4 a_k^4) e^{g_1 a_k - g_2 \zeta_k}$$

en désignant par a_k le module de μ_k et par $Q_0, Q_1, Q_2, Q_3, Q_4, g_1$ et g_2 des nombres positifs indépendants de l'indice k .

Il résulte immédiatement des relations (17) et (18) que la fonction $V(x, y, z, t)$ peut être représentée au moyen d'une série entière par rapport aux différences

$$x - x_0, \quad y - y_0, \quad z - z_0, \quad t - t_0$$

série qui sera absolument et uniformément convergente pour toutes les valeurs des variables x, y, z, t vérifiant les inégalités (16). La fonction V sera donc bien analytique et holomorphe par rapport aux variables x, y, z, t dans le voisinage du système de valeurs x_0, y_0, z_0, t_0 de ces variables. C'est le théorème que nous voulions établir.

Faisons remarquer que les relations (17) et (18) montrent que la série (7) est dérivable terme à terme par rapport à chacune des variables x, y, z, t à condition, cela va sans dire, de ne considérer que des valeurs positives de t et de supposer que le point x, y, z est situé à l'intérieur du domaine (D) ; j'ajoute que, lorsque l'on considère seulement celles des dérivées de la fonction V qui sont de la forme

$$\frac{\partial^p V}{\partial t^p},$$

il est permis de supposer que le point (x, y, z) est situé sur la surface (S) elle-même et on peut les calculer par la règle que je viens d'énoncer; c'est ce que l'on a déjà fait remarquer plus haut.

§ 30. Voici, en ce qui concerne le Problème de Fourier réduit, la conséquence la plus immédiate du résultat établi au § 28: lorsque ce problème est possible, il n'admet qu'une seule solution et la solution unique de ce problème, quand elle existe, coïncide avec la fonction $V(x, y, z, t)$ définie par l'équation (7).

Les termes mêmes dans lesquels nous avons posé le Problème de Fourier réduit impliquent, comme il est aisé de voir, que la fonction $f(x, y, z)$ satisfait à des hypothèses beaucoup moins générales que celle qui a été adoptée à son sujet dans le problème énoncé au début de ce chapitre. Cependant, au lieu d'introduire dès maintenant ces hypothèses, proposons-nous d'examiner la manière dont se comporte la fonction $V(x, y, z, t)$ lorsque la variable t tend vers zéro sans cesser de rester positive, en laissant d'abord à la fonction $f(x, y, z)$ toute sa généralité et en n'introduisant qu'ensuite des hypothèses de plus en plus restrictives.

§ 31. L'expression (7) de la fonction $V(x, y, z, t)$ se prêterait mal à l'étude qu'il s'agit d'entreprendre et nous allons en faire connaître une autre expression qui rendra cette étude très facile. A cet effet considérons la fonction $w(x, y, z, \xi)$ définie par la formule (1) du chapitre VIII, à savoir

$$w(x, y, z, \xi) = \int_{(D)} f(x', y', z') G(x, y, z, x', y', z', \xi) di', \quad (19)$$

rapportons le plan du paramètre complexe ξ à un système de coordonnées rectangulaires (α, β) , ce qui donnera

$$\xi = \alpha + i\beta, \quad (20)$$

en désignant par α et β des nombres réels, et envisageons, dans le plan du paramètre ξ , une suite infinie de contours fermés

$$(C_1), (C_2), (C_3), \dots \quad (21)$$

Pour définir le contour (C_m) portons sur la partie positive de l'axe des β , dans le sens des β positifs et à partir d'un point A , situé à une certaine distance R_m de l'origine (Ω) des coordonnées (α, β) , un

segment AB . Soient A' et B' les points symétriques aux points A et B par rapport au point Ω . Joignons les points A et A' par un demi-cercle $AA''A'$ de centre Ω , situé du côté des α négatifs et, après avoir mené par les points B et B' des parallèles à l'axe des α et porté sur ces parallèles, à partir des points B et B' , dans le sens des α positifs, des segments BB_1 et $B'B'_1$ ayant pour longueur commune la distance commune l_m des points B et B' à l'origine des coordonnées Ω , joignons les points B_1 et B'_1 par le segment $B_1B'_1$. Les longueurs R_m et l_m étant choisies comme on va l'indiquer immédiatement, le contour $B_1BAA''A'B'B'_1B_1$ sera le contour (C_m) que nous voulions définir.

Occupons-nous d'abord de la longueur l_m . Il résulte de l'inégalité (26) du chapitre VI qu'il existera une infinité de valeurs de l'indice k pour lesquelles on aura:

$$(22) \quad \xi_{k+t} - \xi_k > \frac{E^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{2(\xi_{k+t} + \xi_k)}}$$

soit

$$k_1, k_2, k_3, \dots$$

la suite croissante formée par ces valeurs du nombre k à partir d'une valeur k_1 telle que l'on ait

$$\xi_{k_1+t} + \xi_{k_1} > 2\varrho_0$$

en désignant par ϱ_0 un nombre positif de même nature que le nombre désigné par ce symbole au début du chapitre VI. Cela posé nous prendrons

$$l_m = \frac{1}{2}(\xi_{k_m+t} + \xi_{k_m}).$$

Quand à la longueur R_m nous nous bornerons à l'assujettir à vérifier les inégalités suivantes:

$$(23) \quad \varrho_0 \leq R_m < l_m.$$

Cela posé considérons l'intégrale imaginaire

$$\mathcal{Q}_m = \frac{-1}{2\pi i} \int_{(C_m)} w(x, y, z, \xi) e^{-\xi t} d\xi$$

prise, dans le sens direct suivant le contour C_m , en supposant que t soit positif. Il résulte de l'équation (6) du chapitre VIII que l'on aura:

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \mathcal{Q}_m = V(x, y, z, t).$$

Il est aisé de conclure de l'inégalité (5) du chapitre VIII et des inégalités (16) et (23) des chapitres V et VII que la partie de l'intégrale \mathcal{Q}_m relative à la partie $B'B_1B$ du contour (C_m) tend vers zéro lorsque m croît indéfiniment. Par conséquent, si l'on désigne par (I_m) la partie $BAA''A'B'$ du contour (C_m) , on aura:

$$V(x, y, z, t) = \lim_{m=\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{(I_m)} w(x, y, z, \xi) e^{-\xi t} d\xi \quad (24)$$

l'intégrale du second membre étant prise suivant le chemin (I_m) du point B' au point B .

Désignons par (I') une ligne qui ne se distingue de la ligne (I_m) qu'en ce que l'arc $A'A''A$ est remplacé par un autre arc de cercle de rayon quelconque R supérieur, comme R_m , à Q_0 et que ses extrémités P' et P , au lieu d'être symétriques par rapport à l'origine des coordonnées Ω sont placées, la première sur la partie négative de l'axe des β et la seconde sur la partie positive de cet axe à des distances du point Ω plus grandes que la longueur R mais d'ailleurs quelconques. Je dis que l'intégrale

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{(I')} w(x, y, z, \xi) e^{-\xi t} d\xi \quad (25)$$

prise suivant le chemin (I') du point P' au point P tend, lorsque les points P' et P s'éloignent indéfiniment, vers la limite vers laquelle tend l'intégrale qui se trouve au second membre de l'équation (24) lorsque m croît indéfiniment. Pour le prouver, il suffit évidemment d'établir ceci: soient Q_1 et Q_2 deux points placés sur l'axe des β d'un même côté du point Ω , la distance du point Q_2 au point Ω étant plus grande que celle du point Q_1 , l'intégrale

$$\int_{Q_1 Q_2} w e^{-\xi t} d\xi \quad (26)$$

tendra uniformément vers zéro quand on fera croître indéfiniment la longueur $Q_1 Q_2$ de quelque façon que varie en même temps la distance des points Q_1 et Q_2 . Pour nous assurer qu'il en est bien ainsi, désignons par Q_3 le troisième sommet du triangle, rectangle en Q_2 , ayant le segment $Q_1 Q_2$ pour un de ses côtés et situé, par rapport à l'axe des β , du côté des α positifs. Il est évident que l'intégrale (26) est égale à l'intégrale

$$(27) \quad \int_{(Q_1 Q_3 Q_2)} w e^{-t\xi} d\xi.$$

Or en faisant usage des inégalités dont nous avons eu à nous servir un peu plus haut, on prouvera aisément que l'intégrale (27) et par suite l'intégrale (26) jouissent de la propriété annoncée. Donc ce que nous voulions établir au sujet de l'intégrale (25) est démontré.

Si l'on convient de représenter la limite, vers laquelle tend une intégrale imaginaire prise suivant le chemin (I') du point P' au P , lorsque les points P' et P s'éloignent indéfiniment, en plaçant l'indice (I) au bas du signe d'intégration, on pourra exprimer le résultat des considérations qui viennent d'être développées au moyen de l'équation suivante:

$$(28) \quad V(x, y, z, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{(I)} w(x, y, z, \xi) e^{-t\xi} d\xi.$$

C'est l'expression de la fonction V que nous voulions établir.

§ 32. En vue des applications de la formule (28), il est indispensable de calculer l'intégrale définie suivante

$$(29) \quad \int_{(I)} e^{-r\xi - t\xi^2} d\xi$$

où l'on a représenté par r et t deux nombres positifs et par μ la fonction de ξ définie par l'équation (3) du chapitre II.

Désignons par P_1 un point situé sur la partie négative de l'axe des β à une distance de l'origine supérieure au rayon R de l'arc de cercle faisant partie de la ligne (I) , par P_2 le symétrique de P_1 par rapport à l'origine des coordonnées Ω et par (I') la partie de (I) limitée par les points P_1 et P_2 . Posons ensuite

$$\psi_1 = \int_{(I')} e^{-r\xi - t\xi^2} d\xi$$

l'intégration étant effectuée du point P_1 au point P_2 suivant le chemin (I') . Posons ensuite

$$\xi = \frac{\eta^2}{t}$$

$$m = \frac{r}{2\sqrt{t}}$$

en prenant la détermination positive du radical. Il viendra

$$\psi_1 = \frac{2}{t} \int_{-p+ip}^{+p+ip} e^{-\eta^2 + 2mi\eta} \eta d\eta$$

en désignant par p un nombre positif croissant indéfiniment lorsque les points P_1 et P_2 s'éloignent indéfiniment et en effectuant l'intégration suivant un chemin quelconque du point $(-p+ip)$ au point $(+p+ip)$. Posons enfin

$$\eta = mi + \zeta,$$

nous trouverons:

$$\psi_1 = \frac{2}{t} e^{-m^2} \int_{-p+i(p-m)}^{+p+i(p-m)} e^{-\zeta^2} (\zeta + mi) d\zeta.$$

On reconnaîtra sans peine que lorsque p croît indéfiniment, l'intégrale précédente tend vers la même limite que l'intégrale:

$$\frac{2}{t} e^{-m^2} \int_{-p}^{+p} e^{-\zeta^2} (\zeta + mi) d\zeta = \frac{2mi}{t} e^{-m^2} \int_{-p}^{+p} e^{-\zeta^2} d\zeta$$

et on trouvera finalement pour l'intégrale (29) qu'il s'agissait de calculer, la valeur suivante:

$$\int_{(I)} e^{-r\mu - t\zeta} d\zeta = \frac{ir\sqrt{\pi}}{t^{\frac{3}{2}}} e^{-\frac{r^2}{4t}}. \quad (30)$$

§ 33. Voici une remarque qui nous sera utile tout à l'heure: soit $\varphi(\xi)$ une fonction analytique de la variable complexe ξ définie pour toute valeur finie de ξ dont le module est supérieur à une limite déterminée ϱ_0 et dont l'argument θ satisfait aux inégalités

$$\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{3\pi}{2}. \quad (31)$$

Supposons que pour toutes ces valeurs de ξ , la fonction $\varphi(\xi)$ soit holomorphe et que le module du produit $\varphi(\xi) \xi^{p+1}$, où p représente un nombre positif différent de zéro, tende uniformément vers zéro lorsque le module de ξ croît indéfiniment, l'argument ne cessant de satisfaire aux inégalités (31). Dans ces conditions on aura:

$$(32) \quad \lim_{t=0} \int_{(I)} \varphi(\xi) e^{-t\xi} d\xi = 0$$

en désignant par t un nombre positif quelconque et en supposant, bien entendu, que le rayon R du demi-cercle formant la partie courbe de la ligne (I) soit supérieur à ϱ_0 .

Rien n'empêche évidemment de prendre

$$R = \frac{1}{t}.$$

En faisant cela, on s'assurera très aisément que la relation (32) a bien lieu.

§ 34. Pour simplifier le langage, j'introduis le terme de valeur moyenne d'une fonction $f(x, y, z)$ en un point $A(x_0, y_0, z_0)$ du domaine dans lequel elle est définie. Décrivons une sphère (Σ) de centre A et de rayon R assez petit pour qu'elle soit située tout entière dans le domaine, soit (D) , dans lequel la fonction $f(x, y, z)$ est définie. Désignons par $d\sigma$ un élément de surface de la sphère (Σ) et considérons l'expression

$$(33) \quad \frac{1}{4\pi R^2} \int_{(\Sigma)} f d\sigma$$

où l'intégrale doit être étendue à toute la surface de la sphère (Σ) . Supposons que l'expression (33) tende vers une limite déterminée lorsque R tend vers zéro. Je désignerai cette limite par le symbole $[f(x_0, y_0, z_0)]$ et je l'appellerai valeur moyenne de la fonction $f(x, y, z)$ au point (x_0, y_0, z_0) . Il est évident que, si la fonction $f(x, y, z)$ est continue au point (x_0, y_0, z_0) , sa valeur moyenne en ce point ne se distingue pas de sa valeur au même point, mais il est clair que la fonction $f(x, y, z)$ peut être discontinue au point (x_0, y_0, z_0) et avoir cependant, en ce point, une valeur moyenne parfaitement déterminée.

Passons à l'étude de la fonction $V(x, y, z, t)$, somme de la série (7). Si l'on porte la valeur (19) de la fonction $w(x, y, z, \xi)$ dans l'expression (28) de la fonction V et si l'on effectue un changement de l'ordre des intégrations, changement dont la légitimité est facile à établir, on trouve:

$$V(x, y, z, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{(D)} f(x', y', z') d\bar{t}' \int_{(\Gamma)} G(x, y, z, x', y', z', \xi) e^{-t\xi} d\xi. \quad (34)$$

Désignons par (D_δ) l'ensemble des points du domaine (D) , points tels que la distance de chacun d'eux à la frontière (S) du domaine (D) soit au moins égale à une certaine longueur δ , non nulle, mais que l'on pourra se fixer aussi petite que l'on voudra. En s'appuyant, d'une part sur la proposition exprimée par l'équation (32) et d'autre part sur la remarque faite au chapitre V au sujet de l'expression (18) du même chapitre, on reconnaîtra aisément que la différence

$$V(x, y, z, t) - \frac{1}{2\pi i} \int_{(D)} f(x', y', z') d\bar{t}' \int_{(\Gamma)} \frac{e^{-ur-t\xi}}{4\pi r} d\xi \quad (35)$$

où r représente la distance des points (x, y, z) et (x', y', z') , tend vers zéro lorsque t tend vers zéro en restant positif, et cela uniformément lorsque le point (x, y, z) ne sort pas du domaine (D_δ) .

En vertu de l'équation (30), la différence (35) peut être mise sous la forme suivante:

$$V(x, y, z, t) - \frac{1}{8\pi^{\frac{3}{2}} t^{\frac{3}{2}}} \int_{(D)} f(x', y', z') e^{-\frac{r^2}{4t}} d\bar{t}'. \quad (36)$$

Voici les conséquences que l'on tirera aisément du résultat auquel nous venons d'arriver:

1° Si la fonction $f(x, y, z)$ admet en un point (x_0, y_0, z_0) situé à l'intérieur du domaine (D) une valeur moyenne déterminée $[f(x_0, y_0, z_0)]$ on a

$$\lim_{t=0} V(x_0, y_0, z_0, t) = [f(x_0, y_0, z_0)] \quad (37)$$

2° Si la fonction $f(x, y, z)$ est continue dans une partie (D_1) du domaine (D) , partie de ce domaine qui, pour δ assez petit, puisse être considérée comme appartenant au domaine (D_δ) , la fonction $V(x, y, z, t)$ tendra, lorsque t tendra vers zéro en restant positif et à condition que le point (x, y, z) ne sorte pas du domaine (D_1) , uniformément vers $f(x, y, z)$.

§ 35. Supposons maintenant que la valeur absolue de la fonction $f(x, y, z)$ ait une limite supérieure finie F lorsque le point (x, y, z) varie dans le domaine (D) . Deux cas sont à distinguer suivant que h' est égal à zéro ou à l'unité.

Soit d'abord $h' = 0$. Il résulte des relations (17) et (19) du chapitre IV ainsi que des équations (28) et (32) de ce chapitre que l'expression:

$$(38) \quad V(x, y, z, t) - \frac{1}{2\pi i} \int_{(\Gamma)} \Phi e^{-t\xi} d\xi + \frac{1}{2\pi i} \int_{(\Gamma)} u_0 e^{-t\xi} d\xi$$

tendra vers zéro avec t et cela uniformément dans tout le domaine (D).

Le second terme de la différence (38) ne se distingue pas du second terme de l'expression (36); on a donc:

$$(39) \quad \frac{1}{2\pi i} \int_{(\Gamma)} \Phi e^{-t\xi} d\xi = \frac{1}{8\pi^{\frac{3}{2}} t^{\frac{3}{2}}} \int_{(D)} f(x', y', z') e^{-\frac{r^2}{4t}} d\bar{v}'.$$

Pour calculer le troisième terme de l'expression (38) désignons: par r la distance d'un point courant $P(x, y, z)$ à un point $P'(x', y', z')$ situé sur la surface (S), par r_1 la distance du point $P'(x', y', z')$ à l'élément de volume $d\bar{v}_1$ relatif à un point $P_1(x_1, y_1, z_1)$ et par γ l'angle formé par la direction $P'P_1$ avec la normale en P' à la surface (S), cette normale étant dirigée vers l'intérieur du domaine (D). Si l'on pose

$$(40) \quad \varphi(x, y, z, x', y', z') = \frac{-1}{16\pi^{\frac{5}{2}} t^{\frac{3}{2}} r} \int_{(D)} f(x_1, y_1, z_1) \cos \gamma \frac{\partial}{\partial r_1} \left[\frac{r+r_1}{r_1} e^{-\frac{(r+r_1)^2}{4t}} \right] d\bar{v}_1$$

on trouve facilement, à l'aide de l'équation (30), l'expression suivante pour la quantité cherchée:

$$(41) \quad \frac{1}{2\pi i} \int_{(\Gamma)} u_0 e^{-t\xi} d\xi = \int_{(S)} \varphi(x, y, z, x', y', z') ds'$$

en désignant par ds' l'élément de la surface (S) relatif au point (x', y', z') .

Avant de tirer des relations précédentes les conclusions auxquelles elles conduisent, établissons les relations analogues relatives au cas où l'on a $h' = 1$.

On conclut immédiatement des relations (36) et (39) du chapitre

IV, en s'appuyant sur le théorème exprimé par l'équation (32) de ce chapitre, que l'expression:

$$V(x, y, z, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{(\Gamma)} \psi e^{-t\xi} d\xi - \frac{1}{2\pi i} \int_{(\Gamma)} v_0 e^{-t\xi} d\xi \quad (42)$$

tend vers zéro lorsque t tend vers zéro en restant positif et cela uniformément dans tout le domaine (D).

On aperçoit immédiatement qu'il suffirait d'étendre l'intégration, dans le second membre des équations (39) et (40), à tout l'espace (E) au lieu de la limiter au domaine (D) pour que les premiers membres des équations (39) et (41) deviennent identiques au premier et au second termes de l'équation (42). Nous avons donc:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{(\Gamma)} \psi e^{-t\xi} d\xi = \frac{1}{8\pi^{\frac{3}{2}} t^{\frac{3}{2}}} \int_{(E)} f(x', y', z') e^{-\frac{r^2}{4t}} d\tilde{r}' \quad (43)$$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{(\Gamma)} v_0 e^{-t\xi} d\xi = \int_{(S)} \mathcal{Q}'(x, y, z, x', y', z') d\tilde{s}' \quad (44)$$

en posant:

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}'(x, y, z, x', y', z') &= \\ &= \frac{-1}{16\pi^{\frac{5}{2}} t^{\frac{3}{2}} r} \int_{(E)} f(x_1, y_1, z_1) \cos \gamma \frac{\partial}{\partial r_1} \left\{ \frac{r+r_1}{r_1} e^{-\frac{(r+r_1)^2}{4t}} \right\} d\tilde{r}_1. \end{aligned} \quad (45)$$

Désignons par I le premier membre de l'une quelconque des équations (39) ou (43). On trouve facilement

$$|I| < F \quad (46)$$

en désignant, comme précédemment, par F une limite supérieure de la valeur absolue de la fonction $f(x, y, z)$.

Soit $A(x, y, z, x', y', z')$ le premier membre de l'une des équations (40) ou (45). On trouve non moins aisément:

$$|A(x, y, z, x', y', z')| < \frac{F}{\pi^{\frac{3}{2}} \sqrt{t}} e^{-\frac{r^2}{4t}}$$

Par conséquent, si l'on désigne par $B(x, y, z)$ le premier membre de l'une des équations (41) ou (44), on aura:

$$(47) \quad |B(x, y, z)| < \frac{F}{\pi^{\frac{3}{2}}\sqrt{t}} \int_{(S)} \frac{e^{-\frac{r^2}{4t}}}{r} ds$$

en désignant par r la distance du point courant (x, y, z) à l'élément ds de la surface (S) . On prouvera aisément qu'il existe un nombre positif M dépendant uniquement de la nature de la surface (S) tel que l'on ait:

$$(48) \quad \frac{1}{\pi^{\frac{3}{2}}\sqrt{t}} \int_{(S)} \frac{e^{-\frac{r^2}{4t}}}{r} ds < M$$

pour toute valeur positive de t . On aura donc:

$$(49) \quad |B(x, y, z)| < M \cdot F.$$

Voici ce que l'on peut conclure des inégalités (46) et (49) en se reportant aux relations qui nous ont permis de prouver que celle des expressions (38) ou (42) qui correspond aux valeurs données des quantités h' et h tend uniformément vers zéro lorsque t tend vers zéro: à tout nombre positif T correspond un nombre positif $C(T)$ indépendant de la fonction $f(x, y, z)$, tel que l'inégalité:

$$(50) \quad 0 < t \leq T$$

entraîne l'inégalité

$$(51) \quad |V(x, y, z, t)| < C(T) F$$

quelle que soit la position du point (x, y, z) dans le domaine (D) ou sur sa frontière (S) . J'ajoute qu'il sera possible de remplacer $C(T)$ par un membre indépendant de T dans chacun des cas où l'on a $h' = 0$ ou $\frac{h}{h'} > 0$. C'est ce que l'on vérifiera aisément au

moyen de l'expression (7) de la fonction V et en remarquant que, dans les cas indiqués, aucun des nombres ξ_k ne peut être négatif.

§ 35. Abordons enfin le cas où la fonction $f(x, y, z)$ est continue dans le domaine (D) et sur la frontière (S) de ce domaine et supposons d'abord que l'on ait $h' = 1$.

Je dis que la fonction $\mathcal{V}(x, y, z, x', y', z')$ définie par l'équation (45) tend, dans l'hypothèse où nous nous plaçons maintenant, uniformément vers zéro lorsque t tend vers zéro en restant positif.

Je rappelle que, dans l'équation (45), la lettre r_1 représente la distance de l'élément de volume $d\tilde{t}_1$ à un point P' (x', y', z') situé sur la surface (S). Cela posé, considérons une sphère (Σ) de centre P' et de rayon r_1 et posons

$$\lambda(r_1) = \frac{1}{4\pi r_1^2} \int_{(\Sigma)} f(x_1, y_1, z_1) \cos \gamma d\sigma \quad (52)$$

en désignant par $d\sigma$ l'élément de surface de la sphère (Σ), relatif au point (x_1, y_1, z_1) . L'équation (45) donnera alors:

$$\begin{aligned} & \mathcal{Q}(x, y, z, x', y', z') = \\ & = \frac{-1}{4\pi^{\frac{3}{2}} t^{\frac{3}{2}} r} \int_0^{\infty} r_1^2 \lambda(r_1) \frac{\partial}{\partial r_1} \left\{ \frac{r+r_1}{r_1} e^{-\frac{(r+r_1)^2}{4t}} \right\} dr_1. \end{aligned} \quad (53)$$

La fonction $\lambda(r_1)$ est manifestement une fonction continue de r_1 ainsi que des coordonnées (x', y', z') du point P' de la surface (S) auquel elle se rapporte et l'on a

$$\lim_{r_1=0} \lambda(r_1) = 0.$$

Par conséquent, si l'on désigne par l une variable réelle et positive, il existera une fonction continue et positive $\varepsilon_1(l)$ de cette variable, s'annulant pour $l=0$ et telle que les inégalités

$$0 < r_1 < l$$

entraîne l'inégalité

$$|\lambda(r_1)| < \varepsilon_1(l)$$

quelle que soit la position du point P' sur la surface (S). En outre, quelle que soit la position de ce point sur la surface (S) et quelle que soit la valeur positive attribuée à r_1 , on aura évidemment:

$$|\lambda(r_1)| < F.$$

Posons

$$Q_1 = - \int_0^l r_1^2 \frac{\partial}{\partial r_1} \left\{ \frac{r+r_1}{r_1} e^{-\frac{(r+r_1)^2}{4t}} \right\} dr_1$$

$$Q_2 = - \int_0^{\infty} r_1^2 \frac{\partial}{\partial r_1} \left\{ \frac{r+r_1}{r_1} e^{-\frac{(r+r_1)^2}{4t}} \right\} dr_1.$$

A cause de ce qui vient d'être dit au sujet de la fonction $\lambda(r_1)$, nous aurons:

$$(54) \quad | \mathcal{L}(x, y, z, x' y' z') | < \frac{Q_1 \varepsilon_1(l) + Q_2 F}{4\pi^{\frac{3}{2}} t^{\frac{3}{2}} r}.$$

D'ailleurs

$$(55) \quad Q_1 < 4t e^{-\frac{r^2}{4t}}$$

et

$$Q_2 = \{4t + l(r+l)\} e^{-\frac{(l+r)^2}{4t}}$$

d'où

$$Q_2 < \{4t + l(r+l)\} e^{-\frac{l^2}{4t}} e^{-\frac{r^2}{4t}}.$$

Or la variable r ne peut dépasser le maximum L de la distance de deux points situés sur la surface (S) , par conséquent:

$$(56) \quad Q_2 < \{4t + l(L+l)\} e^{-\frac{l^2}{4t}} e^{-\frac{r^2}{4t}}.$$

Nous sommes libres de disposer du nombre l à notre convenance; faisons $l = \sqrt[4]{t}$. Il est aisé de voir qu'il résulte alors des inégalités (54), (55) et (56), que l'on a:

$$| \mathcal{L}(x, y, z, x' y' z') | < \frac{\varepsilon(t)}{\pi^{\frac{3}{2}} \sqrt[4]{t}} \frac{e^{-\frac{r^2}{4t}}}{r},$$

en désignant par $\varepsilon(t)$ une fonction de t tendant vers zéro lorsque la variable positive t tend vers zéro. A cause de cette inégalité, les relations (44) et (48) donnent:

$$(57) \quad \left| \frac{1}{4\pi i} \int_{(\Gamma)} v_0 e^{-t\xi} d\xi \right| < M \cdot \varepsilon(t)$$

inégalité qui prouve que le troisième terme de l'expression (42) tend, avec t , uniformément vers zéro dans tout le domaine (D) . D'autre part le second terme de la même expression tend, dans les mêmes con-

ditions, on le prouvera aisément, uniformément dans (D) vers $f(x, y, z)$ en outre, comme nous l'avons vu plus haut, toute l'expression (42) tend uniformément vers zéro lorsque t tend vers zéro en restant, bien entendu, positif. Nous arrivons par conséquent au théorème suivant: Lorsque la fonction $f(x, y, z)$ est continue dans tout le domaine (D) et sur sa frontière (S) et lorsque de plus $h' = 1$, la fonction $V(x, y, z, t)$, définie par la série (7), tend, lorsque t tend vers zéro en restant positif, vers $f(x, y, z)$ uniformément dans tout le domaine (D) .

Passons au cas où $h' = 0$. Si la fonction $f(x, y, z)$ ne s'annule pas sur la surface (S) , le théorème précédent ne peut s'étendre au cas actuel; cela est évident parce que, lorsque $h' = 0$, la fonction $V(x, y, z, t)$ est constamment nulle sur la surface (S) .

Par conséquent, dans le cas où $h' = 0$ et où la fonction $f(x, y, z)$ ne s'annule pas sur la surface (S) , il n'y a rien à ajouter à ce qui résulte déjà des faits établis dans les deux §§ précédents.

Supposons donc que la fonction $f(x, y, z)$ s'annule sur la surface (S) . Dans ce cas on peut, sans rompre la continuité de la fonction $f(x, y, z)$ la prolonger au-delà du domaine (D) dans tout l'espace, en convenant de lui attribuer la valeur zéro dans tous les points de l'espace situés à l'extérieur du domaine (D) . La fonction $f(x, y, z)$ étant prolongée de cette façon, les intégrales (39) et (41) coïncideront, la première avec l'intégrale (43) et la seconde avec l'intégrale (44). Par conséquent, dans l'hypothèse où nous nous sommes placés, voici ce qui arrive lorsque t tend vers zéro en restant positif: le troisième terme de l'expression (38) tend uniformément vers zéro et le second vers $f(x, y, z)$. D'ailleurs, l'expression (38) toute entière tend uniformément vers zéro. Nous avons donc le théorème suivant: lorsque la fonction $f(x, y, z)$, continue dans tout le domaine (D) , s'annule en outre sur la surface (S) , la fonction $V(x, y, z, t)$ définie par l'équation (7) et relative au cas où $h' = 0$, tend, lorsque t tend vers zéro, vers $f(x, y, z)$ et cela uniformément dans tout le domaine (D) .

§ 37. Résumons les résultats acquis dans ce chapitre. Le problème posé en tête de ce chapitre doit être considéré comme une forme plus générale du Problème de Fourier réduit. Ce problème admet toujours une solution et il n'en admet qu'une. Nous avons obtenu deux expressions différentes de la solution unique $V(x, y, z, t)$ du problème considéré: l'expression (7) et l'expression (28). En de-

hors des propriétés qui caractérisent la fonction $V(x, y, z, t)$, solution du problème en question, cette fonction jouit des propriétés suivantes:

1^o Si l'on désigne par (x_0, y_0, z_0) un point situé à l'intérieur du domaine (D) et par t_0 un nombre positif quelconque différent de zéro, la fonction V est (§ 29), dans le voisinage du système de valeurs (x_0, y_0, z_0, t_0) des variables dont elle dépend, une fonction analytique holomorphe de ces variables.

2^o Lorsqu'en un point (x_0, y_0, z_0) , situé à l'intérieur du domaine (D) , la fonction $f(x, y, z)$ admet (§ 34) une valeur moyenne déterminée $[f(x_0, y_0, z_0)]$, l'expression $V(x_0, y_0, z_0, t)$ a, lorsque t tend vers zéro en restant positif, la quantité $[f(x_0, y_0, z_0)]$ pour limite.

3^o Supposons que dans chaque point du domaine (D_δ) , intérieur au domaine (D) et tel que les distances des points du domaine (D_δ) à la surface (S) , frontière du domaine (D) , aient une limite inférieure δ différente de zéro, la fonction $f(x, y, z)$ soit continue. Dans ce cas (§ 34), dans le domaine (D_δ) , la fonction $V(x, y, z, t)$ tend uniformément vers $f(x, y, z)$ lorsque t tend vers zéro en restant positif.

4^o Lorsque la valeur absolue de la fonction $f(x, y, z)$ définie dans le domaine (D) , a une limite supérieure finie F , il correspond (§ 35) à tout nombre positif T , un nombre positif $C(T)$, fonction du nombre T seul, tel que l'inégalité

$$0 < t \leq T$$

entraîne l'inégalité

$$|V(x, y, z, t)| < C(T) F$$

quelle que soit la position du point (x, y, z) à l'intérieur du domaine (D) ou sur la frontière (S) de ce domaine. En outre, lorsque $h' = 0$ ou lorsque l'on a à la fois $h' = 1$ et $h > 0$, le nombre $C(T)$ a une limite supérieure finie indépendante de T .

5^o Supposons que la fonction $f(x, y, z)$ soit continue dans tout le domaine (D) ainsi que sur la frontière (S) de ce domaine. Supposons en outre que, dans le cas particulier où $h' = 0$, la fonction $f(x, y, z)$ s'annule sur la surface (S) . Dans ces conditions (§ 36) la fonction $V(x, y, z, t)$ tend, uniformément dans tout le domaine (D) , vers $f(x, y, z)$ lorsque t tend vers zéro en restant positif.

On voit que le Problème de Fourier réduit, tel que nous l'avons énoncé dans l'Introduction, ne peut admettre qu'une solution unique,

laquelle, quand elle existe, se confond avec la fonction $V(x, y, z, t)$. Pour que le problème de Fourier réduit admette une solution, il suffit que la fonction $f(x, y, z)$, définie dans le domaine (D) , admette, pour sa valeur absolue, une limite supérieure finie et que cette fonction, sans avoir forcément des valeurs périphériques constituant une fonction continue, soit continue en chaque point situé à l'intérieur du domaine (D) . Ces conditions de possibilité du Problème de Fourier réduit sont non seulement suffisantes mais aussi nécessaires. En effet, si la fonction $f(x, y, z)$ n'était pas continue en chaque point situé à l'intérieur du domaine (D) , la fonction continue $V(x, y, z, t)$ ne pourrait pas, dans les conditions précisées dans l'énoncé du problème, tendre uniformément vers $f(x, y, z)$. D'autre part, la fonction $f(x, y, z)$ étant continue en chaque point situé à l'intérieur du domaine (D) , si sa valeur absolue n'avait pas une limite supérieure finie, si par conséquent, lorsque le point (x, y, z) tend vers un point situé sur la surface (S) , la valeur absolue de la fonction $f(x, y, z)$ pouvait croître indéfiniment, la fonction $V(x, y, z, t)$, solution du Problème de Fourier réduit, ne pourrait pas, comme l'exigerait l'énoncé, avoir, pour sa valeur absolue, une limite supérieure indépendante des variables x, y, z , lorsque t ne sort pas d'un intervalle de la forme $(0, T)$ où T représente un nombre positif.

X. Réduction du Problème de Fourier à sa forme réduite.

§ 38. Reportons-nous à l'énoncé du Problème de Fourier tel qu'on le trouve au début de l'Introduction. Pour le ramener à la forme réduite, je supposerai que les dérivées

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t}, \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \quad \text{et} \quad \frac{\partial^3 \varphi}{\partial t^3}$$

existent et j'admettrai que ces dérivées ainsi que la fonction φ elle-même sont des fonctions continues de la variable non négative t et des coordonnées du point de la surface (S) dont elles dépendent. Désignons par φ_0 un nombre positif et considérons une fonction $u(x, y, z, t)$ vérifiant l'équation

$$\Delta u - \varphi_0 u = 0$$

à l'intérieur du domaine (D) et satisfaisant à la condition aux limites:

$$h' \frac{du}{dN} = hu + \varphi.$$

Si, comme je vais l'admettre, le nombre q_0 est assez grand, la fonction u existera, nous saurons la calculer (chapitre II) et elle sera parfaitement déterminée (chapitre III). Désignons, comme dans l'Introduction, par $V(x, y, z, t)$ une solution du Problème de Fourier, en admettant provisoirement qu'elle existe, et posons:

$$V = V_1 + u.$$

Le problème de la détermination de la fonction V_1 se distinguera du Problème de Fourier réduit en cela seul qu'au lieu de satisfaire à l'équation

$$\Delta V_1 = \frac{\partial V_1}{\partial t}$$

à l'intérieur du domaine (D), la fonction V_1 satisfera, à l'intérieur de ce domaine à l'équation suivante:

$$\Delta V_1 = \frac{\partial V_1}{\partial t} + F(x, y, z, t)$$

en posant

$$(1) \quad F(x, y, z, t) = -q_0 u + \frac{\partial u}{\partial t}.$$

Supposons provisoirement qu'il existe une fonction $W(x, y, z, t)$ jouissant des propriétés suivantes:

1° Pour toute valeur positive de t , cette fonction est continue dans tout le domaine (D) et sur sa frontière (S), et elle satisfait à l'équation

$$(2) \quad \Delta W = \frac{\partial W}{\partial t} + F(x, y, z, t)$$

à l'intérieur du domaine (D).

2° Pour toute valeur positive de t , on a

$$(3) \quad h' \frac{dW}{dN} = h W$$

sur toute la surface (S).

3° Lorsque t tend vers zéro en restant positif, la fonction $W(x, y, z, t)$ tend uniformément vers une fonction des variables x, y, z , continue dans tout le domaine (D) et sur sa frontière (S), mais d'ailleurs quelconque.

Si la fonction W existait, on pourrait poser

$$V_1 = V_2 + W$$

et la détermination de la fonction V_2 dépendrait du Problème de Fourier réduit.

Nous arrivons donc à la conclusion suivante: il suffirait de trouver pour la fonction W une expression satisfaisant aux conditions énoncées ci-dessus pour avoir le droit d'affirmer que la réduction du Problème de Fourier à la forme réduite est effectuée.

On verra au § suivant qu'il est aisé de présenter une expression de la fonction W vérifiant toutes les conditions voulues.

§ 39. Pour plus de généralité nous allons faire abstraction de l'expression (1) de la fonction $F(x, y, z, t)$ et, au lieu de supposer qu'elle jouisse de toutes les propriétés que lui assure cette expression, nous nous bornerons à admettre que:

1° La fonction $F(x, y, z, t)$ elle-même ainsi que les dérivées

$$\frac{\partial F}{\partial t} \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 F}{\partial t^2} \quad (4)$$

sont des fonctions continues des variables x, y, z, t à l'intérieur du domaine (D) et sur sa frontière (S) pour toutes les valeurs non négatives de t .

2° Les dérivées

$$\frac{\partial F}{\partial x}, \quad \frac{\partial F}{\partial y} \quad \text{et} \quad \frac{\partial F}{\partial z} \quad (5)$$

existent et sont continues en chaque point situé à l'intérieur du domaine (D) et pour toute valeur non négative de t .

Considérons les fonctions harmoniques $U_1, U_2, U_3 \dots$ dont l'existence a été établie au chapitre IV et posons:

$$\psi_k(\eta) = \int_{(D)} F(x, y, z, \eta) U_k(x, y, z) d\bar{i} \quad (6)$$

en désignant, comme nous l'avons fait constamment, par $d\bar{i}$ l'élément de volume relatif au point (x, y, z) .

Nous aurons:

$$\left. \begin{aligned} \psi'_k(\eta) &= \frac{d\psi_k}{d\eta} = \int_{(D)} \frac{\partial F}{\partial \eta} U_k d\bar{i} \\ \psi''_k(\eta) &= \frac{d^2\psi_k}{d\eta^2} = \int_{(D)} \frac{\partial^2 F}{\partial \eta^2} U_k d\bar{i} \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Envisageons maintenant la fonction de Green généralisée $G(x, y, z, x', y', z', \xi)$ relative aux valeurs données de h' et h et, en désignant par a un nombre positif assez grand pour que, pour $\xi = -a$, la fonction G n'offre pas de singularité, posons

$$(8) \quad \begin{cases} F_1(x, y, z, t) = \int_{(D)} F(x', y', z', t) G(x, y, z, x', y', z', -a) d\bar{t}' \\ F_2(x, y, z, t) = \int_{(D)} F_1(x', y', z', t) G(x, y, z, x', y', z', -a) d\bar{t}' \end{cases}$$

Ensuite, considérons la fonction $V(x, y, z, t)$ définie par l'équation (7) du chapitre précédent. Changeons dans l'expression de cette fonction t en λ et désignons par $\Phi(x, y, z, \lambda, \eta)$ ce qu'elle devient en y posant:

$$(9) \quad f(x, y, z) = \frac{\partial^2 F(x, y, z, \eta)}{\partial \eta^2} - 2a \frac{\partial F(x, y, z, \eta)}{\partial \eta} + a^2 F(x, y, z, \eta).$$

Il viendra:

$$(10) \quad \begin{aligned} & \Phi(x, y, z, \lambda, \eta) = \\ & = \sum_{k=1}^{\infty} \{ \psi''_k(\eta) - 2a \psi'_k(\eta) + a^2 \psi_k(\eta) \} U_k(x, y, z, \eta) e^{-\xi_k \lambda} \end{aligned}$$

Il résulte des propriétés de la série (7) du chapitre précédent que, si l'on se borne à considérer, comme nous allons le faire, les valeurs réelles de λ , la fonction Φ ne pourra être regardée comme définie par l'équation (10) que pour les valeurs positives et non nulles de λ . Convenons de prendre pour valeur de l'expression $\Phi(x, y, z, 0, \eta)$ la valeur (9) de la fonction $f(x, y, z)$. Les théorèmes résumés au dernier § du chapitre précédent nous permettront alors d'affirmer ceci: lorsqu'aucune des variables λ et η ne sort d'un intervalle de la forme $(0, T)$ où T représente un nombre positif quelconque, la valeur absolue de la fonction Φ aura une limite supérieure finie et elle sera continue pour toutes ces valeurs des variables λ et η et pour toutes les positions du point (x, y, z) dans le domaine (D) ou sur sa frontière (S) en exceptant toutefois les systèmes de valeurs où les deux circonstances suivantes se présenteraient à la fois: le paramètre λ est nul et le point (x, y, z) se trouve sur la surface (S) ; dans ce cas la fonction Φ sans cesser d'être limitée et d'être continue par rapport aux variables x, y, z, η ne serait plus continue en général, par rapport à λ .

Ces remarques faites, posons:

$$Q(x, y, z, \lambda, \eta) = \int_{(D)} \Phi(x', y', z', \lambda, \eta) G(x, y, z, x', y', z', -a) d\bar{t}, \quad (11)$$

ce qui donne

$$Q(x, y, z, \lambda, \eta) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\psi''_k(\eta) - 2a\psi'_k(\eta) + a^2\psi_k(\eta)}{a + \xi_k} U_k e^{-\xi_k \lambda} \quad (12)$$

et envisageons la fonction $K(x, y, z, t)$ définie par l'équation suivante:

$$K(x, y, z, t) = -F(x, y, z, t) + \frac{\partial F_1(x, y, z, t)}{\partial t} - aF_1(x, y, z, t) \quad (13)$$

$$- \int_0^t Q(x, y, z, t - \eta, \eta) d\eta$$

où F_1 représente la fonction définie par la première des équations (8). Je dis que, pour la fonction demandée $W(x, y, z, t)$, on peut adopter l'expression suivante:

$$W(x, y, z, t) = \int_{(D)} K(x', y', z', t) G(x, y, z, x', y', z', -a) d\bar{t}'. \quad (14)$$

Pour le démontrer, j'observe d'abord ceci: il résulte des remarques faites au sujet de la fonction Φ que la fonction $Q(x, y, z, \lambda, \eta)$ sera une fonction continue des cinq variables dont elle dépend pour toute position du point (x, y, z) à l'intérieur du domaine (D) ou sur sa frontière et pour tout système de valeurs non négatives des paramètres λ et η ; en outre pour tout système de valeurs non négatives des paramètres λ et η et pour toute position du point (x, y, z) à l'intérieur du domaine (D) , les dérivées

$$\frac{\partial Q}{\partial x'}, \quad \frac{\partial Q}{\partial y} \quad \text{et} \quad \frac{\partial Q}{\partial z}$$

existeront et seront continues. Il résulte de ces remarques, de l'équation (13) et de la première des équations (8) que, pour toute valeur non négative de t la fonction $K(x, y, z, t)$ sera, quelle que soit la position du point (x, y, z) dans le domaine (D) ou sur sa frontière (S) , une fonction continue des quatre variables dont elle dépend et que les dérivées

$$\frac{\partial K}{\partial x'}, \quad \frac{\partial K}{\partial y} \quad \text{et} \quad \frac{\partial K}{\partial z}$$

existeront et seront continues pour toute valeur non négative de t et pour toute position du point (x, y, z) à l'intérieur du domaine (D) .

Cela posé, voici ce qui résulte de l'équation (14): la fonction $W(x, y, z, t)$ est continue pour toutes les valeurs non négatives de t et pour toutes les positions du point (x, y, z) dans le domaine (D) ou sur sa frontière (S) , à l'intérieur de ce domaine elle vérifie l'équation:

$$(15) \quad \Delta W = a W - K(x, y, z, t)$$

et elle satisfait sur la surface (S) à la condition:

$$(16) \quad h' \frac{dW}{dN} = h W.$$

Assurons-nous maintenant de l'existence et de la continuité de la dérivée

$$\frac{\partial W}{\partial t}$$

Observons à cet effet que les équations (14), (13), (12) et (8) donnent:

$$(17) \quad W(x, y, z, t) = -F_1(x, y, z, t) + \frac{\partial F_2(x, y, z, t)}{\partial t} - a F_2(x, y, z, t) - \int_0^t B(x, y, z, t - \eta, \eta) d\eta$$

en posant

$$(18) \quad B(x, y, z, \lambda, \eta) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\psi''_k(\eta) - 2a\psi'_k(\eta) + a^2\psi_k(\eta)}{(\xi_k + a)^2} U_k e^{-\xi_k \lambda}$$

Or il est aisé de conclure des théorie développées aux chapitres VIII et IX ceci:

1° On a:

$$(19) \quad \frac{\partial B}{\partial \lambda} = - \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k \frac{\psi''_k(\eta) - 2a\psi'_k(\eta) + a^2\psi_k(\eta)}{(\xi_k + a)^2} U_k e^{-\xi_k \lambda}$$

la série du second membre étant absolument et uniformément convergente lorsque le point (x, y, z) se déplace d'une façon quelconque dans le domaine (D) et lorsque la paramètre λ prend des valeurs réelles quelconques non négatives.

2° On a:

$$B(x, y, z, 0, t) = \frac{\partial^2 F_2}{\partial t^2} - 2a \frac{\partial F_2}{\partial t} + a^2 F_2. \quad (20)$$

Par conséquent la dérivée $\frac{\partial W}{\partial t}$ jouit des propriétés voulues et l'on a:

$$\begin{aligned} \frac{\partial W}{\partial t} = & -\frac{\partial F_1}{\partial t} + \frac{\partial^2 F_2}{\partial t^2} - a \frac{\partial F_2}{\partial t} - B(x, y, z, 0, t) \\ & - \int_0^t \frac{\partial}{\partial t} B(x, y, z, t - \eta, \eta) d\eta \end{aligned}$$

ou, à cause de (20):

$$\frac{\partial W}{\partial t} = -\frac{\partial F_1}{\partial t} + a \frac{\partial F_2}{\partial t} - a^2 F_2 - \int_0^t \frac{\partial}{\partial t} B(x, y, z, t - \eta, \eta) d\eta.$$

Cette équation et l'équation (17) donnent:

$$\begin{aligned} \frac{\partial W}{\partial t} = & a W + a F_1 - \frac{\partial F_1}{\partial t} - \\ & - \int_0^t \left\{ \frac{\partial}{\partial t} B(x, y, z, t - \eta, \eta) - a B(x, y, z, t - \eta, \eta) \right\} d\eta. \end{aligned} \quad (21)$$

Remarquons maintenant que l'on a identiquement:

$$\frac{\partial B(x, y, z, \lambda, \eta)}{\partial \lambda} - a B(x, y, z, \lambda, \eta) + Q(x, y, z, \lambda) = 0,$$

en vertu des équations (12), (18) et (10). A cause de cette identité, les équations (13) et (21) donnent:

$$\frac{\partial W}{\partial t} = a W - K - F(x, y, z, t)$$

et il résulte de la comparaison de cette équation avec l'équation (15) que la fonction W vérifie l'équation suivante:

$$\Delta W = \frac{\partial W}{\partial i} + F(x, y, z, t)$$

dans tout le domaine (D) et pour toute valeur positive de t . Ce résultat achève de prouver que l'expression (14) de la fonction W jouit bien des propriétés annoncées. Donc la réduction du Problème de Fourier à la forme réduite est effectuée.

XI. Table des matières.

	pages
I. Introduction	69
II. Définition de certaines notations. Théorie des potentiels généralisés .	74
III. Théorèmes généraux relatifs à l'équation aux dérivées partielles $\Delta u + \xi u = 0$	86
IV. Etude de la fonction w	97
V. La fonction de Green généralisée	106
VI. Existence des fonctions harmoniques dans le cas général et applica- tion à ces fonctions des théorèmes de M. Stekloff	116
VII. Application des fonctions harmoniques à l'étude de la fonction de Green généralisée	128
VIII. Applications diverses des théories précédentes	133
IX. Solution du Problème de Fourier réduit	140
X. Réduction du Problème de Fourier à sa forme réduite	161
XI. Table des matières	168

7. MM. S. NIEMENTOWSKI m. c. et M. SEIFERT. Nowe dwuchinolyle.
(*Neue Dichinolyle*). (*Bichinolyles nouveaux*).

Aus 2,2'-Diamino-diphenyl und der homologen Verbindung, dem 4,4'-Bimethyl-2,2'-diaminodiphenyl wurden neue Dichinolyle dargestellt durch Anwendung der Skraup'schen Reaktion in der von Chr. A. Kneuppel¹⁾ vorgeschlagenen Modifikation.

8,8'-Dichinolyl



bildet glänzende Blättchen, auch sechsseitige Tafeln vom Schmelzpunkt 205—207°. Praktisch unlöslich in Wasser, Benzin und Äther löslich in heißem Alkohol, Aceton, Benzol, Tetrachlorkohlenstoff; sehr leicht löslich in Chloroform. Sehr widerstandsfähig gegen Einwirkung chemischer Agentien.

Chlorhydrat $C_{18}H_{12}N_2 \cdot 2HCl$. Mattweiße, konzentrisch verwach-

¹⁾ Chr. A. Kneuppel B. d. chem. Ges. 29. 703. (1896). D. R. P. No. 87,334.

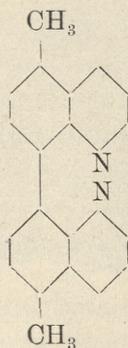
sene Kryställchen. Bromhydrat $C_{18}H_{12}N_2 \cdot 2HBr$ und Jodhydrat $C_{18}H_{12}N_2 \cdot 2HI$ wurden anstatt erwarteter Ammoniumbasen bei der Einwirkung von Jodmethyl resp. Äthylenbromid im Rohr erhalten. Nitrat $C_{18}H_{12}N_2 \cdot 2HNO_2$, mikroskopische Täfelchen.

Sulphat $C_{18}H_{12}N_2 \cdot H_2SO_4 + 1aq$; weiße Kryställchen.

Chloraurat $C_{18}H_{12}N_2 \cdot 2HAuCl_4$, goldgelbe Nadeln.

Platinsalz $C_{18}H_{12}N_2 \cdot H_2PtCl_6$, braungelber Niederschlag.

5,5'-Dimethyl-8,8'-dichinolyl



gelbliche, baumartig verwachsene Nadeln und Blättchen vom Schmelzpunkt 215° . In organischen Solventien leicht löslich, in Wasser und Äther unlöslich.

Chlorhydrat $C_{20}H_{16}N_2 \cdot 2HCl$, mikroskopische weiße Nadeln.

Nitrat $C_{20}H_{16}N_2 \cdot 2HNO_3$, gelbe Spissen.

Lwów, Januar 1905. Laboratorium für allgem. Chemie der Technischen Hochschule.

8. MM. L. BYKOWSKI et J. NUSBAUM m. c. *Dalsze przyczynki do morfologii ryby pasożytniczej kostnoszkieletowej Fierasfer Cuv. (Weitere Beiträge zur Morphologie des parasitischen Knochenfisches Fierasfer Cuv.). (Contributions à la morphologie du téléostéen parasite Fierasfer Cuv. — Suite).*

II. Zur Kenntnis der Körperdecke und der Hautsinnesorgane.

Über den histologischen Bau der Körperdecke finden wir in der Monographie Emery's äußerst wenig. Er beschreibt die Epidermis als mehrschichtig und aus gewöhnlichen Epithelzellen und großen Schleimzellen bestehend (vergl. Fig. 59. in der erwähnten Monographie), die Cutis als eine bindegewebige Schicht. Es ist inter-

essant, daß die Haut sehr durchsichtig ist (bei jungen Exemplaren ist überhaupt der ganze Körper in gewissem Grade durchsichtig). In der tiefen Schicht der Cutis befinden sich Gruppen von Pigmentzellen, deren Verteilung und Farbe von Emery genau beschrieben worden sind.

Bei einer jugendlichen Form von *Fierasfer dentatus* besteht das Hautepithel (Fig. 1.) aus folgenden Elementen: in der Tiefe tritt

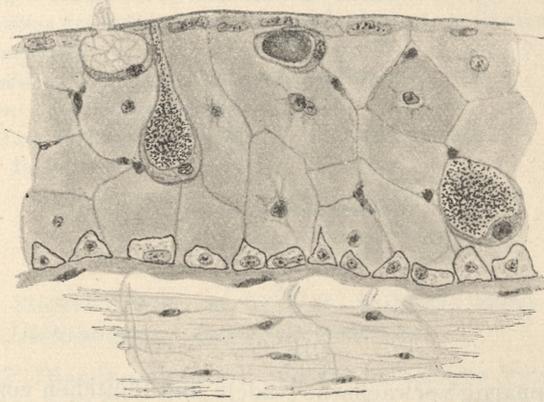


Fig. 1.

eine Schicht Zellen hervor, die sehr scharf konturiert, kubisch, pyramidenförmig, oder von ganz unregelmäßiger Form sind, weit von einander abstehen, rundliche oder ovale Kerne und feinkörniges, helles Plasma enthalten; diese Zellen sitzen mit etwas verbreiteter Basis der membrana basilaris direkt an. Nach außen von dieser Zellschicht finden wir 2–4 Schichten großer, polygonaler Zellen mit verhältnismäßig kleinen, rundlichen, oder ovalen Kernen und mit ganz homogenem und sehr hellem Plasma, welches die Durchsichtigkeit der Epidermis bedingt. Der Kern ist von einer dünnen Schicht eines mehr körnigen Plasmas umgeben, welches Fortsätze in das umgebende homogene Plasma entsendet. Zwischen diesen Zellen liegen äußerst kleine, spindelförmige oder schwach verästelte Zellen, arm an körnigem Plasma und mit länglichem Kerne versehen. Diese Zellen tingieren sich intensiver als die umgebenden Epithelzellen, liegen in engen Spalten zwischen diesen letzteren und erinnern durch ihren ganzen Habitus noch an Bindegewebelemente, die wahrscheinlich zwischen diese Zellen eingedrungen sind.

Ob sie vielleicht in situ aus Epithelzellen selbst in jüngeren Stadien hervorgegangen sind, wie es z. B. T. Kodis für die Wanderzellen im Epithel des Froschlarvenschwanzes (Arch. Anat. Phys. phys. Abt. 1889.) angenommen hat, oder ob sie nur stark modifizierte, gepreßte Epithelzellen selbst darstellen, können wir nicht entscheiden. Ganz oberflächlich liegt eine Schicht abgeplatteter Epithelzellen mit feinkörnigem Plasma und verlängerten Kernen, von einer feinen, dünnen, homogenen Cuticula überzogen. Man kann folgende Typen von Drüsenzellen in diesem Epithel unterscheiden: 1) tief liegende, geschlossene, mehr oder weniger ovale, sackförmige Drüsenzellen, deren Sekret fein granuliert erscheint, wobei die Granula sich bei Haematoxylin-Eosin-Färbung sehr stark rot, bei der Biondi-Heidenhain'schen Dreifärbetinktion dunkel-rot, bei Mucinkarmin-Färbung intensiv rot, bei der Eisenhaematoxylinfärbung tief schwarz tingieren; 2) Zellen von demselben sekretorischen Charakter, aber von kolbenförmiger Gestalt, die sich mit einem langen Halse nach außen öffnen; in den Zellen beider Arten liegt der Kern an der Basis; 3) rundliche, nahe der Oberfläche liegende Zellen, mit einem ganz hellen, mehr oder weniger homogenen Sekretinhalte, welcher durch eine ansehnliche Öffnung nach außen ausfließt, und sich bei der Eosin-Haematoxylinfärbung und bei der Anwendung der Biondi-Heidenhain'schen Dreifärbemischung bläulich, bei der Färbung mit Mucin-Karmin rot tingiert; 4) rundliche oder ovale, geschlossene Zellen, die ganz oberflächlich liegen und einen zähen, homogenen Inhalt besitzen, der sich sehr intensiv rot mit Eosin-Haematoxylin und rötlich bei Mucinkarminfärbung tingiert.

Was die großen, hellen, homogenen Epithelzellen anbelangt, so halte ich dieselben für Schleimzellen in untätigem Zustande. Wenn es wirklich Schleimzellen wären, so könnte man sagen, daß die Epidermis des jugendlichen Fierasfers aus zwei Schichten gewöhnlicher Epithelzellen besteht, einer basalen und oberflächlichen und aus dazwischen liegenden 2—4 Schichten Drüsenzellen. Übergangsstadien von den erwähnten, großen, hellen, polygonalen Zellen zu den tätigen Schleimzellen habe ich jedoch nicht gesehen.

An der Bauchseite des Rumpfes, in der Mittellinie, von der hinteren Grenze des Kopfes bis zum Anfange der Analflosse verläuft bei der jugendlichen Form von *Fierasfer dentatus* eine starke Hautfalte, in welcher die Epidermis einen eigentümlichen Bau aufweist; sie besteht nämlich aus einer basalen Schicht von hohen,

etwa kolbenförmigen, oben verbreiteten, und kernhaltigen, unten sehr verengten und der membrana basilaris aufsitzenden Zellen, wobei hier diese Membran an Querschnitten sehr gefaltet erscheint. Die hellen, homogenen, großen Zellen bilden hier größtenteils nur eine einzige Lage, sind sehr hoch und zylinderförmig. Die oberflächliche, aus abgeplatteten Zellen bestehende Epithelschicht zeigt hier die gleichen Verhältnisse, wie an anderen Körperstellen; tätige Drüsenzellen habe ich in dieser Falte niemals gesehen.

Die Lederhaut besteht bei der jugendlichen Form von *F. dentatus* aus einer ganz homogenen Basilmembran, die direkt unter der Epidermis liegt und mit dicht von unten ihr anliegenden, länglichen Kernen versehen ist. Unter dieser Membran finden wir eine Schicht von lockerem, fibrillärem Bindegewebe, welches viele, stark verlängerte, spindelförmige Zellen enthält; die Bindegewebsfasern verlaufen größtenteils in zirkulärer (querer) Richtung, parallel zur Körperoberfläche; hier und da findet man auch kleine Bündel von vertikal verlaufenden Fasern.

Bei ganz ausgewachsenen Exemplaren von *Fierasfer*, und zwar *F. acus*, verändern sich die Verhältnisse im Bau der Hautdecke folgendermaßen. Die Epidermis besteht aus mehreren (4—6) Schichten polygonaler Zellen, wobei eine basale und eine periphere Schicht nicht mehr zur distinkten Differenzierung gelangen; hier und da tritt eine oberflächliche Schicht etwas abgeplatteter Zellen deutlicher hervor. Die großen, hellen, homogenen Zellen bilden nicht mehrere Schichten, sondern liegen nur in einer, stellenweise in zwei Schichten. Auch hier sind die interstitiellen, kleinen, spindelförmigen Zellen zwischen den Epithelzellen, besonders aber zwischen den großen Schleimzellen entwickelt, indem sie gewissermaßen ein Stützgerüst des Epithels bilden.

Unter den Drüsenzellen finden wir dieselben Formen, welche auch bei jugendlichen Exemplaren hervortreten. Bei ausgewachsenen Individuen ist die membrana basilaris nicht entwickelt, die bindegewebige Schicht der Lederhaut ist viel stärker und grobfaseriger geworden und enthält auch elastische Elemente, welche hauptsächlich in dem hellen Bindegewebe, das die Seitenkanäle beiderseits umgibt, entwickelt sind. Längs des Seitenkanals dringt bei einem ausgewachsenen *F. acus* (an Querschnitten) die Cutis tief keilförmig zwischen die Muskeln hinein, und enthält eine Art Schuppe, die in der Mitte stark vertieft ist und aus einer hyali-

nen, strukturlosen Substanz besteht, der spärliche, plasmaarme Zellen dicht anliegen; sie bildet eine Stütze für das Sinnesorgan. Ein Teil des Cutisgewebes ist zu beiden Seiten des Seitenkanals besonders modifiziert und stellt am Querschnitte zwei keilförmige, helle Streifen dar, die lateralwärts vom gewöhnlichen Bindegewebe, von innen durch die erwähnte Schuppe begrenzt sind. In den Intervallen zwischen den Sinnesorganen sind keine Schuppen vorhanden; die beiden hellen Streifen verlaufen aber ununterbrochen längs der ganzen Seitenlinie. Die erwähnten Streifen, welche Emery richtig abgebildet, aber deren Bau nicht näher beschrieben hat, bestehen aus sehr zartem, hellem Bindegewebe, welches eine ganz durchsichtige Interzellulärsubstanz, sehr spärliche, collagene Fasern enthält und mit vielen Zellen versehen ist, welche spindelförmig sind und sich beiderseits in äußerst lange, quer durch den ganzen Streifen verlaufende Fasern verlängern. Emery hat sie richtig abgebildet. Außer diesen Elementen enthalten noch die Streifen viele, zarte, elastische Fasern, die größtenteils parallel zur Körperoberfläche quer durch den Streifen zwischen den genannten Zellen verlaufen und sich ein wenig verästeln; eine kleine Anzahl von elastischen Fasern verläuft auch in der Cutis außerhalb der Seitenlinie, die aber um so schwächer hervortreten, je mehr sie sich von dieser entfernen. Diese elastischen Elemente färben sich sehr intensiv mit der Weigert'schen Fuchsin-Resocin-Methode.

Was den Verlauf des Seitenlinienkanals und der akzessorischen Schleimkanäle beim Fierasfer anbetrifft, so kann ich die Beobachtungen Emery's vollkommen bestätigen; was aber die Anordnung der Sinnesorgane (Sinneshügel) derselben anbelangt, so kann sich in mancher Hinsicht die Beschreibung meines Vorgängers vervollständigen. Und zwar ist bei einem jugendlichen *F. acus* von 7—8 cm Länge (Fig. 2.) die Verteilung dieser Sinnesorgane folgend. Die letzteren sind hier sehr regulär segmental angeordnet. Wenn wir namentlich ein Stück Haut von der seitlichen Wand des kolossalen Schwanzabschnittes des Körpers abtragen und so die Muskelsegmente abtrennen, daß die Grenzen zwischen denselben übrig bleiben, und wenn wir dann die Haut mit Eisenhaematoxylin sich färben lassen, so treten uns die Sinnesorgane als stark tingierte Gebilde auf der Haut sehr deutlich hervor. Wir finden eine Reihe von streng segmental angeordneten Sinnesorganen der Seitenlinie selbst, dann eine Reihe oberhalb und eine unterhalb derselben ebenfalls streng segmental, je eine Reihe

nahe am dorsalen und ventralen Rande des Körpers, gleichfalls in segmentaler Anordnung; endlich eine akzessorische Reihe kleiner Sinnesorgane unterhalb der dorsalen und oberhalb der ventralen Reihe und zwar regulär segmental und intersegmental angeordnet. Außerdem findet man hie und da kleine Sinnesorgane zwischen beiden zuletzt erwähnten, akzessorischen Reihen und der Seitenlinie, welche jedoch nicht streng segmental angeordnet sind und nicht regulär hervortreten; in manchen Segmenten fehlen sie voll-

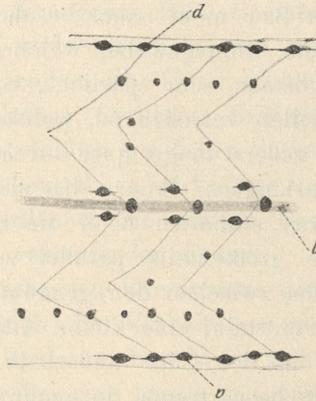


Fig. 2.

ständig. Nun kann man schon bei Exemplaren von diesem Alter bemerken, daß die der Seitenlinie naheliegenden Sinnesorgane sich in der Längsrichtung teilen. Bei stärkeren Vergrößerungen findet man nämlich, daß die Elemente eines jeden dieser Sinnesorgane sich so verteilen, daß eine Hälfte in der Richtung nach dem Vorderende des Körpers, die andere gegen das Hinterende desselben sich gruppiert, und endlich zerfällt das Sinnesorgan in zwei kleinere Organe, die noch eine gewisse Zeit miteinander zusammenhängen, endlich aber sich voneinander trennen, indem sich jedes in einen zarten Streifen verlängert, d. h. in ein zartes, epitheliales Kanälchen übergeht. Diese Kanälchen wurden schon von Emery beschrieben. Infolge der erwähnten Teilungen bilden sich also oberhalb und unterhalb der Hauptreihe der Sinnesorgane, d. h. derjenigen der Seitenlinie zwei Reihen von Sinnesorganen und zwar zu je 4 zwischen je zwei benachbarten Sinnesorganen der Seitenlinie, oberhalb und unterhalb dieser letzteren. Die dorsalen bilden eine ununterbrochene, d. h. ver-

mittelst der erwähnten Kanälchen verbundene Reihe, die ventralen dagegen hängen nicht zusammen. Die in der Nähe des dorsalen Körperandes liegende larvale Reihe der Sinnesorgane verschwindet dann ohne Spur, die nahe am ventralen Rande verlaufende bleibt dagegen sichtbar; von den akzessorischen Reihen verschwinden die intersegmentalen, und es bleiben nur die segmentalen bestehen, indem sie sich verschieben, sich der Seitenlinie nähern und ihre Richtung ändern, wobei zu bemerken ist, daß die gegenseitige Lage und die Richtung der mit diesen Sinnesorganen verbundenen Kanälchen gewissen individuellen Variationen unterliegen. Die Öffnungen des Seitenlinienkanals sind bei *F. acus* streng segmental angeordnet und zwar in der Nähe der Sinnesorgane, längs des ventralen Randes des Kanals; wo die Öffnungen sich befinden, ist der Kanal etwas breiter, als an anderen Stellen.

Die Anordnung der Sinnesorgane bei dem ausgewachsenen *F. dentatus* konnte ich infolge fehlenden Materials nicht beobachten. Bei der jugendlichen, mit einem Schwanzfaden versehenen Form (220 mm. Länge) erwies sich die Anordnung der Sinnesorgane ganz anders, als bei der jugendlichen Form des *F. acus*, und zwar ist hier die Anzahl der Sinnesorgane eine viel spärlichere. Es existiert hier in dem kolossalen Schwanzabschnitte des Körpers die Hauptreihe der Sinnesorgane, die in der Seitenlinie liegen, namentlich je zwei (wahrscheinlich infolge einer Längsteilung je eines einzigen, primitiven) in jedem Segmente und außerdem nur ventralwärts von der Seitenlinie streng segmental angeordneten zwei Reihen: eine obere mit den in dorsoventraler Richtung angeordneten Epithelkanälchen und eine untere mit den horizontal verlaufenden Epithelkanälchen. Dazu kommt noch eine, sehr nahe dem ventralen Körperande verlaufende Längsreihe von Sinnesorganen, die segmental und intersegmental liegen.

Ich habe näher den Bau der Hauptsinnesorgane, d. h. derjenigen, die in dem Seitenlinienkanale liegen, untersucht, ich kann aber Emery's Beobachtung bestätigen, daß die akzessorischen Sinnesorgane im allgemeinen einen ähnlichen Bau aufweisen und nur aus einer kleineren Anzahl von Zellelementen bestehen.

Emery unterscheidet in dem Sinnesorgane folgende Elemente: die „sensitiven Elemente“, kleine Zellen, deren jede sich distal in ein „filamento rigido, o pelo di senso“ verlängert; zwischen diesen Elementen befinden sich „Stützzellen“ (cellule di sostegno); diese

beiden Zellenarten bilden den Zentralteil des Organes; peripher von diesen Zellen finden sich die zahlreichen „cellule parietali“. Nervenendigungen beschreibt Emery nicht. Leydig (Neue Beitr. z. Anat. d. Hautdecke u. Hautsinnesorgane der Fische, 1879.) hat bekanntlich bei verschiedenen anderen Fischen die Beschaffenheit der Endigungsweise der Nervenfasern in den betreffenden Organen beschrieben, wobei es ihm am wahrscheinlichsten schien, daß „im Endnetze der Nervenfasern die birnförmigen Zellen (welche von Fr. E. Schulze beschrieben worden sind) mit einem feinen Ausläufer wurzeln“. Diese birnförmigen Zellen entsprechen den „sensitiven Elementen“ Emery's. Bunker (Struct. of the Sensory Organ of the lat. Line of *Ameiurus nebulosus*. Anat. Anz. Bd. 13.) unterscheidet in den Sinnesorganen der Seitenlinie von *Ameiurus*: Stützzellen, die ihre Ausläufer zwischen die Sinneszellen entsenden, birnförmige Sinneszellen, mit einem Stäbchen am freien Ende, das in das Kanalallumen hineinragt; die Nervenfasern bilden einen Korb an der Basis der Sinneszellen, und von da dringen Fibrillen zwischen die Zellen des Organes. T. T. Cunningham (A treatise on the common Sole et cet. Plymouth, 1890.) beschreibt in den Sinnesorganen der Seitenlinie bei *Solea vulgaris* nur eine Zellensorte, deren Kerne in drei verschiedenen Höhen angeordnet sind und er meint, daß alle diese Zellen mit den Nervenfasern zusammenhängen. Es gibt also in dieser Hinsicht noch wichtige streitige Punkte. Nach meinen Untersuchungen sind die betreffenden Sinnesorgane bei *F. acus* folgendermaßen gebaut. In der zentralen vertieften Stelle des Organes gibt es drei Zellenarten: Stützzellen, bipolare, birnförmige Zellen und Basalzellen. 1) Die ersten stellen sehr hohe, zylindrische Elemente dar, die gewöhnlich mit etwas verbreiteter Basis der Basalmembran des Organs aufsitzen. Die in der Mitte stehenden Zellen sind gerade gestreckt, die mehr peripherischen knieförmig gebogen, wie es Fig. 3. zeigt. Die Kerne sind oval oder etwa stäbchenförmig und liegen zwar in verschiedener Höhe, aber ziemlich der Mitte nahe. In den knieförmig gebogenen Zellen liegen sie gewöhnlich an der Umbiegungsstelle; sie sind chromatinreich und manche färben sich mit Eisenhaematoxylin besonders intensiv. Distalwärts verdünnt sich der Zellkörper, so daß er in manchen Zellen stäbchenförmig erscheint. Mit Eisenhaematoxylin färbt sich sehr stark das distale, freie Ende der stäbchenartigen Abteilung der Zelle, so daß es in Gestalt eines

kurzen, zylindrischen Anhanges erscheint mit einem zarten, nach außen gerichteten, parallel zur freien Oberfläche des Organes verlaufenden Häutchen versehen, so daß die Zellenden bei starken Vergrößerungen wie kleine, in verkehrter Richtung stehende Zylinderhüte erscheinen; in der Mitte des Anhanges bleibt ein heller Streifen übrig, vielleicht als Ausdruck eines zarten Kanälchens, das den Anhang durchsetzt. 2) Zwischen diesen Zellen finden sich bipolare, birnförmige Zellen, die distalwärts in einen zarten nervenfaserähnlichen Fortsatz übergehen, welcher etwas geschlängelt verläuft und zwischen den erwähnten hutähnlichen Anhängen der Stützzellen endet; zentral geht die Zelle in einen kurzen, gewöhnlich etwas dickeren Fortsatz über, der oft bis zur Basalmembran reicht, niemals aber dieselbe durchbricht. Diese Zellen besitzen große, rundlich-ovale Kerne mit je einem Kernkörperchen und haben einen ganz anderen Habitus, als diejenigen der Stützzellen. Sie sind sehr plasmaarm; die Kerne sind nur von einer äußerst dünnen Schicht Plasma umgeben, welches am distalen Pol etwas mehr angehäuft ist. Sie liegen in verschiedenen Höhen, manche sehr nahe der Basalmembran, andere in der Mitte der Höhe, weshalb die distalen, nervenfaserähnlichen Fortsätze verschiedene Länge erreichen. 3) Ganz tief zwischen den Basalteilen der Stützzellen liegen niedrigere, helle Zellen von unregelmäßig-zylindrischer oder keilförmiger Gestalt mit großem, rundem Kerne, einem Kernkörperchen und mit Chromatinkörnchen, die größtenteils nahe der Peripherie angeordnet sind. Es sind sehr wahrscheinlich nur etwas modifizierte Stützzellen.

Peripher von allen diesen Zellen, die die zentrale Vertiefung des Organes einnehmen, sind sehr zahlreiche „parietale“ (Emery) Zellen vorhanden, von zylindrischer Gestalt mit ovalen Kernen in verschiedener Höhe; in vielen dieser Zellen ist am distalen Ende eine hellere Stelle, etwa eine seichte mit einer hellen, cuticulären Substanz ausgefüllte Einsenkung bemerkbar.

Im engen Zusammenhange mit der zentralen Vertiefung des Sinnesorganes ist die „Cupula terminalis“ entwickelt. Ich habe niemals ein so stark entwickeltes kuppelförmiges Gebilde gesehen, wie es z. B. Emery in seiner Fig. 54. abgebildet hat. An meinen Präparaten stellte sich die Cupula in Gestalt einer aus sehr schwach sich färbender Substanz bestehenden Verdickung dar, die aus einer Anzahl feiner, paralleler, zusammengeklebter Lamellen aufgebaut, von ebenfalls feinen, fadenförmigen Gebilden in vertikaler Rich-

tung durchdrungen ist. Die Anzahl dieser Gebilde entspricht derjenigen der Stützzellen, die mit hutförmigen Anhängen versehen sind, so daß ohne Zweifel diese Fäden als cuticuläre Bildungen dieser Zellen entstehen, wobei es mir sehr wahrscheinlich erscheint, daß die erwähnten, kanalförmigen, hellen Streifen in diesen Anhängen eben mit der Ausscheidung dieser Fäden im Zusammenhange stehen. Die zusammengeklebten Lamellen sind ebenfalls cuticuläre Produkte der Stützzellen und vielleicht auch eines Teiles der naheliegenden Parietalzellen, womit das Vorhandensein der erwähnten seichten Einsenkungen an distalen Enden dieser Zellen verknüpft sein mag. Emery beschreibt diese Cupula als „una serie di lamelle molli sovrapposte l'una all'altra, trasversate dei pali, in modo che le estremità di questi non sporgano libere, ma si fermano alla superficie del ultima lamella“. Ich habe in vielen Fällen dasselbe beobachtet, in manchen Fällen aber traten diese fadenförmigen „pali“ ganz frei hervor (wie es die Fig. 3. zeigt). Ich stimme vollkommen Leydig bei (Integument und Hautsinnesorgane der Knochenfische. Zool. Jahrb. v. Spengel 8. B., 1895.), daß die Cupulae terminales in den „Schleimkanälen“ denjenigen cuticulären, hyalinen Röhren zu vergleichen sind, welche Fr. E. Schulze an den frei stehenden Hautsinnesorganen beschrieben hat, womit auch Solger (Seitenorgane der Fische, 1878. und Neue Unters. zur Anat. der Seitenorgane. Arch. f. Anat. 1880.) übereinstimmt. Emery betrachtet die Cupula als ein cuticuläres Produkt der Stützzellen und der Parietalzellen. Fr. E. Schulze ist der Ansicht, daß die Cupula von den die sensiblen Elemente umgebenden Zellen ausgeschieden wird. Für ganz unbegründet halte ich die Ansicht Cunningham's (l. c.), nach welcher die Cupula kein cuticuläres Produkt der Zellen des Sinnesorganes, sondern ein Produkt des Schleimes des Kanals selbst darstellen soll.

Es soll endlich die schwierige Frage der Nervenendigungen in dem Sinnesorgane erörtert werden.

Außer den beschriebenen Zellelementen im vertieften Teile des Sinnesorganes habe ich feine Nervenfibrillen gesehen (Fig. 3.), die ganz frei zwischen den Stütz- und birnförmigen Zellen endigen, wobei keine Verbindung mit irgendwelchen Zellen des Organes zu finden ist. Ich halte deshalb die „Sinneszellen“, oder die birnförmigen Zellen, obwohl ihr äußerer Fortsatz fein und nervenähnlich ist, nicht für nervöse Elemente, sondern gleichfalls für eine

Art von Stützzellen, da ich niemals den Übergang des basalen Fortsatzes in eine die Basalmembran durchbrechende Nervenfasern gesehen habe. Als Nervelemente (Sinneszellen) hat dieselben Fr. E. Schulze (1870) angesehen, indem er den Zusammenhang der Nervenfasern mit den „haartragenden Zellen“ nachgewiesen zu haben glaubte. Auf dem Anatomenkongresse in Wien 1892. teilte

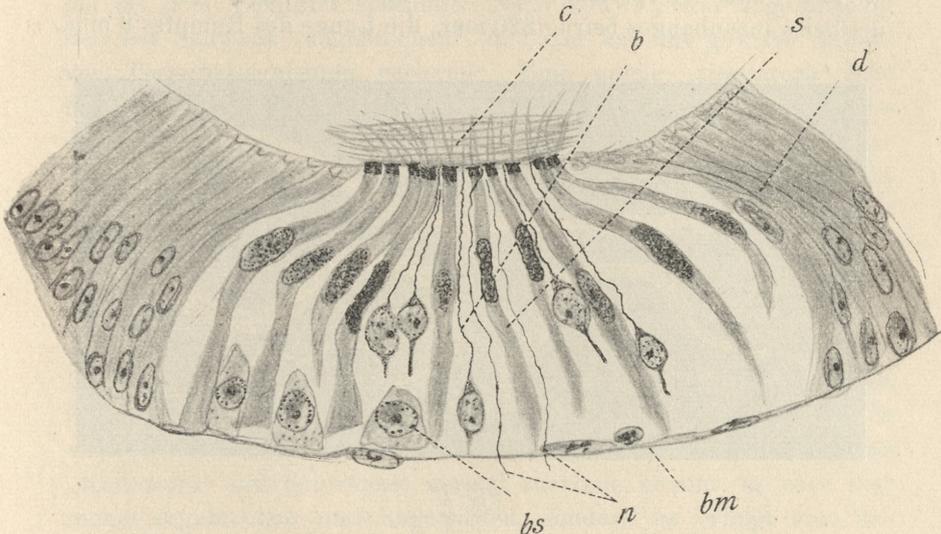


Fig. 2.

Zimmermann in der Diskussion mit (Ergänz. H. d. Anat. Anz. 1892), daß er gerade in den Seitenorganen des *F. acus* keinen Zusammenhang der „Sinneszellen“ mit den Nervenfasern entdecken konnte, und Retzius (Biolog. Unters. N. Folge, 1892) hat freie Nervenendigungen in den Nervenbügeln mancher Fische beobachtet und die Abwesenheit eines Zusammenhanges der „Sinneszellen“ mit den Nervenfasern nachgewiesen. Unsere Beobachtungen stimmen also in dieser Hinsicht vollkommen mit denjenigen von Zimmermann und Retzius überein.

III. Die larvalen Anhänge und deren Involution.

Ich beginne mit der Larve von *F. dentatus*, welche bekanntlich sehr selten ist. Ich war im Besitze von zwei Exemplaren aus der Sammlung von Prof. Grassi (in Formalin) und eines mir von Dr. Leo Bianco in Neapel überlassenen Exemplares, welches ich in

Sublimat mit Spuren von Essigsäure konserviert und in eine große Schnittserie zerlegt habe; alle drei Exemplare waren ungefähr von demselben Alter und mit einem Schwanzfaden versehen. Emery besaß 2 Exemplare dieser Larve, und wie es scheint, von nicht sehr differentem Alter, als die meinigen. Ich gebe zuerst die Längenverhältnisse des in Schnitte zerlegten Exemplares an: die ganze Körperlänge von der Mundöffnung bis zum Ende des Schwanzanhanges betrug 220 mm., die Länge des Rumpfes 9 mm.,

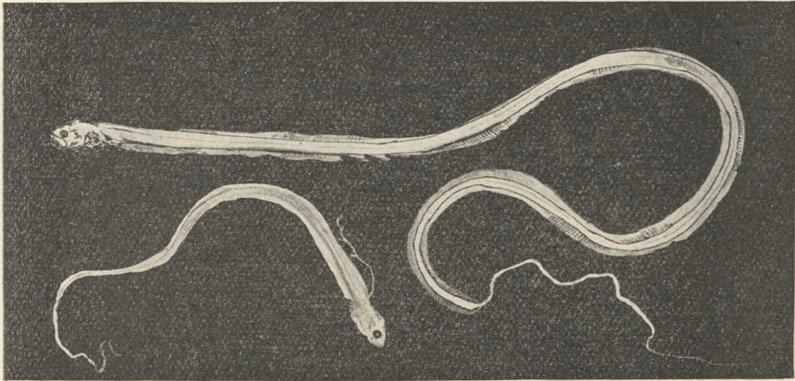


Fig. 4.

des Kopfes bis zum Ende des Operculums 5,5 mm., des Schwanzanhanges 36,5 mm. Die Höhe des Körpers am Niveau der Brustflossenbasis betrug 3,7 mm. Die Emery'schen Exemplare waren 145 mm. und 203 mm. lang. Bei allen drei Exemplaren war die Dorsalflosse weniger entwickelt, als die Analflosse, welche direkt hinter dem Anus beginnt; beide Flossen verdünnen sich gegen das Caudalende des Körpers und gehen in einen sehr schmalen Saum über. Bei meinen Exemplaren ging der Schwanz hinterwärts in einen dünnen Anhang über und zwar, wie es Fig. 4. (rechts) zeigt, verdünnt sich der Schwanz ohne Übergänge momentan in ein fadenförmiges Gebilde, in welchem wieder zwei Abschnitte zu unterscheiden sind, ein größerer, vorderer, viel dickerer, und ein hinterer, der etwa $\frac{1}{4}$ der ganzen Länge des fadenförmigen Gebildes ausmacht und äußerst zart ist. Wir haben in diesen zwei Abschnitten zwei Etappen der Schwanzinvolution, wie es unten gezeigt werden soll.

Es ist nun merkwürdig, daß nach der Beschreibung Emery's ein solches Caudalfilament bei der Larve nicht vorhanden ist, während er auf der Taf. I, Fig. 4. ein solches, äußerst feines, obgleich undeutlich dargestelltes Filament abgebildet hat. Emery sagt über die von ihm untersuchten jugendlichen Formen von *F. dentatus*: „la coda non terminava con un filamento“, wie es im Gegenteil bei dem Vexillifer stattfindet. Nach Emery war augenscheinlich der Schwanz „abgebrochen“, d. i. „er hat eine gewisse Anzahl von Terminalsegmenten verloren“. Eine solche „troncatura“ hält Emery für eine normale Erscheinung in der Entwicklungsgeschichte dieses Fisches. Er ist der Ansicht, daß bei der Larve wahrscheinlich ein Teil des Schwanzes, welcher die Wirbelsäule, die Muskeln und die Vertikalflosse enthält, verloren geht und dann aus dieser letzteren eine einfache, falsche Caudalflosse entsteht. Emery ist der Ansicht, daß wahrscheinlich nicht nur beim *F. dentatus* ein Teil des Schwanzes verloren geht, denn Bleeker beschrieb eine neue Art *Fierasfer lumbricoides*, welche sehr der Larve von *F. dentatus* ähnlich ist und über welche er sich äußert: „es fehlt ein Teil des Schwanzes, was also als normal bei dieser Species angesehen werden darf“. Ich bin jedoch der Ansicht, daß niemals eine solche „troncatura“ des Schwanzes normal zustande kommt; es wird hier nichts abgebrochen und abgeworfen, sondern es erfolgt eine Resorption eines Schwanzabschnittes unter besonderer Mitwirkung von Blutgefäßen und Leukocyten, und ich kann es mit desto größerer Bestimmtheit behaupten, als ich ähnliche Verhältnisse auch bei *F. acus* beobachtet habe und zwar an einem viel umfangreicheren Material. Bei den Exemplaren aber mit angeblich „abgebrochenem“ Schwanz war wahrscheinlich der letztere wirklich abgebrochen, jedoch nur zufälligerweise, vielleicht infolge einer Verletzung beim Fange des Tieres, denn das Filament ist äußerst zart und leicht verletzbar.

Um die Involution eines Teiles des Schwanzes kennen zu lernen, werfen wir zuerst einen Blick auf manche anatomische Verhältnisse in dem hintersten Rumpfabschnitte der betreffenden Larve von *F. dentatus* hinter der Analöffnung.

Es ist zuerst sehr interessant, daß die Leibeshöhle von einer besonderen, zähen, mit Eosin sich stark rot tingierenden, homogenen, lymphoiden Masse angefüllt ist, welche zahlreiche, kleine Leukocyten und ebenso kleine, spindelförmige Zellen enthält. Im

vorderen und mittleren Abschnitte des Rumpfes befindet sich dieses Gewebe in der Umgebung der Kopfnieren und der von denselben nach hinten sich ziehenden Wolff'schen Kanäle; dieses Gewebe ist hier reich an lymphoiden Elementen und dringt dorsalwärts zwischen die Chorda und die lateralen Muskelmassen hinein, füllt den Wirbelkanal und den dorsalen, intermuskularen Lymphraum aus. Nach unten geht dieses Gewebe in den perivesicalen, d. h. zwischen der äußeren Wand der Schwimmblase und den lateralen Muskelsegmenten sich befindenden Lymphraum über und ist von dem diaphragmaartig, horizontal verlaufenden Peritonealplatte abgegrenzt, so daß es nicht in den den Darm, die Leber und die Geschlechtsorgane enthaltenden Leibeshöhlenabschnitt übergeht.

Im hintersten Rumpfabschnitte füllt dieses Gewebe vollkommen die ganze Leibeshöhle aus. Es befindet sich zwischen den Muskelsegmenten und den in der Leibeshöhle liegenden inneren Organen, zwischen dem Rückenmarke und der Wand des Wirbelkanals, wie auch in den Lymphräumen an der Basis der Dorsal- und Anal-flosse (vergl. Fig. 5.). Es ist nun sehr interessant, daß in diesem hintersten Abschnitte des Rumpfes ein nicht unwesentlicher Teil der Schwimmblase zugrunde geht. Im hinteren Rumpfabschnitte befindet sich bekanntlich im Zusammenhange mit den Wolff'schen Kanälen die aus vielen tubulis bestehende und viele Malpighi'sche Körperchen enthaltende Hinterniere (Emery), wobei weiter nach hinten die beiden Wolff'schen Kanäle sich in einen ansehnlichen, breiten dünnwandigen Kanal vereinigen, der das blinde Ende der Schwimmblase von hinten umgibt, nach der Ventralseite derselben sich umbiegt und in den weit nach vorne sich ziehenden Urether übergeht, der in eine große dünnwandige Harnblase mündet. (Emery nimmt an, daß beim ausgewachsenen *F. dentatus* keine Harnblase existiert; bei der Larve ist sie sicher vorhanden). Es unterliegt nun ein ansehnlicher Abschnitt der Schwimmblase, welcher von der Hinterniere und dem Anfangsteile des Urethers umgeben ist, einer vollständigen Involution.

Die Schwimmblasenwand besteht bei der Larve aus drei Schichten: 1) einer äußeren bindegewebigen, in welcher noch keine Differenzierung in die sekundären Lagen stattgefunden hat, 2) einer mittleren, hellen, sehr lockeren gefäßführenden Bindegewebsschicht und 3) einer inneren Schicht des stark abgeplatteten Epithels. Es unterliegen nun alle diese Schichten der Blasenwand (in dem er-

wählten hinteren Abschnitte) einer starken Lockerung, so daß die Grenzen zwischen denselben unkenntlich werden, wobei zahlreiche Zellen ganz frei werden. An Querschnitten (Fig. 5.) sieht man hier ganze Gruppen von Zellen, welche teilweise noch im Zusammenhange mit der Schwimmblasenwand (v. n.) sind, teilweise frei werden und in das lymphoide Gewebe der Leibeshöhle aus-

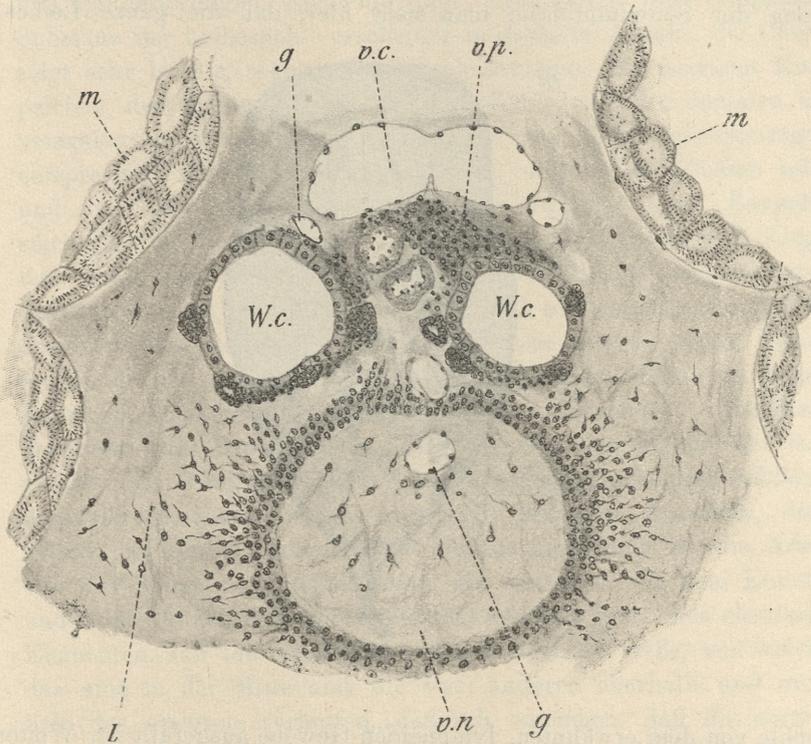


Fig. 5.

wandern, indem sie die Zahl der zelligen Bindegewebelemente und der Leukocyten dieses Gewebes bedeutend bereichern. Indem die Wand eines Teiles der Schwimmblase der erwähnten Lockerung und Involution unterliegt und zwar in der Richtung von hinten nach vorn, dringen auch Gefäße samt einem Teile des lymphoiden Gewebes durch die stellenweise hier schon ganz gelockerte Wand der Schwimmblase in das Lumen derselben hinein, so daß, wenn später die ganze Wand in dieser Gegend zugrunde

geht, an der Stelle des hintersten Schwimmblasenabschnittes nur das lymphoide Gewebe mit zahlreichen Leukocyten und Bindegewebszellen und mit Gefäßverästelungen übrig bleibt. Das Eindringen der Gefäße und des erwähnten Gewebes ist in Fig. 5. und 6. zu sehen.

Fig. 6. zeigt einen Querschnitt durch den Rumpf der Larve von *F. dentatus* am Niveau der hinteren, zugrunde gehenden Abteilung der Schwimmblase; man sieht hier, daß die ganze Leibeshöhle von dem erwähnten, lymphoiden Gewebe ausgefüllt ist. Weiter nach hinten sieht man an Querschnitten, daß die Muskeln zwei Paare von symmetrisch gelegenen Massen bilden: eine obere und eine untere, und die Leibeshöhle, mit lymphoidem Gewebe ausgefüllt, im Querschnitte eine etwa rhombische Gestalt zeigt. Die Chorda bildet einen kontinuierlichen Strang, der am Querschnitte etwas vierkantig erscheint und segmentale Einschnürungen zeigt, wie es die Längsschnitte beweisen; sie ist von einer Chordascheide und von einer dünnen, homogenen, skelettogenen Schicht umgeben, der die oberen Bogen entspringen. Weiter nach hinten lassen sich folgende Veränderungen in dem Schwanz beobachten. Die saum-

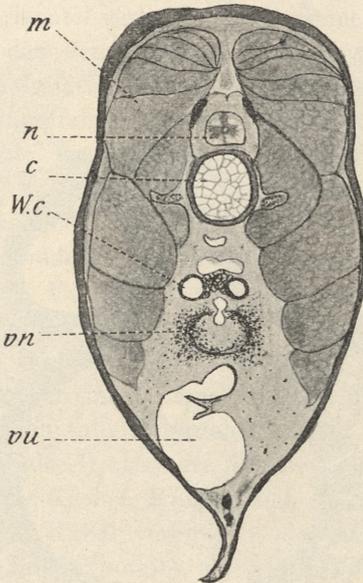


Fig. 6.

höhle von dem erwähnten, lymphoiden Gewebe ausgefüllt ist. Weiter nach hinten sieht man an Querschnitten, daß die Muskeln zwei Paare von symmetrisch gelegenen Massen bilden: eine obere und eine untere, und die Leibeshöhle, mit lymphoidem Gewebe ausgefüllt, im Querschnitte eine etwa rhombische Gestalt zeigt. Die Chorda bildet einen kontinuierlichen Strang, der am Querschnitte etwas vierkantig erscheint und segmentale Einschnürungen zeigt, wie es die Längsschnitte beweisen; sie ist von einer Chordascheide und von einer dünnen, homogenen, skelettogenen Schicht umgeben, der die oberen Bogen entspringen. Weiter nach hinten lassen sich folgende Veränderungen in dem Schwanz beobachten. Die saum-

förmigen Verlängerungen der dorsalen und der ventralen Flosse verschwinden, der Schwanz wird deshalb viel niedriger, aber auch dünner, so daß er zuerst als ein dicker, fadenförmiger Anhang erscheint und weiter nach hinten in einen äußerst feinen Endfaden übergeht, wie es aus Fig. 4. links zu ersehen ist. In dem dickeren, fadenförmigen Schwanzabschnitte werden die Muskelmassen in der Richtung nach hinten immer schwächer entwickelt, die spindelförmigen Elemente und Leukocyten der lymphoiden Substanz der Leibeshöhle erscheinen in größerer Anzahl, die Chorda zeigt sehr leichte, segmentale Einschnürungen, die paarigen Knorpelchen der oberen Bogen der Wirbelsäule und die dorsalen und ventralen unpaarigen Knorpelchen, die den Flossenstrahlenträgern entsprechen, sind hier noch vorhanden, obwohl die Flossen selbst und sogar die Flossensäume schon verschwunden sind. Besonders stark sind in dieser Gegend die Spinalganglien entwickelt. Gegen das Ende des dickeren, fadenförmigen Schwanzabschnittes endet das Rückenmark mit einem konischen, sich nach hinten zu zuspitzenden Terminalabschnitte, von welchem noch einige, immer dünner werdende und aus spindelförmigen, bipolaren Zellen mit langen faserigen Ausläufern bestehende Filamente ausgehen — die letzten Rudimente des Bauchmarkes. An Stelle der Hauptgefäße: der aorta und der vena caudalis erscheinen jetzt am Querschnitte drei Gefäße von ungefähr gleichem Lumen und ganz gleichem Aussehen, deren Wände so ähnlich gebaut sind, daß es unmöglich ist, die Arterie von der Vene zu unterscheiden; alle bestehen aus dem Endothel und einer dünnen Bindegewebsschicht mit sehr spärlichen elastischen Elementen. Ich bin der Ansicht, daß diese drei Gefäße, von welchen das eine in der Mitte und die zwei anderen oberhalb und unterhalb des ersteren verlaufen, dadurch entstehen, daß die aorta in einen oberen und einen unteren Ast sich teilt, während die Caudalvene ungeteilt bleibt, was ich jedoch infolge des Mangels einiger Übergangspräparate, die unglücklicherweise zugrunde gegangen sind, nicht mit voller Bestimmtheit behaupten kann.

In dem terminalen, dünnen, fadenförmigen Schwanzabschnitte lassen sich folgende, wichtige Veränderungen beobachten. Das Hautepithel unterliegt einer reichen Vacuolisation; und zwar in der tiefen Schicht des Epithels liegen lockere Gruppen von größeren unveränderten Epithelzellen, in den mittleren Schichten dagegen sind ansehnliche Vacuolen in den Zellen vorhanden, so daß

das Plasma samt Kern nach einen Winkel der Zelle zurückgedrängt erscheint. Gegen die Oberfläche folgt wieder eine Schicht wenig veränderter, kubischer Zellen (vergl. Fig. 7.). Die reiche Vacuolisierung der mittleren Zellschichten und die lockere Gruppenanordnung der basalen Zellen, besonders aber die keilförmige Gestalt vieler von diesen letzteren, welche auf einen Austritt derselben

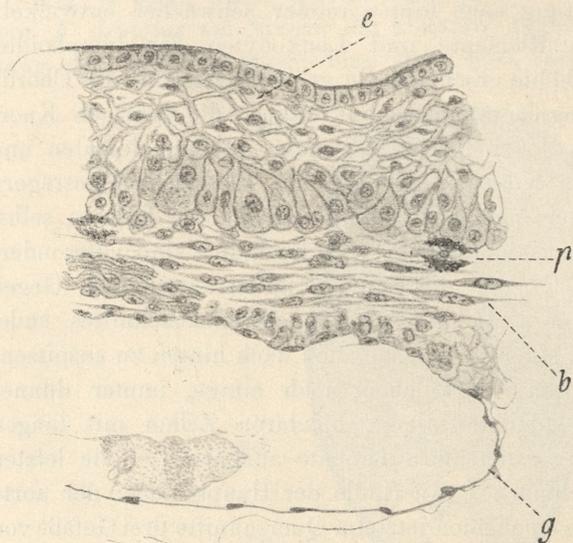


Fig. 7.

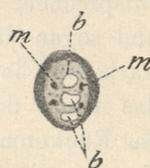


Fig. 8.

aus dem Epithelverbande hinweist, alles dies scheint ohne Zweifel mit dem Zugrundegehen des Epithels im Zusammenhange zu stehen. Unter dem Epithel liegen viele Pigmentzellen (p.), welche zum größten Teil eine linsenförmig abgeplattete Form zeigen, mit den Pigmentkörnchen an den konvexen Flächen und mit dem Kerne in der Mitte. Das ganze Innere des Körpers ist mit Bindegewebe ausgefüllt, welches aus verlängerten, spindelförmigen, parallel zu der langen Achse des Schwanzes verlaufenden Zellen besteht; zwischen diesen letzteren befinden sich auch zahlreiche Leukocyten, welche besonders in der Umgebung der drei erwähnten in dem Schwanzfaden verlaufenden Blutgefäßen angehäuft sind. In Fig. 8. sehen wir den zarten Schwanzfaden im Querschnitte bei schwacher Vergrößerung, in Fig. 7. einen Teil des Längsschnittes bei stärkerer Vergrößerung.

Außerdem finden wir noch in dem erwähnten Bindegewebe vier Gruppen von zelligen Elementen, welche symmetrisch, seitlich, oberhalb und unterhalb des zentralen Blutgefäßes liegen. Dieselben bestehen, wie die Längsschnitte zeigen, aus sehr langen Strängen, die wellenförmig verlaufen; in jeder der vier Gruppen verlaufen 4—6 solche Stränge, wobei jeder Strang aus einer Anzahl sehr feiner Faserchen besteht, die in einer interfibrillären Substanz liegen, und an der Peripherie reichlich mit Kernen versehen sind. Das sind die letzten Residua der allmählich terminalwärts zugrunde gehenden vier Gruppen von Muskelmassen, die weiter nach hinten, immer schwächer entwickelt und unansehnlicher erscheinen und in welchen die Querstreifung sich immer mehr verwischt, um endlich ganz zu verschwinden.

In dem hintersten, äußerst dünnen Endstücke des terminalen Schwanzfadens trifft man schon am Querschnitte nicht die drei distinkten Blutgefäße, sondern einen allgemeinen Blutsinus, an einigen Stellen vom Endothel umgeben, an anderen, wie es mir scheint, ohne endotheliale Begrenzung; das umgehende Bindegewebe ist nur äußerst wenig entwickelt und die vier erwähnten Zellenstränge sind schon gar nicht vorhanden. Im Blutsinus finden sich äußerst zahlreiche Leukocyten. Am interessantesten stellt sich das Epithel dar und zwar bleibt nur die äußere Zellschicht unverändert übrig, während die Zellen der tieferen Schichten ganz locker und stark vacuolisiert werden und teils vermittelt feiner, plasmatischer Fäden zusammenhängen, teils schon ganz frei in dem Blutsinus liegen, wobei man in vielen derselben amitotische Kernteilungen und in zahlreichen Zellen sowohl an der Oberfläche, wie auch im Inneren des Plasmas Leukocyten (Phagocyten) findet (Fig 9.). In manchen Zellen trifft man 2' oder sogar 3 eingewanderte Leukocyten. Auf diese Weise geht das Epithel zugrunde. Da wir nun solche Zustände am hinteren Ende des Schwanzfadens gefunden haben, schließen wir daraus, daß auf dem Wege eines solchen Zellenzerfalls unter Mitwirkung von Leukocyten alle geweblichen Elemente zugrunde gehen und die Zerfallprodukte derselben durch das Blut nach den vorderen Körperabschnitten überführt werden, wofür auch die Verhältnisse bei den *F. acus*-Larven sprechen.

Wir gehen nun zu den larvalen Anhängen des *F. acus* über. Hier sind zwei Gebilde zu unterscheiden: 1) das s. g. Vexillum der Vexillifer-Larve und 2) das Schwanzfilament derselben Larve,

welches demjenigen bei jugendlicher Form des *F. dentatus* entspricht.

Was zuerst den dorsalen Anhang, d. h. das Vexillum anbelangt, so besteht das letztere, nach Emery, bei einer 4-tägigen Larve aus einem Stiel und einem nach vorne gerichteten Filament mit blattähnlichen Anhängen. Bei etwas älteren Exemplaren

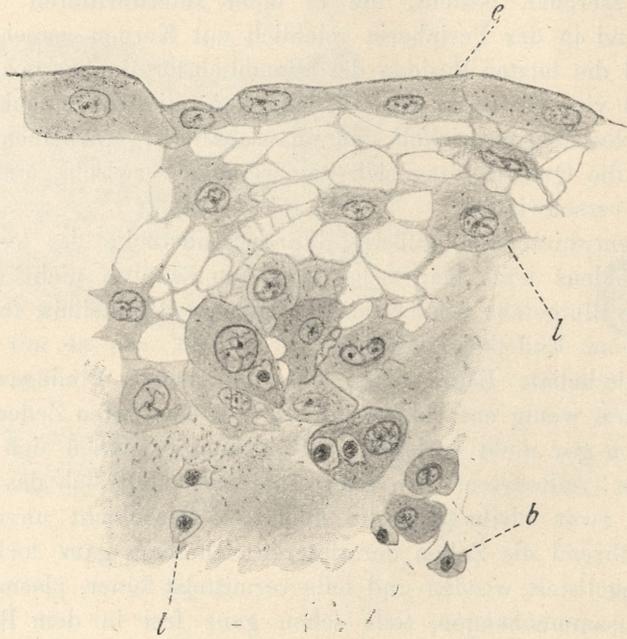


Fig. 9.

(10—11 mm. Länge) ist der Stiel länger und mit einer Achse von steifer, hyalinen Substanz versehen, welche mit einem knorpeligen Anfangsstücke gegen einen Basalknorpel artikuliert. Zwischen diesem Knorpel und der Haut befinden sich Muskeln, um den Stiel der Fahne zu bewegen. Larven von solchem Alter haben wir nicht gehabt. Aus der Sammlung des Prof. Grassi besitzen wir dagegen viele Larven, welche denjenigen entsprechen, die von Gasco als *Vexillifer de Filippi* beschrieben worden sind. Diese sehr schöne Larve ist sehr selten; Emery besaß nur ein einziges Exemplar; die Länge des ganzen Körpers (samt dem Caudalfilamente) dieses Exemplars betrug 7,6 cm. (Fig. 2. in der Monographie von Emery). Bei diesen Larven, und zwar von der gesamten Länge 5,6 bis

8 cm haben wir das Vexillum und das Caudalfilament näher untersucht.

Was zuerst das Vexillum anbetrifft, so muß man es — worin ich mit Emery im Einklange stehe — als den ersten Strahl der dorsalen Flosse ansehen, da diese letztere direkt hinter demselben beginnt und der histologische Bau des achsialen Stützgewebes des Stieles, sowohl wie die Verbindung desselben mit dem, den Flossenstrahlenträgern entsprechendem Knorpel, den Verhältnissen bei den übrigen Flossenstrahlen entspricht. Am häufigsten scheint der Strahl der Fahne mit dem 7. Wirbel im Zusammenhange zu stehen (Emery gibt den 7. bis 9. Wirbel an). Bei unseren Vexillifer-Larven, die zirka 7 cm lang waren, erreichte der Stiel die Länge von zirka 1 cm, und war mit 2—5 rundlich ovalen, etwas abgeplatteten, blattähnlichen Verdickungen versehen. Bei einigen Exemplaren waren zwei Verdickungen am Ende des Stieles vorhanden, bei anderen endete der Stiel mit einer einzigen Verdickung und die übrigen inserierten sich seitlich auf dem Stiele. Bei Individuen von 5,6—6 cm Länge war der Stiel im Querschnitte viereckig abgerundet, manchmal rundlich, bei älteren Larven (von 7—8 cm Länge), besonders in seinem basalen Abschnitte, seitlich stark komprimiert.

Der basale Teil des Stieles sieht am Querschnitte durch den Larvenkörper folgendermaßen aus (Fig. 10.). Die Körperdecke bildet einen hügelartigen Vorsprung, welchem der Stiel aufsitzt, indem er mit seinen lateralen Stützgebilden den Flossenträgerknorpel erreicht. Dieser letztere (Fig. 10.) stellt sich als hutförmiger Knorpel (k') dar, der mit der konkaven Basis einem anderen, zylindrischen (k'') Knorpel aufsitzt; dieser letztere artikuliert basal mit dem processus spinosus, und ist mit dem konvexen Scheitel nach oben gerichtet, wo mit ihm ein konisches (k), schon dem Stiele angehörendes und im basalen Abschnitte dieses letzteren ruhendes Knorpelstück artikuliert. Mit dem hutförmigen Knorpel artikulieren außerdem beiderseits zwei Lamellen, die aus ganz homogener, zellenloser Knochensubstanz bestehen und mit Eisen-Haematoxylin stark schwarz, mit Haematoxylin-Eosin intensiv violett, mit Orcein tief braun sich tingieren. Nach innen von dieser Substanz befindet sich eine weichere Knochensubstanz, welche (b) ebenfalls homogen erscheint, aber sich mit allen erwähnten Färbemitteln viel schwächer tingiert. Zentral liegen dieser Substanz viele birnförmige Zellen

an, die mit den verjüngten Enden in dieselbe teilweise eindringen, weshalb sie als Bildner dieser Substanz betrachtet werden könnten. Im Inneren des Stieles trifft man lockeres, fibrilläres Bindegewebe, welches viele spindelförmige und verästelte Zellen enthält. Elastische Elemente haben wir nicht gefunden. Im Bindegewebe ver-

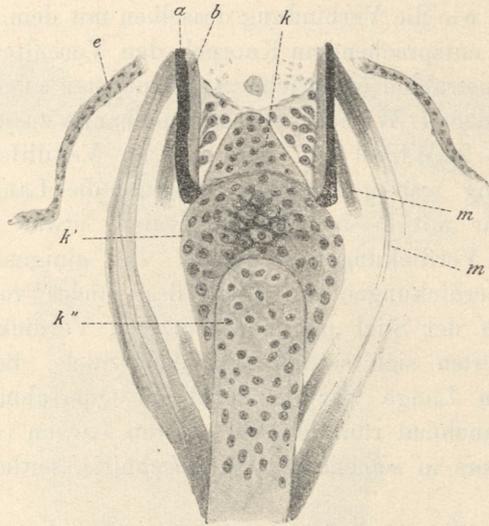


Fig. 10.

läuft ein zentrales, arterielles Gefäß und einige Venenäste, die mehr peripherisch liegen.

Es gibt drei Paare von Muskeln, welche den Stiel in Bewegung bringen: 1) Die (Fig. 10, *m'*) äußeren langen Muskelbündel, die von der äußeren Fläche der dunklen Knochensubstanz bogenförmig bis zum knorpeligen Flossenträger verlaufen; 2) die kurzen äußeren Muskelbündel (*m*), die von den ersteren bedeckt sind, und denselben Verlauf zeigen (vergl. Fig. 10.); 3) die inneren Muskelbündel, die von der inneren, hellen Knochensubstanz des Stieles zu demselben Knorpelstücke seitlich verlaufen.

Durch den Besitz einer solchen Muskulatur ist das Vexillum sehr stark beweglich. Es spielt wahrscheinlich die Rolle eines Lockorganes für die kleinen Seetiere, wie es schon Emery vermutet hat.

Interessant ist der Querschnitt durch den frei hervorstehenden,

seitlich komprimierten Stiel nahe an der Basis desselben (Fig. 11.). Das Epithel ist hier einschichtig, von stark entwickelter Cuticula bedeckt. Die Skeletteile bestehen aus zwei Platten, die von außen konkav, von innen konvex erscheinen, wobei jede Platte aus dem

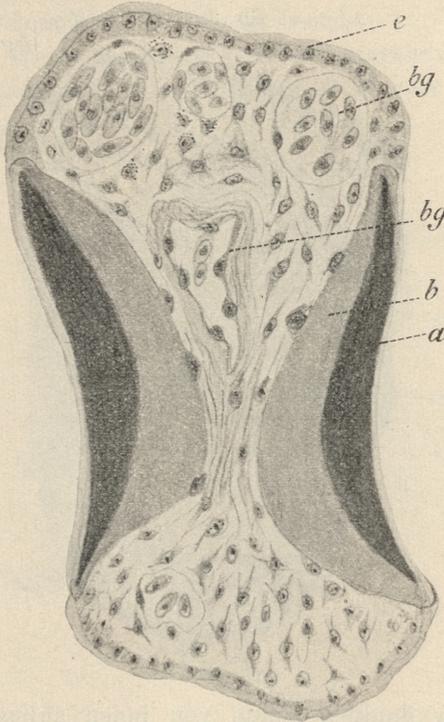


Fig. 11.

erwähnten, äußeren, homogenen, dunkel sich tingierenden (*a*), und einen inneren, hell sich färbenden Abschnitt (*b*) besteht. Nach innen von der hellen Substanz liegen ihre platten Zellen (Bildungszellen der osteogenen Substanz) an. Es ist interessant, daß die Gerüstplatten nicht vom Epithel bedeckt sind, sondern lediglich von der Hautcuticula. Infolge des durch die Platten ausgeübten Druckes ist hier wahrscheinlich das Epithel zugrunde gegangen.

Im Inneren des Stieles sieht man viele bindegewebige Elemente; besonders sind die spindelförmigen Zellen zahlreich. Terminalwärts wird der Stiel an Querschnitten viereckig abgerundet und noch weiter sogar rundlich, wobei die äußere, intensiv färbbare Ske-

lettplatte (*a*) jederseits immer enger und dünner wird, und anstatt an der äußeren Oberfläche konkav zu sein, konvex wird, wie es Fig. 12. illustriert. Die hell sich färbende Skelettmasse (*b*) differenziert sich dagegen in einen oberflächlichen Teil, der bandförmig

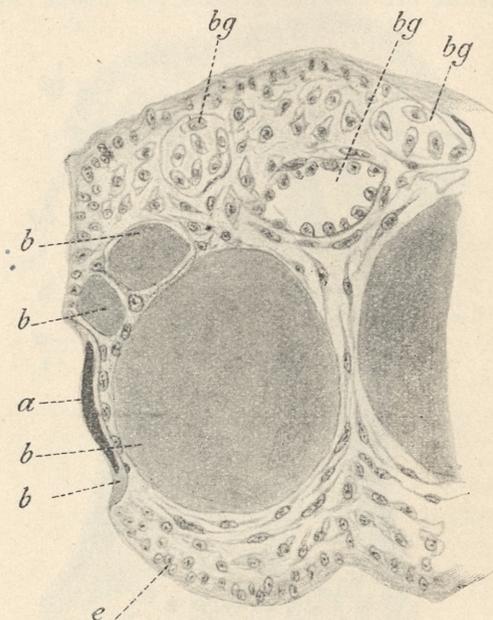


Fig. 12.

bleibt und der dunklen Platte von innen anliegt, und in zwei (im Querschnitte) rundliche Massen, die tiefer liegen, und zwar eine vordere größere, und eine hintere kleinere, von denen die letztere bald wieder in zwei Abschnitte dichotomisch zerfällt, so daß jederseits auf Querschnitten vier Abteilungen dieses Gebildes zu sehen sind: eine peripherische, bandförmige, eine tiefere vordere und zwei tiefere, hintere. Es findet also eine Verästelung der Gerüstbildungen statt.

Was nun den histologischen Bau der blattförmigen Anhänge anbetrifft, so unterscheidet sich derselbe von demjenigen des Stieles in folgenden Punkten: 1) Das Epithel verdickt sich bedeutend, wird mehrschichtig, wobei es aus einer unteren, zylindrischen Schicht und aus mehreren darüber liegenden Schichten polygonaler Zellen besteht und keine Drüsenzellen zu enthalten scheint.

2) Unter dem Epithel folgt eine Schicht von zahlreichen, verästelten Pigmentzellen, die mit braunen und schwarzen, dicht gehäuften Körnchen versehen sind; im Stiele befinden sich nur in spärlicher Anzahl solche Zellen. 3) Es gibt im Inneren des Organes keine Gerüstbildungen, nur lockeres Bindegewebe und Blutgefäß, deren Wand nur aus einer Endothelschicht besteht.

Auf welche Weise das ganze Vexillum zugrunde geht, das kann ich nicht mit Bestimmtheit sagen. Doch ist es sehr wahrscheinlich,

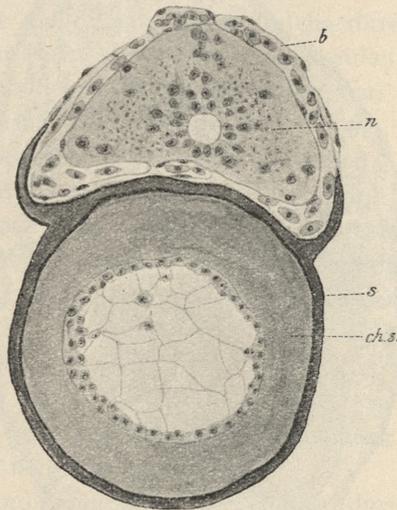


Fig. 13.

daß dasselbe nahe an der Basis, wo die Verdickung des Gerüstes stattfindet, abgebrochen wird. Und zwar, während bei Larven von 5,6 cm Körperlänge im Basalteile des Organes die Gerüstsubstanz schwächer entwickelt ist und nicht so stark nach innen verdickt erscheint, werden die Gerüstplatten bei der 7—8 cm langen Larve viel dicker, so daß verhältnismäßig nur ein enger Raum zwischen denselben in der Mitte frei bleibt (Fig. 11.), wo nämlich das arterielle Gefäß verläuft. Es folgt daraus, daß die Gerüstsubstanz mit dem Alter bedeutend zunimmt. Wenn wir nun annehmen, daß die lateralen Gerüstplatten noch etwas dicker werden, so würde infolge des durch dieselben bedingten Druckes die Blutzirkulation gestört, so daß fast der ganze, nach außen hervortretende Teil des Organes infolge unvollkommener Ernährung sehr wahrscheinlich einer

Nekrose unterliegen müßte. Die zahlreichen Leukocyten tragen wahrscheinlich zur Zerstörung des Organes bei. Bei Larven von 10 cm Körperlänge war schon keine Spur des Organes zu finden.

Was endlich den langen Schwanzanhang bei der Larve des *F. acus* anbelangt, so kann ich mit Bestimmtheit sagen, daß derselbe einer Resorption unterliegt. Bei einer 6—7 cm langen Larve

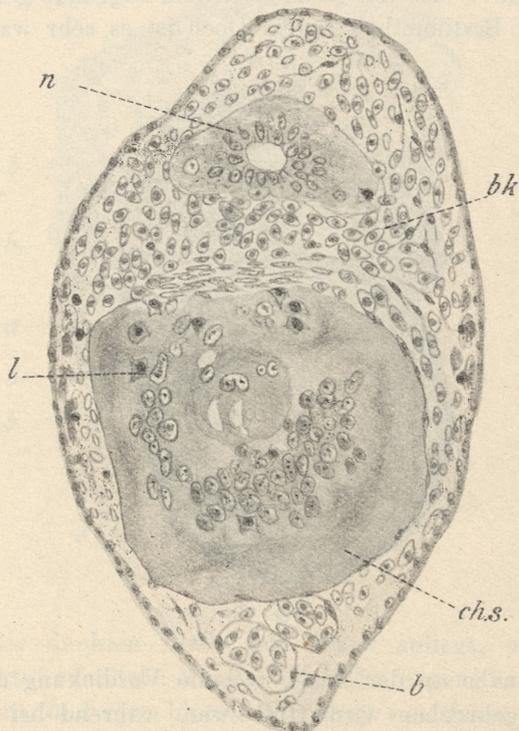


Fig. 14.

findet man in dem vordersten Teile des fadenförmigen Schwanzanhanges die Chordascheide sehr stark (Fig. 13.) entwickelt; unter derselben eine Lage von Chordaepithel, und von außen der Chordascheide die skelettogene Schichte, in welcher eine äußere und eine innere (sich intensiver färbende) homogene Knochensubstanzanlage und eine mittlere aus schwach sich tingierender, homogener Substanz bestehende Lage unterschieden werden können. Die erwähnte Schicht bildet kurze obere Bogen, die dorsal nur durch weiches

Bindegewebe geschlossen sind; paarige Knorpelstücke in den Bogen, die in dem Schwanze vorhanden sind, kommen schon in dem Schwanzfaden nicht mehr zum Vorschein. Das Rückenmark ist hier von vielen Blutgefäßen umgeben. Mehr terminalwärts sieht man schon keine typischen Chordazellen in der Rückensaite (Fig. 14.), und es tritt hier nur die stark verdickte Chordascheide auf, welche zentral einige Lücken und viele Kerne (ohne distinkte Zellgrenzen) enthält, wobei viele von ihnen im Zustande einer Fragmentation sich befinden. Außerdem sieht man in der Substanz der Chordascheide viele Leukocyten, welche durch ihre sehr intensiv sich färbenden Kerne leicht zu unterscheiden sind. Die skeletogene Schicht ist hier nicht mehr vorhanden. Das Hautepithel, welches im vorderen Teile des Schwanzfadens mehrschichtig ist, stellt hier, im hinteren Abschnitte desselben, nur eine einzige Zellschicht dar. Zwischen dem Hautepithel und der Chordascheide, welche von einer Schicht stark abgeplatteter Zellen umgeben ist, wie auch in den Lücken zwischen dem Hautepithel, der Chordascheide und dem Rückenmarke ist ein sehr lockeres Bindegewebe entwickelt, welches die ganze Leibeshöhle ausfüllt, zahlreiche Leukocyten und viele Blutgefäße enthält. Außerdem trifft man in demselben zahlreiche Blutkörperchen, welche hier reichlich aus den Gefäßen heraustreten. Das Rückenmark liegt mitten im Bindegewebe und ist stark reduziert.

Noch interessanter sind die Querschnitte durch eine der Endpartien des Schwanzfadens (Fig. 15.). Wir finden hier unter dem einschichtigen Hautepithel ein die Leibeshöhle ausfüllendes, sehr lockeres Bindegewebe, in welchem zahlreiche Blutkörperchen und Leukocyten vorhanden sind. Wir haben hier einen offenen Blut sinus vor uns, der die Interstitien zwischen dem lockeren Bindegewebe und zwischen den inneren Organen ausfüllt. Die Fortsetzung der Chordascheide ist durch die Leukocyten in hohem Grade resorbiert, enthält viele Lücken, in welchen ebenfalls Blutkörperchen und Leukocyten angehäuft sind und stellt überhaupt ein Bild des Zerfalls dar. Dasselbe kann auch vom Rückenmark gesagt werden; es bleibt hier nur eine Zellschicht übrig, die den Zentralkanal umgibt, die mehr peripherischen Zellen lösen sich dagegen frei ab, wobei auch hier viele Blutkörperchen und Leukocyten zwischen den zerfallenden Rückenmarkselementen zu sehen sind. Noch mehr nach hinten, d. h. sehr nahe am Hinterende des feinen Fadens, finden wir nur

das einschichtige dünne Hautepithel, ein lockeres Bindegewebe mit vielen Blutgerinnungen, Blutkörperchen und Leukocyten; die Chordascheide und das Rückenmark sind in dieser Gegend schon vollständig zugrunde gegangen. Die Involutionsprozesse schreiten also in Schwanzfaden in der Richtung von hinten nach vorn fort.

Bei einer 10 cm langen, jugendlichen Form von *F. acus* habe ich den Endabschnitt des Schwanzes als einen hinten abgerun-

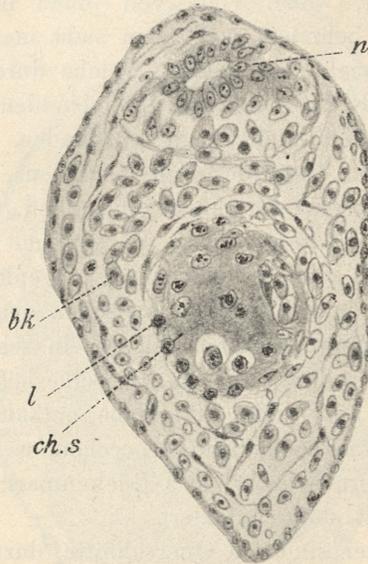


Fig. 15.

deten, dünnen Stummel gefunden, wobei sich der Schwanz hinter der Stelle, wo die letzten Muskelsegmente durchschimmern, konisch verengt und unter einem stumpfen Winkel in diesen Endabschnitt übergeht. Während nun in den vorderen Teilen dieses Schwanzstummels die Wirbelsäule und das Rückenmark noch vorhanden sind, enthält der hintere Abschnitt desselben nur noch Reste des Rückenmarkes, die aus einer einzigen, den Zentralkanal umgebenden Zellschicht bestehen. Auch hier findet man in dem lockeren Bindegewebe von Blutkörperchen und Leukocyten erfüllte Spalten; die Reste der zugrunde gegangenen Muskeln bilden homogene, unregelmäßige von Leukocyten umgebene Schollen. In vielen Bindegewebszellen sieht man eine Fragmentation der Kerne. Es ist endlich interessant, daß das hier noch mehrschichtige Epithel sich eben-

falls im Zustande der Involution befindet, da nur die äußere Zellschicht noch unverändert bleibt, während die tiefer liegenden Zellen einer starken Vacuolisation und Lockerung unterliegen, und die ganz basalen sich von anderen loslösen und in die innere, lockere Zellenmasse eindringen. Die Involution eines Schwanzabschnittes kommt also dadurch zustande, daß alle inneren Organe einem Zerfalle unterliegen, vom Blut umspült werden und teilweise vermittelst Leukocyten einer Absorption unterliegen.

Erklärung der Abbildungen.

Fig. 1. Querschnitt durch die Haut eines jugendlichen *Fierasfer dentatus* Oc. 2. S. Hom. Imm. $\frac{1}{12}$ Zeiss; Zeichenapparat n. Zeiss).

Fig. 2. Ein Teil der Hautdecke vom vordersten Schwanzabschnitte eines jugendlichen *F. acus* 7—8 cm Länge mit den Sinnesorganen; *l* — Laterallinie, *d* — dorsale, *v.* — ventrale Reihe der Sinnesorgane (Oc. 1, S. 3, Leitz; Z. n. Z.).

Fig. 3. Querschnitt durch das Sinnesorgan der Seitenlinie vom jungen *F. acus*; *c* — cupula terminalis, *b* — birnförmige Zellen, *s* — Stützzellen *d* — Parietalzellen, *n* — Nervenfibrillen, *bs* — Basalzellen, *b. m.* — Basilar-membran (Oc. 4. S. hom. Im. $\frac{1}{12}$ Zeiss; Z. n. Z.).

Fig. 4. Ein jugendlicher *F. dentatus*; nat. Größe (rechts) und ein jugendlicher *F. acus* (Vexillifer); nat. Größe (links).

Fig. 5. Ein Teil eines Querschnittes durch den jugendlichen *F. dentatus*, aus der hintersten Rumpfpattie; *v. c.* — Cardinalvene, *m* — Muskeln, *W. c.* — die Wolff'schen Kanäle, *r. p.* — Hinterniere — *v. n.* — Schwimmblase, *g* — Blutgefäße, *l* — lymphoides Gewebe der Leibeshöhle (Oc. 2, S. A. Zeiss; Z. n. Z.).

Fig. 6. Querschnitt durch den jugendlichen *F. dentatus*, aus der hintersten Rumpfpattie; *c* — Chorda dorsalis *n* — Rückenmark, *v. n.* — Schwimmblase, *m* — Muskulatur, *W. c.* — Wolff'schen Kanäle, *v. n.* — Harnblase (Oc. 2, S. A. ohne untere Linse, Zeiss; Z. n. Z.).

Fig. 7. Ein Teil eines Sagittalschnittes durch den Schwanzfaden vom jugendlichen *F. dentatus*, *e* — Epithel, *g* — Blutgefäß, *b* — Bindegewebe *m* — Muskelrudimente *p* — Pigmentzelle (Oc. 2. S. 9. Merk. Ebel. Z. n. Z.).

Fig. 8. Querschnitt durch den Schwanzfaden vom jugendlichen *F. dentatus*; *e* — Epithel, *g* — Blutgefäß, *b* — Bindegewebe, *m* — Muskelrudimente, *p* — Pigmentzelle (Oc. 2. S. ohne untere Linse, Zeiss; Z. n. Z.).

Fig. 9. Querschnitt durch das Hautepithel mit dem darunter liegenden Blutsinus von dem degenerierenden Schwanzfaden eines jugendlichen *F. dentatus*; Endstück; *e* — Epithelzellen, *l* — Leukocyten (Oc. 4, S. hom. Im. $\frac{1}{12}$ Zeiss, Z. n. Z.).

Fig. 10. Ein Stück eines transversalen Körperschnittes; und zwar durch den Anfangsteil (Basalteil) des Vexillum-Stieles und den darunter liegenden Knorpelstücke; *e* — Hautepithel, *a, b* — Gerüstsubstanz des Stieles, *k, k', k''* — Knorpelstücke *m, m', m''* — Muskeln (Oc. 4, S. C. Zeiss; Z. n. Z.).

Fig. 11. Querschnitt durch den Basalteil des Vexillum-Stieles, von einer 7–8 cm langen *F. acus*-Larve; *a* — äußerer, *b* — innerer Abschnitt des Gerüsts, *bg* — Blutgefäße *e* — Hautepithel (Oc. 4., S. hom. Imm. $\frac{1}{12}$ Zeiss; Z. n. Z.).

Fig. 12. Querschnitt durch den Vexillum-Stiel von einer 6 cm langen *F. acus*-Larve, *a* — intensiv sich färbender Teil des Gerüsts, *b* — schwach sich färbende Abschnitte des Gerüsts, *bg* — Blutgefäße, *c* — Hautepithel (Oc. 4. S. hom. Imm. $\frac{1}{12}$ Zeiss. Z. n. Z.).

Fig. 13. Querschnitt durch die Chorda dorsalis und Rückenmark aus dem vordersten Teile des fadenförmigen Schwanzanhanges einer *F. acus*-Larve; *ch. s.* — Chordascheide, *s* — skelettogene Schicht, *l* — Blutgefäße, *n* — Rückenmark (Oc. 1, S. h. Imm. $\frac{1}{12}$ Zeiss. Z. n. Z.).

Fig. 14. und 15. Querschnitte durch den Schwanzfaden von *F. acus*-Larve *ch. s.* — Chordascheide, *n* — Rückenmarkreste, *b* — Blutgefäße, *l* — Leukozyten, *b. k.* — Blutkörperchen. (Oc. 1., S. hom. Imm. $\frac{1}{12}$ Zeiss. Z. n. Z.).

9. M. S. KĘPIŃSKI. Calkowanie równania $\frac{\partial^2 j}{\partial \xi^2} - \frac{1}{\xi} \frac{\partial j}{\partial t} = 0$. (*Integration der Differentialgleichung* $\frac{\partial^2 j}{\partial \xi^2} - \frac{1}{\xi} \frac{\partial j}{\partial t} = 0$). (*Intégration de l'équation* $\frac{\partial^2 j}{\partial \xi^2} - \frac{1}{\xi} \frac{\partial j}{\partial t} = 0$). Mémoire présenté par M. S. Zaremba m. c.

In der vorliegenden Note beschäftigen wir uns mit der Integration einer Differentialgleichung von parabolischem Typus:

$$(1) \quad L(j) \equiv \frac{\partial^2 j}{\partial \xi^2} - \frac{1}{\xi} \frac{\partial j}{\partial t} = 0,$$

mit folgenden Grenzbedingungen:

$$\begin{array}{ll} \text{a)} & \text{für } t = 0: \quad j = f(\xi) \\ \text{b)} & \quad \quad \xi = 0: \quad j = \varphi(t). \end{array}$$

Indem wir die Green- Riemann'sche Methode anwenden, brauchen wir zunächst eine Hauptlösung der adjungierten Differentialgleichung:

$$(2) \quad M(v) \equiv \frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2} + \frac{1}{\xi} \frac{\partial v}{\partial t} = 0.$$

Als solche Hauptlösung erscheint nun:

$$v(\xi, t; \xi_0, t_0) = e^{-\frac{\xi_0 + \xi}{t_0 - t}} w \left[\frac{\xi \xi_0}{(t_0 - t)^2} \right], \quad (3)$$

wo $w(x)$ eine Lösung der Differentialgleichung

$$\frac{d^2 w}{dx^2} - \frac{1}{x} w = 0 \quad (4)$$

ist. Diese Funktion kann leicht mittels der Bessel'schen Cylinder-Funktionen I_1 und Y_1 dargestellt werden, und zwar, wenn

$$w_1(x) = x \sum_{s=0}^{\infty} \frac{x^s}{s! \Gamma(s+2)} = -i \sqrt{x} I_1(2i\sqrt{x})$$

$$w_2(x) = 1 + w_1 \log x + x \sum_{s=0}^{\infty} \frac{x^s}{s!(s+1)!} [\psi(s+1) + \psi(s+2)]$$

$\psi(\alpha) = \frac{\Gamma'(\alpha)}{\Gamma(\alpha)}$, gesetzt wird, so ist

$$w = A w_1 + B w_2.$$

In der weiteren Behandlung brauchen wir nur $w_1(x)$ und bemerken, daß für sehr große positive Werte von x , w_1 asymptotisch dargestellt werden kann:

$$w_1(x) \sim \frac{1}{2\sqrt{\pi}} x^{\frac{1}{4}} e^{-2\sqrt{x}}. \quad (5)$$

Indem wir nun den Green'schen Satz auf ein Gebiet K anwenden, in welchem j , v bis zu ihren zweiten partiellen Ableitungen stetige Funktionen sind, erhalten wir

$$\int_K \left[\left(v \frac{\partial j}{\partial \xi} - j \frac{\partial v}{\partial \xi} \right) dt + \frac{1}{\xi} j v d\xi \right] = 0.$$

Als ein solches Gebiet wählen wir ein Parallelogramm $DBOCD$, dessen eine Seite durch den Punkt $A[\xi_0 > 0, t_0 > 0]$ geht, und welches wir nachher bis ins Unendliche hin erstrecken. Wir erhalten somit:

$$\int_{BO} + \int_{OC} + \int_{CD} + \int_{DB} = 0. \quad (6)$$

Auf der Strecke CD ist $\xi = \xi_1$, $d\xi = 0$ und für

$$\xi_1 = \infty \text{ ist } [v]_{\xi=\infty} = 0, \quad \left[\frac{\partial v}{\partial \xi} \right]_{\xi=\infty} = 0,$$

also in dem Grenzwert $\xi_1 = \infty$

$$\int_{CO} = 0.$$

Endlich auf der Strecke DB ($\xi_1 = \infty$) ist $t = t_0$, $dt = 0$, also

$$\int_{DB} = \int_{\infty}^0 \frac{1}{\xi} [jv]_{t=t_0} d\xi.$$

Um dieses Integral zu erwerten, nehmen wir zunächst eine zur DB parallele Gerade, welche dem Werte $t = t_1 < t_0$ entspricht, und nachher gehen wir zum Grenzwert $t_1 = t_0$.

$$\begin{aligned} \int_{D'B'} &= \int_{\infty}^0 \frac{1}{\xi} j(\xi, t_1) v(\xi, t_1) d\xi = \\ &= -i \int_{\infty}^0 \frac{1}{\xi} j(\xi, t_1) e^{-\frac{\xi_0 + \xi}{t_0 - t_1} \frac{\sqrt{\xi\xi_0}}{t_0 - t_1}} I_1 \left(2i \frac{\sqrt{\xi\xi_0}}{t_0 - t_0} \right) d\xi. \end{aligned}$$

Es ist nun für ein sehr kleines $t_0 - t_1$, asymptotisch (vgl. 5)

$$\int_{D'B'} \sim \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{\infty}^0 \frac{1}{\xi} j(\xi, t_1) \frac{\sqrt{\xi\xi_0}}{\sqrt{t_0 - t_1}} e^{-\frac{(\sqrt{\xi_0} - \sqrt{\xi})^2}{t_0 - t_1}} d\xi$$

oder wenn wir

$$\sqrt{\xi} = \sqrt{\xi_0} + \mu \sqrt{t_0 - t_1}$$

einsetzen

$$\int_{D'B'} \sim \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{\sqrt{\xi_0}}{\sqrt{t_0-t_1}}} \sqrt{\frac{\sqrt{\xi_0}}{\sqrt{\xi_0 + \mu\sqrt{t_0-t_1}}}} j[(\sqrt{\xi_0} + \mu\sqrt{t_0-t_0})^2, t_1] e^{-\mu^2} d\mu;$$

also in dem Grenzwert für $t = t_1$:

$$\int_{DB} = -\frac{1}{\sqrt{\pi}} j(\xi_0, t_0) \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\mu^2} d\mu = -j(\xi_0, t_0).$$

Wir haben also der Gleichung (6) gemäß:

$$j(\xi_0, t_0) = \xi_0 \int_0^{t_0} \frac{e^{-\frac{\xi_0}{t_0-t}}}{(t_0-t)^2} \varphi(t) dt + \\ + \int_0^{\infty} \frac{e^{-\frac{\xi_0+\xi}{t_0}}}{\xi} w_1\left(\frac{\xi\xi_0}{t_0^2}\right) f(\xi) d\xi.$$

Oder wenn wir endlich für ξ_0, t_0 die Variablen ξ, t und für die Integrationsvariablen λ einsetzen, bekommen wir für $\xi > 0, t > 0$:

$$(7) \quad j(\xi, t) = \xi \int_0^t \frac{e^{-\frac{\xi}{t-\lambda}}}{(t-\lambda)^2} \varphi(\lambda) d\lambda + \\ + \int_0^{\infty} \frac{e^{-\frac{\xi+\lambda}{t}}}{\lambda} w_1\left(\frac{\lambda\xi}{t^2}\right) f(\lambda) d\lambda.$$

Es ist nachher sehr leicht zu konstatieren, daß dieses Integral (7) auch den Bedingungen a) b) entspricht. In der Tat ist das erste Integral auf der rechten Seite

$$j_1(\xi, t) = \xi \int_0^t \frac{e^{-\frac{\xi}{t-\lambda}}}{(t-\lambda)^2} \varphi(\lambda) d\lambda$$

ein Integral der Differentialgleichung (1), welches

$$\begin{array}{llll} \text{für} & t=0 & \text{in} & j_1=0 \\ & \xi=0 & & j_1=\varphi(t) \end{array}$$

übergeht. Indem man nämlich rechter Seite

$$\lambda = t - \frac{\xi}{\mu}$$

einsetzt, erhält man

$$j_1(\xi, t) = \int_{\frac{\xi}{t}}^{\infty} e^{-\mu} \varphi\left(t - \frac{\xi}{\mu}\right) d\mu,$$

also da $\xi > 0$

$$\text{für } t=0 : j_1=0,$$

$$\text{für } \xi=0 : j_1 = \varphi(t) \int_0^{\infty} e^{-\mu} d\mu = \varphi(t).$$

Das zweite Glied rechter Seite von (7) ist wiederum ein Integral der Differentialgleichung (1):

$$j_2(\xi, t) = \int_0^{\infty} \frac{e^{-\frac{\xi+\lambda}{t}}}{\lambda} w_1\left(\frac{\xi\lambda}{t}\right) f(\lambda) d\lambda,$$

welches für

$$\begin{array}{llll} t=0 & \text{in} & j_2=f(\xi) \\ \xi=0 & & j_2=0 \end{array}$$

übergeht.

Um dies zu verifizieren, nehmen wir zunächst t sehr klein an: $t = \varepsilon > 0$ und erhalten asymptotisch:

$$j_2(\xi, \varepsilon) \sim \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \frac{\sqrt{\xi}}{\sqrt{\varepsilon}} \frac{1}{\lambda^{3/4}} e^{-\frac{(\sqrt{\lambda} - \sqrt{\xi})^2}{\varepsilon}} f(\lambda) d\lambda$$

oder wenn $\sqrt{\lambda} - \sqrt{\xi} = \sqrt{\varepsilon} \mu$

$$j_2(\xi, \varepsilon) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\frac{\sqrt{\xi}}{\varepsilon}}^{\infty} \sqrt{\frac{\sqrt{\xi}}{\sqrt{\xi} + \sqrt{\varepsilon} \mu}} f[(\sqrt{\xi} + \sqrt{\varepsilon} \mu)^2] e^{-\mu^2} d\mu,$$

also für $\varepsilon = 0$

$$j_2(\xi, 0) = f(\xi) \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\mu^2} d\mu = f(\xi).$$

Die zweite Bedingung : für $\xi = 0 : j_2 = 0$ verifizieren wir folgendermaßen. Wir wählen zunächst eine beliebig große aber unendliche Zahl p und schreiben

$$j_2(\xi, t) = \int_0^p \frac{e^{-\frac{\lambda + \xi}{t}}}{\lambda} w_1\left(\frac{\lambda \xi}{t^2}\right) f(\lambda) d\lambda +$$

$$+ \int_p^{\infty} \frac{e^{-\frac{\lambda + \xi}{t}}}{\lambda} w_1\left(\frac{\lambda \xi}{t^2}\right) f(\lambda) d\lambda.$$

In dem ersten Gliede ist $\lambda \leq p$, also für $\xi = 0$ ist $w_1(0) = 0$. Das zweite Glied, für ein großes $\lambda \geq p$ ist asymptotisch

$$\int_p^\infty \frac{e^{-\frac{\lambda + \xi}{t}}}{\lambda} w_1 \left(\frac{\lambda \xi}{t^2} \right) f(\lambda) d\lambda \sim \frac{1}{2\sqrt{\lambda}} \int_p^\infty \frac{\sqrt{\xi}}{\sqrt{t}} e^{-\frac{(\sqrt{\lambda} - \sqrt{\xi})^2}{t}} f(\lambda) d\lambda$$

also, wenn $p_1 \geq p$

$$\int_p^\infty \frac{e^{-\frac{\lambda + \xi}{t}}}{\lambda} w_1 \left(\frac{\lambda \xi}{t^2} \right) f(\lambda) d\lambda \leq \frac{f(p_1)}{2\sqrt{\pi}} \left(\frac{\xi}{t} \right)^{1/4} \int_{\left(\frac{p}{t}\right)^{1/4}}^\infty e^{-\mu} d\mu, \text{ q. e. d.}$$

10. M. A. BOCHENEK. O systemie nerwowym mięczaków, oślonic i szkarłupni. (*Untersuchungen über das zentrale Nervensystem der Wirbellosen*). (*Recherches sur le système nerveux des invertébrés (Anodonta, Distalpia, Synapta)*). Mémoire présenté par M. C. Kostanecki m. t.

(Planche V).

Die im Jahre 1897 erschienene Arbeit Apathys: „Das leitende Element des Nervensystems und seine topographischen Beziehungen zu den Zellen“ hat der Forschung auf dem Gebiete des Nervensystems in mancher Beziehung neue Anregung gegeben, nicht nur durch die äußerst interessanten Resultate selbst, sondern auch durch die neuen Untersuchungsmethoden, die in dieser Arbeit mitgeteilt wurden. Die durch die musterhaften Präparate Apathys gestützten Resultate standen zu der allgemein herrschenden Neuronenlehre in schroffem Gegensatz. Der Zusammenhang der Nervenzellen durch Fibrillen wurde an den Apathyschen Präparaten in zweifelloser Weise zur Anschauung gebracht. Obwohl Apathys Ergebnisse sich auf Untersuchungen an einer ganzen Reihe von Tieren stützten, wurden in der Arbeit nur die Resultate der Untersuchungen an Würmern niederlegt.

Die Untersuchungen von Bethe, die den Apathyschen bald folgten, haben unsere Kenntnisse über die Neurofibrillen bei den Gliedertieren und sodann bei den Wirbeltieren in hohem Grade gefördert. Bethes Untersuchungen auf diesem Gebiete finden sich

in seiner „Allgemeinen Anatomie und Physiologie des zentralen Nervensystems“ zusammengestellt. Bald nach dem Erscheinen der Apathyschen Arbeit habe ich auch Untersuchungen auf diesem Gebiete begonnen, meine Präparate, die ich der Apathyschen Nachvergoldungsmethode verdanke, ließen mich die Existenz der Neurofibrillen bei den Mollusken, und zwar bei *Helix* feststellen. Mit dieser Methode gelang es nachher noch Boeke Neurofibrillen bei *Amphioxus* nachzuweisen.

Das rege Interesse, das diese Forschungen erregten, läßt sich am besten daran erkennen, daß man zahlreiche Versuche in der Literatur findet, die daraufhin gerichtet sind, die im höchsten Maße launenhafte und immer und immer mißlingende Apathysche Methode durch eine neue, leichtere zu ersetzen. Außer den zitierten Arbeiten Bethes sind hier die Methoden von Bielschowski, von Ramon y Cajal und von Joris zu nennen. In meiner *Helix*-Arbeit beschäftigte ich mich mit dem zentralen Nervensysteme der Mollusken, ich wandte mich nach ihrer Beendigung zu Untersuchungen einer anderen Molluskengruppe, und wählte hiezu die leicht zur Verfügung stehende Süßwasserform aus der Gruppe der Lamellibranchier, Anodonta. Sodann habe ich meinen Aufenthalt in der Zoologischen Station in Neapel im Frühjahr 1904 dazu benützt, meine Untersuchungen auch auf andere Gruppen der Wirbellosen auszudehnen, habe mich zu dem Zwecke den Tunicaten zugewandt und als Repräsentanten derselben *Ciona intestinalis* und die großen Larven von *Distaplia* gewählt. Einige Versuche habe ich auch an Echinodermen angestellt. Die Resultate dieser Untersuchungen sollen im im folgenden zusammengestellt werden.

Die Untersuchungs-Methoden.

Die Ganglien des zentralen Nervensystems von Anodonta, sowie von *Ciona* wurden sorgfältig herauspräpariert und mit Sublimat-Salpetersäure (gesättigte Lösung von $\text{HgCl}_2 + 3-5\% \text{HNO}_3$) oder Sublimat-Osmium (1 Volum derselben Sublimat-Lösung + 1 Volum $1\% \text{Osmiumsäure}$) fixiert.

Die in Sublimat-Salpetersäure fixierten Stücke wurden nach 3—4 stündigem Waschen in 30% Alkohol übertragen und dann langsam entwässert oder direkt aus der Sublimat-Lösung in 96% und nachher in absoluten Alkohol übertragen. Aus dem absoluten Alkohol wurden sie durch Chloroform-Alkohol, Chloroform, Chloro-

form-Paraffin übertragen und darin eingebettet. Die Entfernung von Sublimat wurde durch eine Jod-Jodkali-Lösung oder durch Jodtinktur erreicht. Die auf diese Weise fixierten Präparate wurden in Schnitte von 7·5 bis 10 μ Dicke zerlegt und mittels Wasser oder 30% Alkohol auf dem Objektträger fixiert. Die auf dem Objektträger aufgeklebten Schnitte wurden in mannigfachster Weise gefärbt. Ich wandte zur Färbung Heidenhains Eisenalaunhämatoxylin, die Nissl's Methode, Toluidinblau, Erythrosin, sowie Hämatoxylin und Eosin an, der größte Teil der Präparate wurde aber nach der Apathyschen Nachvergoldungs-Methode behandelt. Die von Paraffin befreiten Schnitte wurden durch Alkohol durchgeführt, in destilliertes Wasser gebracht und hier einige Stunden (6—10) belassen; aus dem Wasser brachte ich dieselben in Jodwasser, (eine warm bereitete Lösung von Jod in destilliertem Wasser), worin sie 1/2 Minute bis 1 Stunde im Dunklen verblieben. Nach kurzem Auswaschen in destilliertem Wasser, wurden sie in eine 1% Goldchloridlösung auf mindestens 12 Stunden gebracht. Aus dieser Lösung kamen die Präparate nach einem flüchtigen Auswaschen in eine 1% Ameisensäurelösung und wurden behufs Reduktion dem Licht ausgesetzt. Bei den in Sublimat-Osmiumsäure fixierten Präparaten scheint diffuses Licht und die Zimmertemperatur vorteilhaft für die Reduktion zu sein; die in Sublimat-Salpetersäure fixierten reduzierten sich besser in greller Sonnenbeleuchtung, wobei aber die Temperatur niedrig gehalten werden mußte.

Ich habe in fast jeder Richtung vergleichende Experimente mit der Methode angestellt, ich habe den Einfluß der Lichtstärke, der Temperatur, der Säuremenge der bei der Reduktion angewandten Ameisensäure untersucht, und doch ist es mir nicht gelungen, die zum sicheren Gelingen der Reduktion nötigen Momente festzustellen. Trotzdem ich eine Unmasse von Präparaten sowohl von Anodonta, wie auch von Ciona und Synapta gemacht habe, sind mir leider nur wenige gelungen.

Als in den ersten Monaten des Jahres 1904 die neue Methode der Fibrillenfärbung von S. Ramon y Cajal veröffentlicht wurde, habe ich auch mit ihr mehrere Versuche angestellt. Für Anodonta, erreichte ich wohl eine Fibrillenfärbung, ich kann sie aber keineswegs befriedigend nennen, bei Ciona gelang mir die Neurofibrillenfärbung trotz mehrfacher Proben niemals. Außer diesen Schnittfärbungen habe ich auch die Färbung in vivo mittels Methylen-

blau angewandt. Bei Anodonta habe ich mit einer Lösung von 1 gr. per 1.000 ganz sichere Resultate erzielt. Nach 6 bis 7 Stunden waren immer zahlreiche Zellen gefärbt. Eine stärkere Verdünnung von 1 gr. per 5.000 oder sogar 100,000, wie sie von Apathy empfohlen wird, erwies sich als unvorteilhaft. Die gefärbten Stücke wurden teilweise frisch untersucht, teilweise nach Apathy mit Ammoniumpikrat oder nach Bethe mit Ammonium molybdenicum fixiert. Alle Proben mit der Golgi'schen Methode sowohl an Anodonta, wie auch an Ciona waren erfolglos, sogar die Gliazellen, deren Färbung bei Helix leicht gelingt — wie es meine eigenen und Smidt's Erfahrungen lehren — haben sich niemals, weder bei Anodonta, noch bei Ciona färben wollen.

Diese Mißerfolge sind ein weiterer Beweis für die alt bekannte Tatsache, daß das Nervensystem der Wirbellosen trotz seines im Vergleich mit den Wirbeltieren einfachen Baues, doch für die Untersuchung kein leichtes und einfaches Objekt bildet.

Das Nervensystem von Anodonta.

Über das zentrale Nervensystem der Lamellibranchier ist nach der im Jahre 1888 erschienen Arbeit von Rawitz nur die Arbeit von Friedenfelt im Biologischen Zentralblatt erschienen. Aus der Arbeit von Rawitz, sowie aus anderen rein anatomischen Arbeiten wissen wir, daß das zentrale Nervensystem der Anodonta aus drei Ganglien besteht: dem an dem Mundeingang gelegenen Centralganglion, welches das kleinste ist, dem H förmigen Fußganglion und dem am hinteren Schließmuskel gelegenen größten Visceralganglion. Das zerebrale Ganglion steht mit dem visceralen und dem Pedalganglion durch Konnektive in Verbindung, aus jedem der Ganglien kommt eine Anzahl peripherer Nerven hervor.

Jedes Ganglion, sowie jeder größere Nervenstamm ist von einer mikroskopischen homogenen gelatinösen Schicht umgeben, dieselbe steht mit den mit der Apathyschen Methode leicht darstellbaren Neurogliazellen des Ganglions und der Nerven in engem Zusammenhang. Im Inneren jedes Ganglions kann man zwei distinkte Schichten unterscheiden. Der gelatinösen Hülle des Ganglions liegt eine dichte Lage von Zellen an. Dieselben wurden von Rawitz alle für Nervenzellen gehalten, Friedenfelt vermutet jedoch, daß einige (wie er sie nennt) kommaartige Kerne, den Neurogliazellen angehören könnten. Diese Vermutung Friedenfelts ist nach meinen

Untersuchungen ganz gerechtfertigt. Das Neurogliegewebe läßt sich mit der Apathyschen Methode überall zwischen den Nervenzellen konstatieren, so daß man diese Schichte der Ganglien als eine gemeinsame Nerven- und Neuroglia-Schichte betrachten muß. Die Unterschiede der Nerven und Neurogliazellen sollen unten näher erörtert werden.

Das Innere eines jeden Ganglions wird von einem Gewirr von Nervenfasern und Gliafibrillen gebildet, der sogenannten Leydig'schen Punktsubstanz, dem Betheschen Neuropil. In demselben lassen sich nur ganz spärliche Zellen von charakterischem Bau nachweisen.

Der Bau der Nervenzelle.

Die Nervenzellen bilden in allen drei Ganglien die äußere, der gelatinösen Hülle nach innen dicht anliegende, Schicht des Ganglions. Die Größe der Zellen variiert in hohem Grade, sie lassen sich aber alle, sogar die kleinsten, leicht von den Gliaelementen unterscheiden. Sie haben nämlich alle einen ganz runden Kern, während die Kerne der Neurogliazellen immer kleiner und oval sind.

Die Ergebnisse meiner mit der Methylenblau-Methode angestellten Untersuchungen über die äußere Gestalt und die Art und Weise der Verzweigung der Fortsätze der Zellen stimmen im allgemeinen mit den Angaben Friedenfielt's überein. Die unipolaren Zellen sind am zahlreichsten vertreten, dann kommen die bipolaren und endlich die multipolaren Zellen. Von dem einzigen Fortsatz der unipolaren Zellen, der meist einem peripherischen Nerv zuläuft, begeben sich kleine und im allgemeinen wenig zahlreiche Kollateralfasern zum Neuropil. Dieselbe Erscheinung finden wir auch an beiden Fortsätzen der bipolaren Zellen. Die multipolaren Zellen haben gewöhnlich nur einen längeren und mehrere kleine Fortsätze, alle enden unweit vom Zellkörper selbst, so daß sie den Zellen des Golgischen Typus II. entsprechen.

Ich habe eine ganze Reihe von Zellen und ihrer Verästelungen speziell genau untersucht, um festzustellen, ob die Zellen durch ihre Verästelungen in direktem Zusammenhang stehen. Diese Untersuchungen sind bei Anodonta in hohem Grade erschwert. Die Nervenzellen liegen sehr dicht bei einander. Bei gelungener Methylenblaufärbung muß das ganze Ganglion ziemlich stark gepreßt werden, um die Zellen auseinanderzudrängen, und es liegen auch dann

noch immer mindestens in zwei Schichten übereinander. Dieser Umstand allein ermöglicht, die Verzweigungsweise der Zellausläufer zu verfolgen, ist aber gerade für die Beantwortung der gestellten Frage in hohem Grade ungünstig. Trotzdem die Ausbreitung des Ganglions in äußerst behutsamer Weise durch langsam vergrößerte Belastung vorgenommen wurde, mußte man immer die Möglichkeit in Betracht ziehen, daß bei stärkerem Druck solche Verbindungen, wenn sie existieren, zerrissen werden konnten; bei Anwendung eines schwächeren Drucks dagegen lagen die Zellen derart übereinander, daß man auf keine Weise einzelne Verästelungen auf weitere Strecken verfolgen konnte. Obwohl ich bei dieser Untersuchungs-Methode niemals ganz sichere Anastomosen-Verbindungen finden konnte, muß ich gestehen, daß dieser negative Befund vielleicht auch das Resultat der verschiedenen Hindernisse in der Untersuchung sein kann.

Für die Nervenzelle ist am meisten ihr großer, runder Kern charakteristisch; derselbe mißt circa 6μ im Durchmesser in kleinen und $10-12\mu$ in größeren Zellen. Es ist im allgemeinen an Chromatin arm, dagegen reich an Kernsaft. Im Inneren des Kernes finden wir immer ein aus dichter homogener chromatinähnlicher Eiweißsubstanz gebildetes Kernkörperchen.

Das Protoplasma der Zelle selbst ist sehr dicht und in der größten Zahl der Zellen finden wir ein dunkelgelbes Pigment. Das Pigment bildet hier eine fast homogene, aus großen Klumpen zusammengesetzte Masse, und diese liegt in unipolaren Zellen dem Pole der Zelle näher, an dem der Fortsatz beginnt. Die Zellen sind beinahe alle von Pigment erfüllt, an frisch präparierten Ganglien schimmert das gelbe Pigment durch die gelatinöse Hülle des Ganglions hindurch, wenn man aber das Ganglion zerschneidet, so sieht man gleich, daß die innere Schicht des Ganglions, das Neuropil ganz farblos und pigmentlos ist. Mikroskopische Bilder lassen auch im Neuropil das Pigment konstatieren. Man findet es aber im Neuropil nur in äußerst geringer Menge in den zerstreut liegenden spärlichen Neurogliazellen. Außer dem Pigment ist der ganze Zellkörper mit kleinen Körnchen ausgefüllt, welche sich intensiv sowohl mit basischen Farbstoffen, als auch mit dem Haidenhainschen Eisenhämatoxylin färben. Nur die periphere Schicht des Protoplasmas ist im allgemeinen frei von diesen Körnchen. An der Grenze der beiden Schichten finden wir die Verzweigung der Neuro-

fibrillen. Ich muß hier auch gleich erwähnen, daß ich mit keiner Methode eine Spur der Holmgrenschen Kanälchen oder seiner Trophospongien nachzuweisen vermochte; an allen meinen Präparaten war von diesen Gebilden gar nichts zu sehen, auch treten die Gliafasern und Zellen bei Anodonta in keinen näheren Zusammenhang mit dem Protoplasma der Nervenzelle. Die Gliafasern umschlingen in allen Richtungen die Oberfläche der Zelle, dringen aber niemals ins Innere des Zellkörpers der Nervenzelle hinein.

Das funktionell Wichtigste in der Nervenzelle, die Neurofibrillen, „das Leitende“, wie es Apathy bezeichnet — gelang es mir trotz der großen Masse der angefertigten Präparate nur in einigen gut differenziert mit der Nachvergoldungsmethode zu bekommen. Die Fibrillen sind in diesen Präparaten ganz dunkel gefärbt in hellrosafarbigem Protoplasma zu sehen. Im allgemeinen ist die Zahl der Fibrillen bei Anodonta noch viel geringer, als bei Hirudo und Lumbricus, und sie sind im Vergleich mit den Zellen von Helix und von Wirbeltieren äußerst schwach entwickelt. Die Zahl der in die Zelle hineintretenden Fibrillen beträgt 2 bis 5. Jede derselben verläuft im Zelleib der an der Grenze zwischen der oberflächlichen hellen und der inneren, infolge der Ansammlung der zahlreichen kleinen Körnchen dunkel erscheinenden perinucleären Schicht. Die Fibrillen teilen sich im Zelleib und bilden ein sehr weitmaschiges Netz. Das von Apathy beschriebene doppelte

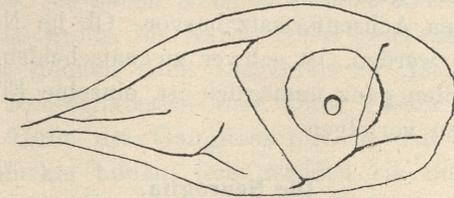


Fig. 1.

Netz, ein perinucleäres und ein an der Peripherie der Zelle gelegenes ist bei Anodonta nicht zu unterscheiden; es scheint, als ob hier die beiden Netze zu einem einzigen in der Mitte zwischen dem Kern und der Peripherie liegenden vereint wären. Dieses Netz wird hauptsächlich von Fibrillen gebildet, die längs der Meridiane verlaufen, manche derselben biegen aber in einem zum Meridian spitzen Winkel ab und gelangen auf diese Weise in eine

zum Meridian schräge Richtung (Fig. 1), sie nähern sich auf diese Weise der nächstliegenden Fibrille und verbinden sich mit derselben. Ganz quer verlaufende Verbindungen finden wir äußerst selten (Fig. 2). An dem dem Achsenzylinder entgegengesetzten Pole

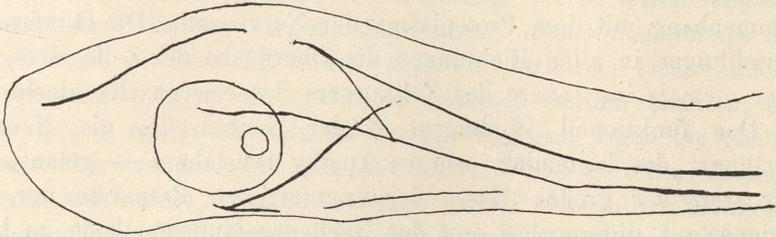


Fig. 2.

werden die Maschen weiter, die Fibrillen scheinen hier dünner zu werden und sind hier auch sehr schwer zu verfolgen.

Diese Bilder, die ich mit der Apathyschen Nachvergoldungsmethode erhielt, lassen sich auch bei Anwendung der neuen Silberimprägnation von Cajal feststellen, die nach der Apathyschen Methode hergestellten Präparate liefern aber viel deutlichere Bilder.

Auch an diesen Präparaten habe ich, ebenso wie an den mit Methylenblau gefärbten, vergebens nach Verbindungen zwischen den Zellen mittelst Fibrillen gesucht. Die Fibrillen jeder Zelle bilden immer ein geschlossenes Netz und kommen alle aus derselben durch den Achsenfortsatz hervor. Ob im Neuropil Anastomosen gebildet werden, ist schwer zu entscheiden, da es im Gewirre der Fibrillen ganz unmöglich ist, einzelne Fibrillen auf längere Strecken zu verfolgen.

Die Neuroglia.

In der wertvollen Monographie über das zentrale Nervensystem der Acephalen von Rawitz finden wir die Meinung ausgesprochen, daß das Nervensystem der Acephalen des Gliagewebes gänzlich entbehrt, es sollen nach Rawitz in den zentralen Ganglien der Acephalen keine Neurogliazellen, der Vertebraten homologen Zellen zu finden sein, überhaupt kein Bindegewebe. Dagegen vermutet Friedenfeldt, daß gewisse kleine Zellen, die sich durch ihren „geschwänzten“ Kern auszeichnen, den von Kollmann und Thiele beschriebenen Spindelzellen des Bindegewebes der Lamellibranchier

ähnlich und als Bindegewebe (Neuroglia)-Zellen zu betrachten seien. Rawitz betrachtete auch diese Zellen als nervöse Gebilde. Die Existenz der Neurogliaelemente der Lamellibranchier ist demnach noch eine offene Frage.

Meine Untersuchungen lassen mich, dank den neuen angewandten Methoden, neue Tatsachen nach dieser Richtung hin feststellen. Die Existenz von Bindegewebelementen läßt sich mit Hilfe der Apathyschen Methode in unzweideutiger Weise feststellen. Man kann nicht nur die Neurogliazellen selbst, der Lage ihrer Kerne nach, leicht erkennen, sondern auch die aus diesen Zellen entspringenden Neurogliafasern lassen sich auf lange Strecken hin sehr gut verfolgen. Die Neurogliazellen kann man ihrer Lage und dem Verlauf ihrer Fasern nach in drei Gruppen einteilen. Die einen liegen noch außerhalb der Ganglien auf der homogenen gelatinösen Hülle; wir wollen sie äußere Gliazellen nennen. Die zweite Art der Neurogliazellen liegt im Inneren des Ganglions, in der äußeren d. h. in der Zellschicht desselben; sie sind meist spindelförmig und dringen mit ihren Ausläufern zwischen die Nervenzellen hinein; ihrer Gestalt wegen will ich sie spindelförmige Gliazellen nennen. Die dritte Art der Zellen wird nur im Neuropil gefunden, sie bilden die Neuropils-Gliazellen.

Die äußeren Gliazellen (Taf. V. fig. 1) sind abgeplattete, sternförmig und auf der äußeren Fläche der gelatinösen Ganglionhülle ausgebreitet. Sie haben einen ellipsoiden Kern von 8 bis 12μ Länge und $2-4\mu$ Breite, ihr Kern enthält gewöhnlich kein Kernkörperchen. Die dünnen flach ausgebreiteten Äste gehen an den Enden in feine Neurogliafasern über. Diese Fasern laufen teils auf der gelatinösen Hülle des Ganglions fort, so daß sie eine äußere Neurogliafaserschicht bilden, teils wenden sie sich dem Inneren des Ganglions zu, brechen die gelatinöse Hülle durch und verbinden sich mit den Fasern der im Inneren des Ganglions liegenden Neurogliazellen. Auf dem Wege durch die gelatinöse Hülle sind sie im Inneren derselben als leicht wellenförmig geschlängelte Fasern zu unterscheiden. Diese Art der Neurogliazellen von Anodonta entspricht den von Smidt für die Ganglien von *Helix* beschriebenen Hüllzellen. Dieselben treten auch an meinen mit der Apathyschen Methode gefärbten Präparaten der Ganglien von *Helix* sehr deutlich hervor. In meiner Arbeit über das zentrale Nervensystem von *Helix* habe ich dieselben nicht in Betracht gezogen, da sie

außerhalb der Ganglien liegen. Ich habe auch einige Male mit der Golgi'schen Methode Versuche angestellt, die Zellen zu imprägnieren, und sie mit den Bildern von Smidt vergleichen zu können. Bei Anodonta gelang mir aber die Imprägnation derselben niemals.

Die zweite Art der Neurogliazellen, die Spindelzellen, sind am zahlreichsten, wir finden dieselben im Inneren des Ganglions in dessen Zellschichte. Diese Zellen sind von spindelförmiger Gestalt und haben einen langgestreckten Kern von 8—10 μ Länge und 2—4 μ Breite. Der Kern selbst ähnelt sonst seiner Struktur nach dem Kerne der Ganglienzellen, er enthält gleichfalls ein rundes sehr deutliches Kernkörperchen. Die langgestreckte Form der Kerne und der an den Apathyschen Präparaten deutlich wahrnehmbare Zusammenhang der Zellen mit den Gliafasern läßt leicht die neurogliöse Natur der Zellen erkennen. Der schwächliche Protoplasma-Körper dieser Zellen läuft gewöhnlich in zwei deutliche Ausläufer aus. Die Ausläufer wenden sich entgegengesetzten Richtungen zu, die Zellen selbst liegen radiär zur Oberfläche des Ganglions, öfters zu mehreren zusammen, so daß sie kleine zwischen die Nervenzellen eindringende Säule bilden (Taf. V. fig. 2). Von ihren Fortsätzen begibt sich der eine zur äußeren Fläche des Ganglions, der andere in der Richtung zum Neuropil.

Der sich nach außen ziehende Fortsatz dringt in radiärer Richtung bis zur inneren Fläche der gelatinösen Hülle des Ganglions; hier angelangt, biegt er von dieser Richtung ab und läuft weiter an dieser Fläche entlang. An tangentialen Schnitten läßt sich diese Schicht der Neurogliafasern leicht feststellen. Manche Fasern dieser Schichte dringen ins Innere der gelatinösen Hülle ein und verbinden sich in derselben mit den Gliafasern der äußeren Hülle. Auf diese Weise bilden die Gliafasern der beiden beschriebenen Zellenarten zwei zusammenhängende Faserschichten, die die gelatinöse Hülle beiderseits bedecken, zwischen ihnen bestehen aber die beschriebenen Verbindungen.

Die nach innen gerichteten Fortsätze der Spindelzellen winden sich zwischen den Ganglienzellen hindurch und gelangen endlich ins Neuropil. Auf ihrem Wege zwischen den Nervenzellen zweigen sich von ihnen mehrere Seitenäste ab und verbinden sich unter einander zu dem die Ganglienzellen und ihre Verästelungen tragenden Gerüst. Im Neuropil angelangt, treten sie in Verbindung mit der darin gelegenen dritten Art von Gliazellen

und nehmen bedeutenden Anteil an der Bildung des Neuropils. Der Zusammenhang der zwischen den Ganglienzellen gelegenen Zellen mit dem Fasernetze, welches die gelatinöse Schichte umgibt, läßt keinen Zweifel über die neuroglöse Natur dieser Zellen zu. Dieselbe wird auch bestätigt durch ihr Verhalten bei der Methylenblaufärbung. Während die Ganglienzellen schon nach 6 bis 8 Stunden gefärbt erscheinen, färben sich diese Zellen erst nach 20—24 Stunden, also in einer Zeit, wo alle die Nervenzellen bereits wieder gänzlich verblaßt sind. Ihre Ausläufer bleiben dabei ganz farblos, lassen sich aber, besonders an frisch beobachteten Präparaten, leicht auffinden, da sie infolge ihres starken Lichtbrechungsvermögens als glänzende Fasern im mikroskopischen Bilde auffallen.

Die dritte Art der Neurogliazellen finden wir ausschließlich im Neuropil. Sie zu erkennen, ist umso leichter, als man im Neuropil keine anderen Zellen findet. Diese Zellen sind die größten von allen Gliazellen, haben einen meist unregelmäßig gestalteten Kern, der durch das in diesen Zellen angesammelte orange-färbige Pigment ganz an die Peripherie der Zelle verschoben ist. Das angehäuften Pigment verursacht die starke Volumzunahme der Zellen, nur eine dünne periphere Schicht des Protoplasmas bleibt pigmentfrei. In dieser Schichte finden wir ein engmaschiges Netz der zur Zelle gehörenden Gliafasern. Diese Fasern, die in der Zelle selbst durch feine Fäserchen untereinander verbunden sind, verlassen die Zelle und münden, verschiedene Richtungen einschlagend, ins Neuropil. Man kann diese Fasern leicht von einer Gliazelle des Neuropils in eine andere verfolgen. Diese Zellen hat Rawitz richtig beobachtet und sie „Schaltzellen“ genannt, er betrachtete sie aber als Nervenzellen. Am Beginn meiner Untersuchung war ich auch der Meinung wie Rawitz, und da man zwischen diesen Zellen eine ganze Masse von direkten Verbindungen sieht, glaubte ich einen neuen Befund zu haben, der gegen die Neuronenlehre sprach. Nachher ist es mir aber gelungen die Neurogliafasern von den Neurofibrillen färberisch zu differenzieren und ich habe die bindegewebige Natur dieser Zellen anerkennen müssen. Es wäre aber auch möglich, daß diese Zellen ein ähnliches Übergangsstadium von den Ganglienzellen zu den Gliazellen bilden, wie die von Apathy genau untersuchten Leydigischen Zellen der Hirundineen.

„In denselben“, sagt Apathy, „treten die leitenden Primitivfibrillen noch mehr zurück und das Glianetz gewinnt die Oberhand“. Diese

Vermutung würde dann gänzlich bewiesen sein, wenn es gelänge in diesen Zellen noch Neurofibrillen nachzuweisen. Dies ist mir aber niemals gelungen.

Die Struktur der Nervenstämmе.

Die peripherischen Nerven und die Ganglien verbindenden Konnektive haben bei Anodonta ganz dieselbe Struktur. Die gelatinöse Hülle des Ganglions geht auf dieselben bei ihrem Ursprung aus dem Ganglion über und ist selbst bei sehr dünnen Nerven (von einigen μ Dicke im Durchmesser) noch deutlich sichtbar. Was die zelligen Elemente der Nerven betrifft, so finden wir zwei Arten derselben: Die einen Zellen färben sich leicht mittels Methylblau und sind gleich als Ganglienzellen zu erkennen, die anderen haben ganz dieselben Kerne, wie die spindelförmigen Zellen der Neuroglia in den Ganglien und stehen in innigem Zusammenhang mit den Bindegewebsfasern der Nerven: dies sind auch die Bindegewebszellen der Nerven.

Die Ganglienzellen der Nerven sind ausschließlich bipolare Zellen. Ihre an den beiden Polen entspringenden Fortsätze sind meistens an Dicke ganz gleich und verlaufen am häufigsten in ganz entgegengesetzter Richtung. Es finden sich aber manchmal auch Zellen, deren beide Fortsätze man bei genauer Verfolgung im Nerv, in derselben Richtung verlaufen sieht. In diesen Fällen ist die Zelle selbst, oder einer der Fortsätze V förmig gekrümmt. Öfters finden sich Ganglienzellen an den Teilungsstellen der Nerven.

Die anderen zelligen Elemente der Nerven sind die Neurogliazellen. Ihrem Bau nach stehen sie den spindelförmigen Zellen der Ganglien sehr nahe. Über die Gestalt dieser Zellen läßt sich auf Grund der gefärbten Schnitte nur wenig sagen, die Imprägnation derselben gelingt hier ebensowenig wie in den Ganglien selbst. In dem Körper dieser Zellen lassen sich dagegen äußerst leicht Gliafasern differenzieren. Die Fasern laufen von einer Zelle zur anderen und umspinnen in verschiedenartigen Richtungen die Bündel der Nervenfasern. In den großen Nerven findet man immer einige Zellen an der Peripherie, von diesen ziehen ins Innere der Nerven bindegewebige Scheiden, die im Nerven ganze Septen bilden (Taf. V. fig. 3). Diese Septen werden einerseits von den Glia-Nervenfasern, andererseits auch von den zwischen den Nervenfasern gelegenen inneren Gliazellen gebildet. Von den Hauptsepten spalten

sich weiterhin zahlreiche Lamellen ab, welche die ganze Masse der Fasern in Bündel einteilen. Der Querschnitt eines Nerves von *Anodonta* ist also ganz ähnlich dem Querschnitte eines Nerves von *Helix*, wie ich ihn aus meinen Präparaten kenne und wie er richtig in Schneiders „Vergleichender Histologie“ abgebildet ist. Ich möchte noch hervorheben, was vielleicht in Schneiders Abbildung nicht klar genug zu sehen ist, daß die Septa und die Lamellen sowohl bei *Helix* wie bei *Anodonta* nicht nur aus einer protoplasmatischen Masse gebildet sind, daß in denselben vielmehr immer auch ganz deutliche längs- und querverlaufende Gliafasern sich befinden. Die Nervenfasern, die an Methylenblau-Präparaten leicht zu untersuchen sind, scheinen in Bündeln ganz parallel zu laufen, doch konnte ich deren Verbindungen im Nerv niemals konstatieren.

Ich habe in allen Nervenstämmen vergebens nach den von Apathy als „Nervenzellen“ beschriebenen Gebilden gesucht. Die Existenz derselben müßte ja für die Nerven konstant sein, wenn ihnen die von Apathy zugemutete Funktion der Nervenfibrillenbildung wirklich zufiele. Ich muß betonen, daß ich solche Zellen weder bei *Anodonta* noch bei *Helix* und den *Tunicaten* gefunden habe.

Die beschriebene Struktur der Nerven bezieht sich hauptsächlich auf die größeren Stämme und die Konnektive, die kleineren sind im allgemeinen ähnlich gebaut, sie haben jedoch keine Septen und ihre Gliazellen liegen fast ausschließlich an der Peripherie der Nerven. Deutliche feine Scheiden kommen aber auch an diesen Nerven stets vor.

Untersuchungen an *Tunicaten*.

Das zentrale Nervensystem der *Tunicaten* wird hauptsächlich durch ein großes Ganglion gebildet, das zwischen den beiden Siphonen gelegen ist. Als Untersuchungsmaterial habe ich anfangs *Ciona intestinalis* benützt, nachher die großen Larven von *Distaplia magnilarva*, auf welche Prof. Julin, der zu gleicher Zeit, als ich in der Neapeler Station arbeitete, meine Aufmerksamkeit gelenkt hat. Er war auch so freundlich, mir einige dreißig Stück aus seiner Kultur zur Verfügung zu stellen. Das Material von *Distaplia* erwies sich viel günstiger, als das von *Ciona*. An *Ciona* habe ich mit allen möglichen Methoden mit der Golgischen mit der Cajalschen, mit der Methylenblaufärbung mit der Apathyschen Nachvergoldungs-

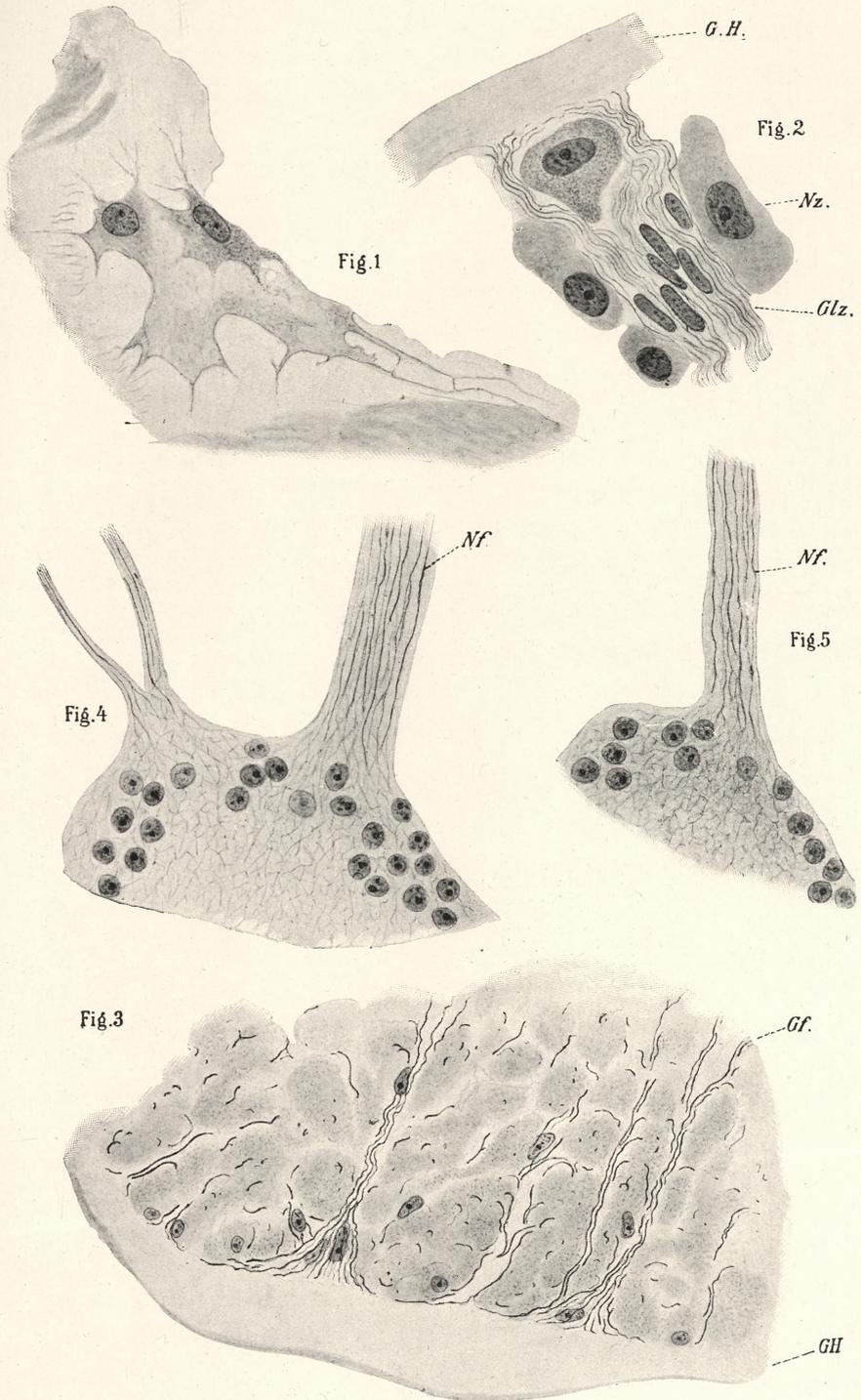
Methode Versuche angestellt, jedoch ohne Erfolg. Bei Distaplialarven gelang es mir nur mit der Nachvergoldungsmethode Neurofibrillen zu differenzieren.

Seit den Arbeiten von van Beneden und Julin und seit der Arbeit Nansens finden wir keine neueren Arbeiten über das zentrale Nervensystem der Tunicaten. Es schien mir also wünschenswert, diese Gruppe in den Bereich der Untersuchungen zu ziehen. Die Untersuchungen scheiterten zum größten Teil an der Resistenz des Materials gegen die Untersuchungsmethoden.

Als einziges Resultat kann ich nur die Feststellung der Existenz der Neurofibrillen sowohl im Nerv, wie in Ganglion selbst anführen. Die zwei Abbildungen (Taf. V. fig. 4 i 5) lassen die Art und Weise des Fibrillenverlaufs in den Nerven erkennen. Die Fibrillen einzeln im Ganglion zu verfolgen, war mir nicht möglich, ihr Verhältnis zu den Zellen, die hier äußerst klein sind, ließ sich nicht entziffern. Ich möchte aber einen Umstand hervorheben, der auch aus den Abbildungen zu ersehen ist, und der, wie es mir scheint, nicht ohne Bedeutung ist. Die Nerven der Larven von *Distaplia* enthalten in dem Stadium der Entwicklung, auf dem ich sie untersucht habe, keine Zellen. Auf Serien-Schnitten läßt sich dies aufs deutlichste feststellen, es treten auch keine Bindegewebszellen an die Nerven heran. Bei erwachsenen Individuen finden wir aber in jedem Nerv eine ganze Menge von Zellen. Dieselben müssen hier also später eingewandert sein. Dieser Umstand scheint mir in hohem Grade gegen die Theorie der Entstehung der Nerven aus Zellketten zu sprechen; man wäre sonst gezwungen anzunehmen, daß in diesen Nerven alle die primären nervenbildenden Zellen spurlos zugrunde gegangen seien. Ich glaube also, daß diese Bilder der Nerven der *Distaplia*-Larven in hohem Grade zu Gunsten der Auswachsungstheorie sprechen. Die Annahme dieser Art der Nervenentstehung hat auch durch die hervorragenden experimentellen Untersuchungen von Harrison neue Begründung erhalten.

Untersuchungen an Echinodermen.

Ein weiteres Objekt meiner Studien war als Repräsentant der Echinodermen die kleine Holoturie *Synapta*. Die Präparate wurden wieder hauptsächlich in derselben Weise behandelt, wie die von *Anodonta* und von Tunicaten, d. h. mit der Apathyschen Nachvergoldungsmethode. Im großen periösophagealen Nervenring der-



selben, sowie auch in den radiären Nervenstämmen treten bei der Nachvergoldung Neurofibrillen hervor. Das Bild der Neurofibrillen wird aber in hohem Grade durch die sich mitfärbenden Gliafasern verwischt. Es gelang mir nicht, eine färberische Differenzierung der Neurofibrillen und der Gliafasern in der Weise, wie z. B. bei Anodonta zu erreichen. Während man die dickeren Gliafasern leicht als solche ihrem charakterischen Verlaufe nach erkennen kann, ist man bei den dünneren immer im Zweifel. Dieser Umstand gestattet auch nicht die Verhältnisse der Neurofibrillen zu den Zellen zu erkennen, da die kleinen Zellen von einem dichten Glia- und Neurofibrillen-Gitter umspinnen sind.

Aus dem anatomischen Institut der Jagellonischen Universität in Krakau.

Figurenerklärung.

Fig. 1. Äußere Gliazellen des Ganglions, der gelatinösen Hülle anliegend. Zeiss Imm. 2 mm. Comp. oc. 6.

Fig. 2. Ein Stück der peripheren Schicht des Ganglions. G. H. Gelatinöse Hülle, Nz. Nervenzellen, Glz. Gliazellen.

Fig. 3. Ein Stück eines größeren peripheren Nerven. G. H. Gelatinöse Hülle, Glf. Gliafasern.

Fig. 4. i 5. Die Abschnitte von Ganglien einer Distaplia Larve. Nf. Neurofibrillen.

Literatur.

Apathy. Das leitende Element des Nervensystems. Mitteilungen der zoolog. Station zu Neapel Band 12. 1897.

Bethe. Allgemeine Anatomie und Physiologie des Nervensystems. Leipzig 1903, in der alle seine früheren Arbeiten zusammengestellt sind.

Bielschowski. Die Silberimprägnation der Fibrillen. Neurolog. Zentralblatt B. 22, 1904.

Boeke. On the structure of the light perceiving cells in spinal cord. Koninklijke Akademie van Wetenschappen. Amsterdam, 1902.

Cajal. Un sencillo metodo di coloracion electiva del reticulo protoplasmatico. Trabajos de laboratorio di investig. biolo. Madrid, 1903.

Friedenfelt. Das zentrale Nervensystem von Anodonta. Biologisches Zentralblatt B. 17, 1897.

Joris. A propos d'une nouvelle méthode de coloration des neurofibrilles. Bull. de l'acad. Royal de Médecine de Belgique T. XVIII, 1904.

Joris. Nouvelles recherches sur les rapports anatomiques des neurones. Mémoires couronnées de l'Académie Royale de médecine de Belgique, 1903.

Nansen. The structure and combination of the histological elements of the central nervous system. Bergens Museums Reports, 1888.

Rawitz. Das zentrale Nervensystem der Acephalen. Jenaische Zeitschrift für Naturwiss. Band 20. 1887.

Schneider K. Vergleichende Histologie. Wien, 1904.

Smidt H. Über die Darstellung der Begleit- und Gliazellen von Helix. Archiv für Anatomie Band 55. 1900.

van Beneden. Le système nerveux central des Ascidies. Archives de Biologie, vol. 5. 1884.

van Beneden et Julin. Recherches sur la morphologie de tuniciers. Arch. de Biologie, vol 6. 1886.

-
11. Mme CAROLINE REIS. Przyczynek do morfologii Kostek Webera i pęcherza pławnego sumowatych. (*Contribution à la morphologie des ossicules de Weber et de la vessie natatoire chez les Siluroïdes nebulosus*). Mémoire présenté par M. J. Nusbaum m. c.

(Planche VI).

La chaîne d'osselets qui réunissent l'organe de l'ouïe avec la vessie natatoire, fut pour la première fois décrite par Weber dans son oeuvre: „De aure animalium aquatiliū“ (1820). Il les examina chez les Cyprinoïdes et chez les Siluroïdes avec une grande exactitude, mais il les interpréta faussement comme homologues des ossicules auditifs des Mammifères et leur donna en conséquence les noms: stapes incus malleus, claustrum.

Les auteurs suivants ont constaté l'existence de ces osselets chez d'autres familles de poissons: Bar chez les Gymnotides (1835), Heusinger chez les Characinides (1826). Tous deux aussi bien que Cuvier et Duvernoy dans: „Les leçons d'Anatomie comparée (1846) confirment l'homologie de l'appareil auditif chez les poissons avec celui des Mammifères.

En même temps quelques autres auteurs comme: Geoffroy St. Hilaire (1824) et d'après lui Meckel (1824) ont constaté que les osselets auditifs sont formés de pièces des arcs supérieurs des trois premières vertèbres. Néanmoins ils avaient sur la nature particulière des osselets auditifs des opinions erronées. Dans la seconde moitié du siècle passé, deux auteurs: August Müller (6) et Baudelot (1), indépendamment l'un de l'autre, ont trouvé que chez les poissons les pièces en question prennent naissance des arcs supérieurs et inférieurs des vertèbres. Les études qui ont paru plus tard sur les différentes familles et espèces de poissons ont confirmé cette hypo-

thèse, mais les noms donnés par Weber y ont été conservés. C'est d'abord Bridge et Haddon (3) qui pour éviter toute confusion avec les osselets de l'ouïe des Mammifères proposent le changement suivant dans la nomenclature: „scaphium“ au lieu de stapes eu égard à sa forme d'un coquillon; „intercalarium“ au lieu de incus à cause de la position qu'il occupe entre le stapes et le malleus; enfin „tripus“ au lieu de malleus parce qu'il a trois appendices. Le nom du quatrième osselet claustrum peut être conservé puisqu'il manque aux Mammifères.

Malgré les nombreux efforts faits pour déterminer avec certitude la signification morphologique de chacune de ces pièces, certaines questions et surtout celle de l'homologie du claustrum n'ont pas été encore résolues.

Les différentes hypothèses faites au sujet de l'origine du claustrum peuvent être ramenées aux cinq groupes cardinaux:

I Les claustra sont d'après Sorensen (12) l'os commisural (qui ferme en haut le canal de la moëlle épinière) de la première vertèbre, qui est pair et correspond aux ossa imparia chez l'esturgeon. Beaudelot les regarde comme un os intercrural partagé en deux [il ne dit pas s'il les regarde aussi comme homologues des ossa imparia].

II. Nusbaum (7) et Bridge (3) maintiennent l'opinion, que l'apophyse épineuse de la première vertèbre s'est transformée en claustra.

III. Sagemehl (9) affirme que les claustra viennent de la partie occipitale du crâne.

IV. Wright (14) considère les claustra comme une apophyse épineuse soudée avec les cartilages et cet ensemble serait, d'après lui, l'homologue des arcs intercalaires des Selaches.

V. D'après Bloch (2) enfin, les claustra dérivent des cartilages situés entre l'arc et la moëlle épinière (décrits par Scheel (10) chez les Salmonides).

La première, la troisième et la quatrième interprétation furent avec raison combattues par Bloch (2) S'appuyant sur les études de Scheel, il admet que les pièces dont on vient de parler sont homologues des cartilages qu'on rencontre chez les Salmonides, entre la moëlle épinière et le Ligamentum longitudinale sup.

Mais cette interprétation de Bloch nous paraît peu fondée d'autant plus, que les études de Scheel et nos propres préparations anatomiques et microscopiques de l'Amiurus nebulosus ont donné des résultats bien

différents. Scheel (10) s'exprime ainsi: „Die vier ersten Wirbel treten vermittelt ihrer oberen Bogen und Dornfortsätze resp. ihrer Rippen zum Gehörorgan in Beziehung“. Des osselets auditifs, les claustra seuls dérivent de l'apophyse épineuse; l'opinion émise par Scheel témoigne qu'il les considéra avec Nusbaum comme l'apophyse épineuse transformée.

Les autres remarques de Scheel semblent confirmer cette opinion. Chez les Cyprinoïdes [Rhodeus], qui ont une plus grande affinité avec les Siluroïdes que les Salmonides [qui n'ont pas d'osselets auditifs], Scheel ne fait aucune mention des cartilages en question, au contraire il dit: Dorsal von letzterem verschmelzen die Knöch... en „knöchernen Spitzen der Neurapophysen zu einem langen unpaar medianen Stück, welches dem Dornfortsatz anderer Teleostier entspricht“. L'idée conçue par Bloch de comparer les claustra avec les cartilages mentionnés lui fut inspirée par l'observation suivante de Scheel: „Bei vielen Teleostiern [Anguilla, Conger Silurus, Esox, Clupea u. a.] bilden nämlich die oberen Bögen indem sie zwischen dem Nerwenzohr und dem dorsalen Längsband durch eine Querbrücke [qui résulte d'une soudure de ces deux cartilages] verbunden sind, einen doppelten Kanal je einen für das Rückenmark und für das Längsband“.

Bloch s'appuyant sur cette observation incomplète de Scheel énonce l'opinion suivante: „Die Zusammengehörigkeit der vier Ostariophysen Familien wird heutzutage niemand mehr bezweifeln wollen, so dass also auch wenigstens an den vordersten drei Wirbeln jener Fische die den übrigen 3 Ostariophysen Familien angehören das Vorhandensein des homologons zu der Verbindungsbrücke sehr wahrscheinlich sein wird“.

Chez les Cyprinoïdes sus-indiqués, il n'y a pas de double canal et sur les coupes transversales de la colonne vertébrale de l'Amiurus, nous n'avons pas non plus trouvé l'existence de ce canal. Au contraire, nous avons constaté que la substance osseuse recouvre „hutartig“, comme Scheel l'a décrit chez Rhodeus, les arcs supérieurs. Il faut alors discerner deux formes de jointure des arcs supérieurs chez les poissons comme le font Götte (4) et Grassi (5):

1) Les extrémités des arcs se soudent au dessus de la moëlle épinière et Lig. long. sup. en formant l'apophyse épineuse. (Cyprinoïdes Siluroïdes et c.)

2) Entre la moëlle épinière et Lig. long. sup. se trouve une

jointure osseuse (Salmonides, Clupeides, Esocides). Les études embryologiques résoudront dans l'avenir la question de l'homologie de ces deux sortes de jointures des arcs supérieurs. Ce qui est pour nous très important, c'est que ces deux auteurs confirment le fait qu'il n'y a pas un double canal chez les Cyprinoïdes resp. chez les Siluroïdes.

Enfin, il faut remarquer que l'illustration de gardon, que Sorensen (12) donne dans son ouvrage pour prouver l'existence des os commissuraux, est pour chacun qui a préparé les quatre premières vertèbres de la Carpe, l'affirmation de l'hypothèse de Nusbaum: que les claustra et les cartilages situés derrière eux sont les apophyses épineuses des trois premières vertèbres, apophyses qui se sont séparées des arcs, parce que ces derniers transformés, se sont réunis sur les flancs de la colonne vertébrale.

Nous avons trouvé les mêmes rapports chez les Siluroïdes. Nous sommes donc autorisés à regarder les claustra comme l'apophyse épineuse de l'arc de la première vertèbre.

Quant aux stapedes, tous les auteurs conviennent qu'ils représentent les branches de l'arc supérieur de la première vertèbre.

En ce qui concerne les incudes, s'ils ne sont pas devenus tout à fait rudimentaires, on les regarde comme les branches de l'arc supérieur de la seconde vertèbre. Ce n'est que Sagemehl (9), qui les interprète comme les côtes de la seconde vertèbre. Il est difficile de comprendre cette erreur, parce que la deuxième vertèbre a toujours un arc inférieur distinct et l'incus en forme d'un petit osselet au dessus, qui s'unit à la vertèbre au lieu où l'on trouve l'arc de la vertèbre normale.

Les mallei sont les branches de l'arc inférieur de la troisième vertèbre. Les uns les considèrent comme les apophyses transverses, les autres comme des côtes. En absence de la côte, il est difficile de discerner si cette pièce est une apophyse transverse formée par la soudure de la partie basilaire de la côte avec la vertèbre ou si la côte elle-même a pris part à cette formation.

Nous croyons cependant, que l'existence d'une union mobile de malleus, sa forme et sa position auprès de la colonne vertébrale indique qu'il est plutôt une côte transformée, qu'une apophyse transverse.

Les quatre osselets se trouvent dans un espace lymphatique

nommé „fossa auditoria (Weber) et ils joignent l'organe de l'ouïe proprement dit avec la vessie natatoire.

L'organe de l'ouïe chez les Siluroïdes a la même structure que celui des Cyprinoïdes (Nusbaum 7). Les saccules se joignent par un canal transversal nommé „ductus endolymphaticus“, dont la paroi postérieure sert d'origine à un petit sac impair „Saccus endolymphaticus. Celui-ci est placé dans la partie antérieure du „Cavum sinus imparis, qui est limité en bas par l'occipitale basilare, en haut et sur les côtés par l'occipitale laterale. Cette cavité impaire est tapissée par une couche délicate du périoste, qui se prolonge derrière le grâne couvrant l'espace lymphatique situé immédiatement derrière lui, entre la corde dorsale et la moëlle épinière. Cet espace lymphatique doit être homologue du ductus submembranacei“ chez les Cobitides (Sidoriak 11).

En examinant une série de coupes transversales chez l'Amiurus, nous voyons que le revêtement de cet espace devient plus épais sur la ligne médiane de la paroi ventrale et dorsale. Il forme ensuite deux saillies qui se rencontrent au milieu de cette cavité et forment une cloison longitudinale qui sépare deux espaces lymphatiques nommés „Atria sinus imparis. Cette cloison, d'une épaisseur du diamètre des „Atria“ voisins, s'élargit en haut de sorte qu'elle enveloppe la moëlle épinière en bas et des deux côtes. Cette cloison se compose d'un tissu conjonctif avec des fibres très denses et irrégulièrement croisées, fibres élastiques dispersées ga et là et de quelques vaisseaux sanguins qui la traversent.

Outre cette cloison, les „Atria sinus imparis“ sont entourés par les stapedes sur les côtés et les claustra en haut. Bien que Wright et d'après lui Bridge n'admette pas qu'il existe une relation entre les claustra et les atria, ce fait semble résulter cependant de l'examen de nos préparations. Les autres osselets, à savoir l'incus et le malleus, sont liés par un tendon avec le stapes et l'extrémité postérieure du malleus s'insère à la paroi antérieure de la vessie natatoire. C'est ainsi qu'est configurée la chaîne des osselets qui joignent l'organe de l'ouïe avec la vessie natatoire. Les osselets auditifs représentent comme nous l'avons déjà mentionné des parties des vertèbres transformées afin d'accomplir plus facilement leur fonction physiologique.

La première vertèbre possède un corps très petit (comparé avec un corps normal). Les arcs inférieurs sont rudimentaires; sur la

surface dorsale, il y a deux cavités articulaires pour les arcs supérieurs qui sont transformés en stapedes. Ceux-ci ressemblent à des coquillons, qui avec leur surfaces concaves se tournent vers „l'atrium sinus imparis“ et qui avec leurs bords postérieurs épaissis s'attachent aux incudes, en bas à la vertèbre et en haut aux claustra. Les claustra ont la forme d'un coquillon ovale [Wright 13 le décrit comme un triangle] avec un appendice long comme lui-même. Cet appendice est tourné en haut et s'unit avec l'apophyse épineuse de la seconde vertèbre qui est mise en avant.

Le corps de la deuxième vertèbre s'unit aux troisième et quatrième vertèbres, qui se sont soudées en une seule pièce; tout cela est analogue aux deuxième et troisième vertèbres chez la Carpe. Les arcs supérieurs de la deuxième vertèbre sont transformés en incudes qui ont la même forme que ceux de la Carpe. L'incus s'unit par sa large base au stapes et la plus large de ses deux apophyses par un tendon au corps de la deuxième vertèbre. Les arcs inférieurs sont transformés en pièces ptérygoïdes, qui constituent des apophyses transverses de cette vertèbre.

La troisième vertèbre a des arcs typiques avec une apophyse épineuse, mais la forme des côtes est modifiée. Les côtes forment des osselets munis de trois appendices: a) l'appendice antérieur et supérieur qui se joint au stapes; b) l'appendice médian et articulaire qui s'adapte à l'échancrure entre la seconde et la troisième vertèbre; c) l'appendice le plus grand et postérieur, qui est semilunaire, s'insère à la vessie natatoire.

La quatrième vertèbre est normale; ce ne sont que les arcs inférieurs qui, transformés en apophyses transverses forment comme ceux de la seconde vertèbre des pièces ptérygoïdes.

Les coupes transversales des premières vertèbres de l'Amiurus nebulosus montrent, que outre les canaux de la moëlle épinière et de la corde dorsale, il y a ici trois autres canaux: le canal de l'aorte et les canaux des reins.

Sorensen (12) trouva de conditions analogues chez les autres Siluroïdes et les interpréta ainsi: „le corps de la grande „vertèbre „antérieure [qui provient de la soudure de trois vertèbres 2-me, 3-me „et 4-me] est formé dans sa majeure partie par l'ossification de la „membrane externe de la vessie natatoire ...en outre la plèvre... „et la paroi de l'aorte doivent participer à la formation de la masse osseuse“.

Il appuya son interprétation sur les faits suivants:

1) La membrane externe a disparu „le long du corps de la grande vertèbre;“ la membrane interne „n'est revêtue que par un tissu ressemblant à du périoste“.

2) Dans la masse osseuse des vertèbres, on trouve une bande étroite de fibres qui ont la même direction que les fibres de la cloison transversale antérieure de la vessie natatoire [ce n'est qu'un fait isolé. Sorensen l'a trouvé seulement chez le *Platystoma*].

3) L'extrémité postérieure du malleus n'est revêtu que de la membrane interne (sur nos préparations, nous avons trouvé au contraire un renflement de la membrane externe à l'endroit où le malleus s'insère à la vessie natatoire).

4) Il y a une crête transversale derrière le milieu de la grande vertèbre „qui constitue le bord supérieur de la cloison antérieure de même que la carène longitudinale celui de la cloison longitudinale“.

La masse osseuse des vertèbres est entourée d'un tissu conjonctif qui se trouve sous le corps et les arcs inférieurs des vertèbres. Ce tissu prend part à la formation des cloisons longitudinale et transversale par l'union avec la paroi inférieure de la vessie natatoire.

Le fait que nous avons observé chez l'*Amiurus nebulosus* est favorable à l'hypothèse de Sorensen.

Il y a néanmoins beaucoup de preuves contre cette interprétation :

La membrane externe devient plus mince de dehors en dedans et finit évidemment avant la colonne vertébrale, tandis qu'elle devrait passer immédiatement dans le tissu qui entoure la masse osseuse des vertèbres.

2) Le canal de l'aorte s'ouvre devant l'extrémité antérieure de la vessie natatoire, sa paroi ne pourrait pas alors prendre part à cette ossification — et débouche derrière la place où la vessie est fixée à l'épine dorsale.

3) Les éléments étrangers, s'ils avaient pris naissance de la membrane externe, devraient former une masse unique, tandis que les éléments étrangers „se divisent en autant de morceaux qu'il y a de vertèbres au-dessus deux“. Ou peut „séparer chacune des vertèbres libres avec son attirail mais il est impossible de séparer une vertèbre de ses éléments étrangers“ (Sorensen).

Tout cela démontre qu'il n'était pas juste de la part de Sorensen de rejeter complètement la supposition que „les canaux des „reins et de l'aorte puissent avoir leur place dans les corps des „vertèbres chez les Siluroïdes“.

D'autant plus qu'il y a des preuves que l'aorte et les cordons des reins peuvent traverser les corps des vertèbres. Chez les Cyprinoïdes, l'aorte et les cordons qui unissent la partie céphalique et la partie abdominale des reins passent sous la quatrième vertèbre entre les deux „Ossa suspensoria (Sorensen), qui sont formés de la partie basilaire des côtes de la quatrième vertèbre. Chez les Siluroïdes il se produit un plus grand accroissement des arcs inférieurs et des vertèbres qui s'unissant entourent les cordons des reins et l'aorte et forment trois canaux séparés l'un de l'autre, ce qui présente une évidente analogie avec les „Ossa suspensoria“ chez les Cyprinoïdes.

La supposition que les parois de l'aorte et de la plèvre participent à la formation de la masse osseuse est improbable; le premier fait serait plutôt un phénomène pathologique; quant au second, l'auteur même avoue qu'il n'est lui pas été possible d'en fournir la preuve.

Comme on le voit, il est très difficile de décider si la masse osseuse tire son origine des vertèbres mêmes ou de la membrane externe de la vessie. Les observations embryologiques pourront seules résoudre cette question. Il est probable que tous deux prennent part à la formation de ce très intéressant phénomène; les vertèbres en formant les canaux autour de l'aorte et des reins, la membrane externe de la vessie en formant la couche susdite sous la grande vertèbre, qui se soude avec la masse osseuse des vertèbres pour fournir des soutiens à la fixation de la vessie natale.

La vessie natale de l'*Amiurus nebulosus* est cordiforme et homologue à la section postérieure de la vessie chez les Cyprinoïdes. La cloison longitudinale sus-désignée la divise en deux loges: droite et gauche, les deux cloisons transverses, en parties supérieure et inférieure. Le péritoine se joint à la membrane externe de la vessie jusqu'aux côtes. La paroi de la vessie est formée de deux membranes fibreuses nettement distinctes. La membrane externe se compose de deux strates d'un tissu conjonctif, qui ont la même structure et dont les faisceaux de fibres se croisent à angle droit. Les fibres de la couche externe sont circulaires; celles de l'interne ont une direction longitudinale. Chacune de ces deux couches se

compose de faisceaux de fibres régulières, parallèles, ça et là courbées en zigzag, placées dans une substance homogène, qui possède des noyaux en forme de bâtonnets ou de biscuits. Ces noyaux ont les granulations chromatiques placées d'ordinaire sur les deux pôles, plus rarement sur un pôle et jamais au milieu.

La membrane interne constitue une couche tapissée à l'intérieur d'un épithélium plat; elle est composée d'un tissu conjonctif, dont les faisceaux de fibres sont irréguliers et forment un réseau épais aux mailles irrégulières. Dans la membrane interne on trouve de nombreuses fibres élastiques qui se divisent dichotomiquement et des vaisseaux sanguins, les plus nombreux dans les endroits où se trouvent les cloisons dans l'intérieur de la vessie natatoire.

Ce travail a été exécuté à l'Institut d'Anatomie comparée de l'Université à Léopol, sous la direction de M. le Pr. Joseph Nusbaum.

Fig. 1. Coupe transversale de l'*Amiurus nebulosus* dans la région des 2-me et 3-me vertèbres: a. aorte b. la cloison qui sépare les „Atria sinus imparis c. claustrum ch. chorda dorsalis, i. incus, m. malleus r. la moëlle épinière, sp. processus spinosus, at. Atria sinus imparis. Mikr. Zeiss. Oc. 2 S. a*o Cam. lucid.

Fig. 2. Les osselets auditifs de l'*Amiurus neb.*: c. claustrum, i. incus, m. malleus s. stapes. Mikr. Zeiss. Oc. 2, S. a*o, Cam lucid.

Fig. 3. Coupe transversale de l'*Amiurus nebulosus* dans la région des cloisons de la vessie natatoire. A. aorte, ch. chorda dorsalis, ex. la membrane externe de la vessie natatoire, in la membrane interne, r. la moëlle épinière. Mikr. Zeiss. Oc. 2, S. a*5, Cam. lucid.

Bibliographie.

- 1) Baudelot M. E. De la détermination des pièces osseuses qui se trouvent en rapport avec les premières vertèbres chez les Cyprins, les Loches et les Silures. Comptes. rendus de l'Acad. de Sc. Paris 1868 p. 330—334.
- 2) Bloch L. Schwimmblase, Knochenkapsel u. Weber'scher Apparat von *Nemachilus barbatus* Günther. J. Zeitsch. f. Naturw. 1900 p. 1—61.
- 3) Bridge and Haddon. Contributions to the Anatomy of Fisches Proc. of the Royal Soc. 1889—1892.
- 4) Götte A. Beiträge z. vergl. Morph. d. Skelettsystems der Wirbelthiere Schulze's Mikr. Anatomie 1879 p. 117—147.
- 5) Grassi B. Beiträge z. näheren Kenntniss d. Entwick. d. Wirbelsäule der Teleostier. Morph. Jahrb. Gegenb. 1883 p. 1—797.
- 6) Müller A. Beobachtungen z. vergl. Anatomie d. Wirbelsäule Joh. Müllers Arch. f. Anat u. Phys. 1853.
- 7) Nusbaum I. Über das anat. Verhältniss zwischen d. Gehörorgane u. d. Schwimmblase d. Cyprinoiden Zool Anz. 1881 p. 552 et Kosmos 1882.

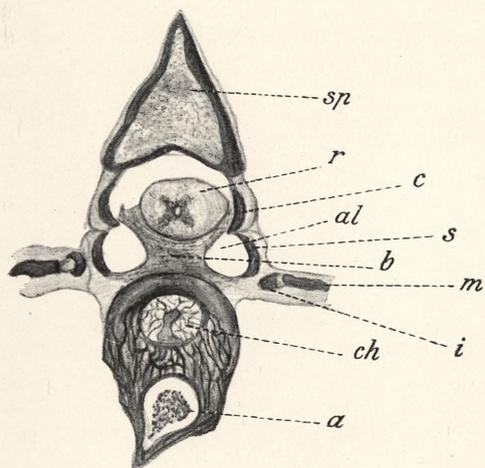


Fig. 1.

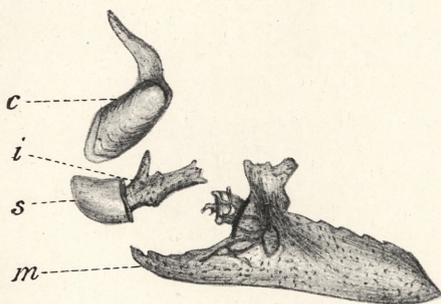


Fig. 2.

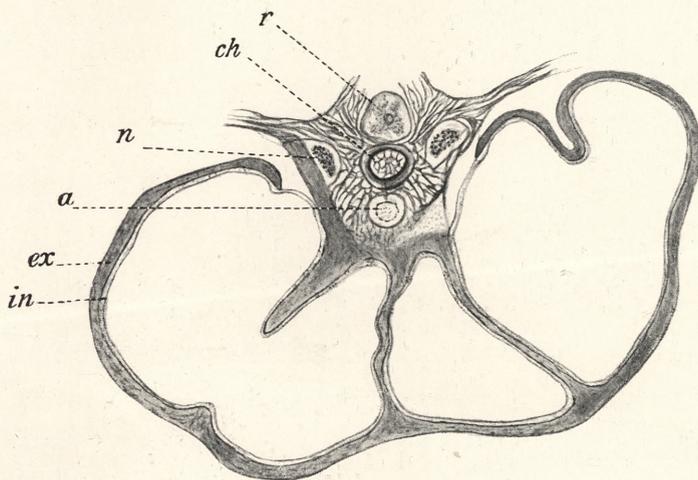


Fig. 3.

